

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Alcune proprietà
del flusso dei campi vettoriali

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Bonfiglioli

Presentata da:
Lorenzo Ciaramella

Anno Accademico 2023/2024

ai miei genitori

Introduzione

Nel primo capitolo ci concentriamo sulle definizioni e sulle proprietà preliminari dei campi vettoriali e dei flussi. Iniziamo con una presentazione delle notazioni e delle convenzioni che useremo per trattare i campi vettoriali definiti su un sottoinsieme aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$. Definiamo un campo vettoriale su Ω come un qualsiasi operatore differenziale lineare (PDO in breve) X della forma

$$X = \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

dove a_1, \dots, a_N sono funzioni a valori reali su Ω , dette coefficienti di X . Il campo vettoriale avrà la stessa regolarità dei suoi coefficienti. Analizziamo la rappresentazione dei campi vettoriali sia come operatori differenziali, applicati a funzioni in $C^\infty(\Omega)$, sia come vettori colonna, e come queste rappresentazioni facilitino il calcolo e lo studio di essi. Introduciamo quindi il concetto di commutatore di due campi vettoriali, che sarà ripreso e avrà un ruolo centrale nell'ultimo capitolo della tesi.

Successivamente, ci occupiamo del concetto di flusso di un campo vettoriale, che è strettamente legato alle curve integrali. Definiamo quindi la curva integrale $\gamma(t)$ di un campo vettoriale X , sufficientemente regolare, come una qualsiasi soluzione del sistema di equazioni differenziali ordinarie (EDO in seguito) associato al campo vettoriale X . In particolare, se $x \in \Omega$ useremo una delle seguenti notazioni per indicare la curva integrale γ che inizia da x

$$\gamma(t, X, x), \quad \gamma_X(t, x), \quad \gamma_{X,x}(t), \quad \Psi_t^X(x),$$

la quale indica l'unica soluzione massimale del problema di Cauchy

$$(PC) \quad \begin{cases} \dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = x. \end{cases}$$

Indichiamo con $\mathcal{D}(X, x)$ il dominio della soluzione massimale di (PC). Inoltre, definiamo l'insieme

$$\mathcal{D}(X) := \left\{ (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N : x \in \Omega, t \in \mathcal{D}(X, x) \right\},$$

che ci consente di visualizzare il dominio delle curve integrali. In seguito, vedremo anche la relazione tra $\mathcal{D}(X)$ e il dominio del flusso di un campo vettoriale. Si discute poi come le curve integrali suddividano l'insieme su cui il campo vettoriale è definito in insiemi disgiunti, ognuno dei quali corrisponde all'immagine di una famiglia di curve integrali. Il

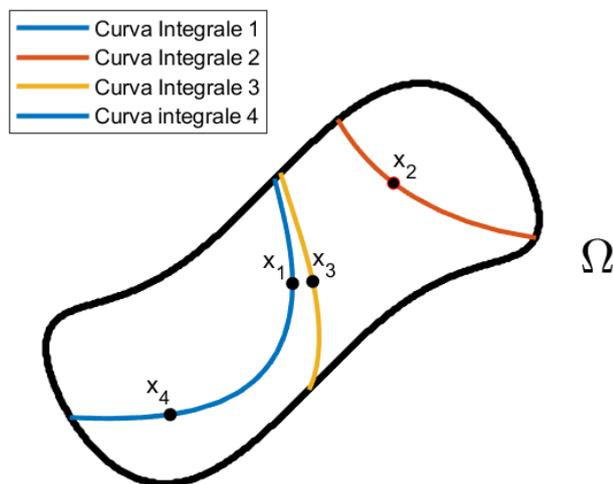


Figura 1: Partizione dell'insieme Ω nell'unione disgiunta degli insiemi immagine di famiglie di curve integrali. Le famiglie sono formate dalle curve integrali i cui insiemi immagine coincidono.

capitolo comprende anche vari esempi di campi vettoriali e delle rispettive curve integrali, mostrando come in casi semplici sia possibile determinarle esplicitamente. Gli esempi vengono ripresi dopo la definizione di flusso per illustrare ciò che esso rappresenta in situazioni elementari. Definiamo dunque il flusso di un campo vettoriale come la mappa $x \mapsto \Psi_t^X(x) := \gamma(t, X, x)$ quando ben posta. Denotiamo il suo dominio con il simbolo Ω_t^X e descriviamo il suo legame con il già definito $\mathcal{D}(X)$ e le sue proprietà basilari. Analizziamo in seguito la regolarità del flusso in funzione della regolarità del campo vettoriale a cui è associato. Infatti, se X è di classe C^k , allora la mappa $t \mapsto \Psi_t^X(x)$ risulta essere di classe C^{k+1} , mentre la mappa $(x, t) \mapsto \Psi_t^X(x)$ è di classe C^k . Inoltre, esistono le derivate miste del tipo (l'ordine della derivazione è interscambiabile)

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial t \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \Psi_t^X(x),$$

per ogni $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, N\}$, e queste sono continue. Al termine di questa analisi, forniamo un esempio in cui illustriamo la regolarità del flusso.

Ci concentriamo ora sulle proprietà del flusso di un campo vettoriale X di classe C^1 . In particolare, studieremo le **proprietà di semigrupp**, che descrivono come le

soluzioni di un'EDO interagiscono sotto la composizione rispetto alla variabile temporale, mettendo in risalto la relazione tra la dinamica del sistema e la struttura algebrica dei flussi. La Proposizione 1.13 elenca le quattro proprietà principali del flusso:

- **Proprietà di additività:** $\Psi_t^X \circ \Psi_s^X = \Psi_{t+s}^X$. La composizione di flussi equivale al flusso al tempo somma.
- **Proprietà di invertibilità:** le mappe Ψ_s^X e Ψ_{-s}^X sono una l'inversa dell'altra, dunque la proprietà garantisce la reversibilità temporale.
- **Proprietà di riscalatura:** $\Psi_{\alpha t}^X = \Psi_t^{\alpha X}$. Questa proprietà mostra la relazione tra il flusso generato da un campo vettoriale riscalato e quello generato dal campo vettoriale originale, riscalato nel tempo.
- **Proprietà di identità:** la mappa Ψ_0^X è la mappa identità su Ω , indicando che in assenza di una variazione nel tempo non avviene alcun cambiamento al sistema.

Dimostreremo queste proprietà usando l'unicità della soluzione di un problema di Cauchy. Nello specifico, la prima proprietà caratterizza l'essere un flusso di un campo vettoriale. Ossia se una funzione $F = F(t, x)$ di classe C^1 , definita su $A \subseteq \mathbb{R} \times \Omega$ e a valori in Ω , con appropriate ipotesi sul suo dominio, soddisfa la prima proprietà ed è tale che $F(0, x) = x$ per ogni $x \in \Omega$, allora è un flusso per il campo vettoriale X di classe C^1 definito come

$$\Omega \ni x \mapsto X(x) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(t, x).$$

Concludiamo il primo capitolo introducendo il concetto di campo vettoriale globale e fornendo una serie di criteri sufficienti per garantirne la globalità. Saranno presentati vari esempi di campi vettoriali che soddisfano (o non soddisfano) tali condizioni, evidenziandone così la complessità.

Il secondo capitolo inizia con lo studio dei punti singolari e dei punti regolari di un campo vettoriale, analizzandone le proprietà. Un punto $x \in \Omega$ è detto punto singolare (o punto di equilibrio) di un campo vettoriale X definito su Ω se il campo vettoriale si annulla in quel punto, ossia $X(x) = 0$. Altrimenti è detto punto regolare. Questi concetti sono fondamentali nello studio dei campi vettoriali, poiché i punti singolari rappresentano stati stazionari, mentre i punti regolari indicano regioni in cui il flusso associato al campo vettoriale è non banale. L'analisi dei punti regolari permette lo studio locale del campo vettoriale intorno a questi punti. Infatti come dimostrato nella Proposizione 2.2, se x è un punto regolare per un campo vettoriale X di classe C^1 , allora la curva integrale associata è un'immersione di classe C^1 . Con non poca fatica, dimostriamo il Teorema 2.3, che afferma che, dato un punto x_0 regolare per un campo

vettoriale X di classe C^1 , esiste un cambiamento di variabili C^1 intorno a x_0 tale che, nelle nuove coordinate, l'espressione locale di X diventi $\partial/\partial y_1$. Questa trasformazione è particolarmente importante nello studio della linearizzazione dei campi vettoriali.

Succeivamente ci interessiamo delle proprietà di differenziazione lungo una curva integrale di un campo vettoriale. Il Teorema 2.4 espone due concetti principali: la differenziazione e le formule di Taylor, con resto integrale e di Peano, per una funzione lungo una curva integrale, in funzione della regolarità del campo e della funzione stessa. Inoltre, se X è un campo vettoriale liscio, deriviamo la serie di Maclaurin per il flusso, che fornisce una prima motivazione per l'uso di una notazione di tipo "esponenziale" per le curve integrali, che verrà adottata nel capitolo successivo.

Nell'ultima sezione del capitolo studiamo il flusso $\Psi_t^X(x)$ come funzione del punto iniziale x e, in particolare, ci focalizziamo sulla matrice Jacobiana $\mathcal{J}_{\Psi_t^X}(x)$. In questo contesto, è fondamentale considerare l'equazione di variazione associata, che descrive come varia la matrice jacobiana nel tempo. Infatti, si ha che la mappa $\mathcal{D}(X, x) \ni t \mapsto W_x(t) := \mathcal{J}_{\Psi_t^X}(x)$ è soluzione del sistema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} W_x(t) = A_x(t) \cdot W_x(t) \\ W_x(0) = \mathbb{I}_N, \end{cases}$$

dove $A_x(t) := \mathcal{J}_{X_I}(\Psi_t^X(x))$. Questa equazione è l'*equazione di variazione* associata all'EDO che definisce il flusso

$$\frac{d}{dt} \Psi_t^X(x) = X(\Psi_t^X(x)), \quad \Psi_0^X(x) = x.$$

Studiare l'equazione di variazione è utile per analizzare come le piccole regioni dello spazio vengono deformate mentre evolvono nel tempo sotto l'azione del flusso. I Teoremi 2.6 e 2.7 sono diretta conseguenza dell'equazione di variazione e forniscono una quantificazione della variazione della misura di un insieme A attraverso il flusso di un campo vettoriale X . In particolare, la misura di $\Psi_t^X(A)$ è data da

$$\text{meas}(\Psi_t^X(A)) = \int_A \exp\left(\int_0^t \text{div}(X)(\Psi_\tau^X(x)) d\tau\right) dx.$$

Questo risultato fornisce un'interpretazione significativa di $\text{div}(X)$, evidenziandone il suo contributo nel flusso di X . Concludiamo il capitolo con due lemmi sulla regolarità del flusso di un campo vettoriale X . In particolare, se X è di classe C^1 , sappiamo che la mappa $(t, x) \mapsto \mathcal{J}_{\Psi_t^X}(x)$ è di classe C^1 rispetto a t , ma è solo continua rispetto a x . Di conseguenza, non è immediato dimostrare che, data una funzione $f(t)$ (anche di classe C^1), la funzione composta $F(t) := \mathcal{J}_{\Psi_t^X}(f(t))$ sia differenziabile rispetto a t . Nel Lemma

2.9 mostriamo che $F(t)$ è differenziabile in $t = 0$ quando f è una funzione continua, tramite l'equazione di variazione. Infine, nel Lemma 2.10, proveremo la differenziabilità di F per ogni t quando $f(t) = \Psi_{-t}^X(x)$.

Nell'ultimo capitolo ci concentriamo sulla composizione dei flussi di due campi vettoriali X e Y . Approfondiamo il comportamento del commutatore $[X, Y]$ di due campi vettoriali, esaminando come esso emerga naturalmente dalla composizione dei flussi associati ad X e Y . Il Teorema 3.1 offre una interpretazione chiara del commutatore $[X, Y]$ come “quantificatore” della discrepanza tra la mappa identità e la composizione dei flussi $\Psi_t^{-Y} \circ \Psi_t^{-X} \circ \Psi_t^Y \circ \Psi_t^X(x)$ per tempi piccoli t . Utilizzando lo sviluppo di Taylor, abbiamo infatti che vale

$$\Psi_t^{-Y} \circ \Psi_t^{-X} \circ \Psi_t^Y \circ \Psi_t^X(x) = x + t^2 [X, Y](x) + o(t^2),$$

ottenendo così un'accuratezza al secondo ordine. La Figura 3.1 illustra graficamente come la composizione delle curve integrali di X e Y dia luogo a una traiettoria che riflette l'influenza del commutatore, mettendo in evidenza la natura del commutatore come misura del “fallimento” delle commutatività tra i flussi. Introduciamo la notazione

$$\Gamma_t^{X,Y}(x) := \Psi_t^{-Y} \circ \Psi_t^{-X} \circ \Psi_t^Y \circ \Psi_t^X(x),$$

per facilitare l'analisi della regolarità e della derivabilità di tali composizioni. Consideriamo la serie di Maclaurin della mappa $t \mapsto \gamma_{X,x}(t)$, che grazie alla Prop. 1.13, è

$$\gamma_{X,x}(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(X^k I)(x)}{k!} t^k.$$

Questa espressione richiama la forma di una serie di un esponenziale, suggerendo così una notazione di tipo “esponenziale” per la curva integrale. Introduciamo dunque la seguente notazione

$$\exp(tX)(x) := \gamma(t, X, x),$$

la cui buona positura è garantita dalla Proposizione 1.13. Se il tempo $t = 1$ è ammesso, la mappa $x \mapsto \exp(X)(x)$ è detta l'*esponenziale* del campo vettoriale X . Questa notazione è particolarmente utile quando si trattano i gruppi di Lie, dove il concetto di mappa esponenziale gioca un ruolo centrale, mettendo in luce così la relazione tra flussi e strutture algebriche. Nel Teorema 3.6, ci interessiamo della composizione di due mappe esponenziali e della loro espansione, ottenendo la scrittura formale

$$\sum_{i,j \geq 0} \frac{X^i Y^j}{i! j!} s^i t^j = \sum_{i \geq 0} \frac{(sX)^i}{i!} \sum_{j \geq 0} \frac{(tY)^j}{j!} =: e^{sX} e^{tY}.$$

Concludiamo il lavoro presentando un esempio che mette in evidenza la necessità e l'utilità dei risultati ottenuti.

Indice

Introduzione	i
1 Campi vettoriali e flusso: definizioni e proprietà preliminari	1
1.1 Notazione per campi vettoriali nello spazio	1
1.2 Flusso di un campo vettoriale	5
1.3 Le proprietà di semigrupp	12
2 Rettificazione e Variazione lungo le Curve Integrali	17
2.1 Punti Regolari e Singolari	17
2.2 Differenziazione lungo un flusso	21
2.3 L'equazione di variazione per un flusso	23
3 Flusso attraverso $X, Y, -X, -Y$	29
3.1 I commutatori	29
3.2 Il prodotto di esponenziali	31
Bibliografia	39

Capitolo 1

Campi vettoriali e flusso: definizioni e proprietà preliminari

1.1 Notazione per campi vettoriali nello spazio

Nel seguito, Ω sarà sempre un sottoinsieme aperto non vuoto di \mathbb{R}^N .

Se $k \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$, denoteremo, come di consueto, con $C^k(\Omega)$ lo spazio vettoriale delle funzioni a valori reali di classe C^k su Ω ; quando $f \in C^\infty(\Omega)$, diremo che f è liscia; $C^\omega(\Omega)$ è la classe delle funzioni reali analitiche su Ω . I punti di \mathbb{R}^N saranno indicati con $x = (x_1, \dots, x_N)$ (con $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}$). Per $i \in \{1, \dots, N\}$, useremo uno qualsiasi tra i simboli

$$\partial_i, \quad \partial_{x_i}, \quad \partial/\partial x_i, \quad \frac{\partial}{\partial x_i}$$

per indicare l'operatore derivata parziale rispetto alla variabile x_i . Useremo una notazione analoga per le derivate di ordine superiore. In seguito, se $f \in C^1(\Omega)$, indicheremo il suo gradiente come un vettore riga $1 \times N$:

$$\nabla f(x) = (\partial_1 f(x) \cdots \partial_N f(x)), \quad x \in \Omega.$$

Quando f è una funzione a valori vettoriali, scriveremo $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ e f_1, \dots, f_m le sue funzioni componenti (a valori in \mathbb{R}). La notazione scelta per il gradiente risulta comoda nello scrivere la matrice Jacobiana $\mathcal{J}_f(x)$ di f in $x \in \Omega$ come segue

$$\mathcal{J}_f(x) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x) \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Quando sarà necessario eseguire operazioni matriciali, questo suggerisce scrivere le funzioni a valori vettoriali come vettori colonna.

Chiameremo **campo vettoriale** su Ω un qualsiasi operatore lineare differenziale parziale (PDO) X della forma:

$$X = \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

dove a_1, \dots, a_N sono funzioni a valori reali su Ω . Dunque, se $f \in C^1(\Omega)$, indicheremo con Xf la funzione

$$Xf : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto Xf(x) = \sum_{i=1}^N a_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Diremo che il campo vettoriale X è di classe C^k (con $k = 0, 1, \dots, \infty, \omega$) se le funzioni a_i sono di classe C^k su Ω . Chiameremo X un **campo vettoriale liscio** se le funzioni a_i sono di classe C^∞ . Data $x \in \Omega$, il vettore di \mathbb{R}^N

$$X(x) := (a_1(x), \dots, a_N(x))$$

è detto il **vettore dei coefficienti** di X in x . Spesso, in letteratura, si identifica X con la mappa $x \mapsto X(x)$. Invece noi presteremo attenzione a distinguere X (un PDO), $X(x)$ (il vettore dei coefficienti) e $x \mapsto X(x)$ (una funzione da Ω in \mathbb{R}^N). Per comodità identificheremo il vettore N dimensionale $X(x)$ con la matrice colonna $N \times 1$

$$X(x) \equiv \begin{pmatrix} a_1(x) \\ \vdots \\ a_N(x) \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Siccome $\nabla f(x)$ è una matrice riga, questa notazione ha il vantaggio di poter esprimere in modo compatto

$$Xf(x) = \nabla f(x) \cdot X(x), \quad \forall f \in C^1(\Omega), \quad x \in \Omega. \quad (1.3)$$

Quando X è liscio, possiamo pensare (e lo faremo) X come una mappa lineare da $C^\infty(\Omega)$ in $C^\infty(\Omega)$:

$$X : C^\infty(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\Omega), \quad f \longmapsto Xf.$$

Quindi un campo vettoriale liscio X può essere pensato come un **endomorfismo** di $C^\infty(\Omega)$. Indichiamo con $\text{End}(C^\infty(\Omega))$ lo spazio vettoriale di tutti gli endomorfismi di $C^\infty(\Omega)$.

Notazione 1.0.1. *Lo spazio vettoriale di tutti i campi vettoriali lisci su Ω sarà denotato con $\mathcal{X}(\Omega)$. Notare che $\mathcal{X}(\Omega)$ è un sottospazio vettoriale di $\text{End}(C^\infty(\Omega))$.*

Osservazione 1.1. Considereremo $\mathcal{X}(\Omega)$ con la struttura di spazio vettoriale di $\text{End}(C^\infty(\Omega))$. È necessario però prestare attenzione; infatti, con questa struttura di spazio vettoriale, i campi vettoriali lisci X_1, \dots, X_m su Ω sono linearmente dipendenti se e solo se esistono $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ tali che $\sum_{i=1}^m c_i X_i$ è il campo vettoriale nullo, ossia ha tutte le funzioni componenti identicamente nulle. Per esempio, i campi vettoriali su \mathbb{R}^2

$$X_1 = \partial_{x_1} \text{ e } X_2 = x_1 \partial_{x_2}$$

sono campi vettoriali linearmente indipendenti su $\mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$; questo non è in contraddizione al fatto che $X_1(x) = (1, 0)$ e $X_2(x) = (0, x_1)$ sono invece linearmente dipendenti per $x_1 = 0$, come *vettori* di \mathbb{R}^2 .

Presto sarà conveniente far agire un campo vettoriale X non più solo sulle funzioni a valori reali, ma anche sulle funzioni a valori vettoriali. Dunque, i campi vettoriali opereranno componente per componente sulle funzioni vettoriali: difatti, se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ è di classe C^1 , con Xf indicheremo la funzione

$$Xf : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto (Xf_1(x), \dots, Xf_m(x)).$$

Seguiremo la seguente convenzione: sia $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ e X un campo vettoriale su Ω , se $Xf(x)$ è presente in calcoli matriciali (per esempio a seguito di una matrice $m \times m$), scegliamo la convenzione che $Xf(x)$ si scriva come la matrice colonna

$$Xf(x) \equiv \begin{pmatrix} Xf_1(x) \\ \vdots \\ Xf_m(x) \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Questa convenzione è consistente con (1.1) e (1.3), infatti abbiamo

$$Xf(x) = \mathcal{J}_f(x) \cdot X(x), \quad \forall f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m), \quad x \in \Omega. \quad (1.5)$$

Questa è un'identità tra le matrici

$$\begin{pmatrix} Xf_1(x) \\ \vdots \\ Xf_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1(x) \\ \vdots \\ a_N(x) \end{pmatrix}.$$

Questo è coerente con (1.2) siccome, per funzioni a valori reali, la matrice Jacobiana non è altro che il vettore riga gradiente. A volte per essere più chiari (un esempio di ciò è l'identità (1.7)), vorremo indicare con

$$I : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N \quad I(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$$

la funzione identità di \mathbb{R}^N , identificata con il vettore colonna $N \times 1$, cosicchè

$$XI(x) = \begin{pmatrix} a_1(x) \\ \vdots \\ a_N(x) \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

non è altro che $X(x)$ nella sua notazione di vettore colonna (1.2). Questa notazione è particolarmente utile quando vogliamo omettere il punto x e considerare $X(\cdot)$ come una funzione a valori vettoriali. Per esempio, useremo la notazione \mathcal{J}_{XI} invece della poco chiara \mathcal{J}_X (in quanto X indica principalmente un PDO, non una funzione vettoriale), per indicare la matrice Jacobiana della funzione in (1.6); scriveremo anche $\text{div}(XI)$ per denotare la divergenza della funzione $\sum_{j=1}^N \partial_j a_j$.

Per ogni multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, con $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ non negativi, usiamo questa notazione per indicare derivate parziali di ordine superiore:

$$D_x^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_N}}.$$

Se $\alpha = 0$, D_x^0 agisce trivialmente:

$$D_x^0 f = f \quad \forall f \in C^0(\Omega).$$

Inoltre, scriviamo $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$. Diremo che P è un **PDO lineare liscio di ordine n** su Ω se

$$P = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha(x) D_x^\alpha,$$

dove, per ogni α con $|\alpha| \leq n$, a_α è una funzione reale di classe C^∞ su Ω . Come per i campi vettoriali lisci, penseremo P come un endomorfismo di $C^\infty(\Omega)$. L'insieme dei PDO lineari lisci (di ordine non negativo) su Ω sarà indicato con $\mathcal{U}(\Omega)$. Questo è chiaramente un sottospazio vettoriale di $\text{End}(C^\infty(\Omega))$. Osserviamo che $\mathcal{U}(\Omega)$ è chiuso rispetto alla composizione. In altre parole, la composizione di due PDO lineari lisci è ancora un PDO lineare liscio. Questo prova che $(\mathcal{U}(\Omega), \circ)$ è un *algebra* associativa unitaria, sottoalgebra di $(\text{End}(C^\infty(\Omega)), \circ)$, dove l'unità è D_x^0 . Inoltre, $\mathcal{U}(\Omega)$ è sia un'algebra associativa unitaria (con la composizione di operatori) sia un'algebra di Lie (con il rispettivo commutatore). Notare che $\mathcal{X}(\Omega)$ non è una sottoalgebra di $(\mathcal{U}(\Omega), \circ)$ siccome la composizione di campi vettoriali non è, in generale, un campo vettoriale, ma un PDO di ordine 2. Invece, è vero che $\mathcal{X}(\Omega)$ è una *sottoalgebra di Lie* di $\mathcal{U}(\Omega)$, in quanto il commutatore di due campi vettoriali lisci è ancora un campo vettoriale liscio.

Infatti se $X = \sum_j a_j \partial_j$ e $Y = \sum_j b_j \partial_j$,

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \left(\sum_j a_j \partial_j \right) \circ \left(\sum_j b_j \partial_j \right) - \left(\sum_j b_j \partial_j \right) \circ \left(\sum_j a_j \partial_j \right) \\ &= \sum_{i,j} \left(\underline{a_i(\partial_i b_j)} \partial_j + \underline{a_i b_j \partial_{i,j}} - b_j(\partial_j a_i) \partial_i - \underline{b_j a_i \partial_{j,i}} \right) \\ &\quad \text{(notare che i termini sottolineati si cancellano sommando)} \\ &= \sum_j (X b_j) \partial_j - \sum_i (Y a_i) \partial_i = \sum_k (X b_k - Y a_k) \partial_k, \end{aligned}$$

e il membro di destra dell'ultima uguaglianza è chiaramente un campo vettoriale. La cancellazione effettuata segue dal Teorema di Schwarz per derivate parziali miste, poiché i campi vettoriali agiscono su funzione di classe C^∞ . Il calcolo rimane valido anche con ipotesi più restrittive: è sufficiente che X, Y siano campi vettoriali di classe C^1 che agiscono su funzioni di classe C^2 .

Osservazione 1.2. Usando la notazione (1.6), l'espressione di sopra per $[X, Y]$ in termini delle funzioni componenti di X e Y diventa

$$[X, Y]I = X(YI) - Y(XI) \stackrel{(1.5)}{=} \mathcal{J}_{YI} \cdot XI - \mathcal{J}_{XI} \cdot YI; \quad (1.7)$$

Qui i campi vettoriali operano su funzioni a valori vettoriali, scritte come vettori colonna.

Concludiamo le notazioni con un avvertimento: se X è un campo vettoriale su \mathbb{R}^N e $f \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, bisogna prestare attenzione a non confondere

$$Xf(x) \quad \text{e} \quad X(f(x)).$$

Entrambe sono definite, ma la prima è il valore nel punto $x \in \mathbb{R}^N$ della funzione $Xf = (Xf_1, \dots, Xf_N)$, mentre la seconda è il vettore di \mathbb{R}^N ottenuto calcolando il vettore dei coefficienti di X in $f(x)$. Per evitare confusione la seconda verrà indicata con $XI(f(x))$, perfettamente chiara per (1.6).

1.2 Flusso di un campo vettoriale

Diamo ora due definizioni essenziali: curve integrali e flussi. Ancora, Ω è un sottoinsieme aperto non vuoto di \mathbb{R}^N . Useremo la parola *curva* in \mathbb{R}^N per intendere una funzione $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ (con $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo), dove l'insieme dei punti $\gamma(I)$ verrà chiamato insieme immagine della curva.

Definizione 1.3 (Curva integrale). Sia X un campo vettoriale di classe C^1 su Ω . Qualsiasi soluzione del sistema di EDO

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$$

è detta **curva integrale** di X . Se $x \in \Omega$ e se $\gamma(t)$ è una curva integrale di X tale che $\gamma(0) = x$, diciamo che γ inizia da x . In questo caso, la soluzione massimale (unica) del problema di Cauchy

$$(PC) \quad \begin{cases} \dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = x \end{cases}$$

verrà indicata da una delle seguenti notazioni:

$$\gamma(t, X, x), \quad \gamma_X(t, x), \quad \gamma_{X,x}(t).$$

Il dominio della soluzione massimale di (PC) verrà indicato con $\mathcal{D}(X, x)$. I simboli X o x possono essere omissi quando sono irrilevanti oppure ovvi nella notazione della curva integrale. Inoltre useremo la seguente notazione

$$\mathcal{D}(X) := \left\{ (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N : x \in \Omega, t \in \mathcal{D}(X, x) \right\}. \quad (1.8)$$

Vedere Figura 1.1. Se $X = \sum_i a_i \partial_i$ il sistema EDO $\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$ in coordinate è

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1(t) = a_1(\gamma_1(t), \dots, \gamma_N(t)) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_N(t) = a_N(\gamma_1(t), \dots, \gamma_N(t)). \end{cases}$$

Scriveremo anche $\dot{\gamma}(t) = X(\gamma)$; notiamo che questo è un sistema EDO autonomo.

Ovviamente, la Definizione 1.3 ha senso anche con ipotesi meno restrittive sulle funzioni componenti di X . L'ipotesi che X sia di classe C^1 è più che abbondante, infatti, è sufficiente che i coefficienti di X siano localmente Lipschitz continuamente su Ω . In seguito, considereremo campi vettoriali di classe C^1 (a volte C^2) per semplicità.

Osservazione 1.4. Sappiamo che, quando X è di classe C^k , dai risultati generali sulla Teoria delle EDO [2], segue che $\gamma_X(t, x)$ è di classe C^k nel punto $(t, x) \in \mathcal{D}(X, x)$, e che l'insieme $\mathcal{D}(X)$ in (1.8) è un insieme aperto. Sappiamo anche che l'insieme $\mathcal{D}(X, x) \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo non vuoto contenente lo 0. Osserviamo che, fissato $x \in \Omega$, $\mathcal{D}(X, x)$ è la proiezione sull'asse delle t di una sezione dell'insieme aperto $\mathcal{D}(X)$ in (1.8). Questa sezione è ottenuta uguagliando la variabile spaziale a x (vedere Figura 1.2):

$$\mathcal{D}(X, x) = \{t \in \mathbb{R} : (t, x) \in \mathcal{D}(X)\}.$$

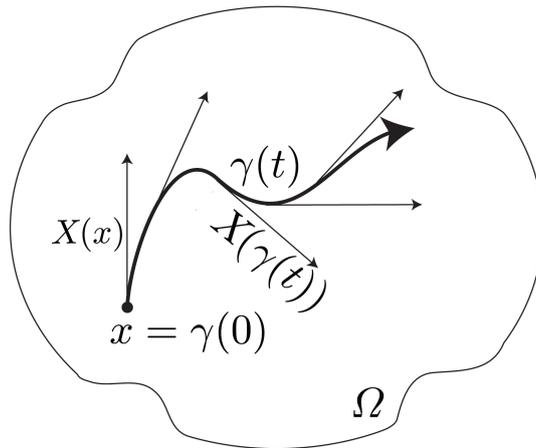


Figura 1.1: Una curva integrale $\gamma(t)$ di X che inizia da x . La soluzione massimale $\gamma(t)$ uscirà da ogni insieme compatto contenuto in Ω (ossia tende al bordo di Ω quando il tempo tende al bordo di $\mathcal{D}(X, x)$);

Notiamo che $\mathcal{D}(X)$ è costituito da una famiglia di intervalli (tutti contenenti lo $0 \in \mathbb{R}$) posti lungo l'asse delle t :

$$\mathcal{D}(X) = \bigcup_{x \in \Omega} \mathcal{D}(X, x) \times \{x\}.$$

Osservazione 1.5 (Partizione in insiemi immagine disgiunti delle curve integrali). Se X è un campo vettoriale di classe C^1 su Ω , gli insiemi immagine di due curve integrali (come sottoinsiemi di \mathbb{R}^N) possono intersecarsi; questo non è in contraddizione con l'unicità di (PC), poiché l'EDO che definisce una curva integrale è autonoma. Infatti, se $\gamma(t_1, X, x_1) = \gamma(t_2, X, x_2)$ allora si ha

$$\mathcal{D}(X, x_2) = t_2 - t_1 + \mathcal{D}(X, x_1) \quad \text{e} \quad \gamma(t, X, x_1) = \gamma(t_2 - t_1 + t, X, x_2), \quad \forall t \in \mathcal{D}(X, x_1).$$

Come conseguenza l'insieme immagine di $\gamma(\cdot, X, x_1)$ coincide con l'insieme immagine di $\gamma(\cdot, X, x_2)$. Pertanto, Ω è suddiviso nell'unione disgiunta degli insiemi immagine di tutte le curve integrali che si intersecano tra di loro. Più precisamente, possiamo suddividere la famiglia

$$\left\{ \mathcal{D}(X, x) \ni t \mapsto \gamma(t, X, x) \right\}_{x \in \Omega}$$

nell'unione disgiunta di sottofamiglie ottenute raggruppando le curve integrali i cui insiemi immagine si intersecano. Allora considerando queste sottofamiglie e i loro insiemi immagine che definiscono (in modo unico), otteniamo che Ω si partiziona in un'unione disgiunta di insiemi.

Esempio 1.6. (1). Se $X = \partial_{x_1} + 2x_2 \partial_{x_3}$ in \mathbb{R}^3 , siccome il vettore dei coefficienti è $X(x) = (1, 0, 2x_2)$, le curve integrali di X sono le soluzioni di

$$\dot{\gamma}_1(t) = 1, \quad \dot{\gamma}_2(t) = 0, \quad \dot{\gamma}_3(t) = 2\gamma_2(t).$$

Sono quindi della forma $\gamma(t) = (x_0 + t, y_0, z_0 + 2y_0 t)$, per qualche $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.

(2). Le curve integrali del campo vettoriale liscio $x_2 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_2}$ su \mathbb{R}^2 sono le soluzioni di

$$\dot{\gamma}_1(t) = \gamma_2(t), \quad \dot{\gamma}_2(t) = -\gamma_1(t).$$

Questo è un sistema lineare di EDO a coefficienti costanti, dunque le soluzioni sono della forma $\gamma(t) = \exp(A)\gamma_0$ dove $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\gamma_0 \in \mathbb{R}^2$. Così si ha

$$\gamma(t) = (x_0 \cos(t) + y_0 \sin(t), y_0 \cos(t) - x_0 \sin(t)),$$

per qualche $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

(3). La curva integrale (massimale) di $(1 + x^2) \partial_x$ su \mathbb{R} che inizia da 0 è la funzione $\gamma(t) = \tan(t)$, definita solo su $] -\pi/2, \pi/2[$.

(4). La soluzione massimale di $X = x^2 \partial_x$ su \mathbb{R} che inizia dal punto $x \in \mathbb{R}$, ottenuta tramite il metodo di separazione delle variabili, è

$$\gamma(t, X, x) = \frac{x}{1 - xt} \quad \text{e} \quad \mathcal{D}(X, x) = \begin{cases} (-\infty, 1/x), & \text{se } x > 0 \\ (-\infty, \infty), & \text{se } x = 0 \\ (1/x, \infty), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Perciò, l'insieme $\mathcal{D}(X)$ (vedi (1.8)) associato è $\mathcal{D}(X) := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : tx < 1\}$.

Questi esempi mostrano che calcolare le curve integrali può essere alquanto complicato, e solo in casi semplici le curve integrali possono essere determinate esplicitamente.

Introduciamo ora una nuova notazione per le curve integrali $\gamma(t, X, x)$. Metteremo in evidenza come la curva integrale sia una funzione del punto iniziale x , da cui la seguente notazione.

Definizione 1.7 (Flusso di un campo vettoriale). *Sia X un campo vettoriale di classe C^1 su Ω , e sia $t \in \mathbb{R}$ fissata. Quando questo è ben posto, definiamo*

$$\Psi_t^X(x) := \gamma(t, X, x). \tag{1.9}$$

Ciò ha senso se e solo se $x \in \Omega$ è tale che $t \in \mathcal{D}(X, x)$ (questo in generale può non essere vero per ogni $x \in \Omega$). Quando il suo dominio è non vuoto, la mappa $x \mapsto \Psi_t^X(x)$ è

detta **flusso di X al tempo t** . Omettiamo X nella notazione quando è ovvio, usando il simbolo Ψ_t . Spesso chiameremo Ψ_t^X **flusso di X** , evitando di dire ogni volta ‘al tempo t ’ (nonostante in letteratura si intenda solitamente con ‘flusso’ la mappa $\mathcal{D}(X) \ni (t, x) \mapsto \Psi_t^X(x)$).

Dato $t \in \mathbb{R}$, indichiamo con Ω_t^X (eventualmente l’insieme vuoto) il sottoinsieme di Ω formato da tutti i punti x tali che la curva integrale massimale di X che inizia da x sia definita per il tempo t

$$\Omega_t^X := \{x \in \Omega : t \in \mathcal{D}(X, x)\}.$$

Quando è non vuoto, Ω_t^X è proprio il dominio della mappa flusso $\Psi_t^X(x)$:

$$\Psi_t^X : \Omega_t^X \longrightarrow \Omega.$$

Osservazione 1.8. Notiamo che, per l’Osservazione 1.4, l’insieme Ω_t^X è un sottoinsieme aperto di Ω (eventualmente vuoto); infatti, si ha $\Omega_t^X = \emptyset$ se non esiste una $x \in \Omega$ tale che $\mathcal{D}(X, x)$ contenga t ; altrimenti (quindi se esiste una $x \in \Omega$ tale che $t \in \mathcal{D}(X, x)$), Ω_t^X è proprio la proiezione sull’asse delle x di una sezione dell’insieme aperto $\mathcal{D}(X)$ descritto in (1.8), ottenuta uguagliando la variabile temporale con t (vedere Figura 1.2):

$$\Omega_t^X = \{x \in \Omega : (t, x) \in \mathcal{D}(X)\}.$$

Abbiamo inoltre

$$\mathcal{D}(X) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \{t\} \times \Omega_t^X, \quad \text{e} \quad \mathcal{D}(X) = \bigcup_{x \in \Omega} \mathcal{D}(X, x) \times \{x\}.$$

Nella prima identità alcune sezioni Ω_t^X possono essere \emptyset , mentre nella seconda identità ciascuna sezione $\mathcal{D}(X, x)$ è non vuota (ricordando che $0 \in \mathcal{D}(X, x)$ per ogni $x \in \Omega$).

Osservazione 1.9. Se X è un campo vettoriale di classe C^1 su Ω , allora valgono le seguenti proprietà:

- $\Omega_0^X = \Omega$;
- se $t > 0$ e $\Omega_t^X \neq \emptyset$, allora $\Omega_t^X \subseteq \Omega_s^X$ per ogni $0 \leq s \leq t$;
- se $t < 0$ e $\Omega_t^X \neq \emptyset$, allora $\Omega_t^X \subseteq \Omega_s^X$ per ogni $t \leq s \leq 0$;
- $\Omega_t^X \uparrow \Omega$ quando $t \downarrow 0$ e $\Omega_t^X \uparrow \Omega$ quando $t \uparrow 0$;
- per ogni insieme compatto $K \subset \Omega$ esiste $\varepsilon = \varepsilon(K, X, \Omega) > 0$ tale che $K \subset \Omega_\varepsilon^X$ e $K \subset \Omega_{-\varepsilon}^X$;

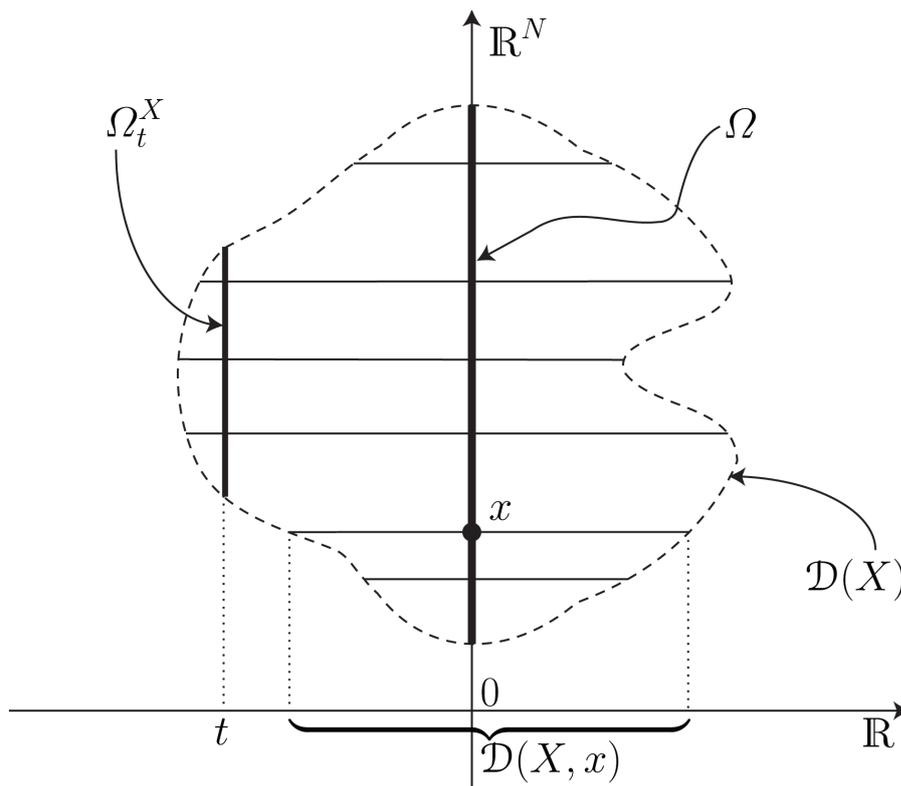


Figura 1.2: Gli insiemi $\mathcal{D}(X)$, $\mathcal{D}(X, x)$, Ω_t^X . La figura utilizza un leggero abuso di notazione: l'insieme Ω_t^X dovrebbe essere rappresentato sull'asse della coordinata spaziale di \mathbb{R}^N mediante la proiezione su \mathbb{R}^N dell'insieme " Ω_t^X " raffigurato in figura.

Esempio 1.10. (a). Il flusso al tempo t di X dell'Esempio 1.6-(1) è la mappa affine

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2t & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che $\Psi_t^X(x)$ è invertibile e la sua funzione inversa è $\Psi_{-t}^X(x)$.

(b). Il flusso al tempo t del campo vettoriale $Y = x_2 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_2}$ dell'Esempio 1.6-(2) è la rotazione in senso orario intorno all'origine con angolo t :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, notiamo che $\Psi_t^X(x)$ è invertibile e la sua funzione inversa è $\Psi_{-t}^X(x)$.

(c) Il flusso al tempo t del campo vettoriale $X = x^2 \partial_X$ dell'Esempio 1.6-(4) è

$$\Psi_t^X : \Omega_t^X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Psi_t^X(x) = \frac{x}{1 - xt}.$$

e il suo dominio è

$$\Omega_t^X = \begin{cases} (-\infty, 1/t), & \text{se } t > 0 \\ (-\infty, \infty), & \text{se } t = 0 \\ (1/t, \infty), & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

La funzione inversa di Ψ_t^X è Ψ_{-t}^X e questa è definita su Ω_{-t}^X .

Ovviamente, il fatto che in tutti gli esempi sopra si ha che $(\Psi_t^X)^{-1} = \Psi_{-t}^X$ e $\Psi_t^X(\Omega_t^X) = \Omega_{-t}^X$ non è un caso. Vedere Osservazione 1.14 .

Osserviamo che, per un fissato $t \neq 0$, la mappa Ψ_t può *non* essere definita su tutto Ω , come mostra l'Esempio 1.10-(b). Nonostante ciò, come visto nell'Osservazione 1.9, per ogni sottoinsieme compatto K di Ω , esiste un $\varepsilon > 0$ (che dipende da K) tale che Ψ_t è definito su tutto K , per ogni $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Ciò significa che per ogni sottoinsieme compatto K di Ω esiste un $\varepsilon > 0$ tale che ciascuna curva integrale che inizia da un punto dell'insieme compatto K sia definita per ogni tempo $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

Osservazione 1.11 (Regolarità più accurata del flusso). Dai risultati generali sulla Teoria delle EDO riguardanti la regolarità in dipendenza dai dati iniziali, se X è di classe C^k su Ω (per $k = 1, 2, \dots, \infty, \omega$), allora la mappa $\mathcal{D}(X, x) \ni t \mapsto \Psi_t^X(x)$ è di classe C^{k+1} (per ogni $x \in \Omega$ fissata). Inoltre, la mappa $\mathcal{D}(X) \ni (x, t) \mapsto \Psi_t^X(x)$ è di classe C^k . Per di più, esistono le derivate parziali di ordine $k + 1$ della seguente forma (l'ordine della derivazione è interscambiabile)

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial t \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \Psi_t^X(x),$$

per ogni $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, N\}$, e queste sono continue.

Esempio 1.12. Per esempio, se $X = x|x|\partial_x$ su \mathbb{R} , si ha

$$\Psi_t^X(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 - |x|t} & \text{se } x \neq 0 \text{ e } t < 1/|x| \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ e per ogni } t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

È facile verificare che la mappa $(x, t) \mapsto \Psi_t^X$ è di classe C^1 , e che la sua derivata rispetto a x è

$$\frac{\partial \Psi_t^X(x)}{\partial x} = \frac{1}{(1 - |x|t)^2}$$

per $(x, t) \in \mathcal{D}(X) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : |x|t < 1\}$. Inoltre, osserviamo che $\partial^2 \Psi_t^X(x) / \partial t \partial x$ esiste ed è continua, e vale che

$$\frac{\partial^2 \Psi_t^X(x)}{\partial t \partial x} = \frac{2|x|}{(1 - |x|t)^3}$$

su $\mathcal{D}(X)$. Tuttavia, la derivata seconda rispetto a x è:

$$\frac{\partial^2 \Psi_t^X(x)}{\partial x^2} = \frac{2t}{(1 - |x|t)^3} \frac{x}{|x|}, \quad \text{se } x \neq 0.$$

Di conseguenza, $\partial^2 \Psi_t^X(x)/\partial x^2$ non esiste in $x = 0$ quando $t \neq 0$: Infatti, X è di classe C^1 ma non di classe C^2 .

1.3 Le proprietà di semigrupp

Il seguente risultato è una conseguenza dell'unicità della soluzione di un'EDO con coefficienti di classe C^1 .

Proposizione 1.13 (Proprietà di semigrupp del flusso). *Sia X un campo vettoriale di classe C^1 su Ω e sia $x \in \Omega$. Valgono le seguenti proprietà:*

(1). *se $s, s + t \in \mathcal{D}(X, x)$ allora $t \in \mathcal{D}(X, \gamma_X(s, x))$ e si ha*

$$\gamma_X(t, \gamma_X(s, x)) = \gamma_X(t + s, x);$$

(2). *se $s \in \mathcal{D}(X, x)$ allora $-s \in \mathcal{D}(X, \gamma_X(s, x))$ e si ha*

$$\gamma_X(-s, \gamma_X(s, x)) = x;$$

(3). *se $\alpha, t \in \mathbb{R}$ sono tali che $\alpha t \in \mathcal{D}(X, x)$ allora $t \in \mathcal{D}(\alpha X, x)$ e si ha*

$$\gamma_X(\alpha t, x) = \gamma_{\alpha X}(t, x);$$

(4). $\gamma(0, X, x) = x$ per ogni $x \in \Omega$.

In termini di flusso del campo vettoriale X , queste possono essere riformulate brevemente come segue:

(1'). $\Psi_t^X \circ \Psi_s^X = \Psi_{t+s}^X;$

(2'). *le mappe Ψ_s^X e Ψ_{-s}^X sono una l'inversa dell'altra (vedere Osservazione 1.14);*

(3'). $\Psi_{\alpha t}^X = \Psi_t^{\alpha X};$ in particolare $\Psi_{-t}^X = \Psi_t^{-X} = (\Psi_t^X)^{-1};$

(4'). *la mappa Ψ_0^X è la mappa identità su Ω .*

*Le proprietà (1) e (1') verranno chiamate **proprietà di semigrupp del flusso di X** .*

Dimostrazione. Osserviamo che, una volta dimostrata la proprietà (1), segue immediatamente la proprietà (2) scegliendo $t = -s$ e utilizzando la proprietà (4), che risulta ovvia per definizione di soluzione del (PC). Procediamo quindi a dimostrare la proprietà (1). Sia $s, t + s \in \mathcal{D}(X, x)$. Mostriamo che $\gamma_X(t, \gamma_X(s, x))$ è ben definita e coincide con $\gamma_X(t + s, x)$. Per s fissata poniamo $\varphi(r) := \gamma_X(r + s, x)$; osserviamo che φ è ben posta sull'intervallo $I := \mathcal{D}(X, x) - s$. Per ogni $r \in I$, abbiamo

$$\dot{\varphi}(r) = \frac{d}{dr}(\gamma_X(r + s, x)) = \frac{d}{du}\Big|_{u=r+s} \gamma_X(u, x) = X(\gamma_X(r + s, x)) = X(\varphi(r)).$$

Inoltre, $\varphi(0) = \gamma_X(s, x)$. Questo prova che $\varphi : I \rightarrow \Omega$ risolve

$$\dot{\varphi} = X(\varphi), \quad \varphi(0) = \gamma_X(s, x).$$

D'altra parte, per definizione (vedere Definizione 1.3), questo problema di Cauchy è risolto da $r \mapsto \gamma_X(r, \gamma_X(s, x))$ sul dominio massimale $\mathcal{D}(X, \gamma_X(s, x))$. Allora, per unicità della soluzione, si ha che il dominio massimale $\mathcal{D}(X, \gamma_X(s, x))$ contiene l'intervallo I , e in particolare contiene $t = t + s - s \in \mathcal{D}(X, x) - s = I$ (in quanto, per ipotesi, si ha $t + s \in \mathcal{D}(X, x)$). Inoltre, vale

$$\gamma_X(r + s, x) = \varphi(r) = \gamma_X(r, \gamma_X(s, x)), \quad \forall r \in I.$$

Prendendo $r = t$ (osserviamo che $t \in I$) si ha la proprietà (1). Similmente proviamo la proprietà (3). Sia $\alpha t \in \mathcal{D}(X, x)$. Proviamo che $\gamma_{\alpha X}(t, x)$ è ben definita e coincide con $\gamma_X(\alpha t, x)$. Prima di tutto, notiamo che αX è ancora un campo vettoriale di classe C^1 su Ω . Definiamo ora la funzione $\mu(r) := \gamma_X(\alpha r, x)$; osserviamo che μ è ben posta sull'intervallo $J := \frac{1}{\alpha}\mathcal{D}(X, x)$. Per $r \in J$, si ha

$$\dot{\mu}(r) = \frac{d}{dr}(\gamma_X(\alpha r, x)) = \alpha \frac{d}{du}\Big|_{u=\alpha r} \gamma_X(u, x) = \alpha X(\gamma_X(\alpha r, x)) = \alpha X(\mu(r)).$$

Inoltre, $\mu(0) = \gamma_X(0, x) = x$. Questo prova che $\mu : J \rightarrow \Omega$ risolve il problema

$$\dot{\mu} = \alpha X(\mu), \quad \mu(0) = x.$$

Ma d'altronde, per definizione, questo (PC) è risolto dalla mappa $r \mapsto \gamma_{\alpha X}(r, x)$ sul dominio massimale $\mathcal{D}(\alpha X, x)$. Allora, per unicità della soluzione, segue che il dominio massimale $\mathcal{D}(\alpha X, x)$ contiene l'intervallo J , e in particolare contiene $t = \frac{\alpha t}{\alpha} \in \frac{1}{\alpha}\mathcal{D}(X, x) = J$ (in quanto, per ipotesi, si ha $\alpha t \in \mathcal{D}(X, x)$). Infine, vale

$$\gamma_X(\alpha r, x) = \mu(r) = \gamma_{\alpha X}(r, x), \quad \forall r \in J.$$

Prendendo $r = t$ (osservando che $t \in J$) otteniamo la proprietà (3) e questo conclude la prova. \square

Osservazione 1.14. Per ogni $t \in \mathcal{D}(X, x)$ si ha $\Psi_t^X(\Omega_t^X) = \Omega_{-t}^X$. Questo segue dalla proprietà (2) della Proposizione 1.13. Questo mostra che le funzioni

$$\Psi_t^X : \Omega_t^X \longrightarrow \Omega_{-t}^X \quad \text{e} \quad \Psi_{-t}^X : \Omega_{-t}^X \longrightarrow \Omega_t^X$$

sono una l'inversa dell'altra

Osservazione 1.15. La proprietà di semigruppato *caratterizza l'essere un flusso*. Supponiamo che $F = F(t, x)$ sia una funzione di classe C^1 definita su un insieme aperto $A \subseteq \mathbb{R} \times \Omega$ e a valori in Ω . Supponiamo inoltre che A abbia la seguente forma: $A = \bigcup_{x \in \Omega} I_x \times \{x\}$, dove per ogni $x \in \Omega$, I_x è un intervallo aperto contenente lo 0. Supponiamo i seguenti fatti: $F(0, x) = x$ per ogni $x \in \Omega$; inoltre, per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $t \in I_x$, vale l'identità

$$F(s, F(t, x)) = F(s + t, x), \quad (1.10)$$

per ogni $s \in I_{F(t, x)}$ vicino a 0. Allora il campo vettoriale X di classe C^1 , definito come

$$\Omega \ni x \mapsto X(x) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(t, x)$$

è tale che $F(t, x) = \Psi_t^X(x)$ per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $t \in I_x \subseteq \mathcal{D}(X, x)$. Questo segue immediatamente derivando (1.10) rispetto a s in $s = 0$.

Diamo ora una definizione che sarà importante per lo studio dei campi vettoriali.

Definizione 1.16 (Campi vettoriali globali). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto e sia X un campo vettoriale di classe C^1 su Ω . Diciamo che X è **globale** se, per ogni $x \in \Omega$, il dominio massimale $\mathcal{D}(X, x)$ della curva integrale di X che inizia da x è tutto \mathbb{R} .*

Osservazione 1.17. La proprietà di globalità è una proprietà alquanto “fragile”: due campi vettoriali possono essere globali, ma la loro somma o i loro commutatori potrebbe non esserlo; infatti:

- (1). i campi vettoriali in \mathbb{R}^2 dati da $X_1 = 6x_2^2 \partial_{x_1}$, $X_2 = x_1 \partial_{x_2}$ sono globali, ma $X_1 + X_2$ non lo è;
- (2). i campi vettoriali in \mathbb{R}^2 definiti da $X_1 = (1 + x_2^2) \partial_{x_1}$, $X_2 = x_1 \partial_{x_2}$ sono globali, ma $[X_1, X_2]$ non è globale.

I risultati generali sulle EDO garantiscono una condizione sufficiente affinché $X \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^N)$ sia globale, ovvero che cresca al più linearmente rispetto a x , cioè

$$\exists C_1, C_2 > 0 : \quad \|X(x)\| \leq C_1 + C_2 \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \quad (1.11)$$

Esempio 1.18. Sia M una matrice $N \times N$ a valori in \mathbb{R} . Consideriamo il campo vettoriale \mathbf{M} definito da $\mathbf{M}(x) = Mx$ con $x \in \mathbb{R}^N$, ossia

$$\mathbf{M} := \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^N b_{j,k} x_k \right) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

\mathbf{M} chiaramente soddisfa la condizione (1.11), dunque è globale. Poiché per definizione $\mathbf{M}(x) = Mx$, il problema di Cauchy che definisce il flusso di \mathbf{M} è

$$\dot{\gamma}(t) = M\gamma(t), \quad \gamma(0) = x,$$

un problema omogeneo lineare a coefficienti costanti. Di conseguenza

$$\Psi_t^{\mathbf{M}}(x) = e^{tM}x, \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \mathbb{R}^N,$$

dove $e^{tM} = \sum_{k=0}^{\infty} (tM)^k/k!$ è l'esponenziale di matrice.

La condizione sufficiente (1.11) non è anche una condizione necessaria, come viene mostrato nel seguente esempio.

Esempio 1.19 (Campo vettoriale piramidale). Supponiamo che X sia della forma

$$X(x) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2(x_1) \\ a_3(x_1, x_2) \\ \vdots \\ a_N(x_1, \dots, x_{N-1}) \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

per opportune funzioni a_1, \dots, a_N di classe C^1 definite su \mathbb{R}^N (qui a_1 è una costante). In questo caso diciamo che X è **piramidale**. Allora X è globale, e le sue curve integrali possono essere determinate mediante integrazioni successive. Infatti, il sistema che definisce $\gamma(t) = \gamma(t, X, x)$ è:

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1(t) = a_1, & \gamma_1(0) = x_1 \\ \dot{\gamma}_2(t) = a_2(\gamma_1(t)), & \gamma_2(0) = x_2 \\ \dot{\gamma}_3(t) = a_3(\gamma_1(t), \gamma_2(t)), & \gamma_3(0) = x_3 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

Questo sistema può essere risolto iniziando dalla prima equazione e procedendo poi a cascata:

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= x_1 + a_1 t \\ \gamma_2(t) &= x_2 + \int_0^t a_2(\gamma_1(s)) ds \\ \gamma_3(t) &= x_3 + \int_0^t a_3(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) ds, \quad \dots \end{aligned}$$

Chiaramente le funzioni $\gamma_i(t)$ sono definite per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Per esempio, il campo vettoriale $X = \partial_{x_1} + x_1 \partial_{x_2} + \frac{1}{2}x_1^2 \partial_{x_4}$ ha per coefficienti funzioni che non crescono linearmente; tuttavia, X è globale poiché è piramidale.

Osservazione 1.20. Con le notazioni precedenti, se X è un campo vettoriale globale di classe C^1 su Ω , allora

- $\mathcal{D}(X, x) = \mathbb{R}$ per ogni $x \in \Omega$, e $\mathcal{D}(X) = \mathbb{R} \times \Omega$;
- $\Omega_t^X = \Omega$ per ogni $t \in \mathbb{R}$;
- per ogni $t \in \mathbb{R}$, $\Psi_t^X : \Omega \rightarrow \Omega$ è un diffeomorfismo di classe C^1 , con inverso Ψ_{-t}^X .

Proposizione 1.21. *Sia X un campo vettoriale di classe C^1 su Ω . Allora X è globale se e solo se esiste $\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $x \in \Omega$, $\mathcal{D}(X, x)$ contiene $(-\varepsilon, \varepsilon)$.*

Dimostrazione. (\Rightarrow) Segue immediatamente dalla Definizione 1.16.

(\Leftarrow) Supponiamo che esista un $\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $x \in \Omega$, $\mathcal{D}(X, x)$ contenga $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Allora, per ogni punto $x \in \Omega$, la curva integrale $\gamma(t, X, x)$ esiste almeno per $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Poiché X è un campo vettoriale di classe C^1 , il teorema di esistenza e unicità garantisce che possiamo prolungare la curva integrale a partire da $t = 0$ finché si è all'interno di Ω . Dato che esiste sempre un intervallo di tempo $(-\varepsilon, \varepsilon)$ attorno a ogni punto in cui la curva integrale esiste, possiamo iterare questo prolungamento, ottenendo così la globalità per X .

Questo conclude la prova. □

Dalla Proposizione 1.21, è facile provare (usando un semplice argomento di compattezza) che ogni campo vettoriale con supporto compatto è globale.

Capitolo 2

Rettificazione e Variazione lungo le Curve Integrali

2.1 Punti Regolari e Singolari

Definizione 2.1. Sia X un campo vettoriale su Ω ; un punto $x \in \Omega$ è detto **punto singolare** di X (oppure **punto di equilibrio** di X) se $X(x) = 0$. Altrimenti x è detto **punto regolare** di X .

Se x è un punto singolare per X , allora $\Psi_t^X(x) \equiv x$ per ogni $t \in \mathcal{D}(X, x) = \mathbb{R}$. Quando x è un punto regolare abbiamo invece:

Proposizione 2.2. Sia X un campo vettoriale C^1 su Ω , e supponiamo $x \in \Omega$ punto regolare di X . Allora la funzione

$$\mathcal{D}(X, x) \ni t \mapsto \gamma(t) := \gamma_X(t, x) \in \Omega$$

è un immersione C^1 , ossia $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ per ogni $t \in \mathcal{D}(X, x)$.

Dimostrazione. Supponiamo x punto regolare di X e per assurdo assumiamo che esista un tempo $s \in \mathcal{D}(X, x)$ tale che $\dot{\gamma}(s) = 0$; quindi, per definizione della funzione γ , si ha che $X(\gamma(s)) = \dot{\gamma}(s) = 0$, allora $y := \gamma(s)$ è un punto singolare di X . Per cui, come visto sopra, $\gamma_X(t, y) = y$ per ogni $t \in \mathcal{D}(X, y) = \mathbb{R}$. Allora, per la Proposizione 1.13-(2) e per definizione di y segue che

$$x = \gamma_X(-s, \gamma_X(s, x)) = \gamma_X(-s, y) = y;$$

considerando gli estremi dell'equazione, otteniamo $x = y$ e quindi l'assurdo, in quanto x dovrebbe essere contemporaneamente un punto regolare e singolare. \square

Teorema 2.3. Sia X un campo vettoriale C^1 su Ω , e $x_0 \in \Omega$ un punto regolare di X . Allora esiste $y = F(x)$ cambiamento di variabile C^1 definito vicino x_0 tale che l'espressione locale di X diventi, nelle nuove coordinate, $\partial/\partial y_1$.

La seguente dimostrazione è particolarmente tecnica nella costruzione della giusta F ; importante però è notarne l'idea geometrica. Una volta ottenuta la F , la dimostrazione segue facilmente.

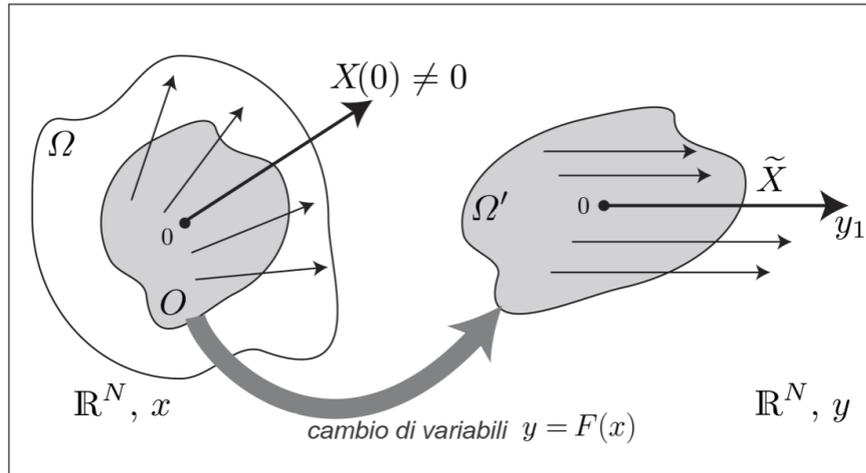


Figura 2.1: L'idea nella dimostrazione del Teorema 2.3: trasformare X in $\frac{\partial}{\partial y_1}$.

Dimostrazione. Supponiamo $x_0 = 0$ per semplicità di notazione. Supponiamo $F : O \rightarrow \Omega'$ sia un C^1 diffeomorfismo come nell'enunciato, dove $O \subseteq \Omega$ è un intorno aperto di 0 e $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^N$ è aperto. Abbiamo bisogno che il campo vettoriale X espresso nelle nuove coordinate $y = F(x)$, che chiameremo \tilde{X} , sia uguale a $\partial/\partial y_1$ su Ω' . Vedere Figura 2.1. Ricordando come vengono trasformati i campi vettoriali tramite un cambiamento di variabile (1.5), dobbiamo perciò ottenere:

$$XF(x) = \mathcal{J}_F(x) \cdot X(x) = (1, 0, \dots, 0)^T, \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.1)$$

Se scriviamo $F = (F_1, \dots, F_N)$, allora (2.1) è equivalente al sistema di PDO

$$XF_1(x) = 1, \quad XF_2(x) = 0, \dots, XF_N(x) = 0 \quad (x \in \Omega). \quad (2.2)$$

Notiamo che ciascuna equazione è indipendente dalle altre, nel senso che ogni componente F_i compare solo nell' i -sima riga del sistema. Possiamo risolvere ciascuna equazione usando il metodo delle caratteristiche. Infatti, procedendo lungo le curve integrali di X possiamo ridurre ciascuna equazione di (2.2) in un'equazione differenziale ordinaria, che

sappiamo risolvere. A tal proposito, se $\gamma : I \rightarrow O$ è una curva integrale di X , siccome $(F_i \circ \gamma)'(t) = (XF_i)(\gamma(t))$, il sistema (2.2) diventa (quando $x = \gamma(t)$)

$$(F_1 \circ \gamma)'(t) = 1, \quad (F_2 \circ \gamma)'(t) = 0, \dots, (F_N \circ \gamma)'(t) = 0 \quad (t \in I).$$

Allora cerchiamo F_1, \dots, F_N tali che

$$F_1(\gamma(t)) = t + c_1(\gamma), \quad F_2(\gamma(t)) = c_2(\gamma), \dots, F_N(\gamma(t)) = c_N(\gamma), \quad (2.3)$$

per ogni curva integrale γ di X , con $c_1(\gamma), c_2(\gamma), \dots, c_N(\gamma)$ funzioni costanti lungo la curva integrale γ (ma con una possibile dipendenza dalla curva stessa). Allora l'idea per costruire F è di dividere il dominio O in una famiglia disgiunta di curve integrali di X e definire poi le F_i su ciascuna curva separatamente. Un modo per parametrizzare le curve integrali in modo che esse siano disgiunte è trovare una superficie S in O tale che essa sia trasversale a ciascuna curva γ : questo significa che il vettore dei coefficienti di X (che dà la direzione di γ) non deve giacere sul piano tangente di S quando γ interseca S . Siccome vicino lo 0 la direzione di X è approssimabile con $X(0)$, possiamo definire¹ $S := \text{span}\{\omega_2, \dots, \omega_N\}$, dove

$$X(0), \omega_2, \dots, \omega_N \text{ sono vettori linearmente indipendenti.} \quad (2.4)$$

Questo è possibile perché $X(0) \neq 0$ per ipotesi. Poiché è possibile parametrizzare i punti di O vicino lo 0 con le traiettorie delle curve integrali $\gamma_X(t, z)$ di X che iniziano da $z \in S$ vicino lo 0, allora definiamo

$$G(t; s_2, \dots, s_N) := \gamma_X(t, s_2 \omega_2 + \dots + s_N \omega_N), \quad (2.5)$$

dove G è definita su $[-\varepsilon, \varepsilon]^N$ con $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo tale che il membro di destra di (2.5) sia definito per ogni $t, s_2, \dots, s_N \in [-\varepsilon, \varepsilon]^N$. Vedere Figura 2.2. Ricordando il Teorema della Funzione Inversa, G definisce un cambio di variabili vicino $G(0) = 0$ se $\mathcal{J}_G(0)$ è invertibile. Fissato $s = (s_2, \dots, s_N)$, abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(0,0)} G(t; s) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} G(t; 0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma_X(t, 0) \stackrel{\text{def}}{=} \{X(\gamma_X(t, 0))\} \Big|_{t=0} = X(0).$$

Inoltre per ogni $i \in \{2, \dots, N\}$ abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial s_i} \Big|_{(0,0)} G(t; s) = \frac{d}{ds_i} \Big|_{s_i=0} G(0; 0, \dots, s_i, \dots, 0) = \frac{d}{ds_i} \Big|_{s_i=0} \gamma_X(0, s_i \omega_i) = \frac{d}{ds_i} \Big|_{s_i=0} s_i \omega_i = \omega_i.$$

Questo prova che i vettori colonna della $\mathcal{J}_G(0)$ sono $X(0), \omega_2, \dots, \omega_N$, ed allora $\mathcal{J}_G(0)$ è invertibile per (2.4). Questo mostra che la mappa $(t, s) \mapsto G(t; s)$ definisce un sistema

¹Possiamo scegliere la superficie S anche in altri modi [3]. È sufficiente che $X(0)$ non appartenga allo spazio tangente di S in 0.

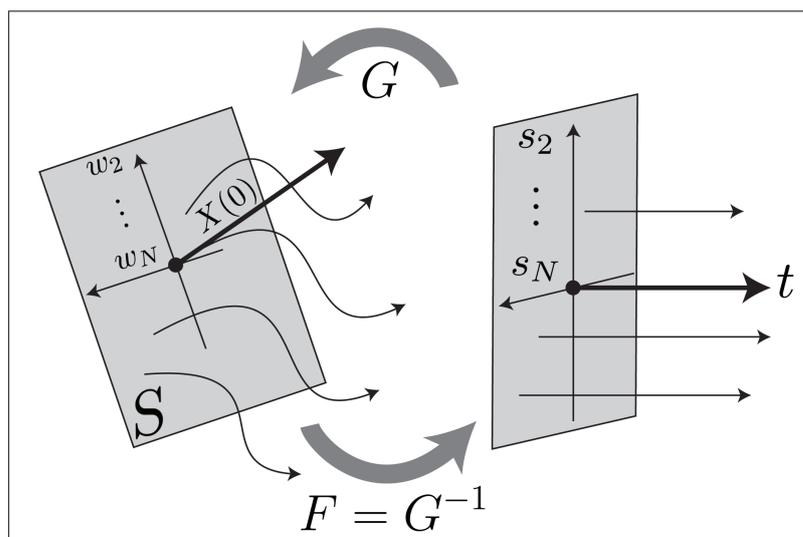


Figura 2.2: Il cambio di variabile $F = G^{-1}$ nella dimostrazione del Teorema 2.3, e l'idea geometrica della sua costruzione: le curve integrali di X (parametrizzate dai punti di S e il tempo t) sono “appiattite” in linee, parallele all'asse delle t .

di coordinate vicino lo 0, al più riducendo ε . Ritornando a (2.3), è naturale definire le funzioni F_i in questo modo

$$\begin{cases} F_1(\gamma_X(t, s_2 \omega_2 + \cdots + s_N \omega_N)) & = t + c_1(s) \\ F_2(\gamma_X(t, s_2 \omega_2 + \cdots + s_N \omega_N)) & = c_2(s) \\ & \vdots \\ F_N(\gamma_X(t, s_2 \omega_2 + \cdots + s_N \omega_N)) & = c_N(s) \end{cases}$$

per appropriate funzioni $c_i(s)$ di classe C^1 . Siccome abbiamo bisogno che anche $F = (F_1, \dots, F_N)$ sia un diffeomorfismo, la scelta più ovvia per le funzioni $c_i(s)$ è:

$$c_1(s) = 0, \quad c_2(s) = s_2, \dots, c_N(s) = s_N.$$

Per (2.5), questo è equivalente a $F(G(t; s)) = (t, s)$, ossia $F = G^{-1}$. Ha senso quindi definire $F := G^{-1}$, in quanto G è un diffeomorfismo da un intorno aperto di 0 a un intorno aperto di 0. Controlliamo ora che la funzione F così definita sia la F cercata, ossia soddisfi (2.1) vicino lo 0. Abbiamo perciò

$$\mathcal{J}_F(x) = \mathcal{J}_{G^{-1}}(x) = (\mathcal{J}_G(G^{-1}(x)))^{-1};$$

allora (2.1) è equivalente a $X(x) = \mathcal{J}_G(G^{-1}(x))(1, 0, \dots, 0)^T$; il membro di destra è la prima colonna di $\mathcal{J}_G(G^{-1}(x))$ e (per (2.5)) questo vettore colonna è dato da

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(t,s)=G^{-1}(x)} G(t; s) &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(t,s)=G^{-1}(x)} \gamma_X(t, s_2 \omega_2 + \dots + s_N \omega_N) \\ &= \left\{ X(\gamma_X(t, s_2 \omega_2 + \dots + s_N \omega_N)) \right\} \Big|_{(t,s)=G^{-1}(x)} \\ &= \left\{ X(G(t; s)) \right\} \Big|_{(t,s)=G^{-1}(x)} = X(x) \end{aligned}$$

e questo prova (2.1) e quindi la tesi. \square

2.2 Differenziazione lungo un flusso

In questa sezione supponiamo che $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ è un insieme aperto non vuoto.

Teorema 2.4 (Differenziazione lungo una curva integrale). *Sia X un campo vettoriale su Ω . Sia $\gamma_X(t)$ una qualsiasi curva integrale di X , definita su un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$.*

(1). *Se X è di classe C^1 e se $f \in C^1(\Omega)$ allora vale*

$$\frac{d}{dt}(f(\gamma_X(t))) = (Xf)(\gamma_X(t)), \quad t \in I. \quad (2.6)$$

(2). *Sia $k \geq 2$; se X è di classe C^{k-1} e $f \in C^k(\Omega)$ abbiamo*

$$\frac{d^k}{dt^k}(f(\gamma_X(t))) = (X^k f)(\gamma_X(t)), \quad t \in I. \quad (2.7)$$

(3). *Sia $n \in \mathbb{N}$ e supponiamo che X sia di classe C^n , e che $f \in C^{n+1}(\Omega)$; se $x \in \Omega$ e $\gamma_{X,x}(t)$ è la curva integrale massimale di X che inizia da x , allora dalla formula di Taylor con resto integrale otteniamo l'identità*

$$f(\gamma_{X,x}(t)) = \sum_{k=0}^n \frac{(X^k f)(x)}{k!} t^k + \frac{1}{n!} \int_0^t (t-s)^n (X^{n+1} f)(\gamma_{X,x}(s)) ds, \quad (2.8)$$

vera per ogni $t \in \mathcal{D}(X, x)$. In particolare, se invece di f usiamo la funzione identità $I(x) = x$, otteniamo la seguente identità (tra vettori di \mathbb{R}^N)

$$\Psi_x^X(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(X^k I)(x)}{k!} t^k + \frac{1}{n!} \int_0^t (t-s)^n (X^{n+1} I)(\Psi_s^X(x)) ds, \quad (2.9)$$

valida per ogni $t \in \mathcal{D}(X, x)$.

(4). Sia $n \in \mathbb{N}$ e supponiamo X di classe C^n , e che $f \in C^{n+1}(\Omega)$; se $x \in \Omega$ otteniamo anche la seguente formula di Taylor con resto di Peano di grado $n+1$:

$$f(\gamma_{X,x}(t)) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(X^k f)(x)}{k!} t^k + o(t^{n+1}), \quad \text{con } t \rightarrow 0, \quad (2.10)$$

$$\Psi_x^X(t) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(X^k I)(x)}{k!} t^k + o(t^{n+1}), \quad \text{con } t \rightarrow 0, \quad (2.11)$$

dove nella seconda equazione si usa la funzione identità come f .

(5). Conseguentemente, se X è un campo vettoriale liscio e se $f \in C^\infty(\Omega)$, la serie di Maclaurin della funzione $t \mapsto f(\gamma_{X,x}(t))$ è

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(X^k f)(x)}{k!} t^k. \quad (2.12)$$

Dimostrazione. (1). Innanzitutto osserviamo che per l'Osservazione 1.4, essendo X di classe C^1 , anche $t \mapsto \gamma_X(t)$ lo è. Quindi anche la composizione $f(\gamma_X(t))$ è di classe C^1 . Applicando, dunque, la regola della catena otteniamo, per ogni $t \in I$:

$$\frac{d}{dt}(f(\gamma_X(t))) = \mathcal{J}_f(\gamma_X(t)) \frac{d}{dt}(\gamma_X(t)) = \mathcal{J}_f(\gamma_X(t)) \cdot X(\gamma_X(t)) \stackrel{(1.5)}{=} (Xf)(\gamma_X(t)),$$

da cui, considerando gli estremi dell'equazione, si ha (2.6).

Ricordando l'Osservazione 1.11 si ha che la mappa $t \mapsto \gamma_X(t)$ è di classe C^k quando X è di classe C^{k-1} . Allora, se $f \in C^k(\Omega)$, la composizione $f(\gamma_X(t))$ è ancora di classe C^k .

(2). Dimostriamo per induzione su k la (2.7). Per $k=2$:

$$\frac{d^2}{dt^2}(f(\gamma_X(t))) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt}(f(\gamma_X(t))) \right) \stackrel{(2.6)}{=} \frac{d}{dt} \left((Xf)(\gamma_X(t)) \right).$$

Notando che $Xf \in C^1(\Omega)$ e applicando nuovamente (2.6) si ha:

$$\frac{d^2}{dt^2}(f(\gamma_X(t))) = (X(Xf))(\gamma_X(t)) = (X^2 f)(\gamma_X(t)).$$

Similmente per $k > 2$:

$$\frac{d^k}{dt^k}(f(\gamma_X(t))) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \left(\frac{d}{dt}(f(\gamma_X(t))) \right) \stackrel{(2.6)}{=} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \left((Xf)(\gamma_X(t)) \right).$$

Si ha $Xf \in C^{k-1}(\Omega)$ e quindi per ipotesi induttiva otteniamo:

$$\frac{d^k}{dt^k}(f(\gamma_X(t))) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \left((Xf)(\gamma_X(t)) \right) = (X^{k-1}(Xf))(\gamma_X(t)) = (X^k f)(\gamma_X(t)).$$

ossia (2.7).

(3)-(4). Applichiamo semplicemente le relative formule dei noti sviluppi di Taylor (ben poste essendo la composizione delle funzioni di classe C^{k+1}). Per (2.7) e calcolando in $t = 0$ otteniamo

$$\left. \frac{d^k}{dt^k} (f(\gamma_{X,x}(t))) \right|_{t=0} = \{(X^k f)(\gamma_{X,x}(t))\} \Big|_{t=0} = (X^k f)(x),$$

e quindi i relativi sviluppi. Per gli sviluppi con $f = I$ serve solo ricordare la Definizione 1.7.

(5). Analoga ai punti precedenti osservando che la composizione è C^∞ e quindi è ben posta.

Questo conclude le prove. □

Se $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ (per qualche $m \geq 1$), la tesi del Teorema 2.4 rimane vera, con la solita convenzione che Xf è il vettore di \mathbb{R}^m le cui componenti sono Xf_1, \dots, Xf_m , dove f_1, \dots, f_m sono le funzioni componenti di f . Per esempio, con la notazione del flusso in (1.9), si ha

$$\frac{d}{dt}(f(\Psi_t^X(x))) = (Xf)(\Psi_t^X(x)), \quad \forall f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m),$$

valida per $x \in \Omega$ e $t \in \mathcal{D}(X, x)$ e X di classe C^1 . Più in generale, per ogni $k \geq 2$, abbiamo

$$\frac{d^k}{dt^k}(f(\Psi_t^X(x))) = (X^k f)(\Psi_t^X(x)), \quad \forall f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m),$$

valida per $x \in \Omega$ e $t \in \mathcal{D}(X, x)$ e X di classe C^{k-1} . Per future referenze, scriviamo esplicitamente le seguenti espansioni:

$$\Psi_t^X(x) = x + tX(x) + o(t), \quad \text{con } t \rightarrow 0, \quad (2.13)$$

$$\Psi_t^X(x) = x + tX(x) + \frac{t^2}{2}X^2I(x) + o(t^2), \quad \text{con } t \rightarrow 0. \quad (2.14)$$

Entrambe sono vere se X è di classe C^1 .

2.3 L'equazione di variazione per un flusso

Sia X un campo vettoriale C^1 su Ω , e sia $x \in \Omega$ fissata. Come visto nell'Osservazione 1.11, la mappa $t \mapsto \Psi_t^X(x)$ è C^2 su $\mathcal{D}(X, x)$, e per la definizione di flusso abbiamo

$$\frac{d}{dt}\Psi_t^X(x) = X(\Psi_t^X(x)), \quad \Psi_0^X(x) = x. \quad (2.15)$$

La mappa $\mathcal{D}(X, x) \ni (t, x) \mapsto \Psi_t^X(x)$ è C^1 e ha le derivate parziali seconde miste continue

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial x_j} \Psi_t^X(x) \quad (\text{per ogni } j = 1, \dots, N),$$

e l'ordine di derivazione è interscambiabile. Allora possiamo derivare rispetto a x in (2.15) e scambiarla con $\frac{d}{dt}$, per ottenere

$$\frac{d}{dt} \mathcal{J}_{\Psi_t^X}(x) = \mathcal{J} \left(\frac{d}{dt} \Psi_t^X(x) \right) = \mathcal{J} \left(X(\Psi_t^X(x)) \right) = \mathcal{J}_{XI}(\Psi_t^X(x)) \cdot \mathcal{J}_{\Psi_t^X}(x). \quad (2.16)$$

Ricordiamo che vale $\mathcal{J}_{\Psi_0^X}(x) = \mathbb{I}_N$ dove \mathbb{I}_N denota la matrice identità $N \times N$. Questo mostra che la mappa

$$\mathcal{D}(X, x) \ni t \mapsto W_x(t) := \mathcal{J}_{\Psi_t^X}(x)$$

risolve il sistema matriciale lineare di equazioni differenziali ordinarie (chiamato **equazione di variazione** della (2.15))

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} W_x(t) = A_x(t) \cdot W_x(t) \\ W_x(0) = \mathbb{I}_N \end{cases} \quad \text{dove } A_x(t) := \mathcal{J}_{XI}(\Psi_t^X(x)). \quad (2.17)$$

Notiamo che, essendo X di classe C^1 , allora la matrice $A_x(t)$ ha entrate continue. Dalla (2.16) si ottiene anche l'identità integrale

$$\mathcal{J}_{\Psi_t^X}(x) = \mathbb{I}_N + \int_0^t \mathcal{J}_{XI}(\Psi_\tau^X(x)) \cdot \mathcal{J}_{\Psi_\tau^X}(x) d\tau, \quad \forall t \in \mathcal{D}(X, x). \quad (2.18)$$

Osservazione 2.5. Da risultati generali sui sistemi lineari di EDO e considerando il sistema omogeneo (2.17), definendo

$$w_x(t) := \det \left(\mathcal{J}_{\Psi_t^X}(x) \right), \quad t \in \mathcal{D}(X, x),$$

abbiamo la funzione Wronskiano $t \mapsto w_x(t)$ che soddisfa l'EDO lineare scalare

$$w_x'(t) = \text{traccia}(A_x(t)) w_x(t), \quad t \in \mathcal{D}(X, x). \quad (2.19)$$

Risolvendo questa EDO (separabile), e considerando

$$\text{traccia}(A_x(t)) \stackrel{(2.17)}{=} \text{traccia} \left(\mathcal{J}_{XI}(\Psi_t^X(x)) \right) = \text{div}(X)(\Psi_t^X(x)),$$

dove per semplicità denotiamo con $\text{div}(X)$ la funzione $\text{div}(XI)$ e con XI il vettore dei coefficienti del campo vettoriale X , otteniamo

$$w_x(t) = w_x(0) \exp \left(\int_0^t \text{div}(X)(\Psi_\tau^X(x)) d\tau \right).$$

Siccome $w_x(0) = \det(\mathcal{J}_{\Psi_0^X}(x)) = \det(\mathbb{I}_N) = 1$, abbiamo infine

$$w_x(t) = \exp \left(\int_0^t \text{div}(X)(\Psi_\tau^X(x)) d\tau \right).$$

Con i calcoli eseguiti sopra abbiamo provato un notevole risultato, anche chiamato **identità di Abel-Jacobi-Liouville**.

Teorema 2.6 (Identità di Liouville). *Sia X un campo vettoriale C^1 su Ω , e sia $x \in \Omega$ fissata. Allora, per ogni $t \in \mathcal{D}(X, x)$,*

$$\det \left(\mathcal{J}_{\Psi_t^X}(x) \right) = \exp \left(\int_0^t \operatorname{div}(X)(\Psi_\tau^X(x)) d\tau \right). \quad (2.20)$$

Questo, inoltre, mostra che

$$\det \left(\mathcal{J}_{\Psi_t^X}(x) \right) > 0, \quad \forall t \in \mathcal{D}(X, x). \quad (2.21)$$

Un'importante conseguenza dell'equazione di variazione (2.17) è il seguente risultato, spesso chiamato **Teorema di Liouville sui flussi**. Successivamente, dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^N$ Lebesgue misurabile, denotiamo la misura di Lebesgue di A con $\operatorname{meas}(A)$.

Teorema 2.7 (Variazione della misura attraverso un flusso). *Sia X un campo vettoriale C^1 su un insieme aperto Ω . Sia $t \in \mathbb{R}$ tale che $\Omega_t^X \neq \emptyset$. Allora, per ogni insieme misurabile $A \subseteq \Omega_t^X$,*

$$\operatorname{meas}(\Psi_t^X(A)) = \int_A \exp \left(\int_0^t \operatorname{div}(X)(\Psi_\tau^X(x)) d\tau \right) dx. \quad (2.22)$$

Se $t > 0$ e se $A \subset \Omega_t^X$ è compatto, allora si hanno le due formule

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\operatorname{meas}(\Psi_s^X(A)) \right) &= \int_{\Psi_s^X(A)} \operatorname{div}(X)(x) dx \\ &= \int_A \operatorname{div}(X)(\Psi_s^X(x)) \det \left(\mathcal{J}_{\Psi_s^X}(x) \right) dx, \end{aligned} \quad (2.23)$$

per ogni $s \in [0, t]$. Ricordando (2.20), questo fornisce

$$\frac{d}{ds} \left(\operatorname{meas}(\Psi_s^X(A)) \right) = \int_A \operatorname{div}(X)(\Psi_s^X(x)) \exp \left(\int_0^s \operatorname{div}(X)(\Psi_\tau^X(x)) d\tau \right) dx.$$

Valgono formule analoghe per $t < 0$ (e $s \in [t, 0]$). In particolare, se $\operatorname{div}(X) \equiv 0$ su Ω allora $\operatorname{meas}(\Psi_t^X(A))$ è costante rispetto a s .

Si noti come la prima identità in (2.23) dia una significativa interpretazione della divergenza di un campo vettoriale X e il suo ruolo nel flusso di X .

Dimostrazione. Siano Ω, X, t come nell'enunciato. Se $A \subseteq \Omega_t^X$ è misurabile abbiamo

$$\operatorname{meas}(\Psi_t^X(A)) = \int_{\Psi_t^X(A)} dy = \int_A \left| \det \left(\mathcal{J}_{\Psi_t^X}(x) \right) \right| dx,$$

dove abbiamo usato il cambio di variabile $y = \Psi_t^X(x)$ (con $x \in A$). Da (2.20) e (2.21) otteniamo (2.22). Inoltre, se $A \subset \Omega_t^X$ è compatto e $0 \leq s \leq t$, si ha (per l'Osservazione 1.9) $A \subset \Omega_t^X \subseteq \Omega_s^X$. Per questo possiamo porre $t = s$ in (2.22) e derivare rispetto a $s \in [0, t]$ passando la derivata sotto segno di integrale (ricordando che A è compatto e $\Psi_s^X(x)$ ha derivate di secondo ordine continue della forma $\frac{\partial^2}{\partial s \partial x_j}$). Dalla EDO in (2.19),

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\text{meas}(\Psi_s^X(A)) \right) &= \int_A \frac{d}{ds} \left\{ \det \left(\mathcal{J}_{\Psi_s^X}(x) \right) \right\} dx \\ &= \int_A \text{div}(X)(\Psi_s^X(x)) \det \left(\mathcal{J}_{\Psi_s^X}(x) \right) dx. \end{aligned}$$

Questa è la seconda identità in (2.23); con la sostituzione $y = \Psi_s^X(x)$ (con $x \in A$), otteniamo anche la prima. \square

La seguente osservazione mostra come i successivi Lemmi 2.9 e 2.10 diano ulteriore regolarità del flusso, non contenuta nemmeno nell'Osservazione 1.11, sulla analisi della buona regolarità.

Osservazione 2.8. Se X è un campo vettoriale C^1 su Ω , sappiamo che la mappa $(t, x) \mapsto \Psi_t^X(x)$ è C^1 su $\mathcal{D}(X)$, e ammette derivate parziali di secondo ordine continue quando t appare almeno una volta. Come conseguenza, la mappa a valori matriciali

$$(t, x) \mapsto M(t, x) := \mathcal{J}_{\Psi_t^X}(x)$$

è C^1 rispetto a t , ma è solo continua rispetto a x . È quindi non ovvio che se, data una funzione $f(t)$ (anche C^1), la funzione composta

$$F(t) := M(t, f(t)) = \mathcal{J}_{\Psi_t^X}(f(t))$$

sia differenziabile rispetto a t . Quando f è continua proveremo nel Lemma 2.9 che $F(t)$ è differenziabile in $t = 0$ tramite l'equazione di variazione nella sua forma integrale (2.18); quando $f(t) = \Psi_{-t}^X(x)$ proveremo nel Lemma 2.10 la differenziabilità di $F(t)$ per ogni t , tramite le proprietà di semigrupp della Prop. 1.13.

Lemma 2.9. *Sia X un campo vettoriale C^1 su Ω , e sia $x \in \Omega$ fissata. Supponiamo che (per un certo $\varepsilon > 0$) $f : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \Omega$ sia una funzione continua tale che $f(0) = x$. Allora la funzione a valori matriciali $F(t) = \mathcal{J}_{\Psi_t^X}(f(t))$ è differenziabile in $t = 0$ e*

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{J}_{\Psi_t^X}(f(t)) = \mathcal{J}_{X_I}(x). \quad (2.24)$$

Dimostrazione. Prima di tutto è facile osservare che $F(t)$ è ben posta in un intorno di $t = 0$. Usiamo (2.18) con $x = f(t)$: per piccole t , l'identità diventa

$$F(t) = \mathcal{J}_{\Psi_t^X}(f(t)) = \mathbb{I}_N + \int_0^t \mathcal{J}_{X_I}(\Psi_\tau^X(f(t))) \cdot \mathcal{J}_{\Psi_\tau^X}(f(t)) d\tau.$$

La funzione integranda di sopra è continua, quindi per il Teorema del Valor Medio per integrali, si ha l'esistenza di un $\tau(t)$ in $[0, 1]$ tale che

$$F(t) = \mathbb{I}_N + t \mathcal{J}_{XI}(\Psi_{t\tau(t)}^X(f(t))) \cdot \mathcal{J}_{\Psi_{t\tau(t)}^X}(f(t)).$$

Di conseguenza (essendo $F(0) = \mathbb{I}_N$) otteniamo

$$\frac{F(t) - F(0)}{t} = \mathcal{J}_{XI}(\Psi_{t\tau(t)}^X(f(t))) \cdot \mathcal{J}_{\Psi_{t\tau(t)}^X}(f(t)).$$

Siccome $\tau(t)$ è limitato, appartenendo a $[0, 1]$, per la continuità del flusso e di f , si prova che il limite per $t \rightarrow 0$ del secondo membro dell'equazione di sopra è $\mathcal{J}_{XI}(x) \cdot \mathcal{J}_I(x) = \mathcal{J}_{XI}(x)$, ossia la tesi. \square

Lemma 2.10. *Sia X un campo vettoriale C^1 su Ω , e sia $x \in \Omega$ fissata. Allora la funzione matriciale*

$$F(t) = \mathcal{J}_{\Psi_t^X}(\Psi_t^X(x))$$

è differenziabile rispetto a $t \in \mathcal{D}(X, x)$, e vale ciascuna delle seguenti identità

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\mathcal{J}_{\Psi_t^X}(\Psi_t^X(x)) \right) &= -\mathcal{J}_{\Psi_t^X}(\Psi_t^X(x)) \cdot \mathcal{J}_{XI}(\Psi_t^X(x)) \\ &= -\left(\mathcal{J}_{\Psi_t^X}(x) \right)^{-1} \cdot \mathcal{J}_{XI}(\Psi_t^X(x)). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Da notare la somiglianza tra la (2.25) e l'equazione di variazione (2.16).

Dimostrazione. Sia $x \in \Omega$ e $t \in \mathcal{D}(X, x)$. Allora $F(t)$ è ben posto, siccome Ψ_t^X è C^1 . Sapendo che $\Psi_t^X(\Psi_t^X(x)) = x$ (vedere Proposizione 1.13), derivando entrambi i membri rispetto a x , riconosciamo che $F(t)$ non è altro che

$$\left(\mathcal{J}_{\Psi_t^X}(x) \right)^{-1},$$

e quindi è C^1 rispetto a t per le proprietà di buona regolarità del flusso (vedere Osservazione 1.11). Per provare (2.25) consideriamo l'equazione $M(t) \cdot (M(t))^{-1} = \mathbb{I}_N$, ponendo $M(t) := \mathcal{J}_{\Psi_t^X}(x)$ per semplicità di notazione, e ne calcoliamo la derivata di entrambi i membri:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left\{ M(t) \cdot (M(t))^{-1} \right\} \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ M(t) \right\} \cdot (M(t))^{-1} + M(t) \cdot \frac{d}{dt} \left\{ (M(t))^{-1} \right\}, \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\frac{d}{dt} \left\{ (M(t))^{-1} \right\} = -(M(t))^{-1} \cdot \frac{d}{dt} \left\{ M(t) \right\} \cdot (M(t))^{-1}. \tag{2.26}$$

Allora (2.25) segue da (2.26) e dall'equazione di variazione (2.16). \square

Capitolo 3

Flusso attraverso $X, Y, -X, -Y$

3.1 I commutatori

L'obiettivo di questa sezione è dare una prima interpretazione del commutatore $[X, Y]$ di due campi vettoriali X e Y .

Teorema 3.1. *Siano X, Y campi vettoriali su Ω di classe C^1 e sia $x \in \Omega$. Allora, con $t \rightarrow 0$,*

$$\Psi_t^{-Y} \circ \Psi_t^{-X} \circ \Psi_t^Y \circ \Psi_t^X(x) = x + t^2 [X, Y](x) + o(t^2). \quad (3.1)$$

Quindi, il membro di sinistra della (3.1) rispetto alla variabile t ammette la derivata seconda in $t = 0$ data da $2[X, Y](x)$. Inoltre, se X, Y sono di classe C^2 (cosicché $[X, Y]$ è C^1), con $t \rightarrow 0$ si ha

$$\Psi_t^{-Y} \circ \Psi_t^{-X} \circ \Psi_t^Y \circ \Psi_t^X(x) = \Psi_{t^2}^{[X, Y]}(x) + o(t^2). \quad (3.2)$$

La formula (3.1) dà una prima interpretazione del commutatore $[X, Y]$ come un “peso” di quanto la composizione $\Psi_t^{-Y} \circ \Psi_t^{-X} \circ \Psi_t^Y \circ \Psi_t^X$ differisce dalla mappa identità (almeno per $t \sim 0$) con un'accuratezza al secondo ordine. Vedere inoltre la Figura 3.1. Infatti può essere riscritto come

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi_t^{-Y} \circ \Psi_t^{-X} \circ \Psi_t^Y \circ \Psi_t^X(x) - x}{t^2} = [X, Y](x). \quad (3.3)$$

Dimostrazione. Osserviamo che (3.2) segue dalla (3.1) poiché vale (vedi formula (2.13) con X sostituito da $[X, Y]$ e t da t^2)

$$\Psi_{t^2}^{[X, Y]}(x) = x + t^2 [X, Y](x) + o(t^2), \quad \text{con } t \rightarrow 0.$$

Dunque, procediamo con la dimostrazione della (3.1), la quale è piuttosto complessa. Per $x \in \Omega$ fissato, definiamo $F(t) := \Psi_t^{-Y} \circ \Psi_t^{-X} \circ \Psi_t^Y \circ \Psi_t^X(x)$. È facile verificare che

F è ben posta in un qualche intorno $[-\varepsilon, \varepsilon]$ di $t = 0$. Siccome X, Y sono C^1 , possiamo desumere che $\Psi_t^{\pm X}(x)$ e $\Psi_t^{\pm Y}(x)$ sono mappe C^1 di (x, t) sui loro domini, cosicchè F è C^1 su $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Abbiamo bisogno di mostrare che $F'(t)$ è differenziabile in $t = 0$ con $F'(0) = 0$ e $F''(0) = 2[X, Y](x)$; allora applicando la formula di Taylor con resto di Peano otteniamo la (3.1). Per calcolare $F'(t)$ usiamo la formula

$$F'(t) = \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} + \frac{\partial}{\partial t_3} + \frac{\partial}{\partial t_4} \right) \Big|_{t_1=t_2=t_3=t_4=t} \Psi_{t_1}^{-Y} \circ \Psi_{t_2}^{-X} \circ \Psi_{t_3}^Y \circ \Psi_{t_4}^X(x).$$

Applicando la regola della catena, otteniamo $F'(t) = G_1(t) + G_2(t) + G_3(t) + G_4(t)$, dove

$$\begin{aligned} G_1(t) &= -Y(\Psi_t^{-Y} \circ \Psi_t^{-X} \circ \Psi_t^Y \circ \Psi_t^X(x)) \\ G_2(t) &= -\mathcal{J}_{\Psi_t^{-Y}}(\Psi_t^{-X} \circ \Psi_t^Y \circ \Psi_t^X(x))X(\Psi_t^{-X} \circ \Psi_t^Y \circ \Psi_t^X(x)) \\ G_3(t) &= \mathcal{J}_{\Psi_t^{-Y}}(\Psi_t^{-X} \circ \Psi_t^Y \circ \Psi_t^X(x))\mathcal{J}_{\Psi_t^{-X}}(\Psi_t^Y \circ \Psi_t^X(x))Y(\Psi_t^Y \circ \Psi_t^X(x)) \\ G_4(t) &= \mathcal{J}_{\Psi_t^{-Y}}(\Psi_t^{-X} \circ \Psi_t^Y \circ \Psi_t^X(x))\mathcal{J}_{\Psi_t^{-X}}(\Psi_t^Y \circ \Psi_t^X(x))\mathcal{J}_{\Psi_t^Y}(\Psi_t^X(x))X(\Psi_t^X(x)). \end{aligned}$$

Poiché la matrice Jacobiana della mappa identità è \mathbb{I}_N , otteniamo

$$F'(0) = -Y(x) - X(x) + Y(x) + X(x) = 0.$$

Per mostrare l'esistenza e calcolare $F''(0)$, mostriamo che ciascuna $G_i(t)$ (per $i = 1, \dots, 4$) è differenziabile in $t = 0$. Questo è ovvio per G_1 essendo Y di classe C^1 e applicando la regola della catena abbiamo

$$G_1'(0) = -\mathcal{J}_{YI}(x)F'(0) = 0.$$

Per mostrare che ciascuna $G_i(t)$ ($i = 2, 3, 4$) è differenziabile in $t = 0$, applichiamo la regola di Leibniz e la regola della catena, insieme alla formula (2.24) del Lemma 2.9 applicata più volte; otteniamo quindi

$$\begin{aligned} G_2'(0) &= \mathcal{J}_{YI}X(x) - \mathcal{J}_{XI}(x)(-X(x) + Y(x) + X(x)) \\ G_3'(0) &= -\mathcal{J}_{YI}(x)Y(x) - \mathcal{J}_{XI}(x)Y(x) + \mathcal{J}_{YI}(x)(Y(x) + X(x)) \\ G_4'(0) &= -\mathcal{J}_{YI}(x)X(x) - \mathcal{J}_{XI}(x)X(x) + \mathcal{J}_{YI}(x)X(x) + \mathcal{J}_{XI}(x)X(x). \end{aligned}$$

Mettendo insieme, si ha

$$\begin{aligned} F''(0) &= G_1'(0) + G_2'(0) + G_3'(0) + G_4'(0) \\ &\stackrel{(1.5)}{=} X(YI)(x) + X(XI)(x) - Y(XI)(x) - X(XI)(x) + \\ &\quad - Y(YI)(x) - Y(XI)(x) + Y(YI)(x) + X(YI)(x) + \\ &\quad - X(YI)(x) - X(XI)(x) + X(YI)(x) + X(XI)(x) \\ &= 2X(YI)(x) - 2Y(XI)(x) = 2[X, Y](x). \end{aligned}$$

Questo conclude la prova. \square

Introduciamo una notazione per la composizione di flussi del Teorema 3.1.

Definizione 3.2. Siano X e Y due campi vettoriali C^1 su un insieme aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$. Poniamo

$$\Gamma_t^{X,Y}(x) := \Psi_t^{-Y} \circ \Psi_t^{-X} \circ \Psi_t^Y \circ \Psi_t^X(x), \quad (3.4)$$

per ogni $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$ tale che il membro di destra sia ben definito.

Importante prestare attenzione a non confondere l'insieme immagine della curva $t \mapsto \Gamma_t^{X,Y}(x)$ (questa curva è di classe C^k se X, Y sono di classe C^k) con l'insieme ottenuto dall'unione degli insiemi immagine delle curve integrali

$$\begin{aligned} & \{\Psi_s^X(x_1) : s \in [0, t]\}, \\ & \{\Psi_s^Y(x_2) : s \in [0, t]\}, \\ & \{\Psi_s^{-X}(x_3) : s \in [0, t]\}, \\ & \{\Psi_s^{-Y}(x_4) : s \in [0, t]\}, \end{aligned}$$

con $x_1 = x, x_2 = \Psi_t^X(x_1), x_3 = \Psi_t^Y(x_2), x_4 = \Psi_t^{-X}(x_3)$. In generale, questa unione di curve non è una varietà di classe C^1 . Vedere Figura 3.1.

Nel Teorema 3.1 abbiamo dimostrato che $\Gamma_t^{X,Y}(x)$ ammette derivate seconde rispetto a t in 0, e vale

$$\Gamma_t^{X,Y}(x) = x + t^2 [X, Y](x) + o(t^2) \quad \text{con } t \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

Osservazione 3.3. Da risultati generali della Teoria delle EDO sappiamo che, per ogni insieme compatto $K \subset \Omega$, esiste $\varepsilon = \varepsilon(K, X, Y, \Omega) > 0$ tale che $\Gamma_t^{X,Y}(x)$ è ben definita per ogni $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ e ogni $x \in K$. Inoltre, se X e Y sono di classe C^k (per $k = 1, 2, \dots, \infty, \omega$) allora

$$t \mapsto \Gamma_t^{X,Y}(x) \text{ è } C^{k+1} \text{ e } (x, t) \mapsto \Gamma_t^{X,Y}(x) \text{ è } C^k,$$

sui rispettivi domini. In aggiunta, esistono anche le derivate parziali della seguente forma (l'ordine della derivazione è interscambiabile)

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial t \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \Gamma_t^{X,Y}(x),$$

per ogni scelta di $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, N\}$.

3.2 Il prodotto di esponenziali

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto, sia X un campo vettoriale liscio su Ω , e sia $x \in \Omega$. Se consideriamo $f = I$ (la mappa identità di \mathbb{R}^N) in (2.12) notiamo che la serie di Maclaurin della

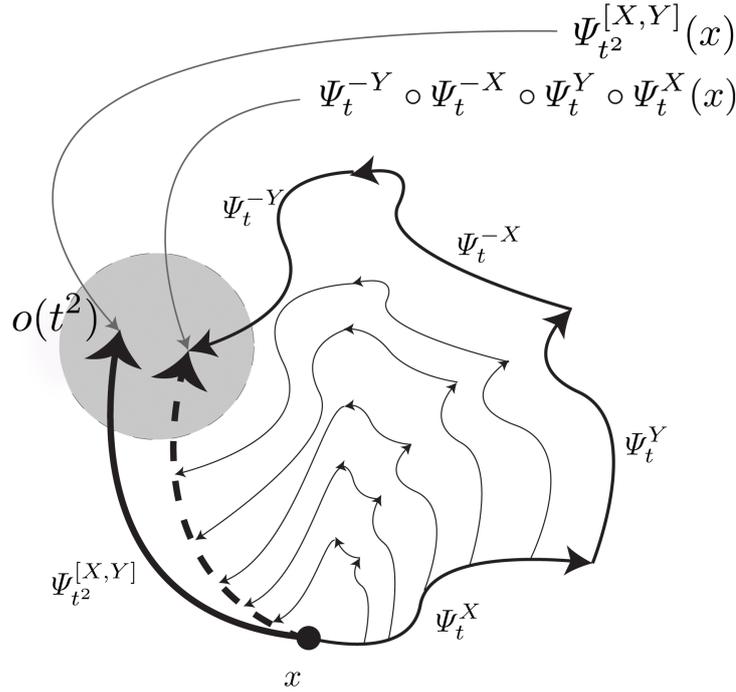


Figura 3.1: L'approssimazione del flusso del commutatore $[X, Y]$ (fino al tempo t^2) tramite i flussi dei campi vettoriali $\pm X, \pm Y$. La linea tratteggiata rappresenta l'insieme immagine della curva $t \mapsto \Gamma_t^{X,Y}(x)$ introdotta nella Definizione 3.2, dove il cammino “squadrate” in grassetto è l'unione dei quattro insiemi immagine delle curve integrali di $\pm X, \pm Y$, e condivide con $\Gamma_t^{X,Y}(x)$ il punto d'inizio e di fine; i cammini “squadrate” più piccoli danno il valore di $\Gamma_t^{X,Y}(x)$ per tempi t più piccoli. L'insieme grigio rappresenta l'errore dell'approssimazione (di ordine $o(t^2)$) tra $\Gamma_t^{X,Y}(x)$ e $\Psi_{t^2}^{[X,Y]}(x)$.

funzione $t \mapsto \gamma_{X,x}(t)$ è

$$\gamma_{X,x}(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(X^k I)(x)}{k!} t^k. \quad (3.6)$$

Da qui in poi, il simbolo \sim significherà che ciò che si trova a destra è la serie di Maclaurin di ciò che si trova a sinistra. Osserviamo che la serie formale in (3.6) “assomiglia” alla serie di un esponenziale (l’“esponenziale” di tX calcolato in x). Per questo motivo usiamo la seguente notazione per la curva integrale $\gamma(t, X, x)$

Notazione 3.3.1. Sia X un campo vettoriale C^1 su Ω ; usiamo la notazione

$$\exp(tX)(x) := \gamma(t, X, x), \quad (3.7)$$

dove $x \in \Omega$ e $t \in \mathcal{D}(X, x)$. Quando il tempo $t = 1$ è ammesso, chiamiamo una qualsiasi mappa della forma $x \mapsto \exp(X)(x)$ una **mappa esponenziale**, o più semplicemente **l'esponenziale** del campo vettoriale X .

Si deve prestare attenzione a non confondere la definizione di mappa esponenziale con la mappa Exp di un gruppo \mathbb{G} di Lie, nonostante esse siano comunque correlate (dove e è l'identità di \mathbb{G}).

$$\text{Exp}(X) = \exp(tX)(e) \Big|_{t=1}, \quad \text{con } X \in \text{Lie}(\mathbb{G}).$$

Secondo la Def. 1.7, la mappa $\exp(X)$ non è nient'altro che il flusso di X al tempo $t = 1$; in generale (se il tempo $t = 1$ è ammesso almeno per un punto di Ω), il flusso è definito solo sul sottoinsieme aperto Ω_1^X di Ω .

Osservazione 3.4. È da notare come la notazione $\exp(tX)(x)$ possa confondere siccome coinvolge t e X insieme, diversamente da $\gamma(t, X, x)$. Per esempio, non è chiaro se $\exp(2X)(x)$ significhi $\gamma(2, X, x)$ o $\gamma(1, 2X, x)$. In un certo senso questo è giustificato dalla proprietà di omogeneità nella Proposizione 1.13-(3). Ad esempio, se $t \in \mathcal{D}(X, x)$, possiamo pensare $\exp(tX)(x)$ come $\gamma(t, X, x)$ (come è stato definito) oppure $\gamma(1, tX, x)$ (la buona positura di $\gamma(1, tX, x)$ è contenuta nella Prop. 1.13 in quanto $1 \in \mathcal{D}(tX, x)$).

Osservazione 3.5. Se X è un campo vettoriale di classe C^ω su Ω , allora, da risultati generali sulle EDO, ciascuna curva integrale di X è di classe C^ω sul proprio dominio massimale. Questo mostra che per un adatto $\varepsilon > 0$ abbiamo l'identità tra la funzione $\gamma_{X,x}(t)$ e la sua espansione di Maclaurin sull'intervallo $[-\varepsilon, \varepsilon]$ (vedere (2.12)):

$$\exp(tX)(x) = I(x) + tXI(x) + \frac{t^2}{2}X^2I(x) + \frac{t^3}{6}X^3I(x) + \dots, \quad (3.8)$$

per ogni $|t| < \varepsilon$. Notare che nel calcolo di $X^n I = X \circ \dots \circ XI$ (n volte), solo i termini di primo ordine in ogni applicazione successiva dell'operatore X contribuiscono alla costruzione della soluzione. Quindi, in casi semplici, come per esempio nel caso di un campo vettoriale lineare, (3.8) può essere usata per integrare esplicitamente l'EDO che definisce $\gamma(t, X, x)$. Quando X è C^ω , il Teorema di Cauchy-Hadamard fornisce il raggio di convergenza ρ di una serie di potenze complessa $\sum_k a_k(z - z_0)^k$ con la formula $1/\rho = \limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k}$, il quale assicura che la serie in (3.8) converge per $|t| < \varepsilon$ se e solo se $\rho \geq \varepsilon$, da cui

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{X^k I(x)}{k!} \right\|^{1/k} \leq 1/\varepsilon.$$

Questo fornisce la seguente stima per un campo vettoriale X di classe C^ω (dove M_x è una costante positiva adatta che dipende da x)

$$\|X^k I(x)\| \leq (M_x)^k k!, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Siccome lo stesso ε può essere scelto per ogni x in un fissato insieme compatto di Ω , deduciamo che per ogni insieme compatto $K \subset \Omega$ e per ogni campo vettoriale X di classe C^ω su Ω , esiste $M = M(X, K) > 0$ tale che

$$\|X^k I(x)\| \leq M^k k!, \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N} \text{ e per ogni } x \in K.$$

Teorema 3.6 (Espansione della composizione di due campi vettoriali). *Sia $X, Y \in \mathcal{X}(\Omega)$, $x \in \Omega$ e $f \in C^\infty(\Omega)$. Allora, la serie di Taylor in $(0, 0)$ di*

$$(t, s) \mapsto f(\exp(tY)(\exp(sX)(x)))$$

(che è ben definito in un intorno aperto di $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$) è

$$\sum_{i, j \geq 0} \frac{(X^i Y^j f)(x)}{i! j!} s^i t^j. \quad (3.9)$$

Notare l'ordine invertito di X, Y in (3.9) rispetto a $f(\exp(tY)(\exp(sX)))$ (dove leggiamo in ordine lessicografico).

Dimostrazione. Sia x, X, Y come nell'asserto. La curva $\exp(sX)(x) = \gamma(s, X, x)$ è definita per $s \in \mathcal{D}(X, x)$ che è un intervallo aperto contenente 0. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $[-\varepsilon, \varepsilon] \subset \mathcal{D}(X, x)$. Allora l'insieme $K := \{\gamma(s, X, x) : s \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}$ è un sottoinsieme compatto di Ω . Dunque, da risultati generali sulle EDO, esiste $\delta > 0$ tale che $\exp(tY)(k) = \gamma(t, Y, k)$ esiste per ogni $t \in [-\delta, \delta]$ e *uniformemente* per ogni $k \in K$. Questo mostra che la funzione

$$F(s, t) := f(\exp(tY)(\exp(sX)(x))) \quad (3.10)$$

è ben posta per $(s, t) \in U := [-\varepsilon, \varepsilon] \times [-\delta, \delta]$, ed è liscia nell'interno di U , il quale è un intorno aperto di $(0, 0)$ in \mathbb{R}^2 . Vedere Figura 3.2.

Per ogni $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, abbiamo il seguente calcolo, in cui applichiamo più volte (2.7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{i+j} F}{\partial s^i \partial t^j}(0, 0) &= \frac{\partial^i}{\partial s^i} \Big|_{s=0} \left(\frac{\partial^j}{\partial t^j} \Big|_{t=0} F(s, t) \right) \\ &= \frac{\partial^i}{\partial s^i} \Big|_{s=0} \left(\frac{\partial^j}{\partial t^j} \Big|_{t=0} f(\gamma_Y(t, z)) \right) \quad (\text{con } z = \exp(sX)(x)) \\ &\stackrel{(2.7)}{=} \frac{\partial^i}{\partial s^i} \Big|_{s=0} \left((Y^j f)(\gamma_Y(0, z)) \right) = \frac{\partial^i}{\partial s^i} \Big|_{s=0} \left((Y^j f)(\exp(sX)(x)) \right) \\ &= \frac{\partial^i}{\partial s^i} \Big|_{s=0} \left((Y^j f)(\gamma_X(s, x)) \right) \stackrel{(2.7)}{=} X^i (Y^j f)(x). \end{aligned}$$

Perciò abbiamo provato che

$$\frac{\partial^{i+j} F}{\partial s^i \partial t^j}(0, 0) = (X^i Y^j f)(x), \quad \forall i, j \geq 0. \quad (3.11)$$

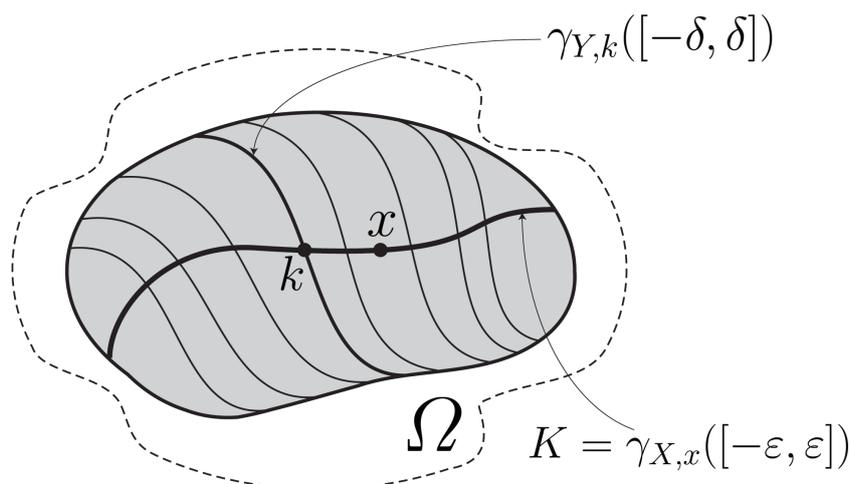


Figura 3.2: Il dominio della mappa $F(s, t)$ in (3.10).

Siccome la serie di Taylor di $F(s, t)$ in $(0, 0)$ è data da

$$\sum_{i,j \geq 0} \frac{\partial^{i+j} F(0, 0)}{\partial s^i \partial t^j} \frac{s^i t^j}{i! j!},$$

allora (3.9) segue da (3.11). □

La serie in (3.9) può essere formalmente riscritta come il prodotto di due serie di potenze di tipo esponenziale (applicate ad f):

$$\text{Formalmente: } \sum_{i,j \geq 0} \frac{X^i Y^j}{i! j!} s^i t^j = \sum_{i \geq 0} \frac{(sX)^i}{i!} \sum_{j \geq 0} \frac{(tY)^j}{j!} =: e^{sX} e^{tY}.$$

Se siamo in grado di identificare il prodotto formale $e^x e^y$ nel caso di serie di potenze formali in due incognite non commutanti x e y , allora dovremmo essere in grado di comprendere più approfonditamente la serie di Taylor (3.9), il che (usando espansioni esatte con resti) rende più chiaro la composizione di flussi $\exp(tY)(\exp(sX)(x))$. Il seguente esempio mostra un motivo del perché è importante lo studio della composizione di mappe esponenziali, anche nel più semplice dei contesti *subellittici*, il primo gruppo di Heisenberg.

Esempio 3.7. Consideriamo su \mathbb{R}^3 i campi vettoriali

$$X_1 = \partial_{x_1} + 2x_2 \partial_{x_3} \text{ e } X_2 = \partial_{x_2} - 2x_1 \partial_{x_3}.$$

Questi campi vettoriali sono generatori dell'algebra di Lie del primo gruppo di Heisenberg in \mathbb{R}^3 , che è nilpotente di grado 2. Consideriamo le rispettive curve integrali che saranno

della forma

$$\gamma_{X_1}(t, (u_0, v_0, w_0)) = (u_0 + t, v_0, w_0 + 2v_0t)$$

$$\gamma_{X_2}(t, (u_0, v_0, w_0)) = (u_0, v_0 + t, w_0 - 2u_0t)$$

per un qualche $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$. Partiamo ora dall'origine $P_0 = (0, 0, 0)$ di \mathbb{R}^3 e percorriamo la curva integrale di X_1 ; dopo un tempo t raggiungiamo il punto $P_1 = \exp(tX_1)(P_0) = (t, 0, 0)$. Se procediamo lungo la curva integrale di X_2 , dopo un tempo t si ha il punto $P_2 = \exp(tX_2)(P_1) = (t, t, -2t^2)$. Proseguendo da P_2 otteniamo $P_3 = \exp(-tX_1)(P_2) = (0, t, -4t^2)$ (lungo la curva integrale di $-X_1$ al tempo t) e per ultimo da P_3 si ha $P_4 = \exp(-tX_2)(P_3) = (0, 0, -4t^2)$ (lungo la curva integrale di $-X_2$ al tempo t). Vedere Figura 3.3.

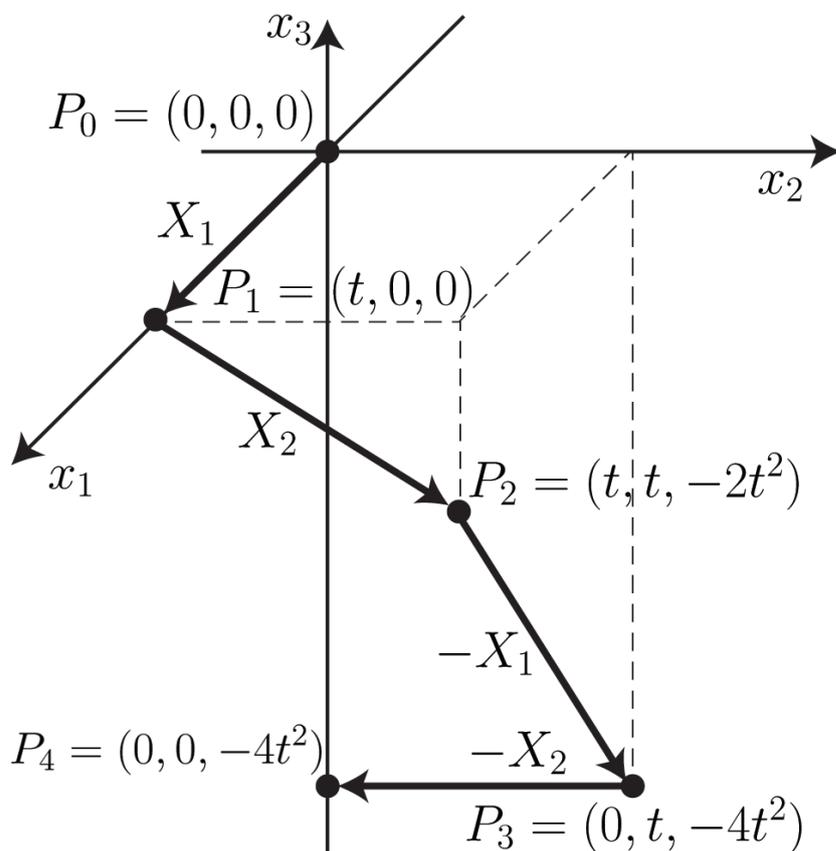


Figura 3.3: Come ottenere una variazione (negativa) lungo la coordinata x_3 , seguendo la direzione “orizzontale” delle curve integrali dei campi vettoriali $\pm X_1, \pm X_2$ nel gruppo di Heisenberg.

Abbiamo trovato quindi un modo per ottenere una variazione (in questo caso negativa, ma invertendo i ruoli di X_1 e X_2 avremmo ottenuto una variazione positiva) nella terza

coordinata del punto di partenza $(0, 0, 0)$, semplicemente procedendo lungo la direzione “orizzontale” dei campi vettoriali $\pm X_1, \pm X_2$. Questo è alquanto notevole in quanto, in termini del vettore dei coefficienti, $\partial_3 \equiv (0, 0, 1)$ non appartiene allo span di $X_1 \equiv (1, 0, 2x_2)$ e di $X_2 \equiv (0, 1, -2x_1)$ per nessuna scelta di (x_1, x_2, x_3) ! In un certo senso, abbiamo ottenuto la direzione del campo vettoriale ∂_3 che, insieme a X_1 e X_2 , forma una base di \mathbb{R}^3 in ogni punto:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x_2 & -2x_1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0, \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Possiamo vedere chiaramente che $[X_1, X_2] = -4\partial_3$ è proporzionale a $X_3 := \partial_3$ e come ciò non sia una coincidenza. Infatti, come visto nel Teorema 3.1, l’appropriata composizione delle mappe esponenziali di due campi vettoriali X_1 e X_2 ci porta circa dove ci porterebbe $[X_1, X_2]$. Notare che

$$P_4 = \left(\exp(-tX_2) \circ \exp(-tX_1) \circ \exp(tX_2) \circ \exp(tX_1) \right)(0).$$

Quanto visto è un tipico fenomeno subellittico: un insieme di m campi vettoriali, con m strettamente minore della dimensione N dello spazio ambiente (nell’esempio $m = 2$ e $N = 3$), può essere sufficiente a coprire tutte le N direzioni dello spazio.

Bibliografia

- [1] S. Biagi, A. Bonfiglioli: *An introduction to the geometrical analysis of vector fields— with applications to maximum principles and Lie groups.*, WSPC, 2019.
- [2] P. Hartman: *Ordinary Differential Equations*, Seconda edizione, SIAM, 1987.
- [3] J. M. Lee: *Introduction to smooth manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 218, Seconda edizione, Springer, 2013.

Ringraziamenti

Concludo il lavoro ringraziando il mio relatore per la sua disponibilità e il suo aiuto nel preparare l'ultimo passo di questo percorso.

Ringrazio la mia famiglia per esserci sempre stata per me anche nei momenti più difficili.

Ringrazio la mia fidanzata per essere stata al mio fianco lungo tutto il viaggio.

Ringrazio i miei amici per tutti i momenti di risate passati insieme.

Infine ringrazio i miei amici B.Y.K.A. che mi incoraggiano sempre a essere me stesso.