

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Triennale in Matematica

RAPPRESENTAZIONI DI
KAZHDAN-LUSZTIG

Tesi di Laurea in Algebra

Relatore:
Chiar.mo Prof.
FABRIZIO CASELLI

Presentata da:
CLAUDIA STAGNI

Anno Accademico 2023-2024

*Da qualche parte, qualcosa di incredibile
attende di essere conosciuto.*

CARL SAGAN

Indice

Introduzione	iii
1 Gruppi di Coxeter	1
1.1 Definizione e esempi	1
1.2 Proprietà dei gruppi di Coxeter	3
1.3 Ordinamento di Bruhat	9
1.4 Sottogruppi parabolici	13
2 Algebre di Hecke e polinomi di Kazhdan-Lusztig	17
2.1 Definizione di algebra di Hecke	17
2.2 Costruzione degli R-polinomi e loro proprietà	19
2.3 Costruzione dei polinomi di Kazhdan-Lusztig e loro proprietà	21
3 Richiami sulle rappresentazioni di gruppo	27
3.1 Carattere di una rappresentazione di gruppo	28
3.2 Rappresentazioni indotte	33
4 Grafi e rappresentazioni di Kazhdan-Lusztig	35
4.1 Costruzione dei grafi di Kazhdan-Lusztig	35
4.2 Celle sinistre di Kazhdan-Lusztig	42
4.3 Rappresentazioni di Kazhdan-Lusztig	47
5 Rappresentazioni di Kazhdan-Lusztig del gruppo simmetrico	55
5.1 Corrispondenza di Robinson-Schensted	55
5.2 Equivalenza di Knuth	58
5.3 Un caso particolare: il gruppo simmetrico	66

Introduzione

La teoria delle rappresentazioni è una branca della matematica sviluppata principalmente nel ventesimo secolo. Prima, infatti, si consideravano i gruppi semplicemente come sottoinsiemi delle permutazioni di un insieme o come sottoinsiemi degli automorfismi di uno spazio vettoriale V , dotati delle proprietà di chiusura rispetto alla composizione e all'inverso. Solo successivamente, nel ventesimo secolo, venne formalizzata la definizione di gruppo astratto, grazie anche al contributo di vari matematici del secolo precedente, fra cui Evariste Galois (1811-1832), Arthur Cayley (1821-1895), Leopold Kronecker (1823-1891) e Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917). Ciò permise di distinguere in modo netto le proprietà del gruppo stesso dalle proprietà di una particolare realizzazione come sottogruppo di un gruppo di permutazioni o di $GL(V)$ e consentì lo sviluppo della teoria delle rappresentazioni.

Padre di questo ramo della matematica è indiscutibilmente il matematico tedesco Frobenius: stimolato da idee e congetture del suo collega Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916), in poco tempo sviluppò le basi di quella che oggi è conosciuta come la teoria dei caratteri, esposta in una serie di articoli pubblicati fra il 1896 e il 1897, oggi di fondamentale importanza per lo studio delle rappresentazioni di gruppi finiti.

Nel secolo scorso, la teoria delle rappresentazioni si è sviluppata in varie direzioni. Oltre ad essere uno strumento naturale per lo studio della struttura dei gruppi, in particolar modo dei gruppi finiti, questa si è dimostrata utile anche nello studio di altre branche della matematica, come ad esempio nell'analisi armonica e nella teoria dei gruppi e delle algebre di Lie, e ha innumerevoli applicazioni nell'ambito della fisica e della chimica, come ad

esempio nei campi della fisica quantistica, della cristallografia e anche della virologia.

Un importante contributo in tale ambito è dovuto al matematico rumeno George Lusztig (1946-). Fra i vari riconoscimenti ottenuti per il suo contributo alla matematica, nel 2008 ottenne il Premio Leroy P. Steele per i risultati di ricerca ottenuti durante la vita poiché “il lavoro di George Lusztig ha completamente rimodellato la teoria delle rappresentazione e nel processo ha cambiato anche gran parte della matematica”, come riportato nel discorso cerimoniale ¹. Infatti, insieme al suo collega David Kazhdan (1946-), studiando in modo approfondito i gruppi di Weyl, è riuscito a legare la combinatoria, la geometria e la teoria delle rappresentazioni, deducendo importantissime conclusioni circa le rappresentazioni irriducibili, riportando alcuni di questi risultanti anche in molti altri campi, come quello delle rappresentazioni di gruppi su campi p-adici.

Questa tesi è dedicata alla costruzione delle Rappresentazioni di Kazhdan-Lusztig delle Algebre di Hecke di un gruppo di Coxeter.

Nei primi capitoli verranno introdotti e spiegati alcuni concetti fondamentali per la costruzione di tali rappresentazioni. Nel Capitolo 1, infatti, sono definiti e studiati i gruppi di Coxeter, che prendono il nome dal matematico inglese Harold Coxeter (1907-2003), e le loro principali proprietà, come ad esempio l'ordinamento di Bruhat. Nel capitolo 2 verrà introdotta l'Algebra di Hecke di un gruppo di Coxeter e la costruzione dei Polinomi di Kazhdan-Lusztig, ossia una famiglia di polinomi a coefficienti interi indicizzati da elementi di un gruppo di Coxeter. Nel terzo capitolo, invece, verrà richiamata la teoria dei caratteri, utilizzata successivamente per dedurre risultati importanti circa le rappresentazioni di Kazhdan-Lusztig.

Nel Capitolo 4 verranno introdotti e costruiti i grafi e i grafi colorati di Kazhdan-Lusztig. Tali grafi svolgono un ruolo importante nella costruzione delle rappresentazioni di Kazhdan-Lusztig, permettendo di semplificare alcuni calcoli. Infine, l'ultimo capitolo è dedicato alla dimostrazione di un risultato significativo circa le rappresentazioni di Kazhdan-Lusztig: infatti, nel caso del gruppo simmetrico, si può dimostrare come le rappresentazio-

¹Il discorso completo in occasione della cerimonia di premiazione si può trovare nella seguente pagina web: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Extras/Lusztig_citation/

ni introdotte corrispondano proprio alle rappresentazioni irriducibili di tali gruppi, fatto non vero in generale. Questo importante esito sarà il frutto anche di altri risultati significativi riguardanti i gruppi simmetrici, come la corrispondenza di Robinson-Schensted e l'equivalenza di Knuth, introdotti e trattati all'inizio del Capitolo 5.

Capitolo 1

Gruppi di Coxeter

In questo capitolo, introdurremo i gruppi di Coxeter, alcuni esempi e dedurremo qualche proprietà elementare di questi gruppi. Inoltre presenteremo l'ordinamento di Bruhat, ovvero una struttura di ordinamento parziale definita su ogni gruppo di Coxeter.

1.1 Definizione e esempi

Definizione 1.1.1. Sia $S = \{s_i \mid i \in I\}$ un insieme e sia W il gruppo avente una presentazione del tipo

$$\langle S \mid (s_i s_j)^{m_{ij}} = e, \forall i, j \in I \rangle,$$

dove $m_{ii} = 1$, $m_{ij} = m_{ji} \geq 2$ (eventualmente ∞) per $i \neq j$ e e indica l'elemento neutro del gruppo. Allora (W, S) è detto **sistema di Coxeter**. L'insieme S è detto *insieme dei generatori di Coxeter* per il gruppo W e $|S|$ è il *rango* del sistema di Coxeter (W, S) .

Dalla definizione di gruppo di Coxeter si hanno le seguenti osservazioni:

- siccome $m_{ii} = 1$, si ha che $s_i^2 = e$ per ogni i , ovvero i generatori sono involuzioni;
- se $m_{ij} = 2$, allora la relazione $(s_i s_j)^{m_{ij}} = e$ diventa $s_i s_j = s_j s_i$. Inoltre si può dimostrare che se $s_i \neq s_j$ commutano, allora $m_{ij} = 2$. Dunque i generatori s_i e s_j commutano tra loro se e solo se $m_{ij} = 2$;

- se $m_{ij} = \infty$ allora non vi è alcuna relazione tra i generatori s_i e s_j ;
- la relazione $(ss')^{m(s,s')} = e$ può essere riscritta come

$$\underbrace{ss'ss's \dots}_{m(s,s')} = \underbrace{s'ss'ss' \dots}_{m(s,s')}$$

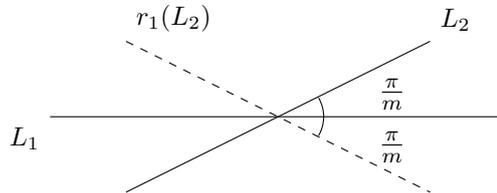
Teorema 1.1.2 (Proprietà Universale). Se G è un gruppo e $f : S \rightarrow G$ è una mappa tale che

$$(f(s_i)f(s_j))^{m_{ij}} = e$$

per ogni $s_i, s_j \in S$ tali che $m_{ij} \neq \infty$, allora esiste ed è unica l'estensione di f all'omomorfismo di gruppi $f : W \rightarrow G$.

Consideriamo ora alcuni esempi di gruppi di Coxeter.

Esempio 1.1.3. Siano L_1 e L_2 due rette incidenti nel piano euclideo. Assumiamo che l'angolo fra esse sia $\frac{\pi}{m}$, per qualche intero $m \geq 2$. Sia r_1 la riflessione ortogonale rispetto alla retta L_1 e analogamente r_2 . Allora r_1r_2 è una rotazione del piano di un angolo pari a $\frac{2\pi}{m}$ e dunque $(r_1r_2)^m = e$.



Sia $I_2(m)$ il gruppo generato da r_1 e r_2 . Questo gruppo consiste delle m rotazioni del piano di angoli $\frac{2k\pi}{m}$, con $0 \leq k < m$, e di queste rotazioni seguite dalla riflessione r_1 . Dunque $|I_2(m)| = 2m$. Il gruppo $I_2(m)$ è detto il **gruppo diedrale** di ordine $2m$.

Analogamente, il gruppo $I_2(\infty)$ è detto il **gruppo diedrale infinito**: è il gruppo generato dalle riflessioni ortogonali r_1 e r_2 rispetto a due rette che formano un angolo che non è un multiplo razionale di π .

Esempio 1.1.4. Il **gruppo simmetrico** \mathfrak{S}_n con insieme di generatori dato dalle trasposizioni semplici

$$s_i = (i, i + 1), \text{ per } 1 \leq i \leq n - 1$$

è un sistema di Coxeter. Infatti valgono le seguenti relazioni

$$\begin{cases} s_i^2 = e, \text{ per ogni } 1 \leq i \leq n-1; \\ s_i s_j = s_j s_i, \text{ se } |i-j| \geq 2; \\ s_i s_j s_i = s_j s_i s_j, \text{ se } |i-j| = 1 \end{cases}$$

e queste presentano W .

Osservazione 1.1.5. Quando ci si riferisce ad un gruppo astratto come ad un gruppo di Coxeter, bisogna prendere in considerazione non solo il gruppo W , ma la coppia (W, S) . In alcuni casi infatti un gruppo può avere più insiemi di generatori che soddisfano le relazioni come nella Definizione 1.1.1. Per esempio, consideriamo i sistemi di Coxeter $(I_2(6), \{r_1, r_2\})$, come nell'esempio (1.1.3), e $(I_2(3) \times \mathfrak{S}_2, \{(t_1, e_{\mathfrak{S}_2}), (t_2, e_{\mathfrak{S}_2}), (e_{I_2(3)}, s_1)\})$, dove t_1 e t_2 sono determinati come r_1 e r_2 nell'esempio (1.1.3). Come gruppi astratti $I_2(6) \cong I_2(3) \times \mathfrak{S}_2$, ma i due sistemi di Coxeter non sono isomorfi in quanto hanno ranghi diversi: il tipo di isomorfismo di (W, S) non è dunque determinato solo da W . Nei casi in cui però non c'è possibilità di fraintendimento, si è soliti omettere S .

1.2 Proprietà dei gruppi di Coxeter

In questa sezione inizieremo ad enunciare le prime proprietà caratterizzanti dei gruppi di Coxeter.

Sia (W, S) un sistema di Coxeter. Ogni elemento $w \in W$ può essere scritto come prodotto di generatori:

$$w = s_1 s_2 s_3 \dots s_k, \quad s_i \in S. \quad (1.1)$$

Se k è il più piccolo intero per cui w può essere scritto come in (1.1), allora k è detto la *lunghezza di w* e si scrive $l(w) = k$. In tal caso, la parola $s_1 s_2 s_3 \dots s_k$ è detta *parola ridotta* per w . Per convenzione, la lunghezza di e viene posta pari a 0 ed esso risulta essere l'unico elemento di lunghezza nulla. Osserviamo inoltre che $l(s) = 1$ per ogni $s \in S$.

Lemma 1.2.1. La mappa $\varepsilon : s \mapsto -1$ per ogni $s \in S$ si estende ad un omomorfismo di gruppo $\varepsilon : W \longrightarrow \{+1, -1\}$.

Dimostrazione. Questo lemma è una conseguenza immediata del Teorema 1.1.2. \square

Segue direttamente dal Lemma 1.2.1 che gli elementi di lunghezza pari formano un sottogruppo di W di indice 2, dunque un sottogruppo normale. Questo è chiamato il *sottogruppo alterno* (seguendo la terminologia del gruppo simmetrico) o il *sottogruppo delle rotazioni* (seguendo la terminologia dei gruppi di riflessioni finite, come il gruppo diedrale) di W .

Proposizione 1.2.2. Per ogni $u, w \in W$:

- (i) $\varepsilon(w) = (-1)^{l(w)}$,
- (ii) $l(uw) \equiv l(u) + l(w) \pmod{2}$,
- (iii) $l(uw) \leq l(u) + l(w)$,
- (iv) $l(sw) = l(w) \pm 1$, per ogni $s \in S$,
- (v) $l(w^{-1}) = l(w)$,
- (vi) $|l(u) - l(w)| \leq l(uw)$.

Dimostrazione. (i) e (ii) seguono direttamente dal Lemma (1.2.1).

Il punto (iii) è banale: prendendo due espressioni ridotte per u e w e concatenandole otteniamo una parola (non necessariamente ridotta) per uw . Da questa disuguaglianza segue (iv): infatti si ha che $l(sw) \leq l(w) + l(s) = l(w) + 1$ e $l(w) = l(ssw) \leq l(s) + l(sw) = 1 + l(sw)$, da cui segue $l(w) - 1 \leq l(sw) \leq l(w) + 1$. Inoltre, dal Lemma 1.2.1, segue che $\varepsilon(sw) = \varepsilon(s)\varepsilon(w) = -\varepsilon(w)$. Dal punto (i), si ha dunque che $l(sw) \neq l(w)$. Dunque l'unica possibilità è che $l(sw) = l(w) \pm 1$.

Per (v), supponiamo $l(w^{-1}) < l(w)$ e assumiamo $w^{-1} = s_1 s_2 \dots s_k$. Allora possiamo scrivere $w = s_k \dots s_2 s_1$, ma avevamo assunto che tutte le parole ridotte di w avessero più di k generatori al loro interno, dunque abbiamo una contraddizione. Scambiando w con w^{-1} otteniamo (v).

La disuguaglianza del punto (vi) segue dal punto (iv). \square

Definiamo

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \{wsw^{-1} : s \in S, w \in W\}. \quad (1.2)$$

Gli elementi di T sono i coniugati dei generatori di Coxeter e sono chiamati *riflessioni*. La definizione mostra che $S \subseteq T$ e che $t^2 = e$ per ogni $t \in T$. Gli elementi di S vengono talvolta chiamati *riflessioni semplici*.

Arriviamo adesso ad una prima proprietà fondamentale dei gruppi di Coxeter.

Teorema 1.2.3 (Proprietà di Scambio). Supponiamo $w = s_1 s_2 \dots s_k$, $s_i \in S$ e sia $s \in S$. Se $l(sw) \leq l(w)$, allora $sw = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_k$ per qualche $i \in \{1, \dots, k\}$. Inoltre questo i è unico se $s_1 s_2 \dots s_k$ è un'espressione ridotta per w .

Dimostrazione. La dimostrazione di questa proprietà si può trovare in [BB05, Teorema 1.4.3]. \square

Esiste anche un'altra versione della Proprietà di Scambio, detta Proprietà di Scambio Forte, dove l'ipotesi $s \in S$ viene sostituita con l'ipotesi meno restrittiva $s \in T$.

Teorema 1.2.4 (Proprietà di Scambio Forte). Supponiamo $w = s_1 s_2 \dots s_k$, $s_i \in S$ e sia $t \in T$. Se $l(tw) < l(w)$, allora $tw = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_k$ per qualche $i \in \{1, \dots, k\}$.

Dimostrazione. La dimostrazione di questa dimostrazione si può trovare in [BB05, Teorema 1.4.3]. \square

Definizione 1.2.5. Sia (W, S) un sistema di Coxeter e sia $w \in W$. Allora

$$D_L(w) \stackrel{\text{def}}{=} \{s \in S \text{ tale che } l(sw) < l(w)\}$$

$$D_R(w) \stackrel{\text{def}}{=} \{s \in S \text{ tale che } l(ws) < l(w)\},$$

sono detti rispettivamente **insieme delle discese sinistre** e **insieme delle discese destre**.

Direttamente dalla definizione segue, per simmetria, $D_R(w) = D_L(w^{-1})$.

Corollario 1.2.6. Per ogni $s \in S$ e per ogni $w \in W$, valgono:

- (i) $s \in D_L(w)$ se e solo se qualche espressione ridotta per w inizia con la lettera s .

- (ii) $s \in D_R(w)$ se e solo se qualche espressione ridotta per w finisce con la lettera s .

Dimostrazione. Se qualche espressione ridotta per w inizia con la lettera s , segue direttamente che $s \in D_L(w)$. Viceversa, se $s \in D_L(w)$, siccome $l(sw) = l(w) - 1$, concatenando s con un'espressione ridotta di sw si ottiene un'espressione ridotta per w che inizia con la lettera s . Ragionando analogamente, si dimostra anche (ii). \square

Un'altra proprietà importante dei gruppi di Coxeter è la proprietà di Cancellazione che segue direttamente dalla Proprietà di Scambio.

Teorema 1.2.7 (Proprietà di Cancellazione). Se $w = s_1 s_2 \dots s_k$ e $l(w) < k$, allora $w = s_1 \dots \hat{s}_i \dots \hat{s}_j \dots s_k$, per qualche $1 \leq i < j \leq k$.

Dimostrazione. Sia i massimale tale che $s_i s_{i+1} \dots s_k$ è una parola non ridotta. Allora $l(s_i s_{i+1} \dots s_k) \leq k - i = l(s_{i+1} \dots s_k)$ e per la Proprietà di Scambio (Teorema 1.2.3) si ha che $s_i s_{i+1} \dots s_k = s_{i+1} \dots \hat{s}_j \dots s_k$, per qualche $i < j \leq k$. Moltiplicando entrambi i membri per $s_1 \dots s_{i-1}$, segue la tesi. \square

Corollario 1.2.8. (i) Qualsiasi espressione $w = s_1 \dots s_k$ contiene un'espressione ridotta per w come sottoparola, ovvero come parola della forma $s_{i_1} \dots s_{i_q}$, con $1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq k$, ottenibile eliminando un numero pari di lettere.

- (ii) Supponiamo che $w = s_1 \dots s_k = s'_1 \dots s'_k$ siano due espressioni ridotte per w . Allora l'insieme delle lettere che appaiono nella parola $s_1 \dots s_k$ è uguale all'insieme delle lettere che compaiono nella parola $s'_1 \dots s'_k$.
- (iii) S è un insieme minimale di generatori per W , ovvero nessun generatore di Coxeter può essere espresso in termini di altri generatori.

Dimostrazione. Il punto (i) è una diretta conseguenza della Proprietà di Cancellazione (Teorema 1.2.7).

Dimostriamo (ii). Supponiamo $s_j \notin I \stackrel{\text{def}}{=} \{s'_1, \dots, s'_k\}$, con j minimale. Definiamo $t = s_1 s_2 \dots s_j \dots s_2 s_1$. Si ha che $tw = s_1 \dots \hat{s}_j \dots s_k$, da cui $l(tw) \leq$

$k - 1 < l(w)$. Inoltre, $t = tww^{-1} = s_1 s_2 \dots s_j \dots s_2 s_1$. Ragionando analogamente con l'altra espressione ridotta di w , per la Proprietà di Scambio Forte (Teorema 1.2.4), si ottiene $t = s'_1 s'_2 \dots s'_i \dots s'_2 s'_1$, per qualche $i \in \{1, \dots, k\}$. Dunque, s_j può essere scritto come $s_j = s_{j-1} \dots s_1 s'_1 s'_2 \dots s'_i \dots s'_2 s'_1 s_1 \dots s_{j-1}$. Siccome tutte le lettere della parola $s_{j-1} \dots s_1 s'_1 s'_2 \dots s'_i \dots s'_2 s'_1 s_1 \dots s_{j-1}$ stanno in I , prendendo una sottoparola si ottiene $s_j \in I$, contraddicendo l'ipotesi.

Infine, (iii) segue da (ii). \square

Sia S un insieme di generatori di ordine 2 per qualsiasi gruppo W . Diremo che la coppia (W, S) gode della **Proprietà di Scambio** se, dati $w = s_1 \dots s_k$ una parola ridotta per un elemento $w \in W$ e $s \in S$ tali che $l(sw) \leq l(w)$, allora $sw = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_k$ per qualche $i \in \{1, \dots, k\}$. Analogamente diremo che (W, S) gode della Proprietà di Cancellazione se l'enunciato del Teorema 1.2.7 è verificato. Con il seguente teorema, dimostreremo come le Proprietà di Scambio e di Cancellazione sono caratterizzanti dei sistemi di Coxeter.

Teorema 1.2.9. Sia W un gruppo e sia S un suo insieme di generatori di ordine 2. Allora sono equivalenti:

- (W, S) è un sistema di Coxeter;
- (W, S) gode della Proprietà di Scambio;
- (W, S) gode della Proprietà di Cancellazione.

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema si può trovare in [BB05, Teorema 1.5.1] \square

Il resto di questa sezione tratta brevemente il caso del gruppo simmetrico, analizzandolo dal punto di vista della combinatoria dei gruppi di Coxeter. Come insieme di generatori per \mathfrak{S}_n , consideriamo l'insieme

$$S = \{s_1, \dots, s_{n-1}\}, \text{ dove } s_i \stackrel{\text{def}}{=} (i, i+1), \text{ per } i = 1, \dots, n-1,$$

ovvero l'insieme delle trasposizioni semplici.

Osservazione 1.2.10. La moltiplicazione a destra per la trasposizione s_i su un elemento $x \in \mathfrak{S}_n$ ha come effetto lo scambio di $x(i)$ e di $x(i+1)$ nella notazione completa di x . Invece, la moltiplicazione a sinistra ha come effetto lo scambio dei valori i e $i+1$ nella notazione completa. Per esempio:

$$x = 31524 \quad xs_3 = 31254 \quad s_3x = 41523.$$

Ciò inoltre rende chiaro perché S sia un insieme di generatori per \mathfrak{S}_n .

Definizione 1.2.11. Sia $x \in \mathfrak{S}_n$. Definiamo il **numero di inversioni** di x come $inv(x) \stackrel{\text{def}}{=} |\{(i, j) : i < j, x(i) > x(j)\}|$.

Si noti che

$$inv(xs_i) = \begin{cases} inv(x) + 1, & \text{se } x(i) < x(i+1) \\ inv(x) - 1, & \text{se } x(i) > x(i+1). \end{cases} \quad (1.3)$$

Denotiamo con l_A la funzione lunghezza su \mathfrak{S}_n rispetto all'insieme S .

Proposizione 1.2.12. Sia $x \in \mathfrak{S}_n$. Allora $l_A(x) = inv(x)$.

Dimostrazione. La dimostrazione di questa proposizione si può trovare in [BB05, Proposizione 1.5.2]. \square

Come conseguenza, otteniamo la seguente descrizione combinatorica dell'insieme delle discese destre di un elemento di \mathfrak{S}_n .

Proposizione 1.2.13. Sia $x \in \mathfrak{S}_n$. Allora

$$D_R(x) = \{s_i \in S : x(i) > x(i+1)\}.$$

Dimostrazione. Dalla definizione e dalla Proposizione 1.2.12, si ha la seguente caratterizzazione dell'insieme delle discese destre:

$$D_R(x) = \{s \in S : inv(xs) < inv(x)\}.$$

Dunque la tesi segue da (1.3). \square

Esempio 1.2.14. Supponiamo di dover calcolare $D_R(x)$, con $x = 356271984 \in \mathfrak{S}_9$. Utilizzando la proposizione precedente, si vede immediatamente che $D_R(x) = \{s_3, s_5, s_7, s_8\}$.

1.3 Ordinamento di Bruhat

In questa sezione, definiremo l'ordinamento di Bruhat e alcune delle proprietà combinatoriche principali di tale ordinamento.

Per il resto di questa sezione, consideriamo (W, S) un sistema di Coxeter.

Definizione 1.3.1. Siano $u, w \in W$. Allora

- (i) $u \xrightarrow{t} w$ significa che $u^{-1}w = t \in T$ e $l(u) < l(w)$;
- (ii) $u \rightarrow w$ significa che $u \xrightarrow{t} w$ per qualche $t \in T$;
- (iii) $u \leq w$ significa che esistono $u_i \in W$ tali che

$$u = u_0 \rightarrow u_1 \rightarrow \cdots \rightarrow u_{k-1} \rightarrow u_k = w.$$

Il **grafo di Bruhat** è il grafo orientato i cui nodi sono gli elementi di W e i cui lati sono dati da (ii). L'**ordinamento di Bruhat** è la relazione d'ordine parziale sull'insieme W definita da (iii).

Le seguenti osservazioni sono immediate:

- $u < w$ implica $l(u) < l(w)$;
- $w < wt$ se e solo se $l(w) < l(wt)$, per ogni $w \in W, t \in T$;
- l'elemento neutro e soddisfa $e \leq w$, per ogni $w \in W$

Enunciamo ora alcune importanti proprietà dell'ordinamento di Bruhat.

Teorema 1.3.2 (Proprietà della Sottoparola). Siano $u, w \in W$. Sia $w = s_1 \dots s_k$ un'espressione ridotta per $w \in W$. Allora $u \leq w$ se e solo se esiste un'espressione ridotta $u = s_{i_1} \dots s_{i_q}$ con $1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq k$.

Dimostrazione. La dimostrazione di questa proprietà si può trovare in [BB05, Teorema 2.2.2] □

Segue dalla Proprietà della Sottoparola il fatto che gli intervalli di Bruhat $[u, w]$ di un gruppo W sono finiti, anche se non lo è l'insieme dei generatori: infatti, le possibili sottoparole di un'espressione ridotta di w sono $2^{l(w)}$ ed esiste una mappa iniettiva dagli intervalli della forma $[u, w]$ all'insieme di tali sottoparole.

Proposizione 1.3.3. La mappa $w \mapsto w^{-1}$ è un'automorfismo dell'ordine di Bruhat, ossia $u \leq w$ se e solo se $u^{-1} \leq w^{-1}$.

Dimostrazione. La relazione di “essere sottoparola di” non è affetta dall'operazione di inversione della parola. \square

Teorema 1.3.4 (Proprietà della Catena). Siano $u, w \in W$, con $u < w$. Allora esiste una catena $u = x_0 < x_1 < \dots < x_k = w$ tale che $l(x_i) = l(u) + i$, per ogni $1 \leq i \leq k$.

Dimostrazione. La dimostrazione di questa proprietà si può trovare in [BB05, Teorema 2.2.6]. \square

Useremo in seguito il simbolo “ $u \triangleleft w$ ” per indicare che $u < w$ e $l(w) = l(u) + 1$.

Teorema 1.3.5 (Proprietà di Sollevamento). Siano $s \in S$ e $x, w \in W$ tali che soddisfino le relazioni $sw < w$ e $x < w$.

- (a) Se $sx < x$, allora $sx < sw$.
- (b) Se $sx > x$, allora $sx \leq w$ e $x \leq sw$.

In ogni caso si verifica $sx \leq w$.

Dimostrazione. La dimostrazione di questa proprietà si può trovare in [Hum90, Lemma 7.4]. \square

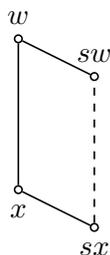


Figura 1.1: Caso (a) Proprietà di Sollevamento, Teorema 1.3.5

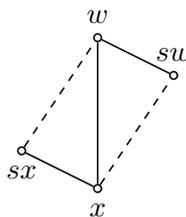


Figura 1.2: Caso (b) Proprietà di Sollevamento, Teorema 1.3.5

La Proprietà di Sollevamento ha varie conseguenze sulla configurazione locale dell'ordinamento di Bruhat, in particolar modo permette di mostrare la seguente proposizione.

Proposizione 1.3.6. L'ordinamento di Bruhat è un poset diretto, ossia è un insieme parzialmente ordinato che soddisfa la relazione

$$\forall a, b \in W \exists c \in W \text{ tale che } a \leq c \text{ e } b \leq c.$$

Dimostrazione. La dimostrazione di questa proposizione si può trovare in [BB05, Proposizione 2.2.9]. \square

Nel caso particolare in cui W sia un gruppo finito, la proposizione precedente afferma che W ha un **elemento massimale** che indicheremo con w_0 .

Proposizione 1.3.7. Sia W un gruppo di Coxeter finito. Allora esiste un elemento $w_0 \in W$ tale che $w \leq w_0$ per ogni $w \in W$. Inoltre, w_0 è l'unico elemento di W che soddisfa la relazione $D_L(w_0) = S$.

Dimostrazione. La dimostrazione di questa proposizione si può trovare in [BB05, Proposizione 2.3.1]. \square

Proposizione 1.3.8. L'elemento massimale w_0 di un gruppo di Coxeter finito ha le seguenti proprietà:

- (i) $w_0^2 = e$;
- (ii) $l(w_0w) = l(w_0) - l(w)$ e $l(w_0w) = l(w_0) - l(w)$, per ogni $w \in W$;
- (iii) $D_L(w_0w) = S \setminus D_L(w)$, per ogni $w \in W$;
- (iv) $D_L(w_0w) = w_0(S \setminus D_L(w))w_0 = S \setminus w_0D_L(w)w_0$, per ogni $w \in W$;
- (v) $D_L(w_0ww_0) = w_0D_L(w)w_0$, per ogni $w \in W$.

Dimostrazione. Siccome $l(w_0^{-1}) = l(w_0)$ e l'elemento massimale è unico, segue che $w_0^{-1} = w_0$ e dunque si ha (i).

Per provare (ii) dimostriamo entrambe le disuguaglianze. Si ha che vale $l(w_0w) \geq l(w_0) - l(w)$ per il punto (iii) della Proposizione 1.2.2.

Proviamo l'altra disuguaglianza per induzione su $l(w_0) - l(w)$. Per $w = w_0$ è triviale. Sia dunque $w < w_0$ e sia $s \in S$ tale che $sw > w$: tale elemento esiste per Proposizione 1.3.7. Allora, utilizzando l'ipotesi induttiva, si ha

$$l(ww_0) \leq l(sww_0) + 1 \leq l(w_0) - l(sw) + 1 = l(w_0) - l(w).$$

Segue inoltre che $l(w_0ww_0) = l(w)$.

Un'altra conseguenza di (ii) è

$$\forall s \in S \text{ e } \forall w \in W, sw < w \Leftrightarrow sww_0 > ww_0, \quad (1.4)$$

da cui segue direttamente (iii).

La relazione (1.4) può essere riscritta come

$$sw_0w < w_0w \Leftrightarrow sw_0ww_0 > w_0ww_0 \Leftrightarrow s \in S \setminus D_L(w_0ww_0).$$

Proviamo $D_L(w_0ww_0) = w_0D_L(w)w_0$. Sia dunque $s \in D_L(w_0ww_0)$, allora

$$l(w_0sw_0w) = l(w_0) - l(sw_0w) = l(sw_0ww_0) < l(w_0ww_0) = l(w),$$

ossia $w_0sw_0 \in D_L(w)$. Sia ora $s \in D_L(w)$, dobbiamo mostrare che $w_0sw_0 = w_0sw_0w_0ww_0 < w_0ww_0$. Infatti vale che

$$l(w_0sw_0) = l(w_0) - l(sw_0) = l(w_0) - l(ww_0) - 1 = l(w_0ww_0) - 1,$$

ossia $w_0sw_0 \in D_L(w_0ww_0)$. Siccome l'insieme S può essere caratterizzato come l'insieme degli elementi di lunghezza 1, vale $w_0Sw_0 = S$. Dunque

$$S \setminus D_L(w_0ww_0) = w_0Sw_0 \setminus w_0D_L(w)w_0 = w_0(S \setminus D_L(w))w_0,$$

concludendo così la prova di (iv).

Infine, utilizzando quanto già provato in (iii) e (iv), si ha

$$D_L(w_0ww_0) = w_0(S \setminus D_L(ww_0))w_0 = w_0D_L(w)w_0.$$

□

Proposizione 1.3.9. Per l'ordinamento di Bruhat su un gruppo di Coxeter finito valgono:

- (i) $w \mapsto ww_0$ e $w \mapsto w_0w$ sono due antiautomorfismi;
- (ii) $w \mapsto w_0ww_0$ è un automorfismo.

Dimostrazione. La dimostrazione di questa proposizione segue dal punto (ii) della Proposizione 1.3.8. □

1.4 Sottogruppi parabolici

Sia (W, S) un sistema di Coxeter e sia $J \subseteq S$. Indichiamo con W_J il sottogruppo generato dall'insieme J . I sottogruppi di (W, S) di questa forma vengono chiamati **sottogruppi parabolici**. Indicheremo con $l_J(\cdot)$ la funzione lunghezza su W_J rispetto alle involuzioni di J .

Proposizione 1.4.1. Dati (W, S) un sistema di Coxeter e $J \subseteq S$, si ha che (W_J, J) è a sua volta un sistema di Coxeter e $l_J(w) = l(w)$, per ogni $w \in W_J$.

Dimostrazione. Sia $w \in W_J$; per definizione si ha che $w = s_1 \dots s_q$ per qualche $s_i \in J$. Per la Proprietà di Cancellazione (Teorema 1.2.7), possiamo assumere che tale parola sia una parola ridotta per w in W e dunque anche in W_J . Questo prova $l_J(w) = l(w)$ e come conseguenza si ha che la Proprietà di Scambio vale in (W_J, J) come caso speciale della Proprietà di Scambio di (W, S) . Segue dunque dal Teorema 1.2.9 che (W_J, J) è un sistema di Coxeter. \square

Siccome (W_J, J) è un sistema di Coxeter, il gruppo W_J possiede un ordinamento di Bruhat. Tale ordinamento è semplicemente la restrizione su W_J dell'ordine di Bruhat di W . Dunque, se W_J è finito, allora per la Proposizione 1.3.7 esiste un elemento massimale che indicheremo $w_0(J)$.

Proposizione 1.4.2. Sia $W_J a$ un laterale di W_J in W . Allora

- (i) questo laterale ha un unico elemento di lunghezza minimale w ;
- (ii) se $y \in W_J$, allora $l(yw) = l(y) + l(w)$;
- (iii) w è caratterizzato dalla proprietà che $l(sw) > l(w)$, per ogni $s \in J$.

Dimostrazione. Sia w un elemento di lunghezza minimale in $W_J a$ e sia $w = s_1 s_2 \dots s_q$ un'espressione ridotta per tale elemento. Sia $y \in W_J$ e sia $y = s'_1 \dots s'_p$ un'espressione ridotta. Dunque $yw = s'_1 \dots s'_p s_1 s_2 \dots s_q$ e, per quanto visto nel Corollario 1.2.8, un'espressione ridotta per yw si può ottenere eliminando alcuni di questi generatori. Inoltre nessuno degli ultimi q generatori può essere fra quelli eliminati, altrimenti si potrebbe trovare un elemento

di lunghezza strettamente inferiore di quella di w in W_Ja . Di conseguenza, esistono $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq p$ tali che $yw = s'_{i_1} s'_{i_2} \dots s'_{i_r} s_1 s_2 \dots s_q$ sia un'espressione ridotta. Segue che $y = s'_1 \dots s'_p = s'_{i_1} s'_{i_2} \dots s'_{i_r}$. Siccome $p = l(y)$, si ha che $r = p$ e $l(yw) = r + q = l(y) + l(w)$, ottenendo così il punto (ii).

Supponiamo ora che w' sia un altro elemento di lunghezza minimale in W_Ja : esiste dunque $y \in W_J$ tale che $w' = yw$. Per quanto appena dimostrato, si avrà $l(w) = l(w') = l(w) + l(y)$ e dunque $y = e$, ossia $w' = w$, provando così anche il punto (i). Segue in modo banale che l'elemento w possiede la proprietà descritta nel punto (iii).

Rimane solo da dimostrare che un elemento con le caratteristiche presentate nel punto (iii) è l'elemento minimale. Sia dunque $w' \in W_Ja$ tale che $l(sw') > l(w')$, per ogni $s \in J$. Si avrà che $w' = yw$, per qualche $y \in W_J$. Se $y \neq 1$, allora per qualche $s \in J$ si ha $l(y) = l(sy) + 1$. Per il punto (ii) si ha $l(w') = l(y) + l(w)$ e $l(sw') = l(sy) + l(w)$. Dunque $l(w') - l(sw') = l(y) - l(sy) = 1$, ossia una contraddizione. Dunque l'unica possibilità è che $y = e$ e $w' = w$, ottenendo dunque il punto (iii). \square

Proposizione 1.4.3. Sia W_Ja un laterale di W_J in W . Se W_J è finito, allora

- (i) questo laterale ha un unico elemento di lunghezza massimale \hat{w} ;
- (ii) se $y \in W_J$, allora $l(y\hat{w}) = l(\hat{w}) - l(y)$;
- (iii) \hat{w} è caratterizzato dalla proprietà che $l(s\hat{w}) < l(\hat{w})$, per ogni $s \in J$.

Dimostrazione. Supponiamo \hat{w} sia un elemento di lunghezza massimale in W_Ja . Vogliamo mostrare che per ogni $y \in W_J$ si ha $l(y\hat{w}) = l(\hat{w}) - l(y)$ per induzione su $l(y)$. Se $l(y) = 0$, il risultato segue banalmente. Supponiamo adesso che $l(y) = p + 1 \geq 1$. Sia $y = s_1 \dots s_p s_{p+1}$ un'espressione ridotta per p . Per l'ipotesi induttiva, $l(\hat{w}) = l(s_1 \dots s_p \hat{w}) + p$ e dunque possiamo trovare un'espressione ridotta per \hat{w} della forma $s_p \dots s_2 s_1 s'_1 \dots s'_q$. Siccome $y \in W_J$, si ha che $s_{p+1} \in J$. Per la supposizione che \hat{w} abbia lunghezza massimale, per la Proposizione 1.2.2, si ha $l(s_{p+1}\hat{w}) = l(\hat{w}) - 1$. Per la Proprietà di Scambio (Teorema 1.2.3), si verifica uno dei seguenti due casi:

- 1) $s_{p+1}s_p \dots s_{j+1} = s_p \dots s_{j+1}s_j$, per qualche $j \in \{1, \dots, p\}$;
- 2) $s_{p+1}s_p \dots s_{j+1} = s_p \dots s_1 s'_1 s'_2 \dots s'_{i+1} s_i$, per qualche $i \in \{1, \dots, q\}$.

Nel primo caso, segue che $y = s_1 \dots s_p s_{p+1} = s_1 \dots s_{j-1} s_{j+1} \dots s_p$, contraddicendo l'ipotesi $l(y) = p + 1$. Dunque si deve verificare il secondo caso. Di conseguenza si ha:

$$y\hat{w} = s'_1 s'_2 \dots s'_{i-1} s'_{i+1} \dots s'_q \text{ e } l(y\hat{w}) \leq q - 1 = l(\hat{w}) - p - 1 = l(\hat{w}) - l(p).$$

Dunque $l(\hat{w}) \geq l(y\hat{w}) + l(y)$. L'altra disuguaglianza è triviale. In questo modo si è provato il punto (ii).

Se W_J è finito, allora anche $W_J a$ è finito e chiaramente ha un elemento di lunghezza massimale. Inoltre l'unicità di tale elemento massimale è una diretta conseguenza di (ii).

La dimostrazione del punto (iii) è analogo alla dimostrazione del punto (iii) della Proposizione 1.4.2. \square

Le precedenti due proposizioni mettono in evidenza come alcune caratteristiche dell'ordinamento di Bruhat di un sottogruppo parabolico vengano ereditate anche dai laterali di tale sottogruppo, come si è visto per l'esistenza e l'unicità dell'elemento minimale e, nel caso finito, anche dell'elemento massimale. Infatti si può dimostrare che la struttura definita dall'ordinamento di Bruhat sui singoli laterali è la stessa del sottogruppo parabolico W_J e che gli elementi di tale sottogruppo agiscono su tutti i laterali nello stesso modo.

Definizione 1.4.4. Siano $J \subseteq I \subseteq S$. Definiamo

$$\mathcal{D}_J^I \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in W : J \subseteq D_R(w) \subseteq I\}.$$

Osservazione 1.4.5. Dal punto (iii) della Proposizione 1.4.3 segue che, se $I = S$, allora \mathcal{D}_J^S è l'insieme dei rappresentanti di lunghezza massima dei laterali di W_J .

Capitolo 2

Algebre di Hecke e polinomi di Kazhdan-Lusztig

In questo capitolo definiamo le Algebre di Hecke. Dalle loro proprietà seguirà la costruzione di due classi di polinomi fondamentali, gli R -polinomi e i polinomi di Kazhdan-Lusztig.

2.1 Definizione di algebra di Hecke

In tutto questo capitolo, (W, S) è un sistema di Coxeter arbitrario. Procediamo con la costruzione generale di un'algebra associativa su un anello commutativo con unità, A . Questa algebra avrà una A -base parametrizzata dagli elementi di W con una legge di moltiplicazione che riflette l'operazione in W .

L'algebra dipenderà solo da alcuni parametri $a_s, b_s \in A$, con $s \in S$, soggetti unicamente alla richiesta $a_s = a_t, b_s = b_t$ se s e t sono coniugati in W .

Il punto di partenza della costruzione è dunque un A -modulo libero \mathcal{E} , con elementi della base denotati con $T_w, w \in W$.

Teorema 2.1.1. Dati a_s, b_s come sopra, esiste un'unica struttura di A -algebra associativa su \mathcal{E} , con T_e che funge da identità, tale che valgano le seguenti condizioni per ogni $s \in S$ e per ogni $w \in W$:

$$\begin{cases} T_s T_w = T_{sw}, & \text{se } l(sw) > l(w) \\ T_s T_w = a_s T_w + b_s T_{sw}, & \text{se } l(sw) < l(w). \end{cases} \quad (2.1)$$

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema si può trovare in [Hum90, Teorema 7.1, sezioni 7.1-7.3]. \square

L'algebra descritta dal teorema e denotata con $\mathcal{E}_A(a_s, b_s)$ è chiamata **algebra generica**.

Esempio 2.1.2. L'algebra gruppo di W , denotata con $A[W]$, è un esempio di algebra generica con $a_s = 0, b_s = 1, \forall s \in S$.

Osservazione 2.1.3. Sono equivalenti a (2.1) le relazioni:

$$\begin{cases} T_s T_w = T_{sw}, & \text{se } l(sw) > l(w) \\ T_s^2 = a_s T_s + b_s T_e. \end{cases} \quad (2.2)$$

Infatti (2.1) implica (2.2) banalmente, mentre il viceversa sussiste poiché se s e w sono tali che $l(sw) < l(w)$, allora $l(s(sw)) = l(w) > l(sw)$ e dunque $T_s T_{sw} = T_w$. Quindi

$$T_s T_w = T_s^2 T_{sw} = (a_s T_s + b_s T_e) T_w = a_s T_s T_{sw} + b_s T_{sw} = a_s T_w + b_s T_{sw}.$$

Consideriamo ora $A = \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$, ovvero l'anello dei **polinomi di Laurent** e $a_s = q - 1$ e $b_s = q, \forall s \in S$. Allora

$$\mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E}_{\mathbb{Z}[q, q^{-1}]}(q - 1, q)$$

è l'**algebra di Hecke** di W .

Dunque (2.2) diventa:

$$\begin{cases} T_s T_w = T_{sw}, & \text{se } l(sw) > l(w) \\ T_s^2 = (q - 1)T_s + qT_e. \end{cases} \quad (2.3)$$

Osservazione 2.1.4. Esistono gli inversi della base $\{T_w\}_{w \in W}$ per via dell'esistenza di q^{-1} ; infatti, $\forall s \in S$,

$$T_s^{-1} = q^{-1}T_s - (1 - q^{-1})T_e, \quad (2.4)$$

dunque se $w = s_1 \dots s_k$ è un'espressione ridotta, allora

$$T_w^{-1} = (T_{s_1 \dots s_k})^{-1} = (T_{s_1} \dots T_{s_k})^{-1} = T_{s_k}^{-1} \dots T_{s_1}^{-1}.$$

2.2 Costruzione degli R-polinomi e loro proprietà

Per alleggerire la notazione, d'ora in poi indicheremo $\varepsilon_w \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{l(w)}$.

Proposizione 2.2.1. Si ha

$$(T_{w^{-1}})^{-1} = \varepsilon_w q^{-l(w)} \sum_{x \leq w} \varepsilon_x R_{x,w}(q) T_x,$$

dove $R_{x,w}(q) \in \mathbb{Z}[q]$ è un polinomio di grado $l(w) - l(x)$ in q tale che $R_{w,w}(q) = 1$.

Dimostrazione. La dimostrazione di questa proposizione si può trovare in [Hum90, Proposizione 7.4]. \square

Per alleggerire la notazione, talvolta scriveremo $R_{x,w}$ per indicare $R_{x,w}(q)$, qualora non sia importante specificare la variabile in cui viene considerato il polinomio.

Osservazione 2.2.2. Dalla dimostrazione della formula esplicita per $T_{w^{-1}}^{-1}$ si ricava un algoritmo per la costruzione della famiglia degli R -polinomi. Si può procedere infatti per induzione su $l(w)$, sapendo che

$$R_{w,w}(q) = 1, \forall w \in W, \quad R_{x,w}(q) = 0 \Leftrightarrow x \not\leq w.$$

Per il passaggio induttivo, dobbiamo calcolare $R_{x,w}$ assumendo di sapere $R_{y,z}, \forall y, z \in W$ tali che $l(z) < l(w)$. Dato $s \in D_L(w)$, dobbiamo distinguere due casi:

- (A) se $x < w$ e $s \in D_L(x)$, allora $R_{x,w} = R_{sx,sw}$, che conosciamo per ipotesi induttiva siccome $l(sw) < l(w)$;
- (B) se $x < w$ e $s \notin D_L(x)$, allora $R_{x,w} = (q-1)R_{x,sw} + qR_{sx,sw}$.

Esistono inoltre le versioni analoghe destre.

Dunque, dati $x, w \in W$, con $x \leq w$ e $s \in D_L(w)$, si ha:

$$R_{x,w}(q) = \begin{cases} R_{sx,sw}(q), & \text{se } s \in D_L(x) \\ (q-1)R_{x,sw}(q) + qR_{sx,sw}(q), & \text{se } s \notin D_L(x). \end{cases} \quad (2.5)$$

Nel caso in cui W sia un gruppo finito, gli R -polinomi presentano ulteriori simmetrie.

Proposizione 2.2.3. Sia W un gruppo di Coxeter finito e sia w_0 il suo elemento massimale. Allora $R_{x,w} = R_{w_0w, w_0x}, \forall x \leq w$.

Dimostrazione. La dimostrazione di questa proposizione si può trovare in [Hum90, Proposizione 7.6]. \square

Vogliamo ora definire un'involuzione i sull'Algebra di Hecke \mathcal{H} . Per costruirla, partiamo dall'involuzione i_A di $A = \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ definita da

$$\begin{aligned} i_A : \mathbb{Z}[q, q^{-1}] &\longrightarrow \mathbb{Z}[q, q^{-1}] \\ q &\longmapsto q^{-1}. \end{aligned}$$

Imponendo poi $i(T_w) = (T_{w^{-1}})^{-1}$ ed estendendo per linearità, otteniamo una applicazione $i : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$. Inoltre si verifica che

$$\begin{aligned} i^2(T_s) &= i((T_s)^{-1}) \stackrel{(2.4)}{=} i(q^{-1}T_s + (1 - q^{-1})T_e) = qT_s^{-1} + (1 - q)T_e = \\ &\stackrel{(2.4)}{=} q(q^{-1}T_s + (1 - q^{-1})T_e) + (1 - q)T_e = T_s + (q - 1)T_e + (1 - q)T_e = T_s. \end{aligned}$$

Siccome i T_s generano \mathcal{H} come algebra, per provare che i è un'involuzione basterà provare che è un omomorfismo di anelli.

Per prima cosa proviamo che $i(T_s T_w) = i(T_s)i(T_w), \forall s \in S, \forall w \in W$.

Verifichiamo due casi:

1. se $l(sw) > l(w)$, allora

$$i(T_s T_w) = i(T_{sw}) = (T_{w^{-1}s})^{-1} = (T_w^{-1}T_s)^{-1} = (T_s)^{-1}(T_w^{-1})^{-1} = i(T_s)i(T_w)$$

proprio come desiderato;

2. se $l(sw) < l(w)$, definiamo $v = (sw)^{-1}$ e dunque $w^{-1} = vs$. Si ha che

$$\begin{aligned} i(T_s T_w) &= i(qT_{sw} + (q - 1)T_w) = q^{-1}T_v^{-1} + (q^{-1} - 1)(T_w^{-1})^{-1} = \\ &= q^{-1}T_v^{-1} - q^{-1}(q - 1)(T_w^{-1})^{-1} = q^{-1}T_v^{-1} - q^{-1}(q - 1)(T_v T_s)^{-1} = \\ &= q^{-1}T_v^{-1} - q^{-1}(q - 1)T_s^{-1}T_v^{-1} \stackrel{(2.4)}{=} \\ &= q^{-1}T_v^{-1} - q^{-1}(q - 1)[q^{-1}T_s - (q - 1)T_e]T_v^{-1} = \\ &= q^{-2}(qT_v^{-1} + (q - 1)^2 T_v^{-1}) - q^{-2}(q - 1)T_s T_v^{-1}, \end{aligned}$$

2.3 Costruzione dei polinomi di Kazhdan-Lusztig e loro proprietà 21

mentre

$$\begin{aligned}
 i(T_s)i(T_w) &= T_s^{-1}(T_w^{-1})^{-1} = T_s^{-2}T_w^{-1} \stackrel{(2.4)}{=} (q^{-1}T_s + (1 - q^{-1})T_e)^2T_w^{-1} = \\
 &= [q^{-2}T_s^2 + 2q^{-1}(1 - q^{-1})T_s + (1 - q^{-1})^2]T_w^{-1} = \\
 &= q^{-2}[qT_e + q(1 - q^{-1})T_s + (q - 1)^2T_e]T_w^{-1} = \\
 &= q^{-2}(qT_w^{-1} + (q - 1)^2T_w^{-1}) - q^{-2}(q - 1)T_sT_w^{-1}.
 \end{aligned}$$

Dunque si ha che $i(T_sT_w) = i(T_s)i(T_w)$.

Avendo verificato questa uguaglianza, segue per induzione su $l(w')$ che $i(T_{w'}T_w) = i(T_{w'})i(T_w), \forall w, w' \in W$.

Proposizione 2.2.4. Per ogni $x, w \in W$, con $x \leq w$, valgono:

- (i) $R_{x,w}(q^{-1}) = \varepsilon_x \varepsilon_w q^{l(x)-l(w)} R_{x,w}$;
- (ii) $(T_{w^{-1}})^{-1} = \sum_{x \leq w} q^{-l(x)} R_{x,w}(q^{-1})T_x$;
- (iii) $\sum_{x \leq y \leq w} \varepsilon_x \varepsilon_y R_{x,y} R_{y,w} = \delta_{x,w}$.

Dimostrazione. La dimostrazione di questa proposizione si può trovare in [Hum90, Proposizione 7.8]. \square

2.3 Costruzione dei polinomi di Kazhdan-Lusztig e loro proprietà

Cerchiamo una base $\{C_w\}_{w \in W}$ di \mathcal{H} come $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -modulo costituita da elementi fissati dall'involuzione i .

Notiamo che

$$\begin{aligned}
 i(T_s) &= T_s^{-1} = q^{-1}T_s + (1 - q^{-1})T_e \\
 i(T_s - qT_e) &= q^{-1}(T_s - qT_e).
 \end{aligned}$$

Introducendo una radice quadrata di q , ossia $q^{\frac{1}{2}}$, abbiamo che

$$C_s \stackrel{\text{def}}{=} q^{-\frac{1}{2}}(T_s - qT_e) \tag{2.6}$$

è fissato da i .

Formalmente, rimpiazziamo $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ con $\mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}]$, ossia l'anello dei polinomi di Laurent nell'indeterminata $q^{\frac{1}{2}}$. In questo modo, $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ rimane un sottoanello di $\mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}]$. Questa operazione non ha alcun effetto sui calcoli precedenti, dunque tutte le formule già trovate continuano a valere.

In generale, stiamo cercando gli elementi C_w i -invarianti come combinazioni lineari dei T_x , con $x \leq w$, dove il coefficiente di T_w sia non nullo. In particolare, cerchiamo un elemento di questa forma con i coefficienti meno complicati possibili.

Teorema 2.3.1. Per ogni $w \in W$ esiste unico $C_w \in \mathcal{H}$ con le proprietà

- (i) $i(C_w) = C_w$;
- (ii) $C_w = \varepsilon_w q^{-\frac{1}{2}l(w)} \sum_{x \leq w} \varepsilon_x q^{l(x)} P_{x,w}(q^{-1}) T_x$,

dove $P_{w,w} = 1$ per ogni $w \in W$ e $P_{x,w}(q) \in \mathbb{Z}[q]$ è tale che $\deg(P_{x,w}) \leq \frac{1}{2}(l(w) - l(x) - 1)$, se $x < w$.

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema si può trovare in [Hum90, Teorema 7.10, sezione 7.10-7.11]. \square

Dalla dimostrazione si trova che

$$\begin{aligned} C_e &= T_e \\ C_s &= q^{-\frac{1}{2}}(T_s - qT_e) \\ C_{st} &= q^{-1}(T_{st} - qT_s - qT_t + q^2T_e), \text{ per ogni } s \neq t \in S. \end{aligned} \quad (2.7)$$

I polinomi $P_{x,w}(q) \in \mathbb{Z}[q]$ sono detti i **polinomi di Kazhdan-Lusztig** del gruppo W .

Come per gli R -polinomi, anche i polinomi di Kazhdan-Lusztig hanno una formulazione ricorsiva che si evince dalla dimostrazione del teorema precedente:

$$q^{l(x,w)} P_{x,w}(q^{-1}) = \sum_{a \in [x,w]} R_{x,a} P_{a,w}, \quad \text{se } x \leq w, \quad (2.8)$$

2.3 Costruzione dei polinomi di Kazhdan-Lusztig e loro proprietà 23

mentre $P_{x,w}(q) = 0$, se $x \not\leq w$.

Dall'equazione (2.8), si ha che

$$q^{l(x,w)} P_{x,w}(q^{-1}) - P_{x,w}(q) = \sum_{\substack{a \in [x,w] \\ a \neq x}} R_{x,a} P_{a,w}.$$

Siccome $q^{l(x,w)} P_{x,w}(q^{-1})$ ha grado maggiore o uguale a $\frac{1}{2}(l(w) - l(x) - 1)$, si avrà che i coefficienti dei gradi fino al $\lfloor \frac{1}{2}(l(w) - l(x) - 1) \rfloor$ del polinomio a destra sono gli stessi di $-P_{x,w}(q)$. Dunque, i polinomi di Kazhdan-Lusztig possono essere calcolati ricorsivamente conoscendo gli R -polinomi. Questo però non è l'unico modo per calcolare tali polinomi: esiste anche una formula ricorsiva che non fa uso degli R -polinomi e che viene costruita nella dimostrazione del teorema precedente. Infatti, indicando con $\mu(x, w)$ il coefficiente del grado $\frac{1}{2}(l(w) - l(x) - 1)$ del polinomio $P_{x,w}(q)$, se $x < w$, si ha che, dati $x, w \in W$ con $x \leq w$ e $s \in D_L(w)$,

$$P_{x,w}(q) = q^{1-c} P_{sx,sw}(q) + q^c P_{x,sw} - \sum \mu(z, sw) q^{\frac{1}{2}l(z,w)} P_{x,z}, \quad (2.9)$$

dove $c = 1$ se $s \in D_L(x)$, $c = 0$ altrimenti e la somma è sui $z \in W$ tali che $x \leq z \leq w$, $sz < z$.

Proposizione 2.3.2. Siano $x, w \in W$, con $x \leq w$. Allora $P_{x,w}(0) = 1$.

Dimostrazione. La dimostrazione di questa proposizione si può trovare in [BB05, Proposizione 5.1.5]. \square

Osservazione 2.3.3. Se $x \leq w$ e $l(w) - l(x)$ è pari, si avrà che $\deg(P_{x,w}(q)) < \frac{1}{2}(l(w) - l(x) - 1)$ e dunque $\mu(x, w) = 0$.

Proposizione 2.3.4. Se W è finito con elemento massimale w_0 , allora per ogni $x \leq w$ si ha

$$\sum_{x \leq z \leq w} \varepsilon_w \varepsilon_z P_{x,z} P_{w_0 w, w_0 z} = \delta_{x,w}.$$

Dimostrazione. La dimostrazione di questa proposizione si può trovare in [Hum90, Proposizione 7.13]. \square

Proposizione 2.3.5. Sia W un gruppo di Coxeter finito e sia w_0 il suo elemento massimale. Allora $\mu(x, w) = \mu(w_0 w, w_0 x)$ e $P_{x,w} = P_{w_0 x w_0, w_0 w w_0}$ per ogni $x < w$.

Dimostrazione. Se $l(w) - l(x)$ è pari, per quanto già visto nell'Osservazione 2.3.3, si ha che $\mu(x, w) = 0$. Siccome $l(w_0x) - l(w_0w) = l(w) - l(x)$, si avrà che $\mu(w_0w, w_0x) = 0$. Dunque possiamo considerare il caso in cui $l(w) - l(x)$ è dispari: ciò implica che $\varepsilon_x = -\varepsilon_w$. Dalla Proposizione 2.3.4, si ha

$$\begin{aligned} P_{w_0w, w_0x} - P_{x, w} &= -\varepsilon_x \varepsilon_w P_{x, x} P_{w_0w, w_0x} - \varepsilon_w^2 P_{x, w} P_{w_0w, w_0w} \\ &= \sum_{x < z < w} \varepsilon_w \varepsilon_z P_{x, z} P_{w_0w, w_0z}. \end{aligned}$$

Studiamo il grado del polinomio a destra dell'uguaglianza: ogni addendo ha grado $\deg(P_{x, z} P_{w_0w, w_0z}) = \deg(P_{x, z}) + \deg(P_{w_0w, w_0z})$. Si verifica che uno fra $l(z) - l(x)$ o $l(w_0w) - l(w_0z)$ è pari poiché $l(z) - l(x) + l(w_0w) - l(w_0z) = l(w) - l(x)$. Da ciò segue che $\deg(P_{x, z} P_{w_0w, w_0z}) < \frac{1}{2}(l(w) - l(x) - 1)$. Il grado massimo compare dunque solo a sinistra e si avrà $\mu(x, w) = \mu(w_0w, w_0x)$. In modo analogo, si può anche dimostrare che $\mu(x, w) = \mu(w_0w, xw_0)$ e dunque $\mu(x, w) = \mu(w_0xw_0, w_0ww_0)$.

Dimostriamo ora la seconda parte per induzione su $l(w)$. Se $w = e$, entrambi i polinomi sono uguali al polinomio costante 1. Sia ora $w \in W$ con $l(w) \leq 1$. Per l'equazione (2.9) si ha:

$$P_{x, w}(q) = q^{1-c} P_{sx, sw}(q) + q^c P_{x, sw} - \sum \mu(z, w) q^{-\frac{1}{2}l(x, w)} P_{x, z},$$

dove $s \in S$ è tale che $sw < w$. Per l'ipotesi induttiva, si ha che $P_{sx, sw} = P_{w_0(sx)w_0, w_0(sw)w_0}$, $P_{x, sw} = P_{w_0xw_0, w_0(sw)w_0}$ e $P_{x, z} = P_{w_0xw_0, w_0zw_0}$. Inoltre, per quanto appena mostrato, $\mu(x, w) = \mu(w_0xw_0, w_0ww_0)$. Dunque:

$$\begin{aligned} P_{x, w}(q) &= q^{1-c} P_{sx, sw}(q) + q^c P_{x, sw} - \sum \mu(z, w) q^{-\frac{1}{2}l(x, w)} P_{x, z} = \\ &= q^{1-c} P_{w_0(sx)w_0, w_0(sw)w_0}(q) + q^c P_{w_0xw_0, w_0(sw)w_0} + \\ &\quad - \sum \mu(w_0zw_0, w_0ww_0) q^{-\frac{1}{2}l(w_0xw_0, w_0ww_0)} P_{w_0xw_0, w_0zw_0} = \\ &= P_{w_0xw_0, w_0ww_0}(q). \end{aligned}$$

□

Vediamo ora come gli elementi T_s agiscono sulla nuova base $\{C_w\}_{w \in W}$ di \mathcal{H} . Per fare ciò, definiamo $x \prec w$ se $\mu(x, w) \neq 0$ e $x \leq w$.

Proposizione 2.3.6. Siano $s \in S, w \in W$. Se $sw < w$, allora $T_s C_w = -C_w$. Se $w < sw$, allora $T_s C_w = q C_w + q^{\frac{1}{2}} C_{sw} + q^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{z \prec w \\ sz < z}} \mu(z, w) C_z$.

2.3 Costruzione dei polinomi di Kazhdan-Lusztig e loro proprietà 25

Dimostrazione. La dimostrazione di questa proposizione si può trovare in [Hum90, Proposizione 7.14]. \square

Corollario 2.3.7. Siano $x < w$. Supponiamo esista $s \in S$ tale che $sw < w$. Allora $P_{x,w} = P_{sx,w}$.

Dimostrazione. Per la Proposizione 2.3.6, si ha che $T_s C_w = -C_w$. Per il Teorema 2.3.1 si ha che $C_w = \varepsilon_w q^{-\frac{1}{2}l(w)} \sum_{x \leq w} \varepsilon_x q^{l(x)} P_{x,w}(q^{-1}) T_x$, dunque

$$\varepsilon_w q^{\frac{1}{2}l(w)} \sum_{y \leq w} \varepsilon_y q^{-l(y)} P_{y,w}(q^{-1}) T_s T_y = -\varepsilon_w q^{\frac{1}{2}l(w)} \sum_{y \leq w} \varepsilon_y q^{-l(y)} P_{y,w}(q^{-1}) T_y.$$

Grazie al Teorema 1.3.5, si ha che $sx \leq w$ e dunque T_{sx} compare a destra. A sinistra, T_{sx} compare grazie ai termini T_y con $y = sx, x$. Se $y = x$, si ha che $T_s T_x = T_{sx}$ poiché $sx > x$ e dunque il coefficiente di T_{sx} è $\varepsilon_x q^{-l(x)} P_{x,w}(q^{-1})$. Se $y = sx$, allora $T_s T_{sx} = (q-1)T_{sx} + qT_x$ e dunque il coefficiente di T_{sx} è $\varepsilon_{sx} q^{-l(sx)} (q-1) P_{sx,w}(q^{-1})$. Si ha che il coefficiente di T_{sx} a sinistra è $\varepsilon_x q^{-l(x)} (P_{x,w}(q^{-1}) - q^{-1}(q-1)P_{sx,w}(q^{-1}))$, mentre il coefficiente di T_{sx} a destra è $\varepsilon_x q^{-l(x)} q^{-1} P_{sx,w}(q^{-1})$. Eguagliando i coefficienti si ottiene $P_{x,w} = P_{sx,w}$. \square

Osservazione 2.3.8. Siano $x, w \in W$ tali che $\mu(x, w) \neq 0$. Se esiste $s \in S$ tale che $sw < w$, allora vale che $sx < x$. Infatti, se così non fosse, si avrebbe $\deg(P_{sx,w}) \leq \frac{1}{2}(l(w) - l(sx) - 1) = \frac{1}{2}(l(w) - l(x) - 2) < \frac{1}{2}(l(w) - l(x) - 1)$. Ma, per il Corollario 2.3.7, si ha che $P_{x,w} = P_{sx,w}$. Dunque, $P_{x,w}$ avrebbe il coefficiente del grado $\frac{1}{2}(l(w) - l(x) - 1)$ nullo, contro l'ipotesi $\mu(x, w) \neq 0$.

Osservazione 2.3.9. Per l'enunciato precedente e per molti altri risultati, valgono anche le versioni con le moltiplicazioni a destra anziché a sinistra, che possono essere dimostrate in modo del tutto analogo.

Osservazione 2.3.10. Se W è un gruppo di Coxeter finito con elemento massimale w_0 , dal Corollario 2.3.7 si ha che $P_{x,w_0} = 1$, per ogni $x \in W$.

Capitolo 3

Richiami sulle rappresentazioni di gruppo

Lo scopo di questo capitolo è richiamare alcuni importanti risultati sulla teoria delle rappresentazioni di gruppi, in particolar modo di gruppi finiti, i quali verranno utilizzati in seguito.

Per esempio, un importante risultato della teoria delle rappresentazioni dei gruppi finiti è il Teorema di Maschke.

Teorema 3.0.1 (Teorema di Maschke). Sia V una rappresentazione di dimensione finita di un gruppo finito G su un campo \mathbb{K} tale che $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$. Se W è una sottorappresentazione di V , allora esiste un sottospazio U complemento di W che a sua volta è una sottorappresentazione di V , ossia $V = W \oplus U$, non solo come spazi vettoriali ma anche come rappresentazioni.

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema si può trovare in [EGH⁺11, Teorema 4.1.1]. □

L'importanza di tale teorema si evince in particolar modo dalla seguente proprietà, detta **completa riducibilità** o semisemplicità.

Corollario 3.0.2. Ogni rappresentazione V di dimensione finita di un gruppo finito G su un campo \mathbb{K} tale che $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$ è somma diretta di rappresentazioni irriducibili.

Dimostrazione. Se V non ha sottorappresentazioni, allora V è essa stessa una rappresentazione irriducibile. Altrimenti, sia W una sua sottorappresentazione non banale. Allora, per il Teorema di Maschke (Teorema 3.0.1), V si scompone nella somma diretta $W \oplus U$, dove le dimensioni di W e di U sono strettamente più piccole della dimensione di V . Ragionando analogamente su W e su U , dopo un numero finito di passi, si ottiene la scomposizione in irriducibili di V . \square

3.1 Carattere di una rappresentazione di gruppo

Un importante strumento per studiare la teoria delle rappresentazioni di gruppi finiti è la teoria dei caratteri.

Definizione 3.1.1. Sia V una rappresentazione di un gruppo finito G a valori complessi, allora il **carattere** χ_V di tale rappresentazione è la funzione a valori complessi definita da

$$\begin{aligned}\chi_V : G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ g &\longmapsto \text{Tr}(g|_V),\end{aligned}$$

dove $\text{Tr}(g|_V)$ indica la traccia della matrice associata a g rispetto alla rappresentazione V .

Possiamo notare come questa definizione sia ben posta, in quanto non dipende dalla base scelta per rappresentare la matrice, essendo la traccia invariante per similitudine.

Esempio 3.1.2. Sia $G = \{e, g_1, \dots, g_{n-1}\}$ e consideriamo la rappresentazione regolare su $V = \mathbb{C}[G]$ di carattere χ_{Reg} . Si ha che la matrice associata all'azione dell'elemento neutro è I_n , dunque $\chi_{\text{Reg}}(e) = |G|$. Per computare il valore del carattere per $g \neq e$, usiamo la matrice associata alla base $\mathcal{B} = \{e, g_1, \dots, g_{n-1}\}$. La matrice associata a g è la matrice della permutazione per l'azione di g su \mathcal{B} , dunque χ_{Reg} è il numero di punti fissi per tale azione. Ma se $gg_i = g_i$ per qualche i , allora $g = e$, dunque se $g \neq e$ non ci sono punti fissi. In conclusione, si ha

$$\chi_{\text{Reg}}(g) = \begin{cases} |G| & \text{se } g = e \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Iniziamo ad elencare alcune proprietà elementari del carattere.

Proposizione 3.1.3. Sia V una rappresentazione di G di dimensione d . Allora

- (i) $\chi_V(e) = d$;
- (ii) se g e h sono due elementi coniugati di G , allora $\chi_V(g) = \chi_V(h)$;
- (iii) se W è una rappresentazione di G isomorfa a V , allora $\chi_V(g) = \chi_W(g)$, per ogni $g \in G$.

Dimostrazione. Siccome la matrice associata all'azione di e è la matrice identità, il primo punto è verificato. Inoltre, se g e h sono coniugati, si avrà $g = khk^{-1}$ e dunque la matrice dell'azione di g è simile alla matrice dell'azione di h . Essendo la traccia invariante per similitudine, il secondo punto è verificato. Analogamente, se due rappresentazioni sono isomorfe, le matrici dell'azione di ciascun elemento sono simili e dunque hanno lo stesso carattere. \square

In particolare, si ha che χ_V è costante sulle classi di coniugio di G . Una funzione del genere è detta *class function*. L'insieme delle class function è denotato con $R(G)$ e, siccome la somma e la moltiplicazione per uno scalare di tali funzioni restituiscono ancora una class function, si ha che $R(G)$ è uno spazio vettoriale su \mathbb{C} , di dimensione pari al numero di classi di coniugio, siccome una base di tale spazio è data dalle funzioni che assumono valore 1 su una determinata classe di coniugio e 0 altrove. Indicheremo con $\chi_V(K)$ il valore che assume il carattere sulla classe di coniugio K . Tutto ciò porta alla seguente definizione di tabella dei caratteri di un gruppo.

Definizione 3.1.4. Sia G un gruppo. La tabella dei caratteri (*character table*) di G è una tabella le cui righe sono indicizzate dalle rappresentazioni irriducibili a due a due non isomorfe di G e le colonne sono indicizzate dalle classi di coniugio. L'entrata della tabella corrispondente alla riga V e alla colonna K è il valore $\chi_V(K)$.

Esempio 3.1.5. Nella tabella 3.1 è riportata la tabella dei caratteri di \mathfrak{S}_3 , dove U indica la rappresentazione triviale, U' la rappresentazione segno, V la rappresentazione standard.

\mathfrak{S}_3	e	(12)	(123)
U	1	1	1
U'	1	-1	1
V	2	0	-1

Tabella 3.1: Character table di \mathfrak{S}_3

Introduciamo ora uno strumento, il prodotto interno di caratteri, che ci permetterà di dimostrare che l'equivalenza di caratteri implica l'equivalenza di rappresentazioni.

Possiamo pensare al carattere χ di un gruppo $G = \{e, g_1, \dots, g_{n-1}\}$ come ad un vettore riga di numeri complessi:

$$\chi = (\chi(e), \dots, \chi(g_{n-1})).$$

Se la rappresentazione V è irriducibile, allora questo vettore può essere ottenuto dalla character table semplicemente ripetendo i valori per la classe di coniugio K un numero totale di $|K|$ volte. Per esempio, nel caso di \mathfrak{S}_3 , avremo

$$\chi_U = (1, 1, 1, 1, 1, 1) \quad \text{e} \quad \chi_{U'} = (1, -1 - 1 - 1, 1, 1).$$

Possiamo dunque considerare il prodotto interno standard sui vettori riga dato da

$$(c_1, c_2, \dots, c_n) \cdot (d_1, d_2, \dots, d_n) = c_1 \bar{d}_1 + c_2 \bar{d}_2 + \dots + c_n \bar{d}_n.$$

Per esempio, nel caso di \mathfrak{S}_3 , si ha $\chi_U \cdot \chi_U = \chi_{U'} \cdot \chi_{U'} = 6$ e $\chi_U \cdot \chi_{U'} = 0$.

Definizione 3.1.6. Siano χ e ψ due funzioni qualsiasi da un gruppo G a valori complessi. Il *prodotto interno* di χ e ψ è

$$\langle \chi, \psi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\psi(g)}.$$

Nel caso in cui χ e ψ siano caratteri di rappresentazioni, questa definizione si dimostra essere equivalente a

$$\langle \chi, \psi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \psi(g^{-1}). \quad (3.1)$$

Dunque quando si lavora su un campo arbitrario, l'equazione (3.1) viene presa come definizione del prodotto interno. La Definizione 3.1.6 è motivata dal fatto che su \mathbb{C} l'equazione (3.1) dà luogo solo ad una forma bilineare e non ad un prodotto interno, poiché se χ e ψ sono funzioni qualsiasi allora non vale la proprietà $\langle \chi, \psi \rangle = \overline{\langle \psi, \chi \rangle}$.

Nel caso in cui χ e ψ siano due class function, l'equazione (3.1) diventa equivalente a

$$\langle \chi, \psi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_K |K| \chi(K) \overline{\psi(K)},$$

dove la somma è sulle classi di coniugio K .

Teorema 3.1.7. Siano V e W due rappresentazioni irriducibili di G . Allora

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \delta_{V,W}.$$

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema si può trovare in [Sag01, Teorema 1.9.3]. \square

Questo teorema dimostra come i caratteri di rappresentazioni irriducibili siano tra loro ortonormali rispetto al prodotto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Da questa relazione derivano alcune proprietà importanti del carattere.

Corollario 3.1.8. Siano V_1, \dots, V_n rappresentazioni irriducibili di G , a due a due non isomorfe. Sia W una rappresentazione di G tale che

$$W \cong m_1 V_1 \oplus m_2 V_2 \oplus \dots \oplus m_k V_k.$$

Allora valgono

- (i) $\chi_W = m_1 \chi_{V_1} + m_2 \chi_{V_2} + \dots + m_n \chi_{V_n}$;
- (ii) $\langle \chi_W, \chi_{V_j} \rangle = m_j$, per ogni $j \in \{1, 2, \dots, n\}$;
- (iii) $\langle \chi_W, \chi_W \rangle = m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_n^2$;
- (iv) W è irriducibile se e solo se $\langle \chi_W, \chi_W \rangle = 1$;
- (v) sia U un'altra rappresentazione di G , allora $W \cong U$ se e solo se $\chi_W(g) = \chi_U(g)$, per ogni $g \in G$.

Dimostrazione. Sono conseguenze immediate del Teorema 3.1.7. \square

Proposizione 3.1.9. Sia G un gruppo finito e consideriamo la rappresentazione regolare $\text{Reg} \cong \bigoplus_i m_i V_i$, dove V_1, \dots, V_n sono le rappresentazioni irriducibili di G , a due a due non isomorfe. Allora

- (i) $m_i = \dim V_i$;
- (ii) $\sum_i (\dim V_i)^2 = |G|$;
- (iii) il numero di rappresentazioni irriducibili è pari al numero di classi di coniugio di G .

Dimostrazione. La dimostrazione di questa proposizione si può trovare in [Sag01, Proposizione 1.10.1]. \square

Proposizione 3.1.10. I caratteri delle rappresentazioni irriducibili di un gruppo G formano una base ortonormale dello spazio delle class function $R(G)$.

Dimostrazione. Per il Teorema 3.1.7, si ha che i caratteri sono ortonormali rispetto alla forma bilineare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su $R(G)$, dunque sono linearmente indipendenti. Inoltre, per la Proposizione 3.1.9, si ha che le rappresentazioni regolari sono tante quante le classi di coniugio e dunque sono pari alla dimensione di $R(G)$, da cui segue la tesi. \square

Esempio 3.1.11. Consideriamo la rappresentazione regolare Reg di \mathfrak{S}_3 e calcoliamone la sua scomposizione in rappresentazioni irriducibili tramite il carattere. Nell'Esempio 3.1.2, avevamo già calcolato il carattere della rappresentazione regolare:

$$\chi_{\text{Reg}}(g) = \begin{cases} 6 & \text{se } g = e \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

mentre nell'Esempio 3.1.5 sono riportati i caratteri delle rappresentazioni irriducibili di \mathfrak{S}_3 . Calcoliamo ora le molteplicità delle rappresentazioni irriducibili contenute nella rappresentazione regolare:

$$\begin{aligned} \langle \chi_{\text{Reg}}, \chi_U \rangle &= \frac{1}{6}(6, 0, 0, 0, 0, 0) \cdot (1, 1, 1, 1, 1, 1) = 1 \\ \langle \chi_{\text{Reg}}, \chi_{U'} \rangle &= \frac{1}{6}(6, 0, 0, 0, 0, 0) \cdot (1, -1, -1, -1, 1, 1) = 1 \\ \langle \chi_{\text{Reg}}, \chi_V \rangle &= \frac{1}{6}(6, 0, 0, 0, 0, 0) \cdot (2, 0, 0, 0, -1, -1) = 2, \end{aligned}$$

ossia $\text{Reg} \cong U \oplus U' \oplus 2V$. Grazie alla Proposizione 3.1.9 possiamo dunque dedurre le dimensioni di tali rappresentazioni irriducibili.

3.2 Rappresentazioni indotte

Dato un gruppo G e una sua rappresentazione V è facile verificare come la restrizione di tale rappresentazione ad un sottogruppo H di G sia a sua volta una rappresentazione per H , indicata con $\text{Res}_H^G[V]$. Vogliamo ora costruire una rappresentazione di G partendo da una rappresentazione W di H . Sia $n = [G : H]$ e siano g_1, \dots, g_n un insieme di rappresentanti in G dei laterali sinistri in G/H . La **rappresentazione indotta** può essere pensata come la rappresentazione che agisce sul seguente spazio:

$$V = \bigoplus_{i=1}^n g_i W,$$

dove $g_i W$ è una copia isomorfa dello spazio vettoriale W i cui vettori sono etichettati con l'elemento g_i . Per ogni $g \in G$ e per ogni g_i , esiste $h_i \in H$ e $j(i) \in \{1, \dots, n\}$ tale che $gg_i = g_{j(i)}h_i$. Dunque, G agisce su V tramite la rappresentazione indotta nel seguente modo:

$$g \cdot \sum_{i=1}^n g_i w_i = \sum_{i=1}^n g_{j(i)} h_i(w_i), \quad \text{con } w_1, \dots, w_n \in W.$$

Non è ovvio che la rappresentazione così definita sia effettivamente una rappresentazione del gruppo G (si veda [Sag01, Teorema 1.12.4]).

Capitolo 4

Grafi e rappresentazioni di Kazhdan-Lusztig

4.1 Costruzione dei grafi di Kazhdan-Lusztig

Sia (W, S) un sistema di Coxeter. Vogliamo costruire un grafo etichettato i cui vertici sono in corrispondenza con gli elementi del gruppo W . Per fare ciò definiamo

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \{x, y\} \in \binom{W}{2} : x < y \text{ e } \mu(x, y) \neq 0 \right\}, \quad (4.1)$$

dove $\binom{W}{2}$ indica la famiglia di sottoinsiemi di W di cardinalità 2 e $\mu(x, y)$ è il coefficiente del grado $\frac{1}{2}(l(w) - l(x) - 1)$ del polinomio $P_{x,w}(q)$, se $x < w$.

Definizione 4.1.1. Il grafo (sinistro) di Kazhdan-Lusztig $\Gamma_{(W,S)} = (W, E)$ (o, in breve, K-L grafo) ha un nodo per ogni elemento $w \in W$, etichettato con $D_L(w)$, e per lati ha le coppie $\{x, y\} \in E$ definito come in (4.1), etichettati con $\mu(x, y)$.

In seguito, in tutti i K-L grafi ometteremo le etichette dei lati pari a 1.

Esempio 4.1.2. Vediamo ora com'è strutturato il K-L grafo sinistro di \mathfrak{S}_3 . Per fare ciò, partiamo dalla costruzione del diagramma di Hasse relativo all'ordinamento di Bruhat rappresentato in Figura 4.1, dove la notazione riprende quella usata precedentemente nell'Esempio 1.1.4. Il K-L grafo,

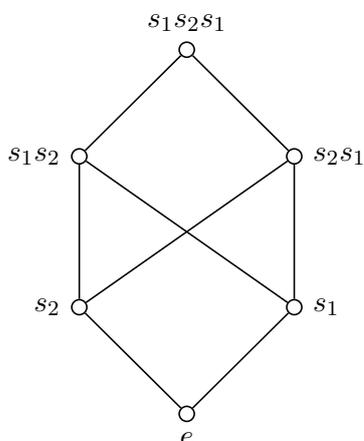


Figura 4.1: Diagramma di Hasse dell'ordinamento di Bruhat per \mathfrak{S}_3

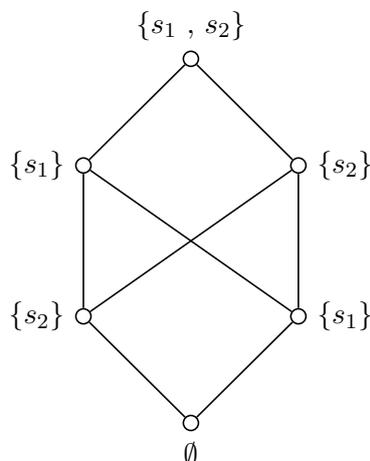


Figura 4.2: K-L grafo di \mathfrak{S}_3

riportato in Figura 4.2, ha una struttura simile a quella del diagramma di Hasse: infatti, in corrispondenza delle posizioni analoghe sono collocati i nodi relativi allo stesso elemento del gruppo.

Esempio 4.1.3. Vediamo ora com'è strutturato il K-L grafo di \mathfrak{S}_4 . Partiamo sempre dal diagramma di Hasse dell'ordinamento di Bruhat, rappresentato in Figura 4.3. Il K-L grafo, riportato in Figura 4.4, analogamente a prima ha una struttura simile a quella del diagramma di Hasse. Rispetto a quest'ultimo, il K-L grafo di \mathfrak{S}_4 presenta due lati in più corrispondenti ai due intervalli di lunghezza 3 con polinomio di Kazhdan-Lusztig pari a $P_{x,w} = 1 + q$.

Di seguito, alcune osservazioni immediate.

Lemma 4.1.4. Siano $x, y \in W$, con $x < y$. Allora, valgono i seguenti fatti:

- (i) Se $\{x, y\} \in E$, allora $l(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} l(y) - l(x)$ è dispari.
- (ii) Se $l(x, y) = 1$, allora $\{x, y\} \in E$ e $\mu(x, y) = 1$.
- (iii) Se $l(x, y) > 1$ ed esiste $s \in S$ tale che $sy < y$ e $sx > x$, allora $\{x, y\} \notin E$.

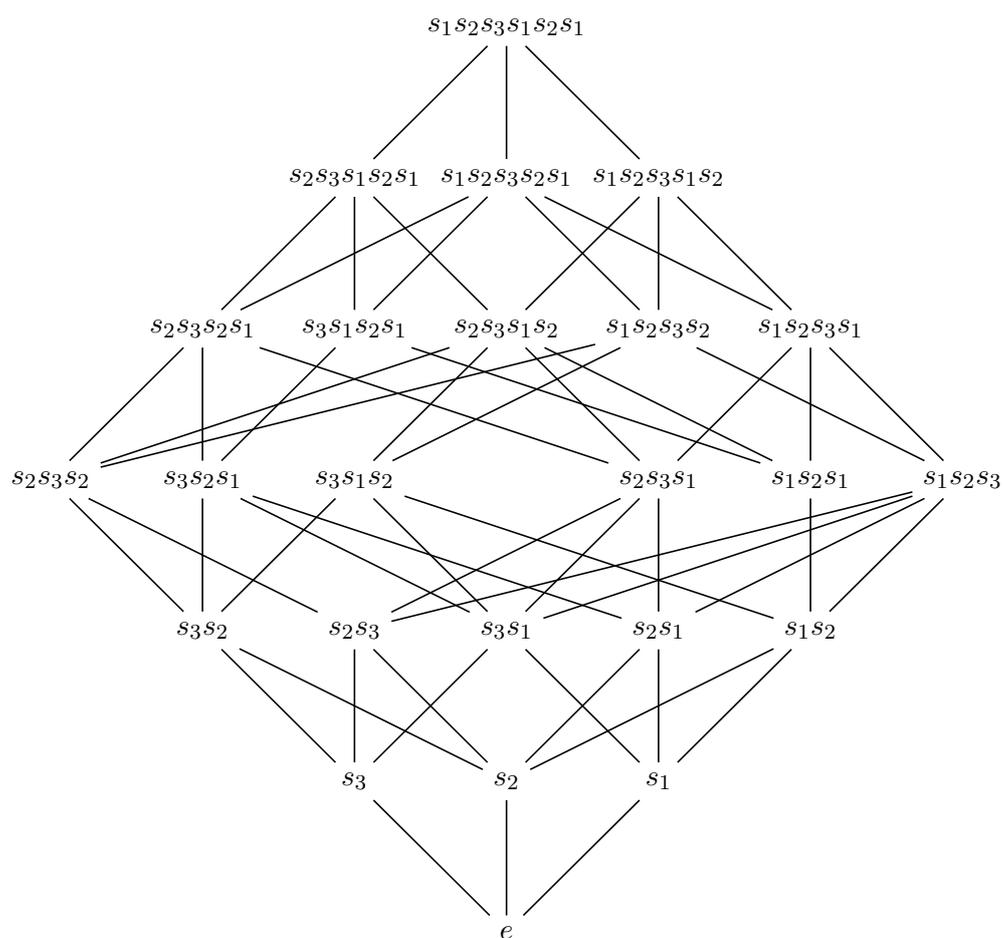
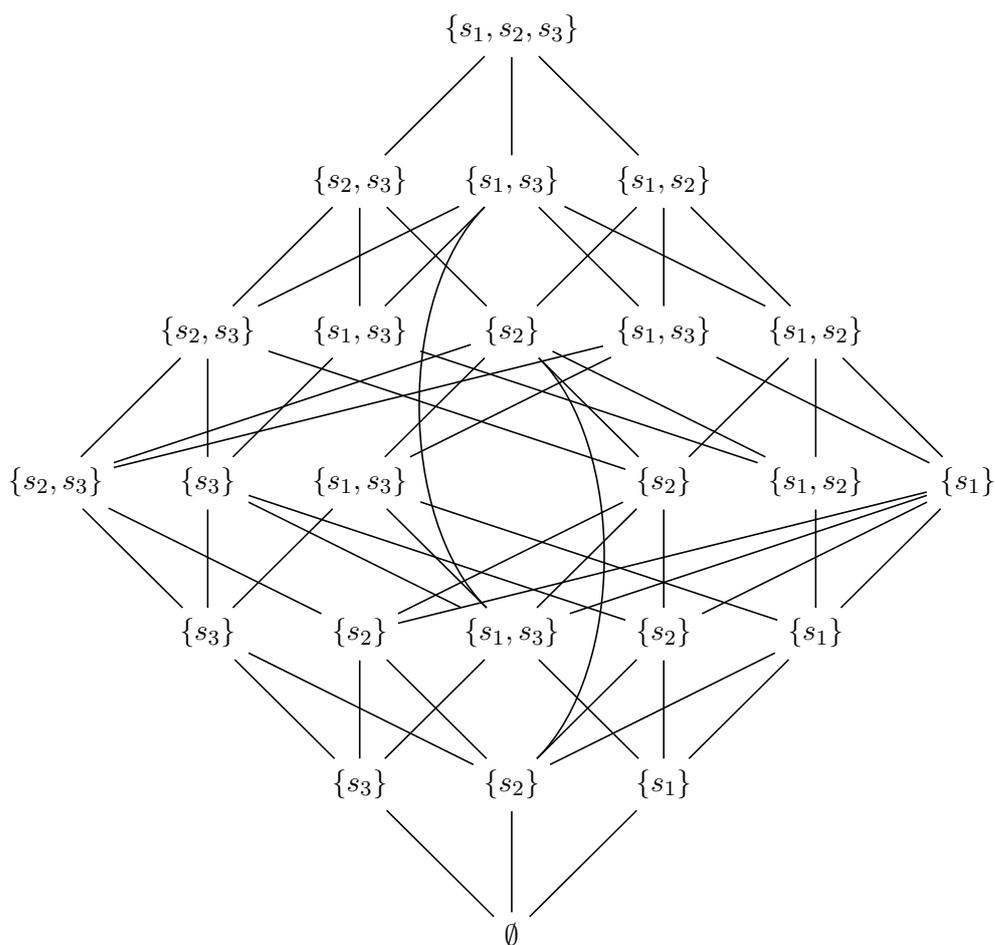


Figura 4.3: Diagramma di Hasse dell'ordinamento di Bruhat di S_4

Figura 4.4: K-L grafo di \mathfrak{S}_4

Dimostrazione. Per quanto già visto in Osservazione 2.3.3, se $l(x, y)$ è pari allora $\mu(x, y) = 0$, da cui segue (i). Inoltre, per la Proposizione 2.3.2, se $l(x, y) = 1$, si ha $P_{x,w} = 1$, da cui segue (ii). Infine, per quanto già constatato nell'Osservazione 2.3.8, il grado del polinomio $P_{x,y}$, sotto le ipotesi del punto (iii) è troppo piccolo e dunque si è mostrato anche l'ultimo punto. \square

Osservazione 4.1.5. La parte (ii) del Lemma 4.1.4 mostra come tutti i lati del diagramma di Hasse dell'ordinamento di Bruhat sono anche lati del K-L grafo sinistro con etichetta pari a 1. I restanti lati di quest'ultimo grafo e le loro etichette sono notevolmente più difficili da determinare. Infatti, per costruirli bisogna determinare i gradi massimi dei polinomi di Kazhdan-Lusztig di tutti gli intervalli di Bruhat di lunghezza dispari e, nel caso in cui questi siano massimi, anche i loro coefficienti.

Per gli sviluppi successivi, sarà utile introdurre una versione diretta del K-L grafo con vertici senza etichetta ma i cui lati presentano una doppia etichetta. Infatti ogni lato sarà etichettato con un elemento $s \in S$ e un numero intero $\mu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$: possiamo pensare ad s come ad un colore per il lato e ad μ come ad un "peso".

Definizione 4.1.6. Il grafo colorato (sinistro) di Kazhdan-Lusztig è il grafo orientato $\tilde{\Gamma}_{(W,S)} = (W, A)$ è il grafo il cui insieme A dei lati $x \xrightarrow[\mu]{s} y$, con $x, y \in W$, sono dei seguenti due tipi:

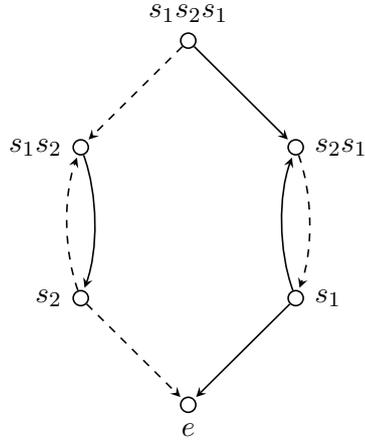
$$(i) \quad x \neq y, \{x, y\} \in E, s \in D_L(x) \setminus D_L(y) \text{ e } \mu = \mu(x, y);$$

$$(ii) \quad x = y, s \in S \text{ e}$$

$$\mu = \begin{cases} 1, & \text{se } s \notin D_L(x) \\ -1, & \text{se } s \in D_L(x). \end{cases}$$

Dunque ci sono due tipi di lati: i primi sono versioni orientate di alcuni dei lati di $\Gamma_{(W,S)}$ e i secondi tipi sono dei loops, uno per ogni elemento dell'insieme dei generatori, attaccati ad ogni nodo. Solitamente quest'ultimi vengono omessi, così come le etichette pari a 1.

Esempio 4.1.7. Osserviamo com'è strutturato il K-L grafo colorato di \mathfrak{S}_3 , illustrato in Figura 4.5. I colori vengono rappresentati attraverso un diverso

Figura 4.5: K-L grafo sinistro colorato di \mathfrak{S}_3

stile del corpo della freccia. In questo esempio, le frecce continue rappresentano i lati etichettati con s_1 mentre le frecce tratteggiate i lati etichettati con s_2 .

Esempio 4.1.8. Osserviamo ora il K-L grafo colorato per \mathfrak{S}_4 illustrato in Figura 4.6. Abbandoneremo il parallelismo con i diagrammi di Hasse dell'ordinamento di Bruhat, riarrangiando la disposizione dei nodi, per facilitare la lettura del grafo. Come nell'Esempio 4.1.7, le frecce continue rappresentano i lati etichettati con s_1 , le frecce tratteggiate quelli corrispondenti alle etichette s_2 e infine le frecce punteggiate rappresentano i lati etichettati con s_3 .

Osserviamo come $\Gamma_{(W,S)}$ determini completamente $\tilde{\Gamma}_{(W,S)}$ mentre il viceversa non vale. Infatti, alcuni lati vengono irrimediabilmente persi, ovvero quelli con $D_L(x) = D_L(y)$. Notiamo come $\tilde{\Gamma}_{(W,S)}$ può avere lati multipli, paralleli e antiparalleli, fra una data coppia di nodi. In questi casi, tutti i lati fra i due dati nodi hanno sempre etichette distinte.

Inoltre, le frecce dirette verso il basso in $\tilde{\Gamma}_{(W,S)}$ sono facili da caratterizzare, come mostra il seguente lemma.

Lemma 4.1.9. Supponiamo $l(x) > l(y)$. Allora, $x \rightarrow y$ è un lato di $\tilde{\Gamma}_{(W,S)}$ se e solo se $x \triangleright_L y$, ossia $l(x) - l(y) = 1$ e $x = sy$, per qualche $s \in S$.

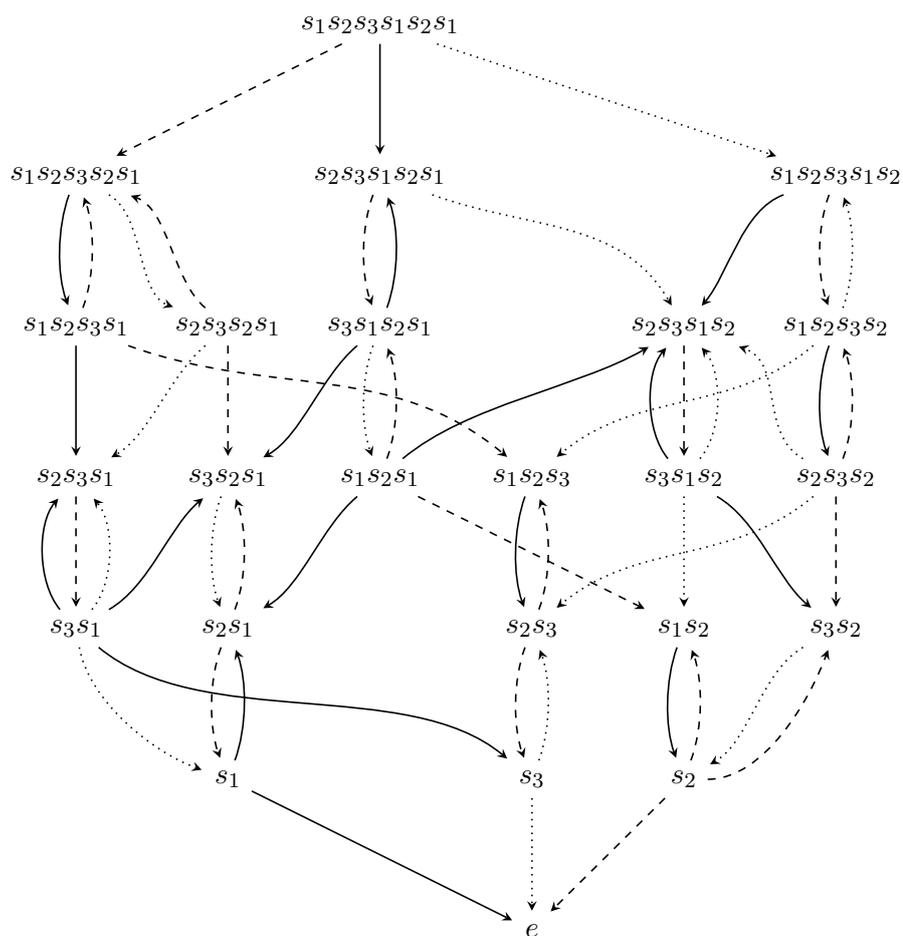


Figura 4.6: K-L grafo sinistro colorato di S_4

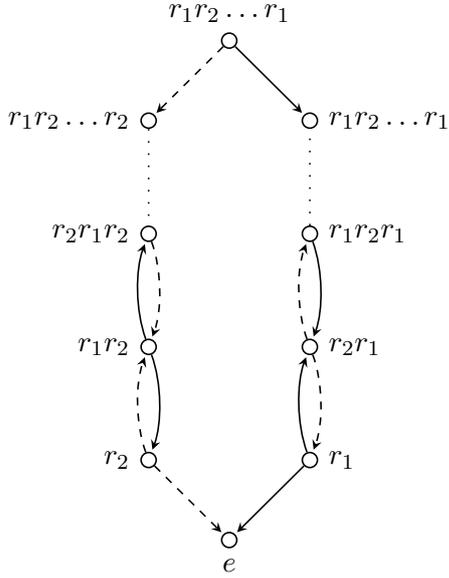


Figura 4.7: K-L grafo colorato del gruppo diedrale $I_2(m)$, con m dispari

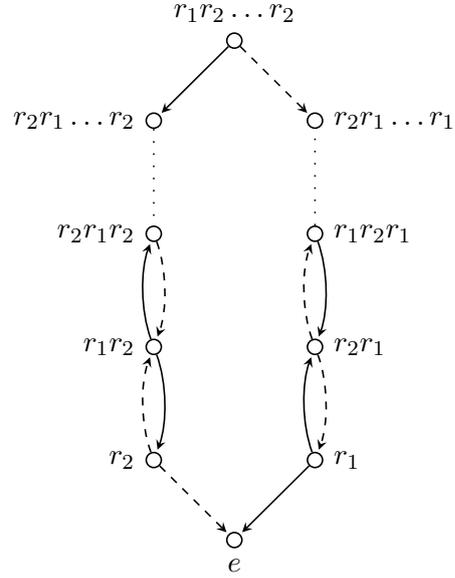


Figura 4.8: K-L grafo colorato del gruppo diedrale $I_2(m)$, con m pari

Dimostrazione. Se $x = sy$, $x \rightarrow y$ è un lato in $\tilde{\Gamma}_{(W,S)}$: infatti per (ii) del Lemma 4.1.4, si ha che $\{x, y\} \in E$ e $s \in D_L(x) \setminus D_L(y)$. Il viceversa segue da (iii) del Lemma 4.1.4: se $x \xrightarrow{\frac{\mu}{s}} y$, con $y < x$, abbiamo $sx < x$ ma $sy > y$. Di conseguenza, se $l(y, x) > 1$, allora per il Lemma 4.1.4, $x \rightarrow y$ non sarebbe un lato di $\Gamma_{(W,S)}$ e dunque nemmeno di $\tilde{\Gamma}_{(W,S)}$. \square

4.2 Celle sinistre di Kazhdan-Lusztig

Definizione 4.2.1. Siano $x, y \in W$. Diciamo che:

- (i) $x \preceq_L y$ se esiste un cammino diretto in $\tilde{\Gamma}_{(W,S)}$ da x a y ;
- (ii) la relazione “ \preceq_L ” è detta **preordine sinistro** su W ;
- (iii) $x \sim_L y$ se $x \preceq_L y$ e $y \preceq_L x$;
- (iv) la relazione “ \sim_L ” è detta relazione di **equivalenza sinistra** su W ;
- (v) una classe di equivalenza di (W, S) per \sim_L è chiamata **cella sinistra**.

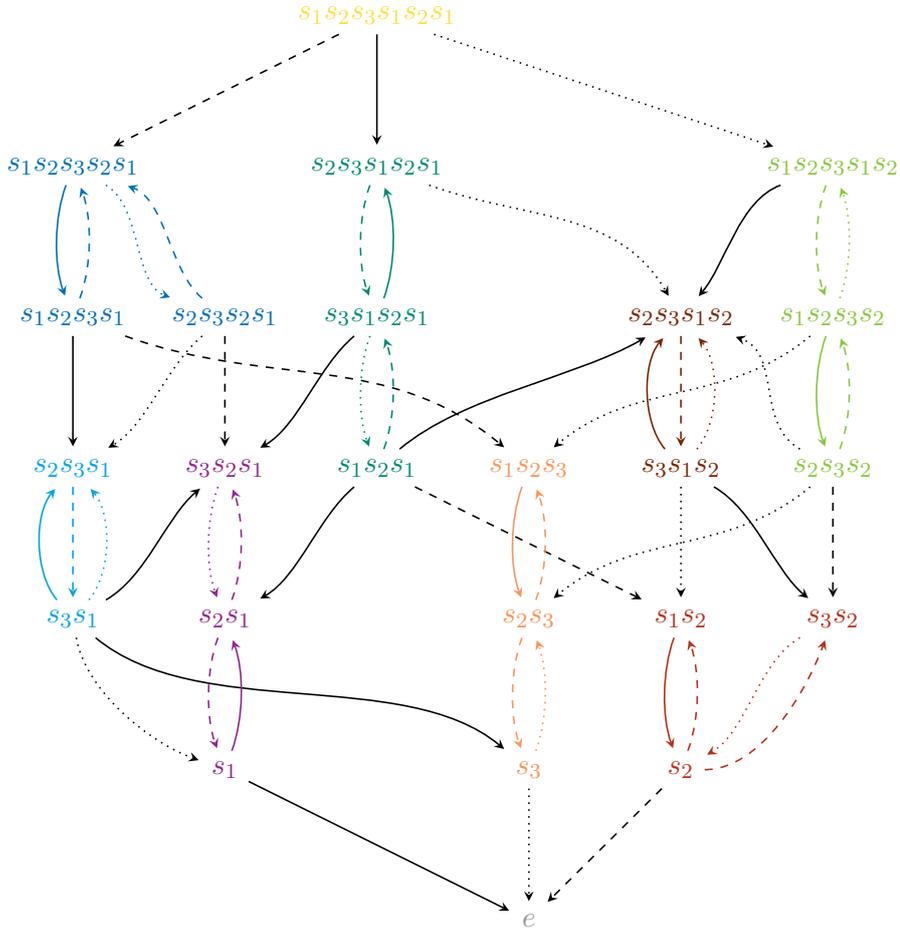


Figura 4.9: K-L grafo sinistro colorato di \mathfrak{S}_4 con le celle sinistre evidenziate

Possiamo considerare i sottografi indotti da $\Gamma_{(W,S)}$ e da $\tilde{\Gamma}_{(W,S)}$ su ogni cella sinistra \mathcal{C} e d'ora in poi penseremo alle celle sinistre come a dei grafi indotti $\Gamma_{\mathcal{C}}$ e $\tilde{\Gamma}_{\mathcal{C}}$.

Osservazione 4.2.2. Possiamo osservare che le celle sinistre sono le componenti fortemente connesse di $\tilde{\Gamma}_{(W,S)}$, secondo la terminologia della teoria dei grafi.

Osservazione 4.2.3. Osservando la Figura 4.5, possiamo notare che le celle sinistre di \mathfrak{S}_3 sono 4, ovvero $\{e\}, \{s_1, s_2s_1\}, \{s_2, s_1s_2\}, \{s_1s_2s_1\}$. Possiamo osservare come in realtà l'elemento neutro e l'elemento massimale di un gruppo di Coxeter sono equivalenti, secondo la Definizione 4.2.1, solo a loro

stessi: infatti, siccome l'elemento neutro è l'unico elemento tale che $D_L(e) = \emptyset$ non ci sono frecce che partono da tale elemento (oltre i loop), mentre l'elemento massimale è l'unico elemento tale che $D_L(e) = S$, dunque non ci sono frecce che partono da altri elementi e terminano in w_0 .

Osservazione 4.2.4. Osserviamo la suddivisione in celle sinistre di \mathfrak{S}_4 , illustrata in Figura 4.9, dove sono stati evidenziati con lo stesso colore gli elementi appartenenti ad una stessa cella e le frecce che collegano questi. Le celle sinistre di \mathfrak{S}_4 sono dunque:

- $\mathcal{C}_1 = \{s_1 s_2 s_3 s_1 s_2 s_1\}$;
- $\mathcal{C}_2 = \{s_1 s_2 s_3 s_1, s_2 s_3 s_2 s_1, s_1 s_2 s_3 s_2 s_1\}$;
- $\mathcal{C}_3 = \{s_1 s_2 s_1, s_3 s_1 s_2 s_1, s_2 s_3 s_1 s_2 s_1\}$;
- $\mathcal{C}_4 = \{s_2 s_3 s_2, s_1 s_2 s_3 s_2, s_1 s_2 s_3 s_1 s_2\}$;
- $\mathcal{C}_5 = \{s_3 s_1, s_2 s_3 s_1\}$;
- $\mathcal{C}_6 = \{s_3 s_1 s_2, s_2 s_3 s_1 s_2\}$;
- $\mathcal{C}_7 = \{s_1, s_2 s_1, s_3 s_2 s_1\}$;
- $\mathcal{C}_8 = \{s_3, s_2 s_3, s_1 s_2 s_3\}$;
- $\mathcal{C}_9 = \{s_1, s_1 s_2, s_3 s_2\}$;
- $\mathcal{C}_{10} = \{e\}$.

Dunque sono presenti due 1-celle (quella con il solo elemento neutro e quella con il solo elemento massimale di \mathfrak{S}_4), sei 3-celle e due 2-celle.

Osservazione 4.2.5. Nel caso del gruppo diedrale $I_2(m)$, il cui K-L grafo colorato è illustrato in Figura 4.7 e Figura 4.8, sono sempre presenti esattamente 4 celle sinistre. Infatti, oltre a quelle di dimensione uno, $\{e\}$ e $\{r_1 r_2 r_1 \dots\}$, sono presenti solo altre due celle di dimensione $m - 1$.

Definizione 4.2.6. Date due celle sinistre \mathcal{C} e \mathcal{C}' , diciamo che $\mathcal{C} \preceq_L \mathcal{C}'$ se $x \preceq_L y$ per qualche (o equivalentemente per tutti) $x \in \mathcal{C}, y \in \mathcal{C}'$.

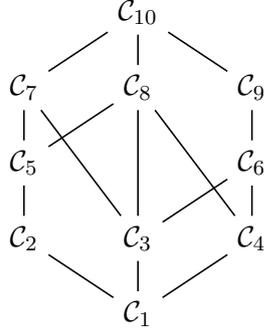


Figura 4.10: Diagramma di Hasse dell'ordinamento delle celle sinistre di \mathfrak{S}_4

Notiamo come ciò definisca un ordinamento parziale sull'insieme delle celle sinistre di un gruppo di Coxeter W .

Esempio 4.2.7. Dalla Figura 4.5, si evince che le celle di \mathfrak{S}_3 sono $\{e\}$, $\{s_1s_2s_1\}$, $\{s_1, s_2s_1\}$ e $\{s_2, s_1s_2\}$ e l'ordinamento parziale su esse è dato da

$$\begin{aligned} \{s_1s_2s_1\} \preceq_L \{s_1, s_2s_1\} \preceq_L \{e\} \\ \{s_1s_2s_1\} \preceq_L \{s_2, s_1s_2\} \preceq_L \{e\} \end{aligned}$$

Esempio 4.2.8. Dalla Figura 4.6, si evince che l'ordinamento parziale sulle celle sinistre di \mathfrak{S}_4 è quello rappresentato tramite il diagramma di Hasse in Figura 4.10, dove le celle sono state nominate come nell'Osservazione 4.2.4.

C'è naturalmente una versione “destra” di tutto quello costruito fin'ora, che useremo in seguito. Da questo punto in avanti, abbandoniamo la parola “sinistro/a”, a meno che non ci sia rischio di fraintendimento.

Proposizione 4.2.9. Se $x \preceq_L y$, allora $D_R(x) \supseteq D_R(y)$ e dunque se $x \sim_L y$ si ha che $D_R(x) = D_R(y)$.

Dimostrazione. Possiamo assumere che $x \xrightarrow[s]{\mu} y$ sia un lato di $\tilde{\Gamma}_{(W,S)}$. Infatti, se così non fosse, esisterebbe una catena di vertici $\{x = x_1, x_2, \dots, x_n = y\}$ collegati da lati del tipo $x_i \xrightarrow[s]{\mu} x_{i+1}$. Provando la tesi su questa tipologia di lati, si avrebbe poi come conseguenza $D_R(x) \supseteq D_R(x_1) \supseteq \dots \supseteq D_R(x_{n-1}) \supseteq D_R(y)$, provando così la tesi anche per x e y generici.

Ci sono dunque due casi da considerare: se $y < x$ o se $y > x$. Nel primo caso, per il Lemma 4.1.9, si ha che $x = sy$, per qualche $s \in S$, da cui segue $D_R(y) \subseteq D_R(x)$. Nel secondo caso, assumiamo che esista $s' \in D_R(y) \setminus D_R(x)$. Allora, $x \xrightarrow[k]{s} y$ sarebbe un lato del K-L grafo colorato destro per qualche k , che implica, per la versione destra del Lemma 4.1.9, $y = xs$ e dunque $D_L(x) \subseteq D_L(y)$. Ma ciò contraddice l'ipotesi che esista un lato $x \xrightarrow[s]{\mu} y$ nel K-L grafo colorato sinistro. Dunque un tale s' non può esistere e di conseguenza $D_R(y) \subseteq D_R(x)$.

La seconda parte dell'enunciato segue direttamente dalla prima. \square

Definizione 4.2.10. Sia \mathcal{C} una cella sinistra di $\tilde{\Gamma}_{(W,S)}$. Definiamo $D_R(\mathcal{C}) = D_R(x)$, per un qualche $x \in \mathcal{C}$.

Osserviamo che la precedente definizione è ben posta per il Lemma 4.2.9.

Supponiamo ora che (W, S) sia finito. Allora la traslazione per l'elemento massimale w_0 induce varie simmetrie sui grafi di Kazhdan-Lusztig e sull'ordinamento parziale sulle celle.

Proposizione 4.2.11. Se $x \xrightarrow{\mu} y$ è un lato in $\Gamma_{(W,S)}$, allora anche $w_0x \xrightarrow{\mu} w_0y$, $xw_0 \xrightarrow{\mu} yw_0$ e $w_0xw_0 \xrightarrow{\mu} w_0yw_0$ sono lati di $\Gamma_{(W,S)}$.

Dimostrazione. Dalla Proposizione 1.3.9 si ha che valgono le disuguaglianze $w_0y < w_0x, yw_0 < xw_0$ e $w_0xw_0 < w_0yw_0$. Dalla Proposizione 2.3.5 si ha che $\mu = \mu(w_0y, w_0x) = \mu(yw_0, xw_0) = \mu(w_0xw_0, w_0yw_0)$. \square

Proposizione 4.2.12. Se $x \xrightarrow[s]{\mu} y$, con $x \neq y$, è un lato diretto in $\tilde{\Gamma}_{(W,S)}$, allora sono ancora frecce dirette di $\tilde{\Gamma}_{(W,S)}$ i seguenti lati:

- (i) $w_0y \xrightarrow[w_0sw_0]{\mu} w_0x$;
- (ii) $yw_0 \xrightarrow[s]{\mu} xw_0$;
- (iii) $w_0xw_0 \xrightarrow[w_0sw_0]{\mu} w_0yw_0$.

Inoltre, se $x \xrightarrow[s]{\mu} x$ è un loop, allora anche $xw_0 \xrightarrow[s]{-\mu} xw_0$ lo è.

Dimostrazione. Per la Proposizione 4.2.11 sappiamo che $w_0x \xrightarrow{\mu} w_0y$, $xw_0 \xrightarrow{\mu} yw_0$ e $w_0xw_0 \xrightarrow{\mu} w_0yw_0$ sono lati di $\Gamma_{(W,S)}$. Inoltre, per la Proposizione 1.3.8, si ha che:

- se $s \in D_L(x) \setminus D_L(y)$, allora $w_0 s w_0 \in D_L(w_0 y) \setminus D_L(w_0 x)$, da cui segue (i);
- se $s \in D_L(x) \setminus D_L(y)$, allora $s \in D_L(y w_0) \setminus D_L(x w_0)$, da cui segue (ii);
- se $s \in D_L(x) \setminus D_L(y)$, allora $s \in D_L(w_0 x w_0) \setminus D_L(w_0 y w_0)$, da cui segue (iii).

Infine, siccome $D_L(x w_0) = S \setminus D_L(x)$, segue che $x \xrightarrow[s]{\mu} x$ è un loop di $\tilde{\Gamma}_{(W,S)}$ allora $w_0 x w_0 \xrightarrow[s]{-\mu} w_0 x w_0$ è ancora un loop. \square

Segue da questo fatto che per ogni cella sinistra \mathcal{C} anche $w_0 \mathcal{C}, \mathcal{C} w_0$ e $w_0 \mathcal{C} w_0$ sono celle sinistre e sono tutte isomorfe come sottografi con lati etichettati di $\Gamma_{(W,S)}$. Tuttavia, le etichette dei vertici cambiano in accordo con la Proposizione 1.3.8. In modo analogo, i grafi colorati $\tilde{\Gamma}_{\mathcal{C}}, \tilde{\Gamma}_{w_0 \mathcal{C}}, \tilde{\Gamma}_{\mathcal{C} w_0}$ e $\tilde{\Gamma}_{w_0 \mathcal{C} w_0}$ sono isomorfi come grafi orientati con i lati etichettati, eccetto per una permutazione dell'insieme S .

Inoltre, segue che le mappe $x \mapsto w_0 x$ e $x \mapsto x w_0$ inducono involuzioni senza punti fissi sull'insieme delle celle sinistre che invertono gli ordinamenti parziali \preceq_L e \preceq_R . Analogamente, la mappa $x \mapsto w_0 x w_0$ induce un'involuzione sulle celle sinistre che preserva invece questi ordinamenti.

4.3 Rappresentazioni di Kazhdan-Lusztig

Ritorniamo ora allo studio dell'algebra di Hecke assumendo d'ora in poi che $q^{\frac{1}{2}} = 1$ e che (W, S) sia un sistema di Coxeter finito.

La prima delle due supposizioni implica che l'algebra di Hecke diventa isomorfa all'algebra gruppo a coefficienti in \mathbb{Z} , si veda infatti l'Osservazione 2.1.2:

$$\mathcal{H}(W, S) \cong \mathbb{Z}[W].$$

Inoltre, l'involuzione i su \mathcal{H} diventa l'identità: infatti, in $\mathbb{Z}[W]$ si ha

$$i(T_s) = T_s^{-1} \stackrel{(2.4)}{=} q^{-1} T_s - (1 - q^{-1}) T_e = T_s$$

ed estendendo a T_w si ottiene $i(T_{w^{-1}}) = T_w^{-1} = T_{w^{-1}}$.

Infine, la formula di moltiplicazione vista nella Proposizione 2.3.6 può essere

ora riscritta come

$$T_s C_w = \sum_{x: x \xrightarrow{s} w} \mu(x, w) C_x \quad (4.2)$$

dove la sommatoria è su tutti gli $x \in W$ aventi un lato etichettato con s in $\tilde{\Gamma}_{(W,S)}$ che porta a w . Infatti, se $sw < w$, allora $s \in D_L(w)$: dunque non ci sono frecce etichettate con s che arrivano in w , tranne che per il loop $w \xrightarrow{-1} w$. Dunque la sommatoria diventa $-C_w$, in accordo con la Proposizione 2.3.6. Invece, se $sw > w$, ossia $s \notin D_L(w)$, allora si ha che $w \xrightarrow{1} w$ è un loop, $sw \xrightarrow{1} w$ è un lato poiché $sw > w$ e $s \in D_L(sw) \setminus D_L(s)$ e il polinomio $P_{w,sw}$ è tale che $\deg P_{w,sw} = 0$, dunque $\mu(w, sw) = 1$. Infine, siccome non ci possono essere lati diretti verso w che partono da elementi più grandi di w , a parte per il lato $sw \xrightarrow{1} w$, per quanto già osservato nel Lemma 4.1.9, si ha che i lati che partono da x e arrivano in w con un lato etichettato con s , a parte quelli già elencati, sono proprio quelli con $x \prec w$ e $sx < x$, ritrovando dunque la formula nella Proposizione 2.3.6, nel caso in cui $q^{\frac{1}{2}} = 1$.

La semplicità di questa formula è la motivazione principale dietro alla costruzione del K-L grafo colorato.

La **rappresentazione regolare (sinistra)** di W è la mappa $\text{Reg}_W : W \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{H})$, tale che

$$\begin{aligned} \text{Reg}_W(w) : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ D &\longmapsto T_w D. \end{aligned}$$

Vogliamo ora esprimere la rappresentazione regolare tramite la base $\{C_w\}_{w \in W}$.

Sia dunque $A(w) = (a_{x,y}(w))_{x,y \in W}$ la matrice di $\text{Reg}_W(w)$ rispetto a tale base. Si avrà dunque

$$T_w C_y = \sum_{x \in W} a_{x,y}(w) C_x.$$

Lemma 4.3.1. Se $w = s_1 \dots s_k$ è un'espressione ridotta per w , allora

$$a_{x,y}(w) = \sum \mu(x_0, x_1) \mu(x_1, x_2) \dots \mu(x_{k-1}, x_k),$$

dove la sommatoria è su tutti i cammini $x = x_0 \xrightarrow{s_1} x_1 \xrightarrow{s_2} \dots \xrightarrow{s_k} x_k = y$ in $\tilde{\Gamma}_{(W,S)}$.

Dimostrazione. La formula (4.2) può essere riformulata, nel caso $w = s_i$, nel seguente modo:

$$a_{x,y}(s_i) = \begin{cases} \mu(x, y), & \text{se } x \xrightarrow{s_i} y \text{ è un lato di } \tilde{\Gamma}_{(W,S)}, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (4.3)$$

Concludiamo utilizzando il fatto che $A(w) = A(s_1) \dots A(s_k)$. \square

Lemma 4.3.2. Siano $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_k$ le celle sinistre di W , numerate in modo tale che se $\mathcal{C}_i \preceq_L \mathcal{C}_j$ allora $i < j$. Arrangiando le colonne e le righe di $A(w)$ per celle, seguendo questo ordine, si ottiene che $A(w)$ ha una struttura triangolare superiore a blocchi.

Dimostrazione. Dal Lemma 4.3.1, se $y \in \mathcal{C}_i$ e $x \in \mathcal{C}_j$, con $i < j$, allora, per costruzione, non esistono cammini che partono da x e arrivano in y nel K-L grafo colorato e dunque $a_{x,y}(w) = 0$. \square

Per ogni cella sinistra \mathcal{C} e per ogni $w \in W$, definiamo

$$A_{\mathcal{C}}(w) \stackrel{\text{def}}{=} (a_{x,y}(w))_{x,y \in \mathcal{C}},$$

ossia la sottomatrice del blocco diagonale corrispondente a tale cella. Dalla forma di $A(w)$ è chiaro che $A_{\mathcal{C}}(uv) = A_{\mathcal{C}}(u)A_{\mathcal{C}}(v)$ per ogni $u, v \in W$. Dunque, queste matrici danno a loro volta una rappresentazione del gruppo W .

Definizione 4.3.3. La rappresentazione di W data da $(A_{\mathcal{C}}(w))_{w \in W}$ è la **rappresentazione di Kazhdan-Lusztig** $KL_{\mathcal{C}}$ determinata dalla cella sinistra \mathcal{C} .

Osserviamo che la dimensione della rappresentazione $KL_{\mathcal{C}}$ è la cardinalità della cella sinistra \mathcal{C} .

Considereremo tutte le rappresentazioni sul campo \mathbb{C} dei numeri complessi.

Proposizione 4.3.4. Sia (W, S) un sistema di Coxeter finito. Allora

$$\text{Reg}_W \cong \bigoplus_{\mathcal{C}} KL_{\mathcal{C}},$$

dove la sommatoria diretta è su tutte le celle sinistre \mathcal{C} di W .

Dimostrazione. Dal Lemma 4.3.2, si deduce la struttura diagonale a blocchi di $A(w)$, come già osservato. Inoltre, le dimensioni dei blocchi dipendono solo dalle celle e dunque sono le stesse per ogni elemento di $w \in W$. Si ha dunque che i vettori della cella \mathcal{C}_1 sono una base di un sottorappresentazione della rappresentazione regolare. Dal Teorema di Maschke (Teorema 3.0.1), si ottiene

$$\text{Reg}_W \cong KL_{\mathcal{C}_1} \oplus \text{Reg}_W / KL_{\mathcal{C}_1}.$$

La matrice che rappresenta la sottorappresentazione quoziente si ottiene dalla matrice $A(w)$ ristretta allo spazio generato dai vettori delle celle $\mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_k$. Analogamente a prima, si ottiene che $KL_{\mathcal{C}_2}$ è una sottorappresentazione di $\text{Reg}_W / KL_{\mathcal{C}_1}$. Siccome il sistema di Coxeter è finito, ossia il numero delle celle è finito, dopo un numero limitato di passi si ottiene la tesi. \square

Osservazione 4.3.5. Le rappresentazioni di Kazhdan-Lusztig non sono in generale irriducibili. Per esempio, possiamo considerare $I_2(4)$ con insieme di generatori $S = \{r_1, r_2\}$. Allora le celle sinistre sono $\{a, ba, aba\}$, $\{b, ab, bab\}$, $\{abab\}$ e $\{e\}$; ma $I_2(4)$ ha 5 rappresentazioni irriducibili, quattro di dimensione 1 e una di dimensione 2. Dunque le K-L rappresentazioni corrispondenti alle celle di dimensione 3 devono essere riducibili.

In realtà ciò accade per tutti i gruppi diedrali: infatti, $I_2(m)$ ha due rappresentazioni irriducibili di grado 1 se m è dispari e 4 se m è pari, mentre tutte le rappresentazioni irriducibili rimanenti hanno dimensione 2. Tuttavia, $I_2(m)$ ha sempre esattamente 4 celle, come già osservato nella Figura 4.7 e nella Figura 4.8.

Osservazione 4.3.6. Nell'Osservazione 4.2.3, abbiamo notato come, nel caso di un gruppo di Coxeter finito, $\{e\}$ e $\{w_0\}$ siano due celle sinistre. Le rappresentazioni di Kazhdan-Lusztig relative a queste celle sono proprio la rappresentazione triviale $KL_{\{e\}} = 1$ e la rappresentazione segno $KL_{\{w_0\}} = \varepsilon$, definita da $\varepsilon(w) = 1^{l(w)}$.

Come conseguenza della Proposizione 4.2.12, abbiamo visto come le simmetrie indotte dall'elemento massimale w_0 di un gruppo di Coxeter finito agiscono sulle celle sinistre, inducendo degli isomorfismi tra queste.

Analogamente, esse inducono degli isomorfismi sulle rappresentazioni di Kazhdan-Lusztig.

Proposizione 4.3.7. Sia \mathcal{C} una cella sinistra. Allora valgono i seguenti fatti:

- (i) $KL_{\mathcal{C}w_0} \cong \varepsilon KL_{\mathcal{C}}$;
- (ii) $KL_{w_0\mathcal{C}} \cong \varepsilon KL_{\mathcal{C}}$;
- (iii) $KL_{w_0\mathcal{C}w_0} \cong KL_{\mathcal{C}}$.

Dimostrazione. La dimostrazione di questa proposizione si può trovare in [BB05, Proposizione 6.3.5]. \square

In seguito, per ogni rappresentazione χ di un sottogruppo parabolico W_J indicheremo la rappresentazione indotta di W nel seguente modo:

$$\text{Ind}_J^S(\chi) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ind}_{W_J}^W(\chi).$$

Per ogni sottoinsieme $A \subseteq W$, definiamo due elementi, T_A e \bar{T}_A , di $\mathcal{H} \cong \mathbb{Z}[W]$ nel seguente modo:

$$T_A \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{w \in A} T_w \quad \text{e} \quad \bar{T}_A \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{w \in A} \varepsilon_w T_w.$$

Siano A_1, A_2, \dots, A_k i laterali sinistri di W_J , per qualche $J \subseteq S$. Si ha che W agisce tramite la moltiplicazione a sinistra $x : T_A \mapsto xT_A$ sul sottomodulo $\langle T_{A_1}, \dots, T_{A_k} \rangle$, permutando la sua base. Questa rappresentazione, detta azione sui laterali sinistri, coincide con la rappresentazione indotta $\text{Ind}_J^S[1]$. Analogamente, W agisce tramite $x : \bar{T}_A \mapsto \varepsilon_x x \bar{T}_A$ sul sottomodulo $\bar{\mathcal{H}}_J \stackrel{\text{def}}{=} \langle \bar{T}_{A_1}, \dots, \bar{T}_{A_k} \rangle$. Questa azione, detta azione sui laterali sinistri con segno, coincide con la rappresentazione indotta $\text{Ind}_J^S[\varepsilon] \cong \varepsilon \text{Ind}_J^S[1]$.

Esempio 4.3.8. Sia $W = \mathfrak{S}_3$, $S = \{s_1, s_2\}$ e $J = \{s_2\}$. Allora i laterali sinistri di W_J sono $A_1 = \{e, s_2\}$, $A_2 = \{s_1, s_1s_2\}$, $A_3 = \{s_2s_1, s_1s_2s_1\}$. Dunque $\bar{T}_{A_1} = T_e - T_{s_2}$, $\bar{T}_{A_2} = -T_{s_1} + T_{s_1s_2}$, $\bar{T}_{A_3} = T_{s_2s_1} - T_{s_1s_2s_1}$. Due esempi dell'azione di W su $\bar{\mathcal{H}}_J$ espresse con questa base sono:

$$s_1s_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_1s_2s_1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vogliamo ora mostrare come le rappresentazioni indotte $\text{Ind}_J^S[1]$ e $\text{Ind}_J^S[\varepsilon]$ siano legate alle rappresentazioni di Kazhdan-Lusztig.

Lemma 4.3.9. Sia $y \in \mathcal{D}_J^S$ e $x \leq y$. Allora valgono:

- (i) $a \leq y$ per ogni $a \in xW_J$. In particolar modo, $[e, y]$ è unione di laterali sinistri di W_J .
- (ii) $P_{a,y}(q) = P_{x,y}(q)$, per ogni $a \in xW_J$.

Dimostrazione. Si ha che $a \leq xw_0(J) = z$ e $z \leq y$, applicando un numero finito di volte la Proprietà di Sollevamento (Teorema 1.3.5) e tenendo in considerazione quanto già constatato nell'Osservazione 1.4.5. Da ciò segue che $[e, y]$ è unione di laterali sinistri di W_J . Analogamente, applicando un numero finito di volte il Corollario 2.3.7, si ottiene che $P_{x,y}(q) = P_{z,y}(q)$ e $P_{a,y}(q) = P_{z,y}(q)$. \square

Lemma 4.3.10. Se $y \in \mathcal{D}_J^S$, allora $C_y \in \overline{\mathcal{H}}_J$. In particolare, $\{C_y\}_{y \in \mathcal{D}_J^S}$ è una base per $\overline{\mathcal{H}}_J$.

Dimostrazione. Siccome $q = 1$, la formula per C_y del Teorema 2.3.1, diventa

$$C_y = \sum_{x \in [e, y]} \varepsilon_x \varepsilon_y P_{x,y}(1) T_x.$$

Per quanto appena dimostrato nel Lemma 4.3.9, $[e, y]$ è unione disgiunta di alcuni laterali sinistri di W_J , che chiameremo A_1, \dots, A_r . Dunque

$$\begin{aligned} C_y &= \varepsilon_y \sum_{i=1}^r P_{A_i, y}(1) \sum_{x \in A_i} \varepsilon_x T_x \\ &= \varepsilon_y \sum_{i=1}^r P_{A_i, y}(1) \overline{T}_{A_i}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

dove $P_{A_i, y}(1)$ denota il valore comune di $P_{x,y}(1)$ per $x \in A_i$. Inoltre, la relazione (4.4) è invertibile su \mathbb{Z} siccome è triangolare con uni sulla diagonale rispetto a qualsiasi ordinamento $\{y_1, \dots, y_r\}$ di \mathcal{D}_J^S tale che $y_i < y_j$ se $i < j$. \square

Teorema 4.3.11. Sia $J \subseteq S$. Allora,

$$\text{Ind}_J^S[1] \cong \bigoplus_{D_R(\mathcal{C}) \supseteq J} \varepsilon KL_{\mathcal{C}} \cong \bigoplus_{D_R(\mathcal{C}) \subseteq S \setminus J} KL_{\mathcal{C}},$$

dove la sommatoria diretta è fatta su tutte le celle sinistre \mathcal{C} .

Dimostrazione. L'applicazione $\mathcal{C} \mapsto w_0\mathcal{C}$ è una biezione tra le celle sinistre il cui insieme delle discese destre contiene J e quelle il cui insieme delle discese destre è contenuto in $S \setminus J$. Dunque, la seconda equivalenza è implicata direttamente dalla Proposizione 4.3.7. Vogliamo dimostrare ora la prima equivalenza provando

$$\mathrm{Ind}_J^S[\varepsilon] \cong \bigoplus_{D_R(\mathcal{C}) \supseteq J} KL_{\mathcal{C}},$$

la quale è una sua riformulazione. Per fare ciò, vogliamo esprimere l'azione di W su $\overline{\mathcal{H}}_J$ rispetto alla base $\{C_y\}_{y \in \mathcal{D}_J^S}$. Ordiniamo le celle \mathcal{C} che soddisfano $D_R(\mathcal{C}) \supseteq J$ in modo analogo a quanto fatto nel Lemma 4.3.2. Scriviamo poi la matrice della rappresentazione $\mathrm{Ind}_J^S[\varepsilon]$ rispetto a tale base, con colonne e righe ordinate in accordo con l'ordine delle celle scelte. Per via della formula (4.2), si ha che la matrice di tale rappresentazione rispetto alla base scelta è triangolare superiore a blocchi. Dunque, per il Teorema di Maschke (Teorema 3.0.1), ragionando analogamente a quanto fatto nella dimostrazione della Proposizione 4.3.4, si ha la scomposizione di $\mathrm{Ind}_J^S[\varepsilon]$ cercata. \square

Capitolo 5

Rappresentazioni di Kazhdan-Lusztig del gruppo simmetrico

In questo capitolo, ci dedicheremo a trattare il caso particolare del gruppo simmetrico. L'obiettivo principale è dimostrare che la rappresentazione di Kazhdan-Lusztig per il gruppo simmetrico fornisce proprio le rappresentazioni irriducibili di tale gruppo, fatto non vero in altri casi come già constatato nell'Osservazione 4.3.5.

5.1 Corrispondenza di Robinson-Schensted

Una *partizione* $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ di un intero n , indicata con $|\lambda| = n$ è una sequenza decrescente di interi $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k$ tali che $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n$. Una partizione può essere rappresentata geometricamente tramite i *diagrammi di Ferrers*, una disposizione di quadrati, anche detti celle, avente λ_i quadrati nella i -esima riga.

Un *tableau* è un riempimento delle celle di un diagramma di Ferrers con numeri interi distinti in modo tale che i numeri in ogni riga e in ogni colonna compaiono in ordine strettamente crescente quando lette da sinistra verso destra e dall'alto verso il basso. Definiamo questi interi le *entrate* del tableau. Un tableau è detto *tableau standard di Young* se le entrate del

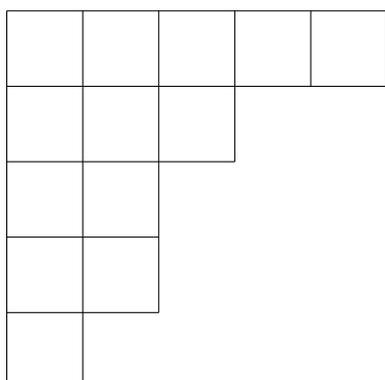


Figura 5.1: Diagramma di Ferrers della partizione $(5,3,2,2,1)$

1	2	5	8	11
3	6	10		
4	9			
7	13			
12				

Figura 5.2: Esempio di tableau standard di Young corrispondente alla partizione $(5,3,2,2,1)$

1	2	3	4	5
6	7	8		
9	10			

Figura 5.3: Esempio di tableau superstandard per righe

1	2	5	7	8
3	6	9		
4	10			

Figura 5.4: Esempio di tableau standard ma non superstandard per righe

tableau sono i numeri interi $1, 2, \dots, n$. Un tableau è detto *superstandard per righe* se leggendo le sue righe da sinistra verso destra e dall'alto verso il basso si ottengono i numeri interi $1, 2, \dots, n$ nel loro ordine naturale.

La partizione associata a un tableau T è chiamata la *forma* di T ed è denotata con $\text{sh}(T)$.

Indichiamo con SYT_n l'insieme dei tableaux standard di Young con n celle e con SYT_λ il sottoinsieme dei tableaux di forma λ . Inoltre, poniamo $f_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} |\text{SYT}_\lambda|$.

Ad ogni permutazione $x \in \mathfrak{S}_n$ è associata una coppia $(P(x), Q(x))$ di tableau standard della stessa forma con il seguente criterio.

Sia $x = x_1x_2\dots x_n$. Partiamo dalla coppia di tableau vuoti (\emptyset, \emptyset) e iteriamo la seguente procedura n volte. Assumiamo che (P_i, Q_i) sia la coppia di tableau standard costruita dopo i passi. Se x_{i+1} è più grande di tutte le entrate nella prima riga di P_i , allora aggiungiamo una cella in fondo ad essa dove inseriamo tale numero. Altrimenti, se per esempio $p_{1,j} < x_{i+1} < p_{1,j+1}$, allora rimpiazziamo $p_{1,j+1}$ con x_{i+1} . Successivamente, ripetiamo lo stesso procedimento con la seconda riga e con $p_{1,j+1}$ al posto di x_{i+1} . Questo procedimento continuerà riga per riga fino a quando non aggiungeremo una nuova cella alla fine di una riga o fino a quando non creeremo una nuova riga con una sola cella. Con questo algoritmo, si ottiene un tableau standard P_{i+1} con una cella in più rispetto a P_i . L'algoritmo, infatti, ci assicura che anche il nuovo tableau ottenuto sia standard. Modifichiamo invece il tableau standard destro Q_i aggiungendo una cella nella stessa posizione di quella appena creata in P_{i+1} e inserendo al suo interno l'entrata $i + 1$. Per via di questo algoritmo, il tableau sinistro $P(x)$ è spesso chiamato *insertion tableau*, mentre quello sinistro $Q(x)$ è anche detto *recording tableau*.

Teorema 5.1.1. L'applicazione $x \mapsto (P(x), Q(x))$ è una biezione fra le permutazioni $x \in \mathfrak{S}_n$ e le coppie di tableau standard $(P, Q) \in \bigcup_{|\lambda|=n} SYT_\lambda^2$.

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema si può trovare in [Sag01, Teorema 3.1.1]. \square

L'applicazione descritta nel Teorema 5.1.1 definisce la **corrispondenza di Robinson-Schensted**.

Possiamo definire l'*insieme delle discese* di un tableau standard T , indicato con $D(T)$, come l'insieme delle entrate i tali che $i + 1$ appare in T in una riga strettamente più in basso. Questa definizione è in relazione con la definizione dell'insieme delle discese di un elemento di \mathfrak{S}_n tramite la corrispondenza di Robinson-Schensted come segue.

Teorema 5.1.2. Sia $x \in \mathfrak{S}_n$. Allora si ha $D_L(x) = D(P(x))$ e $D_R(x) = D(Q(x))$.

Dimostrazione. Dimostriamo $D_L(x) = D(P(x))$. Si ha che i è una discesa per $P(x)$ se e solo se nella notazione ad una riga di x l'elemento i si trova

dopo l'elemento $i + 1$ (altrimenti $i + 1$ si troverebbe sulla stessa riga di i). Ma ciò accade se e solo se i è una discesa sinistra di x .

Dimostriamo $D_R(x) = D(Q(x))$. Si ha che i è una discesa destra per x se e solo se $x(i + 1) < x(i)$. Dunque, per l'algoritmo della costruzione dell'insertion tableau, si avrà che all' $i + 1$ -esimo passo la cella che si aggiunge è in una riga strettamente inferiore rispetto a quella aggiunta al passo i , dunque i è una discesa di $Q(x)$. \square

5.2 Equivalenza di Knuth

Definizione 5.2.1. Siano $x, y \in \mathfrak{S}_n$. Definiamo $x \underset{K}{\approx} y$ se esiste $1 < i < n$ tale che $x = x_1 \dots x_n$ e $y = y_1 \dots y_n$ differiscono solo per la sottostringa $x_{i-1}x_i x_{i+1}$ e $y_{i-1}y_i y_{i+1}$ e queste sottostringhe sono in relazione l'una con l'altra in uno dei due seguenti modi:

$$bca \longleftrightarrow bac \quad \text{o} \quad cab \longleftrightarrow acb,$$

dove $a < b < c$. Questa relazione è chiamata **equivalenza di Knuth elementare**. L'**equivalenza di Knuth** è la relazione di equivalenza generata da $x \underset{K}{\approx} y$, indicata con $\underset{K}{\sim}$. Le classi di equivalenza rispetto a $\underset{K}{\sim}$ sono dette **classi di Knuth**.

Teorema 5.2.2. Siano $x, y \in \mathfrak{S}_n$. Allora $P(x) = P(y)$ se e solo se $x \underset{K}{\sim} y$.

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema si trova in [Sag01, Teorema 3.4.3]. \square

Questo risultato caratterizza la relazione di avere la stessa insertion tableau. Analogamente, si può caratterizzare anche la relazione di avere la stessa recording tableau come segue.

Definizione 5.2.3. Siano $x, y \in \mathfrak{S}_n$. Definiamo $x \underset{dK}{\approx} y$ se x e y differiscono solo per la trasposizione di due valori i e $i + 1$ e uno fra $i - 1$ e $i + 2$ compare in una posizione fra quella di i e $i + 1$. Questa relazione è chiamata **equivalenza di Knuth elementare duale**. L'**equivalenza di Knuth duale** è la relazione di equivalenza generata da $x \underset{dK}{\approx} y$, indicata con $\underset{dK}{\sim}$.

Teorema 5.2.4. Siano $x, y \in \mathfrak{S}_n$. Allora $Q(x) = Q(y)$ se e solo se $x \underset{dK}{\sim} y$.

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema si trova in [Sag01, Teorema 3.6.10]. \square

L'equivalenza di Knuth, soprattutto quella duale, è collegata ai grafi di Kazhdan-Lusztig. In particolare, vedremo come l'equivalenza e l'equivalenza duale di Knuth corrispondano a particolari lati del K-L grafo colorato del gruppo simmetrico.

Siano $x, y \in \mathfrak{S}_n$ e sia $1 < i < n$. Definiamo ora un raffinamento dell'equivalenza elementare di Knuth.

Definizione 5.2.5. Diciamo che $x \overset{i}{\underset{K}{\approx}} y$ se $x \underset{K}{\approx} y$ e $x_j = y_j$ se $|j - i| \geq 2$. Chiamiamo questo un **passo di Knuth di tipo i** .

Se $x \overset{i}{\underset{K}{\approx}} y$, allora x e y differiscono solo per una relazione di Knuth, $bac = bca$ o $acb = cab$ con $a < b < c$, in posizione $i - 1, i$ e $i + 1$.

Lemma 5.2.6. Siano $x, y \in \mathfrak{S}_n$, $l(x) < l(y)$ e $1 < i < n$. Allora sono equivalenti:

- (i) $x \overset{i}{\underset{K}{\approx}} y$;
- (ii) $xs < x < xs' = y < ys$ con $\{s, s'\} = \{s_{i-1}, s_i\}$;
- (iii) esista una coppia di lati antiparalleli fra x e y , colorati con s_{i-1} e s_i , nel K-L grafo colorato destro di \mathfrak{S}_n .

Dimostrazione. Dimostriamo l'uguaglianza dei punti (ii) e (iii). Supponiamo $xs < x < xs' = y < ys$ con $\{s, s'\} = \{s_{i-1}, s_i\}$. Allora si verifica che $\{x, y\} \in E$ per il Lemma 4.1.4.(ii). Inoltre, $s \in D_R(x) \setminus D_R(y)$ e dunque $x \xrightarrow{s} y$ nel K-L grafo colorato destro. Analogamente, $y \xrightarrow{s'} x$ siccome $s' \in D_R(y) \setminus D_R(x)$ e abbiamo dimostrato (iii).

Supponiamo ora che esista una coppia di lati antiparalleli fra x e y , colorati con s_{i-1} e s_i , nel K-L grafo colorato destro di \mathfrak{S}_n . Supponiamo $x \xrightarrow{s_{i-1}} y$, l'altro caso è analogo. Dunque, si ha che $s_i \in D_R(y) \setminus D_R(x)$ e $s_{i-1} \in D_R(x) \setminus D_R(y)$. Siccome $l(x) < l(y)$, per il Lemma 4.1.9, si ha che $l(y) = l(x) + 1$ e dunque $y = xs_i$. Da queste informazioni segue:

$$xs_{i-1} < x < xs_i = y < ys_{i-1},$$

verificando così il punto (ii).

Dimostriamo ora l'uguaglianza dei punti (i) e (ii). Supponiamo $x \stackrel{i}{\approx}_K y$ e distinguiamo due casi, a seconda di che tipo di relazione c'è tra i valori nelle posizioni $i - 1$, i e $i + 1$. Se si ha $bac = bca$, allora si ha che $y = xs_i$. Consideriamo xs_{i-1} e guardiamo il numero di inversioni rispetto a x : infatti, queste due permutazioni differiscono solo nei posti $i - 1$ e i e dunque il loro numero di inversioni differisce solo per ciò che succede in questi due posizioni. In xs_{i-1} si ha abc e dunque un'inversione in meno rispetto a x siccome $a < b$. Di conseguenza, usando il Lemma 1.2.12, si ha che $xs_{i-1} < x$. Inoltre, ragionando in modo analogo, si ottiene $y < ys_i$. Dunque

$$xs_{i-1} < x < xs_i = y < ys_{i-1}.$$

Se invece si ha $acb = cab$, si ragiona similmente invertendo i ruoli di s_{i-1} e s_i , verificando così il punto (ii).

Supponiamo ora $xs_{i-1} < x < xs_i = y < ys_{i-1}$. Nelle posizioni $i - 1$, i e $i + 1$ di questi elementi abbiamo

$$\begin{aligned} xs_{i-1} &\longleftrightarrow x(i)x(i-1)x(i+1) \\ x &\longleftrightarrow x(i-1)x(i)x(i+1) \\ y = xs_i &\longleftrightarrow x(i-i)x(i+1)x(i) \\ ys = xs_i s_{i-1} &\longleftrightarrow x(i+1)x(i-1)x(i). \end{aligned}$$

Sapendo questo, si possono ricavare le seguenti relazioni grazie al Lemma 1.2.12:

$$\begin{cases} x(i) < x(i-1) \\ x(i+1) > x(i) \\ x(i+1) > x(i-1), \end{cases}$$

ossia $x(i) < x(i-1) < x(i+1)$. Si ha dunque che x e y differiscono nella notazione ad una riga solo nelle posizioni $i - 1$, i e $i + 1$ per una relazione del tipo $bac = bca$, con $a < b < c$. Per definizione segue $x \stackrel{i}{\approx}_K y$.

L'unico caso che resta da mostrare è quello simile a quest'ultimo dove s_{i-1} e s_i sono invertiti, ma la dimostrazione è analoga. Dunque si ha che (ii) implica (i). \square

Un risultato analogo a quello precedente può essere ottenuto anche per la relazione di Knuth duale e i K-L grafi colorati sinistri.

Lemma 5.2.7. Siano $x, y \in \mathfrak{S}_n$ con $l(x) < l(y)$. Allora sono equivalenti:

- (i) $x \underset{\text{dK}}{\approx} y$;
- (ii) $xs < x < xs' = y < ys$ per qualche $s, s' \in S$;
- (iii) esista una coppia di lati antiparalleli fra x e y nel K-L grafo colorato sinistro di \mathfrak{S}_n .

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del Lemma 5.2.6. \square

In particolare, segue che l'equivalenza duale di Knuth implica l'equivalenza sinistra della Definizione 4.2.1.

Corollario 5.2.8. Siano $x, y \in \mathfrak{S}_n$ tali che $x \underset{\text{dK}}{\sim} y$. Allora $x \sim_L y$.

Dimostrazione. Siccome la relazione di equivalenza $\underset{\text{dK}}{\sim}$ è la chiusura transitiva della relazione $\underset{\text{dK}}{\approx}$, esiste un cammino $x = x_0 \underset{\text{dK}}{\approx} x_1 \underset{\text{dK}}{\approx} \dots \underset{\text{dK}}{\approx} x_k = y$. Per il Lemma 5.2.7, se $x_i \underset{\text{dK}}{\approx} x_{i+1}$, allora esiste una coppia di lati antiparalleli tra x_i e x_{i+1} . Dunque esiste sia un cammino da x in y sia un cammino da y in x , ossia $x \sim_L y$. \square

Lemma 5.2.9. Siano $x, y \in \mathfrak{S}_n$ e supponiamo $x \overset{i}{\underset{\text{K}}{\approx}} y$. Allora si ha che $Q(x)$ e $Q(y)$ differiscono solo per una trasposizione s_{i-1} o s_i e inoltre $Q(x)$ determina in modo univoco $Q(y)$.

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema si può trovare in [BB05, Lemma 6.4.4]. \square

Il Lemma 5.2.9 sottolinea l'influenza che la relazione $\overset{i}{\underset{\text{dK}}{\approx}}$ ha sulle recording tableaux sotto la corrispondenza di Robinson-Schensted.

Esempio 5.2.10. Consideriamo $x = 4735162$ e $y = 4731562$ in \mathfrak{S}_7 . Si ha che $x \overset{4}{\underset{\text{K}}{\approx}} y$ e le recording tableaux di queste due permutazioni sono illustrate rispettivamente in Figura 5.5 e in Figura 5.6. Questi tableaux differiscono per la trasposizione s_4 . Inoltre, notiamo che applicando la trasposizione s_3 ad entrambi questi tableaux non si ottengono più dei tableaux standard.

1	2	6
3	4	
5	7	

Figura 5.5: Recording tableau $Q(x)$

1	2	6
3	5	
4	7	

Figura 5.6: Recording tableau $Q(y)$

Dunque, sapendo che $i = 4$ e non si può applicare s_3 , è chiaro come $Q(x)$ determini univocamente $Q(y)$ e viceversa.

Corollario 5.2.11. Siano $x, y \in \mathfrak{S}_n$ e supponiamo esista un cammino di Knuth etichettato $x \underset{K}{\overset{i_1}{\approx}} x_1 \underset{K}{\overset{i_2}{\approx}} \dots \underset{K}{\overset{i_k}{\approx}} x_k = y$. Allora $Q(x)$ determina in modo univoco $Q(y)$.

Dimostrazione. La dimostrazione di questo corollario è una diretta conseguenza del Lemma 5.2.9. \square

Definizione 5.2.12. Sia $1 < i < n$. Definiamo

$$\mathcal{DES}_R(i) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathfrak{S}_n : |D_R(x) \cap \{i-1, i\}| = 1\}.$$

Osservazione 5.2.13. Osserviamo le seguenti caratterizzazioni equivalenti di $\mathcal{DES}_R(i)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{DES}_R(i) &= \{x \in \mathfrak{S}_n : x \underset{K}{\overset{i}{\approx}} y, \text{ per qualche } y \in \mathfrak{S}_n\} \\ &= \{x \in \mathfrak{S}_n : x_{i-1}x_i x_{i+1} \text{ non è monotona}\}. \end{aligned}$$

Osservazione 5.2.14. Se $x \in \mathcal{DES}_R(i)$, allora solo uno fra xs_{i-1} e xs_i è ancora in $\mathcal{DES}_R(i)$. Infatti, se $a < b < c$, allora la sottostringa $x_{i-1}x_i x_{i+1}$ può essere solo una delle seguenti 4 tipologie:

- (1) acb
- (2) bac
- (3) cab

(4) bca .

Nel caso (1) la sottostringa di xs_i diventa abc e dunque $xs_i \notin \mathcal{DES}_R(i)$, mentre quella di xs_{i-1} diventa cab , ossia come in (3), e dunque $xs_{i-1} \in \mathcal{DES}_R(i)$.

Nel caso (2) la sottostringa di xs_{i-1} diventa abc e dunque $xs_{i-1} \notin \mathcal{DES}_R(i)$, mentre quella di xs_i diventa bca , ossia come in (4), e dunque $xs_i \in \mathcal{DES}_R(i)$.

Nel caso (3) la sottostringa di xs_i diventa cba e dunque $xs_i \notin \mathcal{DES}_R(i)$, mentre quella di xs_{i-1} diventa acb , ossia come in (1), e dunque $xs_{i-1} \in \mathcal{DES}_R(i)$.

Nel caso (4) la sottostringa di xs_{i-1} diventa cba e dunque $xs_{i-1} \notin \mathcal{DES}_R(i)$, mentre quella di xs_i diventa bac , ossia come in (2), e dunque $xs_i \in \mathcal{DES}_R(i)$.

Se $x \in \mathcal{DES}_R(i)$, allora, per quanto visto nell'Osservazione 5.2.14, esiste ed è unica $x^* \in \mathcal{DES}_R(i)$ tale che $x^* \stackrel{i}{\approx}_K x$. Inoltre, si ha che

$$\begin{aligned} i^* : \mathcal{DES}_R(i) &\longrightarrow \mathcal{DES}_R(i) \\ x &\longmapsto x^* \end{aligned}$$

è un'involuzione per l'Osservazione 5.2.14.

Teorema 5.2.15. Supponiamo $x, y \in \mathcal{DES}_R(i)$ e $\{x, y\}$ un lato di $\Gamma_{\mathfrak{S}_n}$. Allora $\{x^*, y^*\}$ è ancora un lato di $\Gamma_{\mathfrak{S}_n}$ e $\mu(x^*, y^*) = \mu(x, y)$.

Dimostrazione. Supponiamo, senza perdere di generalità, $l(x) < l(y)$, dunque $x < y$ siccome $\{x, y\} \in E$. Distinguiamo due casi, a seconda se $x^{-1}y$ appartenga o meno a $\langle s_{i-1}, s_i \rangle$.

Supponiamo dunque $x^{-1}y \in \langle s_{i-1}, s_i \rangle$ e distinguiamo alcuni casi:

- (i) $x^{-1}y = s_i$: allora $y = xs_i \in \mathcal{DES}_R(i)$. Dunque, per l'Osservazione 5.2.14, si ha $y^* = x$ e $x^* = y$, da cui segue la tesi.
- (ii) $x^{-1}y = s_{i-1}$: è analogo a (i).
- (iii) $x^{-1}y = s_i s_{i-1}$ o $x^{-1}y = s_{i-1} s_i$: allora $l(y) - l(x) = 2$ e, per l'Osservazione 2.3.3, $\{x, y\} \notin E$. Dunque questo caso non si può verificare.
- (iv) $x^{-1}y = s_i s_{i-1} s_i = s_{i-1} s_i s_{i-1}$: allora $y = xs_i s_{i-1} s_i = xs_{i-1} s_i s_{i-1} \in \mathcal{DES}_R(i)$. I valori nella notazione ad una riga di y nelle posizioni

$i - 1$, i e $i + 1$, rispetto a quelli di x , sono $y_{i-1}y_iy_{i+1} = x_{i+1}x_ix_{i-1}$. Distinguiamo ora altri due casi:

- (a) $y^* = ys_i = xs_is_{i-1}$: allora y è del tipo (2) o (4) visti nell'Osservazione 5.2.14. Se y fosse come in (2), risulterebbe $l(x) > l(y)$ per la Proposizione 1.2.12, contro la nostra ipotesi. Dunque, y deve essere come in (4). Da ciò segue che x deve essere come in (1) e dunque $x^* = xs_{i-1}$. Si ha quindi $x^* > y^*$. Calcolando il numero di inversioni, segue $l(x, y) = l(y^*, x^*) = 1$ e dunque $P_{x,y} = P_{y^*,x^*} = 1$. In particolare, $\mu(x^*, y^*) = \mu(x, y)$.
- (b) $y^* = ys_{i-1}$: per questo caso si può ragionare in maniera analoga a quanto fatto nel caso precedente.

Supponiamo ora $x^{-1}y \notin \langle s_{i-1}, s_i \rangle$ e distinguiamo due casi: $x^{-1}x^* = y^{-1}y^*$ e $x^{-1}x^* \neq y^{-1}y^*$.

Supponiamo $x^{-1}x^* = y^{-1}y^*$. Indichiamo con $\{s, t\} = \{s_{i-1}, s_i\}$ dove $s = x^{-1}x^* = y^{-1}y^*$. Dunque $x^* = xs$ e $y^* = ys$. Supponiamo $x^* = xs < x$: si ha dunque $xst < xs = x^* < x < xt$. Siccome, per ipotesi, $\{x, y\}$ è un lato di $\Gamma_{\mathfrak{S}_n}$, per quanto già constatato nell'Osservazione 2.3.8, si deve verificare $y^* < y$ e dunque $yst < ys = y^* < y < yt$.

Se $x \not\leq ys = y^*$, allora la formula per i polinomi di Kazhdan-Lusztig (2.9)

$$P_{x,y}(q) = P_{sx,sy}(q) + qP_{x,sy} - \sum \mu(z, sy)q^{\frac{1}{2}l(z,y)}P_{x,z}, \quad (5.1)$$

diventa $P_{x,y} = P_{x^*,y^*}$, siccome $\mu(z, y^*)P_{x,z} = 0, \forall x \leq z \leq y$, poiché non si può verificare contemporaneamente $x \leq z \leq y^*$ e $P_{x,y^*} = 0$ dato che $x \not\leq y^*$. Da cui segue $\{x^*, y^*\}$ è un lato di $\Gamma_{\mathfrak{S}_n}$ e $\mu(x, y) = \mu(x^*, y^*)$.

Se $x \leq ys = y^*$, per la Proprietà di Sollevamento (Teorema 1.3.5), segue che $xt \leq y^*$ e dunque $z = xt$ compare in (5.1). Consideriamo i termini della sommatoria rispettivi a $z \neq xt$ e $\mu(z, y^*) \neq 0$: siccome $t \in D_R(y^*)$, allora $t \in D_R(z)$. Dunque $\deg(q^{\frac{1}{2}(l(y)-l(z))}P_{x,z}) \leq \frac{1}{2}(l(y)-l(x)-2)$. Se $z = xt$, allora $P_{x,z} = 1$. L'unico termine della sommatoria con grado $\frac{1}{2}(l(y)-l(x)-1)$ è proprio quello corrispondente a $z = xt$. Infine, $qP_{x,y^*} - \mu(xt, y^*)q^{\frac{1}{2}(l(y)-l(x)-1)}$ è un polinomio di grado minore di $\frac{1}{2}(l(y)-l(x)-1)$ siccome $\mu(xt, y^*) = \mu(x, y^*)$ per il Corollario 2.3.7. Da ciò segue $\mu(x, y) = \mu(x^*, y^*)$.

Il caso $x^* = xs > x$ è analogo.

Supponiamo ora $x^{-1}x^* \neq y^{-1}y^*$. Possiamo assumere, senza perdere di generalità, che $xst < xs = x^* < x < xt$ e $ys < y < yt = y^* < yts$. Dunque si avrà $xst < xs < x < y < yt < yts$. Da (2.9), si ha

$$P_{xs,yt}(q) = P_{xst,y}(q) + qP_{xs,y} - \sum \mu(z,y)q^{\frac{1}{2}l(z,yt)}P_{xs,z}.$$

Il coefficiente che ci interessa è quello relativo al grado $\frac{1}{2}(l(yt) - l(xs) - 1) = \frac{1}{2}(l(y) - l(xs)) > \frac{1}{2}(l(y) - l(xs) - 1)$, dunque l'addendo $P_{xst,y}(q)$ non influisce sul coefficiente di tale grado. D'altra parte, siccome $s \in D_R(y)$, per avere $\mu(z,y) \neq 0$, si deve verificare $s \in D_R(z)$. Ma se ciò accade, siccome $s \notin D_R(xs)$, allora $q^{\frac{1}{2}l(z,yt)}P_{xs,z}$ è un polinomio di grado strettamente inferiore a $\frac{1}{2}(l(yt) - l(xs) - 1)$ e quindi non influisce sul coefficiente di tale grado. Infine, siccome $P_{xs,y} = P_{x,y}$ per il Corollario 2.3.7, si ha che $\mu(xs,yt) = \mu(x,y)$, proprio come volevamo. \square

Corollario 5.2.16. Se $x \in \mathcal{DES}_R(i)$ e $x \sim_L y$, allora $y \in \mathcal{DES}_R(i)$ e $x^* \sim_L y^*$.

Dimostrazione. Siccome $x \sim_L y$, per la Proposizione 4.2.9, si avrà $D_R(x) = D_R(y)$ e dunque $y \in \mathcal{DES}_R(i)$ per definizione. Inoltre, si ha un cammino circolare

$$x \rightarrow x_1 \rightarrow \cdots \rightarrow y \rightarrow y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x$$

in $\tilde{\Gamma}_{\mathfrak{S}_n}$. Tutti gli elementi di questo circuito sono equivalenti rispetto alla relazione \sim_L e dunque tutti questi elementi sono in $\mathcal{DES}_R(i)$. Per il Teorema 5.2.15, c'è un cammino circolare corrispondente anche fra

$$x^* - x_1^* - \cdots - y^* - y_1^* - \cdots - x^*$$

in $\Gamma_{\mathfrak{S}_n}$. Per il Teorema 5.1.2 e per il Teorema 5.2.2, si ha $P(x) = P(x^*)$ e $D_L(x) = D(P(x)) = D(P(x^*)) = D_L(x^*)$ e analogamente per ogni x_i e y_j . Dunque c'è anche un cammino orientato

$$x^* \rightarrow x_1^* \rightarrow \cdots \rightarrow y^* \rightarrow y_1^* \rightarrow \cdots \rightarrow x^*$$

in $\tilde{\Gamma}_{\mathfrak{S}_n}$, ossia $x^* \sim_L y^*$. \square

5.3 Un caso particolare: il gruppo simmetrico

In questa ultima sezione, vogliamo dimostrare come nel caso del gruppo simmetrico la rappresentazione di Kazhdan-Lusztig coincide con la rappresentazione in irriducibili. Per fare ciò, iniziamo riassumendo alcuni fatti preliminari sulle rappresentazioni irriducibili del gruppo simmetrico.

Le rappresentazioni irriducibili ρ_λ sono naturalmente indicizzate dalle partizioni $|\lambda| = n$. La parola “naturale” deriva dal fatto che le rappresentazioni irriducibili di un gruppo sono tante quante le sue classi di coniugio (si veda per esempio [FH91, Proposizione 2.30, Capitolo 2]) e, nel caso del gruppo simmetrico, queste sono in corrispondenza con le partizioni $|\lambda| = n$. Nonostante la corrispondenza fra classi di coniugio e partizioni sia canonica, il teorema che fornisce l’equivalenza del numero di classi di coniugio e di rappresentazioni irriducibili non costruisce una corrispondenza fra questi. Tuttavia, per quanto riguarda il gruppo simmetrico, una delle costruzioni delle rappresentazioni irriducibili illustrata in [FH91, Capitolo 4] porta ad un teorema di classificazione delle rappresentazioni irriducibili mediante le partizioni, ossia mediante le classi di coniugio del gruppo stesso (si veda [FH91, Teorema 4.3]). Questa diretta corrispondenza fra classi di coniugio di \mathfrak{S}_n e rappresentazioni irriducibili di \mathfrak{S}_n è un risultato unico, siccome un tale esito non è stato dimostrato nel caso generale.

Inoltre, si ha che la dimensione della rappresentazione irriducibile ρ_λ è proprio f_λ , ossia il numero di tableau standard di Young della forma λ . Una dimostrazione di questo fatto si può trovare in [Sag01, Teorema 2.6.5].

Un altro importante risultato sulle rappresentazioni irriducibili del gruppo simmetrico riguarda la cosiddetta **Formula di Young** (si veda [FH91, Capitolo 4, Sezione 3, Corollario 4.39]):

$$\mathrm{Ind}_J^{\mathfrak{S}}[1] \cong \bigoplus_{|\lambda|=n} |\{T \in \mathrm{SYT}_\lambda : D(T) \subseteq S \setminus J\}| \rho_\lambda. \quad (5.2)$$

I numeri $K_{\lambda,J} = |\{T \in \mathrm{SYT}_\lambda : D(T) \subseteq S \setminus J\}|$ sono detti i **numeri di Kostka**. I sottoinsiemi $J \subseteq S$ sono in corrispondenza con le partizioni di n . Infatti, se $J = \{s_1, \dots, s_{k_1-1}, s_{k_1+1}, \dots, s_{k_2-1}, s_{k_2+1}, \dots, s_{k_l-1}, s_{k_l+1}, \dots, s_n\}$, allora si ha che $\langle J \rangle \cong \mathfrak{S}_{k_1} \times \mathfrak{S}_{k_2-k_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{n-k_l}$ e dunque J corrisponde alla partizione $\lambda = (k_1, k_2 - k_1, \dots, n - k_l)$. Tali sottoinsiemi possono essere

scelti in modo tale che la matrice $(K_{\lambda,J})$, detta **matrice di Kostka**, sia triangolare superiore e presenti tutti 1 sulla diagonale. Da ciò deriva che la relazione in 5.2 è invertibile e determina ρ_λ come una funzione dei caratteri di $\text{Ind}_J^S[1]$.

Ritorniamo ora alle rappresentazioni di Kazhdan-Lusztig. Vogliamo mostrare che ogni cella sinistra di \mathfrak{S}_n può essere associata ad una partizione in modo tale che la rappresentazione corrispondente a tale cella sia proprio quella irriducibile associata a tale partizione.

Teorema 5.3.1. Per ogni cella sinistra \mathcal{C} di \mathfrak{S}_n esiste un tableau T tale che

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathfrak{S}_n \text{ tali che } Q(x) = T\}.$$

Dimostrazione. Per la caratterizzazione delle classi duali di Knuth vista nel Teorema 5.2.4, l'enunciato di questo teorema afferma che le celle sinistre corrispondono alle classi duali di Knuth. Per il Corollario 5.2.8, si ha che se due elementi stanno nella stessa classe duale, allora sono anche nella stessa cella. Dobbiamo quindi mostrare il viceversa. Per fare ciò, mostreremo che ogni componente fortemente connessa di $\tilde{\Gamma}_{\mathfrak{S}_n}$ è in realtà connessa anche da una sequenza di lati antiparalleli.

Supponiamo che $x \sim_L y$ e sia $x \underset{K}{\overset{i_1}{\approx}} x_1 \underset{K}{\overset{i_2}{\approx}} \dots \underset{K}{\overset{i_j}{\approx}} x_j$ un cammino di Knuth. Siccome $x \in \mathcal{DES}_R(i_1)$ e $x \sim_L y$, allora per il Corollario 5.2.16 si ha che $y \in \mathcal{DES}_R(i_1)$ e $x_1 = x^{*i_1} \sim_L y^{*i_1}$. Ragionando analogamente, si ottiene che esiste un unico cammino di Knuth $y = y_0 \underset{K}{\overset{i_1}{\approx}} y_1 \underset{K}{\overset{i_2}{\approx}} \dots \underset{K}{\overset{i_j}{\approx}} y_j$, dove $y_l \stackrel{\text{def}}{=} y_{l-1}^{*i_l}$. Inoltre, $x_l \sim_L y_l$ per ogni $l \in \{1, \dots, j\}$. Dunque, per la Proposizione 4.2.9 si ha $D_R(x_j) = D_R(y_j)$, ossia per ogni $z \sim_L x$ esiste $\tilde{z} \sim_L y$ tale che $D_R(z) = D_R(\tilde{z})$, ossia

$$\{D_R(z) : z \sim_L x\} = \{D_R(\tilde{z}) : \tilde{z} \sim_L y\}. \quad (5.3)$$

Sia ora $A \in \{D_R(z) : z \underset{K}{\sim} x\}$ l'ultimo insieme secondo l'ordinamento lessicografico e sia x_A tale che $x_A \underset{K}{\sim} x$ e $D_R(x_A) = A$. Vogliamo mostrare che $Q(x_A)$ è un tableau superstandard per righe e che x_A è univocamente determinato. Per provare ciò, poniamo $\lambda = \text{sh}(P(x))$. Per il Teorema 5.1.1 e per il Teorema 5.1.2, si ha che $\{D_R(z) : z \underset{K}{\sim} x\} = \{D(T) : T \in \text{SYT}_\lambda\}$ e l'ultimo insieme, secondo l'ordine lessicografico, della famiglia $\{D(T) : T \in \text{SYT}_\lambda\}$

è quello corrispondente al tableau superstandard per righe di forma λ . Sia ora $x \underset{K}{\overset{i_1}{\approx}} x_1 \underset{K}{\overset{i_2}{\approx}} \dots \underset{K}{\overset{i_k}{\approx}} x_k = x_A$ un cammino di Knuth. Analogamente a prima, esiste un unico cammino di Knuth $y \underset{K}{\overset{i_1}{\approx}} y_1 \underset{K}{\overset{i_2}{\approx}} \dots \underset{K}{\overset{i_k}{\approx}} y_k = y_A$ tale che $D_R(y_A) = D_R(x_A) = A$. Siccome avere l'insieme delle discese ultimo rispetto all'ordine lessicografico in SYT_λ caratterizza il tableau, si ha che $Q(y_A) = Q(x_A)$. Per il Corollario 5.2.11, ripercorrendo i due cammini, si ottiene $Q(y) = Q(x)$ e dunque per il Teorema 5.2.4 si ha $x \underset{dK}{\sim} y$. Abbiamo dunque dimostrato che $x \underset{L}{\sim} y$ implica $x \underset{dK}{\sim} y$, ottenendo così la tesi. \square

Una diretta conseguenza del precedente teorema è la buona positura della seguente definizione.

Definizione 5.3.2. Data \mathcal{C} cella sinistra di $\tilde{\Gamma}_{\mathfrak{S}_n}$, definiamo forma di \mathcal{C} la partizione $\text{sh}(Q(x))$, per qualche $x \in \mathcal{C}$ e indicheremo tale partizione con il simbolo $\text{sh}(\mathcal{C})$.

Teorema 5.3.3. Se \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 sono due celle sinistre di $\tilde{\Gamma}_{\mathfrak{S}_n}$ tali che $\text{sh}(\mathcal{C}_1) = \text{sh}(\mathcal{C}_2)$, allora $\Gamma_{\mathcal{C}_1} \cong \Gamma_{\mathcal{C}_2}$, come grafi etichettati.

Dimostrazione. Supponiamo che $\mathcal{C}_i = \{x \in \mathfrak{S}_n : Q(x) = Q_i\}$, per $i = 1, 2$, dove Q_1 e Q_2 sono due tableaux della stessa forma. Vogliamo mostrare che la mappa

$$(P, Q_1) \mapsto (P, Q_2)$$

induce un isomorfismo $\Gamma_{\mathcal{C}_1} \cong \Gamma_{\mathcal{C}_2}$. Denotiamo ora le permutazioni di \mathfrak{S}_n con la corrispondente coppia di tableaux standard secondo la corrispondenza di Robinson-Schensted illustrata nel Teorema 5.1.1. Per il Teorema 5.3.1, segue che tale mappa è una biezione dei vertici che preserva le etichette siccome $D_L(x) = D(P(x))$, come dimostrato nel Teorema 5.1.2. Dobbiamo quindi dimostrare che anche i lati e le loro etichette si preservano. Supponiamo che $(P_1, Q_1) - (P_2, Q_1)$ sia un lato in $\Gamma_{\mathcal{C}_1}$ etichettato con μ . Siccome (P_1, Q_1) e (P_2, Q_1) hanno la stessa insertion tableau, allora per il Teorema 5.2.2 esiste un cammino di Knuth che colleghi queste due permutazioni:

$$(P_1, Q_1) \underset{K}{\overset{i_1}{\approx}} (P_1, Q^{(1)}) \underset{K}{\overset{i_2}{\approx}} (P_1, Q^{(2)}) \underset{K}{\overset{i_3}{\approx}} \dots \underset{K}{\overset{i_k}{\approx}} (P_1, Q_2)$$

Inoltre, siccome (P_1, Q_1) e (P_2, Q_1) hanno lo stesso insieme delle discese destre e $(P_1, Q_1) \in \mathcal{DES}_R(i_1)$, allora per il Teorema 5.2.15 segue che

$(P_1, Q^{(1)}) - (P_2, Q_1)^{*i_1}$ è un lato di $\Gamma_{\mathfrak{S}_n}$ etichettato con μ e, per il Lemma 5.2.9, si ha $(P_2, Q_1)^{*i_1} = (P_2, Q^{(1)})$. Ripetendo questo ragionamento per i k passi successivi, otteniamo che $(P_1, Q_2) - (P_2, Q_2)$ è un lato di $\Gamma_{\mathfrak{S}_n}$ con etichetta μ . \square

Dunque, per il teorema precedente, possiamo associare K-L grafi e K-L rappresentazioni alle partizioni di n definendo

$$\Gamma_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{\mathcal{C}} \quad \tilde{\Gamma}_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\Gamma}_{\mathcal{C}} \quad KL_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} KL_{\mathcal{C}},$$

dove \mathcal{C} è una cella sinistra con $\text{sh}(\mathcal{C}) = \lambda$.

Esempio 5.3.4. Mostriamo quali rappresentazioni di Kazhdan-Lusztig di \mathfrak{S}_4 sono isomorfe dimostrando quali celle corrispondono alla stessa partizione. Per fare ciò, per ogni cella calcoleremo l'insertion tableau e recording tableau di un elemento per determinare a quale partizione è associata tale cella. Non è difficile mostrare che:

- l'insertion tableau e il recording tableau di $s_1s_2s_3s_1s_2s_1$ ha forma $(1, 1, 1, 1)$ e dunque $\text{sh}(\mathcal{C}_1) = (1, 1, 1, 1)$;
- l'insertion tableau e il recording tableau di $s_1s_2s_3s_1$ ha forma $(2, 1, 1)$ e dunque $\text{sh}(\mathcal{C}_2) = (2, 1, 1)$;
- l'insertion tableau e il recording tableau di $s_1s_2s_1$ e dunque $\text{sh}(\mathcal{C}_3) = (2, 1, 1)$;
- l'insertion tableau e il recording tableau di $s_2s_3s_2$ e dunque $\text{sh}(\mathcal{C}_4) = (2, 1, 1)$;
- l'insertion tableau e il recording tableau di s_3s_1 ha forma $(2, 2)$ e dunque $\text{sh}(\mathcal{C}_5) = (2, 2)$;
- l'insertion tableau e il recording tableau di $s_3s_1s_2$ ha forma $(2, 2)$ e dunque $\text{sh}(\mathcal{C}_6) = (2, 2)$;
- l'insertion tableau e il recording tableau di s_1 ha forma $(3, 1)$ e dunque $\text{sh}(\mathcal{C}_7) = (3, 1)$;

- l'insertion tableau e il recording tableau di s_3 ha forma $(3, 1)$ e dunque $\text{sh}(\mathcal{C}_8) = (3, 1)$;
- l'insertion tableau e il recording tableau di s_2 ha forma $(3, 1)$ e dunque $\text{sh}(\mathcal{C}_9) = (3, 1)$;
- l'insertion tableau e il recording tableau di e ha forma (4) e dunque $\text{sh}(\mathcal{C}_{10}) = (4)$.

Dunque si ha

$$\begin{aligned} KL_{\mathcal{C}_2} &\cong KL_{\mathcal{C}_3} \cong KL_{\mathcal{C}_4}; \\ KL_{\mathcal{C}_5} &\cong KL_{\mathcal{C}_6}; \\ KL_{\mathcal{C}_7} &\cong KL_{\mathcal{C}_8} \cong KL_{\mathcal{C}_9}. \end{aligned}$$

Teorema 5.3.5. Si ha che $KL_\lambda \cong \rho_\lambda$ per ogni λ partizione di n .

Dimostrazione. Per il Teorema 4.3.11 si ha

$$\text{Ind}_J^S[1] \cong \bigoplus_{D_R(\mathcal{C}) \subseteq S \setminus J} KL_{\mathcal{C}}. \quad (5.4)$$

Per il Teorema 5.3.1 si ha che $\mathcal{C} = \{x \in \mathfrak{S}_n : Q(x) = T\}$ e dunque $D_R(\mathcal{C}) = D(Q(x))$. Inoltre, se \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 hanno la stessa forma λ si ha, per il Teorema 5.3.3, $KL_{\mathcal{C}_1} \cong KL_{\mathcal{C}_2} \stackrel{\text{def}}{=} KL_\lambda$. Inoltre il numero di celle di forma λ è f_λ , ossia $|\{Q \in SYT_\lambda\}|$ e dunque l'equazione (5.4) diventa

$$\text{Ind}_J^S[1] \cong \bigoplus_{|\lambda|=n} |\{Q \in SYT_\lambda : D(Q) \subseteq S \setminus J\}| KL_\lambda.$$

Infine per la Formula di Young, equazione (5.2), si ha

$$\begin{aligned} \text{Ind}_J^S[1] &\cong \bigoplus_{|\lambda|=n} |\{Q \in SYT_\lambda : D(Q) \subseteq S \setminus J\}| KL_\lambda \\ &\cong \bigoplus_{|\lambda|=n} |\{T \in SYT_\lambda : D(T) \subseteq S \setminus J\}| \rho_\lambda. \end{aligned}$$

Dalla teoria dei caratteri, segue la tesi. □

Bibliografia

- [BB05] Anders Björner and Francesco Brenti. *Combinatorics of Coxeter groups*, volume 231 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2005.
- [EGH⁺11] Pavel I Etingof, Oleg Golberg, Sebastian Hensel, Tiankai Liu, Alex Schwendner, Dmitry Vaintrob, and Elena Yudovina. *Introduction to representation theory*, volume 59. American Mathematical Soc., 2011.
- [FH91] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory*, volume 129 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.
- [Hum90] James E. Humphreys. *Reflection groups and Coxeter groups*, volume 29 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [KL79] David Kazhdan and George Lusztig. Representations of Coxeter groups and Hecke algebras. *Invent. Math.*, 53(2):165–184, 1979.
- [Lus03] G. Lusztig. *Hecke algebras with unequal parameters*, volume 18 of *CRM Monograph Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [Sag01] Bruce E. Sagan. *The symmetric group*, volume 203 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2001. Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions.