

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Insegnamento e apprendimento della  
matematica  
con l'intelligenza artificiale

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:  
Prof.ssa  
Alessia Cattabriga

Presentata da:  
Iris Basso

Correlatore:  
Prof.ssa  
Manuela Fabbri

Anno Accademico 2022-2023



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Il quadro europeo sull'IA</b>	<b>3</b>
1.1 Il quadro istituzionale . . . . .	3
1.2 Competenze in materia di IA . . . . .	5
1.3 Competenze prettamente umane . . . . .	7
1.4 L'utilizzo dell'IA nell'istruzione . . . . .	9
1.5 La formazione degli insegnanti . . . . .	11
1.6 Le misure in Italia: Piano Scuola 4.0 . . . . .	13
<b>2 IA e didattica della matematica</b>	<b>15</b>
2.1 L'IA e il sapere matematico . . . . .	15
2.2 IA al servizio degli studenti . . . . .	18
2.2.1 IA come tutor . . . . .	18
2.2.2 IA nello svolgimento dei compiti . . . . .	22
2.3 IA al servizio degli insegnanti e della didattica . . . . .	25
<b>3 Applicazione dell'IA ad un'unità didattica</b>	<b>31</b>
3.1 Scelta dell'argomento e del target . . . . .	31
3.2 ChatGPT al servizio degli studenti . . . . .	35
3.2.1 IA come tutor . . . . .	35
3.2.2 IA nello svolgimento dei compiti . . . . .	44
3.3 IA al servizio degli insegnanti e dell'attività didattica . . . . .	47
3.3.1 Esercitazioni sulle medie di calcolo . . . . .	49
3.3.2 Esercitazione sui rapporti statistici . . . . .	53
3.3.3 Esercitazione su regressione e correlazione . . . . .	54
3.3.4 Esercitazione con Python . . . . .	58
<b>Conclusioni</b>	<b>67</b>
<b>A Definizioni e formule di statistica</b>	<b>68</b>

<b>B Media armonica e aritmetica</b>	<b>71</b>
<b>C Rapporti statistici</b>	<b>74</b>
<b>D Regressione e Correlazione</b>	<b>76</b>
<b>E Machine learning con Python</b>	<b>79</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>83</b>
<b>Ringraziamenti</b>	<b>89</b>

# Introduzione

L'intelligenza artificiale è parte delle nostre vite da molto tempo e sembra destinata a restarci. Bill Gates nel suo blog [22], paragona l'intelligenza artificiale a ciò che furono i telefoni cellulari e internet, cioè a delle vere e proprie rivoluzioni per le nostre vite. Bill Gates inoltre indica l'istruzione come uno dei principali settori in cui l'IA avrà un impatto notevole. Riconosce che i computer non hanno avuto l'effetto che molti speravano nell'istruzione, eppure, sostiene che questa volta sarà diverso e che nei prossimi dieci anni l' IA rivoluzionerà il modo in cui le persone insegnano ed imparano. Come avverrà questa rivoluzione, se avverrà?

In Cina già da alcuni anni alcune aziende hanno sviluppato software basati sull' IA per assistere gli studenti con insegnamenti personalizzati [25]. Gli esperti di didattica sostengono che per capire come l' IA potrebbe migliorare l'insegnamento e l'apprendimento, bisogna pensare a come sta trasformando la natura del lavoro. In un mondo che cambia a velocità sostenuta, la scuola deve cercare di stare al passo e fornire agli studenti le competenze necessarie per far parte di questo cambiamento con un ruolo attivo e consapevole [25].

L'idea per questa tesi è nata dal grande dibattito contemporaneo sul tema dell'intelligenza artificiale: si voleva comprendere quali fossero le potenzialità di questi nuovi strumenti e come poteva venire utilizzata l'IA nel concreto nella didattica della matematica. Per prima cosa, nel Capitolo 1 si propone un'analisi del quadro europeo sull'IA, mantenendo come focus l'utilizzo nell'istruzione. Da questa analisi emerge la consapevolezza europea sull'importanza che i cittadini acquisiscano competenze sull'intelligenza artificiale; d'altra parte i cittadini devono anche essere preparati per quei compiti in cui (si pensa che) le macchine non sostituiranno mai gli esseri umani. Si osserva e approfondisce il ruolo centrale della scuola e degli insegnanti in questo processo.

Si analizza poi nel Capitolo 2 il rapporto tra IA e didattica della matematica: ci si chiede in particolare quali siano le competenze matematiche attuali dell'IA in termini di risoluzione degli esercizi e dei problemi scolastici; si approfondiscono poi gli utilizzi dell'IA da parte degli studenti e da parte degli insegnanti nella didattica della matematica. Nel caso degli studenti, si affronta un altro tema molto dibattuto, ovvero se l'IA possa essere utilizzato dagli alunni per svolgere i compiti

di matematica al loro posto.

Nel Capitolo 3 vengono proposte delle attività concrete. Questa è la parte centrale del lavoro perché, nonostante un gran dibattere sul tema dell'intelligenza artificiale e la didattica, si trovavano pochissime proposte concrete di attività in particolare legate alla matematica. Le proposte della tesi sono state create partendo dagli argomenti di statistica trattati nel primo anno del secondo biennio della scuola superiore di secondo grado. Le esercitazioni proposte sono di diverso tipo e sfruttano in modo diverso l'IA: possono solo toccare il tema, magari proponendo agli studenti di usare uno strumento di IA, oppure sono state create grazie a strumenti di IA, oppure ancora prevedono la spiegazione e creazione di un processo di IA. Gli obiettivi delle esercitazioni erano molteplici: avvicinare gli studenti al tema, farli riflettere sulle potenzialità e sui limiti dell'IA, cercare di far arrivare l'idea che l'IA non è una scatola nera che non si può comprendere ma un mondo affascinante che potrebbero voler esplorare. Questa tesi vuole essere principalmente uno spunto per restare aggiornati e per stimolare gli alunni ad essere creativi e ad utilizzare gli strumenti tecnologici in maniera consapevole.

# Capitolo 1

## Il quadro europeo sull'IA

Così come tutte le nuove tecnologie sono in grado di dividere le persone tra “apocalittici e integrati”, anche l’intelligenza artificiale ne è capace [12]. Gli apocalittici temono che l’intelligenza artificiale prenderà il sopravvento sulle nostre vite, privandoci della libertà, del lavoro e della privacy. Gli integrati invece guardano con estremo ottimismo alla nuova tecnologia e sognano un mondo dove le macchine si occuperanno dei compiti noiosi e saranno in grado di supportare l’uomo nel risolvere i problemi. L’Unione Europea risponde in maniera equilibrata a queste due visioni opposte e da qualche anno studia piani d’azione sull’intelligenza artificiale per sostenerla e regolamentarla. Sul sito ufficiale dell’Unione Europea dedicato al futuro digitale dell’Europa [18], è presente una linea del tempo che parte da marzo 2018 e rappresenta quelle che vengono definite le “pietre miliari” dell’approccio europeo all’IA. Dal 2018 ad oggi sono stati prodotti numerosi documenti ufficiali sull’intelligenza artificiale con «l’obiettivo di rafforzare la ricerca e la capacità industriale garantendo al tempo stesso la sicurezza e i diritti fondamentali» [18]. L’Italia è partita dal quadro europeo per sviluppare e declinare quelle che sono le sue priorità e i suoi piani concreti d’azione.

In questo capitolo si presenta il quadro europeo con particolare attenzione all’Italia; ci si sofferma sugli aspetti relativi all’istruzione e in particolare sul ruolo chiave che assume con l’avvento di questa nuova tecnologia. Si guarderà anche nel concreto agli interventi e agli strumenti dedicati agli insegnanti per svolgere al meglio il compito loro assegnato.

### 1.1 Il quadro istituzionale

Uno dei primissimi documenti prodotti dall’Unione Europea sul tema dell’IA risale all’aprile del 2018 e si intitola *L’intelligenza artificiale per l’Europa* [15]. In questo documento la definizione proposta di intelligenza artificiale è la seguente:

«“Intelligenza artificiale” (IA) indica sistemi che mostrano un comportamento intelligente analizzando il proprio ambiente e compiendo azioni, con un certo grado di autonomia, per raggiungere specifici obiettivi.» [15, p. 2] La peculiarità di questi sistemi, in sostanza, è il non aver bisogno di regole esplicite ovvero di algoritmi che governino ogni azione e decisione, motivo per cui si parla di autonomia del sistema. Nel documento europeo si osserva che l'IA è già parte delle nostre vite ad esempio quando utilizziamo assistenti vocali, motori di ricerca, sistemi di riconoscimento facciale, traduttori di lingue e molto altro. Oltre a renderci la vita più semplice, si sostiene che l'IA abbia le potenzialità per aiutarci a risolvere alcune delle sfide più impegnative. Vi sono tre punti chiave in questo documento su cui si concentreranno gli sforzi: l'Europa vuole essere competitiva nel panorama dell'IA e cioè sostenere ricerca e innovazione con investimenti coraggiosi; nessuno deve restare escluso dalla trasformazione digitale che avverrà con l'avvento dell'IA; l'intelligenza artificiale deve essere regolamentata e in accordo con i valori dell'UE.

Il secondo punto è quello più strettamente collegato all'istruzione dei cittadini. Per far sì che nessuno resti escluso dalla trasformazione digitale si ritiene necessario preparare i cittadini ai cambiamenti socio-economici apportati dall'IA. Lo scenario prospettato è che il mercato del lavoro cambierà: nasceranno nuovi lavori, altri spariranno e la maggior parte dei lavori si trasformerà. In particolare si prevede che «In futuro il 90% dei posti di lavoro in tutti i settori richiederà una qualche forma di competenze digitali, eppure il 35% dei lavoratori europei non dispone di tali competenze. La domanda di competenze digitali crescerà e saranno richieste competenze sia di base che avanzate, tra cui l'IA, l'alfabetizzazione ai dati, il supercalcolo e la cibersecurity.» [16, p. 16]. Davanti a questo scenario ci si interroga sul come preparare i cittadini a questa trasformazione e la risposta è nell'istruzione. Il compito chiave dell'istruzione nella formazione di cittadini attivi e partecipi in società è fondamentale per l'Unione Europea. Per convincersene, basta leggere il primo dei diritti sociali elencati nel *Pilastro europeo dei diritti sociali*: «Ogni persona ha diritto a un'istruzione, a una formazione e a un apprendimento permanente di qualità e inclusivi, al fine di mantenere e acquisire competenze che consentono di partecipare pienamente alla società e di gestire con successo le transizioni nel mercato del lavoro.» [17, p. 11]

Ci si può chiedere quali competenze e capacità l'istruzione è chiamata a fornire agli studenti. Già nel primissimo documento sull'IA del 2018 citato sopra, *L'intelligenza artificiale per l'Europa* [15], si descrive questa formazione come un lavoro su due fronti: «La prima sfida è preparare la società nel suo complesso. Ciò significa aiutare gli europei ad acquisire competenze digitali di base, come anche le capacità che sono complementari e non possono essere sostituite dalle macchine quali il pensiero critico, la creatività o la capacità di dirigere.» [15, p. 12]. In un documento prodotto nel 2018 dall'Agenzia Digitale per l'Italia, dal titolo *Libro*

*Bianco sull'Intelligenza Artificiale al servizio del cittadino*, si scrive che: «[...] è importante che il sistema scolastico e quello universitario abilitino gli studenti al futuro in cui vivranno da adulti, quindi a sviluppare le capacità di problem solving, di analisi e sintesi delle informazioni, così come la capacità di formulare giudizi autonomi, di creatività, di interazione empatica, di utilizzo raffinato delle proprie capacità sensoriali e psicomotorie, ambiti in cui difficilmente le macchine faranno concorrenza agli esseri umani. Emerge, infatti, con chiarezza che i modelli di conoscenza fondati principalmente sulla memorizzazione di nozioni e notizie non approfondite né sinteticamente elaborate e organizzate, e i metodi di insegnamento che privilegino la quantità di nozioni acquisite rispetto alla formazione critica dell'alunno, sono destinati a perdere progressivamente di importanza.» [12, p. 49]

Si sottolinea l'importanza di quelle capacità che si pensano appartenere prettamente al dominio umano. Oltre ad indicare queste capacità, il documento italiano mette in luce anche quella che potrebbe essere una più ampia riflessione e discussione su cosa è oggi un insegnamento significativo. In un articolo sull'uso di uno strumento di IA nella didattica, *Le opportunità di riflessione didattica offerte da chatGPT* [44], l'autore Domingo Paola scrive che questi nuovi strumenti possono essere spunto per avviare una discussione su quali dovrebbero essere le caratteristiche di un insegnamento-apprendimento significativo nella società di oggi, in particolare per l'insegnamento della matematica. Lo spunto tecnologico come scintilla per questa discussione non è nuovo: durante la pandemia gli studenti imparavano da casa davanti ai loro schermi e gli insegnanti si erano trovati nella posizione di dover assegnare compiti con risposte non troppo facili da trovare su Google [27]. In quella situazione qualche insegnante si era accorto che non tutti gli studenti sapevano cercare informazioni su Google, perciò l'utilizzare il motore di ricerca era una capacità da approfondire con gli studenti [27]. Allo stesso modo le competenze in IA, anche quelle più basilari, non sono da considerare ovvie.

Ricapitolando, da una parte i cittadini sono chiamati ad acquisire competenze sull'intelligenza artificiale, che saranno sempre più utili nel mondo del lavoro; d'altra parte gli studenti devono essere preparati per quei compiti in cui (si pensa che) le macchine non sostituiranno mai gli esseri umani. Entrambi gli aspetti meritano un approfondimento nei paragrafi seguenti.

## 1.2 Competenze in materia di IA

Le competenze in materia di intelligenza artificiale rientrano in quelle che vengono definite "competenze digitali". Il documento contenente il quadro europeo delle competenze digitali per i cittadini è *DigComp 2.2, The Digital Competence framework for citizens: with new examples of knowledge, skills and attitudes* [7]. All'interno vi sono cinque aree di competenza che descrivono gli ambiti in cui si

possono suddividere le competenze digitali per i cittadini. Le cinque aree sono: “Alfabetizzazione su informazione e dati”, “Comunicazione e collaborazione”, “Creazione di contenuti digitali”, “Sicurezza” e “Risolvere problemi”. Il documento è stato aggiornato nel 2022 con l’obiettivo esplicito di includere nuove tecnologie emergenti, tra cui l’intelligenza artificiale. Con questo scopo sono stati inseriti nel testo molti esempi di conoscenze, abilità e attitudini relativi all’IA. Guardando gli esempi ci si può fare un’idea di ciò che i cittadini dovrebbero già sapere o saper fare in tema di IA.

Relativamente alle conoscenze il cittadino può limitarsi ad immaginare l’IA come una “scatola nera” in quanto gli algoritmi non sono solitamente esplicitati o comunque sono molto complessi. L’idea è che non serva capire nel dettaglio alcun meccanismo di IA, ma che si comprendano benefici e rischi: come competenza digitale di base quindi ci si aspetta che tutti sappiano farne un uso consapevole. Questo è importantissimo anche se un po’ limitante: personalmente si ritiene che comprendere anche solo a grandi linee il funzionamento di un particolare algoritmo potrebbe essere utile per sfatare il pregiudizio che l’IA sia troppo difficile da comprendere. Questo punto verrà approfondito e concretizzato nei paragrafi successivi e in particolare negli esempi di attività didattiche. Seguendo sempre il quadro europeo [7], il cittadino dovrebbe essere a conoscenza del fatto che ha già a che fare con IA ad esempio quando utilizza motori di ricerca, social media e piattaforme di contenuti. Più in generale dovrebbe essere in grado di identificare sistemi di IA e dovrebbe sapere che viene usata principalmente per la “personalizzazione” ovvero la proposta di contenuti sulla base del singolo utente. Tra le altre conoscenze necessarie vi sono il sapere che l’IA è un prodotto dell’intelligenza umana e quindi che potrebbe essere basata su pregiudizi o distorsioni e inoltre che i sistemi di IA raccolgono ed elaborano quantità di dati per funzionare, compresi dati personali. Riguardo ai rischi dovrebbe essere noto l’utilizzo di dati personali, il fatto che l’IA sappia generare prodotti multimediali che possono sembrare reali e il fatto che possa anche suggerire messaggi politici. Ogni persona dovrebbe conoscere anche i suoi diritti e in particolare sapere che là dove l’IA dovesse prendere decisioni rilevanti sulla sua vita allora egli ha il diritto di chiedere che il processo decisionale non sia completamente automatizzato: ad esempio se gli viene rifiutata una richiesta di credito da parte di un algoritmo, ha il diritto che questa decisione venga rivista da un umano.

Tra le abilità indicate vi è quella di sapere quando può essere utile utilizzare l’IA (si fornisce l’esempio di traduzioni automatiche o simultanee, che possono essere molto comode per ottenere una comprensione globale, ma non sufficienti quando il contenuto richiede una traduzione accurata). Un’altra abilità dovrebbe essere quella di saper formulare le richieste ad agenti conversazionali in modo da ottenere la risposta desiderata (ciò che viene definito spesso come “prompt engineering”).

In generale il cittadino dovrebbe saper interagire con l'IA in modo da orientare le proposte che questa farà. Un'altra abilità è quella di saper utilizzare i contenuti prodotti dall'IA per il proprio lavoro, tenendo conto delle implicazioni etiche. Infine tra le capacità c'è anche quella di saper modificare le impostazioni utente qualora non si desidera che vengano raccolti alcuni dati.

Vi sono poi esempi sull'attitudine verso l'IA che dovrebbe essere positiva: il cittadino, riconoscendo che questa tecnologia potrà portare benefici in diversi aspetti della vita, dovrebbe essere aperto verso i sistemi di IA, dovrebbe tenersi aggiornato e continuare ad imparare basi di IA. Un'ultima attitudine indicata è: «Considera l'etica (inclusi, a titolo esemplificativo ma non esaustivo, l'intervento e la supervisione umani, la trasparenza, la non discriminazione, l'accessibilità, i pregiudizi e l'equità) come uno dei pilastri fondamentali durante lo sviluppo e il rilascio di sistemi di IA.» [7, p. 34]. Questa affermazione rappresenta molto bene l'approccio europeo al tema dell'IA che vede come punto fondamentale quello di assicurare un quadro etico e giuridico adeguato in particolare sulla base del lavoro di un gruppo di esperti che si chiama "Gruppo europeo sull'etica nelle scienze e nelle nuove tecnologie" [15].

### 1.3 Competenze prettamente umane

L'istruzione dovrebbe aiutare i cittadini ad acquisire, oltre alle competenze digitali sull'IA, anche quelle capacità che ad oggi si pensa non potranno essere sostituite dalle macchine. Come detto nel paragrafo precedente, si nominano il pensiero critico, la creatività e la capacità di dirigere [15]. E poi ancora la capacità di problem solving, di analisi e sintesi delle informazioni, di interazione empatica [12]. Ci si può chiedere cosa siano queste capacità, pertanto per le definizioni utilizzeremo il decalogo dell'Organizzazione Mondiale della Sanità relativo alle competenze per la vita [34]. Inoltre ci si può chiedere dove si posizionino quelle capacità nel quadro europeo delle otto competenze chiave (*Key competences for lifelong learning* [6]).

Il pensiero critico viene definito come la capacità di saper analizzare informazioni ed esperienze in modo oggettivo, valutandone vantaggi e svantaggi per poter arrivare a una decisione più consapevole. In questo processo si è anche consapevoli dei diversi fattori che ci influenzano come ad esempio le pressioni dei coetanei e l'influenza dei mass media [34]. Il pensiero critico è una di quelle abilità richieste in un mondo sempre più complesso e la sua importanza è riconosciuta dai formatori, ma anche dagli studenti stessi: oltre il 40% in un recente sondaggio dichiara che non è insegnato a sufficienza a scuola [16]. Domingo Paola scrive che esso è la base per una democrazia compiuta: «L'attenzione ai perché offre agli studenti di esercitare il pensiero critico, fondamentale in una società gravata da problemi sempre più complessi e difficili da dipanare e affrontare. Esercizio del pensiero

critico, buona formazione scientifica di base e scelta dell'argomentazione come modalità privilegiata per far valere le proprie posizioni e confrontarle con quelle altrui, sono fondamentali per la realizzazione di una democrazia compiuta.» [44] Nel quadro europeo delle otto competenze chiave il pensiero critico è considerato una capacità trasversale incorporata in tutte e otto le competenze chiave. L'IA non è dotata di pensiero critico o di capacità di ragionamento autonomo come un essere umano. Piuttosto è addestrata ma non ha la capacità di valutare criticamente le informazioni con cui viene addestrata come può fare un essere umano.

La creatività viene definita come la capacità di esplorare diverse alternative possibili, anche al di là della nostra esperienza diretta, e ci aiuta a rispondere in maniera adattativa e flessibile alle situazioni quotidiane della vita [34]. La creatività è spesso menzionata quando si parla di IA perché un uso consapevole e pensato degli strumenti di IA si ritiene possa aiutare a sviluppare nuove idee negli studenti fornendo spunti e considerazioni. Basti pensare a quanto uno strumento come un chatbot<sup>1</sup> è capace di fornire spunti per componimenti scritti o quanto un generatore di immagini potrebbe fornire idee per stimolare conversazioni e dibattiti. La creatività è considerata anche lei come una capacità trasversale alle otto competenze. Si intuisce che un'IA non può essere creativa allo stesso modo in cui può esserlo un umano: la capacità di generare nuove idee e di creare contenuti originali dipende dalle informazioni con cui è stata addestrata. Non può quindi generare idee completamente originali in modo indipendente, come farebbe un essere umano.

Il problem solving viene definito come ciò che ci permette di affrontare in maniera costruttiva i problemi che incontriamo nella vita, che se non vengono risolti causano stress e tensioni fisiche. La creatività viene indicata come strumento del problem solving [34]. L'importanza della capacità di problem solving è trasversale alle competenze chiave, ma particolarmente legata alla competenza matematica che viene definita come quella abilità di risolvere problemi legati a situazioni quotidiane sviluppando e applicando il pensiero matematico [6]. La domanda che ci si può porre è: un'IA non dispone di capacità di problem solving? Verrebbe da rispondere di sì in quanto sono già molti gli strumenti capaci di fornire soluzioni efficaci ai problemi proposti. Tuttavia, la sua capacità di problem solving è basata di nuovo sulla sua programmazione e sull'addestramento. Inoltre la capacità di risolvere problemi dipende anzitutto dalla disponibilità di informazioni rilevanti. L'analisi e la sintesi delle informazioni rilevanti è una fase fondamentale nel problem solving e non è detto che possa essere compiuta dall'IA: potrebbe essere una fase che spetta all'umano (si pensi banalmente al porre un problema ad un chatbot). Dipende poi dalla natura dei problemi, alcuni potrebbero essere completamente nuovi oppure

---

<sup>1</sup>Un chatbot è un software capace di sostenere una comunicazione scritta od orale con le persone imitando le conversazioni tra esseri umani [5].

essere problemi vecchi, ma che vanno risolti in modo nuovo o contestualizzati in modo nuovo, cosa che non è contemplata dall'algoritmo. Come esempio significativo si consideri il problema che i singoli paesi si sono trovati ad affrontare nel 2020 e cioè la gestione della pandemia: problemi di questo tipo contengono tantissime variabili, necessitano di analisi approfondite, strategia, creatività e impongono scelte etiche. Per concludere per ora più che altro si può parlare di IA a servizio del problem solving e questo è un concetto fondamentale anche nel momento in cui si insegna l'IA agli studenti.

Il pensiero critico, la creatività e il problem solving vengono considerate anche come base della competenza imprenditoriale e cioè la capacità di sfruttare idee e opportunità per trasformarle in valore per gli altri [6]. All'interno di questa competenza troviamo anche la capacità di dirigere (che era menzionata tra le capacità da sviluppare con l'avvento dell'IA in [15]) intesa come proattività, perseveranza nel raggiungere gli obiettivi e motivare le altre persone grazie ad empatia e ascolto. L'empatia che viene qui descritta come una caratteristica della competenza imprenditoriale, fa parte anche della "competenza personale, sociale e capacità di imparare a imparare". L'empatia viene definita come la capacità di immaginare come sia la vita di un'altra persona e ci aiuta a comprendere e accettare le altre persone anche se sono molto diverse da noi [34]. Sebbene vi siano anche intelligenze artificiali addestrate per rilevare emozioni e mostrare empatia, tanto è vero che si parla di "empatia artificiale", nei documenti ufficiali menzionati sull'IA l'empatia non viene mai associata a questa tecnologia, bensì viene sempre vista come una di quelle caratteristiche proprie solo dell'uomo.

A questo punto ci si può chiedere se sia possibile preparare gli studenti in entrambi gli aspetti, cioè competenze digitali in materia di IA e competenze che l'IA non possiede, magari con la stessa attività. La risposta verrà cercata anche con esempi pratici nei capitoli successivi.

## 1.4 L'utilizzo dell'IA nell'istruzione

Nel valutare quale sarà l'impatto dell'intelligenza artificiale sull'istruzione bisogna tenere conto che la ricerca e l'applicazione di questa tecnologia nel settore sono ancora limitate [5]. Per farsi un'idea di quello che si pensa potrà fare l'IA si può guardare al *Piano d'azione per l'istruzione digitale 2021-2027* [16]. Il piano europeo nasce dopo la crisi COVID-19, che ha pesantemente colpito l'istruzione e ha accelerato la trasformazione digitale nelle scuole. L'obiettivo del documento è quello di fornire un'analisi della situazione in materia di competenze digitali e favorirne lo sviluppo per tutti i cittadini. Il piano non è quindi centrato sull'IA, ma ne esamina l'impatto sull'istruzione e sulla formazione anche attraverso progetti pilota. Tra i

benefici della digitalizzazione si elencano l'apprendimento inclusivo e personalizzato, la possibilità di coinvolgere gli studenti in un apprendimento collaborativo e creativo e il poter facilmente accedere e creare contenuti digitali. Il piano si promette di «Sostenere lo sviluppo di risorse di apprendimento in materia di IA per le scuole, le organizzazioni IFP e altri erogatori di formazione. Sensibilizzare in merito alle opportunità e alle sfide dell'IA per l'istruzione e la formazione.» [16, p. 14]. Un esempio di progetto finanziato dall'Unione Europea relativo all'intelligenza artificiale che va nelle direzioni indicate è stato “MaTHiSiS H2020”, un progetto terminato nel 2019, che aveva l'obiettivo di creare una piattaforma di supporto all'insegnamento per i ragazzi affetti da DSA, ADHD, spettro autistico e disabilità multipla. La piattaforma realizzata era collegata a una webcam e ad un rilevatore di movimento e mediante tecniche IA era in teoria in grado di riconoscere gli stati d'animo e i livelli d'attenzione degli allievi e, in base a questi, aumentare o diminuire il grado di difficoltà degli esercizi proposti. Gli insegnanti avrebbero potuto creare classi virtuali, creare i profili degli allievi e poi creare i propri corsi. Erano presenti dei contenuti standard e, oltre a questi, dei modelli di strutture che l'insegnante poteva riempire con i contenuti desiderati divisi in base alla difficoltà. Il progetto è stato testato su un campione di scuole europee di primo e secondo grado e ha coinvolto circa un centinaio di studenti italiani. Secondo i risultati dei test, l'uso della piattaforma ha migliorato il percorso di apprendimento degli allievi aumentandone i livelli di concentrazione e attenzione [12]. Purtroppo la piattaforma non pare più essere stata sfruttata e il dominio del progetto, solitamente indicato come il link dove reperire ulteriori informazioni, non è più di proprietà del progetto. Il progetto sembra essersi concluso senza che la piattaforma fosse completamente sviluppata e soprattutto senza aver avuto poi effettivi risvolti e utilizzi nella realtà.

I benefici della digitalizzazione sull'istruzione sopra indicati, sono simili ai benefici dell'IA che l'Agenzia per l'Italia Digitale pubblica nel marzo del 2018 nel *Libro Bianco sull'Intelligenza Artificiale al servizio del cittadino* [12]. Il documento ha l'obiettivo di analizzare l'impatto dell'IA sulla società e, nello specifico, su come sarà possibile utilizzarla nella Pubblica amministrazione per migliorare i servizi ai cittadini. Relativamente al sistema scolastico si prevede che l'IA verrà utilizzata per automatizzare la valutazione, personalizzare il materiale didattico e il tutoraggio, tenere viva l'attenzione, suggerire contenuti personalizzati per gli studenti ed estrarre indicatori predittivi di rischio di abbandono scolastico. Sugli utilizzi appena elencati il documento non scende però nei dettagli e resta tutto piuttosto vago.

Un documento in cui si scende più nello specifico proponendo dei casi in cui utilizzare sistemi di IA nella didattica è stato pubblicato nel 2022. L'Unione Europea pubblica *Ethical guidelines on the use of artificial intelligence (AI) and data in teaching and learning for educators* [5] che è un documento pensato esclusivamente

per insegnanti ed educatori affinché possano comprendere potenziale e rischi dell'IA e dell'uso dei dati. Questi orientamenti descrivono l'IA come capace potenzialmente di migliorare insegnamento, apprendimento e valutazione. Per quel che riguarda lo studente si divide il tema in “insegnamento allo studente” e “sostegno allo studente”. Nel primo si prospetta un sistema che insegna allo studente attraverso un tutoraggio intelligente in cui non c'è bisogno di un insegnante in quanto lo studente riceve istruzioni e feedback personalizzati dal software. Si pensa a sistemi basati sul linguaggio naturale che possano anche monitorare la concentrazione del discente e rispondere nel modo migliore (similmente al progetto europeo “MaTHiSiS H2020”). Come esempio concreto si citano corsi di lingua con feedback relativi a pronuncia, comprensione e padronanza del testo; si potrebbe però immaginare un sistema simile anche per competenze diverse. L'uso dell'IA come “sostegno allo studente” invece si intende come sostegno all'apprendimento. Si immagina un ambiente di apprendimento esplorativo individuale dove «Ai discenti vengono offerte rappresentazioni multiple che li aiutano a delineare i percorsi individuali per raggiungere i propri obiettivi di apprendimento.» [5, p. 15]. Si prospetta che questo utilizzo dell'IA possa essere sfruttato anche per un apprendimento collaborativo. D'altra parte si prevede che l'insegnante possa altrettanto fare uso di strumenti basati su IA per il proprio lavoro, ad esempio per la valutazione di componimenti scritti utilizzando IA che forniscono feedback su aspetti quali uso dei vocaboli, grammatica e struttura delle frasi. L'insegnante potrebbe usare un sistema di monitoraggio del forum degli studenti per comprendere meglio l'attività di ciascuno studente. Si potrebbero utilizzare chatbot per rispondere alle domande più frequentemente formulate dagli studenti e infine utilizzare sistemi di raccomandazione IA per suggerire specifiche risorse sulla base delle preferenze degli studenti.

Si può osservare che l'utilizzo descritto anche se più dettagliato risulta sempre piuttosto generico. Mancano esempi di applicazioni ed esperienze concrete. Questo probabilmente perché si è all'inizio dell'utilizzo di questa tecnologia nel settore dell'istruzione ed è per questo che in questa tesi si scenderà nel concreto nei successivi capitoli.

## 1.5 La formazione degli insegnanti

Per sfruttare il potenziale delle nuove tecnologie digitali come l'IA e per fornire agli studenti le capacità fondamentali in futuro, l'istruzione e, prima ancora, gli insegnanti devono chiaramente stare al passo con le tecnologie. Fornire nuove tecnologie alle scuole senza avere insegnanti formati e interessati all'utilizzo ha poco senso. Nel *Piano d'azione per l'istruzione digitale 2021-2027* [16] si legge che «È opportuno che gli attori chiave, in particolare gli insegnanti e i formatori, siano

meglio attrezzati e formati per partecipare più efficacemente alla trasformazione digitale dell'istruzione e per comprendere le opportunità che essa può offrire, se utilizzata in modo efficace.» [16, p. 12] Il documento non scende però nei dettagli sulla formazione degli insegnanti e dei formatori perché afferma che la preparazione dei docenti è esplicitamente lasciata alla responsabilità dei singoli Stati membri. In particolare gli Stati membri sono responsabili dell'organizzazione di istruzione, formazione e dei contenuti dell'insegnamento. L'intervento a livello dell'UE può contribuire sostenendo la cooperazione, lo scambio di buone pratiche e la ricerca [16]. Ciononostante è interessante analizzare quali siano le recenti risorse fornite dall'Unione Europea per la formazione degli insegnanti in tema di intelligenza artificiale.

Nel 2022 l'Unione Europea ha pubblicato un documento, citato anche nel paragrafo sopra, indirizzato esclusivamente ai docenti e relativo all'uso dell'IA nell'insegnamento e nell'apprendimento [5]. Questo documento, dopo le definizioni iniziali, presenta i pregiudizi più comuni su IA e istruzione, che potrebbero essere propri anche di alcuni insegnanti:

- L'IA è troppo difficile da comprendere: il campo dell'IA è vasto, complesso e contiene molti metodi e tecniche diverse. Il documento non cerca di sfatare il pregiudizio, si allinea piuttosto al quadro delle competenze digitali rappresentando l'IA come una “scatola nera” che non è necessario comprendere veramente. L'obiettivo è far sì che gli educatori familiarizzino con la terminologia specifica offrendo un glossario e far sì che diventino consapevoli su come sia possibile utilizzare l'IA nella didattica e di quali siano i rischi collegati.
- L'IA non riveste alcun ruolo nell'istruzione: per sfatare questo pregiudizio ci si appoggia all'argomentazione che ciò che sta cambiando la società in cui viviamo avrà per forza degli impatti anche sull'insegnamento e l'apprendimento.
- L'IA non è inclusiva: qui il pregiudizio può far riferimento alla fase di progettazione dell'IA che potrebbe essere soggetta ai pregiudizi dei progettisti. Su questo aspetto ci si deve affidare al controllo di Unione Europea e Italia che insistono molto su questa tematica. Il pregiudizio fa riferimento anche all'uso dell'IA che potrebbe non essere a disposizione di tutti e qui il documento insiste invece su come possa essere inclusiva andando a colmare deficit per persone con disabilità (ad esempio un sottotitolaggio in tempo reale per persone con deficit uditivi).
- I sistemi di IA non sono affidabili: in questo caso l'argomento contro questo pregiudizio è la regolamentazione stretta dell'UE in merito.

- L'IA comprometterà il ruolo dell'insegnante: questo pregiudizio viene smontato assicurando sul fatto che l'IA non sostituirà gli insegnanti, ma sarà d'aiuto. Li supporterà nel programmare esperienze di apprendimento nuove e creative e automatizzerà le mansioni amministrative ripetitive.

Il documento scende nel concreto e presenta le domande che l'insegnante dovrebbe porsi nell'adottare una certa tecnologia basata su IA e che dovrebbe porre a chi propone il software. Si immagina quindi che questa tecnologia verrà utilizzata anche in software scolastici e che gli insegnanti dovranno essere in grado di selezionare gli strumenti più adeguati. Le domande che gli educatori dovrebbero porsi sono sui temi: intervento e sorveglianza umani, trasparenza, diversità, benessere sociale e ambientale, riservatezza e governance dei dati, robustezza tecnica e sicurezza e infine accountability. Sono proposti anche degli esempi situati di tecnologie basate su IA e quali sarebbero le domande orientative da porsi e da porre a chi propone le tecnologie. Infine vi è un glossario con i termini più associati ad IA e una spiegazione di come questi si possono applicare all'istruzione.

Oltre a questo insieme di orientamenti, vi sono altre risorse ufficiali online, non create specificatamente per insegnanti, ma che potrebbero essere molto utili anche a loro. Vale la pena citare un corso gratuito creato dall'Università di Helsinki assieme ad una società finlandese che spiega con termini semplici cos'è l'intelligenza artificiale [13]. Il corso è stato tradotto in varie lingue tra cui l'italiano ed è consigliato dal Dipartimento per la trasformazione digitale [14]. Il corso dura circa 30 ore, è diviso in sei capitoli e presenta frequenti test. Infine, tra i tanti documenti citati, per un insegnante potrebbe risultare utile il *DigComp 2.2, The Digital Competence framework for citizens: with new examples of knowledge, skills and attitudes* [7] per un primo approccio al tema, dato che contiene tantissimi esempi brevi ed interessanti legati all'IA.

## 1.6 Le misure in Italia: Piano Scuola 4.0

Nel 2022 viene pubblicato il *Piano Scuola 4.0* [10] in cui si può leggere più nel dettaglio come si pensa di utilizzare i fondi del PNRR per innovare la scuola italiana. Il piano è da inquadrarsi nel quadro europeo del *Piano d'azione per l'istruzione digitale 2021-2027* [16].

Al primo punto del piano italiano vi è la formazione degli insegnanti per cui sono stati stanziati 800 milioni di euro. In particolare si parla di realizzare «un sistema, multidimensionale e strategico, di formazione continua degli insegnanti e del personale scolastico con un'offerta formativa di oltre 20.000 corsi per la formazione di 650.000 fra dirigenti scolastici, docenti, personale scolastico, tecnico e amministrativo, e l'adozione di un quadro di riferimento nazionale per l'insegnamento digitale integrato, per promuovere l'adozione di curricula sulle competenze

digitali in tutte le scuole.» [10, p. 7]. Nel concreto è stato creato un portale, “Scuola Futura” [32], a cui possono accedere solo docenti e personale in servizio, in cui sono già disponibili tre aree di sviluppo, di cui una è chiamata “transizione digitale”. In quest’area, filtrando tra i corsi disponibili si può osservare che sono già presenti una settantina di percorsi a tema intelligenza artificiale. I percorsi formativi sono strutturati sulla base del quadro di riferimento europeo sulle competenze digitali dei docenti [7] e ne seguono i principi. Inoltre nel piano scuola viene promosso un programma di mobilità internazionale per docenti italiani. Tra le misure previste vi saranno anche delle sperimentazioni nazionali sull’insegnamento dell’IA nelle scuole e questa azione è indicata come raccordo tra azioni del Piano europeo e le misure nazionali.

Come secondo punto sono stanziati 2,1 milioni di euro con due obiettivi: il primo trasformare almeno 100.000 aule in ambienti innovativi di apprendimento e il secondo realizzare dei laboratori per le professioni digitali del futuro. Relativamente alle nuove aule (“Next Generation Classroom”) si legge: «Le nuove classi, oltre ad avere uno schermo digitale, dispositivi per la fruizione delle lezioni anche in videoconferenza e dispositivi digitali individuali o di gruppo (notebook, tablet, etc.), dovranno avere a disposizione, anche in rete fra più aule, dispositivi per la comunicazione digitale, per la promozione della scrittura e della lettura con le tecnologie digitali, per lo studio delle STEM, per la creatività digitale, per l’apprendimento del pensiero computazionale, dell’intelligenza artificiale e della robotica, per la fruizione di contenuti attraverso la realtà virtuale e aumentata.» [10, p. 26]. I laboratori, chiamati invece “Next Generation Labs”, sono laboratori per le professioni digitali del futuro, che dovrebbero fornire competenze digitali specifiche nei diversi ambiti tecnologici trasversali ai settori. Si immaginano questi laboratori come un “continuum” fra scuola e mondo del lavoro, in cui si affrontano attività autentiche e magari in collaborazione con imprese, università e centri di ricerca del territorio. Anche qui l’IA è in primo piano come uno di quegli ambiti chiave per le professioni digitali del futuro. Per progettare, realizzare e gestire questi nuovi ambienti di apprendimento gli insegnanti avranno a disposizione dei percorsi formativi sul portale indicato sopra, “Scuola Futura”.

I fondi del piano sono stati ripartiti fra le istituzioni scolastiche beneficiarie che sono state invitate a produrre il progetto degli interventi oggetto di finanziamento entro fine febbraio del 2023. La realizzazione degli ambienti innovativi di apprendimento e dei laboratori per le professioni digitali del futuro è prevista nel giugno del 2024.

# Capitolo 2

## IA e didattica della matematica

In questo capitolo ci si interroga sull'IA come strumento nella didattica della matematica. Per prima cosa si guarderà al rapporto tra IA e matematica chiedendosi se esista un'intelligenza artificiale dotata di competenze matematiche. In secondo luogo si guarderà al tema dell'IA al servizio dello studente in due modalità: come tutor personale e come strumento per svolgere i compiti. Infine si guarderà all'IA a supporto dell'insegnante e dell'azione didattica proponendo esempi di attività e utilizzo di specifici software.

### 2.1 L'IA e il sapere matematico

Nell'affrontare il tema dell'uso dell'intelligenza artificiale nella didattica della matematica viene spontaneo domandarsi quale sia il rapporto tra l'IA e il sapere matematico inteso come conoscenze e competenze. Ci si concentrerà su quello che è il sapere matematico scolastico, cioè ciò che affrontano gli studenti nel primo ciclo e nel secondo ciclo. Tra le premesse bisogna considerare che, nella ricerca sull'IA, le capacità matematiche non hanno avuto fino ad oggi un ruolo centrale, rispetto ad esempio alle capacità linguistiche e comunicative. Questo per via delle minori applicazioni e quindi del minor interesse commerciale [37].

La matematica è generalmente considerata un campo difficile per l'IA e solo di recente l'interesse nelle capacità matematiche dell'IA è cresciuto e sempre più software sono stati testati in questo campo [37]. L'OCSE, l'Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico, ha pubblicato nel 2023 un report dal titolo *Is Education Losing the Race with Technology?* [37], dedicato a una sistematica valutazione di quelle che sono le competenze dell'IA nell'ambito linguistico e matematico. Vengono considerati solo questi due ambiti, in quanto ritenuti fondamentali per il successo nel mondo del lavoro e nella vita. L'idea alla base della ricerca è che una valutazione periodica delle competenze dell'IA sia utile per chi si occupa

di politica, istruzione e ricerca per comprendere meglio le implicazioni di questa tecnologia nel lavoro e nell'istruzione. Lo studio confronta i risultati dell'IA con quelli umani e in più paragona gli esiti recenti con quelli di uno studio compiuto dall'OCSE nel 2016. Sostanzialmente ne risulta che le capacità degli uomini non sono cambiate in maniera significativa dal 2016 ad oggi; le capacità linguistiche dell'IA sono migliorate notevolmente, mentre quelle matematiche dell'IA sono migliorate ma di poco.

Per comprendere meglio su quali competenze matematiche venga messa alla prova l'IA è interessante guardare i test a cui viene sottoposta. Gli esercizi di puro calcolo o semplice applicazione di una regola, non vengono considerati interessanti, in quanto gli esperti ritengono che questi siano tra le abilità che alcuni modelli di machine learning<sup>1</sup> hanno già raggiunto [28]. Questo non significa che tutti i modelli di IA siano formidabili nel compiere semplici esercizi di calcolo, anzi. Come esempio si può citare il noto chatbot sviluppato da OpenAI, ChatGPT: dopo il rilascio in Italia, moltissimi utenti evidenziavano di aver ottenuto risultati sbagliati a quesiti matematici piuttosto semplici [1]. Nell'esempio specifico di ChatGPT, gli studi evidenziano come il software presenti molte difficoltà in operazioni standard (come invertire frazioni o cambiare il segno di un numero quando si sposta da una parte all'altra dell'uguale) e nel risolvere problemi con più di un'operazione [20].

Quello su cui si concentrano le ricerche attuali è il testare la capacità matematica dell'IA intesa come l'abilità nel risolvere problemi. Questo è in linea con la definizione europea di competenza matematica, intesa come quella abilità di risolvere problemi legati a situazioni quotidiane sviluppando e applicando il pensiero matematico [6]. I problemi che vengono sottoposti all'IA in questi studi, sono generalmente tratti da test che vengono sottoposti agli umani oppure scritti in modo da essere paragonabili a questi. Si tratta di problemi tratti ad esempio da test standard, da gare di matematica, dalle prove PISA<sup>2</sup> ovvero "Programme for International Student Assessment". Il vincolo è che solitamente questi problemi devono essere formulati solo in linguaggio naturale o simbolico. Le ultime ricerche hanno prodotto enormi batterie di test (ad esempio quello creato dall'ultimo studio di OpenAI conteneva 8.500 problemi [4]) per valutare queste capacità e di pari passo sono stati sviluppati anche sistemi capaci di ottenere risultati sempre migliori su questi test.

In un recente articolo si osserva che per risolvere un problema matematico

---

<sup>1</sup>Il machine learning o apprendimento automatico è la capacità di una macchina di svolgere un compito senza essere esplicitamente programmato per farlo. Il termine comprende diversi tipi di apprendimento [46].

<sup>2</sup>Le prove PISA sono un'indagine internazionale promossa dall'OCSE che con periodicità triennale misura le competenze degli studenti quindicenni dei paesi aderenti. Vi partecipano studenti provenienti da più di 80 paesi diversi tra cui l'Italia. I test si concentrano sulle competenze in lettura, matematica e scienze [30].

può essere necessaria una triplice conoscenza: la conoscenza linguistica necessaria per comprendere il testo del problema, le conoscenze matematiche e infine una conoscenza del mondo e di come esso sia caratterizzato dal punto di vista matematico [9]. Nella conoscenza del mondo necessaria per risolvere i problemi vi è spesso una componente di “buon senso”, ovvero una comprensione del mondo reale che è condivisa da tutti sin dall’infanzia. Per fare qualche esempio: il concetto di possedere, di essere in debito oppure le proprietà dei liquidi e dei solidi. La conoscenza del mondo e il buon senso sono campi in cui l’IA si trova in difficoltà. Le ricerche degli ultimi cinque o sei anni relative alla capacità di risolvere problemi hanno tutte alla base IA del tipo “Large Language Models” (LLMs)<sup>3</sup>. Il motivo può essere che questi modelli mostrano capacità sia linguistiche, che matematiche, che di buon senso [9]. Ovviamente le competenze linguistiche superano di gran lunga le altre due e per questo motivo si stanno sviluppando anche sistemi ibridi, come LLM che hanno accesso a strumenti esterni quali calcolatrici o specifici pacchetti Python per potenziare le capacità di calcolo. Una novità che risale a fine marzo 2023, è un plugin che connette ChatGPT a Wolfram Alpha. Questo plugin è utilizzabile solo con la versione a pagamento di ChatGPT-4 e pare avere grandi potenzialità, anche se essendo così recente non vi sono ancora approfondimenti sulle sue capacità effettive.

Questi modelli e questi test hanno però un grosso limite: affrontano problemi presentati esclusivamente in linguaggio naturale o algebrico. Non vengono (per ora) considerati nei test quei problemi con tabelle, grafici, figure, che invece sono presenti nei libri di testo e soprattutto nella vita quotidiana di ogni cittadino. Per ora processare immagini e grafici è ancora difficile per l’IA. Secondo gli esperti consultati nello studio dell’OCSE un sistema potrebbe essere allenato per risolvere determinati problemi contenenti immagini e grafici (avendo a disposizione sufficienti esempi per allenarlo), ma non sarebbe comunque applicabile a tutti i problemi, ma solo allo specifico segmento su cui lo si è allenato [37]. Sull’aspetto dell’integrazione di input visivi a linguaggi LLM si sta comunque facendo ricerca e sviluppo; si consideri come esempio che l’ultima versione di ChatGPT, ovvero GPT-4, accetta anche immagini come input [39].

Un recente articolo analizza le capacità di ChatGPT nel campo della matematica che si affronta all’università [20]. Il risultato è che le capacità del chatbot sono ben al di sotto di quelle di uno studente universitario medio di matematica. Risulta però interessante osservare che qualcosa riesce molto bene a ChatGPT: fornire definizioni e viceversa, cioè capire da una definizione di che soggetto matematico si sta parlando. Lo studio indica quindi la possibile utilità di ChatGPT come motore

---

<sup>3</sup>I LLMs sono modelli di machine learning progettati per generare testo e comprendere il linguaggio umano. Sono addestrati su enormi quantità di dati testuali per imparare a predire le parole e le frasi successive in un testo. ChatGPT è tra i più noti esempi di LLM.

di ricerca per argomenti matematici, come un'enciclopedia matematica di facile consultazione. Generalizzando, questa idea si può estendere a tutti i sistemi di IA allenati su una buona base di testi scientifici. Chiaramente ci sono altri strumenti che possono svolgere un compito simile, come Wikipedia o sistemi ibridi come Bing Chat (il motore di ricerca di Microsoft basato su ChatGPT che funziona come un assistente virtuale fornendo risposte e integrandole con link e immagini).

Si può infine osservare come le capacità di un IA non assomiglino affatto a quelle di un essere umano: da uno studente che sa risolvere integrali ci si aspetta che sappia contare e che sappia risolvere problemi elementari che necessitano di più di un'operazione. Questo non vale per un'IA.

In conclusione, ad oggi non esiste un software che sia in grado di risolvere in maniera affidabile tutti gli esercizi e i problemi di un libro di testo di uno studente di qualsiasi classe. Va comunque considerato che lo sviluppo di capacità di problem solving nei modelli di IA è sempre di maggior interesse, quindi presumibilmente nel futuro prossimo ci saranno grandi novità.

## 2.2 IA al servizio degli studenti

Si considereranno principalmente due possibilità di IA al servizio dello studente: come tutor fuori da scuola e come strumento a cui far svolgere i compiti per casa e magari anche i compiti in classe. Sono entrambe possibilità e in alcuni casi già realtà molto dibattute. L'idea di IA come sistema di tutoraggio allo studente viene espressa in molti documenti ufficiali dell'Unione Europea e dell'OCSE ([5],[12],[53]). Si vedrà più nel dettaglio perché se ne parli spesso in relazione alla matematica, cosa si intenda per tutor virtuale e quali potrebbero essere i vantaggi e gli svantaggi. Riguardo all'IA come strumento per eseguire i compiti, il dibattito internazionale è stato generato dal panico scatenato dal rilascio di ChatGPT. Verranno accennate la polemica e le iniziative prese per contrastare questa tecnologia. Si confronteranno poi diversi risolutori di compiti matematici, provando a capire se ci si trovi davanti a rischi reali, a possibilità o a entrambi.

### 2.2.1 IA come tutor

L'idea di creare un tutoraggio digitale personalizzato è condivisa da molti e spesso si pensa al tutoraggio in matematica. Ad esempio nel video di presentazione di ChatGPT-4 [40], oppure nell'articolo di Google [33], si immagina che, se gli studi proseguiranno nella direzione attuale, ogni studente potrà avere un tutor per la matematica accessibile e a basso costo. In uno studio dell'OCSE che parla proprio di tutoraggio basato su IA, due dei tre esempi citati sono dedicati alla matematica [53]. Un altro articolo su un software cinese di IA comincia con uno studente

che riporta la sua esperienza traumatica con la matematica: «“Pensavo che la matematica fosse terrificante” dice. “Ma attraverso il tutoraggio virtuale ho capito che non è così difficile. Mi ha aiutato a fare il primo passo lungo un percorso diverso.”» [25]. Sembra che l’applicazione dell’IA al tutoraggio in questa specifica materia sia più impellente che in altre. Si possono cercare alcune motivazioni:

- La matematica è intrinsecamente gerarchica, ovvero per procedere servono le basi e la comprensione di tutti i passaggi [48]. Nel video di presentazione di un software specifico di tutoraggio matematico (Teach to One [38]), si esprime il concetto dicendo che la matematica è cumulativa: quando si perde qualche nozione è più complicato rimettersi in pari rispetto ad altre materie. Le lacune rischiano di accumularsi rendendo il recupero ancora più difficile. Un software di IA può sembrare una buona soluzione nel sostegno allo studente perché, come vedremo sotto più nel dettaglio, può individuare molto bene le lacune del singolo studente e concentrarsi su quelle.
- La matematica viene da molti considerata difficile e ritenuta come una materia per pochi [48]. Dal pregiudizio si origina anche l’idea che è possibile e accettabile non capire niente di matematica e quindi, per quanto ci si sforzerà, non si otterranno risultati positivi. L’idea comune è che la matematica sia una materia a cui serve dedicare molto più tempo e in cui bisogna essere seguiti in maniera individuale. In Italia le uniche stime ufficiali nazionali relative ai debiti formativi risalgono al 2007, e riportavano la matematica come la materia con il maggior numero di debiti formativi, tanto che si parlò di emergenza formativa [36]. Le cose non sembrano essere cambiate negli ultimi anni e questo comporta più ripetizioni estive e maggiori spese per le famiglie [50]. Un tutor virtuale in matematica avrebbe quindi probabilmente un buon bacino di utenti e potrebbe limitare, se non azzerare, i costi.
- La matematica è la materia che evoca le emozioni negative più forti e queste emozioni possono essere addirittura bloccanti [11]. Inoltre spesso il rapporto difficile con la matematica è legato all’esperienza negativa con un insegnante, che viene in qualche modo ritenuto colpevole degli insuccessi [11]. Con un software si potrebbe ottenere la spersonalizzazione dell’insegnante e questo potrebbe aiutare a superare il blocco emotivo e il terrore di dare risposte errate, perché non ci si sente giudicati da un software.

In un articolo scritto nel 2019, si parla dell’utilizzo di un software di IA nell’istruzione in Cina [25]. In particolare si parla di Squirrel, un programma di tutoraggio il cui scopo è quello di far sì che gli studenti ottengano risultati migliori nei test scolastici annuali. In Cina, spiega l’articolo, alla fine di ogni anno scolastico si svolgono degli esami standard in cui è importante ottenere un buon risultato.

Questi esami sono un allenamento per il “gaokao”, un esame di ammissione all’università, che provano ogni anno dieci milioni di studenti e che genera un’ansia da test molto sentita nel paese. Squirrel è un software pensato per essere utilizzato fuori da scuola: nei centri appositi della società oppure da dove si preferisce, avendo la licenza. L’innovazione del software è la sua granularità, ovvero la suddivisione della materia di studio in quanti più possibili elementi o nodi concettuali. La matematica della scuola media, ad esempio, è suddivisa in oltre 10.000 elementi come ad esempio i numeri razionali, le proprietà di un triangolo e il teorema di Pitagora. A ciascun elemento vengono abbinati lezioni video, appunti, esempi e problemi pratici. Su Squirrel ogni studente inizia il percorso con un test diagnostico per individuare le lacune nel modo più preciso possibile e poi, mentre lo studente usa il programma, questo adegua il percorso tenendo conto dei suoi progressi.

Per validare l’efficienza del software, l’azienda ha tenuto degli studi sul miglioramento dei risultati nei test di matematica. Un articolo finanziato dall’azienda stessa riporta due studi organizzati in maniera simile in cui si confrontava il miglioramento degli studenti in un test di matematica dopo averli preparati con Squirrel oppure con un insegnante [54]. Gli allievi venivano sottoposti a un test iniziale (con carta e penna). Gli argomenti principali del test erano il teorema di Pitagora e le sue applicazioni, la risoluzione di problemi con triangoli e la risoluzione di espressioni. I test erano un ripasso standard di argomenti già affrontati a scuola. Dopo questo test, il gruppo veniva diviso in due (tramite l’uso di un programma così da avere una divisione casuale) e per tre giorni un gruppo veniva allenato dal software e l’altro gruppo da insegnanti. Il gruppo allenato da Squirrel aveva un computer a testa e riceveva lezioni individuali solo da software. L’altro gruppo veniva affidato a insegnanti esperti e dotati di certificazione d’eccellenza; le classi erano di venti-trenta allievi per insegnante nel primo studio e di tre allievi per insegnante nel secondo studio. Dopo tre giorni di ripasso programmato in maniera identica per i due gruppi, gli allievi si sottoponevano a un test simile a quello iniziale. I risultati di entrambi gli studi affermano che il software era in media molto più efficace nell’elevare i punteggi nei test di matematica rispetto agli insegnanti e al metodo tradizionale [54].

Si è voluto presentare uno specifico software come spunto per le riflessioni che seguono. Squirrel è un esempio di applicazione di IA per l’ “adaptive learning” o apprendimento adattivo, ovvero riesce molto bene ad individuare quello che lo studente sa o non sa e ad adattare gli argomenti che affronta in base a quanto rileva. In questo caso non si può parlare del tutto di apprendimento personalizzato perché il software non dà rilevanza a quello che lo studente vorrebbe sapere, cioè a quali sono i suoi interessi, né al suo stile di apprendimento [25]. L’apprendimento personalizzato è un concetto a più piani che tiene conto delle lacune degli studenti, dei loro interessi e del loro modo di imparare. Lo si può definire come un apprendimento su misura

basato su bisogni e punti di forza dei singoli studenti [53].

In un documento dell'OCSE sull'uso dell'IA nell'istruzione [53], si scrive che la più grande promessa in materia è la personalizzazione dell'apprendimento e dei materiali didattici. Le applicazioni IA dovrebbero poter identificare i materiali e gli approcci pedagogici adatti ai singoli studenti. Il documento riporta due esempi concreti legati alla matematica. Il primo consiste in un programma utilizzato in alcune scuole medie negli Stati Uniti nell'ambito di un progetto svolto nel 2012 e sviluppato in collaborazione con l'azienda Teach to One. Il programma fornito dall'azienda era più di un tutoraggio: veniva utilizzato durante le ore scolastiche e si integrava con le lezioni guidate dall'insegnante umano; inoltre proponeva momenti di lavoro in gruppo e anche tutoraggio personalizzato dopo scuola. Dal sito dell'azienda si legge che l'utilizzo del software in varie classi degli Stati Uniti è proseguito anche negli ultimi anni e che il suo utilizzo è vario: può essere utilizzato durante le lezioni, come un supporto agli insegnanti, ma può anche essere utilizzato esclusivamente in autonomia dagli studenti nel dopo scuola [38]. Il secondo esempio proposto è un software di un'azienda indiana chiamato BYJU-The Learning App, che funziona come tutor per matematica e scienze al di fuori della scuola. In merito si legge che oltre all'identificare le lacune, il programma è capace anche di personalizzare i contenuti.

Questi software di IA che svolgono il ruolo di tutor per gli studenti presentano vantaggi e svantaggi. La capacità di essere adattivi offre un'attenzione al singolo studente che un insegnante con più alunni non riesce ad offrire. Al di là dei test compiuti dall'azienda Squirrel [54], si può immaginare che un software di questo tipo possa essere molto efficace nell'individuare e colmare le singole lacune, più di quanto possa esserlo un insegnante con più studenti da seguire e con vincoli di tempo. Inoltre, se un tutor virtuale fosse davvero personalizzato, potrebbe suggerire link e materiale che interessano allo studente, avendo a disposizione una base dati vastissima e questo sarebbe un vantaggio rilevante. Un tutor virtuale sarebbe forse più da paragonare a un insegnante privato che impartisce lezioni singole e in questo senso l'IA potrebbe combattere le disparità sociali perché potrebbe avere un costo nullo o ridotto. Il tutor virtuale costerebbe meno delle lezioni private, potrebbe essere addirittura gratuito e accessibile da chiunque con un dispositivo e una connessione internet. Inoltre, come visto anche nel Capitolo 1 queste tipologie di software potrebbero essere un aiuto anche per gli studenti con bisogni educativi speciali. Nel documento dell'OCSE si legge che i sistemi di IA hanno già mostrato il loro potenziale nell'aiutare gli studenti con disabilità e che sono stati già progettati per assistere gli studenti con tutti i tipi di disabilità [53]. Potenzialmente un tutor virtuale pensato per persone con bisogni educativi speciali potrebbe essere un valido supporto anche fuori da scuola.

Tra gli svantaggi, nell'articolo sul software cinese si osserva che: «[...] si

potrebbe rafforzare ulteriormente una tendenza globale verso apprendimento e test standardizzati, lasciando la prossima generazione mal preparata ad adattarsi a un mondo del lavoro in rapida evoluzione.» [25]. Viene prospettato, con un determinato uso dell'IA, il rischio di appiattire la didattica all'apprendimento di contenuti standard e il successo dell'azione didattica al successo in un test standard. Si parla di apprendimento standard probabilmente perché, venendo a mancare l'insegnante con il suo personale bagaglio di esperienze e passioni, viene proposto a tutti gli studenti lo stesso contenuto (in particolare nei software solo adattivi). Inoltre molti software di IA sono pensati proprio per la preparazione ai test, come ad esempio Squirrel per la preparazione ai test di fine anno oppure un software di TAL Education Group avente come obiettivo la preparazione per l'esame di ammissione all'università in Cina [53]. Si può osservare che questo uso dell'IA non andrebbe a coltivare quelle capacità come pensiero critico, creatività, problem solving (per citarne alcune) che sono necessarie nel mondo in cui viviamo secondo la Commissione Europea, come visto nel Capitolo 1. Ciononostante va osservato che in questi casi l'IA sta venendo utilizzata semplicemente per rispondere a richieste che arrivano dal sistema scolastico.

Infine in un sistema di tutoraggio di questo tipo manca completamente il contatto umano, cosa che può essere vista come uno svantaggio, in particolare in un'era in cui i ragazzi sono già spesso socialmente isolati [29]. Un tutor privato umano può essere importante per uno studente per il supporto emotivo, la fiducia e la condivisione di esperienze, al di là dell'apprendimento della materia di studio. Potrebbe accadere che ciò che serve a uno studente è proprio questo genere di supporto, motivo per cui un software non potrà essere efficace come una persona in carne ed ossa. Con un tutor umano si può parlare di “mentoring”, concetto che supera il tutoraggio: «[...] il tutoraggio riguarda principalmente la trasmissione di contenuti e la spiegazione di concetti, mentre il “mentoring” è vantaggioso proprio perché i ragazzi beneficiano anche dell'accesso a un'ampia gamma di modelli e adulti di supporto. Il tutoraggio IA può aiutare con il primo, ma non con il secondo.» [29]. L'articolo citato sostiene che gli studenti che arrivano da situazioni economico-sociali più svantaggiate hanno particolarmente bisogno di questo tipo di supporto umano e conclude che dovrebbero essere le scuole a fornire agli studenti il tipo di tutoraggio di cui hanno bisogno, sia esso di persona o virtuale.

### 2.2.2 IA nello svolgimento dei compiti

Il rilascio di ChatGPT ha dato luogo a un intenso dibattito sull'IA come strumento utilizzato dagli studenti per svolgere i compiti al loro posto. Il chatbot di OpenAI è stato reso disponibile agli utenti alla fine di novembre 2022 e secondo alcune stime è il servizio internet che ha avuto la più rapida crescita mai registrata, raggiungendo i 100 milioni di utenti dopo solo due mesi dal lancio [26]. Si è parlato subito di

una applicazione che avrebbe scritto i temi al posto degli studenti e che avrebbe saputo rispondere ai loro test [27]; una applicazione da cui copiare senza sforzo sia nei compiti a casa che in quelli in classe. Questo ha generato panico: alcuni distretti scolastici degli Stati Uniti hanno immediatamente bloccato l'accesso al sito di OpenAI dalla rete delle scuole e poco dopo sono stati seguiti da moltissimi altri distretti scolastici di tutto il mondo anglofono [27].

Non si è parlato molto di ChatGPT come strumento per risolvere esercizi e problemi di matematica e questo probabilmente per i suoi limiti nella materia, come visto nel Paragrafo 2.1. Al momento ChatGPT è probabilmente in grado di scrivere un ottimo saggio su qualsiasi argomento, a patto che non sia troppo recente, ma non è uno strumento affidabile per risolvere esercizi e problemi di matematica. Andando oltre il caso ChatGPT, bisogna ricordare che già da anni il web è ricco di strumenti da cui copiare alcune tipologie di compiti di matematica. Per citarne alcuni, il sito YouMath contiene svariati strumenti (suddivisi per argomenti), Math Solver di Microsoft risolve online o tramite app ad esempio espressioni, integrali, limiti, Photomath è un'applicazione con oltre 100 milioni di download che permette, tramite una foto, di risolvere esercizi espressi principalmente in linguaggio matematico simbolico. Ci sono poi tantissimi altri strumenti, con il limite comune che spesso sono calcolatori specifici per determinati tipi di esercizi. Molto spesso oltre a fornire la soluzione mostrano passaggio per passaggio come ottenerla e questo è un grande aiuto per gli studenti (e per copiare). Se non si capisce qualche passaggio, non c'è solitamente la possibilità di interagire e chiedere spiegazioni. Inoltre, di norma questi strumenti hanno difficoltà o impossibilità nel risolvere esercizi o problemi che sono espressi in linguaggio naturale o che contengono immagini o tabelle.

Un altro risolutore online è Wolfram Alpha, un potente software basato sul linguaggio simbolico, capace di risolvere ad esempio derivate, integrali, equazioni differenziali e molto altro. Accetta input espressi in linguaggio matematico o naturale e funziona anche come motore computazionale di conoscenza, nel senso che possiede una base di conoscenza sempre aggiornata che copre molte aree, non solo quella matematica. Il software è disponibile solo in inglese e le spiegazioni passaggio per passaggio sono disponibili solo nella versione a pagamento. Sebbene riesca ad elaborare input espressi anche in linguaggio naturale, le sue capacità in merito sono limitate e la sua comprensione del mondo reale è scarsa [9]. A fine marzo 2023 è stato reso disponibile un plugin che connette ChatGPT-4 a Wolfram Alpha. Va sottolineato che questo plugin è disponibile solo con ChatGPT Plus, la versione a pagamento, cosa che probabilmente scoraggia la maggior parte degli studenti. In ogni caso, si può osservare che alcuni punti di debolezza di Wolfram Alpha sono i punti di forza di ChatGPT e viceversa, e questo rende l'idea di quanto interessante potrebbe essere lo strumento nato dall'unione dei due.

ChatGPT consulta Wolfram Alpha se si trova a dover compiere calcoli, se deve generare grafici di ogni tipo, se deve risolvere integrali, se ha bisogno di informazioni aggiornate e molto altro ancora [55]. Utilizzando ChatGPT Plus si riesce a vedere precisamente quando questo interroga Wolfram Alpha e per cosa lo interroga. I due software comunicano solitamente utilizzando il linguaggio naturale che poi Wolfram Alpha trasforma nel suo linguaggio simbolico, o anche utilizzando direttamente il linguaggio simbolico. Quest'ultimo è il modo più efficace di comunicazione e si legge che è solo questione di allenamento prima che i due software si parlino solo ed esclusivamente in linguaggio simbolico [55]. Probabilmente questo plugin potrebbe essere un valido aiuto per gli studenti per copiare i compiti, decisamente più di ChatGPT. Potrebbe essere forse anche un ottimo aiuto per comprendere meglio i compiti, visto che si può interrogare ChatGPT sui passaggi poco chiari e il chatbot può formulare e rispiegare lo stesso concetto in tantissimi modi diversi. Va evidenziato che questo plugin è una possibilità molto recente e non vi sono ancora studi in merito alle sue capacità e ai suoi limiti; però se ne può intuire il potenziale. Inoltre se si pensa che questa integrazione è stata sviluppata in soli due mesi e mezzo [55], si intuisce anche quanto le cose possano cambiare velocemente.

Per concludere, ad oggi probabilmente non esiste ancora un unico strumento da cui poter copiare tutti i compiti di matematica, per quanto la ricerca stia andando veloce. Ciononostante, la possibilità di copiare da altri strumenti non è un problema nuovo: le scuole sono sopravvissute alle calcolatrici, a Google, a Wikipedia e molto altro ancora [27]. C'è chi sostiene che se questi nuovi strumenti rendono troppo facile imbrogliare in un dato compito, allora gli insegnanti dovrebbero eliminare il compito piuttosto che vietare lo strumento [27]. Questo ragionamento può aver senso per alcuni compiti, non per tutti. Come esempio si può pensare al dibattito sull'uso della calcolatrice a scuola: per quanto sia uno strumento molto più potente dell'umano nel compiere operazioni, non si è smesso di assegnare compiti di aritmetica elementare, almeno nel primo ciclo scolastico. Nonostante l'esistenza di un tale strumento, si ritiene ancora rilevante l'obiettivo di far fare esperienza ai bambini con i numeri, le loro operazioni e le loro proprietà [42]. Un'altra opzione contemplata è quella di far svolgere i compiti a scuola, mettendo da parte l'illusione di poter controllare la "lealtà" degli studenti. Un'opzione di questo tipo comporterebbe un forte investimento nell'istruzione e avrebbe come beneficio ulteriore quello di combattere le disuguaglianze sociali [19]. Anche questa è un'opzione drastica, e rischia di ridurre gli insegnanti a controllori e gli alunni a soggetti incapaci di capire che lo scopo dei compiti è quello di apprendere e comprendere i concetti. Domingo Paola, sostiene che: «Ogni nuova tecnologia comporta, inevitabilmente, il rischio di dimenticare pratiche che avevano un'importanza fondamentale, ma, al tempo stesso, apre nuove frontiere, nuove possibilità. [...] L'esperienza insegna che non ha molto senso né successo vietare l'uso di una tecnologia: si tratta, invece, di

studiarne a fondo le possibili differenti utilizzazioni, individuando, per ciascuna di esse, possibili rischi e opportunità.» [44]. Se la si guarda da questa prospettiva la polemica si sgonfia e lascia spazio a un dibattito costruttivo su come adeguare la didattica considerando questi nuovi strumenti e su come utilizzarli a scuola in maniera proficua. Il paragrafo che segue va in questa direzione.

## 2.3 IA al servizio degli insegnanti e della didattica

In questo paragrafo si approfondiscono le possibilità che gli strumenti di IA offrono agli insegnanti e i loro possibili utilizzi nell'azione didattica, con particolare attenzione alla didattica della matematica.

Come prima idea, l'IA può essere usata per stimolare la creatività dei docenti e fornire nuove idee. Ad esempio, ChatGPT si può usare per fare brainstorming e cercare spunti su argomenti che magari non si conoscono molto bene o su cui si ha bisogno di ispirazione. Si consiglia di cominciare con un punto di partenza chiaro, una domanda principale, e formulare poi domande a ripetizione su tutto ciò che suscita interesse [47]. Per esempio per scrivere questo paragrafo di tesi la domanda di partenza è stata: «Quali strumenti di IA possono essere utili per un insegnante di matematica?». A questo prompt ChatGPT risponde con ben dodici punti (tra cui ad esempio “Piattaforme di Tutoraggio IA”, “Generazione di Esercizi”, “Accesso a Risorse Online”) senza fornire strumenti concreti. Si può porre allora una nuova domanda: «Saresti suggerirmi dei nomi concreti o link per questi strumenti?» ed ecco che ripropone l'elenco con i link degli strumenti per ogni punto. Conviene poi approfondire i singoli suggerimenti e link direttamente nel web, in quanto il chatbot non è aggiornato e si è visto quanto veloce si muove il settore. Legato alla didattica della matematica, un insegnante potrebbe usare il chatbot per raccogliere spunti storici da inserire nelle lezioni oppure per produrre problemi collegati al mondo reale. Il risultato non sarà perfetto: gli spunti storici andranno verificati ed approfonditi e i problemi raffinati, ma se ne può trarre ispirazione. Il vantaggio rispetto ad utilizzare un classico motore di ricerca come Google Search, è che ChatGPT sa essere più conciso e schematico di una ricerca nel web. Per esempio può fornire uno schema logico per punti e di base fa già una scrematura delle informazioni rilevanti. Questo può far risparmiare molto tempo e risultare comodo. È inoltre disponibile un motore di ricerca che si potrebbe descrivere come l'unione di ChatGPT e Google Search che si chiama Perplexity.AI<sup>4</sup>. Questo strumento è un motore di ricerca conversazionale che può anche agire come chatbot e quindi offrire schemi e risposte per punti come ChatGPT. I grandi vantaggi sono che è in grado di fornire risposte aggiornate in tempo reale perché esplora il web e risponde sempre con tutti i link alle fonti.

---

<sup>4</sup><https://www.perplexity.ai/>

Vi sono poi applicazioni che permettono di generare immagini da un prompt di testo e che possono essere uno strumento per la creatività di un insegnante: dal punto di vista dell'IA si parla di “computer vision generativa” e tra i software gratuiti più usati ci sono DALL-E<sup>5</sup> (sempre di OpenAI) e Image Creator<sup>6</sup> di Microsoft. Creare immagini diventa molto semplice e l'insegnante può scegliere di utilizzarle poi come gli è più congeniale in presentazioni o attività. Si possono assegnare compiti che prevedano anche la generazione di immagini e avvicinino gli studenti all'IA. Può essere divertente esplorare come il prompt modificato faccia cambiare l'immagine e come si possa specificare lo stile. Un'attività di questo tipo può anche essere un punto di partenza per una discussione su IA e diritti d'autore: chi è il creativo nella produzione di queste immagini? Chi digita i prompt, chi progetta l'applicazione o l'IA stessa? Un'altra discussione rilevante a partire da queste attività riguarda la tecnica del “deepfake”, ovvero la generazione di immagini false e realistiche [46]. Tra gli esempi più recenti vi sono le immagini di papa Francesco con un enorme piumino da trapper oppure l'arresto di Trump. Come ci si può difendere dalle notizie false e che effetto possono avere sugli utenti? Una discussione sul tema è di fatto un'educazione ai media che può essere utile per sradicare l'idea che ogni notizia su internet sia vera.

Vi sono anche svariate possibilità di creare video con l'intelligenza artificiale che possono essere testate senza sottoscrivere abbonamenti. Con Gen-2<sup>7</sup> di Runway si possono creare video a partire solo da prompt di testo, ma anche creare video a partire da immagini. Ad esempio si può caricare una propria foto e la si vedrà in movimento. Anche sul sito D-ID<sup>8</sup>, si può caricare un'immagine e creare un video facendola muovere e parlare, con un audio caricato. Le prove che si possono fare con le versioni gratuite bastano per spaventarsi davanti alle possibilità che aprono. Il potere della parola unito a quello dell'immagine può essere molto d'impatto e le potenzialità di questi strumenti unite alla facilità con cui vi si accede possono destare preoccupazioni. Il procedimento per creare questi video può essere un po' macchinoso per ora e richiedere l'utilizzo di più applicazioni, ma svariati tutorial online illustrano passo dopo passo il procedimento. L'utilizzo in classe va accompagnato da una discussione sui pericoli, come ad esempio la manipolazione dell'opinione pubblica tramite video fasulli in cui personaggi politici fanno dichiarazioni non reali, e sulle responsabilità di chi crea video falsi.

L'IA potrebbe essere utile ad un insegnante anche per rendere più interattive le ore in classe, in particolare aiutando gli studenti a essere creativi, a fare giochi di ruolo o a pensare in modo critico [27]. ChatGPT può svolgere il ruolo di avversario del dibattito, generare contro argomentazioni alle posizioni di uno studente e lo può

---

<sup>5</sup><https://openai.com/dall-e-2>

<sup>6</sup><https://www.bing.com/create>

<sup>7</sup><https://research.runwayml.com/gen2>

<sup>8</sup><https://www.d-id.com/>

aiutare a individuare punti deboli nel proprio pensiero. In questo genere di attività si mette alla prova anche ChatGPT e in matematica potrebbero emergere punti di debolezza del chatbot: ad esempio le cosiddette “allucinazioni” [9], che spesso non sono così facili da individuare. Un esempio di attività potrebbe essere di far svolgere a chatGPT un esercizio o una dimostrazione in classe, e poi chiedere a studenti e studentesse di correggerlo. Questo è un semplice punto di partenza per l’esercizio del pensiero critico nei confronti dell’IA e per aumentare la consapevolezza che non si sta parlando con degli oracoli.

Si può osservare un cambiamento in atto da anni nel ruolo dell’insegnante: le informazioni che prima venivano fornite solo in classe ora sono dappertutto dall’online ai chatbot. Di conseguenza cambia anche ciò che devono fare i docenti e cioè non solo mostrare agli studenti come reperire queste informazioni, ma anche spiegare di quali informazioni fidarsi e di quali no e come distinguere le fonti affidabili [27]. In questa direzione si può incoraggiare l’uso di chatGPT, Bing o Perplexity.AI per ricerche da far svolgere agli studenti a casa, magari nell’ambito di lezioni in cui si usa la modalità della flipped classroom. A casa si esplora la teoria con l’IA e si discute poi con gli studenti in classe anche di cosa hanno trovato utile e cosa fuorviante, chiedendo la verifica delle fonti. Secondo Domingo Paola [44], il rischio che strumenti di questo tipo inibiscano l’uso del pensiero critico si può superare facendoli utilizzare agli studenti proprio con il compito di verificare l’affidabilità delle informazioni che forniscono.

Vi sono software che permettono di conversare con personaggio storici, anche con matematici illustri. Tra questi di gratuito c’è Hello History<sup>9</sup> che tra i personaggi con cui consiglia di parlare propone Pitagora, Galileo Galilei e Alan Turing (per citarne alcuni). Un’attività di questo tipo potrebbe essere usata per approfondire in maniera divertente qualche personaggio storico; potrebbe essere un’attività propedeutica a ricerche o lezioni dedicate a matematici specifici. Chiaramente è opportuno che l’insegnante prima verifichi almeno sommariamente la qualità delle informazioni che produce il software.

Vi sono strumenti di IA che potrebbero facilitare in parte il lavoro degli insegnanti: per creare domande a partire da un testo vi è un software, Yippity<sup>10</sup>, che ha anche una versione gratuita con dei limiti di utilizzo, che permette di trasformare un testo copiato e incollato oppure una pagina web in un insieme di domande e risposte. Per testi in linguaggio naturale funziona piuttosto bene, per testi contenenti anche linguaggio matematico invece funziona fino ad un certo punto oppure non funziona affatto, quindi per ora non si può utilizzare. Per creare diagrammi e schemi a partire da un testo esiste Algor<sup>11</sup>. Fornito un testo, il software ne crea un riassunto

---

<sup>9</sup><https://www.hellohistory.ai/>

<sup>10</sup><https://yippity.io/>

<sup>11</sup><https://www.algoreducation.com/>

e una mappa concettuale che può essere modificata come si desidera. Anche in questo caso il software è efficace nel caso di testi in linguaggio naturale, ma non è ancora efficace nel caso di testi in linguaggio naturale e matematico. C'è inoltre un software online, ChartGPT<sup>12</sup>, gratuito (fino a un dato numero di input) che permette di creare grafici su qualsiasi cosa a partire da un prompt. Il tool si occupa di recuperare i dati e di scegliere la visualizzazione che ritiene più idonea. Ad esempio se gli si chiede di rappresentare le emozioni che gli studenti maggiormente collegano alla matematica, propone un elegante grafico ad anello (il classico grafico a torta con un buco al centro) dove compaiono in proporzione noia, inutilità, stress, frustrazione, confusione e ansia. Uno strumento di questo tipo potrebbe essere utilizzato per trovare veloci spunti per una discussione. Bisogna fare attenzione al fatto che le fonti sono citate attraverso dei link, che risalgono probabilmente al periodo di allenamento dell'IA. Nel caso specifico i link presenti non funzionavano più; cosa che si osservava andando a verificare le fonti.

Infine, per gli insegnanti di matematica l'IA potrebbe essere utilizzata nel rispondere al “justification problem”, ovvero la necessità di giustificare agli studenti l'insegnamento della matematica a scuola. Spesso nel rispondervi, si tende a mostrare l'utilità della matematica collegandola ad aspetti della vita quotidiana. L'IA può essere un esempio di utilizzo della matematica che sta avendo molto successo e ha già un largo uso nella vita di tutti. L'insegnante potrebbe sottolineare quei casi che gli studenti incontrano ogni giorno nella loro vita e come dietro l'intelligenza artificiale vi siano algebra e statistica. Vi sono esempi avvincenti dello sviluppo di questa tecnologia legati a strumenti oggi molto usati. Tra questi c'è il caso di Amazon, descritto ne *La scorciatoia* [8]: alla fine degli anni Novanta l'azienda cresceva e puntava a diventare il più grande negozio virtuale di libri sulla terra. Come faceva un utente a scegliere un libro? Si basava sulle recensioni di un gruppo di redattori di qualità, che leggevano anche quindici libri a settimana e scrivevano poi recensioni dettagliate. Presto i manager si accorsero che questa metodologia non poteva proseguire per via del ritmo con cui si espandeva il business (il fondatore Jeff Bezos aveva capito che la chiave del successo era crescere di dimensioni) e per via del fatto che si cominciavano a vendere anche altre tipologie di prodotti, quali film e musica. Così venne creato un team di automazione che fu incaricato di sviluppare e testare diversi algoritmi. La prima idea per consigliare agli utenti un libro fu quella di sottoporre loro dei questionari per conoscere i loro gusti e poter generare un profilo per ciascun cliente. Nel 1998 il team accantonò l'idea del questionario e sviluppò un nuovo algoritmo partendo direttamente dal database delle vendite. Due prodotti vennero considerati simili se tendevano ad essere acquistati dagli stessi utenti. Il nuovo sistema si basava su quello che gli utenti facevano. Il risultato fu che i clienti acquistavano più libri seguendo queste

---

<sup>12</sup><https://www.chartgpt.dev/>

raccomandazioni personalizzate rispetto alla lettura delle recensioni dei redattori e il gruppo di redattori fu licenziato poco dopo. L'insieme di algoritmi creati fu chiamato "Amabot"; il suo comportamento non era basato su regole esplicite bensì dipendeva solo da relazioni statistiche contenute nel database. L'intuizione dietro questo esempio fu che ci sono delle regolarità nel comportamento umano e l'output fu un sistema di raccomandazione che oggi è la forma di intelligenza artificiale con cui abbiamo più spesso a che fare. Vi sono molti esempi interessanti di questo tipo che possono catturare l'attenzione e sottolineare l'utilizzo della matematica tra cui: il riconoscimento del parlato, il supercomputer di IBM che batté a scacchi il campione del mondo nel 1997, il campo della traduzione automatica [8, 46]. Questi esempi sottolineano l'utilità della matematica, ma non vogliono essere una risposta esaustiva al "justification problem", per non ridurre la matematica ad uno strumento senza bellezza e valore culturale. Si ritiene comunque importante e utile mostrare esempi di utilizzo concreto della matematica vicini alle vite degli studenti e che sono parte della storia e delle più recenti rivoluzioni tecnologiche.



# Capitolo 3

## Applicazione dell'IA ad un'unità didattica

In questo capitolo si scenderà più nel concreto, andando ad approfondire e utilizzare quanto visto nei capitoli precedenti. Si è scelta un'unità didattica relativa alla statistica, pensata per il primo anno del secondo biennio del liceo scientifico. Nel primo paragrafo si giustificherà questa scelta, sottolineando quanto sia importante la statistica per i cittadini. Nel secondo paragrafo si metterà alla prova ChatGPT per testare le sue competenze sugli argomenti oggetto della progettazione e per testare fino a che punto potrebbe essere uno strumento utile per gli studenti. Infine, ci si concentrerà sull'azione didattica con alcune proposte concrete di attività relative ad argomenti di statistica, che toccano oppure che sono incentrate sul tema dell'IA.

### 3.1 Scelta dell'argomento e del target

Si è scelto di sviluppare la progettazione partendo da argomenti di statistica trattati a scuola. In un articolo relativo al pensiero probabilistico e statistico, si scrive che è ora di mettere da parte l'idea che la statistica sia l'argomento che si insegna a scuola dopo tutto il resto della matematica [49]. L'articolo spiega che il mondo in cui viviamo sta sfruttando sempre di più la statistica e la probabilità, cosa che si osserva anche solo dalla velocità con cui cresce la quantità di dati che il mondo genera [49]. Come menzionato nel Capitolo 1, c'è bisogno di nuove competenze nel mercato del lavoro e ad esempio l'articolo sottolinea quanto il lavoro del “data scientist” sia tra i più ricercati e remunerati. Al di là del mercato del lavoro, la statistica riveste un ruolo importante in tutti gli aspetti della vita di un cittadino ed è perciò rilevante per gli studenti. In un articolo che ha l'obiettivo di motivare l'insegnamento e l'apprendimento della statistica e della probabilità nelle scuole italiane, si scrive:

«L'attenzione all'individuo [...] componente di una famiglia, studente, lavoratore, cittadino coinvolto consapevolmente nella società fa emergere fra l'altro la sua esigenza di dover: interpretare dati statistici forniti sotto forma di tabelle, leggere grafici, comprendere il significato di rapporti, di numeri indici, interpretare i risultati di un'indagine campionaria, prevedere andamenti di fenomeni economici e finanziari e di dover prendere opportune decisioni in base ad informazioni quantitative e in situazione di incertezza. È necessario perciò che l'individuo abbia una formazione culturale che gli consenta di affrontare il diffondersi nella società di una maggiore attenzione agli aspetti quantitativi del sapere e della realtà economica e sociale, e quindi una formazione culturale che lo metta in grado di affrontare in modo critico la massa di informazioni quantitative che quotidianamente gli vengono fornite dai mezzi di comunicazione di massa della società dell'informazione.»[41, pp. 34–35]. Va osservato che negli anni sono aumentati gli argomenti di statistica che si trattano nelle scuole [2]. Nella scuola italiana, le disposizioni sull'istruzione secondaria di secondo grado, ovvero le Indicazioni nazionali per i licei e le Linee Guida per gli istituti tecnici e professionali, hanno generalizzato l'insegnamento della statistica a tutte le tipologie di scuole superiori [41].

Si è scelto di trattare un capitolo di statistica anche per il suo collegamento diretto con l'IA: la statistica può essere considerata come un elemento centrale dell'IA [21]. In [21] si analizza come la statistica contribuisca, nel settore dell'IA, alla raccolta dei dati e alla valutazione della loro qualità, allo sviluppo di metodi, alla valutazione dell'incertezza nei risultati. Si offre così un'opportunità di collegare gli argomenti trattati a scuola a qualcosa di concreto e largamente applicato anche nel mondo esterno alla scuola. Una vignetta divertente in merito è offerta da Datapizza in Figura 3.1, che è ad oggi la più grande community italiana di appassionati di Data Science e Intelligenza artificiale [3]. La vignetta mostra che dietro il machine learning non c'è altro che statistica, ma allo stesso tempo è meglio non farlo sapere, forse anche per lo scarso fascino che la statistica esercita sulla maggior parte delle persone. Infine Domingo Paola, riflettendo su opportunità didattiche e rischi di ChatGPT, sottolinea come siano ancora più rilevanti probabilità e statistica, visto l'emergere di questi nuovi strumenti di IA. Scrive: «[...] sicuramente penso si possa dire che sarebbe necessario prestare molta più attenzione di quanto non si faccia oggi nella prassi didattica, ai temi relativi alla raccolta, analisi ed elaborazione di dati e alla gestione di situazioni in condizioni di incertezza. In altri termini, una buona formazione di base di statistica e probabilità, che non si aggiunga agli argomenti più classici trattati nella prassi didattica, ma che si integri con essi, cercando un nuovo equilibrio, così come sarebbe da ricercare un equilibrio tra aspetti sintattici e semantici, che oggi è, spesso, inesistente.» [44].

Si è scelto come target il primo anno del secondo biennio del liceo scientifico. Nelle Indicazioni nazionali relative al target scelto, nella sezione “Dati e previsioni”



Figura 3.1: Vignetta sul legame tra machine learning e statistica.

si legge: «Lo studente, in ambiti via via più complessi, il cui studio sarà sviluppato il più possibile in collegamento con altre discipline e in cui i dati potranno essere raccolti direttamente dagli studenti, apprenderà a far uso delle distribuzioni doppie condizionate e marginali, dei concetti di deviazione standard, dipendenza, correlazione e regressione, e di campione. Studierà la probabilità condizionata e composta, la formula di Bayes e le sue applicazioni, nonché gli elementi di base del calcolo combinatorio. In relazione con le nuove conoscenze acquisite approfondirà il concetto di modello matematico.» [35, Allegato F]. Si è scelto questo target perché si desiderava pensare a delle attività da proporre a studenti con una minima dimestichezza in temi di statistica per poter sfruttare il collegamento con l'IA. Gli studenti dovrebbero aver trattato elementi di statistica nel primo biennio e quindi dovrebbero trovarsi già a loro agio con concetti come le basi della rappresentazione grafica di dati e gli indici di posizione centrale e di variabilità. In particolare, dalle Indicazioni Nazionali per il primo biennio del liceo scientifico si legge: «Lo studente sarà in grado di rappresentare e analizzare in diversi modi (anche utilizzando strumenti informatici) un insieme di dati, scegliendo le rappresentazioni più idonee. Saprà distinguere tra caratteri qualitativi, quantitativi discreti e quantitativi continui, operare con distribuzioni di frequenze e rappresentarle. Saranno studiate le definizioni e le proprietà dei valori medi e delle misure di variabilità, nonché l'uso strumenti di calcolo (calcolatrice, foglio di calcolo) per analizzare raccolte di dati e serie statistiche.» [35, Allegato F]. Inoltre, si riteneva interessante proporre un'attività di programmazione in un liceo scientifico. Imparare delle basi di coding è utile anche solo per farsi un'idea di cosa significhi “programmare” e permette di

comprendere meglio la società in cui viviamo. Il coding è un'attività che stimola diverse capacità quali il pensiero computazionale, la creatività, il problem solving e il lavoro di squadra [31]. Citando un TED Talk di Mitch Resnick del MIT Media Lab: «Quando si diventa fluenti a leggere e scrivere non lo si fa solamente per diventare uno scrittore di professione. Pochissime persone diventano scrittori di professione. Ma imparare a leggere e scrivere è utile a tutti. Ed è la stessa cosa per la programmazione. La maggior parte delle persone non diventerà un esperto di informatica o un programmatore, ma l'abilità di pensare in modo creativo, pensare schematicamente, lavorare collaborando con gli altri [...] sono cose che le persone possono usare, indipendentemente dal lavoro che fanno.» [45, 14:36].

Infine, si è scelto di far riferimento al libro di testo *Matematica blu 2.0* di Zanichelli [23], in quanto leader di mercato tra i testi di matematica per la scuola secondaria di secondo grado. Il libro di testo sarà la guida per comprendere quali argomenti vengono trattati e in che modo e quali sono le tipologie di esercizi e problemi proposti. Gli argomenti presenti nel capitolo del libro scelto sono, seguendo l'indice:

- “Dati statistici”: vengono fornite delle definizioni iniziali fondamentali, tra cui i concetti di statistica, di popolazione, di frequenza assoluta e relativa. Poi vengono presentate le serie e le seriazioni, ne vengono dati esempi e per ognuna viene indicata la miglior rappresentazione grafica. Tutti gli argomenti di questa sezione dovrebbero essere già stati affrontati nel primo biennio: li si trova trattati in maniera più approfondita nel capitolo dedicato del volume di Zanichelli per il primo biennio [24].
- “Indici di posizione e variabilità”: vengono dati definizioni ed esempi di media aritmetica, media ponderata, media geometrica, media armonica, media quadratica, mediana e moda. Poi tra gli indici di variabilità si presentano in maniera sintetica il campo di variazione, lo scarto semplice medio e la deviazione standard. Di tutti i concetti elencati, la media geometrica, armonica e quadratica sono gli unici concetti nuovi rispetto al volume per il primo biennio [24].
- “Distribuzione gaussiana”: vi è un'introduzione alla curva gaussiana con esempi e vengono presentate anche le percentuali dei dati che si trovano all'interno di una banda attorno alla media di ampiezza due, quattro o sei deviazioni standard. Vi è poi il concetto di campione, di statistica inferenziale e l'uso della gaussiana per passare dal particolare al generale.
- “Rapporti statistici”: si sottolinea l'importanza dei rapporti statistici per confrontare fenomeni diversi ma collegati da un qualche relazione logica. Si trattano con esempi i rapporti di derivazione, di densità, di coesistenza e di composizione.

- “Introduzione alla statistica bivariata”: la trattazione comincia con esempi di costruzioni di tabelle di distribuzioni marginali e congiunte. Si vedono poi l’indipendenza e la dipendenza di due caratteri  $X$  e  $Y$ . Infine vengono proposti il concetto di contingenza e l’indice  $\chi^2$ .
- “Regressione e correlazione”: viene presentato il metodo dei minimi quadrati e il calcolo della retta di regressione. Poi segue il concetto di covarianza e il coefficiente di Bravais-Pearson per misurare il grado di dipendenza tra due variabili.

## 3.2 ChatGPT al servizio degli studenti

Si proverà a testare in questo paragrafo se uno strumento di IA può essere d’aiuto per lo studente nella comprensione dei concetti del capitolo scelto e successivamente si discuterà anche se il chatbot può essere utilizzato per copiare i compiti. Si è scelto di testare ChatGPT Plus, con il plugin di Wolfram Alpha. Si è scelto ChatGPT perché è il software più usato, e si è scelta la versione a pagamento perché si è ritenuto opportuno mettere alla prova lo strumento più performante essendo un settore in costante evoluzione.

### 3.2.1 IA come tutor

Si vanno ora a individuare i nodi concettuali e quelle che possono essere le difficoltà di comprensione del capitolo scelto. Nel fare ciò si seguirà passo dopo passo il libro di testo [23], mettendosi nei panni di uno studente che studia dal libro. Chiaramente alcuni punti, se integrati con le spiegazioni dell’insegnante, potrebbero non risultare complessi. Come si vedrà, lo studente deve aver chiaro cosa non ha capito o cosa vorrebbe approfondire; i test fatti sono stati svolti immaginando uno studente consapevole che interroga il chatbot su alcuni punti.

La prima sezione, “Dati statistici”, è piuttosto discorsiva e contiene concetti di base. Tra le prime nozioni proposte vi sono quelle di frequenza assoluta, relativa e cumulata. Di ciascuna viene data una definizione che si vede in Figura 3.2 ma non un esempio, che viene invece proposto un paio di pagine più avanti. Si può immaginare che il concetto di frequenza cumulata possa non essere immediato, senza un esempio davanti, sebbene dovrebbe essere già stato trattato nel primo biennio. Chiedendo a ChatGPT: «Mi potresti spiegare i concetti di frequenza assoluta, relativa e cumulata?» si ottiene una risposta esaustiva, che si può osservare in Figura 3.1, contenente le definizioni e per ciascuna un esempio pratico di calcolo. ChatGPT non effettua chiamate a Wolfram Alpha per rispondere al quesito. Viene tra l’altro utilizzato l’esempio dei voti a scuola, che è un esempio classico che

compare anche nel testo Zanichelli [23]. Viene poi proposta nel libro di testo la differenziazione tra serie e seriazioni<sup>1</sup> partendo dalla rappresentazione tabellare e consigliando per ogni caso quale rappresentazione grafica usare per i dati in tabella. Ad esempio: per le serie statistiche si consigliano ortogrammi o areogrammi, per le serie storiche il diagramma cartesiano e per le seriazioni statistiche, nel caso in cui i dati siano raggruppati in classi, si consiglia l'istogramma. Viene scritto: «Per costruire un istogramma si disegnano, su un riferimento cartesiano, tanti rettangoli adiacenti quante sono le classi. Ogni rettangolo ha la base proporzionale all'ampiezza della classe e l'area proporzionale alla corrispondente frequenza. Se le classi hanno tutte la stessa ampiezza, allora i rettangoli hanno altezza proporzionale alla frequenza.» [23,  $\beta$ 4]. Il fatto che sia l'area, e non l'altezza, a dover essere proporzionale alla frequenza, non è immediato. Così come non è magari immediato che le altezze dei rettangoli si ottengano dividendo ogni frequenza (che, in questo caso, corrisponde all'area) per l'ampiezza della classe. Il libro di testo non propone esempi e di fatto gli esercizi non richiedono mai di costruire istogrammi con classi di diversa ampiezza. Provando a chiarirsi questo concetto con ChatGPT, si coglie l'importanza della formulazione del prompt, cioè di quanto sia importante avere ben chiaro cosa si vuole sapere. Chiedendo: «Mi sapresti fare un esempio di istogramma dove le classi hanno una diversa ampiezza?», ChatGPT grazie a Wolfram Alpha propone un grafico colorato dove effettivamente le classi hanno diversa ampiezza senza spiegare altro. Chiedendo poi: «Mi sapresti fare un esempio di istogramma dove le classi hanno una diversa ampiezza e spiegare come fai a disegnarlo?» il software spiega letteralmente come ha fatto a generarlo, ovvero prima ha generato dei numeri casuali tra 0 e 100 grazie ad una determinata funzione, poi ha diviso in classi arbitrarie, poi ha utilizzato un'altra funzione per creare l'istogramma e infine spiega anche come ha fatto ad assegnare colori pastello. Il prompt chiaramente non è stato efficace. Chiedendo infine: «In un istogramma dove le classi hanno una diversa ampiezza come si calcola l'altezza di ciascun rettangolo?» si ottiene una risposta chiara ed esaustiva con esempio correlato.

La seconda sezione, “Indici di posizione e variabilità”, propone diverse medie dandone formule e definizioni chiare e almeno un esempio per tipo. Sfugge forse il quadro generale e non ci si sofferma particolarmente sul quando ha senso usare una certa media piuttosto che un'altra. La maggior parte degli esercizi sono divisi per tipologia di media, quindi ad esempio vi sono prima solo esercizi sulla media aritmetica, poi seguono quelli sulla media ponderata e così via. Ci sono però anche una decina di esercizi di riepilogo in cui lo studente deve scegliere in autonomia quale media utilizzare. Nel presentare la media ponderata, il libro propone un

---

<sup>1</sup>Una serie statistica è una tabella che riporta le modalità di un carattere qualitativo e le relative frequenze, mentre una seriazione statistica è una tabella che riporta le modalità di un carattere quantitativo e le relative frequenze [23].

3. **Frequenza assoluta di una modalità:** è il numero di volte in cui si presenta la modalità in una distribuzione di dati.
4. **Frequenza relativa di una modalità:** è il rapporto tra la frequenza assoluta della modalità e il numero totale delle unità statistiche.
5. **Frequenza cumulata di una modalità:** è la somma della frequenza assoluta della modalità con tutte le frequenze assolute precedenti. Per calcolare la frequenza cumulata, le modalità devono essere ordinate in modo crescente.

Figura 3.2: Le definizioni proposte dal libro di testo [23,  $\beta$ 2].

Tabella 3.1: Test svolti dall'autore su ChatGPT Plus, Agosto 05, 2023.

---

[Utente] Mi potresti spiegare i concetti di frequenza assoluta, relativa e cumulata?

[ChatGPT] Certamente! Ecco una spiegazione dei tre concetti:

1. **Frequenza Assoluta:** La frequenza assoluta di un valore in un insieme di dati è il numero di volte in cui quel valore appare nell'insieme. Ad esempio, se stiamo considerando i voti di una classe e 5 studenti hanno preso un 6, la frequenza assoluta del voto 6 è 5.
2. **Frequenza Relativa:** La frequenza relativa di un valore è la frequenza assoluta di quel valore divisa per il numero totale di osservazioni. È spesso espressa come una percentuale. Ad esempio, se in una classe di 20 studenti, 5 hanno preso un 6, la frequenza relativa del voto 6 è  $(\frac{5}{20} = 0,25)$  o 25%.
3. **Frequenza Cumulata:** La frequenza cumulata è la somma delle frequenze assolute di tutti i valori fino a un certo punto. Ad esempio, se stiamo considerando i voti in ordine crescente e abbiamo:
  - 3 studenti con voto 5
  - 5 studenti con voto 6
  - 4 studenti con voto 7

La frequenza cumulata per il voto 6 sarebbe  $(3 + 5 = 8)$ , perché ci sono 8 studenti che hanno preso un voto di 6 o meno.

---

esempio relativo a delle prove scolastiche che hanno specifici pesi. Si può provare a cercare un altro esempio con ChatGPT e si ottiene come prima risposta lo stesso identico esempio. Chiedendo un altro ancora, se ne ottiene uno relativo al calcolo del rendimento di un portafoglio di investimenti e infine specificando che si desidera un esempio adatto ad un adolescente si riceve il calcolo della media ponderata dei punteggi di un videogioco che ha diverse missioni e livelli. Viene poi presentata la media geometrica, indicando che si usa per descrivere il variare di un fenomeno nel tempo per cui si desidera che resti costante il prodotto dei valori considerati. L'esempio proposto parte da una tabella relativa alla produzione di grano ottenuta da un'azienda agricola in cinque anni successivi. La tabella ha tre colonne: nella prima vi è l'anno di riferimento, nella seconda la produzione in tonnellate e nella terza la variazione percentuale della produzione rispetto all'anno precedente. Ad esempio se nel 2012 si erano prodotte 98 tonnellate di grano e nel 2013 125 tonnellate, l'incremento è stato di 27 tonnellate, ovvero una variazione percentuale del +27,6%. Si vuole determinare la percentuale media di variazione. Dato l'utilizzo descritto e l'esempio, forse si fatica a cogliere quando sia opportuno utilizzare la media geometrica. Chiedendo a ChatGPT si ottiene un elenco di sei contesti in cui ha senso l'utilizzo della media geometrica (tra cui ad esempio la crescita proporzionale come per gli interessi composti oppure media di percentuali); l'elenco risulta forse difficile per uno studente e probabilmente il modo migliore per comprendere quando utilizzare una media piuttosto che un'altra è affrontare problemi dedicati. Chiedendo a ChatGPT un esempio di uso della media geometrica adatto ad adolescenti, viene proposta la valutazione delle prestazioni di computer diversi, per cui si hanno due specifiche principali: la velocità del processore (in GHz) e la capacità di memoria RAM (in GB). Il chatbot spiega che non si può semplicemente fare una media aritmetica di questi due numeri, poiché rappresentano cose diverse e hanno scale diverse. Allora suggerisce di utilizzare la media geometrica per tener conto di entrambe le metriche in modo equilibrato. Nel libro di testo infine vengono definite mediana e moda, anche se non ci si sofferma affatto sulle caratteristiche e sull'utilità della mediana (rispetto ad esempio alla media), cosa che non è presente nemmeno nel libro di testo per il biennio [24].

La terza sezione è sulla "Distribuzione Gaussiana" e non scende particolarmente in profondità nell'argomento. Occupa tre facciate e più che altro aiuta a prendere familiarità con la curva di Gauss, la sua media e la sua varianza. Ci si sofferma sul fatto che, detti  $M$  il valore medio e  $\sigma$  la deviazione standard, il 68,27% dei valori è compreso tra  $M - \sigma$  e  $M + \sigma$ , il 95,45% tra  $M - 2\sigma$  e  $M + 2\sigma$ , il 99,74% tra  $M - 3\sigma$  e  $M + 3\sigma$ . Questo concetto è ben illustrato con un grafico nel libro di testo. Chiedendo la rappresentazione grafica di questo concetto a ChatGPT si ottengono risultati deludenti: tramite Wolfram Alpha, il chatbot vorrebbe disegnare una gaussiana e colorare una parte di area sottostante (ad esempio l'area che rappresenta il 68,27%

dei dati), ma di fatto non riesce. Disegna delle gaussiane senza evidenziare alcuna area sottostante, eppure fa riferimento all'area colorata come se esistesse.

La quarta sezione, "Rapporti statistici", sottolinea l'importanza dei rapporti statistici e quanto un confronto tra rapporti possa avere più senso di un confronto tra dati "assoluti". Si trattano con esempi i rapporti di derivazione, di densità, di coesistenza e di composizione. Si introducono poi anche i numeri indice a base fissa e a base mobile. L'algoritmo di calcolo di questi numeri viene ben esplicitato, il loro significato un po' meno: si scrive solo che «Permettono di comprendere le variazioni relative nel tempo o nello spazio di un fenomeno.» [23, β16]. Ponendo a ChatGPT la domanda: «A cosa servono i numeri indice a base fissa e a base mobile?» si ottiene una risposta esaustiva e schematica. La risposta viene divisa tra i numeri indice a base fissa e quelli a base mobile e per ognuno viene data l'idea di base, viene spiegato cosa misurano (ad esempio la variazione di una variabile rispetto a un punto di riferimento specifico o a un periodo base), si fornisce un esempio, un vantaggio e uno svantaggio. Per i numeri indice a base mobile, ad esempio, indica come vantaggio il fatto che siano più sensibili ai cambiamenti recenti e riflettano meglio la situazione attuale e come svantaggio il fatto che possano essere più difficili da interpretare poiché la base cambia costantemente. Per quanto schematica la risposta allarga un po' l'orizzonte rispetto al libro di testo, e anziché concentrarsi solo sul calcolo prova a dare una visione più globale.

La quinta sezione, "Introduzione alla statistica bivariata", fa uso esclusivamente di tabelle. Prima presenta in maniera molto chiara la tabella di una distribuzione congiunta, poi le relative tabelle delle distribuzioni marginali e si concentra sulla lettura di queste tabelle. Nel presentare i concetti di indipendenza e dipendenza, si focalizza su come appaiono le frequenze congiunte in tabella, per poi fornire come strumento per la valutazione dell'indipendenza l'indice  $\chi^2$ . Pare mancare l'idea intuitiva di base, ovvero che si sta cercando una dipendenza di un carattere dall'altro, che si traduce in termini matematici con il cercare una funzione  $f$  tale per cui  $Y = f(X)$  o comunque una funzione che descriva la relazione tra i dati osservati in modo approssimativo ma significativo. Per rendere intuitivamente l'idea si sarebbero potuti utilizzare i diagrammi a dispersione partendo da esempi concreti, per suggerire l'esistenza o meno di una relazione tra i caratteri. Uno studente che non ha colto il significato potrebbe interrogare ChatGPT chiedendo: «Cosa significa che due caratteri X e Y sono indipendenti? E dipendenti?». ChatGPT risponde facendo riferimento alla relazione probabilistica, cosa che manda fuori strada nel contesto della statistica bivariata. La domanda da porre è: «Cosa significa che due caratteri X e Y sono indipendenti in statistica bivariata? E dipendenti?». Si osservi che ci vuole una certa sensibilità anche per formulare le domande giuste. ChatGPT fornisce una buona risposta per punti, come si può vedere in Tabella 3.2. Se si chiede di spiegare il concetto di indipendenza in statistica bivariata con un

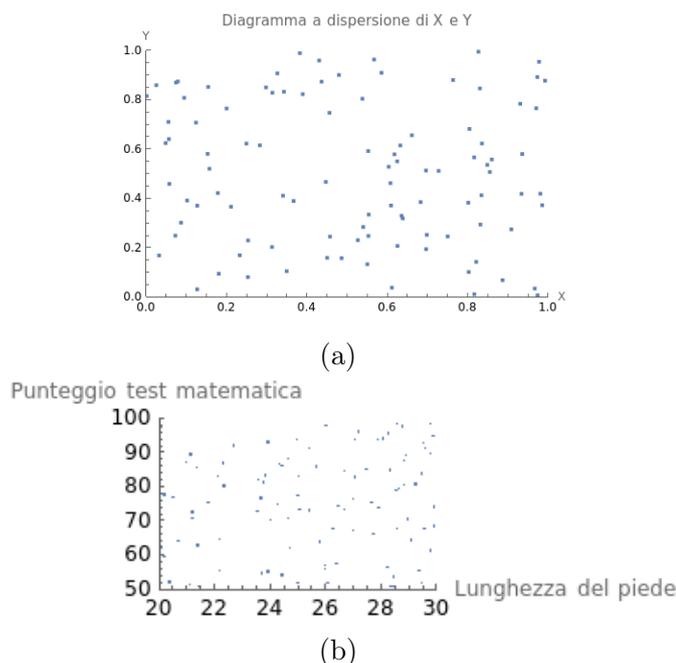


Figura 3.3: Diagrammi a dispersione generati da ChatGPT.

esempio e un diagramma a dispersione, il chatbot immagina un esperimento su 100 persone in cui la variabile  $X$  è la lunghezza del piede e la variabile  $Y$  il punteggio in un test di matematica. Dai dati, dice, non si trova alcuna tendenza chiara tra la lunghezza del piede e il punteggio del test di matematica: in altre parole, una persona con un piede più lungo non ha necessariamente un punteggio più alto o più basso nel test di matematica rispetto a una persona con un piede più corto. Da qui conclude che le due variabili,  $X$  e  $Y$ , sono indipendenti l'una dall'altra, almeno sulla base dei dati raccolti e propone il primo diagramma a dispersione in Figura 3.3a. Il diagramma rende il concetto ma non è collegato all'esempio, come ci si aspetterebbe. Chiedendo un diagramma relativo all'esempio si ottiene il secondo grafico in Figura 3.3b.

La sesta sezione, “Regressione e correlazione”, presenta il metodo dei minimi quadrati e il calcolo della retta di regressione. Prima presenta la retta di regressione di  $Y$  su  $X$  e poi anche quella di  $X$  su  $Y$ , ciascuna con le sue formule e approfondisce il significato dell'angolo che si forma tra le due rette. Definita poi la covarianza  $\sigma_{XY}$  e dopo averne dato un esempio, ne analizza il significato nei casi in cui sia maggiore, minore o uguale a zero. Lo tratta anche grazie ai diagrammi a dispersione, in cui rappresenta anche le rette  $x = \bar{x}$  e  $y = \bar{y}$ , dove  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  sono i valori medi delle variabili  $X$  e  $Y$ ; si veda un esempio in Figura 3.4. Introduce poi il coefficiente di Bravais-Pearson, che indica con la lettera  $r$ , mostrando la formula e andando a

Tabella 3.2: Test svolti dall'autore su ChatGPT Plus, Agosto 29, 2023.

---

[Utente] Cosa significa che sue caratteri  $X$  e  $Y$  sono indipendenti in statistica bivariata? E dipendenti?

[ChatGPT] Nella statistica bivariata, l'indipendenza e la dipendenza tra due caratteri o variabili,  $X$  e  $Y$ , si riferiscono alla loro relazione lineare o alla loro associazione.

### 1. Indipendenti:

- Se  $X$  e  $Y$  sono indipendenti, significa che non c'è una relazione lineare tra di loro. In termini pratici, se tracciassimo un diagramma a dispersione (scatter plot) di  $X$  contro  $Y$ , non vedremmo un modello chiaro o una tendenza nella disposizione dei punti.
- Una misura comune per valutare la forza e la direzione della relazione lineare tra due variabili è il coefficiente di correlazione di Pearson,  $r$ . Se  $r = 0$ , indica che non c'è correlazione lineare tra  $X$  e  $Y$ , suggerendo che potrebbero essere indipendenti (anche se l'assenza di correlazione lineare non garantisce l'indipendenza completa).

### 2. Dipendenti:

- Se  $X$  e  $Y$  sono dipendenti, significa che c'è una certa relazione o associazione tra di loro. Questa relazione potrebbe essere lineare o non lineare.
- Nel contesto della correlazione lineare, se  $r$  è diverso da 0, indica una certa correlazione tra  $X$  e  $Y$ . Un valore di  $r$  vicino a 1 indica una forte correlazione positiva, mentre un valore vicino a -1 indica una forte correlazione negativa.
- Oltre alla correlazione, ci sono altre misure e test (come il test del chi-quadrato per le tabelle di contingenza) che possono essere utilizzati per determinare se esiste una relazione o associazione tra due variabili.

È importante notare che la correlazione (o qualsiasi altra misura di associazione) non implica causalità. Anche se due variabili sono fortemente correlate, ciò non significa necessariamente che una causi l'altra. Potrebbero esserci variabili nascoste o altri fattori che influenzano entrambe le variabili.

---

**In generale**, è vero quanto segue.

- Se  $\sigma_{XY} > 0$ , nelle regioni  $\alpha$  e  $\delta$  in cui il diagramma di dispersione è diviso dalle rette  $x = \bar{x}$  e  $y = \bar{y}$ , abbiamo più punti che nelle altre due regioni  $\beta$  e  $\gamma$ . Questo significa che all'aumentare di una variabile, aumenta in media anche l'altra.

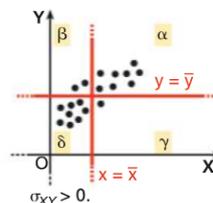


Figura 3.4: Trattazione del libro di testo relativa al caso  $\sigma_{XY} > 0$  [23,  $\beta$ 27].

valutare poi quattro casi ( $r = -1$ ,  $r = 1$ ,  $r = 0$ ,  $0 < r < 1$  oppure  $-1 < r < 0$ ) utilizzando sempre i grafici a dispersione con le due rette di regressione, cioè quella di  $Y$  su  $X$  e di  $X$  su  $Y$ . La trattazione diventa un po' complessa.

Immaginando uno studente che pone a ChatGPT una domanda base sull'argomento: «Come calcolo la retta di regressione di  $Y$  su  $X$ ?», dopo un preambolo si ottiene l'algoritmo in Tabella 3.3. L'algoritmo è corretto, ma non così dettagliato: ad esempio al punto 2. sarebbe opportuno calcolare anche la covarianza per poi ottenere il coefficiente di correlazione nel punto successivo. Oltretutto l'utilizzo delle lettere  $a$  e  $b$  rischia di generare confusione nello studente dato che è completamente diverso da quanto si trova nel libro di testo. L'algoritmo infine, è sicuramente più complesso di quello offerto dal libro di testo ed esposto chiaramente anche nella sezione di sintesi (che è essenzialmente un formulario di due facciate alla fine del capitolo): «La retta di regressione di  $Y$  su  $X$  ha equazione  $y - \bar{y} = a(x - \bar{x})$ , con

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

dove  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  sono i valori medi rispettivamente di  $x$  e  $y$ .» [23,  $\beta$ 31].

Per concludere, con questi brevi test si voleva misurare quanto effettivamente ChatGPT potesse essere utile come tutor. Lo strumento può essere utilizzato, ma bisogna avere molto chiaro cosa si desidera sapere e vedere; per questo motivo probabilmente non è ancora adatto per gli studenti. Funziona bene nel restituire in generale risposte schematiche per punti, algoritmi e formule. Va osservato però che le formule necessarie sono già ben evidenziate nella sintesi del capitolo del libro (che di base contiene solo formule) e che le formule e gli algoritmi che suggerisce potrebbero essere fuorvianti per lo studente. Di positivo si osserva che spesso può aiutare a dare una visione più globale e di ampio respiro di quanto faccia il libro di testo, in cui la trattazione è serrata e molto focalizzata sulle formule. Ciononostante, per uno studente resta per ora più semplice e chiaro consultare il libro di testo, magari integrando con altri strumenti come possono essere i video per argomento che si trovano su YouTube. Sicuramente ChatGPT può essere utilizzato per inventare esempi collegati a temi di interesse per l'utente, e si può dire che nel creare esempi lo strumento si è rivelato utile e funzionale. Non è stato testato,

Tabella 3.3: Test svolti dall'autore su ChatGPT Plus, Agosto 30, 2023.

---

[Utente] Come calcolo la retta di regressione di  $Y$  su  $X$ ?

[ChatGPT] La retta di regressione di  $Y$  su  $X$  rappresenta come la variabile dipendente  $Y$  varia in funzione della variabile indipendente  $X$ . È la retta che meglio si adatta a un insieme di dati in un grafico di dispersione, minimizzando la somma dei quadrati delle differenze verticali tra i punti dati e la retta.

L'equazione della retta di regressione di  $Y$  su  $X$  ha la forma:  $Y = a + bX$  [...]  
Ecco i passi dettagliati per calcolare la retta di regressione di  $X$  su  $Y$ :

1. Calcola le medie degli insiemi di dati  $X$  e  $Y$ , designate rispettivamente come  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$ .
2. Calcola le deviazioni standard  $\sigma_X$  e  $\sigma_Y$  di  $X$  e  $Y$ .
3. Calcola il coefficiente di correlazione  $r$  tra  $X$  e  $Y$ .
4. Utilizzando i valori di  $r$ ,  $\sigma_X$  e  $\sigma_Y$  calcola  $b$ .
5. Utilizzando  $b$ ,  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$ , calcola  $a$ .
6. Ora avrai l'equazione della retta di regressione nella forma  $Y = a + bX$

Ricorda che questa retta rappresenta una previsione di  $Y$  in base ai valori di  $X$ .

---

Tabella 3.4: Risultati di ChatGPT nello svolgimento degli esercizi del libro di testo.

Tipologia	Quesiti Testati	Risposte corrette	Con Wolfram Alpha
Esercizi	36%	81%	79%
Verifica competenze	60%	78%	22%

ma potenzialmente lo studente potrebbe anche usare il chatbot per approfondire cose che lo interessano magari solo in parte collegate alla statistica, staccandosi dal libro di testo.

### 3.2.2 IA nello svolgimento dei compiti

In questa sezione si approfondiranno i test effettuati su ChatGPT come strumento per fare i compiti al posto dello studente. Delle esercitazioni proposte nel libro di riferimento sono state svolte quelle contenenti solo testo e sono state escluse quelle con immagini e tabelle, dati gli attuali limiti di ChatGPT. Il software è stato messo alla prova sui quesiti delle sezioni “Esercizi” e “Verifica delle competenze”. Il totale dei quesiti presenti in queste due sezioni è pari a 147 (132 esercizi e 15 test di verifica delle competenze). Si è potuto interrogare ChatGPT solamente su 57 domande totali, ovvero sul 39% dei quesiti. Delle restanti 90 esercitazioni, 7 contenevano grafici nel testo e tutte le altre contenevano almeno una tabella. L'utilizzo di ChatGPT per risolvere i quesiti di testo risulta molto semplice avendo l'accesso alla versione online del libro: non c'è nemmeno bisogno di leggere e riscrivere il testo di un esercizio, basta copiarlo e incollarlo dalla versione online del libro. L'obiettivo di questo test non era tanto mettere alla prova il software, bensì verificare quanto possa effettivamente aiutare uno studente nel copiare, ma anche nel comprendere gli esercizi. Le risposte fornite dal software sono state considerate esatte se il risultato numerico era corretto. Nel caso di esercizi con più domande, se anche solo una di queste non era corretta, l'esercizio veniva considerato errato. Con queste premesse, si osserva che ChatGPT ha risposto correttamente all' 81% dei quesiti della sezione “Esercizi” che gli sono stati sottoposti e al 78% di quelli della sezione “Verifica delle competenze”, come si può osservare nella Tabella 3.4.

Si può affermare che ChatGPT ha ottenuto un risultato positivo. Gli esercizi della prima sezione testati erano piuttosto standard e spesso avevano l'obiettivo di prendere confidenza con la semplice applicazione delle formule. Nel totale degli esercizi e problemi testati ve n'erano solo cinque indicati come di maggiore difficoltà: ChatGPT ne ha risolti brillantemente quattro su cinque, mentre ha sbagliato un problema dai calcoli semplici, ma che aveva una formulazione e un contesto non standard, e necessitava di un minimo di rappresentazione mentale della situazione. Nel complesso si può affermare che nei quesiti testati agli studenti non veniva

richiesta particolare creatività o capacità di problem solving. Tra le due sezioni dei quesiti, “Esercizi” e “Verifica delle competenze”, varia molto la percentuale di chiamate a Wolfram Alpha. Questo è dovuto al fatto che nella sezione di “Verifica delle competenze” veniva principalmente chiesto di ragionare sulla teoria, senza calcoli. Nella prima sezione invece era solitamente richiesto almeno un calcolo, che veniva effettuato con Wolfram Alpha. Se in seguito ad una risposta in cui si era usato il plugin si chiedeva al chatbot di spiegare il ragionamento seguito, il software non chiamava più Wolfram Alpha: questo mostra come Wolfram Alpha sia utilizzato più che altro come calcolatrice o come produttore di grafici per portare a compimento il “ragionamento” di ChatGPT.

Come già sottolineato, l’uso disfunzionale del software per copiare è ovviamente inutile per l’apprendimento; ciò non toglie che nella maggior parte dei casi analizzati funzioni. Si immagina però uno studente diligente, che non riuscendo a svolgere un compito chieda aiuto al chatbot. Si osservi che nel caso in cui lo studente non capisse gli esercizi, ChatGPT (se ha svolto correttamente l’esercizio) è un valido aiuto per chiedere spiegazioni. Se ne possono chiedere quante se ne vuole, su ogni passaggio, e il chatbot spiega e riformula senza difficoltà. Viene riportato un solo esempio, che è lo svolgimento di un problema indicato con l’etichetta “EUREKA!”, che evidenzia problemi sfidanti in cui mettersi alla prova. Questo problema è l’unico di tutto il capitolo con questa denominazione ed è tratto dalle Olimpiadi di Matematica, Gara di 2° livello del 2007. Si può osservare la chat in Tabella 3.5.

In conclusione si evidenziano i seguenti punti:

- ChatGPT pare essere preparato sulle definizioni e il loro significato. Questo è il motivo per cui riesce ad affrontare ben il 60% dei quesiti proposti nella sezione “Verifica delle competenze” con una percentuale di successo del 78%. Se si considerasse il numero di risposte esatte sul totale degli esercizi della sezione, si otterrebbe una percentuale di successo del 47%; mentre per la sezione “Esercizi” questa percentuale scenderebbe al 30%. Non c’è mai stato bisogno di spiegare il significato di un termine e si è testato con successo anche la sua capacità di capire da una definizione di che soggetto matematico si sta parlando, ad esempio con  $r$  il coefficiente di correlazione e con  $\chi^2$ . Questo non significa che sia un buon tutor per uno studente, perché non conosce le competenze di chi sta dietro lo schermo.
- ChatGPT solitamente risponde passaggio per passaggio, o comunque se richiesto, esplicita ogni passaggio. Questo è un grande vantaggio per chi deve copiare un esercizio ma anche per chi vuole capirlo.
- Il chatbot può utilizzare conoscenze che uno studente non possiede. Nello svolgere gli esercizi del capitolo scelto questo in realtà è stato evidenziato

Tabella 3.5: Test svolti dall'autore su ChatGPT Plus, Agosto 29, 2023.

---

[Utente] Uno studente universitario ha superato un certo numero di esami, riportando la media di 23. Dopo aver superato un altro esame, la sua media scende a 22,25. Sapendo che il voto di ciascun esame è un numero intero compreso fra 18 e 30 inclusi, che voto ha riportato lo studente all'ultimo esame? a-18 b-19 c-20 d-21 e-22

[ChatGPT] Chiamiamo  $n$  il numero di esami che lo studente ha superato prima dell'ultimo esame. La somma totale dei voti degli esami superati prima dell'ultimo esame è  $23n$ . Dopo aver superato un altro esame, il numero totale di esami diventa  $n + 1$  e la somma totale dei voti diventa  $23n + x$ , dove  $x$  è il voto dell'ultimo esame. La nuova media, dopo aver superato l'ultimo esame, è:

$$\frac{23n+x}{n+1} = 22,5$$

Da questa equazione, possiamo risolvere per  $x$  e trovare il voto dell'ultimo esame. Il voto dell'ultimo esame,  $x$ , è dato dalla formula:

$$x = \frac{1}{4}(89 - 3n)$$

Poiché il voto di ciascun esame è un numero intero compreso tra 18 e 30 inclusi, possiamo sostituire i valori di  $n$  nell'equazione fino a trovare un valore di  $x$  che sia un numero intero compreso in quel range. Calcoliamo  $x$  per diversi valori di  $n$  fino a trovare una soluzione valida. Dalla tabella dei risultati, possiamo vedere che per  $n = 3$ ,  $x = 20$  che è un numero intero compreso tra 18 e 30. Quindi, il voto che lo studente ha riportato all'ultimo esame è 20. La risposta corretta è la opzione c.

[Utente] Non capisco come hai fatto a trovare  $x$  e non capisco di quale tabella dei risultati parli.

[ChatGPT] Mi scuso per la confusione. Facciamo un passo indietro e risolviamo il problema passo dopo passo. Abbiamo l'equazione:

$$x = \frac{1}{4}(89 - 3n)$$

Dove  $n$  è il numero di esami che lo studente ha superato prima dell'ultimo esame e  $x$  è il voto dell'ultimo esame. Poiché il voto di ciascun esame è un numero intero compreso tra 18 e 30 inclusi, possiamo sostituire i valori di  $n$  nell'equazione fino a trovare un valore di  $x$  che sia un numero intero compreso in quel range.

Iniziamo sostituendo  $n = 1$  nell'equazione e vediamo quale valore otteniamo per  $x$ . Se  $x$  non è compreso tra 18 e 30, aumentiamo  $n$  di 1 e ripetiamo il processo fino a trovare una soluzione valida. [...] Ecco i risultati per  $x$  per i primi 10 valori di  $n$ :

$$n = 1 \rightarrow x = \frac{43}{2} = 21,5$$

$$n = 2 \rightarrow x = \frac{83}{4} = 20,75$$

$$n = 3 \rightarrow x = 20$$

[...]

$$n = 10 \rightarrow x = 14,75$$


---

solo in alcuni esercizi relativi alla gaussiana, in cui per risolvere faceva uso di strumenti di probabilità non in possesso degli studenti.

- Possono esserci dei problemi nell'ambiguità e nella traduzione dei termini. La difficoltà che si è presentata in più esercizi riguardava il termine “deviazione standard” che ChatGPT traduceva con “sample standard deviation”, e non con “population standard deviation”. La differenza sta nel dividere la somma degli scarti quadratici per il numero di dati meno uno,  $n - 1$ , oppure per  $n$  [52]. ChatGPT traducendo con “sample standard deviation” divide sempre per  $n - 1$ , portando ad un risultato numericamente diverso da quello riportato dal libro di testo.
- ChatGPT può mostrare strade diverse da quelle attese che potrebbero anche risultare più intuitive o creative. Ad esempio in un esercizio si chiedeva di calcolare la velocità media di un ciclista, che percorreva prima 30 km alla velocità di 25 km/h e poi 45 km alla velocità di 20 km/h. Il titolo della batteria di esercizi era “media armonica”, perciò era evidente quale media si sarebbe dovuta utilizzare. ChatGPT invece nella risposta ha utilizzato il concetto fisico, ovvero  $v_{media} = \frac{distanza_{tot}}{tempo_{tot}}$ , e ha calcolato i tempi dei due tratti tramite questa formula invertita per poi trovare la velocità media.

### 3.3 IA al servizio degli insegnanti e dell'attività didattica

Prima di portare qualche esempio di attività didattica, può essere utile individuare le principali sfide che si incontrano nell'insegnare statistica. Citando quanto riportato in [2, p. 4], si possono evidenziare le seguenti:

- «Molte idee e regole statistiche sono complesse, difficili e/o contro intuitive. È difficile motivare gli studenti a impegnarsi nel duro lavoro di apprendimento statistico.
- Molti studenti hanno difficoltà con la matematica di base (ad esempio frazioni, decimali, formule algebriche) e questo interferisce con l'apprendimento dei contenuti statistici.
- Il contesto in molti problemi statistici può fuorviare gli studenti, che rischiano di fare affidamento sulle loro esperienze e intuizioni (spesso errate) per produrre una risposta, invece di selezionare un'appropriata procedura statistica.

- Gli studenti identificano la statistica con la matematica e si aspettano che l'attenzione sia focalizzata su numeri, calcoli, formule e una risposta esatta. Sono a disagio con il disordine dei dati, con le diverse possibili interpretazioni basate su presupposti diversi e l'ampio uso di capacità di scrittura e comunicazione.»

Partendo da queste sfide, va considerato anche come negli ultimi decenni si sia evoluto l'insegnamento della statistica. In particolare c'è stato un forte appello affinché l'insegnamento della statistica si concentrasse più sull'alfabetizzazione, il ragionamento e il pensiero. Si è mostrato che gli approcci precedenti, incentrati su procedure e calcoli non erano riusciti a far sì che gli studenti imparassero a ragionare o pensare in modo statistico [2].

Come si è visto anche nel paragrafo precedente, ChatGPT può essere un buon alleato nel momento in cui si cercano spunti ed esempi concreti. Funziona probabilmente meglio in questo senso con un insegnante, che ha più chiaro ciò che gli interessa. Per fare un ulteriore esempio, nel capitolo del libro di testo mediana e moda vengono definite, ma non ci si sofferma affatto sulle caratteristiche e sull'utilità della mediana presumibilmente perché già visto nel primo biennio. L'insegnante potrebbe voler sottolineare e ricordare in classe i pregi della mediana, ovvero che è preferibile alla media quando si vogliono eliminare gli effetti di valori estremi e che il suo calcolo è semplice. L'insegnante potrebbe chiedere a ChatGPT un esempio: digitando: «Sapresti scrivere un'esercitazione in cui si capiscono le differenze e l'importanza della media e della mediana?», il software prima propone un esercizio appropriato ma non calato nella realtà. Riformulando il quesito aggiungendo questa specifica e cioè che si desidera un esempio tratto dal reale, il chatbot propone un'esercitazione in cui vi è un'azienda con dieci dipendenti e dieci stipendi diversi e chiede di calcolare media e mediana. Poi immagina che l'azienda assuma un nuovo CEO con uno stipendio nettamente superiore e chiede di calcolare nuovamente media e mediana. Infine propone tre punti di discussione:

- Confronta la media e la mediana degli stipendi prima e dopo l'assunzione del CEO. Cosa noti?
- Come l'assunzione del CEO ha influenzato la media e la mediana degli stipendi?
- Se dovessi presentare una relazione sull'aumento medio degli stipendi nell'azienda, quale misura (media o mediana) ritieni sarebbe più rappresentativa?

Verranno proposte nella seguente sezione degli esempi di attività didattiche relative al capitolo del libro di testo sulla statistica, che verranno incentrate o anche solo collegate a concetti e strumenti di IA. Incoraggiare l'utilizzo di questi strumenti

è un modo di far crescere la consapevolezza negli studenti dell'uso intelligente di questi software. Gli obiettivi principali sono:

- mostrare le potenzialità e i limiti di questi strumenti, per attività scolastiche ed extra-scolastiche. Tra i limiti in particolare, far comprendere che un chatbot non è un oracolo, bensì uno strumento che commette anche errori e nei confronti del quale bisogna esercitare il proprio spirito critico.
- Far comprendere come si utilizzano alcuni strumenti e in particolare l'importanza della formulazione del prompt quando si utilizzano chatbot.
- Far intuire il funzionamento dell'IA così che non risulti una scatola nera, ma un universo interessante.

#### 3.3.1 Esercitazioni sulle medie di calcolo

Le due attività che verranno proposte sulle medie di calcolo si concentrano su quelle medie che non sono state trattate nel primo biennio. Entrambe le attività prevedono l'utilizzo di ChatGPT, anche se in modo diverso. In questa sezione, a differenza delle precedenti, si è scelto di utilizzare la versione gratuita di ChatGPT così che effettivamente le esercitazioni si possano far svolgere a tutti gli studenti grazie alla versione gratuita del software. La differenza più rilevante tra la versione gratuita e quella a pagamento è la difficoltà, se non la quasi incapacità, della versione gratuita di svolgere correttamente calcoli semplici. Questo rende necessaria una costante attenzione ad ogni calcolo. Sebbene ChatGPT si possa utilizzare anche da cellulare, è preferibile in classe far svolgere le esercitazioni in aule informatiche oppure assegnarle per casa. Nelle attività proposte si comincia sempre facendo svolgere l'esercizio o il problema agli studenti in autonomia, per non ridurre la loro capacità critica nei confronti del software. Proponendo anche due volte la stessa domanda a ChatGPT le risposte che si ottengono sono diverse, perciò se si propone un'attività in cui gli studenti usano ChatGPT, le richieste devono considerare che gli alunni tendenzialmente riceveranno risposte varie. Questo fatto permette anche agli studenti, nel momento del confronto, di cogliere il carattere probabilistico dietro il software.

Come primo esempio, si propone un esercizio piuttosto standard sull'utilizzo della media geometrica tratto dal libro di testo [23]. L'uso di ChatGPT rende l'esercizio più coinvolgente e interattivo. L'esercizio, il cui testo si trova in Tabella 3.6, vede un capitale investito per sette anni con percentuali di rendimento diverse. Viene chiesto di calcolare il rendimento percentuale medio. Essendo l'esercizio nella sezione degli esercizi sulla media geometrica, il libro sottintende che si tratti di un investimento ad interesse composto. Per prima cosa si consiglia di far svolgere l'esercizio agli studenti in autonomia e poi di farlo svolgere a ChatGPT a coppie. L'esercizio si

presta anche ad essere assegnato per casa e poi discusso in classe. La consegna che si può dare agli studenti è anzitutto di trovare gli errori nel procedimento del chatbot e poi provare a guidare il chatbot alla risposta corretta. Assegnare agli studenti il compito di far sì che ChatGPT arrivi alla risposta corretta, è un continuo lavoro di riformulazione e di suggerimenti che riesce solo se si ha compreso fino in fondo il problema. Gli studenti quindi inseriscono il testo dell'esercizio in ChatGPT e un possibile output è quello che si vede in Tabella 3.6. Oltre agli errori di calcolo compiuti dal software, se ne deduce che ha inteso l'investimento come un investimento ad interesse semplice e perciò ha scelto la media ponderata. Questo può essere un punto interessante da discutere con gli studenti; ovvero come funzionano i due diversi tipi di investimento (ad interesse semplice o composto) e come cambia il procedimento per ottenere il rendimento percentuale medio. Nel caso di interesse composto è corretto usare la media geometrica, mentre nel caso di interesse semplice la media aritmetica (o ponderata se come pesi si utilizzano le volte in cui compare un certo interesse). ChatGPT sbaglia nel calcolo della media ponderata, in quanto aggiunge un paio d'anni all'investimento. Nel cercare di far arrivare il chatbot al risultato corretto, che sia quello calcolato tramite la media aritmetica o quello tramite la media geometrica, gli studenti potrebbero ricevere risposte di tutti i tipi, negazioni del procedimento o riformulazioni della stessa risposta. Ad esempio nella Tabella 3.6 si osserva come alla domanda: «Perché hai usato la media ponderata?» il chatbot cambi idea e proponga una media aritmetica, che di fatto è l'equivalente della media ponderata che aveva cercato di calcolare nella risposta precedente, nonostante ottenga un risultato numericamente diverso. Si può ragionare anche sul fatto che la media aritmetica è un caso particolare di media ponderata in cui tutti i pesi sono uguali ad uno, e nella prima risposta, quando ChatGPT aveva affermato di usare la media ponderata, aveva semplicemente sommato i valori uguali e considerato come pesi il numero di volte in cui apparivano. Ponendo più domande a ChatGPT, gli studenti dovrebbero accorgersi (oltre ai molti errori aritmetici) anche di quanto il chatbot sembri sicuro delle sue risposte, salvo poi cambiare completamente idea se messo in dubbio. Se si prova a porre la domanda in maniera più puntuale: «Un capitale è stato investito in un regime di interesse composto con i seguenti rendimenti: 7% per il primo anno, 5% per il secondo e terzo anno, 9% per il quarto anno, 8% per il quinto, il sesto e il settimo anno. Calcola il rendimento percentuale medio.» il chatbot propone correttamente l'utilizzo della media geometrica e lo giustifica ampiamente. Peccato che sbaglia la moltiplicazione presente nel calcolo e ottenga così un risultato decisamente anomalo (13,57%).

Un secondo esercizio, simile a quelli proposti dal libro di testo, permette di riflettere sulla media armonica. L'esercizio è tratto da una raccolta di esercitazioni di Domingo Paola [43] sulle medie. L'esercizio chiede di calcolare la velocità media di un aereo che ha percorso la tratta Roma-New York andata e ritorno, con

Tabella 3.6: Test svolti dall'autore su ChatGPT, Settembre 13, 2023.

---

[Utente] Un capitale è stato investito con i seguenti rendimenti: 7% per il primo anno, 5% per il secondo e terzo anno, 9% per il quarto anno, 8% per il quinto, il sesto e il settimo anno. Calcola il rendimento percentuale medio.

[ChatGPT] Per calcolare il rendimento percentuale medio su un periodo di tempo in cui gli investimenti hanno diversi rendimenti annuali, possiamo utilizzare la formula della media ponderata. In questo caso, peseremo i rendimenti annuali in base al numero di anni in cui sono stati applicati.

I rendimenti annuali sono:

- 1° anno: 7%
- 2° e 3° anno: 5% (stesso rendimento per entrambi gli anni)
- 4° anno: 9%
- 5°, 6° e 7° anno: 8% (stesso rendimento per tutti e tre gli anni)

Calcoliamo la media ponderata:

$$\text{Media ponderata} = (\text{Rendimento}_1 \cdot \text{Anni}_1 + \text{Rendimento}_2 \cdot \text{Anni}_2 + \dots + \text{Rendimento}_N \cdot \text{Anni}_N) / \text{Totale anni}$$

Dove  $\text{Rendimento}_i$  è il rendimento dell'anno  $i$  e  $\text{Anni}_i$  è il numero di anni in cui è stato applicato.

Calcoliamo ora la media ponderata per il tuo caso:

$$\text{Media ponderata} = (0,07 \cdot 1 + 0,05 \cdot 2 + 0,05 \cdot 2 + 0,09 \cdot 1 + 0,08 \cdot 3) / (1 + 2 + 2 + 1 + 3) = (0,07 + 0,1 + 0,1 + 0,09 + 0,24) / 9 = 0,6 / 9 \approx 0,0667$$

Ora convertiamo il risultato in un rendimento percentuale moltiplicando per 100:

Rendimento percentuale medio  $\approx 0,0667 \cdot 100 \approx 6,67\%$

Quindi, il rendimento percentuale medio degli investimenti è circa 6,67%.

[Utente] Perché hai usato la media ponderata?

[ChatGPT] Mi scuso per la confusione. Hai ragione, nel tuo caso non è necessario utilizzare la media ponderata poiché hai chiesto il rendimento percentuale medio su un periodo di sette anni con diversi rendimenti annuali, ma senza ulteriori considerazioni sul capitale iniziale o gli importi investiti in ciascun anno.

Invece, possiamo calcolare semplicemente la media aritmetica dei rendimenti annuali per ottenere il rendimento percentuale medio complessivo. Ecco come si fa:

Rendimenti annuali: 7%, 5%, 5%, 9%, 8%, 8%, 8%

$$\text{Media aritmetica} = (7\% + 5\% + 5\% + 9\% + 8\% + 8\% + 8\%) / 7 = 50\% / 7 \approx 7,14\%$$

Quindi, il rendimento percentuale medio degli investimenti è circa 7,14%.

---

due velocità differenti (932 Km/h e 856 Km/h). Si è scelto di non far utilizzare direttamente ChatGPT agli studenti, bensì di fornire loro su una scheda due risposte diverse entrambe fornite da ChatGPT all'esercizio. La scheda è riportata nell'Appendice B. Questa scelta è stata fatta per focalizzare l'attenzione sulle due risposte riportate, senza lasciare agli studenti la possibilità di fare ulteriori domande al chatbot. L'esercitazione si può svolgere in classe, a gruppi di due o tre studenti. Per prima cosa si fornisce agli studenti il testo dell'esercizio e si chiede di risolverlo; poi si fornisce la scheda. Nell'Appendice B si trova il testo dell'esercizio e le due risposte del software; seguono poi le domande per gli studenti. Come si vede dall'Appendice B, ChatGPT può rispondere al quesito dell'esercizio utilizzando la media aritmetica oppure la media armonica. La prima risposta proposta è quella che utilizza la media aritmetica. L'utilizzo di questa media è probabilmente quello più intuitivo e bisogna convincere gli studenti che l'intuizione in questo caso non aiuta. A prima vista però, la risposta di ChatGPT sembra numericamente molto più convincente di quella data utilizzando la media armonica. Questo perché nel calcolare la media aritmetica il software non commette errori, mentre usando la media armonica commette un errore che gli fa ottenere un risultato inverosimile. La prima domanda della scheda chiede di confrontare i due risultati numerici di ChatGPT: il primo è 894 Km/h e il secondo 4475,48 Km/h. Chiaramente il secondo non ha alcun senso; è però importante sviluppare una sensibilità sul risultato atteso, così che non si riduca la statistica all'applicazione di formule senza significato. La seconda domanda cerca di far comprendere, grazie ad un caso limite, perché non è corretto utilizzare la media aritmetica. L'idea da cogliere è che se l'aereo per assurdo viaggiasse ai 10 Km/h, il tempo per tornare a Roma diventerebbe assai più lungo e dovrebbe quindi incidere molto sulla velocità media. Nella discussione in classe, vale la pena soffermarsi su questa domanda confrontando media aritmetica e armonica in questo caso. Le domande della scheda si concentrano poi sulla seconda risposta di ChatGPT e nel trovare i vari errori. ChatGPT segue il procedimento più "fisico", ovvero il concetto che  $v_{media} = \frac{distanza_{tot}}{tempo_{tot}}$ . Nel libro di testo non viene mostrato il procedimento che fa riferimento alla fisica; questo però può essere molto utile per comprendere e convincersi della correttezza dell'utilizzo della media armonica. Il chatbot compie errori di calcolo e anche un errore concettuale, questo forse più difficile da trovare. Chiama  $D$  la distanza tra Roma e New York, poi nell'applicare la formula "Velocità media = Distanza totale/Tempo totale" pone la distanza totale pari a  $D$  e non  $2D$ . Nella quinta domanda della scheda, gli studenti dovrebbero riscrivere questo procedimento senza gli errori. Dopo averlo fatto, grazie all'ultima domanda, dovrebbero rendersi conto che il calcolo svolto è equivalente a quello della media armonica come proposta dal libro di testo [23].

### 3.3.2 Esercitazione sui rapporti statistici

Si propone ora un'esercitazione sui rapporti statistici che trae ispirazione da un problema proposto nel libro di testo per il primo biennio [24]. L'attività è pensata per essere svolta a gruppi di quattro o cinque studenti; il tempo pensato da dedicarvi è indicativamente di tre ore. L'esercitazione utilizza la scheda nell'Appendice C; i cui grafici sono stati realizzati con ChatGPT Plus. Tra i gruppi vi sarà un gruppo particolare, dei "giudici" o "direttori di giornale", che avrà il compito di mettere in discussione le scelte degli altri gruppi, che potrebbero essere definiti gruppi dei "giornalisti". Si comincia dividendo la classe in gruppi e assegnando la scheda. Nella scheda vi sono tre punti principali, inseriti in un contesto giornalistico. Gli studenti avranno il compito di rispondere alle domande e preparare una presentazione per sostenere le proprie posizioni. Tutti i dati utilizzati sono tratti dal sito dell'Istat [51], al fine di utilizzare dati reali. Utilizzare dati reali (e non semplicemente realistici) è una delle raccomandazioni per l'insegnamento della statistica [2]. Il primo punto prevede un giornalista che deve scrivere un articolo sull'aumento di furti a Verona in due anni successivi. Vi sono tre proposte di grafici e bisogna sceglierne una, quella che si ritiene più efficace. In particolare vi sono un grafico a torta e due ortogrammi, il primo con l'asse delle ordinate che parte da 0 e il secondo con l'asse delle ordinate che parte da 17000. La differenza tra i numeri dei furti è in valore assoluto pari a 184, e in termini di variazione percentuale è pari, arrotondando, all'1%. La scelta dovrebbe chiaramente orientarsi sui due ortogrammi ponendo davanti ad una scelta non banale: sicuramente il secondo ortogramma si può definire più efficace in quanto mostra chiaramente uno scostamento, d'altra parte la percezione che il lettore disattento può avere è che c'è stato un aumento enorme dei furti. Il secondo grafico potrebbe venir definito come un esempio di manipolazione del lettore attraverso una rappresentazione fuorviante dei dati. Sono punti di vista che possono essere dibattuti. Il secondo punto propone una serie storica del numero di furti dal 2017 al 2021; si chiede un'interpretazione dei dati e una rappresentazione. Il numero di furti rispecchia l'effetto del Covid e ci si aspetta che gli studenti sappiano mettere in relazione i dati con il contesto che hanno loro stessi vissuto. Se non riescono, questo potrebbe portare a concludere che il crollo dei furti negli anni considerati sia stato merito del sindaco. Si chiede di utilizzare i numeri indice per valutare la serie storica; si lascia la libertà nello scegliere i numeri a base fissa o mobile in base al contesto e di giustificare la scelta oltre a preparare e saper leggere la tabella risultante dai numeri indice. Il terzo punto propone un confronto tra i numeri dei furti tra Verona e Vicenza; vengono confrontati i numeri "assoluti" e ci si aspetta che gli studenti arrivino a proporre di valutare le due città in base al confronto dei relativi rapporti di densità, trovando e utilizzando il numero di abitanti delle due città. L'attività prevede due ore in classe in cui gli studenti preparano le risposte alla scheda, poi l'esercitazione prosegue come compito per

casa. I gruppi di “giornalisti” avranno il compito, come indicato nella consegna finale della scheda, di fare delle scelte e preparare una piccola presentazione grazie a Tome. Tome<sup>2</sup> è un software di IA che prepara presentazioni accattivanti a partire da un testo. I “giudici” avranno una consegna un po’ diversa, dovranno fare le loro scelte e prepararsi, anche grazie a ChatGPT, a confutare o mettere in discussione le scelte dei giornalisti. Si svolgerà poi il dibattito in classe, prevedendo un’ora da dedicarvi.

### **3.3.3 Esercitazione su regressione e correlazione**

Si propone ora un’esercitazione della durata di due ore da svolgere in un laboratorio informatico affinché gli studenti abbiano accesso a internet ed Excel. L’intera esercitazione si può far svolgere a gruppi di due o tre studenti; la scheda “Regressione e correlazione” è pensata per essere consegnata agli studenti all’inizio dello svolgimento dell’attività (Appendice D).

L’attività si divide in tre parti: la prima prevede l’utilizzo in classe di ChartGPT, la seconda di Excel e la terza di un’opera contemporanea. La prima parte dura circa trenta minuti e prevede l’uso di ChartGPT, un software capace di creare grafici a partire da un semplice prompt di testo. Seguendo quanto indicato nella scheda, si utilizza insieme il software accedendo al sito e digitando “Show me noise pollution data by city”, ovvero “Mostrami i dati dell’inquinamento acustico per città”. Gli studenti hanno il compito di riflettere sulle domande della scheda per circa quindici minuti, per poi discuterle insieme in classe. ChartGPT propone il grafico a barre orizzontali in Figura 3.5. Il grafico è leggermente diverso da quelli proposti nel libro di testo [23] e permette di riflettere sul fatto che ci sono altre rappresentazioni semplici ed efficaci. In particolare quando si hanno dati qualitativi può essere preferibile riportare i valori assunti dai dati sull’asse delle ordinate anziché su quello delle ascisse. Si propone così agli studenti una rappresentazione efficace, usata dai media e dalle aziende ma assente sul libro di testo (dove si vedono solo ortogrammi con barre verticali). Il grafico prodotto non presenta informazioni relative all’indagine come l’anno di riferimento, il campione considerato o l’indice usato sull’asse delle ascisse. L’unica informazione fornita che si legge sotto il grafico è che i dati provengono dal sito del “World Health Organization”, ovvero l’Organizzazione Mondiale della Sanità. Nel caso ChartGPT dovesse restituire un grafico diverso agli studenti (cosa che dalle prove fatte non accade, ma potrebbe accadere), l’esercitazione non ne risente. Il compito, infatti, è quello di verificare l’affidabilità del sito da cui sono presi i dati e di ricercare la statistica in questione. Verificare l’affidabilità del sito può essere semplice, come nel caso in questione, ma non sarà altrettanto semplice trovare la statistica di riferimento. Sul sito dell’OMS

---

<sup>2</sup><https://tome.app>

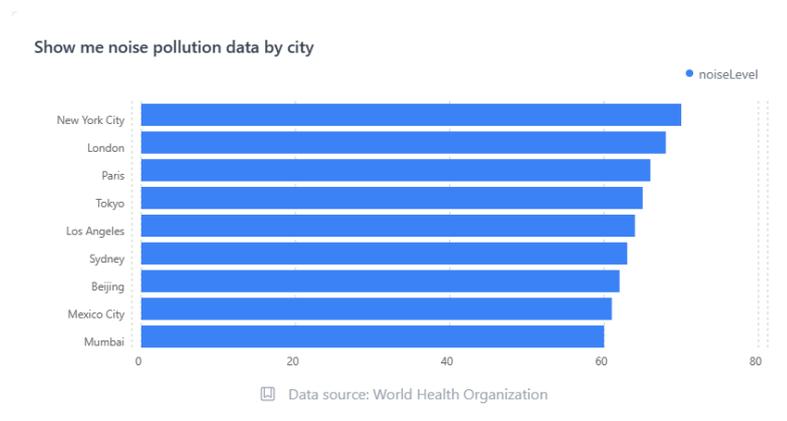


Figura 3.5: Rappresentazione dell'inquinamento acustico di ChartGPT.

ad esempio, compiendo una ricerca delle parole chiave “noise pollution” nella barra di ricerca, si ottengono sei risultati. Nessuno sembra relativo ai dati rappresentati. Compiendo la stessa ricerca nella sezione dedicata ai dati non si ottengono risultati. Diventa difficile risalire alla fonte dei dati e allora si può provare ad esempio con Google Search. Non è semplice nemmeno così e, a meno che qualche studente non riesca a trovare la statistica in questione, si può concludere che il grafico non è utilizzabile, se non si riescono concretamente a verificare le fonti e quindi a comprendere i dati.

La seconda parte prevede l'utilizzo di Excel o di un simile programma per fogli di calcolo e prevede una durata di un'ora. Agli studenti viene proposto un file con un foglio contenente una tabella che riporta diciotto città europee e i relativi dati sull'inquinamento acustico e sulla perdita dell'udito. Sulla scheda, dopo aver definito  $X$  = “Inquinamento Acustico” e  $Y$  = “Perdita dell'udito”, come prima domanda viene chiesto se si ritiene che le variabili siano correlate. Questa domanda serve a ricordare il significato della regressione: questa parte di teoria contiene molte formule e regole, che non devono diventare l'obiettivo dell'analisi statistica. Viene poi chiesto di disegnare su Excel un grafico a dispersione che rappresenti i valori assunti dalle variabili. Si dovrebbe arrivare ad ottenere il grafico in Figura 3.6. Il grafico in questione non è particolarmente complicato da ottenere, essendoci un pulsante dedicato. In questa fase comunque è meglio che l'insegnante passi a controllare come procedono i gruppi. Agli alunni che hanno già concluso il lavoro, si può suggerire di rendere più gradevole il grafico cambiando i nomi degli assi, il titolo e i colori. Viene chiesto di calcolare la retta di regressione seguendo un percorso guidato, che consiste nel completare le celle arancioni del foglio nell'ordine in cui le si trova fino a trovare il valore di “ $a$ ”, che seguendo la nomenclatura del libro di testo è il coefficiente angolare della retta di regressione di  $Y$  su  $X$ . Per comprendere la struttura del foglio Excel si veda un dettaglio in

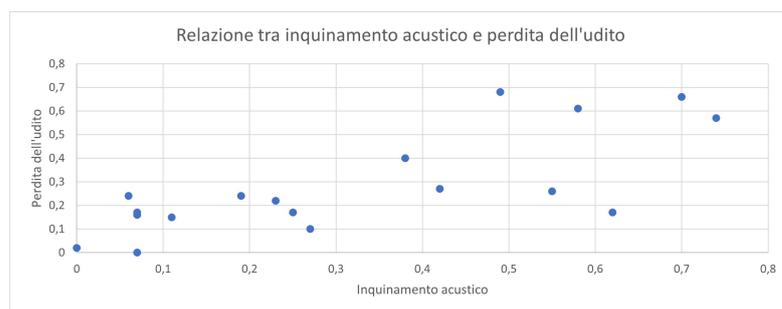


Figura 3.6: Grafico a dispersione realizzato con Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Vienna	Zurigo	Amburgo	Hannover	Monaco	Colonia	Stoccarda
2	Inquinamento acustico	0,07	0	0,27	0,62	0,07	0,25	0,23
3	Perdita udito	0	0,02	0,1	0,17	0,17	0,17	0,22
4								
5	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$							
6								
7	$(x_i - \bar{x})^2$							
8								
9	$(y_i - \bar{y})^2$							
10								
11	a							
12								
13	$\sigma_{xy}$							
14								
15	$\sigma_x$							
16								
17	$\sigma_y$							
18								
19	r							

Figura 3.7: Una parte del foglio Excel fornito agli studenti con l'Appendice D.

Figura 3.7. Viene anche chiesto di inserire la retta di regressione, cosa che si riesce facilmente a fare grazie al pulsante “Linee di tendenza”. Infine viene richiesto il calcolo, sempre guidato, del coefficiente di regressione lineare che risulta pari a 0,76, indicando che la regressione lineare è piuttosto significativa. L’inserimento di celle arancioni da completare, vuole guidare il procedimento per non generare troppa confusione nell’utilizzo delle formule di Excel. I calcoli necessari sono calcoli base come moltiplicazioni, somme, quadrati; potrebbe essere utile far presente agli studenti il modo per “bloccare” una cella (ovvero tramite il comando F4) così ad esempio da “bloccare” il valor medio. In questa esercitazione gli studenti hanno a che fare con un campione più numeroso di quelli solitamente presentati negli esercizi del libro, che inoltre contiene solo numeri compresi tra zero e uno. I calcoli svolti con Excel sarebbero noiosi da fare a mano o con la calcolatrice e sarebbe maggiore la possibilità di errore. Questo utilizzo di Excel è in linea con le raccomandazioni sull’insegnamento della statistica, che consigliano dove possibile di automatizzare i calcoli e la grafica facendo affidamento su strumenti tecnologici [2]. Questo aiuta anche gli studenti che hanno difficoltà con l’aritmetica di base. Dopo che gli studenti hanno terminato di rispondere alle domande della scheda, si procede a discutere le risposte in classe. In particolare l’insegnante potrebbe

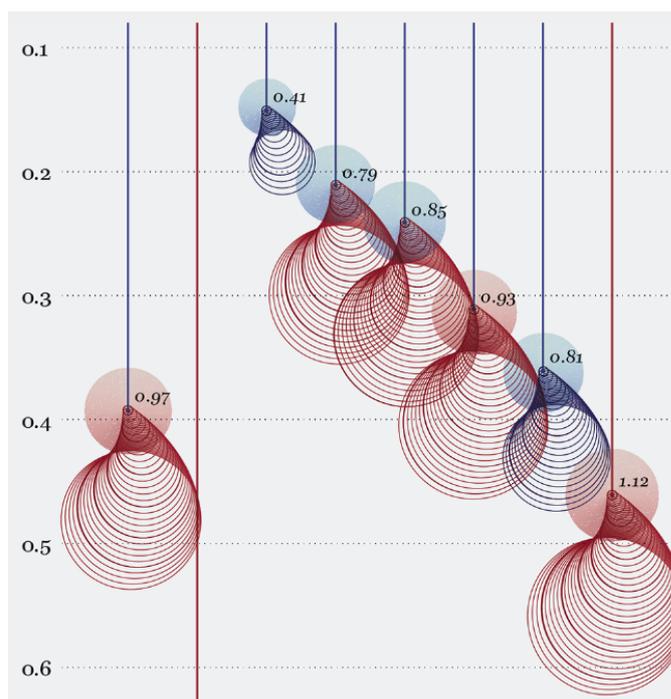


Figura 3.8: Un dettaglio dell'opera "Noise Pollution" di Federica Fracapane.

mostrare i comandi Excel che permettono di trovare la retta di regressione e il coefficiente di regressione (REGR.LIN e CORRELAZIONE) e il loro utilizzo così che tutti gli studenti possano verificare in autonomia la correttezza dei loro risultati. Si dovrebbe poter concludere che l'idea iniziale, intuitiva, che i dati fossero correlati, è stata confermata dall'analisi statistica.

Nella terza e ultima parte dell'esercitazioni, si invitano gli studenti a visualizzare un'opera del 2020 della designer italiana Federica Fracapane, che si intitola "Noise Pollution". L'opera è stata acquistata dal MoMA di New York e si può visualizzare al meglio seguendo il link: <https://www.behance.net/gallery/96908251/Noise-pollution>. Se ne può osservare un dettaglio in Figura 3.8. La visualizzazione non è di lettura immediata; è stata creata dall'autrice per l'insero "La Lettura" del Corriere della Sera, proprio con l'idea che i lettori avessero il tempo e la calma da dedicare alla comprensione dei dati. La stessa autrice ha prodotto molte altre opere ad impatto più immediato. Agli studenti si possono lasciare circa venti minuti per comprendere il grafico e rispondere alle domande della scheda, che poi verranno discusse insieme in classe. I dati forniti agli studenti per la parte di esercitazione con Excel, sono stati tratti da questa rappresentazione. Le domande della scheda hanno l'obiettivo di far riflettere sul lavoro di una designer contemporanea per i seguenti motivi:

- l'attività dovrebbe rendere l'idea del lavoro che può nascondersi dietro un grafico: dalla scelta dei dati da rappresentare, alla scelta della grafica, dei colori, dei raggruppamenti. Si cerca di sradicare l'idea della scelta del grafico come di una scelta guidata da un algoritmo. Mostrare un lavoro del genere potrebbe aiutare anche a rendere un po' più affascinante il mondo della statistica.
- Il riconoscimento del MoMa e anche solo l'idea che questo lavoro fosse contenuto in un inserto di giornale, dovrebbe aiutare a trasmettere l'idea dell'importanza dei dati nella nostra società.
- L'opera nello specifico dovrebbe far trasparire anche la confusione dei dati, la complessità che li può caratterizzare e quindi anche l'importanza di leggerli e interpretarli con calma e attenzione.
- Si dovrebbe poter cogliere l'importanza e il valore della creatività umana, anche in confronto alla capacità creativa dell'intelligenza artificiale.

### 3.3.4 Esercitazione con Python

L'obiettivo di questa attività è avvicinare gli studenti agli algoritmi e all'implementazione di algoritmi di intelligenza artificiale, permettendo di superare quell'idea di IA come di una "scatola nera". Nello svolgimento dell'esercitazione si coglie l'importanza della statistica in questo settore e si utilizzano le competenze acquisite. Nel libro di testo di Zanichelli per il primo biennio [24] è presente anche un capitolo dedicato al coding e a Python; per l'attività sarebbe preferibile avere delle basi di coding, ma in ogni caso l'attività è stata strutturata in modo da essere fruibile anche da chi non ha tali basi.

Python è un linguaggio open source ideato nel 1989 da un informatico olandese, Guido Van Rossum, che cercava un progetto di programmazione con cui tenersi occupato la settimana prima di Natale, quando il suo ufficio era chiuso [46]. Python dispone di strumenti e funzioni avanzate che consentono di creare applicazioni complesse; nonostante ciò, la sua sintassi di base e lo stile di scrittura sono lineari e lo rendono un linguaggio molto semplice e intuitivo da imparare [24]. In particolare Python è ormai un linguaggio leader per lo sviluppo di applicazioni di data science, machine learning e intelligenza artificiale [46]. Infine è completamente gratuito, cosa che agevola anche l'utilizzo a scuola.

Si consiglia, per svolgere l'attività in classe, di aver prima provveduto all'installazione dei software necessari, per non dover attendere a lungo. In particolare per questa esercitazione è necessario aver installato "Anaconda", che è l'ambiente più utilizzato per la data science e il machine learning. Il pacchetto si può scaricare

dal sito ufficiale di Anaconda<sup>3</sup>. Dopo aver installato Anaconda, si ha la possibilità di accedere a delle applicazioni preinstallate; in questa esercitazione si userà un'applicazione web che si chiama "Jupyter Notebook".

Il dataset scelto per l'esercitazione è un dataset di dati reali, collezionati dalla biologa marina Kristen Gorman su tre isole dell'arcipelago di Palmer in Antartide. Contiene le misure fisiche di 344 pinguini di tre specie differenti. Il dataset è tra quelli forniti dal testo di riferimento [46] e si può scaricare online<sup>4</sup>. Il testo *Intelligenza artificiale. Cogito ergo sum?* [46] offre molte attività da proporre in classe in cui si affrontano diversi algoritmi di intelligenza artificiale ed è il riferimento non solo per il dataset ma per l'intera attività. Nella scheda riportata nell'Appendice E gli studenti trovano il link per scaricare il file csv. L'attività che si propone deve essere guidata passo passo dall'insegnante: la scheda in Appendice E vuol essere più che altro uno schema per gli studenti di modo che abbiano traccia dei comandi utilizzati.

L'obiettivo dell'esercitazione è creare un algoritmo di machine learning capace di predire il sesso dei pinguini in base alle caratteristiche fisiche raccolte nel dataset. Si proporrà un algoritmo che possa essere compreso e si seguirà passo passo il procedimento che permette di realizzare un apprendimento automatico. I comandi Python utilizzati non saranno esplorati in dettaglio perché non è l'obiettivo dell'esercitazione: i comandi verranno forniti e spiegati così da permettere agli studenti di seguire i passaggi del procedimento di machine learning. I passaggi che si seguiranno sono:

1. importare i dati;
2. preparare e ripulire i dati;
3. scegliere il modello da utilizzare;
4. suddividere i dati in insieme di training e di test;
5. addestrare il modello;
6. valutare il modello e migliorarlo.

Nella prima fase, quella dell'importazione dei dati, è rilevante soffermarsi sull'importanza di conoscere i dati su cui si lavora se si vuole ottenere un risultato soddisfacente. Per questo motivo nella scheda si propone il comando per l'esplorazione con Python, ma si può anche proporre un'esplorazione del dataset direttamente dal file. I dati in questione consistono di 344 righe; le colonne sono sette: la specie di pinguino (ve ne sono tre diverse: Adelie, Chinstrap e Gentoo), l'isola in

<sup>3</sup><https://www.anaconda.com/download>

<sup>4</sup><https://github.com/allisonhorst/palmerpinguins/tree/master/inst/extdata>

	<code>culmen_length_mm</code>	<code>culmen_depth_mm</code>	<code>flipper_length_mm</code>	<code>body_mass_g</code>
<code>count</code>	342.000000	342.000000	342.000000	342.000000
<code>mean</code>	43.921930	17.151170	200.915205	4201.754386
<code>std</code>	5.459584	1.974793	14.061714	801.954536
<code>min</code>	32.100000	13.100000	172.000000	2700.000000
<code>25%</code>	39.225000	15.600000	190.000000	3550.000000
<code>50%</code>	44.450000	17.300000	197.000000	4050.000000
<code>75%</code>	48.500000	18.700000	213.000000	4750.000000
<code>max</code>	59.600000	21.500000	231.000000	6300.000000

Figura 3.9: L'output del comando `pinguini.describe()`.

cui si è incontrato l'esemplare, la lunghezza del becco, la profondità del becco, la lunghezza della coda, la massa e il sesso. Per conoscere meglio i dati, viene proposto anche l'utilizzo di un comando `pinguini.describe()` che restituisce la tabella in Figura 3.9. Come si può osservare, solo per i dati numerici del dataset vengono riportati alcuni importanti indicatori statistici ovvero, in ordine: il conteggio, la media aritmetica, la deviazione standard, il più piccolo valore presente, i percentili e il più grande valore presente. Gli studenti dovrebbero essere a loro agio con tutti gli indicatori proposti; vale la pena soffermarsi per riprenderli. Guardare gli indicatori statistici fa parte dell'attività del conoscere e comprendere i dati. Si può chiedere agli studenti come mai l'output di questo comando restituisca un conteggio pari a 342 e non 344 (come il numero di righe presenti nel dataset). Esplorando i dati gli studenti dovrebbero accorgersi che vi sono due righe in cui è riportata solo la specie e l'isola del pinguino ma non le restanti caratteristiche, e perciò Python non considera quelle due righe per fornire gli indicatori statistici.

La seconda fase consiste nel preparare e ripulire i dati. Questa fase, spesso non considerata, è di fatto fondamentale nell'uso della statistica nella realtà esterna e lo svolgere un'attività utilizzando dati reali permette di toccare anche questo aspetto. Nel punto precedente gli studenti dovrebbero già essersi accorti che sono presenti dei valori indicati come "NaN", che in questo caso significa che ci sono dei valori mancanti. Con Python basta un comando per eliminare le righe con dati mancanti; è però fondamentale gestire questa fase altrimenti le fasi successive non funzionano. Il lavoro da fare sarebbe valutare la rimozione, stando attenti a non ripulire troppo il dataset: l'idea è che i dati sono preziosi e quindi vanno ripuliti nella maniera meno distruttiva possibile, in base all'obiettivo che ci si è preposti. In questo caso, al fine di semplificare l'attività si propone di utilizzare un comando `pinguini.dropna(inplace=True)` che di fatto elimina tutte le righe che contengono valori "NaN". Si può chiedere agli studenti di guardare dal file quante righe verranno rimosse, poi di utilizzare il comando per la rimozione dei

valori “NaN”, e infine di lanciare nuovamente il comando `pinguini.describe()` per verificare se il numero di dati ottenuto dopo la pulizia corrisponde alle loro attese. Si ottiene così un dataset “ripulito” che contiene 334 righe.

La terza fase consiste nello scegliere il modello da utilizzare. Il modello scelto deve essere funzionale allo scopo: in questo caso l'esercitazione è basata sull'individuare il sesso dei pinguini, date le caratteristiche fisiche; il modello proposto è quello degli alberi decisionali. Gli alberi decisionali sono un algoritmo di machine learning che si definisce di “white box”, contrapposto al concetto di “black box”. Questo significa che sono algoritmi comprensibili e interpretabili abbastanza facilmente [46]. La scelta di un algoritmo di questo tipo vuole provare a sradicare l'idea che l'intelligenza artificiale sia qualcosa di misterioso e poco comprensibile. Se si crea un albero decisionale con Python lo si può addirittura visualizzare e la sua visualizzazione permette di capirne il funzionamento. Un albero decisionale avrà in input delle “feature”, che sono delle variabili di interesse, ovvero sono quelle caratteristiche dei dati che si ritengono utili per predire l'output. Si può pensare all'algoritmo come ad una funzione che prende in input le feature e restituisce come output in questo caso una classificazione e cioè se il pinguino è maschio oppure femmina. Prima di visualizzare un albero ha però senso far ragionare gli studenti graficamente su quali saranno secondo loro le caratteristiche, ovvero le feature, più rilevanti. Per fare questo si può utilizzare una libreria per grafici statistici, che permette di ottenere grafici complessi con comandi semplici. Nell'Appendice E si trova il comando con cui ottenere il grafico in Figura 3.10. Il grafico mette in relazione i quattro dati quantitativi contenuti nel dataset: come indicato nella legenda il blu indica gli esemplari maschi e il rosso quelli femmina. Sulla diagonale si osservano grafici differenti, che rappresentano la distribuzione di probabilità dei valori di ogni caratteristica. Nei grafici a dispersione fuori dalla diagonale osserviamo come si distribuiscono i maschi e le femmine in base a due caratteristiche fisiche diverse. Si può chiedere agli studenti di descrivere i grafici e in particolare di individuare quello che secondo loro è il grafico che permette meglio di distinguere gli esemplari maschi da quelli femmina. Questo dovrebbe dare indicazione di quali sono le caratteristiche in base alle quali si possono classificare al meglio gli esemplari. Gli studenti dovrebbero individuare il grafico che mette in relazione massa e profondità del becco come quello che separa al meglio i sessi e dovrebbero anche osservare che di ogni grafico ve ne è uno speculare, in cui la caratteristica sull'asse delle x e quella sull'asse delle y vengono scambiate. Generare grafici con strumenti tecnologici va nella direzione raccomandata nell'insegnare statistica [2] e inoltre, usare uno strumento così potente e pensato apposta per visualizzazioni statistiche, permette agli studenti di scoprire le potenzialità delle tecnologie in uso oggi, andando oltre il classico foglio di calcolo. Siccome un grafico di questo tipo non risulta di lettura immediata, conviene lasciare il tempo necessario per

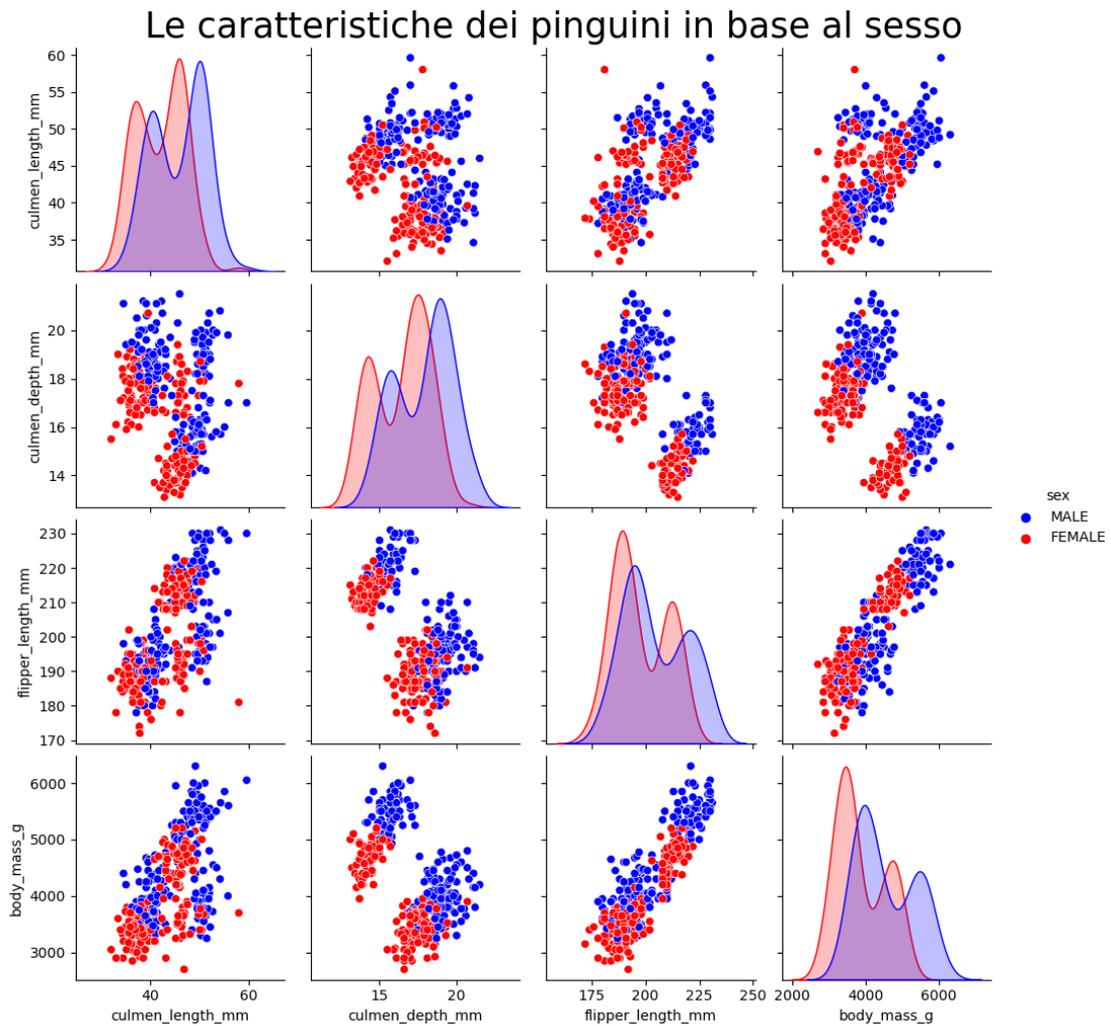


Figura 3.10: L'output del comando `penguins` che utilizza la libreria `seaborn`.

la comprensione. Infine si possono utilizzare i comandi che suddividono i dati in caratteristiche *feature* e *target*. Come *feature* vengono scelte le caratteristiche fisiche quantitative dei pinguini e come *target* il sesso.

A questo punto si può procedere con lo spiegare come funziona un albero decisionale: il modo più immediato è creare un albero il più semplice possibile sul dataset in questione e con l'obiettivo che ci si è prefissi, ovvero prevedere il sesso dei pinguini. Un albero decisionale è un albero di nodi decisionali, ognuno dei quali è associato a una domanda su una *feature*. Da ogni nodo derivano tanti archi quante sono le possibili risposte alla domanda. Il nodo di partenza si definisce radice, mentre i nodi terminali si definiscono foglie [46]. Si può visualizzare un semplice albero con due livelli ovvero di profondità pari a due; quello ottenuto dal dataset in

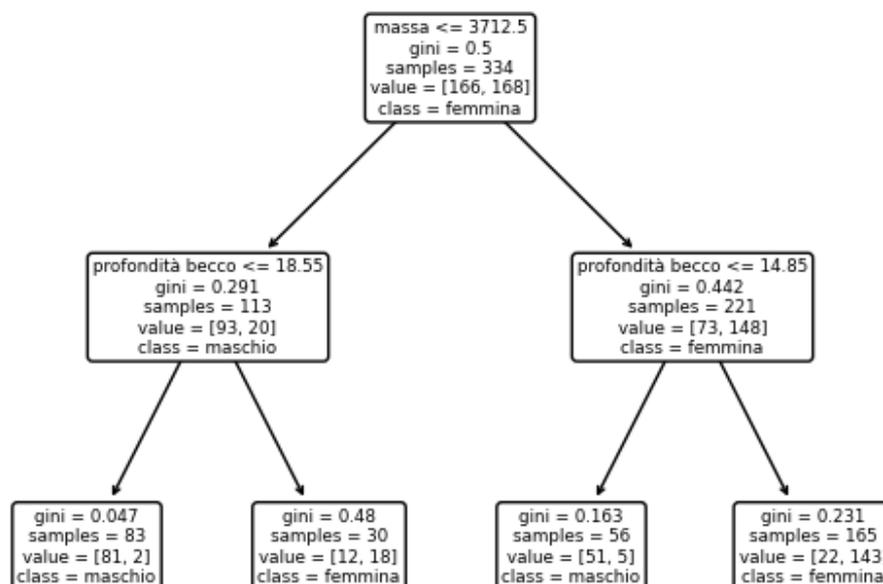


Figura 3.11: L'output del comando che permette di stampare l'albero con profondità pari a due.

questione si può vedere in Figura 3.11. L'albero si legge dall'alto verso il basso in questo modo: per prima cosa l'algoritmo si chiede se la massa del pinguino è minore o uguale a 3712,5 grammi. Se la risposta è positiva si segue il ramo di sinistra e si chiede se la profondità del becco è minore o uguale a 18,55 millimetri. Se è vero allora categorizza l'esemplare come maschio, se è falso come femmina. Se la risposta sulla massa invece risulta negativa, si prosegue sul ramo di destra e si chiede se la profondità del becco è minore o uguale a 14,85 millimetri. Se è vero l'esemplare viene categorizzato come maschio, in caso contrario come femmina. Si osservi che la struttura dell'algoritmo è semplice e utilizza le feature scelte dall'algoritmo e anche i valori scelti in autonomia: non c'è stato perciò bisogno di esplicitare le regole; l'algoritmo le ha create.

La quarta fase consiste nel dividere i dati in un insieme di training e uno di test: capire questo concetto è molto importante per la comprensione del funzionamento generale dell'IA. I dati di training serviranno per addestrare il modello e quelli di test poi per metterlo alla prova. La percentuale di dati da utilizzare per le due fasi è arbitraria; bisogna però tener conto che i dati da utilizzare per l'allenamento dovranno essere un numero sufficiente affinché possa avvenire l'addestramento ma allo

stesso tempo ci sarà bisogno di un numero sufficiente di dati per testare il modello creato. Normalmente si utilizza il 70-75% dei dati per l'addestramento e il 25-30% per il test [46]. Vi è un comando su Python, che si chiama `train_test_split()` proposto nell'Appendice E che permette di creare casualmente questi due gruppi, specificando le percentuali scelte.

A questo punto si è pronti per la quinta fase, quella dell'addestramento del modello. Il modello scelto è basato sugli alberi decisionali. Si definisce "random forest" che si può tradurre come "foresta casuale". L'idea sottostante è quella di creare una moltitudine di alberi decisionali, una foresta appunto, nel modo più casuale possibile: l'algoritmo crea più alberi decisionali e per ciascun albero viene estratto casualmente un sottoinsieme dall'insieme dei dati di training che sarà usato per l'addestramento e vengono estratte casualmente anche le feature su cui addestrarlo. Di fatto poi, la predizione ovvero l'output desiderato dell'algoritmo, verrà fornito mediando tra le predizioni di tutti gli alberi che la compongono [46]. Intuito il funzionamento, basta utilizzare il comando `fit()` per addestrare il modello.

Infine resta da valutare il modello e migliorarlo. Si sarebbe potuta effettuare prima una fase di test del modello, in cui ad esempio si potevano fornire dei nuovi dati raccolti e verificare la classificazione che proponeva l'algoritmo. Per valutare il modello si usa l'accuratezza, ovvero la percentuale di risposte corrette. Seguendo i comandi dell'Appendice E si trovano i seguenti risultati:

Accuratezza TRAINING: 0.957

Accuratezza TEST: 0.950

che indicano come sui dati di training la percentuale di predizioni esatte sia pari al 95,7% e sui dati di test sia pari al 95,0%. Ci si può ritenere soddisfatti del modello. Come ultima attività si può proporre agli studenti di verificare se modificando la profondità dell'albero, ovvero modificando il valore contenuto nel comando: `classificatore_pinguini=RandomForestClassifier(max_depth=5)` cambia l'accuratezza ottenuta e quindi se può essere il caso di modificare il modello. Si possono far testare ad esempio come cambiano i valori se la profondità degli alberi varia tra 1 e 10. I risultati ottenuti (che possono variare leggermente) si possono visualizzare in Tabella 3.7 e commentare con gli studenti. Quello che succede è che entrambe le accuratze crescono velocemente all'aumentare del parametro; l'accuratezza dei dati di training è sempre maggiore o uguale a quella dei dati di test e si assesta presto al 100%, mentre quella sui dati di test sale per poi assestarsi attorno ad un valore inferiore al 100%. Dai risultati si può concludere che la scelta della profondità pari a cinque può considerarsi una buona scelta valutando l'accuratezza dei dati di test e il costo computazionale (sicuramente inferiore all'aver utilizzato una profondità superiore).

Tabella 3.7: Risultati dell'accuratezza al variare della profondità dell'albero.

Profondità	Accuratezza training	Accuratezza test
1	0.863	0.851
2	0.901	0.901
3	0.906	0.911
4	0.944	0.950
5	0.957	0.950
6	0.974	0.941
7	0.983	0.941
8	1.000	0.950
9	1.000	0.950
10	1.000	0.931



# Conclusioni

A conclusione di questo lavoro, si ritiene di poter affermare che l'intelligenza artificiale è un'eccellente strumento, che può avere utilizzi e risvolti molto interessanti nella didattica. L'IA può essere un sostegno all'insegnante nelle spiegazioni e nelle esercitazioni. Può essere uno strumento economico e duttile per gli studenti e il loro studio personale. L'IA può essere per insegnanti e studenti insieme uno stimolo e un arricchimento della creatività perché raccoglie idee diverse, superando i limiti della memoria individuale e della visione del singolo. Si può mettere da parte l'idea che l'IA comprometterà il ruolo dell'insegnante in quanto non avrà mai la creatività e l'empatia di cui è dotato un insegnante preparato e motivato.

Nella didattica della matematica sono ancora molti i limiti concreti di questi strumenti legati principalmente alla disciplina in sé e ai diversi linguaggi che utilizza. Si è voluto mostrare nella tesi come ad oggi sia basso il rischio che gli studenti possano copiare tutti i compiti di matematica ad esempio da ChatGPT. Nonostante i limiti, si possono già proporre attività concrete stimolanti e legate agli argomenti scolastici che permettano agli studenti di entrare in contatto con l'IA e di approfondire il tema. Questo sarà importantissimo anche per il futuro inserimento degli studenti nel mondo del lavoro.

Considerato soprattutto il target della tesi, ovvero studenti in fase di formazione, risulta essenziale anche l'educazione all'uso consapevole e funzionale dell'IA. Questa educazione viene affidata alla scuola e quindi agli insegnanti, che devono essere in costante aggiornamento. Gli insegnanti devono educare ad un uso consapevole delle nuove tecnologie, per far sì che diventino uno stimolo per sviluppare idee, soluzioni e collegamenti nuovi, senza far pensare agli studenti che questi strumenti possano sostituire le conoscenze e le competenze del singolo individuo.

# Appendice A

## Definizioni e formule di statistica

Vengono qui proposte le definizioni e formule di statistica utilizzate. Vengono proposte così come si trovano nel libro di testo di riferimento, ovvero *Matematica blu 2.0*[23].

Media aritmetica di  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$M = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Media aritmetica ponderata di  $x_1, x_2, \dots, x_n$  con pesi  $p_1, p_2, \dots, p_n$ :

$$P = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

Media geometrica di  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

Media armonica di  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$A = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

Media quadratica di  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

Data una sequenza di numeri  $x_1, x_2, \dots, x_n$  con valore medio  $M$  si definiscono:

Scarto semplice medio:

$$S = \frac{|x_1 - M| + |x_2 - M| + \dots + |x_n - M|}{n}$$

Deviazione standard:

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{(x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + \dots + (x_n - M)^2}{n}}$$

L'indice  $\chi^2$  è la somma dei rapporti tra il quadrato di ogni contingenza (la differenza tra la frequenza assoluta rilevata e la frequenza assoluta teorica) e la relativa frequenza teorica, ovvero la frequenza che dovremmo osservare se i due caratteri fossero perfettamente indipendenti:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^h \frac{(n_{ij} - t_{ij})^2}{t_{ij}}$$

Date  $n$  coppie  $(x_i; y_i)$  di una rilevazione statistica su due variabili  $X$  e  $Y$ , indichiamo con  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  le medie aritmetiche di ciascuna variabile:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} \quad \bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{n}$$

La covarianza di  $X$  e  $Y$  è la media dei prodotti degli scarti, ovvero i singoli scostamenti dai valori medi:

$$\sigma_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}$$

Il coefficienti di correlazione lineare delle variabili  $X$  e  $Y$ , detto anche coefficiente di Bravais-Pearson:

$$r = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

Il coefficiente di regressione  $a$  di  $Y$  su  $X$  ovvero il coefficiente angolare della retta di regressione calcolata con il metodo dei minimi quadrati si trova con:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

In alternativa si può anche ricavare come:

$$a = r \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$$

Il coefficiente di regressione  $b$  di  $X$  su  $Y$  ovvero il reciproco del coefficiente angolare della retta di regressione calcolata con il metodo dei minimi quadrati si trova con:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

In alternativa si può anche ricavare come:

$$b = r \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}.$$

# Appendice B

## Media armonica e aritmetica

**ChatGPT** è un software di OpenAI basato sull'intelligenza artificiale che risponde alle domande degli utenti. Gli ho posto due volte la seguente domanda: «Un aereo viaggia da Roma a New York. All'andata le correnti favorevoli permettono all'aereo di viaggiare alla velocità di crociera di 932 Km/h; al ritorno la velocità è, invece, di 856 Km/h. Qual è la velocità media dell'aereo nell'intero percorso andata-ritorno?» e mi ha dato due risposte diverse.

### Risposta 1

---

[ChatGPT] Per calcolare la velocità media dell'aereo nell'intero percorso andata-ritorno, possiamo utilizzare la media aritmetica delle velocità di andata e ritorno. La formula per calcolare la media aritmetica è la seguente:

$$\text{Velocità Media} = (\text{Velocità di Andata} + \text{Velocità di Ritorno}) / 2$$

Dato che la velocità di andata è di 932 Km/h e la velocità di ritorno è di 856 Km/h, possiamo calcolare la velocità media come segue:

$$\text{Velocità Media} = (932 \text{ Km/h} + 856 \text{ Km/h}) / 2 \quad \text{Velocità Media} = 1788 \text{ Km/h} / 2$$

$$\text{Velocità Media} = 894 \text{ Km/h}$$

Quindi, la velocità media dell'aereo nell'intero percorso andata-ritorno è di 894 chilometri all'ora.

### Risposta 2

---

[ChatGPT] Per calcolare la velocità media dell'aereo nell'intero percorso andata-ritorno, è necessario utilizzare la formula della velocità media, che è la distanza totale divisa per il tempo totale impiegato.

Supponiamo che la distanza tra Roma e New York sia la stessa sia all'andata che al ritorno. Chiamiamo questa distanza "D". La velocità media può essere calcolata come segue:

$$\text{Velocità media} = \text{Distanza totale} / \text{Tempo totale}$$

Per l'andata, la velocità dell'aereo è di 932 Km/h, e per il ritorno è di 856 Km/h. Quindi il tempo impiegato per l'andata sarà  $D/932$  e per il ritorno sarà  $D/856$ .

Il tempo totale impiegato nell'intero percorso sarà la somma dei tempi dell'andata e del ritorno:

$$\text{Tempo totale} = D/932 + D/856$$

Ora, possiamo calcolare la velocità media:

$$\text{Velocità media} = \text{Distanza totale} / \text{Tempo totale} \quad \text{Velocità media} = D / (D/932 + D/856)$$

Per semplificare questa espressione, possiamo estrarre D come fattore comune nel denominatore:

$$\text{Velocità media} = 1 / (1/932 + 1/856)$$

Ora possiamo calcolare il valore numerico:

$$\text{Velocità media} = 1 / [(856 + 932) / (856 * 932)]$$

$$\text{Velocità media} = 1 / (1788 / 799392)$$

$$\text{Velocità media} \approx 4475,48 \text{ Km/h}$$

Quindi, la velocità media dell'aereo nell'intero percorso andata-ritorno è di circa 4475,48 chilometri all'ora.

Provate a rispondere alle seguenti domande:

1. Quale dei due risultati numerici di ChatGPT ti sembra più convincente? Perché?

---



---



---

2. Se l'aereo al ritorno avesse, caso assurdo, viaggiato ai 10km/h, quale sarebbe stata la velocità media calcolata con la media aritmetica? Vi sembra plausibile?

---



---



---

3. Quali errori di calcolo trovi nella Risposta 2? Se ChatGPT avesse calcolato correttamente, che risultato avrebbe ottenuto? Vi sembra plausibile?

---



---



---

4. Si nasconde un altro errore nella Risposta 2, riuscite a trovarlo?

---

---

---

5. Riscrivete il procedimento di ChatGPT nella Risposta 2, senza gli errori.

---

---

---

---

---

6. Calcolate la media armonica come visto in classe e confrontatela con il procedimento al punto precedente. Cosa si può osservare?

---

---

---

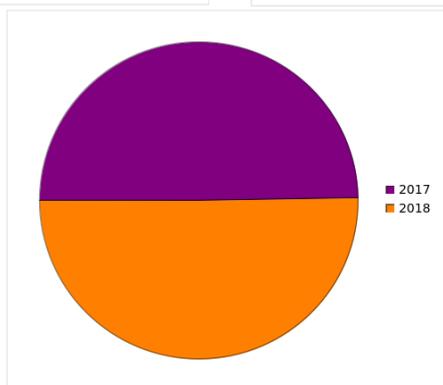
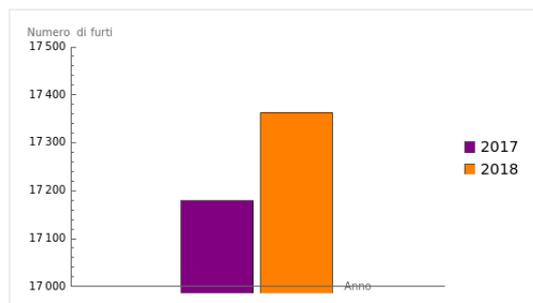
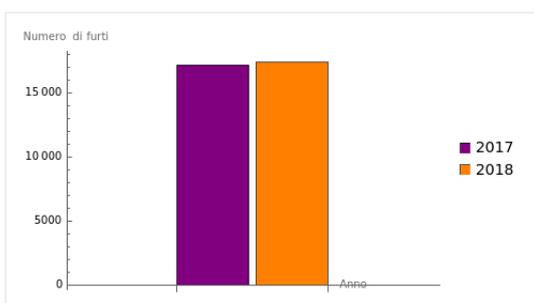
---

# Appendice C

## Rapporti statistici

Nella città di Verona, nel 2017 si sono verificati 17179 furti e nel 2018 17363. Il giornale locale ha deciso di scrivere un articolo sull'aumento dei furti per mettere in cattiva luce il sindaco Rinaldo, eletto ad inizio 2018. Per comunicare con maggior efficacia i dati della tabella, decide di inserire un grafico nell'articolo.

- Quale dei tre grafici proposti vi sembra più opportuno utilizzare e perché?



Nel 2022, quando sta per finire il mandato di Rinaldo (dal 2018 al 2022), il giornale diretto da sua suocera decide di proporre un articolo sui furti, per mettere in luce quanto fossero crollati i numeri dei furti sotto il mandato di Rinaldo. Ecco il numero di furti a disposizione negli ultimi anni:

2017	2018	2019	2020	2021
17179	17363	16093	10750	12998

- Cosa pensate che evidenzi la statistica? Il buon operato di Rinaldo?
- Quale grafico potrebbe essere utilizzato per rappresentare la tabella? Preparatecelo.
- Per valutare questa serie storica, si potrebbero utilizzare i numeri indice. Quali scegliereste e perché? Preparate la tabella con la rappresentazione scelta.

Infine il giornale di Vicenza, pubblica un articolo confrontando i dati dei furti di Vicenza con quelli di Verona. Il numeri di furti di Vicenza li potete trovare qui:

Città	2017	2018	2019	2020	2021
Verona	17179	17363	16093	10750	12998
Vicenza	12369	12207	11589	8283	9342

- Il confronto vi sembra corretto? Se non vi sembra corretto proponete delle soluzioni che rendano più equo il confronto.

**Consegna finale per i giornalisti:** preparate una breve presentazione per spiegare le vostre scelte. Argomentate tutti i punti e preparate un piccola presentazione; potete utilizzare la versione gratuita di Tome.

**Consegna finale per i giudici:** fate le vostre scelte e poi valutate bene le varie scelte che i vostri giornalisti potranno proporvi. Preparatevi a trovare punti di debolezza nei loro ragionamenti e a confutare le loro tesi. Se utile, aiutatevi con la versione gratuita di ChatGPT.

# Appendice D

## Regressione e Correlazione

**ChartGPT** è un software basato sull'intelligenza artificiale che permette di creare grafici a partire da prompt testuali, ovvero da stringhe di testo. Accedete all'indirizzo: <https://www.chartgpt.dev/>. Fate attenzione: avete a disposizione solo tre tentativi gratuiti. Inserite nello spazio vuoto sotto la domanda: "What would you like to visualize?" la risposta "Show me noise pollution data by city". Stiamo chiedendo all'applicazione di proporci una visualizzazione dei dati dell'inquinamento acustico per città.

Provate a rispondere alle seguenti domande:

- Il grafico vi sembra chiaro?

---

---

---

- Vi sembra che manchi qualche informazione nel grafico?

---

---

---

- Da dove provengono i dati? Vi sembra una fonte affidabile?

---

---

---

- Riuscite a ritrovare i dati completi dalla fonte?

---

---

---

**Excel** è ancora molto usato per l'analisi dei dati. Aprite il file Excel fornito e osservate i dati: sono presenti 18 città europee e i dati relativi all'inquinamento acustico e alla perdita dell'udito. Provate a rispondere alle seguenti domande:

- Definite  $X$ ="Inquinamento Acustico" e  $Y$ ="Perdita dell'udito". Vi aspettate che le due variabili siano correlate? Perché?

---

---

---

- Disegnate su Excel un grafico a dispersione che rappresenti le due variabili.
- Riempite le caselle arancioni fino a trovare "a"; qual è il suo valore? Qual è l'equazione della retta di regressione trovata? Inserite la retta nello stesso grafico.

---

---

---

- Calcolate il coefficiente di regressione lineare. Quanto risulta essere? Cosa si può concludere?

---

---

---

**Federica Fracapane** si definisce "information designer", ovvero il suo lavoro consiste nel presentare informazioni e dati in un modo efficace e accattivante. La sua opera "Noise Pollution" del 2020 è stata acquisita dal museo MoMa di New York. La potete visualizzare sul sito: <https://www.behance.net/gallery/96908251/Noise-pollution>. Provate a rispondere alle seguenti domande:

- Quali dati rappresenta l'opera?

---

---

---

- Il grafico è di facile lettura?

---

---

---

- Perché secondo voi un museo l'ha acquisita?

---

---

---

- Ritenete che l'IA potrebbe fare un grafico simile? O potrà un domani?

---

---

---

# Appendice E

## Machine learning con Python

Per prima cosa scaricate il file “penguins.csv” che trovate al link sotto e salvatelo sul desktop:

<https://github.com/allisonhorst/palmerpenguins/tree/master/inst/extdata>

Vengono qui indicati i principali comandi utili nelle varie fasi dell’esercitazione con Python:

1. importare i dati. Sono necessarie le seguenti librerie, che per comodità rinominiamo con abbreviazioni:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import pandas as pd
```

Per importare il file è necessario digitare:

```
pinguini=pd.read_csv("percorso_del_file_penguins.csv")
```

Per visualizzare le prime dieci righe del dataset si può usare:

```
pinguini.head(10)
```

Per ottenere dati statistici sul dataset si può utilizzare il comando:

```
pinguini.describe()
```

2. preparare e ripulire i dati; Per pulire il dataset si può utilizzare il comando:

```
pinguini.dropna(inplace=True)
```

3. scegliere il modello da utilizzare;

```
from sklearn import tree
from sklearn.ensemble import RandomForestClassifier
```

Suddividere i dati in caratteristiche feature e target:

```
features=["culmen_length_mm", "culmen_depth_mm",
"flipper_length_mm", "body_mass_g"]
x=pinguini[features]
y=pinguini["sex"]
```

Per visualizzare un albero di profondità pari a due utilizzare il comando:

```
albero=tree.DecisionTreeClassifier(max_depth=2)
albero.fit(x,y)
tree.plot_tree(albero, feature_names=["lunghezza becco",
"profondità becco", "lunghezza della pinna", "massa"],
class_names=["maschio","femmina"], label="all", rounded=True)
plt.show()
```

4. dividere i dati in insieme di training e di test;

```
from sklearn.model_selection import train_test_split
x_train,x_test,y_train,
y_test=train_test_split(x,y,train_size=0.7,random_state=0)
```

5. addestrare il modello;

```
classificatore_pinguini=RandomForestClassifier(max_depth=5)
classificatore_pinguini.fit(x_train.values,y_train.values)
```

Per verificare la percentuale di risposte corrette del modello creato su dati di training e di test:

```
print(f"Accuratezza TRAINING:
{classificatore_pinguini.score(x_train,y_train):.3f}")
print(f"Accuratezza TEST:
{classificatore_pinguini.score(x_test,y_test):.3f}")
```

Per verificare a quali feature ha dato più rilevanza il modello si può usare:

```
for i,f in enumerate(features):  
    print(f"Importanza di {f}:  
          {classificatore_pinguini.feature_importances_[i]:.2f}")
```

6. valutare il modello e migliorarlo; per verificare l'accuratezza utilizzare:

```
classificatore_pinguini=RandomForestClassifier(max_depth=5)  
classificatore_pinguini.fit(x_train.values,y_train.values)  
print(f"Accuratezza TRAINING:  
{classificatore_pinguini.score(x_train,y_train):.3f}")  
print(f"Accuratezza TEST:  
{classificatore_pinguini.score(x_test,y_test):.3f}")
```



# Bibliografia

- [1] Diego Barbera. *Perché ChatGPT non è un genio in matematica*. Wired. 2022. URL: <https://www.wired.it/article/chatgpt-matematica/#>.
- [2] Dani Ben-Zvi e Joan Garfield. *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*. Gen. 2004. ISBN: 978-1-4020-2277-7. DOI: 10.1007/1-4020-2278-6.
- [3] Gloria Chiocci. *Alessandro e Pierpaolo: “Datapizza che ad oggi è la più grande community italiana di appassionati di Data Science e Intelligenza artificiale”*. Il Sole 24 ore. 2023. URL: <https://gloriachiocci.nova100.ilsole24ore.com/2023/01/15/datapizza/>.
- [4] Karl Cobbe et al. *Training Verifiers to Solve Math Word Problems*. 2021. arXiv: 2110.14168 [cs.LG].
- [5] European Commission, Sport Directorate-General for Education Youth e Culture. *Ethical guidelines on the use of artificial intelligence (AI) and data in teaching and learning for educators*. Publications Office of the European Union, 2022. DOI: doi/10.2766/153756.
- [6] European Commission, Sport Directorate-General for Education Youth e Culture. *Key competences for lifelong learning*. Publications Office, 2019. DOI: doi/10.2766/569540.
- [7] European Commission et al. *DigComp 2.2, The Digital Competence framework for citizens: with new examples of knowledge, skills and attitudes*. Publications Office of the European Union, 2022. DOI: doi/10.2760/115376.
- [8] Nello Cristanini. *La scorciatoia*. il Mulino, 2023. ISBN: 9788815299833.
- [9] Ernest Davis. «Mathematics, word problems, common sense, and artificial intelligence». In: (2023). URL: <https://arxiv.org/pdf/2301.09723.pdf>.
- [10] Ministero dell’Istruzione. *Piano Scuola 4.0*. Ministero dell’Istruzione, 2022. URL: [https://pnrr.istruzione.it/wp-content/uploads/2022/07/PIANO\\_SCUOLA\\_4.0\\_VERSIONE\\_GRAFICA.pdf](https://pnrr.istruzione.it/wp-content/uploads/2022/07/PIANO_SCUOLA_4.0_VERSIONE_GRAFICA.pdf).

- [11] Pietro Di Martino e Rosetta Zan. «Attitude towards mathematics: A bridge between beliefs and emotions». In: *ZDM - International Journal on Mathematics Education* 43 (ago. 2011), pp. 471–482. DOI: 10.1007/s11858-011-0309-6.
- [12] Agenzia per l'Italia Digitale. *Libro Bianco sull'Intelligenza Artificiale al servizio del cittadino*. Agenzia per l'Italia Digitale, 2018. URL: <https://ia.italia.it/assets/librobianco.pdf>.
- [13] *Elements of AI*. 2018. URL: <https://www.elementsofai.com/>.
- [14] *Elements of AI, primi passi verso l'Intelligenza artificiale*. 2020. URL: <https://innovazione.gov.it/notizie/articoli/elements-of-ai-primi-passi-verso-l-intelligenza-artificiale/>.
- [15] Commissione Europea. *L'intelligenza artificiale per l'Europa*. Ufficio delle pubblicazioni, 2018. URL: <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/IT/TXT/PDF/?uri=CELEX:52018DC0237&from=IT>.
- [16] Commissione Europea. *Piano d'azione per l'istruzione digitale 2021-2027*. Ufficio delle pubblicazioni, 2020. URL: <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/IT/TXT/PDF/?uri=CELEX:52020DC0624>.
- [17] Commissione Europea. *Pilastro europeo dei diritti sociali*. Ufficio delle pubblicazioni, 2018. DOI: doi/10.2792/332183.
- [18] Commissione Europea. *Plasmare il futuro digitale dell'Europa*. 2023. URL: <https://digital-strategy.ec.europa.eu/it/policies/european-approach-artificial-intelligence>.
- [19] Massimo Ferri. *Intelligenza artificiale e scuola: se ChatGPT fa i compiti, come sarà la didattica?* Fatto Quotidiano. 2023. URL: <https://www.ilmattoquotidiano.it/2023/03/05/intelligenza-artificiale-e-scuola-se-chatgpt-fa-i-compiti-come-sara-la-didattica/7080178/>.
- [20] Simon Frieder et al. *Mathematical Capabilities of ChatGPT*. 2023. arXiv: 2301.13867 [cs.LG].
- [21] Sarah Friedrich et al. «Is there a role for statistics in artificial intelligence?» In: *Advances in Data Analysis and Classification* 16 (2022), pp. 823–846. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11634-021-00455-6>.
- [22] Bill Gates. *The Age of AI has begun*. 2023. URL: <https://www.gatesnotes.com/The-Age-of-AI-Has-Begun>.
- [23] Massimo Bergamini e Graziella Barozzi e Anna Trifone. *Matematica blu 2.0*. Vol. 3. Zanichelli, 2020. ISBN: 9788808890986.
- [24] Massimo Bergamini e Graziella Barozzi e Anna Trifone. *Matematica blu 2.0*. Vol. 1. Zanichelli, 2022. ISBN: 9788808291745.

- [25] Karen Hao. *China has started a grand experiment in AI education. It could reshape how the world learns*. MIT Technology Review. 2019. URL: <https://www.technologyreview.com/2019/08/02/131198/china-squirrel-has-started-a-grand-experiment-in-ai-education-it-could-reshape-how-the/>.
- [26] Will Douglas Heaven. *ChatGPT is everywhere. Here's where it came from*. MIT Technology Review. 2023. URL: <https://www.technologyreview.com/2023/02/08/1068068/chatgpt-is-everywhere-heres-where-it-came-from/>.
- [27] Will Douglas Heaven. *ChatGPT is going to change education, not destroy it*. MIT Technology Review. 2023. URL: <https://www.technologyreview.com/2023/04/06/1071059/chatgpt-change-not-destroy-education-openai/>.
- [28] Dan Hendrycks et al. *Measuring Mathematical Problem Solving With the MATH Dataset*. 2021. arXiv: 2103.03874 [cs.LG].
- [29] Frederick Hess. *AI Tutoring Has A Lot To Offer. But So Does Human Mentoring*. Forbes. 2023. URL: <https://www.forbes.com/sites/frederickhess/2023/05/10/ai-tutoring-has-a-lot-to-offer-but-so-does-human-mentoring/?sh=3cb9b0645280>.
- [30] INVALSIopen. *Cos'è e come funziona l'Indagine OCSE PISA*. INVALSIopen. 2019. URL: <https://www.invalsiopen.it/cosa-e-come-funziona-indagine-ocse-pisa/>.
- [31] INVALSIopen. *Il coding a scuola per lo sviluppo del pensiero computazionale*. INVALSIopen. 2022. URL: <https://www.invalsiopen.it/coding-scuola-pensiero-computazionale/>.
- [32] Ministero dell'Istruzione e del Merito. *Scuola Futura*. 2021. URL: <https://scuolafutura.pubblica.istruzione.it/>.
- [33] Aitor Lewkowycz et al. *Solving Quantitative Reasoning Problems with Language Models*. 2022. arXiv: 2206.14858 [cs.CL].
- [34] World Health Organization. Division of Mental Health. *Life skills education for children and adolescents in schools*. World Health Organization, 1994. URL: <https://apps.who.int/iris/handle/10665/63552>.
- [35] Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. *Indicazioni nazionali*. Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. 2010. URL: <https://www.gazzettaufficiale.it/gunewsletter/dettaglio.jsp?service=1&datagu=2010-12-14&task=dettaglio&numgu=291&redaz=010G0232&tmstp=1292405356450>.

- [36] Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. *Scuola, meno promossi e più debiti anche in classi intermedie superiori*. Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. 2007. URL: <https://archivio.pubblica.istruzione.it/ministro/comunicati/2007/310707.shtml>.
- [37] OECD. *Is Education Losing the Race with Technology?* 2023, p. 111. DOI: <https://doi.org/https://doi.org/10.1787/73105f99-en>. URL: <https://www.oecd-ilibrary.org/content/publication/73105f99-en>.
- [38] Teach to One. *Teach to One Roadmaps*. Teach to One. URL: <https://teachtoone.org/>.
- [39] OpenAI. *GPT-4 Technical Report*. 2023. arXiv: 2303.08774 [cs.CL].
- [40] OpenAI. *Introducing GPT-4*. OpenAI. 2023. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=--khhXchTeE>.
- [41] Maria Gabriella Ottaviani. «Insegnare ed apprendere statistica e probabilità a scuola: il problema dell'aggiornamento degli insegnanti». In: *Periodico di matematiche* 3/2011 (2011), pp. 33–44. URL: <http://www.mathesisnazionale.it/mathesisbcp/congresso-mathesis/Ottaviani.pdf>.
- [42] Domingo Paola. «Esempi di didattica sensata». In: *L'Educazione Matematica* 1 (2005), pp. 11–23.
- [43] Domingo Paola. *Indici sintetici statistici per variabili quantitative: le medie*. URL: <http://www.matematica.it/paola/Stanza%20probabilita/approfondimento%20sul%20concetto%20di%20media.pdf>.
- [44] Domingo Paola. *Le opportunità di riflessione didattica offerte da chatGPT*. MaddMaths! 2023. URL: <https://maddmaths.simai.eu/didattica/didattica-chatgpt/>.
- [45] Mitch Resnick. *Let's teach kids to code*. TED. 2013. URL: [https://www.ted.com/talks/mitch\\_resnick\\_let\\_s\\_teach\\_kids\\_to\\_code/transcript](https://www.ted.com/talks/mitch_resnick_let_s_teach_kids_to_code/transcript).
- [46] Simone Conradi e Roberta Molinari. *Intelligenza artificiale. Cogito ergo sum?* Zanichelli, 2022. ISBN: 9788808199812.
- [47] Reece Rogers. *Come usare ChatGpt per fare brainstorming*. Wired. 2023. URL: <https://www.wired.it/article/chatgpt-brainstorming-consigli/>.
- [48] Roberto Natalini Silvia Benvenuti. «Comunicare la matematica: chi, come, dove, quando e, soprattutto, perchè?!» In: *Rivista dell'Unione Matematica Italiana* 2 (ago. 2017), pp. 175–193.

- [49] Bharath Sriraman e Egan J. Chernoff. «Probabilistic and Statistical Thinking». In: *Encyclopedia of Mathematics Education*. A cura di Stephen Lerman. Cham: Springer International Publishing, 2020, pp. 675–681. ISBN: 978-3-030-15789-0. DOI: 10.1007/978-3-030-15789-0\_100003. URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0\\_100003](https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100003).
- [50] Skuola Network Srl. *Debito scolastico, i corsi di recupero non bastano: 2 su 3 prendono ripetizioni (anche in vacanza)*. Skuola Network Srl. 2022. URL: [https://www.ansa.it/pressrelease/cultura/2022/07/27/debito-scolastico-i-corsi-di-recupero-non-bastano-2-su-3-prendono-ripetizioni-anche-in-vacanza\\_b238e1e8-b9bd-4878-aa47-3158b7262f7c.html](https://www.ansa.it/pressrelease/cultura/2022/07/27/debito-scolastico-i-corsi-di-recupero-non-bastano-2-su-3-prendono-ripetizioni-anche-in-vacanza_b238e1e8-b9bd-4878-aa47-3158b7262f7c.html).
- [51] Istat – Istituto nazionale di statistica. *Delitti denunciati dalle forze di polizia all'autorità giudiziaria*. URL: [http://dati.istat.it/Index.aspx?DataSetCode=dccv\\_delittips](http://dati.istat.it/Index.aspx?DataSetCode=dccv_delittips).
- [52] Courtney Taylor. *Differences Between Population and Sample Standard Deviations*. ThoughtCo. 2019. URL: <https://www.thoughtco.com/population-vs-sample-standard-deviations-3126372>.
- [53] Stéphan Vincent-Lancrin e Reyer van der Vlies. «Trustworthy artificial intelligence (AI) in education». In: 218 (2020). DOI: <https://doi.org/https://doi.org/10.1787/a6c90fa9-en>. URL: <https://www.oecd-ilibrary.org/content/paper/a6c90fa9-en>.
- [54] Shuai Wang et al. «When adaptive learning is effective learning: comparison of an adaptive learning system to teacher-led instruction». In: *Interactive Learning Environments* 31 (ago. 2020), pp. 1–11. DOI: 10.1080/10494820.2020.1808794.
- [55] Stephen Wolfram. *ChatGPT Gets Its 'Wolfram Superpowers'!* Stephen Wolfram Writings. 2023. URL: [writings.stephenwolfram.com/2023/03/chatgpt-gets-its-wolfram-superpowers](https://writings.stephenwolfram.com/2023/03/chatgpt-gets-its-wolfram-superpowers).



# Ringraziamenti

Ringrazio la professoressa Cattabriga che è stata una guida sicura durante tutta la stesura della tesi e mi ha seguito con disponibilità, gentilezza e consigli preziosi.

Ringrazio la professoressa Fabbri che fin dal primo momento ha mostrato interesse ed entusiasmo per il progetto e mi ha fornito gli strumenti e gli spunti per impostarlo in maniera sistematica.

Ringrazio gli insegnanti che ho incontrato nel mio percorso e che hanno creduto in me nonostante la poca voglia di studiare che mi caratterizzava nell'adolescenza. Cercherò di essere all'altezza del compito e di vedere gli studenti come fuochi da accendere e non come vasi da riempire.

Ringrazio i miei genitori che negli ultimi 15 anni sono stati i miei più grandi sostenitori e fan e che mi hanno appoggiata e sostenuta in tutte le scelte che ho fatto, anche se controcorrente.

Ringrazio Simone, che mi supporta e sopporta e che ad ogni laurea mi è accanto anche se non ne può più. Questa è l'ultima, lo prometto.

Ringrazio Adele che con la sua esistenza mi sprona ogni giorno ad essere una mamma e una donna migliore. Spero di essere un esempio per te: decidi tu cosa è importante nella tua vita e chi vuoi essere.

Infine a chi arriverà in famiglia nel nuovo anno, grazie per la compagnia e la forza che mi hai donato in questi mesi.