

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Isostasia glaciale in Groenlandia: modelli elastici e visco-elastici

Presentata da:
Carla Morgana

Relatore:
Prof. Giorgio Spada

Anno Accademico 2023/2024

Abstract

In questa Tesi si analizza il fenomeno dell'isostasia glaciale in Groenlandia, con un focus particolare sul ghiacciaio Helheim, uno dei principali responsabili della perdita di massa della calotta glaciale groenlandese. Il lavoro si concentra sul confronto tra modelli reologici elastici e visco-elastici, per valutare come questi influenzino la risposta della superficie terrestre alla deglaciazione. Attraverso l'utilizzo del software TABOO, sono stati simulati gli spostamenti e le velocità radiali e tangenziali indotti dalla fusione del ghiacciaio causate dai cambiamenti climatici in atto, in un periodo di 100 anni. I risultati hanno mostrato che, nel breve periodo (alcune decadi), le deformazioni possono essere principalmente descritte da un modello elastico ma si mostra anche che l'introduzione di un modello visco-elastico fornisce una descrizione più accurata dei processi a medio e lungo termine. Infine, vengono discussi i limiti dello studio ed i possibili miglioramenti futuri.

Indice

1	Cenni alla reologia della Terra solida	6
1.1	Deformazione di un corpo	6
1.2	Dall'elasticità alla visco-elasticità	8
1.3	Reologia della Terra solida	11
2	Teoria e applicazioni del software TABOO	14
2.1	Carichi di superficie	15
2.2	Risposta ad un carico di superficie	17
2.2.1	Caso Elastico	17
2.2.2	Caso visco-elastico	18
3	Isostasia glaciale in Groenlandia	21
3.1	Glacial Isostatic Adjustment	22
3.2	Deformazioni verticali in Groenlandia	24
4	Un caso di studio: il ritiro del ghiacciaio Helheim	29
4.1	Geometria del carico	30
4.2	Configurazione di TABOO	31
4.3	Risultati	33
4.3.1	Spostamento e velocità radiali	33
4.3.2	Spostamento e velocità tangenziali	34
5	Conclusioni	39

Introduzione

Il termine "isostasia" è stato introdotto dal grande geologo Clarence Dutton nel 1882 per descrivere lo stato di equilibrio gravitazionale tra la crosta terrestre e lo strato superiore del mantello, l'astenosfera, che permette alle grandi porzioni crostali di "galleggiare" sullo strato sottostante. Quando questo equilibrio viene disturbato, ad esempio da processi tettonici o climatici, si verificano movimenti compensatori di sollevamento e subsidenza che tendono a ristabilirlo.

L'isostasia glaciale è il processo di sollevamento dovuto allo scioglimento dei grandi masse glaciali che coprivano in parte dell'emisfero settentrionale ed in parte l'Antartide durante l'ultima era glaciale, culminata circa 20,000 anni fa. A causa dell'estrema viscosità del mantello terrestre, questi movimenti verticali si manifestano ancora oggi e occorreranno ancora molti millenni prima di raggiungere un nuovo equilibrio.

Studiare questi fenomeni è fondamentale per sviluppare modelli predittivi accurati, non solo della risposta della Terra ai cambiamenti di carico, ma anche per prevedere gli effetti a lungo termine di alcune dinamiche terrestri, come il costante aumento della temperatura globale, che inducono lo scioglimento delle calotte glaciali e il conseguente innalzamento del livello del mare.

Alla luce di ciò, questo lavoro di Tesi si propone di studiare le deformazioni indotte dallo scioglimento di Helheim, uno dei ghiacciai più grandi della regione Groenlandia, seconda per riserva d'acqua allo stato solido della Terra dopo l'Antartide. Si è studiato come i modelli reologici, elastico e visco-elastico, influenzino le deformazioni nel breve periodo (100 anni) e, in seguito, si è verificato se il modello elastico, comunemente utilizzato nella letteratura scientifica per descrivere la risposta immediata della litosfera ai cambiamenti di carico, sia adeguato.

La Tesi è organizzata come segue. Nel capitolo 1 viene fornito il contesto teorico necessario per comprendere i modelli utilizzati, introducendo i concetti della teoria delle deformazioni e della reologia della Terra. Nel capitolo 2 è presentato il software utilizzato per le simulazioni, TABOO, con una descrizione delle deformazioni indotte da carichi superficiali, sia in un contesto elastico che visco-elastico. Nel capitolo 3 viene svolto un approfondimento sulla calotta glaciale della Groenlandia ed una breve trattazione del fenomeno del *Glacial Isostatic Adjustment*. Sono illustrati, inoltre, i metodi utilizzati per modellare le deformazioni dovute allo scioglimento della calotta, confrontando approcci

regionali e globali. Nel capitolo 4, dedicato al caso di studio del ghiacciaio Helheim, si descrive la configurazione del modello e vengono presentati i risultati delle simulazioni da cui vengono poi tratte le conclusioni finali.

Capitolo 1

Cenni alla reologia della Terra solida

La reologia è la disciplina che studia la deformazione e il flusso dei materiali sotto l'applicazione di una forza. In geofisica, la reologia fornisce il quadro teorico necessario per descrivere come la litosfera ed il mantello terrestre rispondono a carichi variabili, quali quelli indotti dalle masse glaciali. Quando un carico, ad esempio costituito dal peso di un ghiacciaio, viene applicato alla superficie terrestre, la litosfera e il mantello sottostante si deformano. Questa deformazione può essere descritta in termini di tre principali componenti reologiche: elastica, visco-elastica e viscosa. Ciascuna di queste componenti descrive un comportamento specifico del materiale terrestre in risposta allo stress applicato, e la loro combinazione determina la risposta complessiva della Terra.

1.1 Deformazione di un corpo

La deformazione, o *strain*, si riferisce al cambiamento di forma e/o volume di un corpo materiale in seguito all'applicazione di uno *stress*, ossia la forza esercitata per unità di superficie. A seconda della natura dello stress applicato, la deformazione si manifesta in modi diversi:

- dilatazione (o contrazione) longitudinale,
- deformazione di taglio,
- deformazione di volume.

Nel contesto della meccanica dei continui, la deformazione è descritta matematicamente attraverso un tensore, il **tensore di deformazione**, che ci dice come ogni elemento di massa materiale cambia la propria forma ed il proprio volume rispetto alla configurazione originale. Il tensore delle deformazioni infinitesime ϵ_{ij} è definito come

$$\epsilon_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (1.1)$$

dove u_i rappresenta la componente del vettore spostamento in direzione i ($i = 1, 2, 3$) e x_j è la coordinata spaziale j ($j = 1, 2, 3$). Il tensore delle deformazioni è simmetrico e le sue componenti diagonali rappresentano allungamenti (o contrazioni) relativi di segmenti posti lungo gli assi mentre le componenti non diagonali rappresentano le deformazioni di taglio. La somma degli elementi diagonali (traccia) del tensore ϵ_{kk} fornisce inoltre la variazione relativa di volume di una porzione infinitesima del corpo.

Il sistema di forze che complessivamente si instaurano in un solido e lo deformano è duplice:

- **Forze di volume** agenti direttamente su tutti gli elementi di volume del continuo, dipendenti unicamente dai campi esterni che agiscono sul solido (il caso tipico è quello delle forze gravitazionali),
- **Forze di superficie** dovute alle azioni che ciascuna porzione di solido subisce dalla parte restante del continuo. Una generica forza di superficie può essere decomposta secondo due direzioni, rispettivamente normale alla superficie e di taglio ossia tangenziale.

Assumendo che il rapporto della forza esercitata su una superficie $\frac{\Delta F}{\Delta S}$ tenda a un limite finito al tendere di ΔS a 0, il vettore limite prende il nome di *trazione*

$$T_i(\hat{n}, \mathbf{r}, t) = \frac{dF_i}{dS}, \quad (1.2)$$

dove T_i dipende dalla posizione e dall'orientazione della superficie dS .

Le componenti delle trazioni sui piani coordinati prendono il nome di **sforzi** (*stress*); le diverse componenti dello sforzo possono essere organizzate in una matrice quadrata σ_{ki} , in cui il primo indice denota la faccia coordinata su cui agisce la trazione e il secondo indice denota la componente della trazione: gli elementi diagonali σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} sono gli sforzi normali (*normal stress*) che agiscono in direzione normale al piano, gli elementi non diagonali sono detti sforzi di taglio (*shear stress*) e agiscono in direzione tangente al piano.

La relazione fisica tra la deformazione applicata e lo sforzo risultante (o, equivalentemente, tra lo sforzo applicato e la conseguente deformazione osservata) è descritta dalla cosiddetta **legge costitutiva**:

$$\sigma_{ij} = f(\epsilon_{ij}), \quad (1.3)$$

dipendente dal materiale, dalle condizioni termodinamiche in cui si trova e dalla durata della sollecitazione. Tuttavia, la struttura formale della meccanica dei continui non è in grado di ricavarla *a priori*, per cui deve essere assunta sulla base delle osservazioni sperimentali [7].

Tra le principali tipologie di relazioni costitutive troviamo le relazioni **elastiche** (in cui σ_{ij} dipende solo da ϵ_{ij} tramite una relazione biunivoca), le relazioni **viscose** (in

cui σ_{ij} dipende anche da $\dot{\epsilon}_{ij}$ in cui il punto denota la derivata temporale), le relazioni **plastiche** e le relazioni **visco-elastiche** (si veda, ad esempio, [7]).

1.2 Dall'elasticità alla visco-elasticità

Se la deformazione ha luogo istantaneamente all'applicazione dello sforzo ed è direttamente proporzionale allo sforzo applicato, il materiale è detto **elastico**. L'equazione costitutiva associata è

$$\sigma_{ij} = \mathcal{C}_{ijkl}\epsilon_{kl}, \quad (1.4)$$

dove le \mathcal{C}_{ijkl} sono opportune costanti. La (1.4) è una generalizzazione della famosa Legge di Hooke (Robert Hooke, 1635-1703) introdotta nel 1678 ("*ut tensio, sic vis*").

Il tensore \mathcal{C}_{ijkl} è noto come tensore delle costanti elastiche ed è definito da $3^4 = 81$ costanti che si riducono a 21 grazie alla simmetria dei tensori di sforzo e deformazione, all'isotropia del materiale e ad alcune considerazioni termodinamiche. In questo modo si ottiene la relazione costitutiva di un materiale elastico isotropo lineare

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij}, \quad (1.5)$$

dove μ e λ sono note come costanti di Lamè. Nel caso unidimensionale, la costante di proporzionalità tra stress e strain è il *modulo di elasticità* E .

Tuttavia, non tutti i materiali rispondono agli sforzi applicati in modo istantaneo. Nei fluidi ed in alcuni materiali solidi sotto determinate condizioni, la deformazione non è istantanea, ma avviene nel tempo e dipende dalla velocità con cui lo sforzo viene applicato. Questo comportamento è descritto dalla viscosità, che rappresenta una misura della resistenza interna al flusso che un materiale oppone quando viene sottoposto a uno sforzo di taglio. Isaac Newton (1642-1726) fu tra i primi a studiare questo comportamento nei fluidi, proponendo una relazione che oggi è alla base della teoria dei **fluidi newtoniani**: lo sforzo di taglio σ è proporzionale al tasso di deformazione (*strain rate*) tramite la viscosità dinamica del fluido η (unità di Pa · s) come costante di proporzionalità.

Il comportamento descritto dalla legge di Newton può essere rappresentato meccanicamente attraverso un modello ideale noto come stantuffo (o *damper*):

$$\sigma = \eta\dot{\epsilon}, \quad (1.6)$$

La relazione costitutiva completa dei fluidi newtoniani che tiene conto sia dello sforzo di taglio che dello stress normale è

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta\left(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3}\dot{\epsilon}_{kk}\delta_{ij}\right), \quad (1.7)$$

dove p è la pressione idrostatica.

Diventa adesso naturale considerare i materiali che combinano caratteristiche elastiche e viscosi. Mentre l'elasticità descrive una risposta immediata e recuperabile, e la viscosità una risposta che evolve nel tempo e non è recuperabile, molti materiali reali manifestano un comportamento intermedio, caratterizzato dalla coesistenza di proprietà elastiche e viscosi. Questi materiali sono detti **visco-elastici**.

Non è irragionevole assumere che tutti i materiali reali siano, in effetti, visco-elastici, poiché in tutti i materiali si possono osservare sia comportamenti elastici, che permettono un recupero della deformazione, sia comportamenti viscosi, che causano una deformazione permanente nel tempo. Per descrivere matematicamente questi materiali sono stati sviluppati diversi modelli reologici.

Uno dei modelli più utilizzati è il **modello di Maxwell**, rappresentato meccanicamente da un pistone e una molla in collegate in serie, soggetti quindi allo stesso sforzo; la deformazione, o equivalentemente, il tasso di deformazione, e' una grandezza additiva quindi sarà la somma dei tassi di deformazione elastico e newtoniano:

$$\dot{\epsilon}_{tot} = \dot{\epsilon}_{Hooke} + \dot{\epsilon}_{Newton}, \quad (1.8)$$

e poiché si ha:

$$\dot{\epsilon}_{Hooke} = \frac{\dot{\sigma}}{E} \quad (1.9)$$

e

$$\dot{\epsilon}_{Newton} = \frac{\sigma}{\eta}, \quad (1.10)$$

l'equazione costitutiva per un fluido Maxwelliano sarà:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}, \quad (1.11)$$

che si presenta come un'equazione differenziale di primo ordine in due incognite (sforzo e deformazione) che non possono essere ricavate simultaneamente e quindi l'equazione non può essere risolta, in generale.

Si ricorre quindi a due esperimenti (o *tests*) fondamentali:

- **Creep test**, in cui si applica da un certo momento in poi uno sforzo costante, fissando così una delle due incognite:

$$\sigma(t) = \sigma_0, \quad t \geq 0, \quad (1.12)$$

per cui risolvendo l'equazione di Maxwell si ottiene

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta}t \quad t \geq 0, \quad (1.13)$$

Dunque, se sottoposto a uno sforzo improvviso, un materiale maxwelliano si deforma elasticamente e successivamente scorre a velocità costante. Questo comportamento e' illustrato in Figura 1.1.

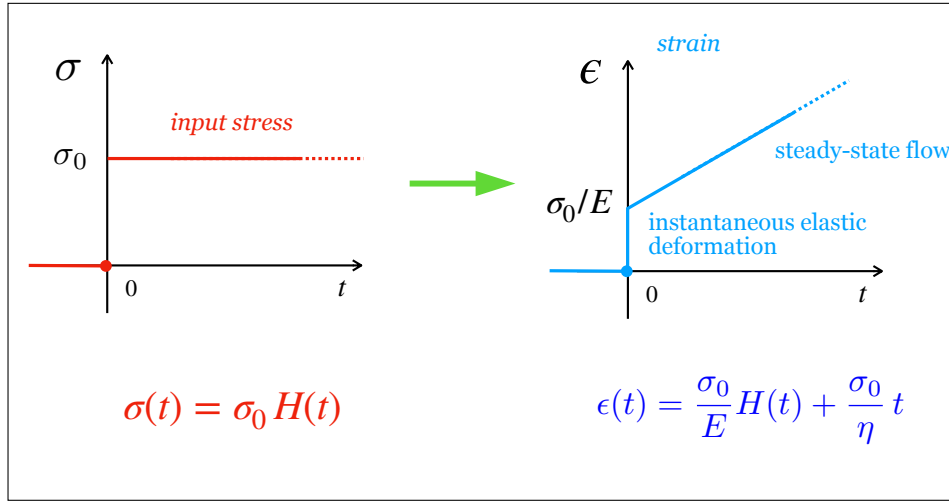


Figura 1.1: Comportamento di un materiale di Maxwell in un *creep test*. La figura e' tratta dagli appunti del corso di Fisica della Terra tenuto da GS (AA 2023/2024).

- **Relaxation test**, in cui viene applicata, da un certo momento in poi, una deformazione costante, fissando quindi l'altra incognita. Imponendo:

$$\epsilon(t) = \epsilon_0, \quad t \geq 0 \quad (1.14)$$

si ottiene

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-\frac{t}{\tau_M}}, \quad t \geq 0, \quad (1.15)$$

dove σ_0 è lo sforzo al tempo $t = 0$ e la costante $\tau_M = \frac{\eta}{E}$ è il tempo di rilassamento di Maxwell. Soggetto a una deformazione costante, il materiale maxwelliano si rilassa, ossia lo *stress* decade nel tempo, seguendo una legge di tipo esponenziale. Questo comportamento e' mostrato in Figura 1.2.

È chiaro quindi come sia necessario precisare meglio i concetti di elasticità e viscosità, poiché i materiali reali possono manifestare proprietà elastiche, viscosi o una combinazione di entrambe simultaneamente. Quale proprietà predomina, e quali siano i valori dei parametri, dipende dallo sforzo applicato e dalla durata dell'applicazione dello sforzo stesso. Se applichiamo una gamma molto ampia di sforzi su un ampio spettro di tempi o frequenze, possiamo osservare proprietà simili a quelle dei liquidi in materiali solidi e comportamenti simili a quelli dei solidi in materiali liquidi. Un determinato materiale può quindi comportarsi come un solido o come un liquido a seconda della scala temporale del processo di deformazione [7].

In reologia, la scala temporale è descritta attraverso il numero di Deborah, introdotto dal Marcus Reiner nel 1929, il quale si basò su una citazione dell'Antico Testamento

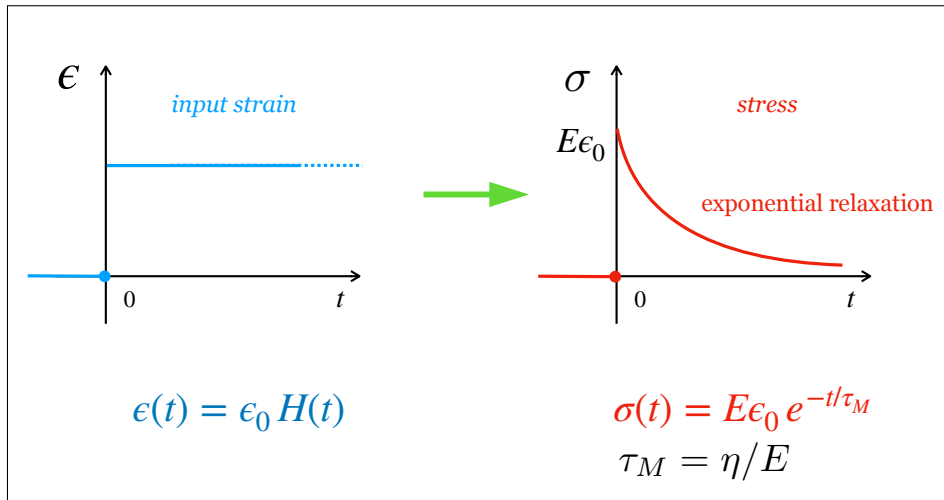


Figura 1.2: Comportamento di un materiale di Maxwell in un *relaxation test*. La figura e' tratta dagli appunti del corso di Fisica della Terra tenuto da GS (AA 2023/2024).

(*"The mountains flowed before the Lord"*) per spiegare che *everything flows if you wait long enough, even the mountains!* Il numero di Deborah è definito come: $De = \frac{t_r}{\tau_0}$ dove τ_r è il tempo di rilassamento del materiale e τ_0 è il tempo caratteristico del processo di deformazione osservato. Numeri di Deborah elevati corrispondono a un comportamento simile a quello di un solido (infinito per un materiale Hookeano), mentre numeri di Deborah bassi indicano un comportamento simile a quello di un liquido (zero per un materiale Newtoniano).

1.3 Reologia della Terra solida

I tempi caratteristici dei cicli di sforzo nella Terra variano dall'ordine dei secondi (onde sismiche) all'ordine di centinaia di milioni di anni (flusso del mantello), cioè su un intervallo di oltre 10^{15} secondi. Non sorprende quindi che la Terra mostri diverse risposte reologiche su diverse scale temporali.

Per sforzi di breve durata (da secondi a ore), il miglior strumento per osservare le proprietà reologiche della Terra è fornito dalla sismologia. L'esperienza dimostra che le onde sismiche sono elastiche in una prima approssimazione, sebbene si verifichi un certo smorzamento anelastico. La maggior parte della Terra è quindi elastica (con imperfezioni) nel breve intervallo di tempo. Dal punto di vista sismologico, l'interno della Terra può essere considerato approssimativamente sfericamente simmetrico, escludendo le variazioni laterali nelle velocità. Sulla base dell'andamento della velocità delle onde sismiche con la profondità ed utilizzando un'equazione di stato per ottenere i profili di densità, di pressione e dei moduli elastici, l'interno della Terra è stato suddiviso in diversi

strati. Il modello di Terra 1D più noto ed utilizzato è il **Modello PREM** (Preliminary Reference Earth Model [3]; la Terra è vista come un insieme di *shells* (“gusci”) in cui le costanti elastiche e la densità variano in modo *smooth*, separati da “brusche” discontinuità sismiche, situate a 400, 670, 2890 e 5150 km di profondità. Il modello PREM è mostrato in Figura 1.3.

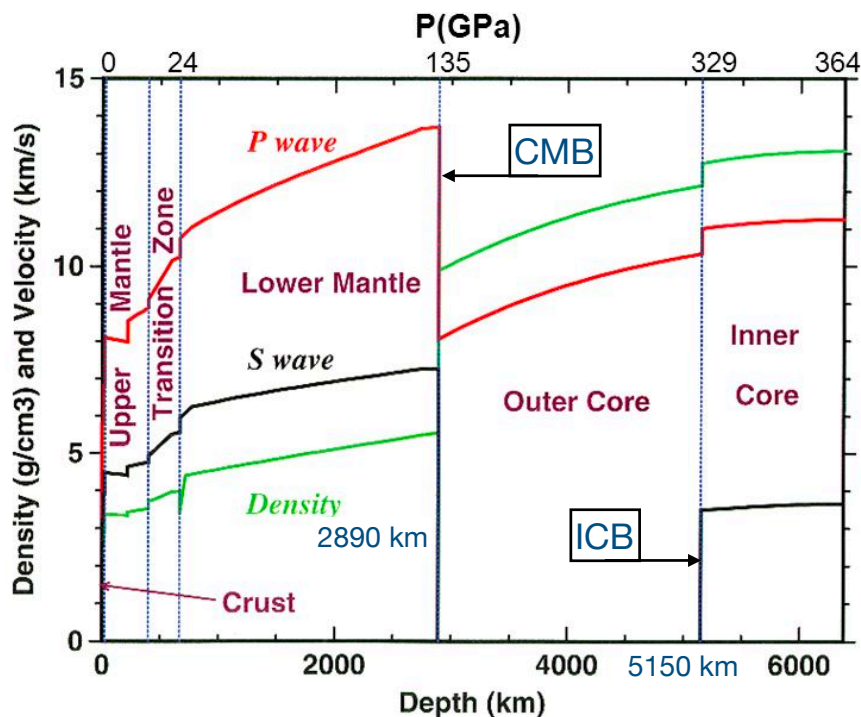


Figura 1.3: Profilo delle caratteristiche fisiche della Terra secondo il modello PREM. Si notano transizioni brusche (discontinuità sismiche) fra strati di diversa natura e transizioni graduali all’interno degli strati. Figura tratta dagli appunti del Prof. Spada e basata sul modello PREM [3].

La litosfera, lo strato esterno rigido della Terra, si comporta in modo elastico quando sottoposta a sollecitazioni rapide, recuperando la sua forma originale una volta rimosso lo sforzo. Al contrario, il mantello terrestre, su scale temporali più lunghe, esibisce un comportamento visco-elastico Maxwelliano (se i fenomeni transitori vengono trascurati). La prova quantitativa più diretta della reologia del mantello proviene dal **rimbalzo isostatico post-glaciale** fenomeno per cui il carico di alcune regioni della Terra da parte delle calotte glaciali continentali durante la glaciazione del Pleistocene ha provocato una flessione della litosfera *subsidence*, accompagnato da un rigonfiamento periferico *lateral forebulge* a una certa distanza dal margine del ghiaccio. Con lo scioglimento delle

calotte glaciali e il conseguente scarico, si è verificato il graduale ripristino dell'equilibrio isostatico con un'inversione di questi movimenti.

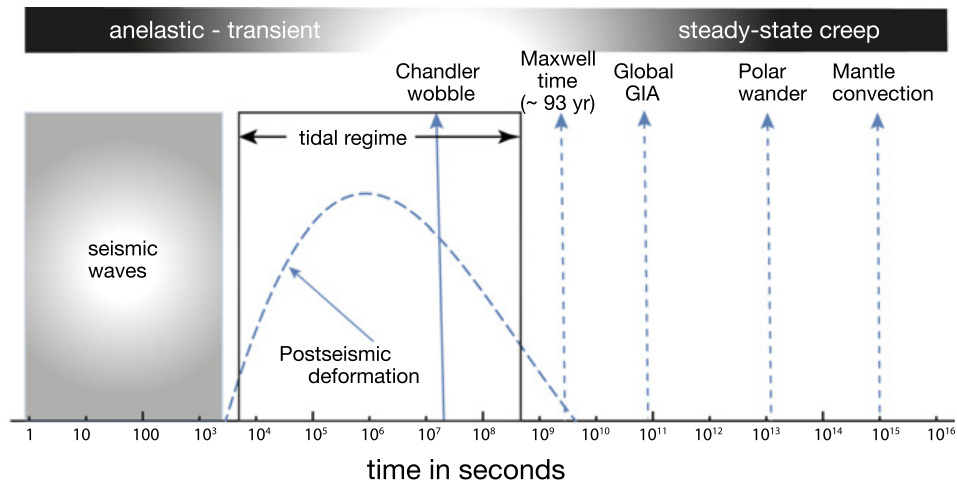


Figura 1.4: Scale di tempo di vari processi geodinamici, confrontate con la scala di tempo di Maxwell. La figura tratta da [10].

Il comportamento di rilassamento dalle tensioni del mantello può essere descritto in termini di tempo di Maxwell τ_M ovvero il tempo necessario affinché, in un esperimento di *relaxation*, lo stress decada a zero. Per $t_M < \tau$ prevale la risposta elastica; per $t_M > \tau$ prevale la risposta viscosa. Per il mantello, dove (in media) $\eta \approx 10^{21}$ Pa·s e $\mu \approx 10^{11}$ Pa il tempo di Maxwell τ_M è dell'ordine di $\tau_M \approx 10^3$ anni, il che si adatta molto bene alle inferenze derivate dal rimbalzo post-glaciale. Il concetto è espresso in Figura 1.4.

Capitolo 2

Teoria e applicazioni del software TABOO

TABOO è un software di calcolo scritto nel linguaggio Fortran 90, disegnato per simulare la risposta dinamica della Terra a carichi superficiali di varia natura. Sviluppato negli anni dal professor Giorgio Spada [13] per motivi di ricerca e per scopi padagogici, il software è principalmente orientato all'analisi di carichi di origine glaciale ma è sufficientemente versatile da poter essere adattato alla modellazione degli effetti di carichi tettonici o altre perturbazioni geofisiche sia su scala regionale che globale. L'obiettivo di TABOO è quello di raccogliere in un unico codice le procedure e le conoscenze sviluppate per studiare il fenomeno del rebound post-glaciale, rendendo queste risorse accessibili per un'ampia platea di utenti. Nel seguito, diamo una sintetica rassegna delle caratteristiche di TABOO, liberamente ispirate a [12]

TABOO si basa su una serie di assunzioni riguardo la struttura interna della Terra ed i carichi glaciali. In particolare, si assume che la Terra sia:

- sfericamente simmetrica ,
- non-rotante ,
- incomprimibile ,
- auto-gravitante ,
- visco-elastica maxwelliana .

Ogni strato ha quindi densità, modulo di taglio e viscosità costanti. I modelli disponibili considerano il nucleo come omogeneo inviscido e la litosfera come perfettamente elastica. Inoltre i carichi glaciali possono essere caratterizzati da diverse geometrie ed evoluzioni temporali, per cui si possono utilizzare modelli esistenti, tratti dalla letteratura, o costruirne altri personalizzati a seconda delle esigenze.

I files in input di TAB00 sono organizzati in tre *tasks* indipendenti che permettono di effettuare tre principali tipi di analisi:

- **Task 1: Analisi spettrali**, comprendenti il calcolo dello spettro di rilassamento, e dei numeri di Love del modello di Terra scelto,
- **Task 2: Analisi locali**, in cui si studia il campo tridimensionale di spostamenti, le variazioni di altezza del geoide le loro variazioni temporali,
- **Task 3: Analisi globali**, in cui si valutano grandezze come l'evoluzione della massa del carico glaciale, dei coefficienti di Stokes e dei momenti di inerzia.

In questo lavoro si porrà l'attenzione principalmente sul *task 2*, tramite il quale è possibile fare uno studio sia locale che globale della risposta della Terra a un singolo carico glaciale che evolve secondo una specifica *time-history*.

2.1 Carichi di superficie

Le forze di interesse in TAB00 sono correlate all'accrescimento o all'ablazione dei carichi di ghiaccio sulla superficie terrestre e alle conseguenti variazioni della massa oceanica. Si definisce un carico di superficie come

$$L(t, \theta, \lambda) = -\frac{1}{\gamma_0} \frac{dF_n}{dA}(t, \theta, \lambda), \quad (2.1)$$

dove dF_n è la forza normale a un elemento di superficie dA della superficie terrestre al tempo t , θ e' la colatitudine e λ la longitudine, e γ_0 è l'accelerazione di gravità alla superficie. Si pone l'attenzione principalmente sui carichi che possono essere fattorizzati come:

$$L(t, \theta, \lambda) = f(t) \sigma(\theta, \lambda), \quad (2.2)$$

dove $\sigma(\theta, \lambda)$ (**load function**) definisce le caratteristiche spaziali del carico mentre $f(t)$ (**load time-history**) descrive la sua evoluzione temporale.

Introducendo la *massa dinamica del carico*, che fornisce informazioni sul carico ad un dato tempo t ,

$$\mu(t) = \int_{\Omega} L(t, \theta, \lambda) dA = m_s f(t), \quad (2.3)$$

dove m_s e' la *massa statica* del carico, nel caso particolare di un carico superficiale con massa dinamica nulla in qualsiasi momento, si tratta di un carico bilanciato. Poiché i carichi bilanciati non creano ne distruggono massa netta all superficie terrestre, sono utili per realizzare il principio fondamentale di conservazione della massa.

Supponiamo che un carico superficiale non bilanciato con massa dinamica $\mu^{(1)}(t)$ sia assegnato su un dominio $\mathcal{D}^{(1)}$ e che vogliamo bilanciare tale carico introducendo un appropriato carico superficiale compensativo con massa dinamica $\mu^{(2)}(t)$ su un dominio $\mathcal{D}^{(2)}$ (sono detti *carico primario e secondario*), la condizione di bilanciamento sarà $\mu^{(1+2)}(t) \equiv 0$, cioè i due carichi devono avere la stessa evoluzione temporale ma masse statiche opposte: questa è la strategia che TABOO impiega per costruire il carico superficiale secondario di compensazione una volta assegnato il primario.

Si possono classificare le *load functions* in due famiglie: quelle che possiedono un asse di simmetria, gli **AX loads**, e quelle i cui carichi sono non simmetrici, i **NAX loads** (chiaramente ciascun carico simmetrico può essere considerato come un particolare carico non simmetrico).

Supponiamo che, una volta che la *load function* $\sigma(\theta, \lambda)$ e il dominio \mathcal{D} sono specificati in un sistema di riferimento geografico (GRF), sia possibile determinare un nuovo frame in cui σ è solo funzione della nuova colatitudine θ . L'asse z del nuovo sistema di riferimento del carico (LRF), è l'asse di simmetria del carico. Il punto in cui l'asse di simmetria forca la sfera è il polo del carico, in modo che il polo abbia $\theta = 0$ nel LRF.

Tra i vari tipi di AX loads (espressi nel LRF) possiamo citare i seguenti:

1. **Unit Load**, che permette di costruire le risposte a qualsiasi altro tipo di carico. È un carico localizzato, definito come

$$L(t, \theta) = f(t)\sigma^\delta(\theta), \quad (2.4)$$

dove

$$\sigma^\delta(\theta) = \frac{m_s^\delta}{2\pi a^2} \delta(1 - \cos \theta), \quad (2.5)$$

dove a è il raggio della Terra, m_s^δ è la massa del carico e δ è la delta di Dirac.

2. **Disc Load**, definito come

$$L(t, \theta) = f(t)\sigma^d(\theta) \quad (2.6)$$

dove

$$\sigma^d(\theta) = \begin{cases} \rho_i h & \text{se } 0 \leq \theta \leq \alpha, \\ 0 & \text{se } \alpha < \theta \leq \pi, \end{cases} \quad (2.7)$$

dove α è la semi-ampiezza del disco ($0 \leq \alpha \leq \pi$), h è lo spessore uniforme del carico e ρ la densità del carico (ossia la densità del ghiaccio se si tratta di un carico glaciale).

3. **Parabolic Load**, questo carico con sezione trasversale “parabolica”, a differenza del disco, non include irrealistici bordi verticali. Il modello di carico “parabolico”, introdotto da per la prima volta da Yuen et al. [22], e’ definito come

$$L(t, \theta) = f(t)\sigma^p(\theta) \quad (2.8)$$

dove

$$\sigma^p(\theta) = \rho_i \begin{cases} h_0 \sqrt{\frac{\cos \theta - \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}, & \text{se } 0 \leq \theta \leq \alpha, \\ 0, & \text{se } \alpha < \theta \leq \pi, \end{cases} \quad (2.9)$$

dove ρ_i e’ la densità del carico glaciale, α e’ la sua semi-ampiezza angolare ed h_0 e’ lo spessore del ghiaccio lungo l’asse di simmetria $\theta = 0$.

4. **Harmonic Load**, in cui il carico varia nello spazio secondo una funzione armonica di Legendre, definito come

$$L(t, \theta) = f(t)\sigma^h(\theta), \quad (2.10)$$

dove

$$\sigma^h(\theta) = KP_l(\cos \theta), \quad (2.11)$$

in cui K e’ una costante che rappresenta il valore di $\sigma^h(\theta)$ al polo del carico ($\theta = 0$) ed l e’ il grado armonico che caratterizza il carico armonico.

2.2 Risposta ad un carico di superficie

TABOO esprime la risposta della Terra ai carichi superficiali in termini di spostamento della superficie e altezza del geoide in un dato punto della superficie terrestre. Vengono utilizzati i coefficienti spettrali di queste quantità per costruire la risposta di una Terra elastica a un generico carico NAX nel GRF e poi si generalizza la soluzione nel caso di una Terra viscoelastica.

2.2.1 Caso Elastico

Il legame tra i carichi superficiali e la conseguente risposta della Terra può essere evidenziato risolvendo le equazioni di equilibrio del modello di Terra SEISG (sfericamente simmetrica, elastica, incomprimibile e auto-gravitante). Si può mostrare [12] che la risposta è proporzionale alle forze perturbatrici:

$$\begin{bmatrix} u_{lm} \\ v_{lm} \\ \Phi_{lm} \end{bmatrix} (t, a) = \begin{bmatrix} c_l \\ d_l \\ e_l \end{bmatrix} \sigma_{lm} f(t), \quad (l \geq 2), \quad (2.12)$$

dove u_{lm} e v_{lm} sono i coefficienti poloidali delle armoniche sferiche complesse¹ (CSH) per le componenti dello spostamento radiale e orizzontale, Φ_{lm} è il coefficiente delle CSH della perturbazione del potenziale gravitazionale, σ_{lm} è il coefficiente delle CSH dell'espansione della *load function* mentre c_l , d_l e e_l sono costanti che dipendono dal modello.

Le seguenti proposizioni, dimostrate in [12], forniscono le soluzioni al problema di carico:

Proposizione 1. *Le componenti dello spostamento della superficie e della perturbazione del potenziale in risposta a un generico carico superficiale NAX su un modello di Terra SEISG sono:*

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\lambda \\ \Phi \end{pmatrix}^{nax}(t, a, \theta, \lambda) = \sum_{lm} \begin{pmatrix} u_{lm} \\ v_{lm} \\ \Phi_{lm} \end{pmatrix}(t, a) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ 1 \end{pmatrix} Y_{lm}(\theta, \lambda), \quad (2.13)$$

dove u_{lm} , v_{lm} , e Φ_{lm} sono date dalla (2.12).

Proposizione 2. *Nel caso particolare di un carico simmetrico con asse di simmetria coincidente con l'asse z del GRF, la formula (2.13) degenera in:*

$$\begin{pmatrix} u_R \\ u_\Theta \\ u_\Lambda \\ \Phi \end{pmatrix}^{AX}(t, a, \Theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \begin{pmatrix} u_l \\ v_l \\ 0 \\ \Phi_l \end{pmatrix}^{AX}(t, a) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial}{\partial \Theta} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} P_l(\cos \Theta), \quad (2.14)$$

con

$$\begin{pmatrix} u_l \\ v_l \\ \Phi_l \end{pmatrix}^{AX}(t, a) = \begin{pmatrix} c_l \\ d_l \\ e_l \end{pmatrix} \sigma_l^{AX} f(t), \quad (2.15)$$

dove σ_l^{AX} è il coefficiente dell'espansione in polinomi di Legendre (in cui i CSH si riducono quando una funzione dipende solo dalla colatitudine) e le costanti c_l , d_l e e_l sono uguali alla (2.12).

2.2.2 Caso visco-elastico

L'estensione alla risposta lineare viscoelastica è semplice grazie al *principio di corrispondenza* per cui le equazioni di equilibrio per un corpo visco-elastico con reologia lineare possono essere ottenute da quelle elastiche sostituendo i moduli elastici con opportuni moduli complessi e le variabili del campo con le loro trasformate di Laplace.

¹Le armoniche sferiche complesse (*complex spherical harmonics* o CSH) sono definite come $Y_{lm}(\theta, \lambda) = \mu_{lm} P_{lm}(\cos \theta) e^{im\lambda}$, dove $\mu_{lm} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}$ e' un opportuno coefficiente di normalizzazione e $P_{lm}(\cos \theta)$ e' il polinomio associato di Legendre di grado l ed ordine m .

Proposizione 3. *Le componenti della trasformata di Laplace dello spostamento della superficie e della perturbazione del potenziale in risposta a un generico carico superficiale NAX su un modello di Terra SVISG sono:*

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\lambda \\ \Phi \end{pmatrix}^{nax}(s, a, \theta, \lambda) = \sum_{lm} \begin{pmatrix} u_{lm} \\ v_{lm} \\ \Phi_{lm} \end{pmatrix}(s, a) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ 1 \end{pmatrix} Y_{lm}(\theta, \lambda), \quad (2.16)$$

con:

$$\begin{pmatrix} u_{lm} \\ v_{lm} \\ \Phi_{lm} \end{pmatrix}(s, a) = \begin{pmatrix} c_l \\ d_l \\ e_l \end{pmatrix} (s) \sigma_{lm} f(s), \quad (2.17)$$

dove $f(s)$ è la trasformata di Laplace dell'evoluzione temporale del carico e σ_{lm} sono i coefficienti delle CSH della funzione del carico.

Proposizione 4. *Le componenti della trasformata di Laplace dello spostamento della superficie e della perturbazione del potenziale in risposta a un generico carico superficiale AX su un modello di Terra SVISG sono:*

$$\begin{pmatrix} u_R \\ u_\theta \\ u_\lambda \\ \Phi \end{pmatrix}^{AX}(s, a, \Theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \begin{pmatrix} u_l \\ v_l \\ 0 \\ \Phi_l \end{pmatrix}^{AX}(s, a) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial}{\partial \Theta} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} P_l(\cos \Theta), \quad (2.18)$$

con:

$$\begin{pmatrix} u_l \\ v_l \\ \Phi_l \end{pmatrix}^{AX}(s, a) = \begin{pmatrix} c_l \\ d_l \\ e_l \end{pmatrix} \sigma_l^{AX}(s) f(s), \quad (2.19)$$

dove s è la variabile complessa di Laplace.

Di seguito si fornisce l'espressione esplicita della risposta viscoelastica a un carico simmetrico, in preparazione alla trattazione che seguirà nel Capitolo 3. Sono date due forme di questa risposta, ossia:

1. Nel sistema di riferimento del carico LRF, tramite le trasformate di Laplace, con:

$$\begin{pmatrix} u_R \\ u_\theta \\ \Phi \\ \frac{\Phi}{r} \end{pmatrix}^{AX}(s, a, \Theta) = \frac{3}{\bar{\rho}} \sum_{l=0}^{\infty} \begin{pmatrix} h_l \\ l_l \\ \frac{1}{1+k_l} \end{pmatrix} (s) f(s) \frac{\sigma_l^{AX}}{2l+1} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial}{\partial \Theta} \\ 1 \end{pmatrix} P_l(\cos \Theta), \quad (2.20)$$

2. Nel dominio temporale nel sistema di riferimento del carico, ossia:

$$\begin{Bmatrix} u_R \\ u_\Theta \\ \frac{\Phi}{r} \end{Bmatrix}^{\text{AX}}(t, a, \Theta) = \frac{3}{\bar{\rho}_e} \sum_{l=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} \bar{h}_l \\ \bar{l}_l \\ \bar{k}_l \end{Bmatrix}(t) \frac{\sigma_l^{\text{AX}}}{2l+1} \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{\partial}{\partial \Theta} \\ 1 \end{Bmatrix} P_l(\cos \Theta), \quad (2.21)$$

dove $\bar{\rho}_e = \frac{3m_e}{4\pi a^3}$ è la densità media terrestre, e si sono definite le funzioni:

$$\begin{bmatrix} \bar{h}_l \\ \bar{l}_l \\ \bar{k}_l \end{bmatrix}(t) \equiv \begin{bmatrix} h_l(t) \\ l_l(t) \\ \delta(t) + k_l(t) \end{bmatrix} \otimes f(t), \quad (2.22)$$

dove \otimes indica l'operazione di convoluzione temporale, ed i coefficienti adimensionali h_l , l_l e k_l sono i *coefficienti di deformazione del carico* e sono formati da una componente elastica, la cui ampiezza dipende dal profilo di densità e rigidità, e da una componente viscosa che dipende invece anche dal profilo reologico del modello di Terra, ossia dalla viscosità.

Capitolo 3

Isostasia glaciale in Groenlandia

La calotta glaciale della Groenlandia (*Greenland ice sheet*, o GrIS) costituisce la più grande riserva di ghiaccio del pianeta dopo l'Antartide, ricoprendo per circa l'80% la superficie della Groenlandia con uno spessore medio di 1.76 km, superando in alcune zone i 3 km come spessore massimo. Un elemento sbalorditivo riguarda la massa di ghiaccio, che se sciolta equivarrebbe ad un innalzamento del mare di circa 7.3 m, il che ne fa uno dei più grandi serbatoi di acqua dolce sulla Terra.

L'ultimo dato che ha visto un accrescimento della calotta glaciale risale agli anni 70 del secolo scorso, mentre nel periodo che abbraccia gli anni dal 1980 al 1990, si è registrata una perdita di massa annua di circa 51 Gt/anno¹. La decade 1990-2000 ha mostrato un calo di tendenza circa lo scioglimento con una media annuale di perdita di ghiaccio attorno alle 41 Gt/anno. Nonostante queste fluttuazioni, fino al 2022 la GrIS ha perso ghiaccio continuativamente per 26 anni²; le cause di questo fenomeno sono da ricercarsi nell'aumento delle temperature di circa 1.5 gradi più calde del secolo scorso. Infatti, attualmente la GrIS, estesa per quasi 2900 km con una larghezza massima di 1.100 km ad una latitudine di 77°N vicino al bordo settentrionale, perde ogni anno più massa rispetto alla calotta glaciale antartica: ciò è dovuto alla posizione geografica, che rende la Groenlandia soggetta ad un'intensa amplificazione regionale del riscaldamento globale. Solo al di sopra dei 2000 m s.l.m. la calotta glaciale è in equilibrio termico (in media, ad eccezione di alcune regioni che si sono ispessite o assottigliate localmente), mentre è evidente come il diradamento del ghiaccio predomina alle basse quote, con tassi di assottigliamento di circa 1 m/anno in prossimità delle coste.

I recenti progressi nell'altimetria laser satellitare e nella tecnologia del sistema di posizionamento globale (*Global Positioning System*, GPS) hanno reso possibile la valutazione su larga scala delle caratteristiche di variazione di altitudine dell'intera calotta glaciale attraverso ripetute indagini separate nel tempo da diversi anni. Tali indagini hanno mostrato che il margine sud-est della calotta glaciale della Groenlandia si è

¹1 Gt = 1 gigatonnellata equivale a 10^{12} kg.

²Dati tratti da https://en.wikipedia.org/wiki/Greenland_ice_sheet

assottigliato. Esistono anche regioni di ispessimento, ma generalmente a tassi inferiori rispetto alle aree che si stanno assottigliando. Un’eccezione è rappresentata dalla calotta glaciale isolata nell’estremo nord-est, che si sta ispessendo di circa 0.5 m/anno in cui l’accumulo di neve è fortemente influenzato dalla North East Water polynya, un’area di mare aperto circondata da ghiaccio marino. Questi risultati verranno ampliati nella sezione 3.2, analizzando uno studio condotto nel 2012 da Spada et al. [17] mentre nella sezione 3.1 viene introdotto il fenomeno fisico del *Glacial Isostatic Adjustment*.

3.1 Glacial Isostatic Adjustment

Il *Glacial Isostatic Adjustment* (GIA) descrive la risposta della Terra solida, del campo gravitazionale e degli oceani alla crescita od alla fusione di una calotta glaciale passata presente o futura.

Durante l’ultimo periodo glaciale, gran parte dell’Europa settentrionale, dell’Asia, del Nord America, della Groenlandia e dell’Antartide era coperta da calotte glaciali, che durante l’ultimo massimo glaciale (*Last Glacial Maximum* o LGM, avvenuto circa 21,000 anni fa) raggiungevano uno spessore di tre chilometri. L’enorme peso di questo ghiaccio causò la deformazione e l’abbassamento della superficie della crosta terrestre, spostando il materiale visco-elastico del mantello lontano dalla zona depressa. Quando i ghiacciai si sono ritirati, alla fine del periodo glaciale, la rimozione di questo peso ha portato a un lento sollevamento del terreno. La risposta della Terra allo scioglimento di queste calotte glaciali continua ancora oggi a un tasso così rapido che il GIA è uno dei pochi processi geofisici che può essere osservato sulle scale temporali umane senza utilizzare tecniche di misurazione particolarmente sofisticate.

I modelli numerici, che spiegano il GIA, considerano la risposta della terra solida, degli oceani e delle calotte glaciali in funzione dello scioglimento dei ghiacci, ma necessitano in input delle stime circa la reologia della Terra e la storia dei cambiamenti delle calotte glaciali globali. Tuttavia, come si può comprendere, il problema può essere invertito andando ad analizzare le variazioni del livello del mare, della deformazione della terra e delle calotte, ottenendo come risultato le informazioni che precedentemente si dovevano dare in “input”, ovvero la reologia della terra e la storia delle calotte. Come detto, grazie al GIA si può andare a determinare e risolvere la redistribuzione dell’acqua prodotta dallo scioglimento dei ghiacci negli oceani.

Quando si modellano i processi associati al GIA, si assume che l’acqua prodotta dallo scioglimento di una calotta si redistribuisca istantaneamente negli oceani secondo la forma del geoide³. Nel calcolo della forma del geoide bisogna chiaramente prendere in considerazione il cambiamento della distribuzione di massa superficiale dovuta alla redistribuzione dell’acqua di scioglimento. Tuttavia la questione è più complessa

³Superficie equipotenziale che definisce la forma della superficie del mare in assenza di venti, maree e correnti oceaniche, che dipende dalla distribuzione di massa all’interno della Terra.

perché la riduzione della calotta glaciale e il trasferimento di acqua nell’oceano causano la deformazione della Terra solida per cui viene alterata ulteriormente la forma del geode.

Le incognite del GIA sono principalmente l’evoluzione temporale delle calotte glaciali globali e la reologia della Terra. Queste vengono stimate tramite un approccio iterativo e successivamente utilizzate per calcolare la variazione relativa del livello del mare risolvendo la *sea-level equation*. Le variazioni del livello marino relativo $S = N - U$ dipenderanno dalle variazioni dell’altezza della superficie del mare e del fondale marino dovute ai cambiamenti dei carichi glaciali e oceanici. Nella sua forma completa, la Sea Level Equation, per la prima volta introdotta da Farrell & Clark nel 1976 [6] è la seguente:

$$S(\theta, \lambda, t) = \frac{\rho_i}{\gamma} G_S \otimes_i I + \frac{\rho_w}{\gamma} G_S \otimes_o S + S^E - \frac{\rho_i}{\gamma} \langle G_S \otimes_i I \rangle_o - \frac{\rho_w}{\gamma} \langle G_S \otimes_o S \rangle_o, \quad (3.1)$$

dove θ e λ sono la colatitudine e la longitudine, ρ_i e ρ_w le densità del ghiaccio e dell’acqua, γ è il valore di riferimento della gravità di superficie, $G_s = G_s(h_l, k_l)$ la funzione di Green del livello del mare, h_l e k_l sono i numeri di Love di carico, $I(\theta, \lambda, t)$ variazione dello spessore dei ghiacci in un certo punto del globo, $S^E = S^E(t)$ è il termine eustatico ossia il valore medio oceanico di S , \otimes_i e \otimes_o le convoluzioni spazio-temporali sulle regioni coperte di ghiaccio e oceani, rispettivamente, e dove $\langle \dots \rangle_o$ indica una media sugli oceani. L’equazione del livello marino (3.1) è una equazione integrale che normalmente viene risolta tramite metodi iterativi su una griglia geodesica [18].

Si noti che alcuni studi si concentrano sulla risposta della Terra ai cambiamenti del carico glaciale locale senza risolvere la Sea Level Equation, attraverso studi regionali che permettono un’alta risoluzione del carico mantenendo l’efficienza computazionale (si veda, ad esempio [16]).

Negli ultimi 40 anni, la modellizzazione GIA è stata utile per:

- determinare il profilo di viscosità del mantello (il valore medio del mantello superiore è compreso in un intervallo $10^{20} - 10^{21}$ Pa·s mentre quello inferiore nell’intervallo $10^{21} - 10^{23}$ Pa·s,
- identificare le regioni localizzate a bassa viscosità dove le deformazioni avvengono in tempi relativamente brevi (anni o decenni),
- stimare i volumi di ghiaccio globale durante l’”ultimo massimo glaciale” e l’”ultimo interglaciale”,
- ricostruire le configurazioni dei singoli ghiacciai soggetti a deglaciazione.

Inoltre il campo del GIA si è ampliato oltre la geodinamica, incorporando importanti sviluppi dalla geodesia, glaciologia e sismologia e abbracciando nuovi risultati nei campi della geologia e della geomorfologia (si vedano, ad esempio [14] e [20]).

Geophysical process	Elastic rebound (ER)		Glacial-isostatic adjustment
Method	RER (regional ER)	GER (global ER)	GIA
Forcing	Current ice melting	Current ice melting	Past ice melting
Time scale	Decadal	Decadal	Millennial
Ice model(s)	M3 ^a	M3	ICE-5G(VM2 L90) ^{b,c} ANU05 ^{c,d}
Rheology	Elastic	Elastic	Maxwell viscoelastic

Figura 3.1: Caratteristiche dei processi geofisici considerati nella modellazione dei movimenti isostatici in Groenlandia. La tabella e' tratta da [17].

3.2 Deformazioni verticali in Groenlandia

La Groenlandia è riconosciuta come una regione tettonicamente stabile e a bassa sismicità. Si può quindi assumere che i movimenti verticali degli ultimi decenni derivino principalmente da due componenti che agiscono simultaneamente: il primo è il **rebound elastico** ER causato dalla perdita di massa degli ultimi decenni della GrIS osservato da tecniche geodetiche (la componente viscosa è trascurabile su queste brevi scale temporali); il secondo, associato al GIA, deriva dalla **risposta viscoelastica** del substrato roccioso all'evoluzione del GrIS durante l'ultimo periodo glaciale. Nonostante le caratteristiche spaziali e temporali dei due fenomeni siano molto diverse (si veda la Figura 3.1), le loro ampiezze sono localmente comparabili e quindi entrambe importanti per una corretta interpretazione delle misure GPS.

Il problema elastico per la Groenlandia può essere risolto utilizzando un approccio sia globale (*Global Elastic Rebound* o **GER**) che regionale (*Regional Elastic Rebound* o **RER**). Mentre per un approccio globale occorre risolvere la *sea-level* equation, per quello regionale bisogna effettuare una convoluzione tra le funzioni elastiche di Green⁴ e i dischi con cui viene discretizzata la massa della GrIS.

Nel RER la deformazione è causata solo dagli effetti diretti dello scioglimento del ghiaccio per cui vengono trascurati i carichi dell'acqua prodotta dallo scioglimento e le interazioni gravitazionali tra la GrIS e gli oceani che la circondano; il GER invece, permette di stimare anche variazioni di gravità e di fare previsioni del livello del mare a qualsiasi scala spaziale. Tuttavia il peso computazionale delle deformazioni a breve lunghezza d'onda col GER è molto alto e quindi per previsioni locali e regionali il RER è decisamente più conveniente.

Lo spostamento verticale totale di una regione di carichi a disco si trova riscaldando

⁴Per approfondire le funzioni di Green (*Green's functions*) si veda il fondamentale lavoro di W.E. Farrell, 1972 [5].

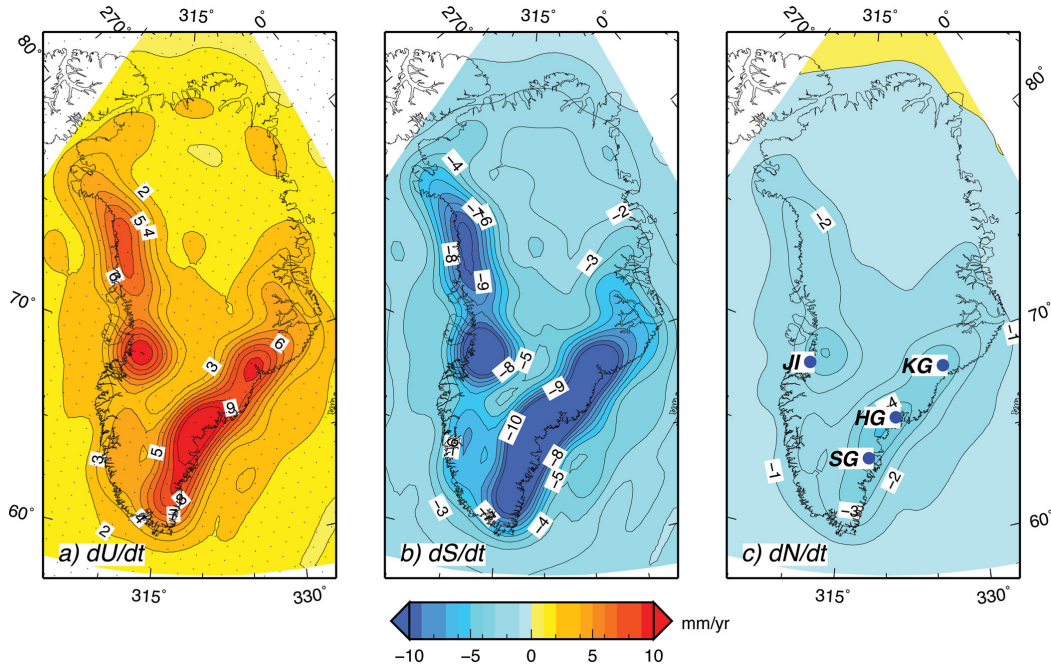


Figura 3.2: In *a*) e' mostrato il tasso di spostamento \dot{U} , in *b*) il tasso della variazione del livello del mare relativo \dot{S} , in *c*) la variazione assoluta del livello marino \dot{N} , calcolati attraverso l'approccio GER. La figura e' tratta da [17].

la soluzione per un singolo elemento di ghiaccio, ossia

$$U(\alpha) = 3\Delta H \left(\frac{\rho_i}{\rho_e} \right) \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} \frac{\sigma_{\ell}}{2\ell+1} h_{\ell} P_{\ell}(\cos \alpha), \quad (3.2)$$

e tenendo conto della simmetria assiale di quest'ultima rispetto al centro del carico (questa formula e' dovuta a [16]).

Col metodo globale, basato sulla soluzione della *sea-level equation*, prendendo in considerazione solo le lunghezze d'onda da grandi a intermedie ($\ell_{\max}=128$), dalla Figura 3.2 osserviamo che:

- le velocità massime del sollevamento elastico (\dot{U}) sono circa 10 mm/yr e sono positivamente correlate alle regioni di assottigliamento della calotta dove la perdita di massa raggiunge l'ampiezza massima. Il sollevamento verticale è comunque previsto anche nella parte centrale della GrIS (2-4 mm/anno),
- la mappa delle velocità del cambiamento del livello del mare relativo ossia "visto" rispetto alla terra solida (\dot{S}) rispecchia più o meno la mappa di \dot{U} , ma con valori

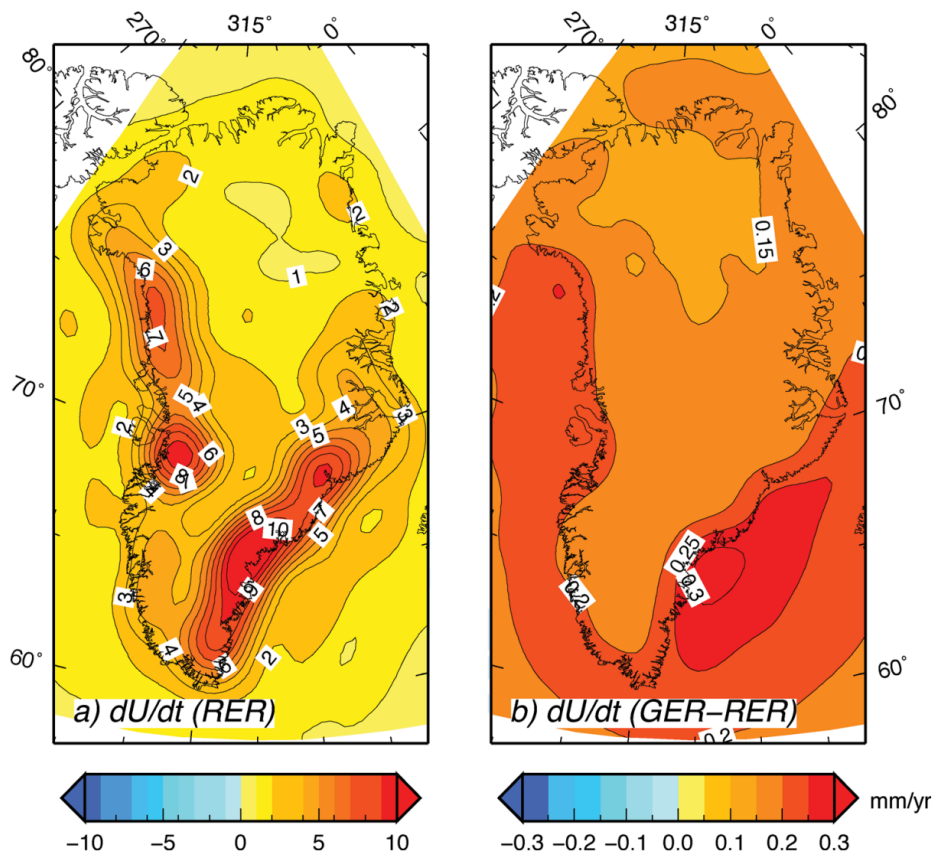


Figura 3.3: In *a*) e' mostrato il tasso di spostamento calcolato con l'approccio RER; in *b*) la differenza tra i tassi di spostamento negli approcci GER e RER. La figura e' tratta da [17].

opposti, suggerendo la relazione approssimata $\dot{S} \approx -\dot{U}$ e raggiungendo la sua ampiezza massima in prossimità del ghiacciaio Helheim ,

- il livello marino assoluto (\dot{N}), "visto" quindi dal centro di massa del Sistema Terra (ivi comprese le parti solide e quelle fluide) sta collassando e la mappa mostra chiaramente che questa grandezza subisce variazioni meno localizzate (quindi su piu' vasta scala) rispetto a \dot{U} e \dot{S} .

Tramite il NASA's Ice, Cloud, and land Elevation Satellite (ICESat) si e' osservato che il carico superficiale della Groenlandia è caratterizzato da variazioni molto dettagliate che possono influenzare gli spostamenti verticali (e quindi le variazioni regionali del livello del mare) su una scala spaziale più breve. Per migliorare la risoluzione spaziale si utilizza il RER basandoci sulla Eq. (3.2). I risultati sono coerenti con quelli trovati con l'approccio globale. La differenza è positiva su tutta la GrIS e raggiunge il massimo al largo delle

coste (più soggette a una perdita di massa); questo uplift aggiuntivo di 0.1-0.3 mm/yr è dovuto all'**effetto gravitazionale del rilascio di carico**. Infatti, con la diminuzione della massa delle calotte diminuisce l'attrazione gravitazionale che il ghiaccio esercita sugli oceani circostanti. Di conseguenza l'oceano si ritira leggermente, diminuendo la pressione sui fondali, che quindi si sollevano. Questo effetto è completamente trascurato nell'approccio regionale (RER) ma essendo piccolo rispetto ai valori di \dot{U} si può dire che fornisce comunque una stima realistica del pattern di sollevamento. Ciò è illustrato in Figura 3.3.

Per stimare invece la componente GIA della deformazione verticale si calcola, attraverso l'Eq. (3.2), il tasso di spostamento verticale supponendo a priori dei possibili scenari della storia dello scioglimento del ghiaccio e del profilo reologico della Terra, come mostrato in Figura 3.4. Le differenze tra i modelli dipendono dalle diverse ipotesi circa la cronologia della fusione dei ghiacci millenari e circa la struttura interna della Terra.

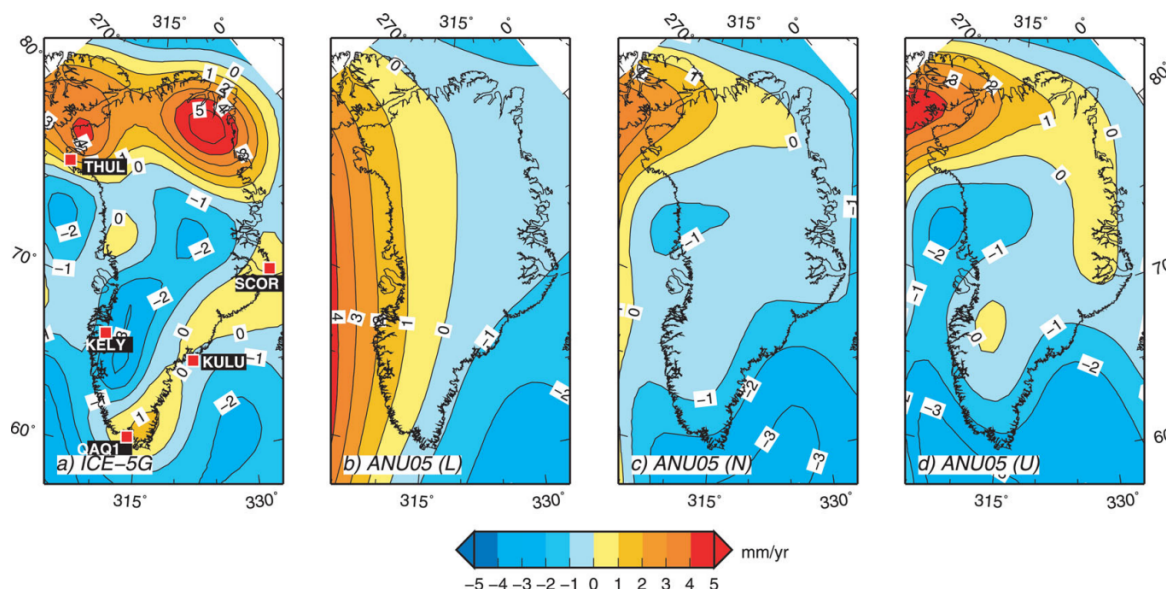


Figura 3.4: Tassi attuali di spostamento verticale previsti in Groenlandia secondo a) il modello ICE-5G (VM2) sviluppato da Peltier 2004, e b)-d) varianti del modello sviluppato presso la "Research School of Earth Sciences" della "National Australian University" dal Prof. Kurt Lambeck e collaboratori. La figura è tratta da [17].

Le deformazioni sono quindi una combinazione degli effetti del rebound elastico, causato dalla perdita di massa attuale, e del sollevamento visco-elastico, associato alla storia delle variazioni glaciali.

Tuttavia, dai dati ottenuti dalle stazioni GPS, distribuite sulla GrIS, risulta che la componente predominante della deformazione verticale totale è quella elastica; emerge

inoltre che non può essere trascurato il contributo dei piccoli ghiacciai localizzati vicino ai rilevatori che, in alcuni casi, dominano sugli effetti delle masse più grandi ma relativamente distanti.

Capitolo 4

Un caso di studio: il ritiro del ghiacciaio Helheim

Lo scioglimento della massa glaciale della Groenlandia è causata solo in parte dall'assottigliamento che hanno subito le aree a bassa quota. Infatti, a contribuire, è anche il flusso accelerato con cui i ghiacciai in prossimità delle coste scaricano massa negli oceani circostanti. Il ghiacciaio di Helheim, il secondo più grande della Groenlandia per portata di ghiaccio e uno dei principali ghiacciai di sbocco marino che drenano la GrIS, ha subito un significativo ritiro a partire dai primi anni 2000, contribuendo in modo rilevante alla perdita di massa complessiva della calotta glaciale.

Le misurazioni [8] delle velocità del flusso di ghiaccio sono state effettuate in diversi momenti, attraverso coppie di immagini satellitari, mostrando un andamento discontinuo; si è osservato infatti che, tra il 2001 e il 2003, il fronte del ghiacciaio si è ritirato di circa 3 km rispetto agli anni 90 e che il settore principale ha accelerato di 2.5 km/anno, assottigliandosi di circa 40 metri. Dopo un anno di stabilità (2003-2004), il fronte ha avuto una regressione di altri 3 km e la velocità del flusso ha subito un'ulteriore aumento di 2 km/anno. Nonostante un avanzamento temporaneo nel 2006, in seguito alla registrazione di temperature più fredde, le persistenti elevate temperature degli anni successivi hanno portato il Ghiacciaio Helheim a perdere massa in modo continuativo dal 2003. Si stima che il bilancio di massa negativo oscilli tra -5.0 e -13.2 Gt/anno, con una tendenza verso un generale riduzione della massa glaciale, con un valore di riduzione medio di 10 m tra il 2010 e il 2020 (e un picco di 50 metri tra il 2016 e il 2019) [21].

Per simulare a quale tipo di deformazioni sia soggetta la Terra, a causa della perdita di massa del ghiacciaio Helheim, si è utilizzato il programma TABOO [13] e, nello specifico, il Task 2. Quest'ultimo permette, infatti, di calcolare alcune variabili spettrali, locali e globali delle quali sono state considerate le seguenti:

- lo spostamento radiale (verticale) e tangenziale (orizzontale) della superficie terrestre,

- il tasso di spostamento radiale (velocità di sollevamento o di subsidenza) e tangenziale,

utilizzando un modello geometricamente semplice per il carico costituito dal ghiacciaio.

4.1 Geometria del carico

Per la maggior parte delle applicazioni geofisiche, il modo più semplice per caratterizzare un carico esteso (non puntiforme) e le sue variazioni, è immaginare la sua superficie come una griglia, in cui ogni cella può essere approssimata come un carico a forma di disco. Nel caso dello studio del ghiacciaio Helheim si è preferito però utilizzare un carico di profilo “parabolico” per evitare effetti dovuti ai bordi “ripidi” e perchè la forma della sua *load function* costituisce un profilo di equilibrio abbastanza realistico per una calotta glaciale (si veda, ad esempio, [11]).

La calotta è poi compensata da un oceano uniforme esterno che si adatta alla forma delle coste per bilanciare la massa del sistema. Nonostante il ghiacciaio sia localizzato a una colatitudine di 23.6° e una longitudine di 38° W, per facilitare la configurazione di TABOO lo si posiziona in corrispondenza del Polo Nord e ciò è reso possibile dalle simmetrie del carico e del modello di Terra utilizzato. Per valutare la sua semi-ampiezza angolare si osservano le immagini delle riprese satellitari (Figura 4.1): dall’attuale Terminus fino al punto in cui il ghiacciaio principale si divide in due diramazioni che si uniscono al flusso principale, si stima un’ampiezza angolare di qualche decimo di grado, corrispondente a qualche decina di km alla superficie della Terra.

Dalle dimensioni del carico (e dall’accuratezza richiesta) dipende anche il *range* delle armoniche sferiche da considerare nei calcoli numerici. Il carico sarà fedelmente rappresentato dall’espansione in serie se le lunghezze d’onda sono confrontabili o più piccole del raggio del carico. La lunghezza d’onda associata a un’armonica sferica di grado l è data dalla “regola di Jeans”¹:

$$\lambda \approx \frac{2\pi a}{l + \frac{1}{2}}, \quad (4.1)$$

dove a è il raggio terrestre. Poichè il carico ha raggio $d = \alpha a$, cercare un valore di l_{max} che produce $\lambda_{min} < d$ porta alla regola generale:

$$l_{max} \gtrsim \overline{l_{max}} = \frac{2\pi a}{d}. \quad (4.2)$$

Dopo avere eseguito alcuni tests di risoluzione, per mettere *a fuoco* il ghiacciaio Helheim si è deciso di utilizzare il valore $l_{max} = 2048$, come migliore compromesso fra risoluzione e tempi di calcolo in TABOO.

¹Circa la “regola di Jeans”, si veda https://igppweb.ucsd.edu/~cathy/Classes/SI0229/appendix_jeans.p.pdf

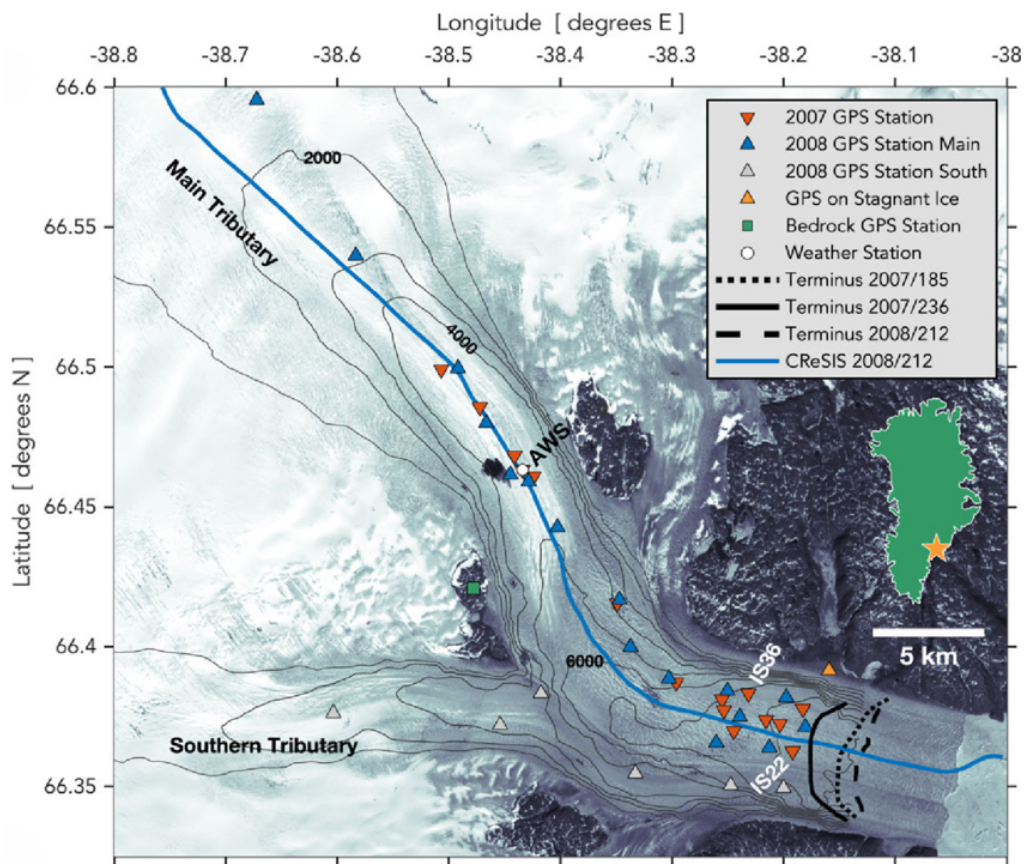


Figura 4.1: Immagine Landsat relativa al giorno 1 luglio 2001 del ghiacciaio Helheim. I tratti arcuati di colore nero nella parte a destra in basso indicano la posizione del fronte di distacco (*terminus*) nel 2007/2008. La figura e' tratta da [19].

4.2 Configurazione di TAB00

Per concludere l'implementazione del Task 2 in TAB00 è necessario scegliere il particolare modello di Terra che si vuole utilizzare nella simulazione, l'evoluzione temporale del carico e il tipo di analisi che si vuole effettuare. Il programma permette all'utente di scegliere tra una lista di 23 diversi modelli auto-gravitanti, pubblicati nella letteratura scientifica o creati appositamente per TAB00, con l'ulteriore libertà di stabilire:

- il numero di strati visco-elastici maxwelliani ,
- lo specifico valore di densità, rigidità e viscosità di ciascuno strato ,
- lo spessore dello strato elastico superficiale (litosfera o crosta) .

CODE=	0	1	2	3	4
LT (km)	[30:300]	100.	70.	200.	[30:300]
r_2 (km)	6371.	6371.	6371.	6371.	6371.
r_1 (km)	r_2 -LT	6271.	6301.	6171.	r_2 -LT
r_0 (km)	3480.	3480.	3480.	3480.	3480.
ρ_2 (kg/m ³)	P-A	2689.	4500.	4500.	3300.
ρ_1 (kg/m ³)	P-A	4314.	4500.	4500.	4518.
ρ_0 (kg/m ³)	10931.7 (P-A)	10927.	10927.	10927.	10977.
μ_2 (Pa*10 ¹¹)	P-A	0.28	1.45	1.45	0.28
μ_1 (Pa*10 ¹¹)	P-A	1.45	1.45	1.45	1.45
μ_0 (Pa*10 ¹¹)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Figura 4.2: Modelli disponibili in TABOO caratterizzati da un solo strato visco-elastico (il mantello). Con P-A sono indicati i valori medi del modello sismologico PREM. La tabella tratta dall'Appendice di [13].

Per la simulazione è stato utilizzato un modello di Terra molto semplice, basato sui valori medi del modello PREM (questo modello corrisponde a CODE=0 in Figura 4.2), con un solo strato visco-elastico in cui viscosità ha il valore classico di 10^{21} Pa·s (mantello uniforme) ed uno spessore crostale di 30 km.

Per quanto riguarda l'evoluzione temporale del carico, è stata scelta una “*deglaciazione semplice*”, nel linguaggio di TABOO. Ossia, il carico glaciale è mantenuto costante per tempi compresi nell'intervallo $-\infty \leq t < 0$, dove il tempo $t = 0$ segna l'inizio della deglaciazione, mentre per tempi positivi minori di un certo τ ossia $0 \leq t < \tau$, si suppone che il ghiaccio fonda ad un tasso costante, mantenendo fissi i propri margini. Si assume che per tempi maggiori di τ il carico non agisca più. Si è impostato il valore $\tau=0.1$ ka (1 ka equivale a 1000 anni) con uno spessore iniziale al centro di 100 metri, in modo da avere un tasso di scioglimento di 1 m/anno al centro del carico, che costituisce un valore realistico in zone attualmente soggette a deglaciazione. Questa evoluzione temporale, pur estremamente semplificata, modella in modo soddisfacente un tipico episodio

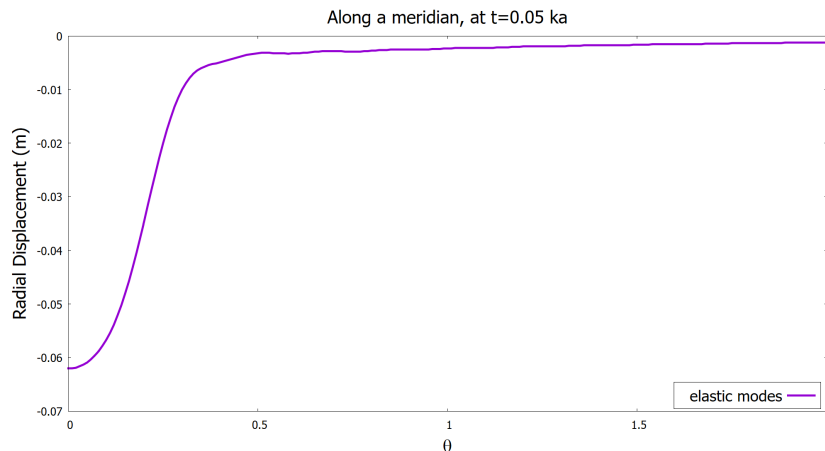


Figura 4.3: Spostamento radiale elastico lungo un meridiano in funzione della colatitudine all’istante di tempo $t = 0.05$ ka.

di deglaciazione. Ci sono certo ampi margini di miglioramento.

Infine, è stata compiuta un’analisi locale per calcolare lo spostamento radiale ed il suo tasso di variazione ossia le velocità radiali. Grazie alla simmetria del carico ed alla sua posizione geografica, è stato possibile calcolare le due variabili su un insieme di punti (“osservatori virtuali”) posizionati lungo un meridiano della superficie terrestre a colatitudini comprese tra 0° e 2° , equamente distanziati di $1/100$ di grado (circa 1 km), ad un tempo $t = 0.05$ ka (50 anni) ovvero a metà della fase di deglaciazione.

4.3 Risultati

4.3.1 Spostamento e velocità radiali

Il primo grafico che si è ottenuto, mostrato in Figura 4.3, evidenzia la variazione dello spostamento radiale, in regime puramente elastico: la curva gialla rappresenta, in funzione della colatitudine, la subsidenza della terra sottostante il ghiacciaio, a 50 anni dall’inizio della fusione della massa glaciale. Si può notare che lo spostamento massimo, di circa -0.06 m, si riscontra alla colatitudine $\theta = 0$ ovvero al centro del paraboloide che rappresenta il ghiacciaio. Lo spostamento decresce in modo significativo man mano che ci si avvicina al bordo del ghiacciaio, fino ad essere quasi assente nelle regioni più lontane dal carico, a partire da $\theta > 0.5$. Questi risultati sono coerenti con la descrizione teorica della flessione elastica della litosfera, che si piega istantaneamente sotto il peso del carico e si stabilizza rapidamente mentre il carico glaciale si riduce.

Nel grafico che tiene conto anche dei modi visco-elastici, mostrato in Figura 4.4, la curva è caratterizzata da uno spostamento radiale più pronunciato, di -1.4 m in corri-

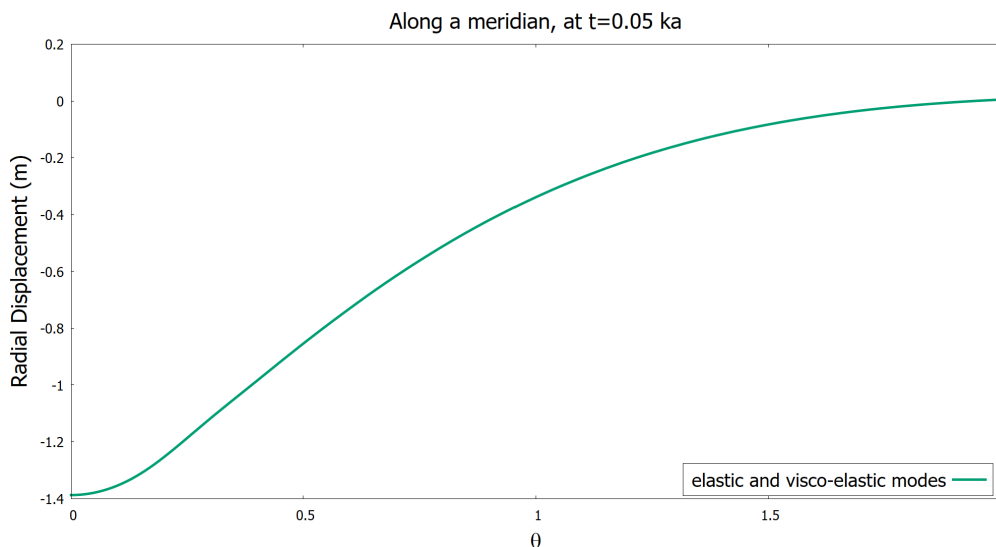


Figura 4.4: Spostamento radiale (o verticale) visco-elastico lungo un meridiano in funzione della colatitudine all'istante di tempo $t = 0.05$ ka.

spondenza del centro del carico. Tuttavia, a differenza del caso elastico, lo spostamento non è localizzato solamente sotto il ghiacciaio ma si estende a colatitudini più distanti ed è percepito quindi in una regione più ampia. Questo è in accordo con ciò che ci si aspetta da un modello visco-elastico che non raggiunge l'equilibrio rapidamente e genera deformazioni che si distribuiscono su un'area geografica più vasta.

La differenza tra le due curve risulta particolarmente evidente nel grafico in Figura 4.5. Queste differenze si attenuano nell'ultimo grafico in Figura 4.6, in cui sono riportate le curve che rappresentano le velocità di spostamento verticale nei due regimi. Queste risultano infatti molto simili, con differenze minime lungo tutto l'intervallo di colatitudine: mostrano entrambe un picco di velocità al centro del ghiacciaio, seguito da una rapida decelerazione verso il margine. La somiglianza tra le due curve è dovuta al fatto che l'intervallo di tempo della simulazione è breve rispetto ai tempi di rilassamento visco-elastico della Terra; di conseguenza domina il comportamento elastico per cui lo spostamento principale avviene immediatamente dopo la rimozione del carico mentre la visco-elasticità influisce solo marginalmente in questa fase, diventando rilevante solo nel lungo periodo.

4.3.2 Spostamento e velocità tangenziali

Si analizza, in primo luogo, lo spostamento orizzontale (o *tangenziale*) in regime puramente elastico. Gli spostamenti sono calcolati tramite un'espressione simile alla (3.2), in cui però compaiono i numeri di carico ℓ_l . Si osserva in Figura 4.7 che, mentre il ghiaccio

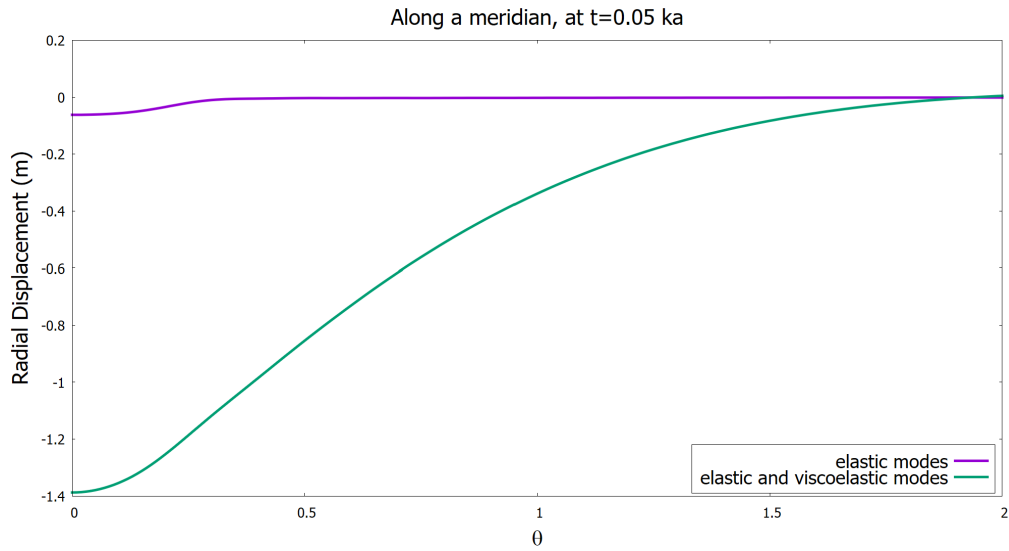


Figura 4.5: Spostamento radiale lungo un meridiano nei due regimi combinati.

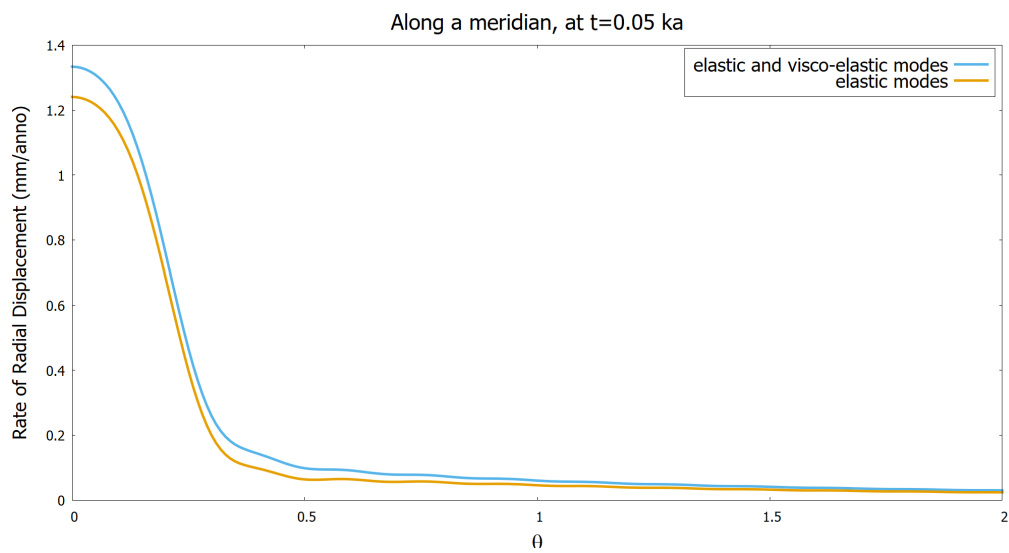


Figura 4.6: Velocità di spostamento radiale lungo un meridiano, in funzione della colatitudine, ad un istante di tempo fissato, nei due regimi (elastico e visco-elastico).

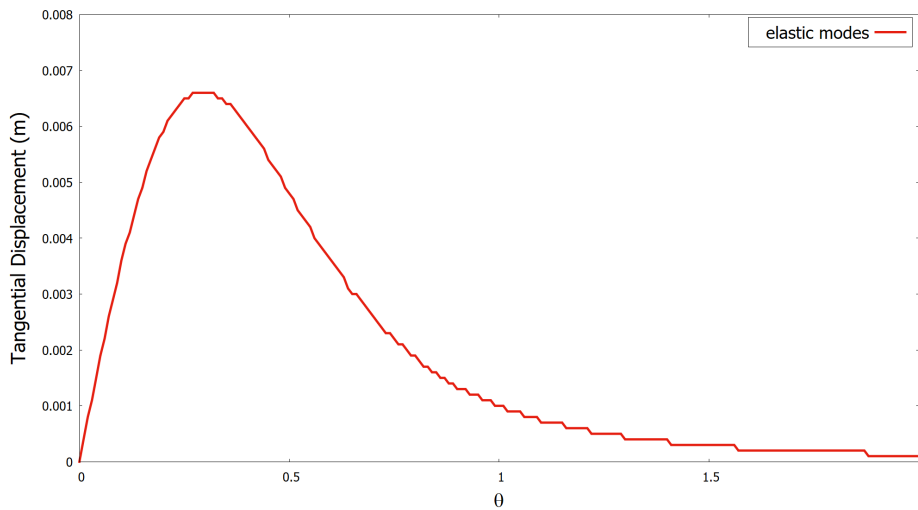


Figura 4.7: Spostamento tangenziale elastico. Valori positivi indicano un movimento tangenziale in direzione opposta al centro del carico.

esercita pressione, la litosfera accumula tensioni che risultano in uno spostamento laterale che cresce rapidamente fino a raggiungere un picco per θ compreso tra 0.4° e 0.5° . Ci si aspetta infatti di avere lo spostamento tangenziale massimo in una zona intermedia tra il centro e il bordo del ghiacciaio, punti in cui è dominante la componente radiale dello spostamento. Inoltre, i valori positivi della curva indicano un allontanamento dal centro del carico. La curva inizia poi a decrescere in maniera relativamente graduale all'allontanamento dal carico fino a stabilizzarsi per colatitudini superiori a 1.5° . In questo tratto di curva l'andamento risulta "a scalini" a causa della risoluzione limitata della griglia discreta del dominio e della limitata estensione del FORMAT di output del codice TABOO.

Nella Figura 4.8 la curva ottenuta in regime puramente elastico è confrontata con il modello visco-elastico. Si osserva un comportamento differente sia nella forma della curva che nei valori di spostamento. Come ci si poteva aspettare, lo spostamento tangenziale visco-elastico è significativamente maggiore e si manifesta con uno spostamento della superficie nella direzione del carico, come evidenziato dai valori negativi della curva. Inoltre, il grafico evidenzia un picco più ampio rispetto al modello elastico e, anche in questo caso, lo spostamento non si concentra solo nell'area sottostante al ghiacciaio ma si manifesta in regioni più ampie oltre il punto di applicazione del carico.

Nell'ultimo grafico in Figura 4.9 in cui vengono comparati i tassi di spostamento orizzontale nei due regimi, la velocità risulta negativa per entrambe le curve indicando ancora il movimento della superficie verso il centro del carico. Nella curva visco-elastica, il picco di velocità tangenziale risulta meno pronunciato rispetto al modello elastico ma si diffonde in maniera più graduale nel tempo per cui l'effetto del rilassamento è distribuito

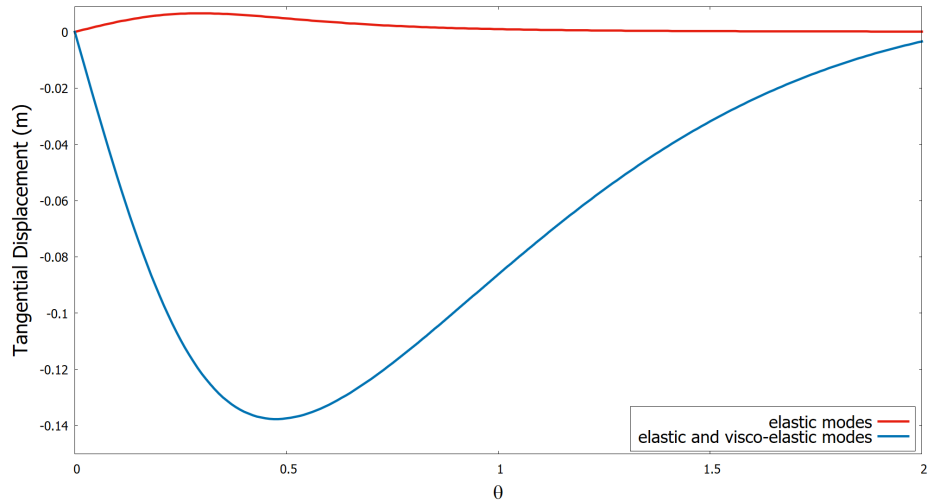


Figura 4.8: Spostamento tangenziale lungo un meridiano, in funzione della colatitudine, ad un istante di tempo fissato, nei due regimi (elastico e visco-elastico).

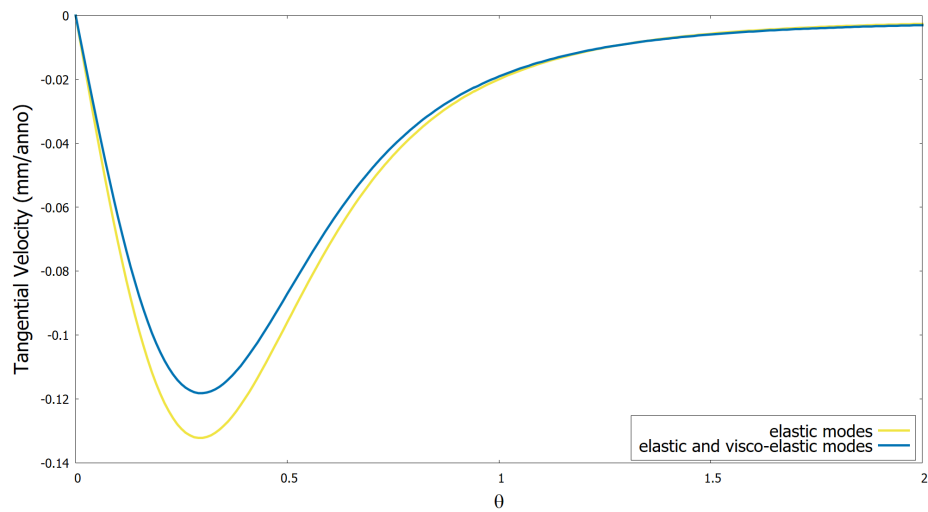


Figura 4.9: Velocità di spostamento tangenziale lungo un meridiano (in mm/anno), in funzione della colatitudine, ad un istante di tempo fissato, nei due regimi (elastico e visco-elastico).

su un periodo più esteso. Si nota come, nonostante la visco-elasticità influenzi l'entità e la risposta della deformazione, gli effetti non sono drasticamente diversi nel breve termine rispetto a quanto osservato per il comportamento elastico puro.

Capitolo 5

Conclusioni

In questa Tesi è stato analizzato il fenomeno dell'isostasia glaciale in Groenlandia, con particolare riguardo al confronto far predizioni di modelli elastici e visco-elastici. Utilizzando il software `TABOO`, sono state simulate le deformazioni indotte dalla perdita di massa del ghiacciaio Helheim, per esplorare come distinti modelli reologici influenzino la risposta del superficie terrestre alla deglaciazione.

Dal lavoro svolto posso trarre le seguenti conclusioni:

1. Gli spostamenti radiali e tangenziali mostrano, nei due regimi, diverse distribuzioni spaziali, che nel caso elastico è concentrata in prossimità del carico mentre nel caso visco-elastico interessa anche regioni più lontane ,
2. Le velocità di spostamento radiale e tangenziale risultano simili nei due modelli, dal momento che nel breve periodo domina la risposta elastica e gli effetti visco-elastici possono ritenersi trascurabili ,
3. Poichè le deformazioni nel breve periodo possono essere considerate principalmente elastiche, il modello elastico risulta adeguato a descrivere la risposta immediata della litosfera allo scioglimento di un carico glaciale.

Un aspetto da considerare in future ricerche è lo studio delle variazioni del geoide, una possibilità offerta dal software ma sin qui non esplorata. Credo che cio' potrebbe contrubuire a meglio caratterizzare le deformazioni isostatiche nella regione del ghiacciaio Helheim.

Inoltre, penso che sarebbe utile effettuare un'esplorazione più approfondita dello spazio dei parametri del modello utilizzato (il profilo reologico, l'evoluzione temporale del carico e la sua geometria), per comprendere piu' a fondo il significato dei risultati sin qui ottenuti.

Ringraziamenti

Ringrazio innanzitutto il Prof. Giorgio Spada, per la sua guida costante e il supporto fornito in ogni fase del lavoro. La sua dedizione e la sua esperienza sono stati fondamentali.

Ringrazio anche il Dott. Daniele Melini (INGV, Roma) che, insieme al Prof. Giorgio Spada, ha messo a disposizione il software TABOO.

Un ringraziamento va anche ad Anastasia Consorzi (DIFA) per i suggerimenti costruttivi.

Bibliografia

- [1] H. A. Barnes, J. F. Hutton, and K. Walters. *An Introduction to Rheology*, volume 3 of *Rheology Series*. Elsevier, Amsterdam, 1989.
- [2] M. Bevis, D. Melini, and G. Spada. On computing the geoeelastic response to a disk load. *Geophysical Journal International*, 206(2):615–625, June 2016.
- [3] Adam M. Dziewonski and Don L. Anderson. Preliminary reference earth model. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 25(4):297–356, 1981.
- [4] Maurizio Bonafede e Maria Elina Belardinelli. *Appunti del Corso di Fisica dei Solidi e dei Fluidi*, 2021. Università degli studi di Bologna.
- [5] W. E. Farrell. Deformation of the Earth by surface loads. *Reviews of Geophysics*, 10(3):761–797, 1972.
- [6] W. E. Farrell and J. A. Clark. On postglacial sea level. *Geophysical Journal International*, 46(3):647–667, 1976.
- [7] Giorgio Ranalli. *Rheology of the Earth*. Chapman and Hall, London, 2nd edition, 1995.
- [8] I. M. Howat, I. Joughin, S. Tulaczyk, and S. Gogineni. Rapid retreat and acceleration of Helheim Glacier, east Greenland. *Geophysical Research Letters*, 32:L22502, November 2005.
- [9] Shun ichiro Karato. *Deformation of Earth Materials: An Introduction to the Rheology of Solid Earth*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [10] Erik R Ivins, Lambert Caron, Surendra Adhikari, Erik Larour, and Mirko Scheinert. A linear viscoelasticity for decadal to centennial time scale mantle deformation. *Reports on Progress in Physics*, 83(10):106801, 2020.
- [11] JF Nye. The motion of ice sheets and glaciers. *Journal of Glaciology*, 3(26):493–507, 1959.

- [12] Giorgio Spada. *The theory behind TABOO*. Samizdat Press, 2003.
- [13] Giorgio Spada. *TABOO: User guide*. Samizdat Press, 2005.
- [14] Giorgio Spada. Glacial Isostatic Adjustment and Contemporary Sea Level Rise: An Overview. *Surveys in Geophysics*, 38(1):1–33, 2017.
- [15] Giorgio Spada. Materiale del corso di *Fisica della Terra*, 2023. Università degli studi di Bologna.
- [16] Giorgio Spada, Valentina Roberta Barletta, Volker Klemann, REM Riva, Zdenek Martinec, Paolo Gasperini, Björn Lund, Detlef Wolf, LLA Vermeersen, and MA King. A benchmark study for glacial isostatic adjustment codes. *Geophysical Journal International*, 185(1):106–132, 2011.
- [17] Giorgio Spada, G. Ruggieri, L. S. Sørensen, K. Nielsen, D. Melini, and F. Colleoni. Greenland uplift and regional sea level changes from ICESat observations and GIA modelling. *Geophysical Journal International*, 189(3):1457–1474, March 2012.
- [18] Giorgio Spada and Daniele Melini. SELEN (SELEN version 4.0): a Fortran program for solving the gravitationally and topographically self-consistent sea-level equation in glacial isostatic adjustment modeling. *Geoscientific Model Development*, 12(12):5055–5075, 2019.
- [19] Lauren A. Stevens, Meredith Nettles, James L. Davis, Timothy T. Creyts, Jonathan Kingslake, Andreas P. Ahlstrøm, and Torben B. Larsen. Helheim glacier diurnal velocity fluctuations driven by surface melt forcing. *Journal of Glaciology*, pages 1–13, 2021.
- [20] Pippa Whitehouse. Glacial isostatic adjustment modelling: historical perspectives, recent advances, and future directions. *Earth Surface Dynamics*, 6(2):401–429, 2018.
- [21] Joshua J. Williams, Noel Gourmelen, Peter Nienow, Charlie Bunce, and Donald Slater. Helheim glacier poised for dramatic retreat. *Geophysical Research Letters*, 50(5):e2023GL103456, 2023.
- [22] David Alexander Yuen, Roberto C. A. Sabadini, Paolo Gasperini, and Enzo Boschi. On transient rheology and glacial isostasy. *Journal of Geophysical Research*, 91:11,420–11,438, 1986.