

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

IL RUOLO DEL PROCESSO DI ANTICIPAZIONE NEL PASSAGGIO DALL'ARITMETICA ALL'ALGEBRA

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Maffia

Presentata da:
Erica Fiorini

III Sessione
Anno Accademico 2022/2023

Indice

Introduzione	3
1 Dall'aritmetica all'algebra	5
1.1 Parallelismo tra aritmetica e algebra	5
1.2 Possibili approcci scolastici per ridurre il divario tra aritmetica e algebra	12
2 Quadro teorico di riferimento	17
2.1 L'importanza della rappresentazione	17
2.2 L'uso dei simboli in algebra	21
2.3 Il processo di anticipazione	24
3 Metodologie	28
3.1 Modalità di somministrazione e raccolta dati	28
3.1.1 Questionario	29
3.1.2 Focus Group	30
3.2 Descrizione attività in classe	32
4 Analisi quesiti	34
4.1 Ostacoli all'apprendimento	34
4.1.1 Ostacoli didattici	36
4.1.2 Ostacoli ontogenetici	41
4.1.3 Ostacoli epistemologici	43
4.2 Riflessioni sul processo di anticipazione	52
4.3 Risultati	57
Conclusioni	60
Appendice A	63
Appendice B	127

Introduzione

L'obiettivo della presente tesi è quello di indagare il processo di anticipazione nel contesto del passaggio dal calcolo aritmetico a quello algebrico. Si vogliono analizzare i processi cognitivi che predominano negli studenti che si trovano ad affacciarsi al mondo dell'algebra, attraverso una panoramica degli ostacoli e difficoltà che gli studenti incontrano durante questo momento cruciale del percorso scolastico.

La tesi si struttura in quattro capitoli, dei quali diamo una breve presentazione di seguito.

Il primo capitolo presenta il parallelismo tra l'aritmetica e l'algebra attraverso un'analisi teorica. Si evidenziano le forti analogie tra esse, soffermandosi in modo particolare sulla fattorizzazione in contesto numerico e algebrica e sulle difficoltà nel passaggio da una situazione all'altra. Successivamente, si pone l'attenzione su quali siano gli ostacoli che gli studenti incontrano in questa transizione e quali possano essere le cause.

Si prendono infine in esame alcune possibili proposte didattiche che potrebbero agevolare questo passaggio, le quali prevedono un'introduzione del pensiero algebrico evitando inizialmente una sua formalizzazione, sfruttando basi algebriche che gli studenti già manipolano agevolmente.

All'interno del secondo capitolo troviamo il quadro teorico di riferimento, si ribadisce l'importanza dell'uso di varie rappresentazioni semiotiche per introdurre concetti, sottolineando le potenzialità di artefatti discorsivi come strumenti di mediazione. Viene evidenziata inoltre la necessità di acquisire capacità di utilizzo del linguaggio simbolico, sostenendo l'idea di spronare gli allievi ad avere una consapevolezza del senso e del significato che hanno i simboli che si utilizzano nei processi algebrici.

Si arriva poi a parlare di quello che possiamo chiamare *senso della struttura* di un'espressione algebrica, il quale permette lo sviluppo della capacità

di *anticipare*, di prevedere, data un'espressione algebrica, quale possa essere il prodotto finale al quale si vuole arrivare. Si giunge quindi al costrutto centrale della tesi, ovvero l'*anticipazione*, processo che dirige la trasformazione della struttura matematica del problema, verso la semplificazione e la risoluzione di un dato compito.

Il terzo capitolo contiene la descrizione delle metodologie con cui è stata svolta l'attività, oggetto di analisi nel capitolo seguente. Si tratta di un breve percorso svolto in una scuola secondaria di secondo grado di Bologna, in particolare in due classi prime, alle quali è stato somministrato un questionario che prevedeva lo svolgimento di cinque esercizi su scomposizioni ed equazioni di primo grado. Si presenta come è stato strutturato il questionario e come è stata effettuata la seconda fase di ricerca, dove gli studenti sono stati intervistati attraverso la modalità di Focus Group, all'interno della quale hanno potuto motivare e discutere dei propri elaborati, confrontandosi tra pari.

Arriviamo quindi all'ultimo capitolo dove è presente l'analisi delle risposte degli studenti al questionario, suddivise in base a quali tipologie di ostacoli all'apprendimento si sono presentati nella risoluzione, con una particolare attenzione rivolta al ruolo che ha avuto il processo di anticipazione nello svolgimento degli stessi.

I protocolli degli studenti rivelano difficoltà che possono avere radice in ostacoli didattici, epistemologici e ontogenetici.

I primi sono legati principalmente alla modalità di comunicazione dei concetti da parte dell'insegnante e dal testo scolastico utilizzato, in generale a tutto ciò che definisce il contratto didattico instaurato all'interno della classe.

Gli ostacoli ontogenetici sono invece legati all'im maturità dello studente che non riesce a rapportarsi con conoscenze al di fuori della propria portata. Infine, gli ostacoli epistemologici, collegati al polo del sapere, sono legati a difficoltà concettuali.

Il capitolo si chiude con un riepilogo dei risultati ottenuti, con un'analisi dettagliata di ogni esercizio svolto dagli studenti.

Nella conclusione si propongono alcune implicazioni didattiche possibili, pensate a seguito dell'analisi effettuata, che potrebbero essere utili nell'introduzione dell'algebra all'interno del percorso scolastico.

Si presentano delle riflessioni riguardo a ciò che l'insegnante può cercare di fare per far sviluppare agli studenti un senso delle strutture algebriche, dei significati che esse assumono, al fine di poter far acquisire loro capacità di anticipazione, di previsione dell'oggetto matematico a cui si desidera arrivare.

Capitolo 1

Dall'aritmetica all'algebra

In questo primo capitolo viene data una possibile interpretazione di ciò che comporta per lo studente l'introduzione dell'algebra durante il primo biennio della scuola secondaria, il quale, come si legge nelle Indicazioni nazionali nella sezione Matematica-OBIETTIVI SPECIFICI DI APPRENDIMENTO-PRIMO BIENNIO-Aritmetica e algebra (p.338) [1],

"sarà dedicato al passaggio dal calcolo aritmetico a quello algebrico."

Si analizzano le analogie e le differenze tra un approccio aritmetico e un approccio algebrico, soffermandosi inizialmente sulle analogie tra la fattorizzazione unica in $\mathbb{Z}$ e la fattorizzazione unica di un polinomio a coefficienti in $\mathbb{Z}$. [4]

L'intento è quello di esaminare i due approcci, con considerazioni che saranno utili per l'analisi dei questionari degli studenti che verrà presentata nei capitoli successivi.

1.1 Parallelismo tra aritmetica e algebra

In generale la difficoltà che emerge negli studenti iniziando a parlare di algebra è dovuta al fatto che si richiede loro un certo livello di astrazione al quale non sono abituati, di essere in grado di vedere degli oggetti non tangibili.

Questa è sicuramente una componente fondamentale per capire e interiorizzare alcuni concetti matematici, ma spesso, come evidenzia Sfard [2], non è l'unica possibilità di affrontarli.

Sfard suddivide l'approccio strutturale, descritto precedentemente, da una concezione procedurale, consistente nel vedere concetti matematici come

azioni e algoritmi piuttosto che come oggetti in sé. Sulla base di questa doppia natura che si può dare ai concetti matematici, teorizza che l'apprendimento in matematica avvenga imparando nuovi concetti come delle procedure, le quali poi vengono *reificate* ovvero diventano dei veri e propri oggetti da poter manipolare in quanto tali. Riuscire a vedere l'entità matematica come oggetto significa quindi avere la capacità di trattarlo come se fosse un oggetto reale, esistente, di saperlo individuare "a colpo d'occhio" e manipolarlo nel suo insieme, senza doverlo scomporre nelle sue componenti.

È importante sottolineare che la concezione strutturale e quella operativa non si escludono a vicenda e anche se non sembrano compatibili l'una con l'altra, risultano in realtà essere complementari [2, pp. 4-5].

Per vedere come si può utilizzare questa doppia natura dei concetti matematici, in particolare nell'introduzione dell'algebra, affinché lo studente sviluppi una buona base che permetterà di manipolare strutture algebriche, evidenziamo la presenza di analogie con il calcolo numerico nella costruzione di concetti algebrici, soffermandoci sull'analisi del teorema di fattorizzazione unica in $\mathbb{Z}$ e successivamente sulla fattorizzazione polinomiale.

Teorema 1.1(Fattorizzazione unica in $\mathbb{Z}$). *Ogni numero intero maggiore di 1 o è un numero primo o si può esprimere come prodotto di numeri primi. Tale rappresentazione è unica, se si prescinde dall'ordine in cui compaiono i fattori.*

Dimostrazione. **Esistenza:** si vuole dimostrare che ogni intero $n > 1$ ammette una scomposizione in fattori primi, ovvero si può scrivere $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r$, dove i p_i sono numeri primi.

Procediamo per induzione, in particolare per induzione forte: supponiamo che ogni intero tra 1 e n abbia una fattorizzazione in primi, allora ne segue che n ha una fattorizzazione in primi.

Passo base: $n = 2$ è un primo, dunque un prodotto di primi di un solo termine.

Passo induttivo: sia $n > 2$ e per ogni m tale che $1 < m < n$, m sia prodotto di primi.

per mostrare che n è prodotto di primi consideriamo due casi.

Caso 1: n è primo. In questo caso n è un prodotto di primi di un solo termine.

Caso 2: n non è primo. Per $n > 1$ e n non primo, esiste una fattorizzazione di n non banale $n = a \cdot b$, dove $1 < a < n$ e $1 < b < n$. Dall'ipotesi

induttiva forte sappiamo che a e b ammettono una scomposizione in fattori primi: $a = p_1 \cdots p_k$ e $b = q_1 \cdots q_l$, dove i p_i e i q_j sono primi.

Dunque, si ha $n = p_1 \cdots p_k \cdot q_1 \cdots q_l$, che è un prodotto di primi.

□

Per dimostrare l'unicità utilizziamo il seguente lemma.

Lemma 1.1.1. *Sia p un numero primo e $p \mid ab$, con a e b interi, allora $p \mid a$ o $p \mid b$.*

Dimostrazione. Assumiamo che $p \mid ab$. Se p non divide a , allora $(p, a) = 1$, poiché p è primo. Dunque come conseguenza dell'Identità di Bezout ¹ si ha che se $p \mid ab$ e p non divide a , allora necessariamente $p \mid b$.

□

Il lemma si può generalizzare al caso di un numero finito di interi $a_1, \dots, a_n$, dimostrando che se $p \mid a_1 \cdots a_k$, allora $p \mid a_i$ per qualche i .

Dimostriamo ora l'unicità.

Dimostrazione. Unicità: dimostriamo che se $p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$ sono due fattorizzazioni in primi di n , allora $r = s$ e a meno di riordinare i fattori $p_i = q_i$ per ogni i .

Se $p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$, allora necessariamente $p_1 = q_j$ per qualche j . Questo perché se $p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$, allora $p_1 \mid q_1 \cdots q_s$, dunque $p_1 = q_j$ per qualche j per il lemma precedente.

Procediamo ora per induzione sul numero di fattori che compaiono nelle due fattorizzazioni di n , ovvero $r + s$, supponendo di poter ripetere uno stesso primo.

Passo base: $r + s = 2$, dunque si ha un solo fattore primo $p_1 = q_1$, dunque la tesi.

Passo induttivo: supponiamo ora che $r + s > 2$ e che il teorema sia vero per tutte le coppie di fattori primi uguali per i quali il numero totale di fattori presenti nella scomposizione sia minore di $r + s$.

Se abbiamo $p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$, allora $r > 1$ e $s > 1$, poiché se $r = 1$ o $s = 1$ allora uno dei due membri è un numero primo, quindi anche l'altro membro

¹**Teorema** (Identità di Bezout). Dati due numeri interi a e b , con $(a, b) \neq (0, 0)$, esistono due numeri interi m e n tali che $MCD(a, b) = am + bn$.

deve essere un numero primo e si ha $r = s = 1$, ma $r + s > 2$.

Sapendo che $p_1 = q_j$ per qualche j , riordinando i fattori possiamo supporre che $p_1 = q_1$.

Dunque la fattorizzazione in primi diventa

$$p_1 p_2 \cdots p_r = p_1 q_2 \cdots q_s.$$

Dividendo entrambi i membri per p_1 si ottiene

$$p_2 \cdots p_r = q_2 \cdots q_s.$$

Nella precedente equazione il numero di fattori primi che compaiono ad ogni membro sono: $(r - 1) + (s - 1) = r + s - 2$, che è minore di $r + s$. Per ipotesi induttiva si ha che $r = s$ e a meno di riordinare i fattori $p_i = q_i$ per ogni $i \geq 2$.

Combinando questo risultato con il precedente $p_1 = q_1$, si ha che $p_i = q_i$ per ogni i .

□

Si può notare che una struttura analoga a questa si ritrova all'interno dell'enunciato del teorema di fattorizzazione unica per i polinomi a coefficienti in $\mathbb{Z}$ e nella sua dimostrazione, costruita in modo del tutto analogo al precedente.

Teorema 1.2 (Fattorizzazione unica in $\mathbb{F}[x]$)). *Sia F un campo. Ogni polinomio non costante $f(x)$ in $F[x]$ può essere scritto come prodotto di polinomi irriducibili. Tale fattorizzazione è unica, a meno dell'ordine dei fattori.*

Dimostrazione. Esistenza: dimostriamo che ogni polinomio non costante $f(x)$ ammette una fattorizzazione in polinomi irriducibili. Procediamo per induzione forte sul grado d del polinomio.

Passo base: $d = 1$, ogni polinomio di grado 1 è irriducibile, dunque prodotto di polinomi irriducibili consistente di un solo termine.

Passo induttivo: supponiamo $d > 1$ e che ogni polinomio di grado minore di d sia fattorizzabile in polinomi irriducibili. Sia $f(x)$ un polinomio di grado d , studiamo due casi:

Caso 1: $f(x)$ è irriducibile, dunque vale la tesi.

Caso 2: $f(x)$ è riducibile. Allora si può scrivere come $f(x) = g(x)h(x)$, dove $0 < \deg(g) < \deg(f)$ e $0 < \deg(h) < \deg(f)$. Per ipotesi induttiva si ha

che $g(x)$ e $h(x)$ hanno una fattorizzazione in polinomi irriducibili del tipo $g(x) = p_1(x) \cdots p_k(x)$ e $h(x) = q_1(x) \cdots q_l(x)$.

Dunque possiamo scrivere il polinomio $f(x)$ come:

$$f(x) = p_1(x) \cdots p_k(x) q_1(x) \cdots q_l(x)$$

che è un prodotto di irriducibili, dunque si ha la tesi. $\square$

Per dimostrare l'unicità enunciamo il seguente lemma.

Lemma 1.2.1. *Se $p(x)$ è irriducibile in $F[x]$ e $p(x) \mid a(x)b(x)$ in $F[x]$, allora $p(x) \mid a(x)$ oppure $p(x) \mid b(x)$.*

Dimostrazione. Se $p(x)$ non divide $a(x)$ allora $(p(x), a(x)) = 1$ in $F[x]$ perché $p(x)$ è irriducibile. Dall'identità di Bezout in $F[x]$, la condizione $p(x) \mid a(x)b(x)$ and $(p(x), a(x)) = 1$ implica che $p(x) \mid b(x)$. $\square$

Il lemma precedente può essere generalizzato per k numero di fattori, analogamente al caso degli interi. Se $p(x)$ è irriducibile in $F[x]$ e $p(x) \mid a_1(x) \cdots a_k(x)$, allora $p(x) \mid a_i(x)$ per qualche i .

Con questa generalizzazione possiamo dimostrare l'unicità del teorema di fattorizzazione in $F[x]$.

Dimostrazione. **Unicità:** dimostriamo che se $p_1(x) \cdots p_r(x) = q_1(x) \cdots q_s(x)$ dove i $p_i(x)$ e i $q_j(x)$ sono irriducibili, allora $r = s$ e, a meno di riordinare i fattori, si ha che $p_i(x) = c_i q_i(x)$ per ogni i , con $c_i \neq 0$ in F .

Come nel Teorema 1.1 si ha che se $p_1(x) \cdots p_r(x) = q_1(x) \cdots q_s(x)$, allora $p_1(x) = c_j q_j(x)$ per qualche j , con $c_j \neq 0$ in F . Segue che

$$p_1(x) \cdots p_r(x) = q_1(x) \cdots q_s(x) \Rightarrow p_1(x) \mid q_1(x) \cdots q_s(x) \Rightarrow p_1(x) \mid q_j(x)$$

per qualche j . Senza perdita di generalità possiamo assumere $j = 1$. Dunque, $p_1(x) \mid q_1(x)$.

Questo implica che $p_1(x) = c_1 q_1(x)$, per qualche costante c_1 .

Procediamo ora per induzione sul numero dei fattori che compaiono nelle due fattorizzazioni del polinomio, ovvero $r + s$.

Passo base: $r + s = 2$, l'equazione si riduce a $p_1(x) = q_1(x)$, quindi la tesi.

Passo induttivo: supponiamo ora $r + s > 2$ e che la tesi sia vera per tutte le coppie di fattorizzazioni irriducibili per cui il numero totale di fattori sia minore di $r + s$. Se $p_1(x) \cdots p_r(x) = q_1(x) \cdots q_s(x)$, allora $r > 1$ e $s > 1$ con dimostrazione analoga al caso degli interi. Assumiamo che $p_1(x) = c_1 q_1(x)$, a meno di riordinare i fattori, allora $p_1(x) p_2(x) \cdots p_r(x) = \frac{1}{c_1} p_1(x) q_2(x) \cdots q_s(x)$. Dividendo per $p_1(x)$ da entrambe le parti si ottiene:

$$p_2(x) \cdots p_r(x) = \frac{1}{c_1} q_2(x) \cdots q_s(x) \quad (1)$$

A questo punto, dato che $\frac{1}{c_1}$ è una costante, possiamo considerare come unico fattore $\frac{1}{c_1} q_2(x)$.

In questo modo il membro di sinistra in (1) ha $r - 1$ fattori irriducibili e il membro di destra ne ha $s - 1$, in totale quindi la fattorizzazione ha come somma di fattori $r + s - 2 < r + s$. Dall'ipotesi induttiva si ha $r - 1 = s - 1$, dunque $r = s$. Inoltre, a meno di riordinare i fattori si ha $p_2(x) = c \cdot \frac{1}{c_1} q_2(x)$ e $p_i(x) = c_i q_i(x)$ per ogni $i \geq 3$, con $c \neq 0$ e $c_i \neq 0$. Sia $c_2 = c \cdot \frac{1}{c_1}$, ricordando che $p_1(x) = c_1 q_1(x)$, abbiamo mostrato la tesi.

□

Osservando i due teoremi, come abbiamo già ribadito, si evidenzia un'analogia strutturale tra la fattorizzazione in numeri primi e la fattorizzazione in polinomi irriducibili.

Si può vedere che il primo teorema presuppone una conoscenza da parte dello studente di cosa significhi numero primo e cosa si intenda per fattori, in particolare quindi lo studente sarebbe tenuto a conoscere il significato di prodotto di fattori primi.

Questo concetto risulta essere molto importante da capire, in modo che, quando viene introdotto il concetto di prodotto di fattori nel contesto algebrico, si possa sfruttare la struttura algebrica che sta dietro ai polinomi per estendere il concetto di prodotto di fattori, attraverso un parallelismo tra numeri e polinomi come termini di un prodotto.

Si può notare, infatti, che l'insieme dei polinomi viene costruito associando a essi una struttura algebrica ereditata dagli insiemi numerici, quella di campo. Didatticamente viene quindi naturale sottolineare le analogie tra il calcolo numerico e algebrico, in particolare tra l'unicità della fattorizzazione

in numeri primi e la fattorizzazione in polinomi irriducibili, facendo vedere agli studenti che la struttura degli enunciati e dimostrazioni visti sopra sono sviluppati in modo totalmente analogo nei due casi.

Per quanto riguarda la fattorizzazione in polinomi irriducibili, si può notare come lo studente sia chiamato ad effettuare una prima analisi strutturale su cosa sia un monomio o un polinomio, riconoscendo le parti che lo compongono e successivamente interiorizzare i concetti appresi, svolgendo un processo di reificazione, in modo da riuscire a manipolare monomi e polinomi come se fossero degli oggetti in sé e non il risultato dello svolgimento di una procedura, tenendo sempre a mente il parallelo con la fattorizzazione studiata nel caso degli interi.

Per fare un esempio che ci sarà utile nei capitoli successivi, possiamo considerare il semplice monomio " $8x$ ": è importante che lo studente sia capace di riconoscerlo come monomio all'interno di un'espressione e che lo sappia quindi trattare come un'entità unica, sfruttandola per effettuare un raccoglimento o una scomposizione in fattori. È però altrettanto fondamentale che sappia scinderlo nelle sue parti e riconosca la presenza dell'operatore prodotto tra il numero 8 e la variabile x . Se questa consapevolezza viene a mancare all'interno del ragionamento effettuato dallo studente, si può incorrere in misconcezioni riguardanti il vero significato di prodotto di fattori, in particolare si può creare confusione su quali possano essere considerati fattori nel linguaggio polinomiale, ponendosi il dubbio se un numero possa essere considerato come tale oppure non possa essere estratto dall'entità unica formata dal monomio stesso e l'unica possibilità sia manipolare il monomio come oggetto singolo inscindibile.

In generale, come vedremo anche nei capitoli successivi, è quindi molto importante che l'allievo abbia ben chiaro come è composto strutturalmente l'oggetto che sta manipolando, poiché altrimenti potrebbero emergere incomprensioni su quale ruolo l'oggetto abbia all'interno di un processo matematico.

Ciò permetterà in seguito allo studente una maggiore consapevolezza nello svolgere esercizi su raccoglimenti e scomposizioni di polinomi, tenendo bene a mente il parallelo con la fattorizzazione numerica.

1.2 Possibili approcci scolastici per ridurre il divario tra aritmetica e algebra

Le difficoltà che si incontrano nel passaggio tra l'aritmetica e l'algebra nel percorso scolastico possono essere di varia natura e possono essere ricondotte a diverse cause.

Un aspetto a cui si può fare attenzione nell'introduzione del calcolo algebrico è quello di valutare se i nuovi concetti che si intende proporre facciano parte o meno della zona di sviluppo prossimale degli studenti che si hanno di fronte. La *zona di sviluppo prossimale*, ZPD, è un costrutto chiave della teoria di Vigotskij che si può definire come la distanza tra il livello di sviluppo posseduto attualmente dallo studente, *zona di sviluppo attuale*, e il livello potenziale più elevato che lo studente può raggiungere, *zona di sviluppo potenziale*.

Si ha dunque la seguente distinzione in zone:

1. **Zona di sviluppo attuale:** zona in cui lo studente riesce ad apprendere da solo
2. **Zona di sviluppo prossimale:** zona a cui lo studente può arrivare solo se affiancato da qualcuno (di competenza dell'insegnante)
3. **Zona di sviluppo potenziale:** zona che comprende competenze che potenzialmente possono essere raggiunte dallo studente, ma in quel momento non possono essere sviluppate neanche con l'aiuto di qualcuno

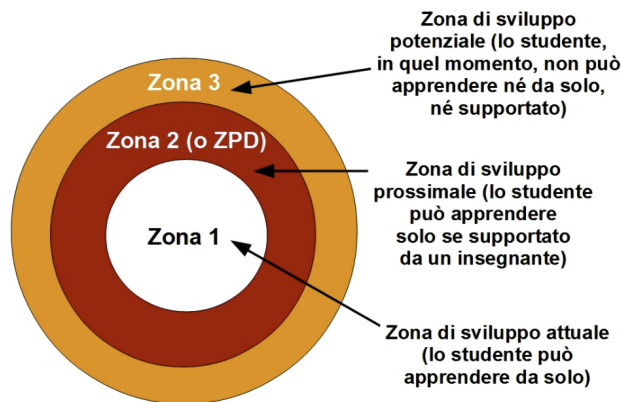


Figura 1.1: Zone di sviluppo, Vigotskij

Si dovrebbe quindi tenere a mente ciò che lo studente può apprendere in quel determinato momento attraverso l'aiuto dell'insegnante, ovvero ciò che si trova nella zona di sviluppo prossimale, e cosa invece appartiene alla zona di sviluppo potenziale, la quale non è ancora accessibile per lo studente.

Una possibilità, pensando in particolare al caso dell'introduzione dell'algebra, potrebbe essere quella di creare in precedenza una base di conoscenze non formali, in modo che possano far sì che il nuovo concetto che si vuole introdurre riesca a prendere posto nella zona di sviluppo prossimale dello studente e possa poi essere elaborato successivamente dallo stesso.

Come propongono Sfard e Caspi [3], un modo per ridurre questo salto tra l'aritmetica e l'algebra, è quello di considerare l'algebra come meta-aritmetica, ovvero di introdurre il calcolo algebrico inizialmente senza una vera e propria formalizzazione, in modo che lo studente sia maggiormente preparato a ragionare in termini algebrici senza affrontare subito il passaggio al calcolo letterale. Gli autori presentano inizialmente una distinzione tra due discorsi algebrici, quello formale e quello informale, che al momento di un'acquisizione di basi solide di algebra potrebbero unificarsi in un discorso unico. [3, pp. 46-47]

Per sviluppare capacità relative al discorso formale, appena gli studenti hanno una padronanza sufficiente sull'aritmetica, si può iniziare a proporre loro esercizi di traduzione di espressioni aritmetiche in un linguaggio discorsivo, focalizzandosi per esempio sull'analisi delle operazioni numeriche presenti. Si possono far costruire agli studenti rappresentazioni schematiche dell'espressione, in modo da evidenziare quale sia l'operazione principale del processo in questione e quali le operazioni secondarie, strutturando una descrizione di ciò che si sta facendo con frasi del tipo "il prodotto di..." piuttosto che "la somma di..." oppure evidenziando attraverso l'ordine delle parole la presenza di parentesi, in base al significato che hanno in quel momento.

Partendo da questo, si può iniziare a introdurre una base algebrica in modo puramente discorsivo, senza formalizzazione letterale, cercando di spronare gli studenti all'uso di un corretto linguaggio per descrivere processi matematici. Descrivendo processi a parole, lo studente è in qualche modo "obbligato" a indagare l'aspetto strutturale, ereditando i ragionamenti che abitualmente effettua nel calcolo aritmetico e adattandoli al nuovo approccio.

Sfard e Caspi presentano un modo per schematizzare espressioni aritmetiche evidenziando quali siano le operazioni da fare, in quale ordine..., questo fa sì che ci sia una analisi iniziale dello studente sulla struttura dell'espressione e una scomposizione di essa in parti in modo da descrivere cosa avviene

in ogni passaggio. Sulla base delle parole utilizzate da ciascuno studente si può poi lavorare sull'importanza del linguaggio e farlo soffermare sul significato di ciascuna parola in relazione al contesto, su come utilizzare verbi e preposizioni.

Quello che gli autori suggeriscono all'insegnante è di coinvolgere gli studenti nella formalizzazione della loro aritmetica naturale, di sollecitarne uno sviluppo spontaneo. Solo successivamente si può passare ad aiutare gradualmente lo studente a prendere consapevolezza di alcune imperfezioni all'interno delle loro soluzioni, in modo da portarlo lentamente alla reificazione e formalizzazione tramite simboli di ciò che era emerso in modo prettamente discorsivo. Superata poi questa prima fase, si può procedere in modo sistematico portando avanti sia ciò che emerge dall'aritmetica spontanea degli studenti, sia indirizzando loro all'uso del discorso algebrico formale. [3, pp. 64-65]

Ciò che si può fare è cercare quindi di introdurre l'algebra come meta-aritmetica in modo graduale sfruttando il più possibile le risorse già presenti nello studente, facendole emergere e, se si ritiene necessario, modificandole in modo costruttivo, verso la reificazione e la conseguente possibilità di formalizzare che sarà possibile solo in un secondo momento. Tutto questo facendo attenzione al fatto che le difficoltà in questo passaggio critico nella matematica possono dipendere da un mancato padroneggiamento del calcolo aritmetico che potrebbe dipendere da vari fattori. È quindi importante indagare quali siano le basi di partenza dello studente e quali lacune si presentano inizialmente, cercando di rafforzarle prima di proseguire con dei passi in avanti.

Un'ulteriore recente proposta di lavoro di introduzione dell'algebra nel contesto scolastico è quello dell'**Early Algebra** proposta all'inizio degli anni '90. Questa avanza l'ipotesi per cui

"il normale percorso 'dall'aritmetica all'algebra' sia troppo limitante (Smith & Thompson, 2007) e che pertanto dovrebbe essere riformulato in modo da dare agli studenti l'opportunità di incontrare il pensiero algebrico sin dal momento in cui sviluppano le prime attività in ambito aritmetico. Questo non significa portare il curriculum di algebra nella scuola primaria, ma riformare il modo in cui si dovrebbe concepire e insegnare l'aritmetica promuovendo il passaggio da una concezione procedurale di questa ad una concezione relazionale e strutturale." [5]

Fare Early Algebra significa per l'insegnante dare agli studenti la possibilità di sviluppare nuovi modi di pensare come "*analizzare le relazioni fra quantità, studiare i cambiamenti, generalizzare, esplorare situazioni problematiche stimolanti, modellizzare, giustificare, provare, prevedere.*" [5]

In questo percorso l'insegnante svolge un ruolo fondamentale che consiste nel gestire i fattori che favoriscono l'approccio alla generalizzazione e nella scelta di situazioni problematiche. [5]

Questo approccio si basa sull'ipotesi che ci sia una forte analogia tra i modi di apprendere attraverso un linguaggio naturale e un linguaggio algebrico. Il docente è chiamato dunque a stimolare questo processo di apprendimento, costruendo un ambiente che stimoli l'elaborazione autonoma di un linguaggio formale, con lo scopo di un'appropriazione graduale del linguaggio algebrico come linguaggio nuovo, costruito attraverso l'introduzione di nuove regole da collocare all'interno di un quadro già presente nello studente.

L'insegnante dovrà quindi aiutare lo studente a riflettere sull'uso del linguaggio, sul significato delle parole che utilizza, per permettere lo sviluppo della capacità di argomentare e generalizzare, inizialmente sotto la propria guida e in un secondo momento rendendo lo studente autonomo di farlo con le proprie capacità che ha acquisito durante il percorso. [5]

All'interno della cornice dell'Early Algebra si inquadra il progetto ArAl proposto dal ricercatore Giancarlo Navarra.

"La prospettiva del progetto è quella di devolvere agli allievi l'esplorazione di situazioni problematiche opportunamente costruite dalle quali, attraverso la riflessione sui processi, l'argomentazione, la discussione, possano emergere e affinarsi le conoscenze matematiche e si possano costruire solide premesse per la loro oggettivazione, cioè per la costruzione di traghetti semantici verso la generalizzazione e la modellizzazione." [6]

L'ipotesi di base è che "*i principali ostacoli cognitivi nell'apprendimento dell'algebra derivino da un insegnamento dell'aritmetica troppo focalizzato, dalla prima elementare, su calcoli e risultati, che in questo modo influenza lo sviluppo del pensiero matematico generando difficoltà di carattere sia cognitivo che emozionale*".

Ciò che si vuole fare è guidare gli alunni in modo da spostare l'attenzione da un pensiero procedurale, tipico di una didattica tradizionale, ad un *pensiero relazionale*, con l'obiettivo di far riflettere gli studenti, di far argomentare

processi matematici, di focalizzarsi più sui processi che sui prodotti. L'obiettivo è quindi quello di costruire in modo graduale il linguaggio algebrico, facendo esperienza sull'uso del linguaggio naturale e il linguaggio matematico per descrivere processi, in modo che gli studenti siano in grado di passare dall'uno all'altro con sicurezza. [6]

Il progetto prevede una nuova pratica didattica; avanza l'ipotesi che sia opportuno spostare questo inizio ai 6 anni, in contrapposizione alla didattica tradizionale, che prevede l'introduzione dell'algebra verso i 13-14 anni di età.

Nell'immagine seguente si può vedere come siano intrecciati l'Early Algebra e lo sviluppo del pensiero algebrico, secondo l'età degli studenti. [7, pp. 3]

Figura 1
Progressione e intrecci
fra l'*early algebra* e
lo sviluppo del pensiero
algebrico.

Early Algebra (EA)																	
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18				
EA						EA-PA				PA							
						Pensiero Algebrico (PA)											

Capitolo 2

Quadro teorico di riferimento

Come abbiamo evidenziato nel capitolo precedente, il passaggio dal calcolo aritmetico a quello algebrico è fonte di grandi difficoltà per gli studenti e dipende fortemente dal modo in cui si presenta l'introduzione dell'algebra nel percorso scolastico. Da molti studi si evince che un'accurata preparazione attraverso manipolazioni e riflessioni sui concetti aritmetici può essere un buon inizio per costruire basi solide per affrontare l'approccio algebrico.

2.1 L'importanza della rappresentazione

Più in generale, il problema risiede nel fatto per cui l'accesso allo studio di ogni oggetto matematico deve essere necessariamente mediato dall'uso di **rappresentazioni**, poiché gli oggetti matematici non sono *ostensivi*, mostrabili e non esistono oggetti da esibire in loro vece.

La matematica, per questo motivo, si serve continuamente di *rappresentazioni semiotiche*.

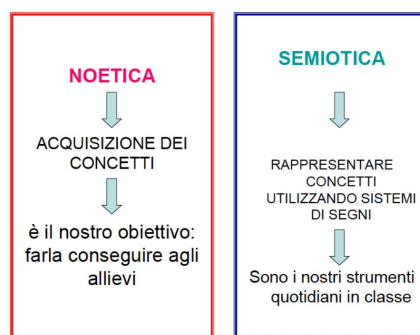


Figura 2.1: Noetica e semiotica

Possiamo definire la semiotica come quella disciplina che studia i segni e il modo in cui questi abbiano un senso. La rappresentazione semiotica è dunque la rappresentazione dei concetti utilizzando sistemi di segni, attraverso una varietà di linguaggio chiamata *registro di rappresentazione*.

Esistono diverse rappresentazioni semiotiche, tra le quali la lingua comune, il linguaggio figurale, il linguaggio aritmetico o uno schema pittografico.

Presentando il problema dei registri di rappresentazione, Duval dice esplicitamente che "*Non c'è noetica senza semiotica*", ovvero non si può arrivare ad un apprendimento concettuale senza utilizzare rappresentazioni [8, pp. 102-103].

Uno dei problemi cruciali che si incontra nell'insegnamento è proprio quello di fornire agli studenti un solo tipo di rappresentazione, senza offrire nessun altro tipo di accesso all'oggetto studiato. Così facendo, lo studente tende ad associare un solo tipo di rappresentazione al concetto e a identificarlo con esso, perciò, al momento in cui si presenta una diversa rappresentazione, non riesce a riconoscerlo.

È invece necessario che gli studenti acquisiscano consapevolezza di cosa siano le rappresentazioni di un concetto e quale sia il modo per utilizzarle. Questo si può fare imparando a manipolare le rappresentazioni simboliche, attraverso attività cognitive legate alla semiotica.

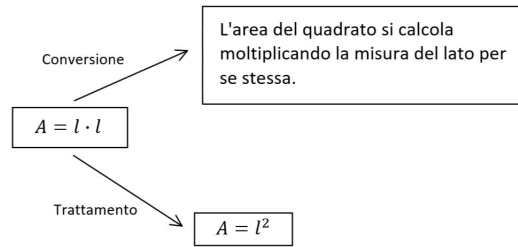
Si possono evidenziare tre attività fondamentali [9]:

- la *rappresentazione* in un dato registro;
- il *trattamento* di tali rappresentazioni, mantenendo lo stesso registro;
- la *conversione* di tali rappresentazioni da un registro all'altro.

È possibile, dunque, sia passare da un registro di rappresentazione all'altro grazie alla conversione, sia mantenere lo stesso registro, ma cambiare tipo di rappresentazione, attraverso il trattamento.

Esempio

Vediamo un'esempio di *conversione* da linguaggio algebrico a linguaggio naturale, in alto, e un esempio di *trattamento* algebrico.



Attraverso queste attività di manipolazione lo studente riesce a prendere consapevolezza del concetto che sta trattando, senza identificarlo con una singola rappresentazione.

Nel caso dell'algebra è molto importante l'uso di diversi registri di rappresentazione, in particolare insistendo sul passaggio dal linguaggio algebrico al linguaggio naturale e viceversa.

Secondo le ricercatrici Maffei e Mariotti [10], è importante distinguere diversi tipi di rappresentazioni dello stesso oggetto matematico (es. espressione algebrica) rispetto ad un significato specifico (es. interpretazione strutturale). In particolare, ne evidenziano tre tipologie: la *rappresentazione standard*, la *rappresentazione ad albero* e il *linguaggio naturale*.

Questi tre tipi di rappresentazione possono essere collocati all'interno della Teoria della mediazione semiotica (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) [11]. Nel processo di mediazione semiotica l'insegnante veste il ruolo di mediatore usando un artefatto per presentare un contenuto matematico agli studenti.

All'interno di questo quadro, i tre tipi di rappresentazione possono essere considerati artefatti che l'insegnante può utilizzare in modo che gli studenti possano gradualmente far evolvere i significati personali in significati matematici. In questo modo l'artefatto diventa uno ***strumento di mediazione semiotica*** [10].

In questo contesto, il funzionamento di un artefatto come strumento di mediazione semiotica, riguarda la duplice relazione che tale artefatto ha sia con i significati che emergono dal suo uso per compiere un compito specifico, sia con i significati matematici evocati in tale uso, così come sono riconosciuti

da un esperto. Questa duplice relazione è chiamata *potenziale semiotico* di un artefatto. [10]

Il linguaggio naturale può essere considerato un *artefatto discorsivo*, ovvero potenzialmente uno strumento di mediazione semiotica rispetto al significato di struttura dell'espressione algebrica.

Per compiere il passaggio dal linguaggio naturale a quello algebrico, la rappresentazione ad albero può facilitare la comprensione della struttura dell'espressione (dall'alto verso il basso) e darne anche una visione procedurale (dal basso verso l'alto), in base a come viene letto l'albero, come nell'esempio seguente. [10, pp. 513]

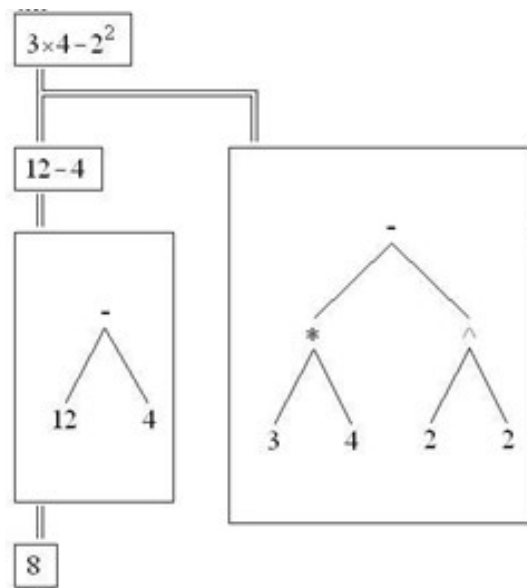


Figura 2.2: Esempio di rappresentazione ad albero

L'uso di queste tre rappresentazioni diverse, svolto in modo costante in classe, ha l'obiettivo di abituare lo studente ad utilizzare quella che ritiene più adeguata, passando dall'una all'altra in modo naturale. In particolare, lo scopo è di far diventare il linguaggio naturale non solo un mezzo per poter comunicare tra studenti e insegnanti, ma uno strumento per analizzare e riflettere sulla struttura dell'espressione algebrica che si sta analizzando, o per confrontare strutture diverse.

Ciò che le ricercatrici tengono ad evidenziare è che il potenziale semiotico dei diversi artefatti utilizzati non emerge spontaneamente, ma necessita di una precisa organizzazione didattica [10].

È quindi importante sottolineare che l'azione dell'insegnante è fondamentale per la gestione delle discussioni in classe, nell'assegnazione di compiti specifici e nella guida all'utilizzo di artefatti discorsivi come strumento di mediazione semiotica, per far emergere l'interpretazione strutturale delle espressioni algebriche.

2.2 L'uso dei simboli in algebra

Abbiamo visto come l'uso di diverse rappresentazioni per descrivere uno stesso concetto sia fondamentale per interiorizzarlo nel modo corretto, dobbiamo però sottolineare che, quando si parla di algebra, acquisire familiarità con il linguaggio simbolico diviene necessario.

In corrispondenza a quello che viene chiamato senso del numero per quanto riguarda i processi aritmetici, possiamo quindi, come suggerisce Arcavi (1994) [12], estendere quest'espressione all'algebra, analizzando quello che possiamo chiamare "*symbol sense*", ovvero senso del simbolo.

Molto spesso gli studenti della scuola secondaria di secondo grado, anche dopo anni di istruzione algebrica, hanno poco senso dei simboli letterali, nonostante riescano apparentemente a gestire con successo le tecniche algebriche. Non riescono a vedere l'algebra come uno strumento per comprendere, esprimere e comunicare, generalizzare oggetti specifici, ma la vedono soltanto come un ostacolo all'apprendimento.

Soffermarsi su quale senso abbiano i simboli che si utilizzano nei processi algebrici, ricercandone il significato, è essenziale non solo per la risoluzione del problema, ma anche per contribuire allo sviluppo della propria intuizione. In generale, possiamo dire che il senso del simbolo si può definire come una percezione, comprensione o intuizione più o meno accurata dei simboli [12].

Il simbolismo algebrico dovrebbe essere introdotto fin dall'inizio in situazioni in cui gli studenti possano apprezzarne la potenzialità per generalizzare e giustificare fenomeni aritmetici, attraverso una presentazione non formale, ma come potente strumento di supporto alla risoluzione e comprensione di problemi e mezzo fondamentale per comunicare con gli altri.

Un grande problema consiste nell'incapacità degli studenti di mettere in relazione le espressioni simboliche con il loro significato. Ciò porta a fraintendimenti che inducono lo studente a svolgere manipolazioni casuali usando il simbolismo algebrico, ignorandone il significato o inventando persino nuovi significati che vanno a sostituire quelli autentici.

Come abbiamo già visto precedentemente, il pensiero algebrico, pur essendo inseparabile dal linguaggio formale con cui si esprime correntemente, deve essere necessariamente accompagnato dal linguaggio normale, in modo da non ridurre i processi algebrici solamente a meccanismi manipolativi [13].

Quando trattiamo un'espressione, facendo riferimento alla teoria del Triangolo di Frege (1892) [14], possiamo associare a questa un *sens* e una *denotazione*. Se pensiamo alle espressioni algebriche notiamo che esistono espressioni che hanno la stessa denotazione ma incorporano sensi diversi.

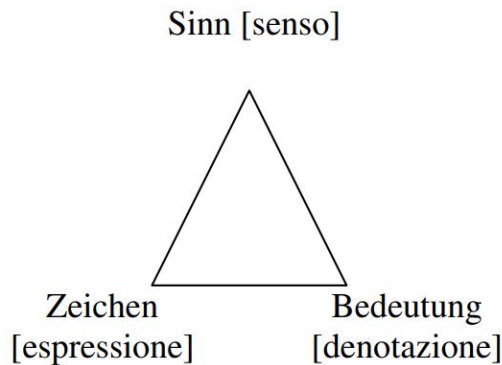


Figura 2.3: Il Triangolo di Frege (1892)

È dunque fondamentale far riflettere gli studenti sul senso di ciò che stanno facendo, su quale sia il significato degli oggetti che stanno manipolando in base al contesto in cui si trovano. Possiamo distinguere in generale due tipologie di sensi da attribuire a un'espressione: il *sens* *algebrico*, che è quello più evidente e rappresenta sinteticamente il modo in cui l'oggetto è ottenuto tramite regole computazionali espresse nella formula stessa e il *sens* *contestualizzato* che dipende dal contesto in cui viene utilizzata [13].

La possibilità di attribuire diversi sensi alla stessa espressione è per l'algebra un importante punto di forza, che permette per esempio di passare da un senso all'altro tramite una manipolazione di essa, mentre per gli studenti è un aspetto che crea profonda confusione e rende l'uso del linguaggio simbolico ancora più oscuro.

Per ridurre queste difficoltà che si presentano agli studenti, si può sempre passare da un confronto con i linguaggi utilizzati in aritmetica, dove c'è meno distanza tra senso e denotazione in un'espressione numerica, la quale generalmente presenta un unico senso.

Riuscire a sviluppare la capacità di avere in mente più sensi per una stessa espressione algebrica, contribuisce a raggiungere maggiore sicurezza nella manipolazione e a costruire degli schemi mentali da associare ad una certa denotazione piuttosto che ad un'altra.

Questo modifica il modo di pensare e di ragionare sulle espressioni algebriche, in particolare permette di anticipare una formulazione alternativa dell'espressione, prevedendo una denotazione per essa che abbia lo stesso senso di quella di partenza [13].

La creazione di spazi mentali dedicati al pensiero algebrico può essere utile agli studenti per riflettere prima di effettuare manipolazioni casuali e ad elaborare nuovi modelli concettuali, integrandoli con quelli già esistenti, in modo da distaccarsi dall'approccio unicamente procedurale ereditato dall'aritmetica, integrandolo sempre di più con un approccio strutturale.

Inoltre, è importante che gli studenti tengano bene a mente il senso e il significato dei simboli che stanno manipolando, poiché altrimenti si potrebbe presentare quello che Arzarello, Bazzini e Chiappini [13] chiamano processo di **evaporazione**.

L'evaporazione riguarda la perdita del significato dei simboli che si utilizzano, una mancanza di controllo semantico nella risoluzione dei problemi algebrici e si rivela essere uno dei principali ostacoli allo sviluppo di un modo di pensare algebrico.

Questo accade tipicamente quando non è più possibile esprimere il significato di oggetti e relazioni matematiche nel linguaggio ordinario. In questo caso gli studenti si abituano così tanto al fatto che in algebra si debba manipolare espressioni in quanto tali, che non sentono più l'esigenza di ricondursi al senso che aveva quell'espressione, il quale tende a scomparire.

Se pensiamo al triangolo di Frege descritto in precedenza, con il fenomeno di evaporazione è come se degenerasse tutto sulla rappresentazione dell'espressione algebrica, come se il significato di ciò che si sta facendo venisse perso

totalmente. Un esempio pratico del fenomeno di evaporazione, che vedremo anche nell'analisi dei questionari, si può fare pensando a come gli studenti manipolano i monomi: spesso viene perso totalmente quale sia il significato di monomio, si pensa che sia un'entità unica e inscindibile che non possa essere scomposta in parti, ma considerata solo nel suo insieme.

2.3 Il processo di anticipazione

Uno degli aspetti cruciali della manipolazione algebrica è la *trasformazione* della struttura matematica del problema, come strumento per arrivare al prodotto finale che si desidera. Tra gli ingredienti comuni a tutti i processi di trasformazione troviamo l'**anticipazione**.

Per dirigere in modo efficiente la trasformazione, il soggetto deve saper *anticipare* alcuni aspetti della forma finale dell'oggetto da manipolare, relativi all'obiettivo da raggiungere. L'anticipazione consente dunque la pianificazione e un feedback continuo di ciò che il soggetto sta facendo. In altre parole, si può descrivere come *quel processo che dirige la trasformazione verso la semplificazione e la risoluzione del compito assegnato*.

Per sviluppare la capacità di anticipare, lo studente deve possedere un **senso della struttura**. Il termine è stato utilizzato da Linchevski e Livneh (1999) [16] per la prima volta per descrivere le difficoltà degli studenti nell'usare la conoscenza delle strutture aritmetiche nelle prime fasi dell'apprendimento dell'algebra. Successivamente Hoch (2003) ha ridefinito il senso della struttura come un insieme di abilità, separate dall'abilità manipolativa, che consente agli studenti di fare un uso migliore delle tecniche algebriche apprese in precedenza [17].

Queste abilità includono le seguenti capacità: vedere un'espressione algebrica come un'entità, riconoscere un'espressione algebrica come una struttura incontrata precedentemente, dividere un'entità in sottostrutture, riconoscere le connessioni reciproche tra le strutture, riconoscere quali manipolazioni è possibile o utile eseguire.

La comprensione delle proprietà strutturali di un'espressione algebrica, per esempio, include la capacità di staccare parti dell'espressione ed eseguire manipolazioni su di esse prima del reinserimento. Identificare i punti in una data catena per i quali tale distacco è legittimo fa parte della comprensione delle proprietà strutturali.

La capacità di vedere un'espressione algebrica come un'entità, richiede invece, necessariamente, di fermarsi a guardare l'equazione prima di applicare automaticamente le trasformazioni algebriche [18].

Per fare un esempio di quali possano essere le abilità richieste per sviluppare il senso della struttura, osserviamo queste due espressioni:

1) $30x^2 - 28x + 6$

2) $(5x - 3)(6x - 2)$.

Le due espressioni sono equivalenti, ma la prima è un'espressione quadratica, mentre la seconda è il prodotto di due fattori lineari. Ciò che si può dire in questo caso è che "espressione quadratica" e "prodotto di due fattori lineari" sono *due interpretazioni diverse della stessa struttura*.

Sapere quale interpretazione è più utile in un dato contesto fa parte del senso della struttura, il quale può avere molto a che fare con l'esperienza e qualcosa in comune con l'intuizione [18].

Per chiarire ancora meglio il significato del senso della struttura, soffermiamoci su un'ulteriore osservazione emersa dalle ricerche di Hoch e Dreyfus riguardante l'uso delle parentesi, in particolare facciamo riferimento ai risultati da loro ottenuti grazie alla somministrazione di un questionario a studenti di una scuola secondaria di secondo grado. Consideriamo due delle equazioni proposte, che riportiamo di seguito [18, p.3]:

A. $(1 - \frac{1}{n+1}) - (1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{132}$

B. $1 - \frac{1}{n+3} - 1 + \frac{1}{n+3} = \frac{1}{72}$

Gli autori, a seguito dell'analisi dei risultati, hanno evidenziato una totale mancanza dell'uso del senso della struttura. Ciò che si aspettavano era che che nell'equazione B. senza parentesi sarebbe stato più facile per gli studenti identificare e cancellare i termini simili, mentre si è rivelato il contrario. È possibile, dunque, che le parentesi diano agli studenti un'indicazione su dove guardare e che invece la mancanza di parentesi lasci l'espressione non strutturata e più difficile da analizzare. Sembra quindi che la mancanza di parentesi rappresenti un ostacolo, mentre la presenza di parentesi, possa essere uno strumento utile per aiutare loro a vedere la struttura dell'equazione [18].

Possiamo dunque ritenere, secondo Hoch e Dreyfus [17], che uno studente mostra di avere senso della struttura, per l'algebra delle scuole superiori, se riesce a:

- *riconoscere una struttura familiare* nella sua forma più semplice (il termine composto contiene un prodotto o una potenza, ma non sono presenti somme)
- *trattare un termine composto* come una singola entità e attraverso una sostituzione appropriata riconoscere una struttura familiare in una forma più complessa (il termine composto contiene una somma ed eventualmente anche un prodotto o una potenza)
- *scegliere le manipolazioni appropriate* per utilizzare al meglio una struttura

In quest'ottica, l'istruzione dovrebbe promuovere la ricerca della decomposizione e della ricomposizione delle espressioni e garantire che gli studenti effettuino una sorta di ginnastica mentale necessaria per manipolare le espressioni consapevolmente, in modo che siano in grado di utilizzare strutture equivalenti di un'espressione in modo flessibile e creativo [16].

All'interno dei percorsi scolastici, si osserva però che vi è una mancanza di attività che potrebbero essere utili allo sviluppo dell'anticipazione. A partire dai libri di testo che si utilizzano generalmente nelle scuole, si può notare che non sono presenti esercizi specifici che la supportino. Al contrario, la maggior parte delle espressioni algebriche proposte nei libri di testo suggerisce di procedere nello svolgimento, muovendosi verso una progressiva semplificazione dell'espressione, passo dopo passo, riducendo per esempio il numero di parentesi che si trovano in ogni passaggio, come se si dovesse cercare di eliminare ad ogni passo delle parentesi, senza magari aggiungerne altre, con lo scopo di poter semplificare qualcosa dopo [15].

Questo allontana gli studenti da ogni possibile sviluppo riguardo al processo di anticipazione, portando loro ad effettuare procedure meccaniche, spesso anche molto lunghe, aumentando la possibilità di errore, dovendo spesso svolgere un maggior numero di calcoli e perdendo totalmente il senso di ciò che stanno facendo.

Per sviluppare il processo di anticipazione nel contesto algebrico si potrebbe iniziare a lavorare con gli studenti attraverso l'early algebra, assegnando loro dei compiti specifici, anche senza la necessità di un vero e proprio formalismo.

Come esempio di possibile implicazione didattica, riportiamo un esperimento svolto da Boero [15] per testare la capacità di trasformazione e anticipazione, svolto con studenti di diversi gradi di istruzione.

La consegna, in generale, richiedeva di trasformare una data espressione in un'altra ad essa equivalente, senza il permesso di scrivere i passaggi intermedi della trasformazione algebrica.

Nel caso specifico di studenti della scuola secondaria, consisteva nel produrre una congettura riguardante il fatto che "la somma di quattro numeri dispari consecutivi è un multiplo di otto".

Dai risultati della ricerca, è emerso che, quando non è permesso agli studenti di scrivere i passaggi intermedi, per quanto riguarda i processi di trasformazione e anticipazione, sembra essere influente solo la qualità dell'esperienza scolastica precedente.

Inoltre, è stato notato che la prevenzione dalla scrittura di passaggi intermedi costringe gli studenti a crearsi un'immagine mentale della struttura che vogliono ottenere e a trovare una formulazione iniziale più adatta per arrivare al risultato desiderato e dunque a migliorare l'anticipazione.

Capitolo 3

Metodologie

All'interno di questo capitolo viene presentata l'attività svolta in una scuola secondaria di secondo grado nell'anno scolastico 2022/2023 in parallelo in due classi prime di un liceo scientifico di Bologna.

Il campione è stato scelto con lo scopo di un'analisi qualitativa e non quantitativa, per questo l'attività si è svolta solamente in due classi.

Si è scelto di lavorare con delle classi prime, poiché il passaggio dall'aritmetica all'algebra avviene proprio a cavallo tra la scuola secondaria di primo e secondo grado. In questo modo, infatti, si è riusciti a far emergere le conoscenze degli studenti provenienti dalla scuola secondaria di primo grado, attraverso ciò che avevano appena affrontato in prima liceo con un'impostazione probabilmente diversa dalla precedente, in modo da analizzare come il sapere pregresso influenzasse l'apprendimento corrente.

3.1 Modalità di somministrazione e raccolta dati

L'analisi dei dati è stata suddivisa in due fasi: una prima fase di somministrazione di un questionario agli studenti, separatamente nelle due classi, e una seconda parte caratterizzata da un'attività organizzata in forma di focus group.

3.1.1 Questionario

Per quanto riguarda la prima fase, è stato costruito un questionario composto da 5 esercizi a risposta aperta. La scelta dei quesiti è stata fatta con l'obiettivo di capire se gli studenti mettersero o meno in atto il processo di anticipazione durante la risoluzione.

Per questo, si è pensato di costruire esercizi su argomenti appena trattati in classe, come scomposizioni di espressioni letterali e soluzione di equazioni di primo grado. Si sono scelte espressioni letterali che permettessero diverse possibili tipologie di soluzione, cercando di proporre tracce che portassero gli studenti a soffermarsi sulla struttura dell'esercizio proposto e che li spingessero a trovare il metodo di svolgimento più efficace, principalmente attraverso l'uso di prodotti notevoli in sostituzione allo svolgimento diretto dell'esercizio.

Si è pensato quindi di introdurre a seguito di ogni esercizio una richiesta aggiuntiva, dalla seguente formulazione: *"Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, quale? Se no, perché?"*. La richiesta era quella di esplicitare un procedimento diverso dal precedente, qualora lo studente fosse in grado di trovarlo; in caso alternativo di specificare invece il motivo per cui non esistesse un altro modo per la risoluzione.

Lo scopo di questa domanda era quello di dare uno stimolo allo studente, per osservare se, leggendola, riuscisse a vedere nell'esercizio proposto una struttura diversa da quella che aveva in mente all'inizio e, magari, a ripensare allo svolgimento proposto, trovando delle alternative.

Si è deciso di presentare agli studenti degli esercizi non eccessivamente difficili e lunghi, in modo che non emergessero difficoltà di calcolo o procedure troppo complesse, poiché lo scopo della ricerca non era quello di indagare le capacità di manipolazione simbolica degli studenti. È stata creata una prima bozza di compito, selezionando tra le varie alternative pensate, gli esercizi che sembravano maggiormente adatti per il fine della ricerca ipotizzando a priori i vari tentativi di risoluzione che ci si potevano aspettare dagli studenti, riflettendo su quali potessero essere i possibili errori in cui potevano incorrere durante lo svolgimento della prova e i possibili ostacoli che sarebbero potuti emergere.

Dopo questa fase, c'è stato un allineamento con i docenti delle classi, ovvero è stato chiesto loro se le richieste fossero in linea con ciò che gli studenti avevano affrontato in classe e se il numero di questi fosse eccessivo o scarso per svolgere la prova in un'ora.

Questo ha aiutato a ripensare la struttura del compito, riducendo il numero di esercizi inizialmente ideati, tenendo conto delle modalità di svolgimento

delle verifiche proposte solitamente dai docenti, in modo da non presentare agli studenti un questionario fuori dalla loro portata o che li destabilizzasse ancor prima di cominciare.

La scelta è stata dettata anche dal fatto di voler lasciare agli studenti tutto il tempo necessario per poter riflettere sulle risposte, in modo che non si presentassero svolgimenti incompleti o assenti a causa del poco tempo per svolgere la prova.

All'interno dei cinque quesiti proposti nel questionario, come si può vedere in appendice, sono presenti due equazioni da risolvere, due fattorizzazioni, e un'espressione algebrica da semplificare.

In tutti i casi è possibile svolgere per esteso i calcoli oppure notare la possibilità di raccogliere un fattore comune, utilizzando un raccoglimento totale o parziale, notare la presenza di una differenza di quadrati o di un quadrato di binomio per semplificare lo svolgimento, come si vede nella prima equazione.

Il questionario è anonimo, ma è stata esplicitata la richiesta di scrivere un nickname su ciascun foglio in modo da poter individuare lo studente in un successivo momento, se ci fosse stata la volontà di questo di palesarsi come tale. Questo è stato utile per la seconda fase della raccolta dati, dove sono stati organizzati dei focus group, separatamente in ognuna delle due classi, durante i quali si sono raccolte informazioni relativamente alle motivazioni delle risposte degli studenti ad alcuni dei quesiti del questionario e si è cercato di capire quali fossero i ragionamenti che stavano dietro allo svolgimento di esercizi di questo tipo intervistandoli a gruppi.

3.1.2 Focus Group

Per la seconda fase si è pensato di organizzare un'attività di gruppo, preferendola all'intervista singola di ogni studente, in particolare utilizzando la tecnica del focus group.

I focus group sono una forma di intervista di gruppo per raccogliere dati qualitativi in un tempo piuttosto breve, moderata da un intervistatore e basata sull'interazione tra i membri di un gruppo che mira a produrre una visione collettiva di un certo argomento che si sta trattando, piuttosto che una visione individuale di esso; da tale interazione emergono poi i dati della ricerca.

Come viene sottolineato da Manion et al. (2007) [21], questo tipo di attività di gruppo può essere utile per triangolare un questionario in modo non convenzionale. Si deve però porre l'attenzione ad alcuni aspetti che servono per effettuare una buona coordinazione dei gruppi: decidere il numero di focus group e quanti membri inserire all'interno di ogni gruppo, tenendo conto anche delle dinamiche che risultano essere presenti all'interno di essi se si conoscono a priori i partecipanti.

Se possibile, è opportuno scegliere ogni membro del gruppo come rappresentante di una certa linea di pensiero, in modo che in ogni gruppo siano presenti più punti di vista al fine di una discussione costruttiva.

Un importante aspetto a cui porre attenzione per l'intervistatore è far sì che ogni partecipante sia parte attiva del gruppo e faccia emergere la propria idea tra le altre, senza influenzare troppo l'andamento della discussione ma sempre mantenendo il dialogo sul punto dell'argomento in analisi.

Questa seconda fase è stata pensata, infatti, con lo scopo di stimolare un dialogo tra pari su ciò che era emerso dagli elaborati degli studenti, in modo che non si venisse a creare una situazione di rapporto docente-allievo, nel quale spesso lo studente non si sente libero di esprimere ciò che pensa, per paura di essere giudicato negativamente.

L'intento era quello di formare gruppi da 4-5 persone in ogni classe in modo da lasciare spazio ad ogni studente di esprimersi al meglio nel tempo necessario e di scegliere i componenti dei gruppi a seguito dell'analisi delle prove svolte, suddividendoli coerentemente con le difficoltà o nodi concettuali emersi nei loro elaborati, in modo che potessero discutere insieme su quanto scritto ed arrivare ad una soluzione comune collaborando tra pari. Si è pensato di suddividere i ragazzi evidenziando le peculiarità di ogni compito emerse dall'analisi, inserendo nello stesso gruppo coloro che in particolari esercizi avevano risposto in modo diverso o incompleto, cercando di far emergere le difficoltà incontrate da alcuni, facendo però in modo che all'interno del gruppo ci fossero studenti che avevano invece una proposta diversa di procedimento svolto, al fine di poter essere loro di aiuto.

Per raccogliere i dati sulle discussioni, si è pensato di fare una registrazione audio in modo da poter poi trascrivere fedelmente le parole degli studenti e analizzare le loro frasi in modo dettagliato come supporto alla ricerca.

La trascrizione completa dei dialoghi è riportata in Appendice.

3.2 Descrizione attività in classe

Il questionario è stato somministrato agli studenti durante l'orario di lezione, in presenza dell'insegnante di matematica, in un tempo massimo per svolgere la prova di un'ora. È stata data agli studenti l'indicazione di scrivere al posto del nome un nickname spiegando loro che ciò sarebbe servito per un'attività successiva per poter riconoscere il proprio compito, in loro accordo, ma in modo da garantire l'anonimato se qualcuno non avesse voluto rivelare di esserne l'autore.

Questo ha fatto sì che ciascuno avesse la libertà di scrivere ciò che pensava, senza timore di un giudizio da parte dell'insegnante o dei compagni di classe. Inoltre, prima dell'inizio della prova è stato ribadito che i questionari sarebbero stati oggetto di analisi per una tesi di laurea magistrale, con una breve descrizione del contenuto di questa e di come sarebbero stati usati i risultati delle prove, in modo che gli studenti fossero a conoscenza di cosa stessero facendo.

Durante lo svolgimento della prova ci sono state molte domande da parte degli studenti, su chiarimenti rispetto alle consegne degli esercizi e soprattutto osservazioni sulla domanda aggiuntiva, la quale è subito risultata inconsueta e non in linea con le loro aspettative su un usuale compito in classe. A tali domande non sempre è stata data risposta per non alterare il risultato delle prove.

Il tempo della prova è stato sufficiente per far completare tutti gli esercizi e il livello di difficoltà è stato percepito in generale come non eccessivo in confronto a ciò a cui erano abituati di solito.

Successivamente, a distanza di circa una settimana dal questionario, sono stati organizzati i focus group. L'organizzazione pensata inizialmente è stata solo parzialmente possibile, poiché i gruppi che si è pensato di formare, a seguito dell'analisi dei questionari degli studenti, sono stati modificati dall'insegnante la mattina stessa per vari motivi contingenti. Questo ha implicato una riorganizzazione della discussione pensata in partenza e quindi delle variazioni nelle domande preparate per stimolare gli studenti al dialogo e, in aggiunta, una ridistribuzione degli studenti anche in numero non sempre equo tra i gruppi: ci sono stati gruppi più numerosi di altri nei quali sono emerse più difficoltà nel coordinare il dialogo e nel dare possibilità a tutti di esprimere la propria idea.

L'attività è stata svolta durante le ore di lezione mattutine, prendendo a piccoli gruppi (circa 4-5 persone) gli studenti di ogni classe per circa trenta minuti per gruppo. Si procedeva facendo visionare a ciascun alunno il proprio compito, senza correzioni, e successivamente facendo loro domande sul perché avessero scritto un certo tipo di procedimento e quali ragionamenti avessero messo in atto per svolgerlo.

In questa fase si cercava di spronare gli studenti a creare un dialogo tra pari che servisse a discutere su come avevano svolto determinati esercizi e ripensare ad alternative di procedura che non avevano preso in considerazione al momento del compito in classe. Da ciò si è visto che spesso chi non aveva trovato una certa soluzione all'esercizio, attraverso il confronto con i compagni, riusciva a vedere la possibilità di svolgerlo con modalità diverse o che, al contrario, cercava di convincere gli altri che il proprio fosse l'unico modo corretto di svolgere la prova.

Capitolo 4

Analisi quesiti

In questo capitolo si analizzano le risposte degli studenti al questionario, suddividendole in sezioni in base alla tipologia di difficoltà emerse nello svolgimento di ciascun esercizio e dall'analisi effettuata grazie all'attività di focus group, dove ogni studente ha avuto modo di motivare i ragionamenti che stavano dietro alla procedura che aveva scritto.

Per ogni sezione si pone particolare attenzione a quale sia stato il ruolo del *processo di anticipazione* nella risoluzione degli esercizi da parte degli studenti. Si riflette sull'utilità che possa aver avuto la domanda aggiuntiva in ogni esercizio per fare emergere una possibile anticipazione o se sia stata indifferente per gli studenti o ancora sia stata fonte di difficoltà e confusione.

4.1 Ostacoli all'apprendimento

La suddivisione degli esercizi analizzati, è stata effettuata considerando la differenziazione dei tipi di ostacoli all'apprendimento.

Brousseau indica come ostacolo, qualcosa che si frappone alla costruzione cognitiva di un concetto [19].

I vari ostacoli all'apprendimento, si possono classificare in tre categorie principali, in relazione ai poli protagonisti del triangolo della didattica minimo presentato da Chevallard nel 1982: insegnante, allievo e sapere.

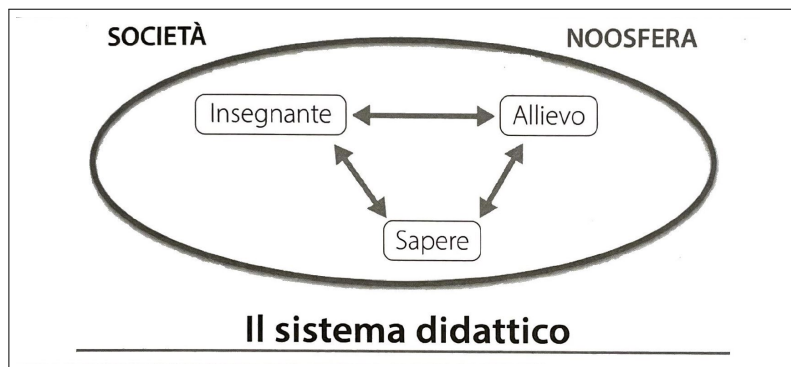


Figura 4.1: Il sistema didattico [20, pp. 29]

Si trovano *ostacoli didattici* relativi al polo dell'insegnante, *ostacoli ontogenetici* (o cognitivi), legati all'allievo (ma anche in relazione al docente e al sapere proposto) e infine gli *ostacoli epistemologici* riferiti alla sfera del sapere.

Nel dettaglio:

- **Ostacoli didattici:** sono legati alle scelte strategiche del docente, come l'errata trasposizione didattica o di scelta di libri di testo, materiali, risorse...
Esempio: uso di un'unica rappresentazione da parte del docente.
- **Ostacoli ontogenetici:** legati all'im maturità dello studente, dovuti al fatto che l'età mentale dello studente è insufficiente rispetto a ciò che viene lui proposto, a conoscenze che sono al di fuori della sua zona di sviluppo prossimale.
Esempio: il passaggio dall'aritmetica all'algebra, si può superare con l'early algebra.
- **Ostacoli epistemologici:** sono collegati al polo del sapere, poiché derivano da caratteristiche intrinseche dei concetti che stiamo cercando di insegnare, che in qualche modo sono epistemologicamente difficili. Spesso si presentano nell'introduzione di concetti che sono emersi nella storia attraverso un percorso discontinuo e frammentato.
Esempio: concetto di infinito, concetto di limite.

4.1.1 Ostacoli didattici

Per analizzare gli ostacoli didattici dobbiamo necessariamente tenere conto che nella società scuola/classe nascono norme specifiche da rispettare che si collocano all'interno di un contratto, il quale viene chiamato **contratto didattico**.

"Il contratto didattico rappresenta il sistema dei diritti e dei doveri (essenzialmente impliciti) che allievi e insegnante accettano e rispettano a proposito degli oggetti del sapere matematico che è insegnato. L'insieme di regole esplicite, ma soprattutto implicite, che assegna e limita le responsabilità di ciascuno (insegnante e allievo/i) rispetto a un ben determinato sapere matematico insegnato." [20, pp. 38-39]

Dal contratto didattico derivano poi un insieme di comportamenti attesi dagli studenti nei confronti dell'insegnante e dall'insegnante nei confronti degli studenti, i quali contribuiscono a dettare le regole non scritte, implicite, descritte precedentemente. Per quanto riguarda lo studente, egli è portato a interpretare la situazione nella quale si trova, i quesiti che gli vengono posti e le informazioni date in modo consapevole o meno, creandosi delle regole che definiscono i rapporti all'interno della classe. [20]

Una strategia didattica che può essere utilizzata per permettere ad allievi e insegnanti di prendere coscienza di aspetti sconosciuti all'interno della classe è la *rottura del contratto didattico*. La rottura può essere uno strumento utile per avere l'occasione di rinegoziare rapporti, concetti e significati inadeguati che si erano instaurati all'interno del contratto.

Per esempio, come vedremo di seguito, l'inserimento della domanda aggiuntiva all'interno del questionario che richiedeva di trovare un modo alternativo per risolvere gli esercizi proposti è stato un elemento di rottura del contratto didattico, poiché gli studenti si sono trovati di fronte ad una richiesta che usciva dalle norme usuali stabilite con l'insegnante.

Gli ostacoli didattici che sono emersi dall'analisi dei questionari degli studenti si possono suddividere in diverse tipologie, le quali dipendono tutte fortemente dal contratto didattico appena descritto instaurato tra insegnante e studenti durante il percorso scolastico.

Un primo tipo di ostacolo riscontrato è stato la **manca di sicurezza** nello svolgere procedure alternative alla procedura "standard" con cui gli studenti sono abituati a lavorare, proveniente dunque da una rottura del

contratto didattico.

Dalle discussioni effettuate all'interno dei focus group, si evince che spesso gli studenti hanno in mente procedure differenti da quelle che poi alla fine compaiono effettivamente sui protocolli, ma tendono sempre a scrivere il procedimento che ritengono "*più sicuro*" rispetto ad altri.

Le interviste agli studenti mostrano come lo svolgimento di esercizi in classe, utilizzando sempre lo stesso procedimento, porti gli studenti a pensare che quella sia la strada più corretta da seguire, rispetto ad altre che non vengono quasi mai utilizzate. Come si può vedere dai protocolli individuali e dalle discussioni di gruppo, si presentano spesso frasi del tipo "*Non so se si può fare*" (C1-R28), "*era più sicuro fare così*" (C1-R15, C1-R94, C1-R247). Passa quindi l'idea che gli studenti credano che ci siano delle procedure maggiormente corrette di altre, anche se portano tutte allo stesso risultato.

Tutto ciò sembra che possa essere ricondotto a delle regole provenienti dal contratto didattico che si è creato all'interno della classe, probabilmente dovuto ad alcune frasi che il docente è solito ribadire o a una mancanza di proposte da parte dell'insegnante di procedure differenti per svolgere uno stesso esercizio.

Un'altra difficoltà emersa dalle discussioni in gruppo è quella per cui alcuni studenti nello svolgimento degli esercizi ***sembrano seguire delle regole in modo molto rigido***, le quali portano loro ad effettuare procedure in modo meccanico, senza ragionare su ciò che stanno facendo nell'insieme, perdendo totalmente il senso della struttura dell'espressione o dell'equazione data. Dai dialoghi con gli studenti emergono alcune loro convinzioni, probabilmente dovute al tipo di trasposizione didattica da parte del docente corrente o anche frutto dell'esperienza con docenti precedenti.

Si nota, per esempio, come alcuni studenti per svolgere gli esercizi di scomposizione seguano una procedura ben precisa (C1-R23), che in alcuni casi diventa una vera e propria regola per risolverli, per esempio nel caso del protocollo C1-R226 mostrato in figura 4.2 si dice di dover usare "per forza" il raccoglimento totale prima di poter fare altre manipolazioni dell'espressione data.

Esercizio 3

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$4a^6 - 16b^4$$

$$4(a^6 - 4b^4)$$

$$4(a^3 - 2b^2)(a^3 + 2b^2)$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

No perché per scomporlo devo usare per forza il raccoglimento totale e poi applicare le regole della scomposizione di binomi.

Figura 4.2: Esempio di risoluzione all'esercizio 3

In questo caso si ipotizza che sia stato presente un ostacolo nella trasposizione didattica che non ha permesso allo studente di interiorizzare in modo corretto l'uso che può fare dei raccoglimenti. D'altro canto, si potrebbe pensare che lo studente abbia invece sviluppato una certa abilità di anticipazione nel prevedere che dovesse arrivare ad una scomposizione scritta come prodotto di fattori e dunque una sicurezza della presentazione del risultato finale.

Un altro esempio di regola che gli studenti hanno evidenziato è quella per cui per semplificare una data espressione si debbano necessariamente "svolgere le operazioni in ordine" (C1-R151).

Esercizio 1

Semplifica la seguente espressione:

$$(x+2)(2x+3)(x-2)$$

$$(2x^2+3x+4x+6)(x-2) =$$

$$(2x^2+7x+6)(x-2) =$$

$$2x^3 - 4x^2 + 7x^2 - 14x + 6x - 12 = 2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$$

Potresti seguire un procedimento diverso? Se sì, quale? Se no, perché?

No, è una semplificazione e si possono solo svolgere in ordine le operazioni.

Figura 4.3: Esempio di risoluzione all'esercizio 1

In questo caso lo studente sembra aver appreso questa procedura come regola da seguire ogni volta che incontra un'espressione da semplificare, non preoccupandosi dunque della struttura dell'espressione, ma iniziando a svolgere l'operazione che trova per prima, proseguendo in questo modo finché non ha terminato di svolgere tutte le operazioni successive.

Mostriamo di seguito un esempio analogo, dove sembra che lo studente non solo svolga ogni operazione in ordine, ma veda le parentesi solo come indicatori di quali oggetti all'interno dell'espressione vadano trattati prima di altri:

Esercizio 4

Risolvi la seguente equazione:

$$(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1)$$

$$(x^2 + 1 + 2x) - x - 2 = (x^2 + x + x + 1)$$

$$x^2 + 1 + 2x - x - 2 = x^2 + x + x + 1$$

$$x^2 + 1 + 2x - x - 2 = x^2 + x + x + 1$$

$$\frac{-x}{-1} = \frac{2}{-1}$$

$$x = -2$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

No, non penso di poterla eseguire in altro modo. Questo perché hanno eseguito le operazioni tra parentesi: come prima cosa e successivamente non si può scambiare l'ordine dei fattori essendoci in mezzo somme e sottrazioni.

Figura 4.4: Esempio di risoluzione all'esercizio 4

Ciò ci porta a pensare che gli studenti citati in precedenza non abbiano sviluppato la capacità di anticipare, di osservare la struttura dell'espressione per capire cosa si potrebbero aspettare come prodotto finale, ma abbiano seguito solo una risoluzione procedurale focalizzandosi sulla corretta esecuzione delle operazioni fino ad arrivare al risultato finale.

Infine, un'ulteriore convinzione che sembra diffusa tra gli studenti è che **le equazioni si risolvano in un solo modo**. Come si vede da alcune occorrenze, ci sono studenti che pensano che esista solo un procedimento possibile per risolvere un'equazione, per esempio (C1-R81):

Esercizio 4

Risolvi la seguente equazione:

$$(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1)$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{x} + 2 - x - 2 = \cancel{x^2} + \cancel{x} + \cancel{x} + 1$$

$$2x - x - 2 = x + 1$$

$$2x - x - x - x = +2$$

$$-x = +2$$

$$x = -2$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?
 No, perché le equazioni si possono risolvere solo in un
 modo.

Figura 4.5: Esempio di risoluzione all'esercizio 4

Dai dialoghi emerge che alcuni entrano in confusione quando si chiede loro di trovare un modo alternativo per svolgere l'esercizio, poiché è abbastanza radicata la convinzione che la matematica sia una sola e che essa detti delle regole ben precise e uniche per risolvere esercizi o problemi; non vedono quindi la necessità di trovare strade alternative per arrivare alla soluzione (C1-R127).

Si osserva, però, che negli stessi esercizi altri studenti hanno invece utilizzato procedimenti diversi, per esempio cambiando l'ordine dei fattori da moltiplicare o sfruttando l'uso del raccoglimento totale o parziale in base a ciò che serviva al momento e non seguendo determinate regole.

Nelle discussioni in gruppo sono infatti risultati interessanti i dialoghi tra gli studenti nei quali alcuni cercavano di convincere altri sul fatto che l'insegnante non aveva fornito loro delle regole fisse da seguire, ma aveva semplicemente consigliato di fare determinati passaggi prima di altri, per esempio in merito al fatto di controllare se si può fare il raccoglimento totale appena si osserva un'espressione.

Si potrebbe quindi pensare che gli studenti sopracitati possano aver ereditato alcune regole dal percorso scolastico precedente oppure aver interpretato in modo troppo rigido le parole dette dall'insegnante in classe.

4.1.2 Ostacoli ontogenetici

Come abbiamo visto nei capitoli precedenti, lo studente riesce ad apprendere solo ciò che risiede nella zona di sviluppo prossimale, è dunque necessario che l'insegnante proponga dei concetti che possono essere appresi dallo studente in quel preciso momento e per i quali sia presente già una base solida che ne permetta l'acquisizione.

Dallo studio di Herscovics e Linchevski (1994) [22] si può vedere che esiste un vero e proprio divario cognitivo tra aritmetica e algebra, un divario cognitivo che può essere caratterizzato dall'incapacità degli studenti di operare spontaneamente con o sull'ignoto, il quale, come abbiamo già ribadito, potrebbe dipendere da difficoltà di natura pre-algebrica.

Le possibili spiegazioni delle difficoltà che gli studenti sperimentano con l'algebra riguardano sia il ritmo con cui viene trattata, sia l'approccio formale spesso utilizzato nella sua presentazione. Inoltre, sembra che molti insegnanti e autori di libri di testo non siano consapevoli delle gravi difficoltà cognitive coinvolte nell'apprendimento dell'algebra, di conseguenza, molti studenti non hanno il tempo di costruire una buona base intuitiva per sviluppare un pensiero algebrico e di collegarlo con le idee pre-algebriche che hanno sviluppato nella scuola del primo ciclo. Non riescono a costruire significati da dare al nuovo simbolismo e si riducono a eseguire operazioni prive di significato su simboli che non comprendono.

L'ipotesi è che l'aritmetica elementare sia un prerequisito necessario e sufficiente, tuttavia, sorgono domande sul fatto che gli studenti debbano o meno essere esposti ad esperienze matematiche di altro tipo, come la pre-algebra, invece di ripetere semplicemente quella fallimentare in aritmetica [22].

Come abbiamo già evidenziato, infatti, una delle possibili strategie da adottare è una graduale introduzione dell'algebra partendo dalla riflessione sui concetti aritmetici (early algebra).

Nonostante l'idea precedente sia sostenuta da molti ricercatori, troviamo comunque alcuni educatori che a seguito di discussioni su richieste fatte agli studenti, come semplificare espressioni algebriche, valutando quindi la capacità di concepire le espressioni algebriche come oggetti e di vedere la loro manipolazione in termini di struttura algebrica, e a seguito di considerazioni storiche, concludono che l'introduzione dell'algebra scolastica attraverso questo tipo di attività potrebbe solo portare ad ostacoli cognitivi già evidenti in letteratura.

In generale, dall'analisi dei protocolli degli studenti e dalle discussioni di gruppo, si è constatato, come previsto, che la presenza di ostacoli ontogenetici o cognitivi nella risoluzione del compito dipende dallo sviluppo cognitivo attuale del singolo studente, si ritiene dunque difficile effettuare osservazioni condivise, poiché dovremmo analizzare nello specifico ogni singolo caso.

Tuttavia, possiamo fornire alcuni dei possibili esempi di ostacoli emersi, per esempio (C2-R120) in figura 4.7.

Esercizio 4
 Risolvi la seguente equazione:

$$(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1) \quad : \quad x^2 + 2x + 1 - x - 2 = x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 + 2x + 1 - x - 2 = x^2 + x + x + 1 \quad x^2 + 2x + 1 - x - x - 2 = x^2 + x + x + 1$$

$$x^2 - x + 2x - x - x - x = -1 + 2 - 1 \quad x^2 + 2x + 1 - x - x - 2 = x^2 + x + x + 1$$

$$2x - 3x = 2 - 2 \quad -x = 0 \quad \text{INDETERMINATA} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Sì

$$\frac{(x+1)(x+1) - (x+2)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$-(x+2) = 0$$

$$-x - 2 = 0$$

$$\frac{-x}{-1} = \frac{2}{-1} \quad x = -2$$

Figura 4.6: Esempio di risoluzione all'esercizio 4

Nella figura possiamo osservare come lo studente in questione, al di là di errori nella risoluzione, abbia bisogno di svolgere diversi passaggi per arrivare al risultato finale, anche se avrebbe potuto concludere già prima, sembra quindi che ci sia una certa incapacità di gestire l'incognita e che non sia presente una visione d'insieme attraverso la quale riesca direttamente a vedere il risultato già dalla terzultima riga dove scrive $-(x+2) = 0$.

La presenza di molti passaggi non indispensabili potrebbe però anche dipendere dal fatto che lo studente abbia alcune incertezze su come trasportare un termine da una parte all'altra dell'uguale e che si trovi "più sicuro" a scrivere ogni passaggio per non commettere errori di segno.

La stessa tipologia di ostacolo si può osservare anche nel protocollo seguente:

Esercizio 4
 Risolvi la seguente equazione:

$$(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1)$$

~~$(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1)$~~ 0

$$\begin{aligned} -x-2 &= 0 \\ -x &= +2 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Sì, $(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1)$

$$\frac{(x+1)^2 - (x+2)}{(x+1)(x+1)} = \frac{(x+1)^2 - (x+2)}{(x+1)(x+1)}$$

$$(x+1)^2 - (x+1)(x+1) - (x+2) = 0$$

$$\begin{aligned} -x-2 &= 0 \\ -x &= +2 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Figura 4.7: Esempio di risoluzione all'esercizio 4

In questo caso possiamo notare come lo studente, pur riconoscendo prodotti notevoli, non riesca a concludere dall'espressione $-x - 2 = 0$ il risultato, ma abbia bisogno di effettuare un altro passaggio intermedio.

È interessante notare che anche nel secondo svolgimento proposto, lo studente ripeta gli stessi passaggi: sembra che i due procedimenti siano stati svolti in modo totalmente indipendente, senza essere stati confrontati o al contrario potrebbe anche essere che lo studente abbia riportato ogni passaggio senza accorgersi di poter concludere senza riscrivere tutti i passaggi precedenti.

4.1.3 Ostacoli epistemologici

Per quanto riguarda gli ostacoli epistemologici, dall'analisi dei questionari degli studenti troviamo una conferma di quanto detto sul parallelismo tra la fattorizzazione numerica e la fattorizzazione polinomiale. Si riscontra, in particolare, una difficoltà generale di comprensione della consegna nella quale si richiede agli studenti di *riscrivere l'espressione data come prodotto di fattori*.

Riportiamo come esempio di consegna la formulazione dell'esercizio 2 del compito somministrato:

Esercizio 2

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$2x(3 + 4x) + 2x(1 - 4x) + 8x$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Figura 4.8: Esercizio 2 del questionario

Sembra che il concetto di *prodotto di fattori* risulti particolarmente difficile da capire per gli studenti, infatti, durante la discussione nei focus group, gli studenti hanno esplicitato di avere avuto molta difficoltà nel capire cosa significasse la parola *prodotto* e la parola *fattori* nell'ambito dei polinomi.

Osserviamo la seguente risoluzione di uno studente all'esercizio 2:

Esercizio 2

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$2x(3 + 4x) + 2x(1 - 4x) + 8x$$

$$\Rightarrow 2x[3 + \cancel{4x} + 1 - \cancel{4x} + 4]$$

$$\Rightarrow 2x[8]$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Posso svolgere le moltiplicazioni e alla fine risolvere l'espressione

$$\Rightarrow 6x + 8x^2 + 2x - 8x^2 + 8x$$

$$\Rightarrow 16x$$

NO

Figura 4.9: Esempio di risoluzione all'esercizio 2

In questo caso lo studente, come emerge dal dialogo presente in trascrizione che riportiamo anche di seguito, non ha per niente chiaro cosa sia un prodotto di fattori, infatti, quando gli viene chiesto di spiegare il motivo per cui, nel secondo svolgimento all'esercizio, ha scritto NO, risponde così:

L: Qui avevo svolto le moltiplicazioni, però poi sono arrivato al risultato $16x$ che non era un prodotto di fattori come chiedeva l'esercizio, quindi ho cancellato.

I: $2x \cdot [8]$ secondo te è un prodotto di fattori?

L: Sì.

I: E $16x$ è un prodotto di fattori?

L non risponde, gli altri membri del gruppo dicono di sì.

I: L non sei d'accordo con questa affermazione?

L: No, io intendevo come se fosse una scomposizione e $16x$ non è una scomposizione. Mentre $4 \cdot 4x$ è una scomposizione.

I: Quindi $16x$ non andava bene secondo te?

L: Sì, forse sì.

Il dialogo continua con una discussione dove vengono coinvolti anche gli altri membri del gruppo e alla fine lo studente si convince del fatto che siano entrambi prodotti di fattori.

L'esempio ci mostra chiaramente non solo che lo studente non abbia chiaro il significato di ciò che sta facendo, ma che abbia messo in atto il processo di anticipazione in modo scorretto.

Emerge, però, in modo evidente il tentativo di anticipare, di crearsi un'idea mentale di come si debba aspettare il "risultato" dell'esercizio. Interpretando le parole dello studente, sembra che si aspetti un'espressione finale costituita da (due) parti, ben evidenziate da delle parentesi e/o dal simbolo di moltiplicazione, come si nota nel primo caso, dove scrive come risultato finale $2x \cdot [8]$, lasciando addirittura delle parentesi quadre che aveva spontaneamente aggiunto all'inizio dello svolgimento. Nella seconda risoluzione, invece, arriva ad ottenere come risultato il monomio $16x$, che vede probabilmente come un'unica entità inscindibile, che dal suo punto di vista non può essere interpretata come prodotto di fattori.

In questo caso, è molto probabile che sia stato messo in atto il processo di evaporazione che abbiamo citato in precedenza. Lo studente ha completa-

mente perso il significato degli oggetti che stava manipolando, concentrandosi esclusivamente sulla manipolazione algebrica di essi, non considerando che il monomio rappresenta proprio un prodotto.

Risultati simili vengono confermati dal dialogo con altri studenti, che sottolineano come siano stati sempre abituati a vedere come risultato di una scomposizione "*più parentesi moltiplicate*" (C1-R410). Osserviamo, per esempio, il dialogo seguente (vedi da C1-R401), dove si richiede agli studenti quale sia la differenza tra scrivere $2x \cdot 8$ e scrivere $16x$.

G: Eh perché, se scrivi $16x$ poi come fai a trasformarlo all'indietro? Cioè, a me $16x$ sembrava proprio tipo un risultato.

I: Perché vuoi trasformarla all'indietro?

G: Eh perché l'esercizio era scomponi in fattori.

I: $16x$ non è un prodotto di fattori?

G: Ah 16 per x . Mi ha confuso il fatto che era un risultato così piccolo, di solito abbiamo più parentesi moltiplicate.

Come ulteriore conferma, riportiamo l'esempio seguente che ribadisce che molti studenti pensano che un prodotto debba essere costituito necessariamente da tanti termini, preferibilmente racchiusi da parentesi, e non possa essere costituito di "*un solo termine*".

Esercizio 2

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$\begin{array}{l}
 2x(3 + 4x) + 2x(1 - 4x) + 8x \quad 2 \cdot 6x + 2 \cdot 2x + 2x - 2 \cdot 2x + 8x \\
 6x + 8x^2 + 2x - 2x^2 + 8x \\
 16x
 \end{array}$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

NO PERCHÉ LA COMPUTAZIONE NON CAMBIA IL VALORE

Figura 4.10: Esempio di risoluzione all'esercizio 2

I: Nell'esercizio sei arrivato a scrivere $16x$. Secondo te questo è un prodotto di fattori come richiedeva il testo?

L: No, questo no.

I: Perché?

L: Perché c'è solo un termine!

I: Siete d'accordo? (*si coinvolgono anche gli altri membri del gruppo*)

G: No.

D: No, no. $16x$ è il risultato di una moltiplicazione: è 16 per x !

L: Ah allora era giusto...

Qui si nota di nuovo come lo studente pensi che il monomio $16x$ sia un'entità unica che non può essere ulteriormente scomposta in nessun modo.

Ciò può dipendere anche dalla tipologia di esercizi che si propongono agli studenti in classe. Potrebbe trattarsi quindi di una sovrapposizione di ostacoli di tipo didattico ed epistemologico.

Osservando molti libri di testo per il primo anno della scuola secondaria di secondo grado, si nota che gli esercizi proposti sulle scomposizioni in fattori hanno quasi sempre soluzioni che seguono la tipologia descritta da alcuni studenti come "moltiplicazione di più parentesi".

Non si vedono quasi mai comparire soluzioni costituite da un unico monomio o addirittura solo numeriche. Questo potrebbe dunque portare a pensare che l'unica possibilità di ottenere un prodotto di fattori in modo corretto sia arrivare ad una soluzione di quel tipo.

Mostriamo degli esempi di esercizi tratti da alcuni libri di testo nell'ordine che vediamo di seguito:

- Matematica. blu 2.0, Zanichelli (2020) [23, p. 467]
- Colori della matematica, De Agostini Scuola (2018) [24, p. 530]
- MATEMATICA c.v.d., Loescher Editore (2019) [25, 378]

Come si può notare, se osserviamo i risultati proposti nei tre testi, sono presenti, nella maggior parte dei casi, prodotti di due o più fattori tra parentesi.

Nei rari casi in cui come risultato compare un unico fattore, composto spesso da un polinomio di primo grado, questo compare con un esponente. Questo potrebbe far pensare agli studenti che, come risultato di una scomposizione, si debba sempre ottenere un'espressione di grado superiore o uguale al secondo.

Si veda per esempio:

- es.403 pag 467, Matematica. blu 2.0
- es.588 pag 530, Colori della Matematica
- es.406 pag 378, Matematica c.v.d.

- 357** $x^2 - y^2 - 3(x - y)^2$ $[2(2y - x)(x - y)]$
- 358** $x^5 - x - 2x^4 + 2$ $[(x - 2)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)]$
- 359** $a - b - a^2 + 2ab - b^2$ $[(a - b)(1 - a + b)]$
- 360** $a^6 + a^4b^2 - a^2b^4 - b^6$ $[(a^2 + b^2)^2(a + b)(a - b)]$
- 361** $(x - 3y)(2x - y)^2 + 27y - 9x$
 $[(x - 3y)(2x - y + 3)(2x - y - 3)]$
- 362** $2a^3 - 2a^3b - 18a + 18ab$
 $[2a(1 - b)(a + 3)(a - 3)]$
- 363** $a^9 - 3a^6 + 3a^3 - 1$ $[(a - 1)^3(a^2 + a + 1)^3]$
- 364** $2ax^3 - bx^3 - 2ay^3 + by^3$
 $[(2a - b)(x - y)(x^2 + xy + y^2)]$
- 365** $x^4 - 4x^2y^2 + 4y^6 - x^2y^4$
 $[(x + 2y)(x - 2y)(x + y^2)(x - y^2)]$
- 366** $x^3y^3 - x^6y^3 - z^3 + x^3z^3$
 $[(1 - x)(1 + x + x^2)(xy - z)(x^2y^2 + xyz + z^2)]$
- 367** $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + x - 2$ $[(x - 1)(x - 2)(x^2 - x - 1)]$
- 368** $\frac{1}{8}a^7 - \frac{3}{2}a^8 + 6a^9 - 8a^{10}$ $[a^7(\frac{1}{8} - 2a)^3]$
- 369** $y^2 - (x + 2)y + 2x$ $[(y - x)(y - 2)]$
- 370** $\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}xy + \frac{1}{27}y^2$ $[\frac{1}{3}(x - \frac{1}{3}y)^2]$
- 371** $16a^2b - \frac{1}{9}b$ $[b(4a - \frac{1}{3})(4a + \frac{1}{3})]$
- 372** $x^6 + 16x^3 + 64$ $[(x + 2)^2(x^2 - 2x + 4)^2]$
- 373** $a^4(x^2 + 1) - 2a^4$ $[a^4(x + 1)(x - 1)]$
- 374** $7x^4 - 7$ $[7(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)]$
- 375** $3(a^2 + b^2) - 9(a^2 + b^2)^2$
 $[3(a^2 + b^2)(1 - 3a^2 - 3b^2)]$
- 376** $x^4 - 4x^2 + 5x^3 - 20x$ $[x(x - 2)(x + 2)(x + 5)]$
- 377** $6a^2b^4 - 4ab^2 + 4a^2b - 6a^3b^3$
 $[2ab(b - a)(3ab^2 - 2)]$
- 378** $a^4 - 5a^2 + 4$ $[(a - 1)(a + 1)(a - 2)(a + 2)]$
- 379** $\frac{1}{4}a^4 + a^2 + 1 - b^2$ $[(\frac{1}{2}a^2 + 1 - b)(\frac{1}{2}a^2 + 1 + b)]$
- 380** $a^5 - a - 2 + 2a^4$ $[(a + 2)(a^2 + 1)(a + 1)(a - 1)]$
- 381** $a^3 - 6a^2 - a + 30$ $[(a + 2)(a - 3)(a - 5)]$
- 382** $x^8 + 2x^6 - x^4 - 2x^2$
 $[x^2(x^2 + 1)(x^2 + 2)(x - 1)(x + 1)]$
- 383** $3x^4 - 4x^3 - 17x^2 + 6x$ $[x(x + 2)(x - 3)(3x - 1)]$
- 384** $x^4 - y^4 + 2x^3y - 2xy^3$ $[(x + y)^3(x - y)]$
- 385** $x^6 - 9x^3 + 8$
 $[(x - 2)(x - 1)(x^2 + 2x + 4)(x^2 + x + 1)]$
- 386** $2t^5 + 4t^4 - 10t^3 - 12t^2$ $[2t^2(t + 1)(t + 3)(t - 2)]$
- 387** $a^8 - 2a^4 + 1$ $[(a^2 + 1)^2(a + 1)^2(a - 1)^2]$
- 388** $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ $[(x - 2)^2(x - 3)]$
- 389** $a^2b - 9ab^2 + 20b^3$ $[b(a - 5b)(a - 4b)]$
- 390** $x^2 - 9 + 6a - a^2$ $[(x - a + 3)(x + a - 3)]$
- 391** $2ab^4 - 2ab^3c + xb^4 - xb^3c$ $[b^3(b - c)(2a + x)]$
- 392** $2ax^2(3a - x)^2 - 2a$
 $[2a(3ax - x^2 + 1)(3ax - x^2 - 1)]$
- 393** $(2x + 1)^2 - 4(4x^2 - 1)$ $[(2x + 1)(5 - 6x)]$
- 394** $36x^4 + y^2 - 9x^2 - 4x^2y^2$
 $[(2x + 1)(2x - 1)(3x + y)(3x - y)]$
- 395** $xy^2 + \frac{16}{81}xy^6 - \frac{8}{9}xy^4$ $[xy^2(\frac{2}{3}y + 1)^2(\frac{2}{3}y - 1)^2]$
- 396** $x^2 - 4x + 4 - 16a^4$ $[(x - 2 + 4a^2)(x - 2 - 4a^2)]$
- 397** $(2x - y)^2 - (x^2 + 6xy + 9y^2)$ $[(3x + 2y)(x - 4y)]$
- 398** $a^3 - 8 + 3a^2 + 6a + 12$ $[(a^2 + 2a + 4)(a + 1)]$
- 399** $6a^4 - 24a^2b^2 + 3a^3 - 12ab^2$
 $[3a(a + 2b)(a - 2b)(2a + 1)]$
- 400** $2a^2 - 4ab + 2b^2 - 50x^2$
 $[2(a - b + 5x)(a - b - 5x)]$
- 401** $16 + 4x + x^2 - (x^3 - 64)$ $[(x^2 + 4x + 16)(5 - x)]$
- 402** $a^2 - a - 20 + 2ax + 8x$ $[(a + 4)(a - 5 + 2x)]$
- 403** $(1 + x)^2 + x^2(1 + x)^2 + 2x(1 + 2x + x^2)$ $[(1 + x)^4]$
- 404** $(3a - b)^2 - (a + b)(3a - b) - 9a^2 + b^2$
 $[-(3a - b)(a + 3b)]$

Scomposizione di polinomi

Scomponi i seguenti polinomi.

- 539** $2x^2 - 2 - (x - 1)^2$ $[(x - 1)(x + 3)]$
- 540** $2x^2 - 3x - 2$ $[(2x + 1)(x - 2)]$
- 541** $a^6 - a^5 - a^3 + a^2$ $[a^2(a - 1)^2(a^2 + a + 1)]$
- 542** $4x^2 - 12x - 40$ $[4(x - 5)(x + 2)]$
- 543** $(a^2 + 1)^2 - 4a^2$ $[(a - 1)^2(a + 1)^2]$
- 544** $x^3 + 5x^2 + 3x - 9$ $[(x - 1)(x + 3)^2]$
- 545** $16x^4 - 10000y^4$ $[16(x - 5y)(x + 5y)(x^2 + 25y^2)]$
- 546** $m - m^4$ $[m(1 - m)(1 + m + m^2)]$
- 547** $16a^5 - a$ $[a(2a - 1)(2a + 1)(4a^2 + 1)]$
- 548** $x^4y^7 + x^2y^3 - 2x^3y^5$ $[x^2y^3(xy^2 - 1)^2]$
- 549** $t^4 + 5t^3 + 6t^2$ $[t^2(t + 2)(t + 3)]$
- 550** $a^7 - a$ $[a(a - 1)(a + 1)(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)]$
- 551** $12x^2 - 60x + 75$ $[3(2x - 5)^2]$
- 552** $(x^2 + y^4)(x - y) - 2x^2y^2 + 2xy^3$ $[(x - y)(x - y^2)^2]$
- 553** $4m^4 + 4m^2 + 1 - 9n^2$ $[(2m^2 + 1 - 3n)(2m^2 + 1 + 3n)]$
- 554** $a^4 - b^4 + 2a^2 + 2b^2$ $[(a^2 + b^2)(a^2 - b^2 + 2)]$
- 555** $2x^5 + 12x^3 + 18x$ $[2x(x^2 + 3)^2]$
- 556** $x^2 - 4y^2 - x^4 + 4x^2y^2$ $[(x - 2y)(x + 2y)(1 - x)(1 + x)]$
- 557** $x(x - 1)^3 - 8x$ $[x(x - 3)(x^2 + 3)]$
- 558** $x^3 - 3x^2 - 18x$ $[x(x - 6)(x + 3)]$
- 559** $a^3 + 2a^2x - ax^2 - 2x^3$ $[(a + x)(a - x)(a + 2x)]$
- 560** $a^5b^2 + 4ab^4 + 4a^3b^3$ $[ab^2(a^2 + 2b)^2]$
- 561** $x^7 + 16x^3 - 8x^5$ $[x^3(x - 2)^2(x + 2)^2]$
- 562** $x^3 + x^2y - 9x - 9y$ $[(x - 3)(x + 3)(x + y)]$
- 563** $a^5 - a^3 - a^2 + 1$ $[(a - 1)^2(a + 1)(a^2 + a + 1)]$
- 564** $b^5 + 2b^4 - b - 2$ $[(b - 1)(b + 1)(b^2 + 1)(b + 2)]$
- 565** $x^5 - x$ $[x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)]$
- 566** $16a^4 - 24a^3 + 12a^2 - 2a$ $[2a(2a - 1)^3]$
- 567** $m^5 + 2m^4 - m^3 - 2m^2$ $[m^2(m - 1)(m + 1)(m + 2)]$
- 568** $ax^2 - ay^2 + bx^2 - by^2$ $[(a + b)(x + y)(x - y)]$
- 569** $a^5 + a^4b - a^3b^2 - a^2b^3$ $[a^2(a + b)^2(a - b)]$
- 570** $x^4 + 3x^3 - 8x - 24$ $[(x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x + 3)]$
- 571** $12a^3 - 12a^2 + 3a$ $[3a(2a - 1)^2]$
- 572** $m^3 - m^2 - 6m$ $[m(m + 2)(m - 3)]$
- 573** $2a^2 - 8b^2$ $[2(a - 2b)(a + 2b)]$
- 574** $x^4 + 2x^3 + x^2$ $[x^2(x + 1)^2]$
- 575** $b^2 + 6b + 9 - c^2$ $[(b + 3 - c)(b + 3 + c)]$
- 576** $y^8 + y^4 - 2$ $[(y - 1)(y + 1)(y^2 + 1)(y^4 + 2)]$
- 577** $x^2 + ax - 12a^2$ $[(x - 3a)(x + 4a)]$
- 578** $x^2 + x + a - a^2$ $[(x + a)(x - a + 1)]$
- 579** $8x^4 + 12x^3 + 6x^2 + x$ $[x(2x + 1)^3]$
- 580** $t^4 - 8t^2 + 16$ $[(t - 2)^2(t + 2)^2]$
- 581** $2x^4 + 2x$ $[2x(x + 1)(x^2 - x + 1)]$
- 582** $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$ $[(x + y)(x^2 + y^2)]$
- 583** $a^2 + ab - 2b^2$ $[(a - b)(a + 2b)]$
- 584** $a^3 + 3a^2 - 4a - 12$ $[(a - 2)(a + 2)(a + 3)]$
- 585** $(2t + 1)^2 - (4t - 5)^2$ $[4(3 - t)(3t - 2)]$
- 586** $2m^2 + 12m + 16$ $[2(m + 2)(m + 4)]$
- 587** $ax^2 - ay^2 + bx^2 - by^2$ $[(a + b)(x + y)(x - y)]$
- 588** $9a^2 - 12a + 4$ $[(3a - 2)^2]$
- 589** $x^3 + 5x^2 + x + 5$ $[(x + 5)(x^2 + 1)]$
- 590** $x^3 - 4x^2 - 3x + 18$ $[(x + 2)(x - 3)^2]$
- 591** $(k + 1)^2 + 2(k + 1) + 1$ $[(k + 2)^2]$
- 592** $2a^3b - 8ab^3$ $[2ab(a - 2b)(a + 2b)]$
- 593** $2a^3 - 14a^2 + 24a$ $[2a(a - 3)(a - 4)]$
- 594** $\frac{1}{4}a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{9}{4}$ $[\frac{1}{4}(a - 3)^2]$
- 595** $2k^2 - 5k - 12$ $[(2k + 3)(k - 4)]$
- 596** $6a^2 + 15a + 6$ $[3(2a + 1)(a + 2)]$
- 597** $a^4 - 64a$ $[a(a - 4)(a^2 + 4a + 16)]$
- 598** $ax^2 - ay^2 + bx^2 + by^2 - 2bxy$ $[(x - y)(ax + ay + bx - by)]$
- 599** $a^{12}b^6 - 1$ $[(a^2b - 1)(a^2b + 1)(a^4b^2 + a^2b + 1)(a^4b^2 - a^2b + 1)]$
- 600** $a^4 - b^4 + a^4b + b^5 + 2a^2b^3$ $[(a^2 + b^2)(a^2 - b^2 + a^2b + b^3)]$
- 601** $z^4 - 4z^2 - 4z - 1$ $[(z^2 - 2z - 1)(z + 1)^2]$
- 602** $ax^2 - 4ax + 4a$ $[a(x - 2)^2]$
- 603** $(a + 3b)^2 - (a + 3b)(a - b) + a^2 - 9b^2$ $[(a + 3b)(a + b)]$
- 604** $(x - y)(y^2 - z^2) + (x^2 - y^2)(y + z)$ $[(x - y)(y + z)(x + 2y - z)]$
- 605** $a^6 - (a + 2)^3$ $[(a + 1)(a - 2)(a^4 + a^3 + 3a^2 + 4a + 4)]$
- 606** $x^4 - 5x^2 - 36$ $[(x^2 + 4)(x - 3)(x + 3)]$
- 607** $x^6 + 7x^3 - 8$ $[(x - 1)(x + 2)(x^2 + x + 1)(x^2 - 2x + 4)]$
- 608** $x^4 - 5x^2 + 4$ $[(x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)]$

$$\text{393 } 3a^{11} - 9a^8 + 9a^5 - 3a^2 \quad [3a^2(a-1)^3(a^2+a+1)^3]$$

$$\text{394 } (3x+4y)^2 - (5x-2y)^2 \quad [4(3y-x)(y+4x)]$$

$$\text{395 } x^2 + 4y^2 + x^2y^2 - 4xy + 2x^2y - 4xy^2 \quad [(x-2y+xy)^2]$$

$$\text{399 } 125a^3b^3 + 1000a^3 - b^3 - 8$$

$$\text{400 } 18a^2b^2 - a^4b^4 - 81$$

$$\text{401 } (x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2$$

$$\text{402 } a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - a^2 - 2ab - b^2$$

$$\text{403 } x^4 - 13x^2 + 36$$

$$\text{404 } 4x^2 - 20x + 25 - (a-3)^2$$

$$\text{405 } 49 - x^4 - 4y^4 + 4x^2y^2$$

$$\text{406 } x^2 - 4a^2 - 4ab - b^2$$

$$\text{407 } (x^2 - 2)^2 + 2(x^2 - 2)(2x + 3) + (2x + 3)^2$$

$$\text{408 } a^2 - 1 + a^2y^3 - y^3$$

$$\text{409 } \frac{9}{4}x^4 + \frac{4}{25}x^2y^2 + y^2 - \frac{6}{5}x^3y + 3x^2y - \frac{4}{5}xy^2$$

$$\text{410 } (x^4 - 6x^3y - 7x^2y^2)^2$$

$$\text{411 } \left(\frac{1}{4}a^3 - a^2b + \frac{3}{4}ab^2\right)^2$$

$$\text{412 } x^6 + 26x^3 - 27$$

$$\text{413 } a^4 - a^2 - 12$$

$$\text{414 } 25x^2 - 10ax + a^2 - y^2 + 6y - 9$$

$$\text{415 } (4a - 5b)^2 - 3(a + b)(5b - 4a) + 3a(5b - 4a)$$

$$\text{416 } (6a^2 - 2ab)(a - 2b) - a^2b + 2ab^2$$

$$\text{417 } x^5 - x^3(a - 4b)^2$$

$$\text{418 } (a + 3b)(a - 4b) - 3(4b - a)^2 - 16b^2 + a^2$$

$$\text{419 } a^4 - ab^3 - a^2b^2 + b^4$$

$$\text{420 } 81x^4y^4 - 72a^4x^2y^2 + 16a^8$$

$$\text{421 } x^5 - 4x^3y^2 - 8x^2 + 32y^2$$

$$\text{422 } 25x^2b^3 - 25x^2a^3 - 4b^3 + 4a^3$$

$$\text{423 } 16 - a^2 - 2ab - b^2$$

$$\text{424 } x^6 + y^6 - 2x^5y + 2x^3y^3 - 2xy^5$$

$$\text{425 } 4a^2 - 9b^2 + (10a - 15b)^2$$

$$\text{426 } a^2 - 2a + 1 + a^2x + 5ax - 6x$$

$$\text{427 } a^2(3x - 1) - (1 - 3x)(7 - 8a)$$

$$\text{428 } ax^2 - 2ax + a - 3x^2 + 6x - 3$$

$$\text{429 } a^6 + 16a^3b^3 + 64b^6$$

$$\text{430 } 4x^2 - 20x + 25 - 9x^4 + 6b^2x^2 - b^4$$

$$\text{396 } a^6 - b^6 + a^4b^2 - a^2b^4 \quad [(a+b)(a-b)(a^2+b^2)^2]$$

$$\text{397 } 2a^7 - 6a^5b^2 + 6a^3b^4 - 2ab^6 \quad [2a(a-b)^3(a+b)^3]$$

$$\text{398 } a^2 - b^2 + 6b - 9 \quad [(a-b+3)(a+b-3)]$$

$$[(b+2)(b^2-2b+4)(5a-1)(25a^2+5a+1)]$$

$$[-(ab-3)^2(ab+3)^2]$$

$$[(x-y)^2(x+y)^2]$$

$$[(a+b)^2(a+b-1)]$$

$$[(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)]$$

$$[(2x+a-8)(2x-a-2)]$$

$$[(7-x^2+2y^2)(7+x^2-2y^2)]$$

$$[(x-2a-b)(x+2a+b)]$$

$$[(x+1)^4]$$

$$[(a-1)(a+1)(y+1)(y^2-y+1)]$$

$$\left[\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{5}xy + y\right)^2\right]$$

$$[x^4(x-7y)^2(x+y)^2]$$

$$\left[\frac{1}{16}a^2(a-3b)^2(a-b)^2\right]$$

$$[(x-1)(x+3)(x^2-3x+9)(x^2+x+1)]$$

$$[(a-2)(a+2)(a^2+3)]$$

$$[(5x-a+y-3)(5x-a-y+3)]$$

$$[2(5b-4a)(b-2a)]$$

$$[3a(a-2b)(2a-b)]$$

$$[x^3(x-a+4b)(x+a-4b)]$$

$$[(a-4b)(19b-a)]$$

$$[(a-b)(a^3+a^2b-b^3)]$$

$$[(3xy-2a^2)^2(3xy+2a^2)^2]$$

$$[(x-2)(x^2+2x+4)(x-2y)(x+2y)]$$

$$[(b-a)(b^2+ab+a^2)(5x+2)(5x-2)]$$

$$[(4-a-b)(4+a+b)]$$

$$[(x^4-x^2y^2+y^4)(x-y)^2]$$

$$[4(2a-3b)(13a-18b)]$$

$$[(a-1)(ax+6x+a-1)]$$

$$[(3x-1)(a-7)(a-1)]$$

$$[(a-3)(x-1)^2]$$

$$[(a+2b)^2(a^2-2ab+4b^2)^2]$$

$$[(2x-5+3x^2-b^2)(2x-5-3x^2+b^2)]$$

4.2 Riflessioni sul processo di anticipazione

Al fine di indagare il processo di anticipazione, come abbiamo già sottolineato precedentemente, si è pensato di inserire all'interno del questionario la richiesta di riportare per ogni esercizio una seconda procedura alternativa, quando possibile. L'intento di questa domanda era quello di incentivare gli studenti a ragionare sulla struttura dell'espressione o equazione data, in modo che potesse essere messa in atto un'anticipazione del risultato finale.

Osservando i protocolli degli studenti, si può notare come questa richiesta abbia messo in confusione la maggior parte di essi. Questo può dipendere dal fatto che non si aspettassero una domanda del genere e che ci sia stata quindi una rottura del contratto didattico che avevano instaurato con il loro insegnante.

Durante la discussione in gruppi, è stato chiesto esplicitamente agli studenti cosa ne pensassero della presenza della richiesta aggiuntiva.

Alcuni studenti hanno ritenuto la domanda **utile** per trovare una soluzione alternativa e non oggetto di confusione nella risoluzione. Qualcuno per esempio afferma: *"il problema è che io di solito comincio subito, non guardo prima tutto."*. Da questa frase si intuisce come alcuni studenti siano consapevoli di svolgere gli esercizi senza soffermarsi sulla struttura, partendo direttamente a svolgere calcoli, ma sembra che un piccolo aiuto, come può essere una richiesta esplicita di soffermarsi a guardare meglio l'espressione in gioco, potrebbe aiutare nello sviluppo dell'anticipazione. Osserviamo l'esercizio seguente (C1-R97).

Esercizio 4

Risolvi la seguente equazione:

$$(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1)$$

$$x^2 + 1 + 2x - x - 2 = x^2 + x + x + 1$$

$$x^2 - 1 + x = x^2 + 2x + 1$$

$$x - 2x = 2$$

$$-x = 2$$

$$x = -2$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Sì, potremmo infatti annullare $(x+1)^2$ e $(x+1)(x+1)$, poiché hanno lo stesso valore, dunque in un'equazione è possibile semplificarle.

Se, come in questo caso, si trovano in parti opposte all'uguale.

$$(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1)$$

$$-x = +2$$

$$x = -2$$

Figura 4.11: Esempio di risoluzione esercizio 4

Dalla discussione sulla risoluzione, è emerso che la richiesta aggiuntiva è stata utile a soffermarsi a rivedere l'equazione iniziale e accorgersi della presenza di una possibile semplificazione.

M: Io inizialmente l'ho svolta tutta e poi dopo ho pensato che un altro modo poteva essere quello di togliere $(x + 1)^2$ e tutto questo di qua, così potevo semplificare.

I: All'inizio non avevi proprio visto che fossero uguali i termini a destra e hai proprio svolto tutti i prodotti?

M: Sì, non l'avevo proprio visto.

I: Ti è servita la seconda domanda per pensare al secondo procedimento?

M: Sì, secondo me sì. Da quello che mi ricordo me ne sono accorta dopo.

I: Quindi ti è stata utile la seconda domanda?

M: Sì molto.

I: Non ti ha messo in difficoltà?

M: No, no, è stata utile.

Al contrario, molti studenti hanno affermato che la presenza della richiesta aggiuntiva si è rivelata oggetto di confusione e smarrimento, come si può notare nelle occorrenze (C1-R117), (C1-R355), (C2-R301). Vediamo una risoluzione all'esercizio 4, dove probabilmente l'anticipazione non è entrata minimamente in gioco (C2-R301).

Esercizio 4

Risolvi la seguente equazione:

$$(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1)$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{1} + \cancel{2x} - \cancel{x} - \cancel{2} = \cancel{x^2} + \cancel{2x} + \cancel{1}$$

$$+x = \cancel{2}$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

No perché le equazioni si risolvono solo con
con questi metodi.

Figura 4.12: Esempio di risoluzione esercizio 4

Possiamo inoltre osservare che in alcuni casi gli studenti si sono trovati in difficoltà con la seconda domanda, poiché non comprendevano l'esigenza di dover trovare un procedimento alternativo se ne avevano già presentato uno, dicendo frasi come *"A me mandava in confusione perché, se avevo trovato un modo, non capivo perché ci doveva essere un altro."* (C1-R174).

Il richiedere una procedura alternativa infondeva una mancanza di sicurezza nel procedimento scritto e portava loro a rimettere in discussione ciò che avevano fatto.

Ciò fa pensare che la richiesta esplicita di più svolgimenti diversi dello stesso esercizio potrebbe essere oggetto di sviluppo del processo di anticipazione se, allo stesso tempo, si fa passare l'idea che non esistono procedure privilegiate o addirittura un'unica procedura per svolgere esercizi in matematica, ma se ne possono trovare diverse.

Un caso in cui invece l'anticipazione ha funzionato, è stato nel primo esercizio del questionario.

Nell'analisi degli svolgimenti degli studenti si è osservato che una buona parte di loro sembrava aver messo in atto il processo di anticipazione in modo corretto. La maggior parte di essi ha dichiarato di aver prima guardato l'espressione nel suo insieme e solo successivamente svolto i calcoli, riuscendo a sfruttare la proprietà commutativa per svolgerli più agevolmente. In questo caso, vedere "un prodotto di tante parentesi" ha aiutato nel processo di individuazione dei fattori. Ciò sembra dare una conferma di quello che

affermano Hoch & Dreyfus sul ruolo delle parentesi che, come abbiamo visto nel secondo capitolo, possono essere uno strumento utile per aiutare a riconoscere la struttura di un'espressione [18] [vedi per esempio (C1-R242), (C1-R209), (C1-R233), (C1-R375), (C2-R232)].

Vediamo due esempi di svolgimento tratti dai protocolli degli studenti (C1-R233) in figura 4.13, (C1-R375) in figura 4.14.

Esercizio 1

Semplifica la seguente espressione:

$$(x+2)(2x+3)(x-2)$$

$$(x^2-4)(2x+3)$$

$$2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$$

Potresti seguire un procedimento diverso? Se sì, quale? Se no, perché?

Sì, potrei anche svilupparle una per volta e non applicando la regola di somma per differenza di $(x+2)(x-2)$

Figura 4.13: Esempio di risoluzione all'esercizio 1

Esercizio 1

Semplifica la seguente espressione:

$$(x+2)(2x+3)(x-2) =$$

$$= (x+2)(x-2)(2x+3)$$

$$= (x^2-4)(2x+3)$$

$$= 2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$$

Potresti seguire un procedimento diverso? Se sì, quale? Se no, perché?

Sì, non facendo subito il prodotto notevole, ma moltiplicando tutti i numeri uno per uno

Figura 4.14: Esempio di risoluzione all'esercizio 1

In questa tipologia di esercizio è sembrato quindi che la maggior parte degli studenti avessero un certo senso della struttura, il quale ha permesso loro di manipolare agevolmente i fattori in gioco, anche se ciò non si è poi rivelato tale in altri casi.

Questo sembra suggerire che le abilità che definiscono il senso della struttura non siano acquisite in modo assoluto, ma possono intervenire o meno, di volta in volta, a seconda del particolare oggetto di analisi.

Dobbiamo però notare che l'aver saputo osservare la struttura, grazie alla presenza delle parentesi, non sempre si è rivelato corrispondere a saper fare buon uso di esse. A questo proposito riportiamo un protocollo in figura 4.16 in cui lo studente giunge al risultato corretto, ma fa un uso improprio delle parentesi, probabilmente poiché non ne ha compreso bene il significato.

Risolvi i seguenti esercizi:

Esercizio 1

Semplifica la seguente espressione:

$$(x + 2)(2x + 3)(x - 2)$$

$$x^2 + 4 (2x + 3)$$

$$2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$$

Potresti seguire un procedimento diverso? Se sì, quale? Se no, perché?

NO PERCHÉ NON PENSO CI SIANO ALTRI MODI

Figura 4.15: Esempio di risoluzione all'esercizio 1

Si trovano casi analoghi nelle occorrenze (C2-R159), (C2-R259).

Infine, è importante sottolineare che, a volte, chi sembra avere consapevolezza della struttura dell'espressione e manipolare agevolmente i fattori in gioco, non è detto che riesca a mettere in atto l'anticipazione. Riportiamo una risoluzione al primo esercizio dove si percepisce che lo studente non abbia riconosciuto la presenza di un prodotto notevole, se non solo alla fine.

Esercizio 1

Semplifica la seguente espressione:

$$(x+2)(2x+3)(x-2)$$

$$(2x^2+3x+4x+6)(x-2)$$

$$2x^3 - \cancel{4x^2} + 3x^2 - \cancel{6x} + \cancel{4x^2} - 8x + \cancel{6x} - 12$$

$$2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$$

Potresti seguire un procedimento diverso? Se sì, quale? Se no, perché?

Sì, potrei invertire l'ordine con cui moltiplico, e quindi:

$$\text{fare } (x+2)(2x^2-4+3x-6) \text{ oppure } (x^2-4)(2x+3).$$

Figura 4.16: Esempio di risoluzione all'esercizio 1

Come si legge nella risposta alla seconda domanda, lo studente ha chiaro come utilizzare la proprietà commutativa, ma sembra che qualsiasi scambio dell'ordine dei fattori sia del tutto analogo, non predilige assolutamente la possibilità di svolgere prima il prodotto notevole, anche se poi ne mostra la possibilità di farlo.

4.3 Risultati

Per concludere l'analisi dei risultati dei questionari, proponiamo una tabella riassuntiva dove si riportano per ogni esercizio i dati descritti di seguito in percentuale, in rapporto al numero totale di studenti che hanno svolto la prova, non distinguendo le due classi:

- **svolge due procedimenti:** studenti che hanno provato a svolgere l'esercizio in due modi diversi
- **primo procedimento corretto:** studenti che hanno svolto correttamente il primo procedimento che hanno proposto
- **secondo procedimento corretto:** studenti che hanno svolto correttamente il secondo procedimento che hanno proposto

- **riconosce prodotti notevoli:** studenti che hanno riconosciuto e applicato prodotti notevoli
- **capacità di anticipare 1:** studenti che sembrano aver messo in atto il processo di anticipazione nel primo svolgimento
- **capacità di anticipare 2:** studenti che sembrano aver messo in atto il processo di anticipazione a seguito della richiesta aggiuntiva (dove sono contati anche gli studenti del punto precedente)

	Esercizio 1	Esercizio 2	Esercizio 3	Esercizio 4	Esercizio 5
Svolge due procedimenti	71%	20%	45%	51%	39%
Primo procedimento corretto	80%	47%	73%	63%	88%
Secondo procedimento corretto	61%	14%	41%	39%	24%
Riconosce prodotti notevoli	67%	/	67%	33%	71%
Capacità di anticipare 1	39%	10%	43%	6%	67%
Capacità di anticipare 2	66%	16%	59%	31%	71%

Figura 4.17: Risultati conclusivi

Possiamo notare che gli studenti che hanno svolto due procedimenti, a parte per l'esercizio 1, non sono stati molti, mentre si vede che, tra gli studenti che hanno svolto il secondo procedimento, quasi tutti lo hanno svolto in modo corretto. Questo potrebbe essere indice del fatto che gli studenti abbiano proposto due procedimenti solo quando ne erano abbastanza sicuri, mentre nello svolgimento del primo hanno provato a scrivere soluzioni anche se incerti.

Per quanto riguarda il riconoscimento dei prodotti notevoli, ad eccezione del quarto esercizio, forse più complesso da vedere, possiamo osservare che quasi il 70% degli studenti non ha avuto particolari difficoltà.

Sull'anticipazione, invece, notiamo che nel primo procedimento svolto dagli studenti sembra essere poco presente, soprattutto negli esercizi 2 e 4, mentre per l'esercizio 5, dove essenzialmente si trattava di riconoscere un prodotto notevole, la percentuale si alza.

È interessante notare come la percentuale cresce notevolmente a seguito della domanda aggiuntiva. Questo ci conferma l'ipotesi iniziale per cui la domanda è stata progettata, ovvero che richiedere esplicitamente agli studenti di soffermarsi a pensare a strategie diverse per risolvere l'esercizio, può aiutarli a creare immagini mentali relative alla struttura dello stesso e ai possibili modi in cui svolgerlo, osservandolo più attentamente.

Si nota che l'ultima voce che compare nella tabella in figura 4.17, relativa all'anticipazione, è un dato rilevato basandosi sull'osservazione dei questionari e sulle riflessioni emerse nei dialoghi di gruppo, poiché non è possibile dare informazioni certe sullo sviluppo di questa da parte degli studenti.

Conclusioni

Dalle osservazioni sui questionari degli studenti e dalle discussioni di gruppo, sono emerse molte difficoltà di origini diverse, tra cui ostacoli didattici, epistemologici e ontogenetici.

In generale le difficoltà presentate sono state equidistribuite nelle due classi, e i risultati hanno avuto andamenti molto simili.

Si è notato come sia diffusa una profonda inconsapevolezza dei processi matematici che vengono messi in atto durante lo svolgimento degli esercizi.

Gli studenti molto spesso non comprendono bene la consegna, come quella sullo scrivere un polinomio dato come prodotto di fattori che abbiamo ampiamente analizzato, ma procedono comunque a trattare l'espressione algebrica data senza un preciso scopo, fino ad ottenere un risultato che sembra loro abbastanza familiare, dunque accettabile.

Sembra che un possibile sviluppo della capacità di anticipare, in molti studenti, sia davvero lontano, poiché non è presente una visione d'insieme, un senso della struttura per quanto riguarda le espressioni algebriche.

In particolare, gli studenti sembrano essere fortemente influenzati da ciò che il contratto didattico stabilisce. Durante i dialoghi con gli studenti, essi hanno sottolineato come la risoluzione dei compiti dati dipenda prevalentemente da ciò che sono abituati a fare in classe, al punto di arrivare alla verifica e avere un'idea molto chiara di come sarà strutturata la prova, quali tipi di esercizi saranno presenti e in quale ordine.

In più occasioni hanno dichiarato di aver svolto prima gli esercizi del questionario nell'ordine in cui erano stati affrontati gli esercizi in classe, per esempio prima le equazioni e poi le scomposizioni. Questo fa pensare al fatto che essi vedano ogni argomento come un pacchetto a sé, separato dagli altri e non creino collegamenti, perdendo il senso di ciò che stanno facendo.

Inoltre, si è notato che le difficoltà emerse per una buona parte possono dipendere da un'introduzione non graduale dell'algebra. Abbiamo sottolineato

come percorsi pre-algebrici, come quello dell'early algebra, possano essere di grande supporto per costruire delle basi solide attraverso il calcolo aritmetico, le quali verranno poi formalizzate e ampliate successivamente.

Possibili implicazioni didattiche

A seguito dell'analisi dei questionari e le successive attività di gruppo, si è riflettuto su quali possano essere delle possibili strategie che l'insegnante può mettere in atto per cercare di evitare che si presentino gli ostacoli all'apprendimento evidenziati.

Un primo passo per una costruzione di un pensiero algebrico abbastanza solido è sicuramente quello di cercare di utilizzare diverse rappresentazioni per i concetti matematici che si presentano in classe e spronare gli studenti a fare altrettanto. Abbiamo visto che si possono costruire alcune attività o esercizi specifici da proporre agli studenti per incentivare l'uso di diverse rappresentazioni in diversi registri, per esempio esercizi di trattamento o conversione.

Inoltre, è importante far soffermare gli studenti sul senso dei simboli e sul significato che essi hanno in base al contesto, in modo da poter sviluppare un senso della struttura che permetterà poi di manipolare e trattare espressioni algebriche in modo consapevole.

La consapevolezza della struttura dell'espressione algebrica permette poi di mettere in atto processi di anticipazione, in modo che lo studente riesca a prevedere l'aspetto della forma finale dell'oggetto che sta manipolando, avendo chiaro l'obiettivo da raggiungere. Su questo piano l'insegnante può costruire esercizi specifici che spingano lo studente ad una riflessione sulla struttura algebrica e sulle varie forme che essa può avere, per esempio con una richiesta di un procedimento alternativo simile a quella proposta nel questionario.

Per quanto riguarda gli ostacoli didattici, dai dialoghi con gli studenti sono emerse alcune convinzioni degli studenti che potrebbero essere risolte con un approccio diverso dell'insegnante in classe. Per abituare gli studenti alla possibilità di eseguire esercizi in modi differenti si potrebbe svolgerne alcuni in classe proponendo loro più procedimenti diversi, sottolineando che non ne esistono di maggiormente corretti. Inoltre, per quanto riguarda per esempio le scomposizioni e i raccoglimenti, è importante passare l'idea che non bisogna seguire un ordine rigido di passaggi da seguire, ma si devono utilizzare le

tecniche che conosciamo consapevolmente in base alla situazione che ci si presenta.

Infine, ciò che l'insegnante potrebbe fare, è dedicare del tempo a ragionare su esercizi più semplici, che prevedono meno calcoli, ma utili a far riflettere gli studenti sul senso e sul significato, più che allo svolgimento meccanico di esercizi lunghi che di solito si trovano sui libri di testo, magari accompagnando tali ragionamenti con discussioni tra pari in classe.

Appendice A

Di seguito si riporta la trascrizione relativa alla discussione in focus group delle due classi con cui è stata fatta l'attività, con relative immagini dei protocolli degli studenti a cui si riferisce la discussione.

Si riportano i dialoghi svolti divisi per gruppo e per mantenere l'anonimato si differenziano gli studenti associandoli una lettera, mentre con I si contrassegnano gli interventi dell'intervistatore.

Per ogni gruppo si procede prendendo in esame un esercizio del compito e si prosegue analizzandone gli altri di seguito.

All'interno della trascrizione compaiono commenti in corsivo qualora non fosse stato possibile riportare le precise parole o gesti di alcuni studenti e non sono riportati parti di dialoghi inutili al fine della ricerca.

Osservazione: dai dialoghi seguenti si può notare come in alcuni gruppi siano presenti degli studenti che non hanno voluto partecipare alla discussione o hanno partecipato solo in parte, dunque talvolta non compare mai la lettera associata allo studente in esame, anche se presente nell'elenco dei partecipanti al gruppo.

Seguono le discussioni relative alla prima classe e successivamente alla seconda.

Trascrizione Focus Group relativa alla 1° classe

GRUPPO 1

Studenti coinvolti: M, B, L, C, S.

Analisi esercizio 4

Esercizio 4

Risolvi la seguente equazione:

$$(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1)$$

~~$(x+1)(x-1) - (x+2) = (x+1)(x+1)$~~

$$-3 = x+1$$
$$x = -4$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

No, senza perdere tempo inutilmente è impossibile svolgere questa equazione in modo diverso.

Figura G1. 1 Risoluzione di M all'esercizio 4

- 1 I: Cosa intendevi con questa frase?
- 2 M: Siccome ho fatto l'esercizio in un certo modo, non ho
- 3 speso tantissimo tempo nel cercare altri modi. Ho pensato:
- 4 siccome io l'ho fatto così, sarebbe coerente dire che è il
- 5 modo più veloce.
- 6 I: Quindi ti riferivi al tempo impiegato a risolverlo?
- 7 M: Sì.
- 8 I: Avevi visto altre soluzioni possibili?
- 9 M: No, in realtà no, cioè non ne ho trovate altre, tranne con
- 10 cambiamenti minimi.
- 11 I: B te invece avevi trovato due possibili modi per risolverla,
- 12 ci spieghi cosa hai fatto?

Esercizio 4

Risolvi la seguente equazione:

$$\begin{aligned}(x+1)^2 - (x+2) &= (x+1)(x+1) \\ (x+1)^2 - (x+2) &= (x+1)^2 \\ \cancel{(x+1)^2} - x - 2 &= 0 \\ x &= -2\end{aligned}$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Si) $(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1)$

$$\begin{aligned}x^2 + 2x + 1 - x - 2 &= x^2 + x + x + 1 \\ x - 1 &= 2x + 1 \\ -2 &= x\end{aligned}$$

Figura G1. 2 Risoluzione di B all'esercizio 4

- 13 **B:** Sì, nel primo ho raggruppato $(x+1) \cdot (x+1)$ per
 14 semplificarlo, mentre nell'altro ho fatto tutti i calcoli e
 15 quindi l'ho reso più lungo.
- 16 **I:** quindi hai visto subito che si poteva fare la
 17 semplificazione?
- 18 **B:** Sì.

Esercizio 4

Risolvi la seguente equazione:

$$\begin{aligned}(x+1)^2 - (x+2) &= (x+1)(x+1) \\ \Rightarrow x^2 + 2x + 1 - (x+2) &= x^2 + 2x + 1 \\ \Rightarrow x^2 + x - 1 &= x^2 + 2x + 1 \\ \Rightarrow x - 2x &= 1 + 1 \\ \Rightarrow -x &= 2 \quad x = -2\end{aligned}$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Si, posso semplificare $(x+1)^2$ con $(x+1)(x+1)$

$$\begin{aligned}\cancel{(x+1)^2} - (x+2) &= \cancel{(x+1)}(\cancel{x+1}) \\ \text{così rimane } -x - 2 &= 0 \quad \Rightarrow -x = 2 \\ x &= -2\end{aligned}$$

Figura G1. 3 Risoluzione di L all'esercizio 4

- 19 **I:** L hai visto dopo che si poteva fare nel secondo modo?

- 20 L: No, in realtà l'avevo visto subito, però ho preferito
 21 scrivere quello.
- 22 I: Perché non eri convinto della seconda soluzione ed eri più
 23 sicuro a scrivere il primo?
- 24 L: Sì, ero più sicuro del primo.

Esercizio 4

Risolvi la seguente equazione:

$$(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1)$$

~~$x^2 + 2x + 1 - x - 2 = x^2 + 2x + 1$~~

~~$x^2 + 2x + 1 - x - 2 = x^2 + 2x + 1$~~

~~$x^2 + 2x + 1 - x - 2 = x^2 + 2x + 1$~~

$x^2 + 2x + 1 - x - 2 = x^2 + 2x + 1$

$x - 1 = 2x + 1$

$-x = 2$

$x = -2$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

~~$(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1)$~~

$(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1)$

$-x - 2 = 0$

$-x = 2$

$x = -2$

Figura G1. 4 Risoluzione di C all'esercizio 4

- 25 I: C tu avevi svolto in due modi? Hai pensato entrambi
 26 insieme oppure ti è venuto in mente il secondo dopo la
 27 domanda?
- 28 C: No, in realtà li avevo pensati prima entrambi e poi ne ho
 29 scritto uno sopra e l'altro sotto, ma se dovessi scegliere,
 30 sceglierei il secondo perché più veloce.

Analisi esercizio 5

Esercizio 5

Risolvi la seguente equazione:

$$4x - x^2 + 5(4 - 2x) = (3 - x)(3 + x)$$
$$\Rightarrow 4x - \cancel{x^2} + 20 - 10x = 9 - \cancel{x^2}$$
$$\Rightarrow -6x = -20 + 9$$
$$\Rightarrow -\frac{6x}{6} = -\frac{11}{6} \quad x = \frac{11}{6}$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

No perchè non ci sono prodotti notevoli da semplificare o raccoglimenti.

Figura G1. 5 Risoluzione di L all'esercizio 5

- 31 I: Con ciò che hai scritto intendi che, quando hai un
32 esercizio del genere, quello che controlli è se si possono fare
33 raccoglimenti o ci sono prodotti notevoli?
- 34 L: Sì, perché, quando ho un'equazione guardo prima se si
35 possono fare queste due cose, se no inizio a svolgere.
- 36 I: Vedi altri modi per svolgerlo?
- 37 L: No, non ne vedo altri.

Esercizio 5

Risolvi la seguente equazione:

$$\begin{aligned}4x - x^2 + 5(4 - 2x) &= (3 - x)(3 + x) \\4x - x^2 + 20 - 10x &= (3 - x)(3 + x) \\-x^2 + 20 - 6x &= 3^2 - x^2 \\-6x &= 9 - 20 \\-6x &= -11 \\x &= +\frac{11}{6}\end{aligned}$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Sì, credo sia possibile scomporre con la regola di Ruffini o con i trinomi speciali, ma penso sia più lungo.

Figura G1. 6 Risoluzione di M all'esercizio 5

38 I: M mi sapresti spiegare quale era l'altro modo che avevi
39 pensato?

40 M: Sì, volevo prima svolgerlo e poi usare il trinomio
41 speciale, però non so se si può fare.

42 *M prova a fare il conto su un foglio ma non trova come fare*
43 *il raccoglimento che vuole, spiega però che l'intento è*
44 *quello di "raccogliere qualcosa dalla parte sinistra per*
45 *semplificarlo con un fattore di destra".*

46 M: speravo di trovare un $(3 - x)$ o $(3 + x)$ ma non riesco
47 con il trinomio speciale. Posso provare con Ruffini.

48 *Fa un po' di prove ma poi vede che non riesce a trovare le*
49 *radici che vuole; quindi, conclude che non poteva usare*
50 *questi due metodi in questo caso particolare.*

51 *Comunque, spiega che voleva fare un raccoglimento a*
52 *sinistra in modo da semplificare con un fattore di destra,*
53 *come per l'esercizio 4.*

54 C: Io invece non vedo altri modi per risolvere.

55 *Quindi C vede come unica possibilità fare somma per*
56 *differenza e non svolgere tutto*

Analisi esercizio 2

Esercizio 2

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$2x(3 + 4x) + 2x(1 - 4x) + 8x$$

$$\Rightarrow 2x[3 + \cancel{4x} + 1 - \cancel{4x} + 4]$$

$$\Rightarrow 2x[8]$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Posso svolgere le moltiplicazioni e alla fine risolvere l'espressione

$$\rightarrow 6x + 8x + 2x - 8x + 8x$$

$$\rightarrow 16x$$

NO

Figura G1. 7 Risoluzione di L all'esercizio 2

- 57 I: Qui perché, dopo aver scritto il secondo metodo, hai
 58 scritto NO?
- 59 L: Qui avevo svolto le moltiplicazioni, però poi sono
 60 arrivato al risultato $16x$ che non era un prodotto di fattori
 61 come chiedeva l'esercizio, quindi ho cancellato.
- 62 I: $2x \cdot [8]$ secondo te è un prodotto di fattori?
- 63 L: Sì.
- 64 I: E $16x$ è un prodotto di fattori?
- 65 *L non risponde, gli altri dicono sì.*
- 66 I: L non sei d'accordo con questa affermazione?
- 67 L: No, io intendevo come se fosse una scomposizione e $16x$
 68 non è una scomposizione. Mentre
 69 $4 \cdot 4x$ è una scomposizione.
- 70 I: Quindi $16x$ non andava bene secondo te?
- 71 L: Sì, forse sì.
- 72 I: Qui vi hanno confuso le parole "prodotto di fattori"?
- 73 L: Sì.
- 74 *Viene fatto un esempio di altri prodotti di fattori e si*
 75 *chiarisce cosa siano i prodotti di fattori.*

Analisi esercizio 3

Esercizio 3

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$\begin{aligned} &4a^6 - 16b^4 \\ &(2a^3)^2 - (4b^2)^2 \\ &(2a^3 + 4b^2)(2a^3 - 4b^2) \end{aligned}$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

~~Ab, è la procedura più semplice ed efficace.~~

Figura G1. 8 Risoluzione di M all'esercizio 3

- 76 **M:** Io non ero sicuro di come funzionasse questo prodotto
77 notevole, quindi ho provato a fare così.
- 78 **I:** Cosa ti confondeva?
- 79 **M:** Perché c'era il quadrato di un cubo e il quadrato di un
80 quadrato, mi ha un po' confuso forse.
- 81 **I:** ti confondeva la presenza del 6 e 4?
- 82 **M:** sì.
- 83 **I:** Qualcuno ha fatto in modo diverso?

Esercizio 3

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$4a^6 - 16b^4$$
$$4(a^6 - 4b^4)$$
$$4(a^3 - 2b^2)(a^3 + 2b^2)$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

$$(2a^3 - 4b^2)(2a^3 - 4b^2)$$
$$2(a^3 - 2b^2) \cdot 2(a^3 - 2b^2)$$
$$4(a^3 - 2b^2)(a^3 + 2b^2)$$

Figura G1. 9 Risoluzione di B all'esercizio 3

84 **B:** Io all'inizio avevo raccolto un 4, poi dopo nell'altro
85 modo ho raccolto prima un 2 e poi un altro 2 dalla seconda
86 parentesi e poi ho moltiplicato e ottenuto 4.

87 **C:** Io ho fatto prima somma per differenza però poi ho detto
88 che abbiamo fatto prima le equazioni normali e quindi ho
89 messo prima quel procedimento. Però in realtà di solito
90 faccio l'altro perché è più veloce.

Esercizio 3

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$4a^6 - 16b^4$$
$$4(a^6 - 4b^4)$$
$$4(a^3 - 2b^2)(a^3 + 2b^2)$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

~~Si potrebbe fare prendendo subito in considerazione che il polinomio è una somma per differenza utilizzando altri modi.~~
~~No perché altrimenti non sarebbe scomposto in fattori irriducibili.~~
~~Questo polinomio si potrebbe scomporre con il raccoglimento totale.~~
Si potrebbe fare prendendo subito in considerazione che il polinomio è una somma per differenza utilizzando altri modi.
→ $(2a^3 - 4b^2)(2a^3 + 4b^2)$
 $(2(a^3 - 2b^2))(2(a^3 + 2b^2))$
 ~~$(2(a^3 - 2b^2))(2(a^3 + 2b^2))$~~
 ~~$(2)(a^3 - 2b^2)(2)(a^3 + 2b^2)$~~
 ~~$(4)(a^3 - 2b^2)(a^3 + 2b^2)$~~

Figura G1. 10 Risoluzione di C all'esercizio 3

GRUPPO 2

Studenti coinvolti: F, L, M, G.

Analisi esercizio 4

Esercizio 4

Risolvi la seguente equazione:

$$(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1)$$

$$x^2 + 2x + 1 - x - 2 = x^2 + 2x + 1$$

$$2x - x - 2x = -1 + 2 + 1$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{2}{-1} \rightarrow x = -2$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

No perché l'unico procedimento diverso potrebbe essere quello di portare tutte le x dalla parte opposta e lo stesso procedimento con i numeri non avendo la x

Figura G2. 1 Risoluzione di F all'esercizio 4

- 91 I: Cosa significa questa frase? Pensi che non ci siano altri
92 modi per risolverla?
- 93 F: Intendevo che l'unico modo per fare diversamente è di
94 portare tutte le x a destra invece che a sinistra e poi fare i
95 conti.
- 96 I: qualcuno ha trovato un procedimento diverso?

Esercizio 4

Risolvi la seguente equazione:

$$\begin{aligned}(x+1)^2 - (x+2) &= (x+1)(x+1) \\ x^2 + 1 + 2x - x - 2 &= x^2 + x + x + 1 \\ \cancel{x^2} - 1 + x &= \cancel{x^2} + 2x + 1 \\ x - 2 &= 2 \\ -x &= 2 \\ x &= -2\end{aligned}$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Sì, potremmo infatti annullare $(x+1)^2$ e $(x+1)(x+1)$, poiché hanno lo stesso valore, dunque in un'equazione è possibile semplificarle. Se, come in questo caso, si trovano in parti opposte all'uguale.

$$\begin{aligned}(x+1)^2 - (x+2) &= (x+1)(x+1) \\ -x &= +2 \\ x &= -2\end{aligned}$$

Figura G2. 2 Risoluzione di M all'esercizio 4

- 97 **M:** Io inizialmente l'ho svolta tutta e poi dopo ho pensato
98 che un altro modo poteva essere quello di togliere $(x+1)^2$
99 e tutto questo di qua, così potevo semplificare.
- 100 **I:** All'inizio non avevi proprio visto che fossero uguali i
101 termini $(x+1)$ e $(x+1)$ a destra e hai proprio svolto tutti i
102 prodotti?
- 103 **M:** Sì, non l'avevo proprio visto.
- 104 **I:** Ti è servita la seconda domanda per pensare al secondo
105 procedimento?
- 106 **M:** Sì, secondo me sì. Da quello che mi ricordo me ne sono
107 accorta dopo.
- 108 **I:** Quindi ti è stata utile la seconda domanda?
- 109 **M:** Sì molto.
- 110 **I:** Non ti ha messo in difficoltà?
- 111 **M:** No no è stata utile.

Esercizio 4

Risolvi la seguente equazione:

$$(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1)$$
~~$$x^2 + 2x + 1 - x - 2 = x^2 + x + x + 1$$~~

$$x^2 - x - 2 = x^2 + x + 1$$

$$2x - x - x = +2$$

$$-x = +2$$

$$x = -2$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

no, perché le equazioni si possono risolvere solo in un modo.

Figura G2. 3 Risoluzione di G all'esercizio 4

- 112 I: G anche tu hai scritto che c'è solo un modo per risolverla.
 113 Dopo quello che ha detto M hai cambiato idea?
 114 G: Sì, effettivamente non ci avevo pensato a questo.
 115 I: Ora ti è chiaro come ha fatto?
 116 G: Sì, ora sì.
 117 I: Nel tuo caso quindi la seconda domanda non ti ha aiutato
 118 a pensare ad un'altra soluzione?
 119 G: No, non mi è stata utile.

Analisi esercizio 3

Esercizio 3

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$4a^6 - 16b^4 =$$

$$4(a^6 - 4b^4) =$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Figura G2. 4 Risoluzione di L all'esercizio 3

- 120 L: Io qua mi sono bloccato quando ho visto " a^6 ", perché
 121 all'inizio lo volevo mettere come somma per differenza,
 122 solo che quel 6 mi ha fatto cambiare idea.
- 123 I: Ti confondeva il fatto che ci fosse sia a^6 che a^4 ?
- 124 L: Sì, esatto, infatti non mi è venuto.
- 125 I: Però hai visto che si poteva raccogliere il 4?
- 126 L: Sì quello l'ho visto.

Esercizio 3

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$4a^6 - 16b^4$$

~~$(a^2 + a^2)(a^2 + a^2)(b^2 + b^2)(b^2 + b^2)$~~
 ~~$(a^2 + a^2)(a^2 + a^2)(b^2 + b^2)(b^2 + b^2)$~~
 ~~$(a^2 + a^2)(a^2 + a^2)(b^2 + b^2)(b^2 + b^2)$~~
 $4(a^6 - 4b^4) \rightarrow 4(a^3 + 2b^2)(a^3 - 2b^2)$
 ~~$(a^2 + a^2)(a^2 + a^2)(b^2 + b^2)(b^2 + b^2)$~~

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

~~Se si segue una procedura diversa si rischia di non trovare la risposta corretta~~
~~il risultato è sempre lo stesso~~
 Sì

Figura G2. 5 Risoluzione di F all'esercizio 3

- 127 F: Io qui all'inizio avevo svolto, poi ho cancellato e ho
 128 scritto così, perché non ero sicuro.
- 129 I: avevi provato a scrivere un secondo modo?
- 130 F: Sì, mi ero reso conto che c'era un altro modo ma poi non
 131 ho capito come farlo.
- 132 I: riguardandolo ora ti viene in mente un altro modo?
- 133 F: No, non mi viene.
- 134 I: Qualcuno ha un modo da suggerire?

Esercizio 3

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$4a^6 - 16b^4$$

~~$$4a^6 - 16b^4$$~~

~~$$4a^6 - 16b^4$$~~

$$(2a^3 + 4b^2)(2a^3 - 4b^2)$$

$$2(a^3 + 2b^2)(a^3 - 2b^2)$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Sì, in questo caso ho raccolto prima il 4, poi ho fatto la differenza.

~~$$4(a^6 - 4b^4)$$~~

$$4(a^6 - 4b^4)$$

$$4(a^3 + 2b^2)(a^3 - 2b^2)$$

Figura G2. 6 Risoluzione di M all'esercizio 3

- 135 **M:** Io ho raccolto una volta 2, poi ho messo prodotto
136 notevole somma per differenza nel primo modo, e nell'altro
137 invece ho raccolto 4 e poi ho fatto un'altra somma per
138 differenza.
- 139 **I:** Hai visto subito che potevi fare subito somma per
140 differenza?
- 141 **M:** Sì, nel compito mi sembra di sì. Ora però ripensandoci
142 mi verrebbe più facile raccogliere prima il 4.

Analisi esercizio 1

Esercizio 1

Semplifica la seguente espressione:

$$(x + 2)(2x + 3)(x - 2)$$

$$(2x^2 + 3x + 4x + 6)(x - 2)$$

$$(2x^2 + 7x + 6)(x - 2)$$

$$2x^3 - 4x^2 + 7x^2 - 14x + 6x - 12$$

$$2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$$

Potresti seguire un procedimento diverso? Se sì, quale? Se no, perché?

Sì, si può seguire un altro procedimento:

$$(x + 2)(x - 2)(2x + 3)$$

$$(x^2 - 4)(2x + 3)$$

$$2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$$

Figura G2. 7 Risoluzione di F all'esercizio 1

- 143 **I:** F ci spieghi cosa hai fatto?
- 144 **F:** Allora, prima ho fatto il procedimento come si trovava e
 145 poi dopo ho iniziato a semplificare
- 146 $(x + 2)$ e $(x - 2)$
- 147 **I:** Avevi visto da subito che si poteva fare la somma per
 148 differenza?
- 149 **F:** Sì, però con l'altro modo sono andato sul sicuro.
- 150 **I:** Non eri convinto del secondo? Che proprietà hai usato per
 151 svolgerlo?
- 152 **F:** Transitiva?
- 153 **M:** No commutativa.
- 154 **I:** Vi torna che si può applicare la proprietà commutativa
 155 anche se non abbiamo un prodotto tra numeri?
- 156 **Altri:** Sì.

Esercizio 1

Semplifica la seguente espressione:

$$\begin{aligned} (x + 2)(2x + 3)(x - 2) &= \\ (2x^2 + 3x + 4x + 6)(x - 2) &= \\ (2x^2 + 7x + 6)(x - 2) &= \\ 2x^3 - 4x^2 + 7x^2 - 14x + 6x - 12 &= 2x^3 + 3x^2 - 8x - 12 \end{aligned}$$

Potresti seguire un procedimento diverso? Se sì, quale? Se no, perché?

$$(x + 2)(2x + 3)(x - 2) = \quad \text{Sì posso}$$

$$(x^2 - 4)(2x + 3) = 2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$$

Figura G2. 8 Risoluzione di L all'esercizio 1

- 157 **I:** L te cosa avevi fatto?
- 158 **L:** Prima io ho fatto il prodotto e ho moltiplicato, soltanto
 159 che dopo mi sono accorto che si poteva fare la proprietà
 160 commutativa, ma solo alla fine del compito mi sono reso
 161 conto.

- 162 **I:** Quindi la domanda in questo caso non ti ha aiutato a
 163 vederlo in modo diverso?
 164 **L:** No, in questo caso no.

Esercizio 1

Semplifica la seguente espressione:

$$(x+2)(2x+3)(x-2)$$

$$(2x^2+3x+6)(x-2)$$

$$2x^3-4x^2+3x^2-6x+6x-12$$

$$2x^3+3x^2-12-8x$$

$$2x(x^2-4)+3(x^2-4)$$

$$(2x+3)(x^2-4) = (2x+3)(x+2)(x-2)$$

Potresti seguire un procedimento diverso? Se sì, quale? Se no, perché?

$$(x+2)(x-2)(2x+3)$$

$$(x^2-4)(2x+3)$$

$$2x^3+3x^2-8x-12$$

Q

Si sfruttando i prodotti notevoli, anche perché cambiando l'ordine dello sviluppo delle parentesi il risultato non cambia per proprietà commutativa delle moltiplicazioni. da semplificazione per regola associativa

Figura G2. 9 Risoluzione di M all'esercizio 1

- 165 **M:** io invece ho fatto come F, inizialmente ho svolto tutto
 166 normale e poi dopo quando ho visto la domanda mi è venuto
 167 in mente che potevo fare prima somma per differenza.
- 168 **I:** Quindi non ti era venuto in mente prima?
- 169 **M:** No, il problema è che io di solito comincio subito, non
 170 guardo prima tutto.
- 171 **I:** in generale, secondo voi, può essere utile una domanda
 172 del genere per riflettere meglio sull'esercizio? O vi crea
 173 confusione?
- 174 **G:** A me mandava in confusione perché, se avevo trovato un
 175 modo, non capivo perché ci doveva essere un altro.
- 176 **F:** Anche per me, infatti se ho fatto il secondo modo ci ho
 177 pensato alla fine del compito, non leggendo la domanda
 178 subito.

Analisi esercizio 2

- 179 **I:** L'esercizio 2 vi ha creato un po' più problemi?
- 180 **L:** Sì, a me sì. Devo dire che l'ho capito soltanto dopo,
181 infatti l'ho scritto sul foglio, però non ho avuto il tempo di
182 finire perché mi sono accorto solo dopo come potevo
183 risolverlo.

$$\begin{aligned} & 2x[(3+4x) + (-1-4x) + 4] \\ & 2x[(\cancel{3+4x}+1)(\cancel{-4x}+4)] \\ & 2x[(3+3x+1x+1)-4(x-1)] \\ & 2x[3(1+x)+(x+1)-4(x-1)] \end{aligned}$$

Figura G2. 10 Risoluzione di L all'esercizio 2

- 184 **I:** Ma non era chiaro il comando per voi?
- 185 **G:** No io non riuscivo a risolverlo.
- 186 **L:** A me in realtà all'inizio mi ha un po' confuso il prodotto
187 di fattori, però dopo quando ho capito che era una
188 scomposizione ho capito come fare.
- 189 **I:** F cosa avevi fatto?

Esercizio 2

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$2x(3 + 4x) + 2x(1 - 4x) + 8x$$

$$2x(3+4x) + 2x(1-4x) + 8x$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Figura G2. 11 Risoluzione di F all'esercizio 2

190 **F:** Qua mi sono reso conto che andava raccolto $2x$ dopo la
191 verifica, ma qui l'ho fatto in modo sbagliato. Mi sono reso
192 conto subito dopo che avevo sbagliato.

193 **I:** Riguardandolo ora ti viene come farlo? Se nel comando ci
194 fosse stato scritto di fare un raccoglimento vi sarebbe venuto
195 in mente più facilmente?

196 **F:** Sì, così sì.

Esercizio 2

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$2x(3 + 4x) + 2x(1 - 4x) + 8x$$

$$2x(3+4x) + 2x(1-4x) + 8x$$

$$2x(3+4x) + 2x(1-4x) + 8x$$

$$2x(3+4x+1-4x) + 8x \rightarrow 2x(3+1+4)$$

$$16x = 2^4x$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

NO, IN QUANTO L'UNICA COSA CHE POSSIAMO RACCOGLIERE È $2x$ E DEL
RESTO L'ESPRESSIONE NON È SCOMPONIBILE PERCHÉ GIÀ RIDOTTA.
MINIMI TERMINI

Figura G2. 12 Risoluzione di M all'esercizio 2

197 **M:** Inizialmente l'avevo svolta tutta, poi dopo però ho
198 raccolto $2x$ due volte e poi ciò che rimaneva l'ho messo
199 insieme.

200 **I:** Ti viene in mente un altro modo per farlo dato che hai
201 raccolto due volte $2x$?

- 202 **M:** Sì, forse potevo raccogliere tra tutto $2x$, piuttosto che
 203 stare a svolgere tutto. Tornassi indietro farei il totale, perché
 204 comunque ci si poteva arrivare.
- 205 **I:** Se ci fosse stato $8x \cdot (x + 1)$ una cosa di questo tipo
 206 l'avresti visto meglio?
- 207 **M:** Sì in quel caso avrei raccolto tutto.

GRUPPO 3

Studenti coinvolti: **G, M, S, D, A, N.**

Analisi esercizio 1

Esercizio 1

Semplifica la seguente espressione:

$$(x+2)(2x+3)(x-2)$$

$$(2x^2+3x+4x+6)(x-2)=$$

$$(2x^2+7x+6)(x-2)=$$

$$2x^3-4x^2+7x^2-14x+6x-12=2x^3+3x^2-8x-12$$

Potresti seguire un procedimento diverso? Se sì, quale? Se no, perché?

No, è una semplificazione e si possono solo svolgere in ordine le operazioni

Figura G3. 1 Risoluzione di D all'esercizio 1

- 208 **I:** D ha scritto questo siete tutti d'accordo?
- 209 **M:** No, io ho fatto diverso.

✕ **Esercizio 1**

Semplifica la seguente espressione:

$$(x+2)(2x+3)(x-2)$$
~~$$= (x^2 - 4)(2x+3)$$~~

Potresti seguire un procedimento diverso? Se sì, quale? Se no, perché?

Sì, si potrebbe moltiplicare ogni membro delle parentesi per gli altri

$$= (x+2)(2x+3)(x-2)$$

$$\begin{aligned} & x(2x+3) \\ & x(x-2) \\ & 2x(2x+3) \\ & 2x(x-2) \\ & 3(x-2) \end{aligned}$$

In questo modo poi, per semplificare, si dovrebbe sommare o sottrarre (dipende dal segno che precede il membro) i membri/elementi simili tra di loro presenti nell'espressione

Figura G3. 2 Risoluzione di M all'esercizio 1

- 210 **I:** Spiegaci come hai ragionato.
- 211 **M:** Allora, ci sono due modi per semplificare, anzi in realtà
- 212 più modi. Nel primo modo ho usato i prodotti notevoli,
- 213 anche se poi qua mi son dimenticata di semplificare ancora;
- 214 invece qua ho fatto tutte queste frecce, che è un
- 215 procedimento più lungo, ma a volte è molto più sicuro.
- 216 **I:** Spiegaci come hai fatto nel secondo modo.
- 217 **M:** Allora io trovo tutti i prodotti per prima cosa e poi...
- 218 **I:** Come trovi quei prodotti? Applicando la proprietà
- 219 distributiva?
- 220 **M:** Sì, questi li trovo con la distributiva e poi sommi o
- 221 sottrao quelli simili tra loro. Quindi dopo fatto tutti i
- 222 prodotti, guardo quelli con la stessa parte letterale, quindi
- 223 sommo tutti quelli con la x e poi tutti quelli con x^2 e poi i
- 224 termini noti.
- 225 **I:** qualcuno ha fatto in modo diverso?

Esercizio 1

Semplifica la seguente espressione:

$$(x+2)(2x+3)(x-2) = (2x^2+3x+4x+6)(x-2) = (2x^2+7x+6)(x-2) = 2x^3-4x^2+7x^2-14x+6x-12 = 2x^3-3x^2-8x-12$$

Potresti seguire un procedimento diverso? Se sì, quale? Se no, perché?

Sì, moltiplicare prima $(2x+3)$ con $(x-2)$ poi moltiplicare il prodotto con $(x+2)$

Figura G3. 3 Risoluzione di N all'esercizio 1

- 226 N: Io ho scambiato l'ordine per moltiplicare.
- 227 I: Oltre a questi due modi vedi anche un altro modo per fare
- 228 questo scambio?
- 229 N: No.
- 230 I: Altri lo possono aiutare?
- 231 A: Io ho moltiplicato prima la somma per differenza e poi
- 232 l'altro.

Esercizio 1

Semplifica la seguente espressione:

$$(x+2)(2x+3)(x-2)$$

$$(x^2-4)(2x+3)$$

$$2x^3+3x^2-8x-12$$

Potresti seguire un procedimento diverso? Se sì, quale? Se no, perché?

Sì, potrei anche suggerire una per volta e non applicando la regola di somma per differenza di $(x+2)(x-2)$

Figura G3. 4 Risoluzione di A all'esercizio 1

- 233 I: e cosa ti ha permesso di fare così?

234 **A:** ho applicato la proprietà commutativa.

235 **I:** S te cosa hai fatto?

Esercizio 1

Semplifica la seguente espressione:

$$\begin{aligned} & (x+2)(2x+3)(x-2) \\ & (x^2-4)(2x+3) \\ & 2x^3+3x^2-8x-12 \end{aligned}$$

Potresti seguire un procedimento diverso? Se sì, quale? Se no, perché?

$$\begin{aligned} & (2x^2-4x+3x-6)(x+2) \\ & 2x^3+4x^2-x^2-2x-6x-12 \\ & = 2x^3+3x^2-8x-12 \end{aligned}$$

Figura G3. 5 Risoluzione di S all'esercizio 1

236 **S:** Allora, secondo me la tesi era basata sul fatto che in
237 matematica ci sono vari modi per risolvere un'operazione...

238 **D:** Certo, puoi anche aggiungere +1 e -1 alla fine se vuoi.

239 **S:** ...quindi ho cercato di scrivere sempre un'altra
240 procedura. Tipo qua ho sbagliato perché ho risolto prima, e
241 poi l'ho scomposta un po' a modo mio.

Analisi esercizio 2

242 **I:** spiegami bene cosa hai fatto.

Esercizio 2

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$\begin{aligned} & 2x(3 + 4x) + 2x(1 - 4x) + 8x \\ & (3 + 4x)(2x) + (1 - 4x)(2x) + 8x \\ & (3 + \cancel{4x} - \cancel{4x} + 1)(2x) + 8x \\ & \quad \quad \quad = 16x \end{aligned}$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

$$\begin{aligned} & x(2+2)^2 \\ & = x(16) \\ & = 16x \end{aligned}$$

Figura G3. 6 Risoluzione di S all'esercizio 2

243 S: Allora, nel primo ho raccolto $2x$, poi $3 + 4x$ e $1 - 4x$,
244 allora poi l'ho risolto e mi veniva $16x$. Allora non sapevo
245 come...in che altro modo ...

246 I: Sei arrivato al risultato $16x$ e poi hai cancellato, come
247 mai? Non ti sembrava che fosse la risposta alla domanda?

248 S: eh sì esatto, perché non bisognava mettere i risultati
249 quindi non capivo.

250 I: In che senso? Non è un prodotto di fattori?

251 S: Boh, anche dopo ho ripreso dal risultato e ho cercato di
252 scrivere come prodotti, perché non mi venivano altri modi
253 per riscrivere l'espressione.

254 I: Ma secondo voi $16x$ è un prodotto di fattori?

255 M: Può essere, cioè tipo io ho scritto $2x \cdot 8$.

✕ **Esercizio 2**

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$\begin{aligned} & 2x(3 + 4x) + 2x(1 - 4x) + 8x \\ &= 6x + 8x^2 + 2x - 8x^2 + 8x \\ &= 16x \\ &= 2x(3 + 4x + 1 - 4x + 4) \\ &= 2x(8) = 2x \cdot 8 \end{aligned}$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Nb, poiché questa espressione si può scomporre ~~data~~ convenzionalmente con un raccoglimento totale

Figura G3. 7 Risoluzione di M all'esercizio 2

- 256 **I:** e quello è un prodotto di fattori?
- 257 **M:** Sì, è il risultato.
- 258 **I:** Vi torna che sia la stessa cosa scrivere $16x$ e $2x \cdot 8$? Sono
- 259 entrambi prodotti di fattori?
- 260 **Gruppo:** Sì (*poco convinto*)
- 261 **I:** S rivedendola ora come faresti per risolverlo?
- 262 **S:** Farei $16x$ oppure $4 \cdot 4 \cdot x$ oppure ...
- 263 **I:** In questa seconda domanda vi chiedevo un procedimento
- 264 diverso, quelli che hai detto sono solo modi di scrivere il
- 265 prodotto ti torna?
- 266 **S:** Ah, sì sì.
- 267 **D:** Io in uno ho fatto il raccoglimento totale e basta; invece,
- 268 nell'altro ho sviluppato e poi raccolto dopo.

Esercizio 2

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$\begin{aligned}
 &2x(3+4x) + 2x(1-4x) + 8x \\
 &2 \times (3+4x) + 2 \times (1-4x) + 2 \times (4) \\
 &2 \times (3+4x+1-4x+4) \\
 &2 \times (8) = \\
 &2 \times 8
 \end{aligned}$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché? *Sì.*

$$\begin{aligned}
 &2 \times (3+4x) + 2 \times (1-4x) + 8x \\
 &8x + 8x^2 + 2x - 8x^2 + 8x \\
 &2 \times (3+4x+1-4x+4) \\
 &2 \times (8) \\
 &2 \times 8
 \end{aligned}$$

Figura G3. 8 Risoluzione di G all'esercizio 2

- 269 **I:** G te non hai provato a farlo?
- 270 **G:** Sì, io avevo provato a scriverlo, ma mi rimaneva l'8x e
- 271 non sapevo come scriverlo in prodotto di fattori.
- 272 **I:** Non avevi visto che si poteva raccogliere 2x anche da
- 273 8x?
- 274 **G:** No, ora però ho capito come si faceva.
- 275 **I:** Avresti visto meglio se ci fosse stato l'8x moltiplicato per
- 276 un altro fattore?
- 277 **G:** Sì, in quel modo sì.
- 278 **N:** Io avevo scritto diverso.

Esercizio 2

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$\begin{aligned}
 &2x(3+4x) + 2x(1-4x) + 8x \quad \cancel{6x+8x^2} + \cancel{(2x-8x^2)} + 8x = 6x+8x^2+2x-8x^2+8x=16x \\
 &6x+8x^2+2x-8x^2+8x = 2 \times (3+4x+1-4x+4) = 2 \times (8) = 16x
 \end{aligned}$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Ho pensato bisogna prima fare le moltiplicazioni e divisioni poi le addizioni e sottrazioni

Figura G3. 9 Risoluzione di N all'esercizio 2

- 279 **I:** N hai scritto che bisogna fare le moltiplicazioni e
 280 divisioni poi le addizioni e sottrazioni. Ora ti torna che
 281 c'erano altri modi?
 282 **A:** Sì, ora sì.

Analisi esercizio 3

Esercizio 3
 Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$4a^6 - 16b^4 = 4(a^6 - 4b^4) = 4(a^3 - 2b^2)(a^3 + 2b^2)$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?
 Sì, fare prima la somma per differenza $(2a^3 - 4b^2)(2a^3 + 4b^2)$, poi raccogliere 2 da ogni parentesi per poi avere come risultato $4(a^3 - 2b^2)(a^3 + 2b^2)$

Figura G3. 10 Risoluzione di N all'esercizio 3

- 283 **I:** N ha scritto così.... Qualcuno ha fatto in modo diverso? G
 284 hai lasciato così la soluzione, secondo te manca qualcosa per
 285 rispondere alla domanda?

Esercizio 3
 Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$4a^6 - 16b^4$$

$$(2 \cdot 2 a^3)^2 - (4 \cdot 4 b^2)^2$$

$$(2a^3)^2 - (4b^2)^2$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Figura G3. 11 Risoluzione di G all'esercizio 3

- 286 **G:** Manca qualcosa, non è un prodotto. Ma non sapevo
 287 come trovare un prodotto.
 288 **I:** qualcuno ha un suggerimento per G?
 289 **D:** Io ho fatto così.

Esercizio 3

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$4a^6 - 16b^4$$

$$4(a^3 - 4b^2)$$

$$4(a^3 - 2b^2)(a^3 + 2b^2)$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché? **S:**

$$(2a^3 - 4b^2)(2a^3 + 4b^2)$$

$$2(a^3 - 2b^2)2(a^3 + 2b^2)$$

$$4(a^3 - 2b^2)(a^3 + 2b^2)$$

Figura G3. 12 Risoluzione di D all'esercizio 3

- 290 **D:** Nel primo ho raccolto un 4 e poi ho fatto somma per
 291 differenza, nel secondo metodo ho fatto subito somma per
 292 differenza e poi ho raccolto dopo il 2 da entrambi e poi 4.
 293 **S:** Anche io ho fatto così, prima ho raccolto il 4 e poi dopo
 294 ho fatto somma per differenza subito.

Esercizio 3

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$4a^6 - 16b^4$$

$$\cancel{(2a^3 - 4b^2)(2a^3 + 4b^2)}$$

$$4(a^3 - 2b^2)(a^3 + 2b^2)$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

$$(2a^3 - 4b^2)(2a^3 + 4b^2)$$

Figura G3. 13 Risoluzione di S all'esercizio 3

- 295 **I:** Come mai nel primo avevi cancellato? Non eri convinto
 296 che fosse corretto?
- 297 **S:** Sì, all'inizio pensavo sempre: Ah abbiamo appena fatto le
 298 scomposizioni... però ho detto: però c'è altro oltre le
 299 scomposizioni e quindi poi ho fatto anche questo.
- 300 **I:** Quindi ti viene da pensare sempre all'ultima cosa fatta
 301 quando fai gli esercizi?
- 302 **S:** Sì, è così.
- 303 **I:** A cosa avevi risposto No, come mai?

Esercizio 3

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$4a^6 - 16b^4$$

$$4(a^6 - 4b^4)$$

$$4(a^3 - 2b^2)(a^3 + 2b^2)$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

No perché per scomporlo devo usare per forza
 il raccoglimento totale e poi applicare le regole
 della scomposizione di binomi

Figura G3. 14 Risoluzione di A all'esercizio 3

- 304 **A:** Perché non avevo visto che si poteva fare subito la
 305 somma per differenza.
- 306 **I:** Quindi in generale in un esercizio procedi vedendo prima
 307 se puoi fare il raccoglimento totale?
- 308 **A:** Sì, prima guardo sempre se posso fare il raccoglimento
 309 totale e poi guardo le altre proprietà.
- 310 **I:** M te prima hai fatto subito somma per differenza e poi hai
 311 fatto raccoglimento totale nel secondo modo, come hai
 312 ragionato?

× **Esercizio 3**

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$4a^6 - 16b^4$$

$$= (2a^3 + 4b^2)(2a^3 - 4b^2) \quad \rightarrow \text{prodotto notevole} \\ \text{= somma} \times \text{differenza}$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

~~No, perché non si può fare una procedura diversa perché è un prodotto notevole.~~
~~Se si può fare una procedura diversa perché è un prodotto notevole, si può scrivere in un altro modo:~~

$$4a^6 - 16b^4 = 4(a^6 - 4b^4) = 4(a^3 + 2b^2)(a^3 - 2b^2) \rightarrow \text{raccoglimento totale}$$

Figura G3. 15 Risoluzione di M all'esercizio 3

- 313 **M:** Allora, io quando vedo un prodotto parto subito diretta.
- 314 **I:** spiegami meglio...
- 315 **M:** Io guardo subito se tipo c'è un trinomio speciale oppure
- 316 somma per differenza o altre cose, tipo $x^2 - 9$ si vede subito
- 317 che è somma per differenza perché qua c'è un meno e qui
- 318 c'è un 9 quindi vedo subito come 3^2 e faccio somma per
- 319 differenza.
- 320 **S:** Sì ma per forza, lì non puoi fare il totale!
- 321 **I:** Se provi a scrivere $4x^2 - 9$ cosa succede?
- 322 **M:** $2x + 3$ e $2x - 3$.
- 323 **I:** mettiamo ora al posto del 4 il 12. Cosa succede?
- 324 **M:** anche qui vado proprio diretta come prima, non penso a
- 325 raccogliere. Però in questo caso non saprei come fare,
- 326 perché ho 4 e 9. Qui posso solo raccogliere 3 e viene 3 per
- 327 $4x - 3$.
- 328 **I:** Quindi ti convince che a volte può essere utile utilizzare
- 329 anche il raccoglimento totale?
- 330 **M:** Sì, in questi casi sì, ma in generale non lo faccio subito.
- 331 **I:** Quindi vi create uno schema mentale da seguire durante
- 332 gli esercizi? Cosa fare prima e cosa dopo.
- 333 **Gruppo:** Sì.

Analisi esercizio 4

334 **M:** no vabbè qua si vedeva subito. Questo era $(x + 1)^2$.

✕Esercizio 4

Risolvi la seguente equazione:

$$(x + 1)^2 - (x + 2) = (x + 1)(x + 1)$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{2x} + \cancel{1} - x - 2 = \cancel{x^2} + \cancel{2x} + \cancel{1}$$

$$\frac{\cancel{2x}}{-x} = \frac{2}{-1} \quad x = -2$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Nb, poiché un'equazione si risolve solo secondo questo procedimento

Figura G3. 16 Risoluzione di M all'esercizio 4

335 **I:** Però l'hai svolto lo stesso?

336 **M:** Questo sì, perché comunque è un'equazione quindi per
 337 sicurezza era meglio fare tutto, anche se dopo si
 338 semplificava tutto perché, quando trasporti da qua a qua
 339 viene meno e si cancellano.

340 **I:** Per sicurezza cosa significa? Non eri convinta dell'altro
 341 metodo?

342 **M:** Eh sì.

343 **I:** Quindi se avevi anche un altro metodo in testa hai scritto
 344 No?

345 **M:** Sì, ho scritto che un'equazione si svolge solo con un
 346 procedimento.

347 **I:** Ti torna però che ora ne abbiamo appena detto un altro?

348 **M:** Allora c'è il primo che ho fatto e poi anche semplificare
 349 subito.

350 **I:** Quindi ti torna che si può risolvere in almeno due modi
 351 diversi?

352 **M:** Sì, adesso sì.

- 353 **I:** Però non ti eri accorta subito?
- 354 **M:** No, solo ora.
- 355 **I:** Quindi anche la seconda domanda non ti ha aiutato a
- 356 cercarne un altro? Ti ha solo messo in confusione?
- 357 **M:** un po'.
- 358 **I:** qualcuno aveva trovato due modi per risolverla? S?

Esercizio 4

Risolvi la seguente equazione:

$$(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1)$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{1} + 2x - x - 2 = \cancel{x^2} + x + \cancel{x} + \cancel{1}$$

$$x - 2 = 2x$$

$$-2 = x$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

$$(\cancel{x+1})(\cancel{x+1}) - (x+2) = (\cancel{x+1})(\cancel{x+1})$$

$$-x = +2$$

Figura G3. 17 Risoluzione di S all'esercizio 4

- 359 **S:** io ho fatto come M, poi nel secondo ho fatto la
- 360 semplificazione subito.
- 361 **I:** Quindi hai notato dopo che fossero uguali?
- 362 **S:** No, in realtà avevo pensato tutti e due i metodi e poi ho
- 363 scritto uno sopra e uno sotto a caso.
- 364 **I:** Anche A aveva scritto due modi come S?

Esercizio 4

Risolvi la seguente equazione:

$$\begin{aligned}
 (x+1)^2 - (x+2) &= (x+1)(x+1) \\
 (x^2 + 1 + 2x) - (x+2) &= x^2 + x + x + 1 \\
 x^2 + 1 + 2x - x - 2 &= x^2 + 2x + 1 \\
 x^2 + x - 1 &= x^2 + 2x + 1 \\
 x - 2x &= 1 + 1 \\
 -x &= 2 \\
 x &= -2
 \end{aligned}$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Sì, potrei considerare $(x+1)^2$ come $(x+1)(x+1)$ e non applicare la proprietà del quadrato di binomio ma il risultato è lo stesso.

Figura G3. 18 Risoluzione di A all'esercizio 4

- 365 **A:** Io ho fatto diverso in realtà. Non avevo visto che si
 366 poteva semplificare, volevo scrivere $x + 1$ alla seconda
 367 come $x + 1$ e $x - 1$ e poi svolgere i prodotti, senza
 368 applicare il quadrato di binomio e dopo semplificare come
 369 sopra.
- 370 **I:** Quindi non avevi visto che erano uguali e si poteva
 371 semplificare?
- 372 **A:** No, avevo solo scomposto il quadrato in $x + 1$ e $x + 2$.
- 373 **I:** ora ti torna il ragionamento di M?
- 374 **A:** Sì, ora lo vedo che si può fare, nel compito no.

GRUPPO 4

Studenti coinvolti: **D, V, M, O, F, A, G, X.**

Analisi esercizio 1

Esercizio 1

Semplifica la seguente espressione:

$$(x+2)(2x+3)(x-2) = \cancel{2x^3} - \cancel{8x} - 12$$

$$= (x^2 - 4)(2x+3) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 12$$

Potresti seguire un procedimento diverso? Se sì, quale? Se no, perché?

SÌ, MOLTIPLICANDO SOMMA X DIFFERENZA E POI MOLTIPLICARLA A $(2x+3)$
 OPPURE FARE LE MOLTIPLICAZIONI IN ORDINE DI SUCCESSIONE
~~DALLA PRIMA ALLA~~ MOLTIPLICANDO $(x+2)$ PER $(2x+3)$ E MOLTIPLICARE
 IL SUO PRODOTTO PER $(x-2)$

Figura G4. 1 Risoluzione di O all'esercizio 1

- 375 **O:** Io ho fatto prima le moltiplicazioni e poi dopo ho
 376 guardato meglio e ho visto che c'era somma per differenza.
- 377 **I:** Hai guardato meglio perché c'era la seconda domanda
 378 oppure per altri motivi?
- 379 **O:** In realtà ci ho pensato da solo.
- 380 **I:** chi ha scritto Ruffini invece cosa intendeva?

Esercizio 1

Semplifica la seguente espressione:

$$(x+2)(2x+3)(x-2)$$

$$(x-2)^2(2x+3)$$

$$(x-2+2x)(x-2+3)$$

$$(3x-2)(x+1)$$

Potresti seguire un procedimento diverso? Se sì, quale? Se no, perché?

CON RUFFINI.

Figura G4. 2 Risoluzione di A all'esercizio 1

381 A: prima risolverei tutte le moltiplicazioni e poi faccio
 382 Ruffini.

383 I: Sopra perché non hai svolto e hai lasciato un prodotto?

384 A: Eh perché noi abbiamo appena fatto le scomposizioni, e
 385 quindi ci hanno un po' confuso.

386 I: quindi tendete a non leggere il comando e ad applicare
 387 l'ultima cosa che avete fatto?

388 A: Sì, ma perché in verifica facciamo sempre quello.

389 F: Sì, ma più che altro perché è scontato, anche in Fisica
 390 nella verifica mette sempre l'ultimo argomento, non ti mette
 391 cose prima, quindi tu sai cosa c'è.

392 A: Tipo anche nel secondo esercizio, prodotto di fattori non
 393 si capiva cosa chiedesse.

394 I: Anche qui hai scritto Ruffini mi spieghi cosa volevi fare e
 395 cosa non era chiaro nel comando?

Esercizio 2

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$2x(3 + 4x) + 2x(1 - 4x) + 8x$$

$$6x + 8x^2 + 2x - 8x^2 + 8x$$

$$2x(3 + 4x + 1 - 4x + 4)$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Con Ruffini

Figura G4. 3 Risoluzione di A all'esercizio 2

396 A: Perché prof ha detto quando non sapete come scomporre
 397 usate Ruffini e quindi ho scritto quello.

398 F: Anche io provavo a fare Ruffini in colonna, ma dato che
 399 c'erano le moltiplicazioni sopra non sapevo bene come
 400 farlo.

Esercizio 2

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$2x(3 + 4x) + 2x(1 - 4x) + 8x$$

$$\begin{array}{l} \cancel{2x(3+4x+1-4x)} \\ \uparrow \\ 2x(2+4) \quad 2x(3+4x-4x+1+4) \\ 2x(8) \quad 2x(3+1+4) \\ 16x \end{array}$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

$$\begin{array}{l} (x-2) \\ \text{CON RUFFINI} \\ 2 \quad 2 \quad 6x \end{array}$$

Figura G4. 4 Risoluzione di F all'esercizio 2

- 401 **O:** Ma si può scrivere $2x$ moltiplicato 8? Perché era $16x$ ma
 402 non l'ho scritto perché sono distratto.

Esercizio 2

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$2x(3 + 4x) + 2x(1 - 4x) + 8x$$

$$\begin{array}{l} \cancel{2x(3+4x+1-4x)} \\ \cancel{2x(3+4x+1-4x)} \\ 2x(3+4x+1-4x) + 8x \\ 2x(3+4x+1-4x+4) \longrightarrow 2x(8) \end{array}$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Figura G4. 5 Risoluzione di O all'esercizio 2

- 403 **I:** Secondo te cosa cambia scrivere $2x$ per 8 e $16x$?
 404 **G:** Eh perché, se scrivi $16x$ poi come fai a trasformarlo
 405 all'indietro? Cioè, a me $16x$ sembrava proprio tipo un
 406 risultato.
 407 **I:** Perché vuoi trasformarla all'indietro?
 408 **G:** Eh perché l'esercizio era scomponi in fattori.
 409 **I:** $16x$ non è un prodotto di fattori?

- 410 **G:** Ah 16 per x . Mi ha confuso il fatto che era un risultato
 411 così piccolo, di solito abbiamo più parentesi moltiplicate.

Analisi esercizio 3

- 412 **M:** Io qua la consegna, con prodotto di fattori ho pensato a
 413 potenze e non mi è venuto da fare come nell'altro.

Esercizio 3

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$4a^6 - 16b^4$$

$$(2a^2)^3 - (4b^2)^2 = [(2b^2)^2]$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

$$\frac{(2a^2)^3 - (4b^2)^2}{(2a^2)^3 - [4(b^2)^2]}$$

Figura G4. 6 Risoluzione di M all'esercizio 3

- 414 **M:** Ho sbagliato, io pensavo di doverlo mettere a potenza e
 415 quindi non mi veniva come risolverlo dopo.
 416 **I:** Ti confondeva il 6 e il 4?
 417 **M:** Io volevo scrivere un'unica potenza proprio, ho capito
 418 male la consegna.
 419 **I:** qualcuno ha fatto in modo diverso? G?

Esercizio 3

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$4a^6 - 16b^4$$
$$(2a^3 - 4b^2)(2a^3 + 4b^2)$$

~~$(2a^3 - 4b^2)(2a^3 + 4b^2)$~~

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

SÌ, CON RUFFINI

Figura G4. 7 Risoluzione di G all'esercizio 3

420 **G:** Io ho fatto somma per differenza e nel secondo ho scritto
421 di nuovo Ruffini.

422 **I:** In questo caso come applicheresti Ruffini?

423 **G:** Ah no, oddio Ruffini quale era? No, qua in realtà ho
424 messo Ruffini perché prof ha detto: quando non sapete come
425 fare fate Ruffini.

426 **V:** Io ho raccolto il 4 perché non avevo notato che era
427 somma per differenza, ho visto 4 e 16 e mi sono detta, ah
428 16 è divisibile per 4 quindi raccolgo il 4. Poi dopo ho
429 continuato all'infinito e non sapevo più perché mi sono
430 confusa con somma per differenza; infatti, adesso ho un
431 trauma a riguardo.

Es. 3

$$4a^6 - 16b^4$$
$$4(a^6 - 4b^4)$$
$$4(a^3 + 2b^2)(a^3 - 2b^2)$$
$$4(a^3 + 2b^2)(a + b)(a^2 - 2b)$$
$$4(a^3 + 2b^2)(a + b)(a + 2)(a - b)$$

Figura G4. 8 Risoluzione di V all'esercizio 3

432 V: sono partita con $a + b$ e $a - b$, poi mi sono convinta che
433 bastava che ci fosse il $+$ e $-$ e quindi ho continuato
434 all'infinito e ho fatto una confusione immensa.

Trascrizione della discussione relativa alla seconda classe

GRUPPO 1

Studenti coinvolti: L, M, A, T.

Analisi esercizio 1

- 1 I: M, guardando il primo esercizio, ci spieghi come mai hai
- 2 risposto che non si poteva fare in un altro modo?

Esercizio 1

Semplifica la seguente espressione:

$$(x+2)(2x+3)(x-2)$$
$$(2x^2 + 3x + 4x + 6)(x-2)$$
$$2x^3 + 3x^2 + 4x^2 - 16x - 8x - 12$$
$$2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$$

Potresti seguire un procedimento diverso? Se sì, quale? Se no, perché?

no, perché si deve andare in ordine

Figura G1. 1 Risoluzione di M all'esercizio 1

- 3 M: Perché, secondo me bisognava andare in ordine, fai prima la
- 4 prima moltiplicazione e poi la seconda, in ordine di come sono
- 5 scritte.
- 6 I: Quindi ogni volta che trovi delle moltiplicazioni le devi fare
- 7 in ordine?
- 8 M: in realtà no, non sempre si deve per forza fare così.
- 9 I: Ripensandoci ora quindi risponderesti allo stesso modo?
- 10 M: Eh no, si può anche cambiare l'ordine.
- 11 I: Qualcuno vuole aggiungere qualcosa e dire cosa ha fatto?
- 12 A: Io ho visto che c'era $x-2$ e $x+2$ quindi ho moltiplicato
- 13 questi prima.

Esercizio 1

Semplifica la seguente espressione:

$$\begin{aligned} & (x+2)(2x+3)(x-2) = \\ & = (x+2)(x-2)(2x+3) \\ & = (x^2-4)(2x+3) \\ & = 2x^3+3x^2-8x-12 \end{aligned}$$

Potresti seguire un procedimento diverso? Se sì, quale? Se no, perché?

SÌ, NON FACENDO SUBITO IL PRODOTTO NOTEVOLE, MA MOLTIPLICANDO TUTTI I NUMERI UNO PER UNO

Figura G1. 2 Risoluzione di A all'esercizio 1

- 14 L: Sì, anche io dopo ho visto che si poteva fare così e infatti l'ho
15 scritto nel secondo modo.

Esercizio 1

Semplifica la seguente espressione:

$$\begin{aligned} & (x+2)(2x+3)(x-2) \\ & (2x^2+3x+4x+6)(x-2) = \\ & 2x^3-4x^2+3x^2-6x+4x^2-8x+6x-12 = \\ & 2x^3+3x^2-8x-12 \end{aligned}$$

Potresti seguire un procedimento diverso? Se sì, quale? Se no, perché?

Sì, potrei prima moltiplicare $(x+2) \cdot (x-2)$ e il risultato moltiplicarlo poi per $(2x+3)$. Questo perché nelle moltiplicazioni non è importante l'ordine dei fattori perché il risultato è sempre lo stesso.

$$\begin{aligned} & (x+2)(x-2)(2x+3) \\ & (x^2-4)(2x+3) \\ & 2x^3+3x^2-8x-12 \end{aligned}$$

Figura G1. 3 Risoluzione di L all'esercizio 1

- 16 I: Nel secondo esercizio nella richiesta c'era scritto "prodotto di
17 fattori", qualcuno mi spiega cosa significa?
- 18 L: Eh, io questo infatti non l'ho capito.
- 19 M: I fattori sono i numeri singoli e basta.
- 20 A: Tipo il prodotto notevole.
- 21 I: M, quindi possono essere solo dei numeri oppure anche dei
22 polinomi?

- 23 **M:** Sì sì, anche quello va bene.
- 24 **I:** Quindi vi torna che si doveva arrivare a scrivere dei prodotti e
25 non delle somme?
- 26 **M:** Ma poi non si doveva poi risolvere? Io poi l'ho risolto.
- 27 **I:** In che senso risolvere?
- 28 **M:** Prima facevo tutte le moltiplicazioni singole e poi
29 raccoglievo.
- 30 **I:** Quello che hai scritto, secondo te, è un prodotto di fattori?
- 31 **M:** Io non avevo ben capito però io avevo pensato, come
32 prodotto di fattori fare ogni singola moltiplicazione ben
33 esplicitata, perché qui per esempio c'erano delle varie parentesi.
34 Allora io l'ho riscritto tutto, passo per passo, però poi c'era
35 scritto riscrivi, quindi poi io non l'ho svolta dopo. Non avevo
36 ben capito e l'unica cosa che mi veniva in mente di fare era
37 questa. Prodotto di fattori non mi diceva più di tanto.
- 38 **I:** Qualcuno vuole rispondere a M, in base a come avete risosto
39 anche voi alla domanda?
- 40 **L:** Io ho fatto così, però poi non l'ho riscritto.

Esercizio 2

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$2x(3 + 4x) + 2x(1 - 4x) + 8x$$

$$2x \cdot 3 + 2x \cdot 4x + 2x \cdot 1 + 2x \cdot (-4x) + 8x$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

No, non penso di poterlo eseguire in modo differente.

Figura G1. 4 Risoluzione di L all'esercizio 2

- 41 **A:** Anche io lo stesso.

Esercizio 2

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$2x(3 + 4x) + 2x(1 - 4x) + 8x$$

~~$$6x + 8x^2 + 2x - 8x^2 + 8x$$~~

$$\begin{aligned} 2x(3 + \cancel{4x} + 1 - \cancel{4x} + 4) &= \\ = 2x(8) &= \\ = 16x \end{aligned}$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

$$\begin{aligned} \text{Sì} \quad 6x + 8x^2 + 2x - 8x^2 + 8x &= \\ 6x + 2x + 8x &= 16x \end{aligned}$$

Figura G1. 5 Risoluzione di A all'esercizio 2

42 **I:** Quindi siete arrivati a scrivere $16x$. Secondo voi è un prodotto
43 di fattori questo?

44 **A:** No.

45 **I:** Mi puoi spiegare il motivo?

46 **A:** Cioè, alla fine sì, deriva da un prodotto di fattori, perché
47 prodotto di fattori sarebbe $2x(8)$, poi $16x$ deriva da un prodotto,
48 però non so se è un prodotto.

49 **L:** Ma è un prodotto!

50 **A:** Io qua tipo ho fatto il raccoglimento totale e mi veniva così.

51 **I:** $2x(3 + 4x + 1 - 4x + 4)$ è un prodotto?

52 **A:** Sì.

53 **I:** $2x(8)$ è un prodotto?

54 **A:** Anche.

55 **I:** $16x$ è un prodotto?

56 **A:** No.

57 **L:** 16 per x è un prodotto!!

58 **A:** 16 per x è vero! Sì, è un prodotto!

59 **I:** Da cosa viene il tuo dubbio di considerarlo come prodotto? Lo
60 consideri come se fosse una cosa sola $16x$?

61 **A:** No, cioè prima sì, ora ho capito.

62 **I:** Non vi è chiaro cosa sia un prodotto di fattori?

63 **L:** Adesso sì, ma nel compito non sapevo se fosse giusto lasciare
64 $16x$.

- 65 A: tipo in $2x$ (8) vedo un pezzo, cioè vedo proprio il prodotto,
 66 invece $16x$ no.
- 67 L: io non avevo proprio capito che si doveva svolgere.
- 68 I: A puoi aiutare la tua compagna a rifare l'esercizio insieme?
- 69 A: L pensa a quello che abbiám fatto in classe, abbiamo fatto i
 70 raccoglimenti, totale e parziale, ok?
- 71 L: Sì questo lo so.
- 72 A: quindi qua cosa hai in comune che puoi raccogliere?
- 73 L: $2x$!
- 74 A: Esatto! E se lo raccogli fai un raccoglimento totale.
- 75 L: No, non ci sarei mai arrivata. Cioè, adesso sì, ma prima no.

Analisi esercizio 3

- 76 I: Passando all'esercizio 3, T raccontaci cosa hai fatto.
- 77 T: Eh non lo so, ho scritto così.

Esercizio 3
 Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$4a^6 - 16b^4$$

$$(2a^2)(2a^3) - (4b^2)(4b^2)$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

$$4a^6 - 16b^4$$

$$(2a^2 - 4b^2)(2a^3 - 4b^2)$$

oppure $4(a^6 - 4b^4)$

Figura G1. 6 Risoluzione di T all'esercizio 3

- 78 I: Sei arrivato ad un prodotto di fattori nel primo caso?
- 79 T: No, nel secondo sì.
- 80 I: Lì cosa hai utilizzato?
- 81 T: Boh... Ah ho capito cosa, somma per differenza! Ah mi
 82 manca il + ho sbagliato.

83 I: Sì uno dei due era un più, e poi ti torna che quel due in realtà
84 è un 3?

85 T: Ah sì anche quello.

86 L: Io ho raccolto il 4, però poi ho lasciato così.

Esercizio 3

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$4a^6 - 16b^4$$
$$4(a^6 - 4b^4)$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

No, non penso di poterlo risolvere in modo differente.

Figura G1. 7 Risoluzione di L all'esercizio 3

87 L: non avevo proprio visto che si poteva raccogliere ancora.

88 M: Io ho continuato e ho messo somma per differenza.

89 L: Sì ora mi torna ma non ci avevo proprio pensato.

90 I: Vi torna a tutti come si poteva fare nei due modi che abbiamo
91 visto?

92 L: Boh mi hanno sempre detto che si doveva fare prima il totale
93 e allora ho fatto il totale.

94 I: quindi la professoressa ve l'ha data come regola di fare prima
95 il totale?

96 L: Sì:

97 A: No, come regola proprio no!

98 M: No.

99 A: No non ce l'ha mai detto, ha detto di farlo se possibile perché
100 poi dopo è molto più facile trovare altri modi, ma non è
101 obbligatorio farlo.

102 L: Sì però dice sempre che se c'è totale si deve fare.

103 I: Diciamo che quindi vi consiglia di guardare rima se c'è da fare
104 il raccoglimento totale e poi parziale e successivamente
105 scomposizioni?

- 106 L: Sì esatto.
- 107 I: Voi avete fatto prima le scomposizioni o le equazioni?
- 108 Tutti: Scomposizioni!
- 109 L: Le equazioni le abbiamo fatte proprio veloce all'ultimo.
- 110 I: Passando al quarto esercizio, T come l'hai svolto? Hai trovato
- 111 due modi?
- 112 T: In realtà non credo, cioè, ho detto solo che si potevano
- 113 spostare le cose dall'altra parte.

Esercizio 4
 Risolvi la seguente equazione:

$$(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1)$$

$$x^2 + 2x + 1 - x - 2 = x^2 + 1$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{2x} + 1 - x - 2 = \cancel{x^2} + 1$$

$$x = -2$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Non credo che sia una procedura diversa ma farei così proprio

$$(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1)$$

$$x^2 + 2x + 1 - x - 2 = x^2 + 1$$

$$\cancel{1} - \cancel{1} - 2 = x^2 - x^2 + x - 2x$$

con tiro: $2 = -x$
 $2 = x$

Figura G1. 8 Risoluzione di T all'esercizio 4

- 114 I: Sì, infatti, hai anche scritto che non pensi che sia un
- 115 procedimento diverso vero?
- 116 T: Sì, ho solo spostato.
- 117 I: Avevate notato qualcosa in comune a destra e sinistra?
- 118 A: $(x+1)(x-1)$ e $(x+1)^2$
- 119 I: Però poi l'hai svolto lo stesso?
- 120 A: Sì nel primo caso sì, poi nel secondo ho sbagliato.

Esercizio 4

Risolvi la seguente equazione:

$$(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1) \quad : \quad x^2 + 2x + 1 - x - 2 = x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 + 2x + 1 - x - 2 = x^2 + x + x + 1 \quad x^2 + 2x + 1 - x - x - 2x = x^2 + x + 1$$

$$x^2 - x + 1 - x - x - x = -1 + 2 - 1 \quad \frac{-x}{-1} = \frac{1}{-1} \quad x = -2$$

$$2x - 3x = 2 - 2 \quad -x = 0 \quad \text{INDETERMINATA} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Sì

$$\frac{(x+1)(x+1) - (x+2)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$-(x+2) = 0$$

$$-x - 2 = 0$$

$$\frac{-x}{-1} = \frac{2}{-1} \quad x = -2$$

Figura G1. 9 Risoluzione di A all'esercizio 4

- 121 I: Ti torna ora che invece di dividere potevi sottrarre da entrambi
 122 i membri $(x+1)^2$?
- 123 A: Sì sì, ora mi torna, avevo sbagliato, però l'avevi visto che si
 124 poteva fare.
- 125 I: M invece non ti eri accorta di questo?
- 126 M: No, io avevo svolto tutto.
- 127 I: Ora ti torna cosa ha detto il tuo compagno?
- 128 M: Sì, ora sì.
- 129 I: Passiamo velocemente all'ultimo.
- 130 T: Questo mi è venuto bene.
- 131 I: In questo caso avevate visto tutti subito che c'era una somma
 132 per differenza?
- 133 M: No, io avevo fatto così.

Esercizio 5

Risolvi la seguente equazione:

$$4x - x^2 + 5(4 - 2x) = (3 - x)(3 + x)$$

$$4x - \cancel{x^2} + 20 - 10x = 9 + \cancel{3x} - \cancel{3x} - \cancel{x^2}$$

$$4x - 10x = 9 - 20$$

$$\frac{-6x}{-6} = \frac{-11}{-6}$$

$$x = -\frac{11}{6}$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Sì, come nell'esercizio 4, ~~come~~

Figura G1. 10 Risoluzione di M all'esercizio 5

134 **I:** Avevi svolto tutti i prodotti senza vedere che era una somma
135 per differenza?

136 **M:** Sì.

137 **I:** esatto, questo era un altro modo possibile per svolgerlo. In
138 generale la seconda domanda degli esercizi vi ha aiutato a
139 rispondere o vi ha meso in confusione?

140 **A:** Io vedevo l'esercizio in modo diverso dopo che leggevo le
141 domande.

142 **I:** avevi letto subito la seconda domanda prima di svolgere
143 l'esercizio o l'hai vista dopo?

144 **A:** No all'inizio non mi ero accorto che si riferisse allo stesso
145 esercizio. Poi dopo sì.

146 **L:** Io in alcune facevo fatica a trovare un altro modo per svolgere
147 l'esercizio, quindi non sapevo cosa scrivere, ci dovevo un po'
148 riflettere.

GRUPPO 2

Studenti coinvolti: F, M, S, L.

Analisi esercizio 1

149 I: Partiamo dal primo esercizio, M come hai ragionato?

Esercizio 1
Semplifica la seguente espressione:

$$(x+2)(2x+3)(x-2)$$

~~$x-4$~~ $(2x^3 - 6x + 4x + 6 + 2x - 4)$
 $2(x^3 - 3x + 2x + 3 + x - 2)$

Potresti seguire un procedimento diverso? Se sì, quale? Se no, perché?

Sì, si potrebbe fare anche $(x^2 - 4)(2x + 3)$

Figura G2. 1 Risoluzione di M all'esercizio 1

150 M: Ho fatto il prodotto tra questo, questo e questo.

151 I: In ordine?

152 M: Sì.

153 I: E come secondo modo cosa hai scritto?

154 M: Che si poteva fare anche $(x^2 - 4) \cdot (2x + 3)$.

155 I: Mi sapresti spiegare il motivo per cui hai potuto scambiare
156 l'ordine? Hai usato qualche proprietà?

157 M: Sì, la commutativa.

158 *Anche gli altri membri del gruppo confermano gli stessi tipi di*
159 *procedura, come si vede dai loro protocolli di seguito.*

Esercizio 1

Semplifica la seguente espressione:

$$(x+2)(2x+3)(x-2)$$

$$(2x^2+3x+4x+6) \cdot (x-2)$$

$$2x^3+4x^2+3x^2-6x+4x^2-8x+6x-12$$

~~$$2x^3+4x^2+3x^2-6x+4x^2-8x+6x-12$$~~

$$2x^3+3x^2-8x-12$$

Potresti seguire un procedimento diverso? Se sì, quale? Se no, perché?

Sì

$$(x^2-4)(2x+3)$$

$$2x^3+3x^2-8x-12$$

Figura G2. 2 Risoluzione di F all'esercizio 1

Esercizio 1

Semplifica la seguente espressione:

$$(x+2)(2x+3)(x-2)$$

~~$$(2x^2+3x+4x+6) \cdot (x-2)$$~~

$$(2x^2+3x+4x+6) \cdot (x-2)$$
~~$$2x^3+3x^2+4x^2-6x-8x-12$$~~

$$2x^3+3x^2-8x-12$$

Potresti seguire un procedimento diverso? Se sì, quale? Se no, perché?

$$(x^2-4)(2x+3)$$

Sì

$$2x^3+3x^2-8x-12$$

Figura G2. 3 Risoluzione di S all'esercizio 1

Esercizio 1

Semplifica la seguente espressione:

$$(x+2)(2x+3)(x-2)$$
$$\cancel{2x^2 + 3x + 4x + 6} \quad 2x^2 + 3x + 4x + 6(x-2)$$
$$2x^3 + 3x^2 + 4x^2 + 6x - 4x^2 - 6x - 8x - 12$$

Potresti seguire un procedimento diverso? Se sì, quale? Se no, perché?

POTREI SEGUIRE lo MOLTIPLICANDO i POLINOMI IN MODI
DIFFERENTI PER ESSERE:

$$(x+2)(2x+3)(x-2)$$

$$(x+2) 2x^2 - 4x + 3x - 6$$

$$2x^3 - 4x^2 + 3x^2 - 6x + 4x^2 - 8x + 6x - 12$$

ANCHE SE VENGO IN ORDINE DI ESSO, FUNZIONA.

Figura G2. 4 Risoluzione di L all'esercizio 1

Analisi esercizio 2

- 160 I: Nell'esercizio due cosa significa prodotto di fattori?
- 161 M: prendere un fattore e poi moltiplicarlo per gli altri, cioè io ho
- 162 scomposto l'espressione.
- 163 I: Come espressione finale cosa ti aspettavi quindi?
- 164 M: Un prodotto.
- 165 I: Ok, c'è chi invece ha lasciato una somma vero?

Esercizio 2

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$2x(3+4x) + 2x(1-4x) + 8x$$
$$6x + 8x^2 + 2x - 4x^2 + 8x$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

No, perché il procedimento è quello non si
può cambiare

Figura G2. 5 Risoluzione di L all'esercizio 2

- 166 **I:** Guardandolo ora dal tuo ultimo passaggio potresti andare
 167 avanti?
- 168 **M:** Potrei mettere fuori il 2.
- 169 *M prova a riscriverla e con l'aiuto dei compagni arriva al*
 170 *prodotto $2x \cdot 8$.*
- 171 **I:** Questo è un prodotto di fattori? Si può andare avanti?
- 172 **S:** Sì, si scrive $2x \cdot (4 + 4)$. No, però poi non viene la
 173 scomposizione. Viene sempre 8.
- 174 **I:** Se moltiplichiamo cosa ci viene?
- 175 **S:** $16x$.
- 176 **I:** Vi torna che questo sia un prodotto di fattori?
- 177 **S:** sì.
- 178 **I:** È quello che hai scritto no?

Esercizio 2

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$2x(3 + 4x) + 2x(1 - 4x) + 8x$$

$$6x + \cancel{8x^2} + 2x - \cancel{8x^2} + 8x$$

$$+ 16x$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

non posso

Figura G2. 6 Risoluzione di S all'esercizio 2

- 179 **S:** Eh, sì ma non avevo capito.

F: Anche io non l'ho finito bene.

Esercizio 2

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$2x(3 + 4x) + 2x(1 - 4x) + 8x$$

$$2x(3+4x+1-4x+4)$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Sì

$$2(3x+4x^2+x-4x^2+4x)$$

Figura G2. 7 Risoluzione di F all'esercizio 2

180 I: Ora ti torna come si può fare?

181 F: Sì.

182 I: Vi ha confuso prodotto di fattori come parola?

183 Tutti: Sì.

184 I: Vi torna che, come fattori, possiamo prendere sia numeri che
185 monomi o polinomi?

186 S: Tipo $2x$ si può vedere tutto intero ma anche come $2 \cdot x$.

187 I: Spiegami bene cosa intendi.

188 S: Cioè, io lo vedo tutto intero.

189 I: E quindi non lo consideri come prodotto?

190 S: Sì, tipo $16x$ è un prodotto 16 per x , però io lo vedo tutto
191 insieme.

Analisi esercizio 4

192 **I:** M in questo esercizio hai notato subito che il membro di destra
193 era $(x + 1)^2$?

Esercizio 4

Risolvi la seguente equazione:

$$(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1)$$
$$x^2 + 2x + 1 - (x+2) = x^2 + 2x + 1$$
$$x^2 + 2x + 1 - x - 2 = x^2 + 2x + 1$$
$$\cancel{x^2} + \cancel{2x} + \cancel{1} - \cancel{x} - \cancel{2} = \cancel{x^2} + \cancel{2x} + \cancel{1}$$
$$\cancel{-x} - \cancel{1} = \cancel{0}$$
$$\frac{-1}{1} = \frac{0}{1} \rightarrow x = -2$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Sì, sempre lo stesso No, il procedimento

Figura G2. 8 Risoluzione di M all'esercizio 4

194 **M:** Sì.

195 **I:** Poi però lo hai svolto come quadrato?

196 **M:** Sì.

197 **I:** In questo momento riesci a vedere un modo alternativo per
198 svolgerlo?

199 **M:** Boh, avrei tolto questo e questo. *(Indicando i due quadrati*
200 *di binomio)*

201 I: Esatto, si poteva fare anche così. Qualcuno di voi l'aveva fatto
202 così?

203 **S:** No, io l'ho fatto svolgendo, però ho sbagliato.

Esercizio 4

Risolvi la seguente equazione:

$$(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1)$$

$$x^2 + 2x + 1 - x - 2 = x^2 + 1$$

$$x^2 + 2x - x - 1 = x^2 + 1 - 2$$

$$+x = -2$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

no perché, per risolvere le equazioni bisogna seguire certi principi

Figura G2. 9 Risoluzione di S all'esercizio 4

204 **I:** Sì, qui ti mancava il doppio prodotto. Ora hai capito il modo
205 alternativo per farlo?

206 **S:** Sì.

207 **I:** L, avevi fatto in un altro modo?

208 **L:** Io avevo svolto tutto così come l'ho trovato, poi mi sono
209 accorto dopo che questi erano uguali e si potevano annullare
210 subito.

Esercizio 4

Risolvi la seguente equazione:

$$(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1)$$

$$x^2 + 2x + 1 - x - 2 = x^2 + 2x + 1$$

$$\frac{-4}{-2} = \frac{2}{-1} \quad x = -2$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

NO, PERCHÉ SI RISOLVE SOLO IN QUESTO MODO

Figura G2. 10 Risoluzione di L all'esercizio 4

211 **I:** Ora ti torna che si poteva fare così?

212 **L:** Sì ora sì.

213 **I:** In generale avete qualche regola da seguire per svolgere
214 questo tipo di esercizi?

215 **S:** La prof aveva detto di guardare se si poteva fare il totale e il
216 parziale e poi le altre cose.

217 **I:** e di solito quindi non vi mettete a guardare la struttura
218 dell'espressione ma partite direttamente a svolgere dopo aver
219 controllato queste due cose?

220 **M:** Sì, esatto.

221 **I:** La seconda domanda non vi ha aiutato a trovare un
222 procedimento alternativo?

223 **L:** No, in generale no.

GRUPPO 3

Studenti coinvolti: T, L, G, D.

Analisi esercizio 1

224 I: L ci vuoi dire cosa hai fatto in questo esercizio?

Esercizio 1

Semplifica la seguente espressione:

$$(x+2)(2x+3)(x-2)$$
$$(2x^2+3x+4x+6) \cdot (x-2)$$
$$2x^3+3x^2+4x^2+6x-4x^2-8x-8x+12$$
$$2x^3+3x^2-8x+12$$

Potresti seguire un procedimento diverso? Se sì, quale? Se no, perché?

$$(x+2) \cdot (2x^2-4x+3x-6)$$

SI * PER LA PROPRIETÀ
COMMUTATIVA

$$2x^3-4x^2+3x^2-6x+6x-12$$
$$2x^3+3x^2-8x+12$$

Figura G3. 1 Risoluzione di L all'esercizio 1

225 L: Io qui ho svolto in ordine, poi dopo ho cambiato l'ordine
226 invece.

227 I: Per il secondo modo ti ha aiutato la domanda a trovarlo?

228 L: Sì, se no avrei fatto solo il primo.

229 I: Altri hanno fatto diverso?

230 G: Sì, io ho moltiplicato subito i prodotti notevoli e poi l'altro.

Esercizio 1

Semplifica la seguente espressione:

$$(x+2)(2x+3)(x-2)$$

$$(x^2-4) \cdot (2x+3)$$

$$2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$$

Potresti seguire un procedimento diverso? Se sì, quale? Se no, perché?

Sì, infatti: moltiplicare direttamente tutto prima di raccogliere tutto per fare una somma con due fattori.

Figura G3. 2 Risoluzione di G all'esercizio 1

- 231 **D:** Anche io uguale, poi dopo come secondo modo ho scritto
 232 quello dove moltiplicavo in ordine.

Esercizio 1

Semplifica la seguente espressione:

$$(x+2)(2x+3)(x-2)$$

$$(x^2-4)(2x+3) =$$

$$2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$$

Potresti seguire un procedimento diverso? Se sì, quale? Se no, perché?

Sì, SENZA USARE IL PRODOTTO NOTEVOLG SOMMA PER DIFFERENZA E CAMBIO, CAMBIANDO L'ORDINE DELLE OPERAZIONI

Figura G3. 3 Risoluzione di D all'esercizio 1

- 233 **I:** Quindi voi avete visto subito la somma per differenza, senza
 234 l'aiuto della domanda?
 235 **G:** Sì.

Analisi esercizio 2

- 236 **I:** Nel secondo esercizio vi era chiaro cosa significa prodotto di
 237 fattori?

- 238 **L:** No, io no.
- 239 **G:** Cioè, dovevi creare delle moltiplicazioni. Tipo scomporre.
- 240 **I:** Cosa non ti era chiaro L?
- 241 **L:** Ora ho capito, ma quando ho dovuto fare la verifica no;
- 242 infatti, ho moltiplicato uno per uno e poi ho sommato.

Esercizio 2

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$2x(3 + 4x) + 2x(1 - 4x) + 8x$$

$$6x + 8x^2 + 2x - 8x^2 + 8x$$

$$16x$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

NO PERCHÉ LA COMUTATIVITÀ NON CAMBIA IL RISULTATO

Figura G3. 4 Risoluzione di L all'esercizio 2

- 243 **I:** Nell'esercizio sei arrivato a scrivere $16x$. Secondo te questo è
- 244 un prodotto di fattori come richiedeva il testo?
- 245 **L:** No, questo no.
- 246 **I:** Perché?
- 247 **L:** Perché c'è solo un termine!
- 248 **I:** Siete d'accordo?
- 249 **G:** No.
- 250 **D:** No, no. $16x$ è il risultato di una moltiplicazione: è 16 per x !
- 251 **L:** Ah allora era giusto...
- 252 **I:** Torna a tutti che $16x$ è un prodotto di fattori?
- 253 **D:** Io avevo raccolto il 2 e poi dopo avevo svolto le parentesi, ho
- 254 semplificato e veniva $2x(4 + 4x)$. Poi potevo anche raccogliere
- 255 il 4 forse.

Esercizio 2

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$2x(3 + 4x) + 2x(1 - 4x) + 8x$$

$$2x[(3+4x)+(1-4x)+4x] \quad 2x \cancel{4}(4+4x)$$

$$2x(3+4x+1-4x+4x)$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Per sì, POTREI FARE LE MOLTIPLICAZIONI ESCEMPER E SCOMPORRE SUCCESSIVAMENTE

$$6x + 8x^2 + 2x - 8x + 8x =$$

$$8x^2 + 8x = 2x(4+4x)$$

Figura G3. 5 Risoluzione di D all'esercizio 2

- 256 **G:** Io invece ho lasciato così, perché pensavo che, se veniva con
 257 la x era una fattorizzazione. Cioè, dovevi creare dei fattori che
 258 alla fine davano il risultato... cioè, insomma non dovevi
 259 svolgerla.

Esercizio 2

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$2x(3 + 4x) + 2x(1 - 4x) + 8x$$

$$\cancel{2x(3+4x)} \cdot (3+4x)$$

$$2x \cdot (3+4x) \cdot (1-4x) + 8x$$

$$x \cdot (2+8) \cdot (3+4x) \cdot (1-4x)$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

No, questo è l'unico modo di creare ~~dei~~ fattori.

Figura G3. 6 Risoluzione di G all'esercizio 2

- 260 **I:** Pensavi ad un risultato con tutte parentesi moltiplicate tra
 261 loro?
- 262 **G:** Sì, Sì.
- 263 **D:** Anche io l'ho vista così sul momento, con le parentesi come
 264 soluzione.
- 265 **I:** in generale negli esercizi dei libri siete sempre abituati a
 266 vedere soluzioni con prodotti di tante parentesi e non un risultato
 267 del tipo $16x$?

268 **G:** Sì, o forse non ci abbiamo mai pensato che è un prodotto di
269 fattori il risultato.

Analisi esercizio 3

270 **G:** Io qui nel 3 ho scomposto così, però poi non si poteva più
271 fare niente.

Esercizio 3

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$4a^6 - 16b^4$$
$$(2a^3 - 4b^2) \cdot (2a^3 + 4b^2)$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

No perché è l'unico modo di semplificare e creare due
fattori che si moltiplicano

Figura G3. 7 Risoluzione di G all'esercizio 3

272 **I:** Riguardandolo ora ti viene in mente qualcosa da fare?

273 **G:** si può moltiplicare le parentesi però poi torna quello.

274 **I:** Potresti raccogliere qualcosa?

275 **G:** Ah sì il 4.

276 **D:** Io mi sono dimenticato di scriverlo due volte.

Esercizio 3

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$4a^6 - 16b^4$$

$$2a^3 - 4b^2$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

NO, NON CI SONO ALTRE ~~SCA~~ SCOMPOSIZIONI
UTILIZZABILI

Figura G3. 8 Risoluzione di D all'esercizio 3

- 277 **I:** in che senso due volte?
 278 **D:** Di scriverlo di nuovo però con il più.
 279 **L:** Io non l'ho finito bene.

Esercizio 3

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$4a^6 - 16b^4$$

$$(2a^3 - 4b^2)^2$$

$$(2(a^3 - 2b^2))^2$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

NO POTREI E' UN PRODOTTO NON UNO

Figura G3. 9 Risoluzione di L all'esercizio 3

- 280 **I:** cosa vi tornava strano in questo esercizio?
 281 **L:** cosa voleva dire prodotto di fattori.
 282 **I:** Quindi ti ha confuso il comando?
 283 **L:** Sì. Poi mi ero dimenticato se l'esponente andava moltiplicato
 284 o sommato.
 285 **I:** avevi difficoltà con le proprietà delle potenze?
 286 **L:** Sì.

Analisi esercizio 4

- 287 **I:** Passando alle equazioni vi tornava più semplice come tipo di
288 esercizio?
- 289 **G:** Sì, più che altro si capiva di più il comando, negli altri no.
- 290 **I:** Come l'avete svolta?
- 291 **G:** Io uno solo, perché alla fine l'unico modo è questo di farla.

Esercizio 4

Risolvi la seguente equazione:

$$(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1)$$
$$\cancel{x^2} + \cancel{1} \cancel{2x} - \cancel{x} \cancel{2} = \cancel{x^2} + \cancel{2x} + \cancel{1}$$
$$+x = \cancel{2}$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

No perché le equazioni si risolvono solo così
con questi metodi.

Figura G3. 10 Risoluzione di G all'esercizio 4

- 292 **D:** Io ne ho fatti due invece.

Esercizio 4

Risolvi la seguente equazione:

$$(x+1)^2 - (x+2) = (x+1)(x+1)$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{2x} + 1 - x - 2 = \cancel{x^2} + \cancel{2x} + 1$$

$$-x = 2$$

$$x = -2$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

~~Sì, prima di semplificare prima di sviluppare il calcolo~~

Sì, SEMPLIFICANDO SUBITO $(x+1)^2$ e $(x+1)(x+1)$

$$\cancel{(x+1)^2} - (x+2) = \cancel{(x+1)(x+1)}$$

$$x = -2$$

Figura G3. 11 Risoluzione di D all'esercizio 4

293 **I:** G vedendo il secondo procedimento di D riesci a vedere
294 qualcosa?

295 **G:** ah sì, erano uguali.

296 **I:** Non l'avevi visto prima?

297 **G:** No infatti l'avevo svolto tutto.

298 **I:** Ora vi torna il procedimento di D?

299 **G:** ora sì.

300 **L:** Ah sì, non so perché io a volte a certe cose non ci penso.

301 **I:** Non ti era venuto in mente neanche leggendo la domanda?

302 **L:** No.

303 **I:** in generale avete osservazioni sul compito rispetto a quelli
304 svolti in classe?

305 **G:** Io se fosse stata una verifica vera non avrei capito bene le
306 domande.

307 **L:** Sì, di solito scrive risolvi l'espressione oppure scomponi,
308 prodotto di fattori non lo scrive mai.

309 **G:** Però, secondo me, se ci dicesse sempre in un altro modo lo
310 capiremmo perché si sa che vuole quello.

311 **I:** la seconda domanda vi ha messo in difficoltà?

312 **L:** sì, perché non si capiva molto, poi io se penso degli altri modi
313 penso sempre che sia scontato e quindi magari non lo scrivo.

314 **G:** Poi una volta capito che volva dire scomporre poi si facevano
315 bene, ma all'inizio non avevo capito.

316 **D:** Noi non abbiamo mai usato questo termine prodotto di fattor
317 qui. Cioè, l'abbiamo fatto, ma non ci siamo mai soffermati a
318 capire cosa fosse.

319 **L:** poi noi, comunque, sappiamo cosa ci chiede anche se on c'è
320 scritto, quindi lo sappiamo già. Se anche in questa ci avessero
321 spiegato il comando su cosa fare era più facile.

322 **G:** poi tipo come $16x$ non c'era quasi mai. Se c'era negli esercizi
323 casa tanto poi nel libro c'era scritto che era così il risultato quindi
324 si sapeva se era giusto.

Appendice B

Nickname:

Classe:

Risolvi i seguenti esercizi:

Esercizio 1

Semplifica la seguente espressione:

$$(x + 2)(2x + 3)(x - 2)$$

Potresti seguire un procedimento diverso? Se sì, quale? Se no, perché?

Esercizio 2

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$2x(3 + 4x) + 2x(1 - 4x) + 8x$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Nickname:

Classe:

Esercizio 3

Riscrivi l'espressione come prodotto di fattori:

$$4a^6 - 16b^4$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Esercizio 4

Risolvi la seguente equazione:

$$(x + 1)^2 - (x + 2) = (x + 1)(x + 1)$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Nickname:

Classe:

Esercizio 5

Risolvi la seguente equazione:

$$4x - x^2 + 5(4 - 2x) = (3 - x)(3 + x)$$

Potresti seguire una procedura diversa? Se sì, come? Se no, perché?

Bibliografia

- [1] MIUR.(2010) *Indicazioni Nazionali per gli obiettivi specifici di apprendimento per i licei.*
- [2] Sfard, A. (1991) *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational studies in mathematics*, 22(1), 1-36.
- [3] Caspi, S., & Sfard, A. (2012) *Spontaneous meta-arithmetic as a first step toward school algebra. International Journal of Educational Research*, 51, 45-65.
- [4] Conrad, K. (2019) *Unique Factorization in Z and $F[T]$*
[https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/ugradnumthy/uniquefactnZF\[T\].pdf](https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/ugradnumthy/uniquefactnZF[T].pdf)
- [5] Cusi, A., & Navarra, G. *Aspetti di generalizzazione in early algebra.*
- [6] Navarra, G. (2018). *The early algebra and the ArAl project. EDiMaST: Experiences of Teaching With Mathematics, Sciences and Technology*, 3(3), 539-547.
<https://www.edimast.it/index.php/edimast/article/view/56>
- [7] Navarra, G. (2019). *Il progetto ArAl per un approccio relazionale all'insegnamento nell'area aritmetico-algebrica. Didattica Della Matematica. Dalla Ricerca Alle Pratiche d'aula*, (5), 70 - 94.
<https://doi.org/10.33683/ddm.18.5.3>
- [8] D'Amore, B. (2004). *Noetica e semiotica nell'apprendimento della matematica. 2004). Atti del Convegno di Didattica della Matematica.*
- [9] D'Amore, B. (2001). *Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica: interazioni costruttivistiche nell'apprendimento. La matematica e la sua didattica*, 2, 150-173.

-
- [10] Maffei, L. & Mariotti, M.A. (2011). *The role of discursive artefacts in making the structure of algebraic expression emerge*, *CERME 7*, 511-520.
 - [11] Bussi, M. B., & Mariotti, M. A. (2008). *Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective*. *Handbook of international research in mathematics education*, 746.
 - [12] Arcavi, A. (1994). *Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics*. *For the learning of Mathematics*, 14(3), 24-35.
 - [13] Arzarello, F., Bazzini, L., & Chiappini, G. (2002). *A model for analysing algebraic processes of thinking*. *Perspectives on school algebra*, 61-81.
 - [14] D'Amore, B. (2001). *Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica: interazioni costruttivistiche nell'apprendimento*. *La matematica e la sua didattica*, 2, 150-173.
 - [15] Boero, P. (2002). *Transformation and anticipation as key processes in algebraic problem solving*. *Perspectives on school algebra*, 99-119.
 - [16] Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). *Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts*. *Educational studies in mathematics*, 40(2), 173-196.
 - [17] Hoch, M., & Dreyfus, T. (2006, July). *Structure sense versus manipulation skills: An unexpected result*. In *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 305-312)*.
 - [18] Hoch, M., & Dreyfus, T. (2004). *Structure Sense in High School Algebra: The Effect of Brackets*. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*.
 - [19] Brousseau, G. (2006). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990 (Vol. 19)*. Springer Science & Business Media.
 - [20] Baccaglini-Frank, A. E., Di Martino, P., Roberto, N., & Giuseppe, R. (2018). *Didattica della matematica*. Mondadori università.
 - [21] Manion, L., Morrison, K. R. B., Cohen, L. (2007) *Research Methods in Education*. Regno Unito: Routledge.
 - [22] Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994) *A cognitive gap between arithmetic and algebra*. *Educational studies in mathematics*, 27(1), 59-78.

-
- [23] Bergamini, M., Barozzi, G., & Trifone, A. (2020). *Matematica. blu 2.0 terza edizione*, Zanichelli.
- [24] Sasso, L., Zanone, C. (2022). *Colori della matematica, Edizione Blu, Volume 1*, De Agostini Scuola.
- [25] Cipriani, G., Fico, M., & Pelicioli, I. (2019). *Matematica c.v.d., Edizione azzurra*, Loescher Editore.