

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Elettronica

ARCES - Advanced Research Center on Electronic Systems

Tesi di Laurea Specialistica in

Elaborazione Statistica dei Segnali nei Sistemi Elettronici LS

**CARATTERIZZAZIONE E GENERAZIONE
DI SEGNALI PWM PER
AMPLIFICATORI IN CLASSE D
AD ALTA EFFICIENZA**

Candidato:

VALERIO CAMBARERI

Relatore:

Prof. RICCARDO ROVATTI

Correlatori:

Prof. GIANLUCA SETTI

Dott. Ing. SALVATORE CAPORALE

Anno Accademico 2010 - 2011

Sessione II

Far out in the uncharted backwaters of the unfashionable end of the western spiral arm of the Galaxy lies a small unregarded yellow sun. Orbiting this at a distance of roughly ninety-two million miles is an utterly insignificant little blue-green planet whose ape-descended life forms are so amazingly primitive that they still think digital watches are a pretty neat idea. This planet has - or rather had - a problem, which was this: most of the people on it were unhappy for pretty much of the time. Many solutions were suggested for this problem, but most of these were largely concerned with the movements of small green pieces of paper, which is odd because on the whole it wasn't the small green pieces of paper that were unhappy. And so the problem remained; lots of the people were mean, and most of them were miserable, even the ones with digital watches.



Tratto da Douglas Adams,
"The Hitchhiker's Guide to the Galaxy" (1979)

RINGRAZIAMENTI

Questa tesi di Laurea Specialistica è stata concepita presso il gruppo di Elaborazione Statistica dei Segnali (SSIGPRO) del centro d'eccellenza ARCES - Università di Bologna.

I primi e più importanti ringraziamenti vanno al Dott. Ing. Salvatore Caporale, che mi ha guidato con saggezza, dedizione ed esperienza in ogni passo dello svolgimento di questa tesi e senza il quale gran parte delle idee sviluppate in questo scritto non esisterebbero o non avrebbero forma.

Altrettanta gratitudine va ai Professori Riccardo Rovatti e Gianluca Setti, con i quali ho svolto le parti più importanti e formative del mio percorso accademico e con cui avrò l'opportunità di proseguire con il Dottorato di Ricerca.

Grazie agli altri membri di SSIGPRO: Fabio Pareschi, Mauro Mangia, Carlos M. Formigli e Xavier Haboba per i molti pranzi e le occasioni di confronto in questi mesi di tesi.

Desidero infine ringraziare la mia famiglia per avere sostenuto il mio lungo percorso di studi e tutte le persone che in questi anni mi hanno accompagnato nel meraviglioso concerto della vita.

INDICE

Introduzione	1
1 Modulazioni d'Impulso	5
1.1 Pulse Amplitude Modulation	5
1.1.1 Alcune premesse	5
1.1.2 Teoria della modulazione PAM	7
1.1.3 Conversione digital-to-analog	8
1.1.4 Demodulazione PAM	9
1.2 Pulse Density Modulation	10
1.2.1 Convertitori A/D Nyquist rate	11
1.2.2 Convertitori A/D in sovracampionamento	12
1.2.3 Noise Shaping	14
1.2.4 Convertitori A/D Sigma-Delta	15
1.2.5 Convertitore D/A Sigma-Delta	19
1.3 Pulse Width Modulation	20
1.3.1 Teoria della modulazione PWM	20
1.3.2 Analisi armonica del segnale PWM	24
1.3.3 Analisi spettrale "a posteriori" del segnale PWM	30
1.3.4 Rappresentazione time warping del segnale PWM	34
2 Amplificatori in commutazione modulati PWM	35
2.1 Amplificatori in classe D	35
2.1.1 Alcune premesse	36
2.1.2 Amplificatori di potenza operanti in commutazione	37
2.1.3 Amplificatore in classe D	40
2.1.4 Potenza dissipata da una rete di commutazione MOS	42
2.2 Modulatori PWM	43
2.2.1 Trasformazioni non lineari e segnali PWM	46
2.3 Modulatore PWM digitale-analogico a portante sinusoidale	50

3	Misure, Modelli Numerici e Modulatori PWM	53
3.1	Misura dello spettro di un segnale PWM reale	53
3.1.1	Generazione dei segnali d'ingresso	54
3.1.2	Misure e risultati	58
3.2	Modello MATLAB del modulatore PWM	67
3.2.1	Schema a blocchi del sistema digitale	67
3.2.2	Modello funzionale dell'elaborazione analogica	73
3.3	Metodi di ricerca degli istanti di transizione	80
3.3.1	Metodo di bisezione	81
3.3.2	Metodo di Newton-Raphson	81
3.4	Simulazione del modulatore PWM	84
3.4.1	Effetto della quantizzazione in t sul segnale PWM	84
3.4.2	Compensazione delle non linearità	86
3.4.3	Prestazioni teoriche del modulatore PWM implementato	87
	Conclusioni	97
A	Modello del modulatore PWM	99
A.1	Blocchi di elaborazione digitale del segnale	99
A.1.1	Generazione del segnale	99
A.1.2	Interpolatore	100
A.1.3	Distorsione a ramo di senoide	102
A.1.4	Filtro $1/\text{sinc}$	103
A.1.5	Modulatore $\Sigma\Delta$	104
B	Simulazione del segnale PWM	109
B.1	Metodi per l'analisi del segnale analogico	109
B.1.1	Sintesi della forma d'onda analogica	109
B.1.2	Ricerca degli istanti di transizione	113
B.2	Script di simulazione	116

ELENCO DELLE FIGURE

1.1	$\text{sinc}(t)$	6
1.2	Segnale $p(t)$ modulato PAM	7
1.3	Spettro $ P(f) $ di un segnale modulato PAM	8
1.4	Caratteristica del quantizzatore di a_k nel caso di $b = 4, l = 16$	9
1.5	Schema a blocchi della modulazione e demodulazione PAM	10
1.6	Schema a blocchi di un convertitore A/D Nyquist rate	11
1.7	Andamento ed istogramma dell'errore di quantizzazione per $b = 4$	12
1.8	PSD dell'errore di quantizzazione per ADC Nyquist rate vs. sovracampionamento	13
1.9	Schema a blocchi di un convertitore A/D in oversampling	14
1.10	Alcune funzioni di trasferimento di rumore	14
1.11	Schema di un convertitore A/D Sigma-Delta	15
1.12	Schema di un modulatore Sigma-Delta di ordine 1	16
1.13	Esempio di segnale in uscita da un ADC $\Sigma\Delta$ ad 1 bit	17
1.14	Schema di un modulatore Sigma-Delta di ordine 2	18
1.15	Schema di un convertitore D/A Sigma-Delta	20
1.16	Schema generico della modulazione PWM	21
1.17	Due possibili $c(t)$: $\zeta(t)$ e $\xi(t)$ per $f_c = 1$	21
1.18	Troncamento dello sviluppo in serie di Fourier di $\zeta(t)$ per $k = 10, 30, 50$	22
1.19	Troncamento dello sviluppo in serie di Fourier di $\xi(t)$ per $k = 1, 3, 5, 7$	22
1.20	Single-edge PWM	23
1.21	Double-edge PWM	23
1.22	Andamento (log) dei primi coefficienti $C_{q,m}$ per $m = 1, \dots, 5$ armoniche e $q = 0, \dots, 9$ potenze	25
1.23	Troncamento dello sviluppo in serie di $p(s, t)$ (serie approssimante di un segnale PWM)	28
1.24	Componenti dello spettro $ P(f) $ intorno $(-f_c, f_c)$	29
1.25	Esempio di spettro "a posteriori" di un segnale PWM	31

1.26	Spostamento degli zeri di $p(t)$	33
1.27	Rappresentazione time warping del segnale PWM	34
2.1	Invertitore CMOS (amplificatore in classe A)	38
2.2	Proprietà di un amplificatore in classe D	39
2.3	Schema a blocchi di un amplificatore in classe D ad anello aperto . . .	40
2.4	Implementazione CMOS della rete di commutazione	41
2.5	Filtro LC e carico speaker	41
2.6	Modulatore PWM analogico	43
2.7	Modulatore PWM digitale	44
2.8	Modulatore PWM digitale-analogico	45
2.9	Schema concettuale della relazione fra trasformazione non lineare e funzione segno	46
2.10	Confronto fra $s(t), c(t)$ (blu-viola) e $\sin\left(\frac{\pi}{2}s(t)\right), \cos(2\pi t)$ (giallo- verde)	47
2.11	Modulatore PWM analogico a portante sinusoidale, con distorsione a ramo di senoide	47
2.12	Approssimazioni di $\sin\left(\frac{\pi}{2}s\right)$	48
2.13	Spettro di $s(t)$ e di alcune $s^q(t)$ su un range di 260 dB	49
2.14	Schema a blocchi di un modulatore PWM digitale-analogico a frequen- za f_c adattabile e portante sinusoidale	50
3.1	Scheda di valutazione per la generazione di un segnale PWM analogico	54
3.2	Setup di misura dello spettro di un segnale PWM analogico	55
3.3	Interfaccia LabView del VI che controlla Agilent 33220a	56
3.4	Schema a blocchi LabView del VI che controlla Agilent 33220a . . .	57
3.5	Spettro dei segnali modulante ($f_m = 5$ kHz) e portante ($f_c = 25$ kHz)	58
3.6	SIR (dB) all'uscita del circuito PWM analogico al variare di f_c e P_s .	60
3.7	DR (dB) all'uscita del circuito PWM analogico al variare di f_c e P_s .	61
3.8	Segnale a $P_s = 0$ dB	62
3.9	Segnale a $P_s = -3$ dB	63
3.10	Segnale a $P_s = -6$ dB	64
3.11	Segnale a $P_s = -10$ dB	65
3.12	Segnale a $P_s = -20$ dB	66
3.13	Schema a blocchi della parte digitale del modulatore PWM implementato	67
3.14	Effetto dell'interpolazione a rate K	68
3.15	Filtro anti-imaging di ordine $L = 158$	69
3.16	Progetto del filtro compensatore	71
3.17	Noise transfer function di ordine 5	73

3.18 Schema a blocchi dell'elaborazione analogica e stimatore degli istanti di transizione	74
3.19 Segnale in uscita dal modulatore PWM	74
3.20 Filtro di Butterworth con $L = 4$ e $\omega_0 = 1$	76
3.21 Filtro di Butterworth RLC per $L = 4$	78
3.22 Filtro di Butterworth a celle Sallen-Key per $L = 4$	79
3.23 Risposta all'impulso della catena di elaborazione analogica	80
3.24 Ricerca degli zeri con il metodo di bisezione	82
3.25 Ricerca degli zeri con il metodo di Newton-Raphson	83
3.26 Effetto della quantizzazione temporale su $p(t)$	85
3.27 Spettro del segnale equivalente $\hat{s}(t)$	86
3.28 Spettro del segnale PWM simulato, $P_s = 0$ dB	89
3.29 Spettro del segnale PWM simulato, $P_s = -6$ dB	90
3.30 Spettro del segnale PWM simulato, $P_s = -12$ dB	91
3.31 Spettro del segnale PWM simulato, $P_s = -18$ dB	92
3.32 Spettro del segnale PWM simulato, $P_s = -24$ dB	93
3.33 SIR (dB) all'uscita del modulatore PWM simulato al variare di R e P_s	94
3.34 DR (dB) all'uscita del modulatore PWM simulato al variare di R e P_s	95
3.35 Prestazioni teoriche del modulatore PWM a frequenza f_c adattata . . .	96
3.36 Spettro del segnale PWM al variare di R e P_s	96

INTRODUZIONE

Il progresso nell'ambito dell'elettronica per l'acquisizione, l'elaborazione e l'attuazione dei segnali percorre due direzioni complementari: a livello tecnologico si ricercano nuovi dispositivi microelettronici e schemi circuitali ottimizzati per effettuare le funzioni elementari dei sistemi digitali e analogici a basso consumo o alte prestazioni dinamiche; a livello algoritmico si ricercano metodi di analisi e sintesi dei segnali che sfruttino l'hardware a disposizione in maniera efficiente. Le due direzioni delineano la prossima generazione di tecnologie, di cui una delle specifiche fondamentali è l'efficienza energetica, ed in particolar modo la riduzione degli effetti termici causati dal trasporto ohmico nei dispositivi, i.e. la potenza dissipata in calore.

La riduzione della potenza dissipata è di primario interesse nei dispositivi portatili, che richiedono strategie innovative per minimizzare i consumi dei circuiti elettronici: il funzionamento a basso consumo di potenza è una specifica fondamentale per il progetto di sistemi wireless alimentati a batterie, il cui uso va ottimizzato per allungarne la durata.

Una prospettiva emergente è il progetto di sistemi elettronici "green" dai bassissimi consumi, eventualmente alimentati via energy harvesting [1]: lo sviluppo di queste tecnologie richiede non solo nuovi dispositivi a semiconduttore progettati ad-hoc per operare a bassa dissipazione, ma anche idee innovative che migliorino i principi di funzionamento affermati nelle ultime decadi; tra questi sono di particolare interesse gli amplificatori di potenza, largamente applicati negli attuatori e negli amplificatori di segnale in banda base.

In questo scenario si vogliono progettare amplificatori che ottimizzino l'uso della sorgente di alimentazione: gli schemi operanti in commutazione sono lo stato dell'arte per l'amplificazione di potenza ad alta efficienza energetica. Questa classe di amplificatori, introdotta negli anni '60, sfrutta una modulazione non lineare detta Pulse Width Modulation (PWM) [2] per mappare l'informazione in ingresso ad un segnale di controllo a due livelli (On-Off); il segnale PWM pilota una rete costituita da coppie di interruttori complementari, che commutano la sorgente di potenza fornendo l'amplificazione desiderata. La distorsione introdotta dal funzionamento non lineare

del sistema è invece rimossa da un filtro di ricostruzione passa-basso posto all'uscita dell'amplificatore.

Il vantaggio sotto il profilo dei consumi è dovuto alle regioni di funzionamento degli interruttori (e.g. transistor MOS), che commutano fra due stati a bassa potenza statica garantendo alto rendimento: la dissipazione è teoricamente dovuta alle sole commutazioni fra i due stati [3] e fa sì che sia possibile portare il rendimento attorno al 90%. Applicazioni comuni di questo paradigma sono amplificatori per segnali audio [4], attuatori per il servocollimento di motori elettrici in corrente continua e convertitori di potenza per applicazioni industriali.

In questa tesi si studia la fattibilità di un nuovo principio di funzionamento, volto a ridurre la frequenza di commutazione allo scopo di minimizzare la dissipazione di potenza - aumentando così il rendimento dello schema. Questo è reso possibile da una rappresentazione analitica del segnale PWM (sviluppata dal gruppo di ricerca SSIG-PRO [5]) che ne evidenzia la dipendenza dal segnale d'ingresso, $s(t)$ (lineare) e dalle sue potenze, $s^q(t)$ (non linearità). Il fenomeno sfruttato per abbassare la frequenza delle commutazioni è il rapido decadimento delle non linearità rispetto alla potenza del segnale d'ingresso.

La frequenza di commutazione diviene quindi un parametro adattato alla potenza del segnale da amplificare, così da risparmiare commutazioni della rete minimizzando la dissipazione del sistema: adattando la legge di modulazione PWM si massimizza il rendimento dell'amplificatore in classe D. Al modello del segnale e della strategia di adattamento è necessario affiancare osservazioni sperimentali su un circuito PWM analogico che ne confermino la validità.

Gli amplificatori in classe D moderni sfruttano invece schemi di sintesi del segnale PWM completamente digitali [6] che sono intrinsecamente più efficienti e robusti alle non idealità circuitali.

In questa tesi è proposto uno schema di modulazione PWM in cui la sintesi del segnale avviene su un elaboratore digitale ed è seguita da una catena di elaborazione analogica a basso consumo: la generazione a flusso di segnale misto consente di coniugare la robustezza della sintesi digitale del segnale alla risoluzione temporale infinita dell'elaborazione analogica. L'elaborazione digitale vede inoltre alcuni accorgimenti volti ad ottimizzare l'uso della banda del segnale e la qualità dell'uscita.

È inoltre sviluppato un metodo di calcolo dello spettro di un segnale PWM analogico basato sulla ricerca degli istanti di transizione, che caratterizzano completamente il segnale modulato. Questo strumento matematico consente di stimare il livello dei disturbi nel modulatore simulato e di definire indici di prestazioni al variare dei parametri di funzionamento del sistema.

Dai risultati si vedrà che fissando le specifiche di rapporto segnale-disturbi (SIR [7])

del segnale di uscita è possibile adattare il funzionamento del modulatore PWM alla potenza del segnale modulante ipotizzando di disporre di un filtro di uscita di ordine elevato.

La trattazione si sviluppa in tre capitoli:

- Nel Capitolo 1 sono riviste le modulazioni elementari di cui fa uso il modulatore studiato: Pulse Amplitude Modulation, Pulse Density Modulation ($\Sigma\Delta$) e Pulse Width Modulation. È illustrata la rappresentazione analitica del segnale PWM [5] e sono riportate le principali considerazioni di carattere teorico sul sistema simulato.
- Nel Capitolo 2 sono introdotti gli amplificatori operanti in commutazione e gli schemi di modulazione PWM digitale/analogica; è discussa una trasformazione non lineare senza memoria sul segnale modulante, che permette di usare una portante sinusoidale invece dell'onda triangolare comunemente adottata nella sintesi del segnale PWM; è presentato lo schema del modulatore PWM modellato in questa tesi.
- Nel Capitolo 3 sono riportate le misure effettuate su una scheda di valutazione PWM analogica, che attestano la validità del modello del segnale PWM introdotto; sono argomentate in dettaglio le scelte progettuali sullo schema di modulatore PWM implementato in un modello MATLAB; sono discussi i metodi con cui sono misurate le prestazioni teoriche del modulatore. Il capitolo è concluso dai risultati salienti delle simulazioni, riassunti in termini di prestazioni in funzione della frequenza di commutazione e della potenza del segnale d'ingresso.
- In Appendice A, B sono contenute le funzioni che compongono il modello MATLAB del sintetizzatore di segnali PWM e gli script che producono i risultati discussi nei capitoli precedenti.

1

MODULAZIONI D'IMPULSO

In questo capitolo sono presentati i metodi di modulazione d'impulso utili allo sviluppo di una modulazione PWM per il controllo di amplificatori operanti in commutazione ad alta efficienza. Ne è rivista la teoria e sono approfondite le principali implementazioni che le realizzano.

1.1 Pulse Amplitude Modulation

La modulazione ad ampiezza di impulso (Pulse Amplitude Modulation, PAM) consiste nella generazione di una sequenza (“treno”) d'impulsi rettangolari di uguale durata, la cui ampiezza è modulata da una successione di campioni del segnale modulante. Di seguito ne è illustrata l'interpretazione matematica e l'applicazione più elementare.

1.1.1 Alcune premesse

Si richiamano brevemente alcuni elementi di teoria dei segnali; per una trattazione completa si vedano [8, 9, 10].

Def. 1.1. Seno cardinale

Si definisce la funzione (Fig. 1.1)

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

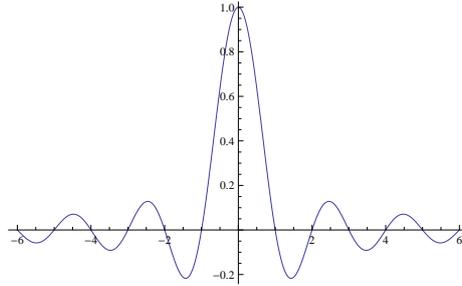


Figura 1.1: $\text{sinc}(t)$

Def. 1.2. Segnali a banda limitata

Sia $s(t)$ un segnale per cui sia definita la trasformata di Fourier (FT)

$$S(f) = \mathcal{F}[s(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-i2\pi ft} dt$$

$s(t)$ è a banda limitata se la maggior parte dell'energia è contenuta entro l'intervallo $B = [0, f_m]$ sul semiasse positivo di f , ovvero se

$$\int_0^{+\infty} |S(f)|^2 df \simeq \int_0^{f_m} |S(f)|^2 df < +\infty$$

Per un approfondimento del concetto di banda si veda [11].

Teo. 1. del Campionamento (Whittaker-Kotelnikov-Nyquist-Shannon)

Sia $s(t)$ un segnale a banda limitata, con $B = [0, f_m]$; allora tale segnale è completamente descritto [12] da una successione di campioni equispaziati di T

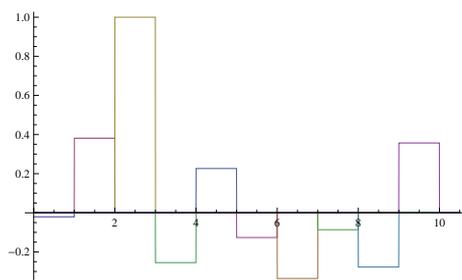
$$\{s_k\} = \{s(kT)\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

per cui vale

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k \text{sinc}\left(\frac{t - kT}{T}\right)$$

Affinché $s(t)$ sia completamente ricostruito da $\{s_k\}$ la frequenza di campionamento $f_s = \frac{1}{T}$ deve essere tale che

$$f_s \geq 2f_m$$


 Figura 1.2: Segnale $p(t)$ modulato PAM

1.1.2 Teoria della modulazione PAM

Sia $\{a_k\}$ una successione di campioni, con $k = 0, \dots, +\infty$. Ponendo di emettere questi simboli ad intervallo T si può scrivere

$$a(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \delta(t - kT)$$

dove $\delta(t)$ è la delta di Dirac con le note proprietà.

La modulazione PAM è ottenuta convolvendo $a(t)$ con una funzione a supporto compatto $g(t)$, che nel caso di un impulso rettangolare di durata T ed area unitaria è data da

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

Allora il segnale modulato PAM è

$$p(t) = a(t) * g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k g(t - kT)$$

dove $*$ denota la convoluzione in t (Fig. 1.2).

Il sistema che realizza questa modulazione è quindi un filtro la cui risposta all'impulso $g(t)$ è una funzione rettangolare. Essendo tale funzione a supporto compatto in t , $G(f)$ avrà supporto illimitato in f . Difatti

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i2\pi ft} dt = \int_0^T \frac{1}{T} e^{-i2\pi ft} dt = e^{-i\pi fT} \frac{e^{i\pi fT} - e^{-i\pi fT}}{i2\pi fT} \quad (1.1)$$

quindi la funzione di trasferimento del sistema lineare tempo-invariante (LTI) ideale che realizza la PAM è

$$G(f) = \text{sinc}(fT) e^{-i\pi fT} \quad (1.2)$$

Se $A(f)$ è la trasformata di Fourier della successione a_k (DTFT), lo spettro del segnale modulato $P(f)$ è

$$P(f) = G(f)A(f) = A(f)\text{sinc}(fT)e^{-i\pi fT}$$

Dato che $A(f)$ è periodica di $f_s = \frac{1}{T}$ il segnale modulato PAM avrà uno spettro simile a quello di Fig. 1.3.

Nella pratica non si usa $G(f)$ (che è a supporto illimitato, e quindi irrealizzabile) ma implementazioni circuitali le cui funzioni di trasferimento approssimano $G(f)$ [13, 14].

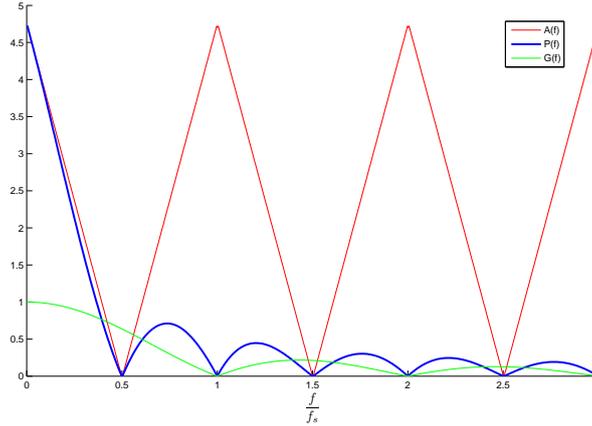


Figura 1.3: Spettro $|P(f)|$ di un segnale modulato PAM

1.1.3 Conversione digital-to-analog

Un esempio di modulazione PAM si ha all'uscita di un convertitore digital-to-analog (DAC), in cui una successione di campioni (un vettore di numeri) viene convertita in una sequenza di impulsi rettangolari in t . La funzione $g(t)$ che converte una successione tempo-discreta di campioni equispaziati in un segnale tempo-continuo costante a tratti è detta Zero Order Hold (ZOH) ed è del tutto analoga alla PAM. Il segnale in uscita dal DAC è

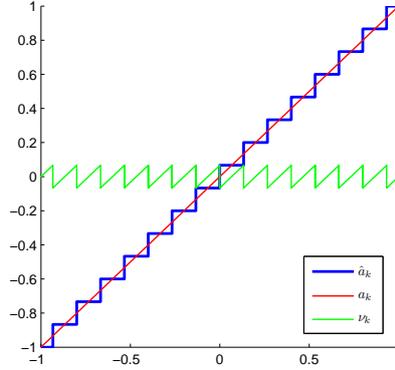
$$p(t) = \sum_k a_k g(t - kT)$$

con a_k ottenuta e.g. dal campionamento di un segnale tempo-continuo.

Se il DAC ha un numero di livelli finito, i.e. la successione \hat{a}_k è quantizzata ad $l = 2^b$ livelli con b numero di bit (Fig. 1.4), allora l'uscita del DAC sarà un segnale costante a tratti per cui ad ogni periodo di campionamento T del DAC corrisponderà uno di l livelli di tensione:

$$p(t) = \sum_k \hat{a}_k g(t - kT) = \sum_k a_k g(t - kT) + \sum_k \nu_k g(t - kT) = \tilde{a}(t) + \nu(t)$$

$$\hat{a}_k \in \{-l + 1, \dots, -3, -1, 1, 3, \dots, l - 1\}$$


 Figura 1.4: Caratteristica del quantizzatore di a_k nel caso di $b = 4, l = 16$

con ν_k successione di campioni di rumore di quantizzazione e $\nu(t)$ contributo di rumore di quantizzazione all'uscita del DAC, rispetto al caso di DAC ad infiniti livelli ($l = \infty, b = \infty$).

Per la conversione analog-to-digital (ADC) a l livelli si parla di Pulse Code Modulation (PCM), di cui il DAC è il demodulatore. L'operazione è completata da un filtro passa basso, che elimina le parti indesiderate dallo spettro del segnale modulato.

1.1.4 Demodulazione PAM

Un segnale modulato PAM può essere demodulato filtrando le componenti spettrali entro l'intervallo $\left[0, \frac{f_s}{2}\right]$. Se il filtro è ideale

$$H(f) = \begin{cases} 1, & f \in \left[-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}\right] \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

ma è noto che questo filtro non è causale, in quanto $h(t)$ ha supporto illimitato in t (dualmente alla $G(f)$, che ha supporto illimitato in f) ed è quindi irrealizzabile. Nelle implementazioni reali si adatterà quindi un filtro analogico passa basso che attenui le componenti fuori banda.

La DTFT di a_k è la FT di $a(t) = \sum_k a_k \delta(t - kT)$, ovvero

$$A(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_k a_k \delta(t - kT) e^{-i2\pi f t} dt = \sum_k a_k e^{-i2\pi f kT}$$

che per $f \in \left[-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}\right]$ coincide con il primo lobo dello spettro di un segnale $s(t)$ campionato in assenza di aliasing. Quindi per $f \in \left[-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}\right]$ la ricostruzione di

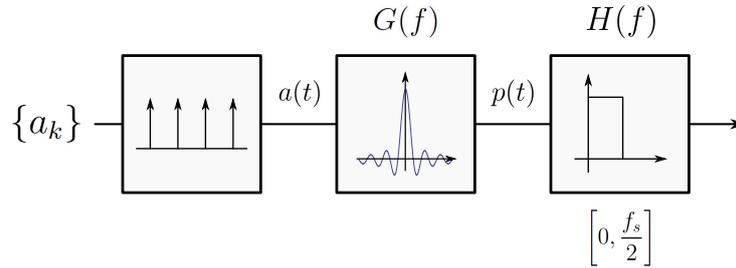


Figura 1.5: Schema a blocchi della modulazione e demodulazione PAM

$S(f)$,

$$\hat{S}(f) = A(f)G(f)H(f) \simeq S(f)\text{sinc}(fT)e^{-i\pi fT}$$

in cui si nota l'effetto di attenuazione e ritardo introdotto dalla $g(t)$.

Se consideriamo $H(f)$ non ideale, in t si ha

$$\hat{s}(t) = a(t) * (g(t) * h(t))$$

e raccogliendo

$$f(t) = g(t) * h(t)$$

$$\hat{s}(t) = \sum_k a_k f(t - kT)$$

che ha ancora la forma di una modulazione PAM, in cui l'impulso modulato è composto dalla convoluzione fra $g(t)$ e la risposta impulsiva $h(t)$ del filtro. Per la trasmissione PAM su canali radio è comune utilizzare $G(f)$ e $H(f)$ realizzabili e adattate [14].

Si evidenzia infine che la modulazione ad ampiezza di impulso è una modulazione lineare: l'intero flusso di segnale (Fig. 1.5) è costituito da operazioni lineari. La PAM non crea componenti armoniche dove non ve ne sono, a differenza delle modulazioni successive in cui si introdurranno blocchi non lineari nello schema.

1.2 Pulse Density Modulation

La modulazione a densità d'impulso (Pulse Density Modulation, PDM) consiste nella codifica di un segnale in una sequenza d'impulsi per cui l'informazione non è associata all'ampiezza degli stessi, ma alla frequenza con cui questi commutano tra livelli discreti. Questa tecnica è ampiamente applicata negli ADC e DAC moderni ed è nota come modulazione Sigma-Delta (Sigma Delta Modulation, SDM) [15, 16]. Nel seguito si discute la PDM applicata ai convertitori A/D e D/A.

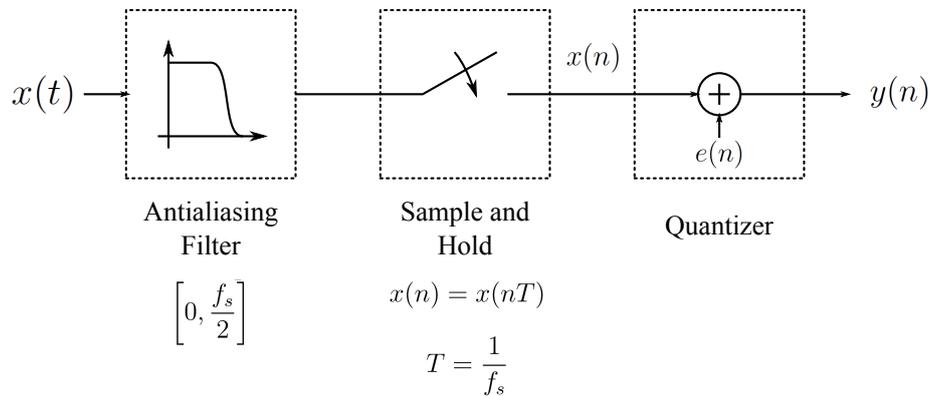


Figura 1.6: Schema a blocchi di un convertitore A/D Nyquist rate

1.2.1 Convertitori A/D Nyquist rate

Nella sezione 1.1.3 si è interpretata la conversione D/A come modulazione PAM di una sequenza di campioni \hat{a}_k quantizzata da a_k a precisione infinita. Questo schema di conversione D/A è detto Nyquist rate, poiché per il Teo. 1 si ha che affinché non vi sia aliasing all'uscita dello schema i campioni devono essere emessi ad intervallo $T \leq \frac{1}{2f_m}$.

In Fig. 1.6 è riportato lo schema di un convertitore A/D Nyquist rate convenzionale. Per valutare le prestazioni dei convertitori successivi, è particolarmente importante studiarne il rumore di quantizzazione. Considerando di poter modellare il quantizzatore ideale (l'operazione di Fig. 1.4) come una sorgente di rumore additivo di campioni $e(n) = e(nT)$, l'uscita non codificata $y(n) = x(n) + e(n)$.

In particolare: sia un quantizzatore uniforme ad l livelli rappresentati da $b = \lceil \log_2 l \rceil$ bit in $[-1, 1]$. Ogni livello di quantizzazione corrisponde ad un intervallo di lunghezza $q = \frac{2}{2^b}$. Per procedere si introducono le seguenti ipotesi semplificative [17]:

- La sequenza $x(n)$ è una realizzazione di un processo stocastico a valori in $[-1, 1]$
- La sequenza $e(n)$ è una realizzazione di un processo stocastico stazionario (rumore di quantizzazione)
- $e(n)$ ed $x(n)$ sono incorrelate
- La funzione densità di probabilità (PDF) del processo che genera $e(n)$ è uniforme sull'intervallo $[-\frac{q}{2}, \frac{q}{2}]$ dell'errore di quantizzazione
- Le variabili aleatorie estratte dal processo che genera $e(n)$ sono tutte incorrelate fra loro, i.e. il processo è bianco

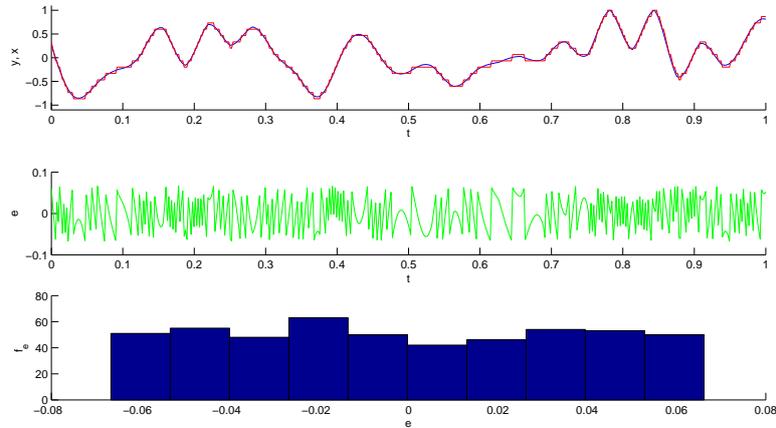


Figura 1.7: Andamento ed istogramma dell'errore di quantizzazione per $b = 4$

Se valgono le ipotesi, allora la media di $e(n)$

$$m_e = 0$$

e la varianza

$$\sigma_e^2 = E[e(n)^2] - m_e^2 = \frac{q^2}{12} = \frac{1}{12} \left(\frac{2}{2^b} \right)^2$$

che coincide con la potenza dell'errore di quantizzazione.

Se si considera $x(n)$ generata da un processo stocastico a media $m_x = 0$ e varianza σ_x^2 , allora si può definire il rapporto segnale-rumore di quantizzazione (Signal-to-Quantization Noise Ratio, SQNR)

$$\text{SQNR}_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2}$$

e calcolare che, nel caso di ADC Nyquist rate con $\text{SNR} \simeq \text{SQNR}$,

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \sigma_x^2 + 4.77 + 6.02b$$

per cui l'SNR aumenta di 6.02 dB per ogni bit.

Si definisce anche il range dinamico

$$r_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{q^2}{12}} \right) = 6.02b + 1.76$$

che coincide con l'SNR di picco dell'ADC per un ingresso sinusoidale a range pieno.

1.2.2 Convertitori A/D in sovracampionamento

Nelle approssimazioni introdotte l'errore di quantizzazione è un processo bianco. Per il Teorema di Wiener-Khinchin la sua densità spettrale di potenza (PSD) [17]

$$P_e(f) = \frac{1}{f_s} \chi_{[-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}]}(f) \frac{q^2}{12}$$

Dalla precedente è chiaro che scegliendo $f_s \gg 2f_m$ i.e. sovracampionando il segnale $x(t)$ a parità di q - che non dipende da f_s - la potenza dell'errore di quantizzazione nella banda del segnale utile calerà al crescere della frequenza di campionamento (Fig. 1.8).

Questo è il principio alla base dei convertitori A/D in sovracampionamento: se è rispettata $f_s > 2f_m$, allora è possibile progettare convertitori A/D che operino a

$$f_s = K \cdot 2f_m \gg 2f_m$$

con K rateo di oversampling (OSR) così che la potenza del rumore di quantizzazione in banda risulti attenuata aumentando l'SNR complessivo del sistema (Fig. 1.9).

Calcolando ora

$$P_e(f) = \frac{1}{Kf_s} \chi_{[-\frac{Kf_s}{2}, \frac{Kf_s}{2}]}(f) \sigma_e^2$$

si ha

$$W_e = \int_{-\infty}^{+\infty} P_e(f) df = \sigma_e^2 = \frac{q^2}{12}$$

ma a parità di potenza complessiva, la potenza di rumore in banda

$$W_B = \int_{-f_m}^{+f_m} P_e(f) df = \frac{2f_m}{Kf_s} \sigma_e^2$$

per cui l'SNR del sistema

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \sigma_x^2 - 10 \log_{10} \sigma_e^2 + 10 \log_{10} \frac{Kf_s}{2f_m}$$

se $f_s = 2f_m$ e $K = 2^n$ allora

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \sigma_x^2 - 10 \log_{10} \sigma_e^2 + 3.01n$$

per cui ad ogni raddoppio della frequenza di campionamento l'SNR aumenta di 3.01 dB (equivalente a un incremento della risoluzione di "mezzo" bit). Per ottenere un

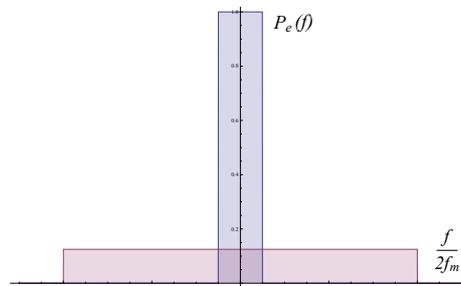


Figura 1.8: PSD dell'errore di quantizzazione per ADC Nyquist rate vs. sovracampionamento

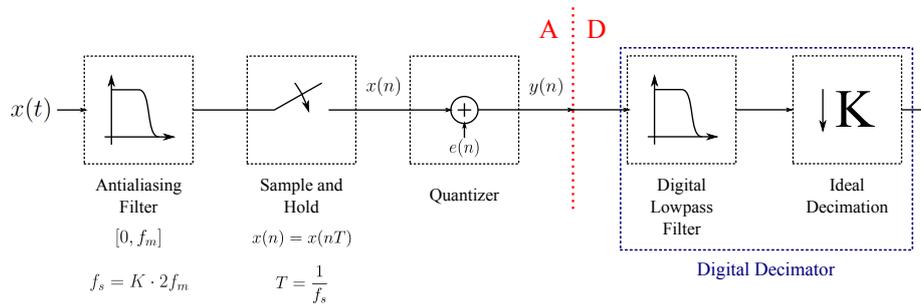


Figura 1.9: Schema a blocchi di un convertitore A/D in oversampling

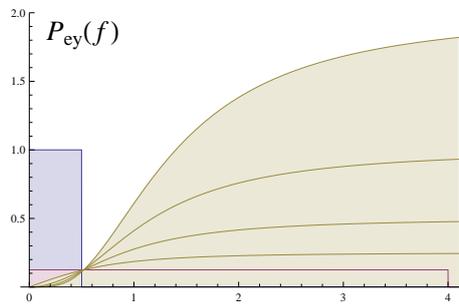


Figura 1.10: Alcune funzioni di trasferimento di rumore

incremento di SNR in banda di 6 dB si può quindi aumentare la lunghezza di parola (wordlength) del quantizzatore di un bit, oppure operare con OSR $K = 2^2$.

Il solo sovracampionamento non è un metodo ottimale per ottenere un incremento di risoluzione, poiché il fattore $K = 2^n$ che corrisponde alle specifiche di SNR richieste fa sì che f_s cresca come $O(2^n)$. È quindi necessario introdurre tecniche che consentano di sagomare il rumore in banda affinché la potenza W_B sia ulteriormente ridotta.

1.2.3 Noise Shaping

Sia la Z-trasformata (ZT) di $y(n) = x(n) + e(n)$,

$$Y(z) = X(z) + E(z)$$

si può considerare più in generale

$$Y(z) = H_x(z)X(z) + H_e(z)E(z)$$

dove H_x è la funzione di trasferimento del segnale (STF), H_e è la funzione di trasferimento del rumore di quantizzazione (NTF). Se fosse possibile progettare un converti-

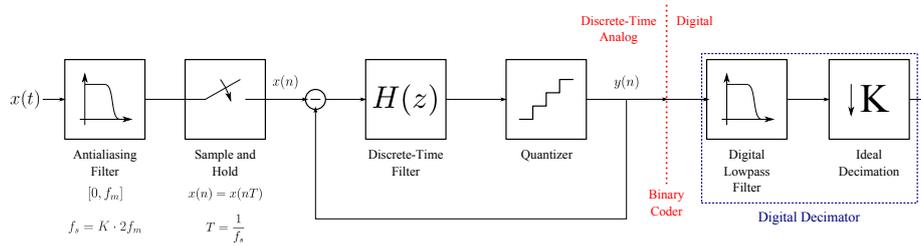


Figura 1.11: Schema di un convertitore A/D Sigma-Delta

tore con $H_x(f) = 1$ ed

$$H_e(f) \simeq \begin{cases} 0 & |f| \leq f_m \\ N(f) & f > f_m \end{cases}$$

con $N(f)$ maschera arbitraria (Fig. 1.10) tale da sagomare il rumore fuori banda (che può essere rimosso con un filtro passa basso sufficientemente ripido) allora si può ridurre ulteriormente W_B considerando l'effetto di un filtro LTI sulla PSD di un processo stazionario:

$$P_{ey}(f) = P_e(f) |H_e(f)|^2$$

Questa classe di convertitori esiste ed è realizzata dai convertitori Sigma Delta.

1.2.4 Convertitori A/D Sigma-Delta

Si consideri una sequenza $x(n) = x(nT)$ sovracampionata con $T \ll \frac{1}{2f_m}$; una semplice famiglia di caratteristiche di noise shaping (Fig. 1.10) è

$$H_{e,L}(z) = (1 - z^{-1})^L$$

Il sistema tempo-discreto che la realizza (Fig. 1.11) è ottenuto ponendo un anello di retroazione (feedback loop) ed un filtro tempo-discreto attorno al quantizzatore. Il feedback negativo calcola una differenza (Δ) che è integrata (i.e. sommata, Σ) da un filtro tempo-discreto, che nella sua forma più semplice è un integratore tempo-discreto. Da qui il nome* $\Sigma\Delta$ [15]. Il sistema risultante è complessivamente non lineare e dinamico, ma un'analisi linearizzata è possibile con le precedenti ipotesi sul quantizzatore. Il filtro tempo-discreto può essere implementato in forma analogica da filtri a capacità commutate [18].

Un esempio di conversione A/D $\Sigma\Delta$ ad 1 bit di ordine 5 è riportato in Fig. 1.13.

*Sebbene nell'articolo originale è usato il termine $\Delta\Sigma$ la maggior parte della letteratura scientifica ed un'interpretazione gerarchica dell'operazione, $\Sigma[\Delta]$, legittimano l'uso del termine $\Sigma\Delta$.

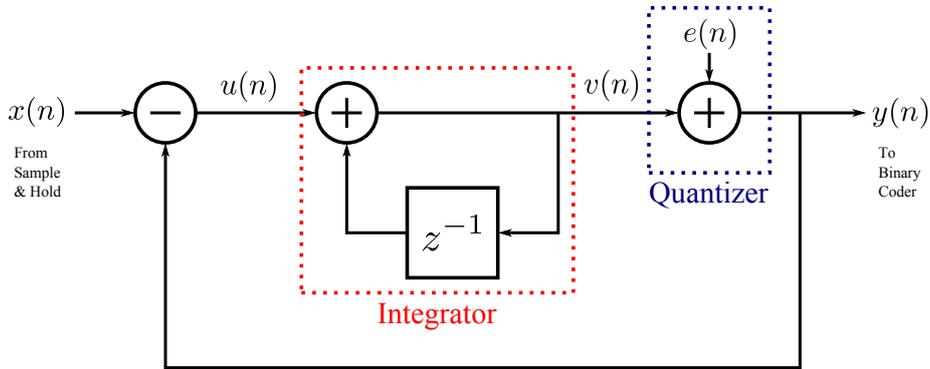


Figura 1.12: Schema di un modulatore Sigma-Delta di ordine 1

Modulazione Sigma-Delta di ordine 1

Nel caso più semplice (di ordine $L = 1$) all'uscita dell'integratore tempo-discreto $H(z)$ si ha

$$v(n) = v(n-1) + u(n)$$

$$u(n) = x(n) - y(n-1)$$

e nel dominio z

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$V(z) = H(z)U(z)$$

$$U(z) = X(z) - z^{-1}Y(z)$$

Essendo il quantizzatore modellato da rumore additivo $e(n)$,

$$y(n) = e(n) + v(n)$$

e

$$Y(z) = E(z) + \frac{1}{1 - z^{-1}}U(z) = E(z) + \frac{1}{1 - z^{-1}}(X(z) - z^{-1}Y(z))$$

quindi

$$Y(z) = (1 - z^{-1})E(z) + X(z)$$

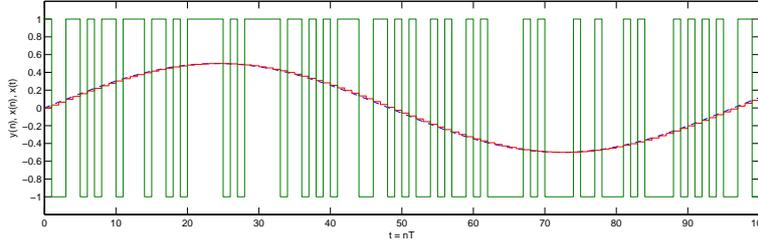
per cui è dimostrato che lo schema (Fig. 1.12) realizza la caratteristica di noise shaping desiderata

$$H_{e,1} = 1 - z^{-1}$$

con $H_x(z) = 1$.

In questo caso, la PSD dell'errore di quantizzazione per effetto di H_e ($z = e^{i2\pi fT}$)

$$|H_e(f)| = |1 - e^{-i2\pi fT}| = |2ie^{-i\pi fT} \sin(\pi fT)| = 2|\sin(\pi fT)|$$


 Figura 1.13: Esempio di segnale in uscita da un ADC $\Sigma\Delta$ ad 1 bit

$$P_{ey}(f) = P_e(f) |H_e(f)|^2$$

per cui la potenza di rumore in banda

$$W_B = \int_{-f_m}^{f_m} \frac{\sigma_e^2}{K f_s} \cdot 4 \sin^2 \left(\pi \frac{f}{K f_s} \right) df$$

Per $f_m \ll K f_s$, $fT \rightarrow 0$ e $\sin(\pi fT) \simeq \pi fT$ quindi

$$W_B = \frac{4\pi^2}{K^3 f_s^3} \sigma_e^2 \frac{f^3}{3} \Big|_{-f_m}^{f_m} = \frac{8\pi^2}{3K^3 f_s^3} \sigma_e^2 f_m^3$$

Con $f_m = \frac{f_s}{2}$ allora

$$W_B = \frac{\pi^2}{3K^3} \sigma_e^2$$

da cui risulta che l'SNR

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \sigma_x^2 - 10 \log_{10} \sigma_e^2 - 20 \log_{10} \pi + 10 \log_{10} 3 + 30 \log_{10} K$$

e per $K = 2^n$

$$\text{SNR} \simeq 10 \log_{10} \sigma_x^2 - 10 \log_{10} \sigma_e^2 - 5.17 + 9.03n$$

Ponendo di spostare tutta la complessità del sistema sulla frequenza operativa del circuito di sample and hold (S&H) è possibile realizzare uno schema di conversione A/D con quantizzatore ad 1 bit (i.e. un comparatore analogico) ed un circuito S&H che operi in oversampling di un fattore K . Un'implementazione analogica a capacità commutate del convertitore A/D Sigma-Delta di ordine 1 è riportata in [19].

Un segnale a potenza $\sigma_x^2 = 1$ quantizzato a 16 bit con un ADC Nyquist rate ha $\text{SNR} = 101$ dB. Un ADC Sigma-Delta di ordine 1 ad 1 bit richiede un OSR di $K = 2^{11}$ per avere prestazioni simili ($\text{SNR} = 105$ dB), contro il rateo $K = 2^{30}$ di un convertitore privo di noise shaping. Per un segnale in banda audio un ADC Nyquist rate opera a $f_s = 44.1$ kHz; un ADC $\Sigma\Delta$ di ordine 1 ad 1 bit dovrebbe operare a $f_s = 90$ MHz.

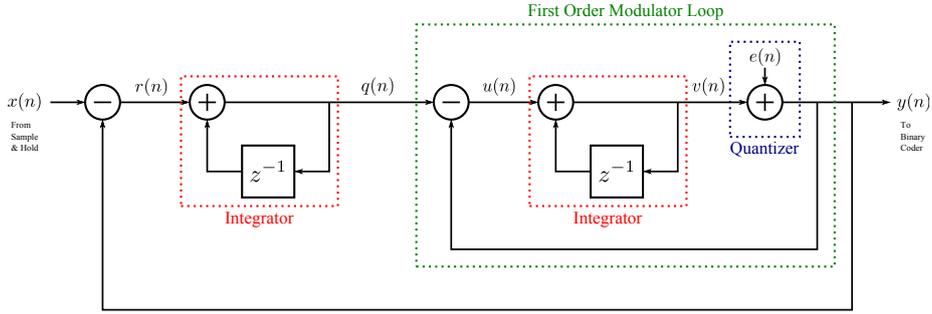


Figura 1.14: Schema di un modulatore Sigma-Delta di ordine 2

Il trade-off fra K oversampling e l livelli di quantizzazione consente di determinare il convertitore ottimale dati i vincoli di progetto e i limiti tecnologici dell'hardware.

Il modulatore di ordine 1 ad 1 bit è usato di rado in quanto, a prescindere dalle non idealità dell'implementazione analogica, è un sistema non lineare dinamico in retroazione per cui possono innescarsi cicli limite che risultano in oscillazioni spurie all'uscita $y(n)$. Studiandone la dinamica non lineare è possibile verificare le condizioni per cui è garantita la stabilità [20], ma tale analisi è oltre gli scopi di questa tesi.

Modulazione Sigma-Delta di ordine 2

I concetti introdotti dal modulatore Sigma-Delta di ordine 1 possono essere estesi e ampliati ad architetture più complesse, che garantiscono prestazioni migliori e diversi trade-off fra risoluzione in bit, oversampling, complessità del circuito e stabilità condizionata del modulatore.

Chiudendo il modulatore $\Sigma\Delta$ di ordine 1 ad anello su di un altro integratore si ottiene il modulatore di ordine 2 (Fig. 1.14). Per tale schema valgono rispetto alle precedenti

$$r(n) = x(n) - y(n-1)$$

$$q(n) = r(n) + q(n-1)$$

$$u(n) = q(n) - y(n-1)$$

quindi

$$R(z) = X(z) - z^{-1}Y(z)$$

$$Q(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}R(z)$$

$$U(z) = Q(z) - z^{-1}Y(z)$$

che con le precedenti dà

$$Y(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \left(\frac{1}{1-z^{-1}} (X(z) - z^{-1}Y(z)) - z^{-1}Y(z) \right) + E(z)$$

da cui

$$Y(z) = X(z) + (1 - z^{-1})^2 E(z)$$

avendo considerato l'anello di retroazione con un ritardo implicito z^{-1} , così da avere $H_x(z) = 1$ e $H_{e,2}(z) = (1 - z^{-1})^2$.

Per la funzione di trasferimento di rumore (NTF)

$$|H_{e,2}(f)| = |(1 - e^{-i2\pi fT})^2| = 4 \sin^2(\pi fT)$$

il modello a rumore additivo del quantizzatore permette di calcolare la potenza in banda

$$W_B = \frac{\pi^4}{5K^5} \sigma_e^2$$

per cui

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \sigma_x^2 - 10 \log_{10} \sigma_e^2 - 10 \log_{10} \left(\frac{\pi^4}{5} \right) + 15.05n$$

per cui l'SNR migliora di 15 dB ad ogni raddoppio n di oversampling $K = 2^n$ grazie ad un noise shaping più efficace entro la banda del segnale.

Modulazione Sigma-Delta di ordine L

Per ottenere una caratteristica di noise shaping di ordine L sarebbe sufficiente annidare L modulatori di ordine 1 come per il caso $L = 2$. Per questioni di stabilità del sistema in retroazione gli schemi di modulazione $\Sigma\Delta$ di ordine $L > 2$ non si realizzano generalmente così: il range del quantizzatore (in particolare se a pochi bit) viene saturato ed è necessario introdurre dei criteri di stabilità condizionata, che si traducono in vincoli sul guadagno fuori banda della NTF e sul range del segnale in ingresso.

Perdendo la semplicità concettuale di uno schema costituito da soli integratori, è possibile introdurre diverse implementazioni del filtro d'anello $H(z)$ al variare del metodo di sintesi e della struttura del grafo a flusso di segnale (SFG) che lo realizza. Il filtro tempo-discreto $H(z)$ è sintetizzato a partire dalla NTF desiderata e dai requisiti di stabilità del sistema in feedback.

Si può verificare che la stabilità del sistema complessivo è legata al guadagno della NTF fuori banda: un criterio progettuale indica che se la NTF $H_e(z)$ ha un guadagno massimo fuori banda di circa 1.5 dB, allora $H(z)$ che la realizza rende il modulatore $\Sigma\Delta$ stabile ([20], Cap. 4).

1.2.5 Convertitore D/A Sigma-Delta

In questa tesi troverà applicazione un convertitore D/A Sigma-Delta a b bit di ordine 5. Lo schema del DAC $\Sigma\Delta$ è ottenuto considerando uno schema a blocchi speculare

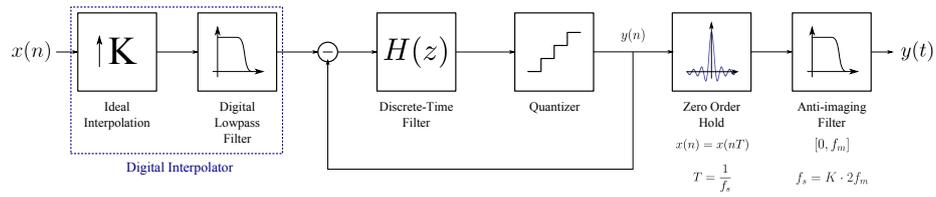


Figura 1.15: Schema di un convertitore D/A Sigma-Delta

rispetto a quello di Fig. 1.11: con riferimento allo schema di Fig. 1.15, data una sequenza $x(n)$ a 32 bit in virgola mobile si attua la conversione D/A con noise shaping, a valle della quale si pone un filtro passa basso per eliminare le componenti indesiderate dallo spettro del segnale. La sequenza di campioni $y(n)$ ad $l = 2^b$ livelli è emessa su un circuito di hold (zero order hold, ZOH) operante a frequenza f_s . Il segnale PAM tempo-continuo risultante è processato da un filtro analogico passa basso con frequenza di taglio $f_m \ll f_s$, per cui $y(t)$ all'uscita del sistema avrà un contributo di rumore fuori banda fortemente attenuato.

1.3 Pulse Width Modulation

La modulazione a larghezza d'impulso (Pulse Width Modulation, PWM) è un metodo di modulazione non lineare che associa il contenuto informativo di un segnale modulante alla durata dei singoli elementi di una successione di impulsi. Questa tecnica è stata introdotta nel contesto dell'elettronica di potenza per pilotare amplificatori operanti in commutazione [2], i quali sono ampiamente usati ovunque sia necessaria alta efficienza nel trasferimento di potenza. Nel seguito si considera la sola modulazione PWM a due livelli, caratterizzata dall'alternarsi di due simboli a frequenza media f_c . Lo studio di questa modulazione è cruciale ai fini di questa tesi.

1.3.1 Teoria della modulazione PWM

A partire da un generico segnale modulante $s(t)$ (in t continuo o discreto) la modulazione PWM consiste nella generazione di un segnale modulato $p(t)$ i cui valori commutano fra due simboli $\{a, b\}$. Tali simboli possono essere $\{0, 1\}$, $\{-1, 1\}$ convertiti a livello circuitale a due valori di tensione $\{V_l, V_h\}$ che pilotano dispositivi a semiconduttore quali transistori a giunzione bipolare (BJT) o a effetto di campo (MOSFET) [19].

Il contenuto informativo di $s(t)$ viene associato alla durata ("larghezza") τ di un impulso rettangolare rispetto al periodo medio T della successione di impulsi $p(t)$, con $T = \frac{1}{f_c}$. Si noti che l'informazione mappata in $\tau(s(t))$ è la medesima contenuta nelle

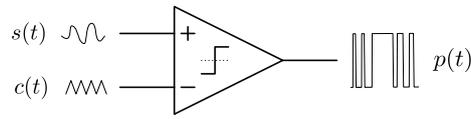


Figura 1.16: Schema generico della modulazione PWM

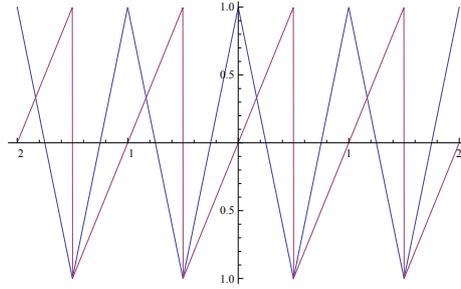


Figura 1.17: Due possibili $c(t)$: $\zeta(t)$ e $\xi(t)$ per $f_c = 1$

transizioni (fronti di salita e discesa) di $p(t)$ o, se questa commuta fra $\{-1, 1\}$, negli istanti

$$\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ t.c. } p(t_k) = 0$$

che sono detti istanti di zero-crossing (ZC).

La modulazione PWM è generalmente ricavata per confronto fra il segnale modulante $s(t)$, che si suppone a valori entro un intervallo ben definito (e.g. $[-1, 1]$), e un segnale periodico portante $c(t)$ a frequenza fondamentale f_c ed entro lo stesso intervallo di $s(t)$ (Fig. 1.16). L'operazione di confronto è effettuata da un comparatore ideale (i.e. un amplificatore operazionale) che realizza la funzione

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

così che

$$p(t) = \text{sign}(s(t) - c(t))$$

L'operazione svolta dal comparatore è non lineare, ed è responsabile della distorsione armonica introdotta nel segnale modulato $p(t)$.

Scelte note per il segnale portante $c(t)$ sono forme d'onda sawtooth o triangolari (Fig. 1.17). In particolare ($t \in \mathbb{R}$)

1. Il caso con $c(t)$ a forma d'onda sawtooth $\zeta(t)$ è detto Single-edge PWM. Considerando $T = 1$,

$$\zeta(t) = -1 + 2(t - k), \quad k \leq t < k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

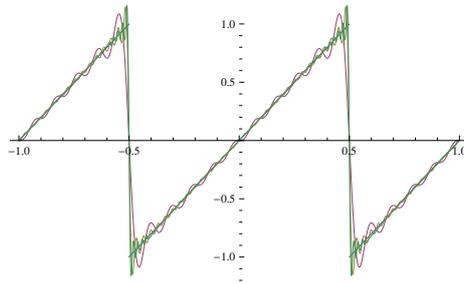


Figura 1.18: Troncamento dello sviluppo in serie di Fourier di $\zeta(t)$ per $k = 10, 30, 50$

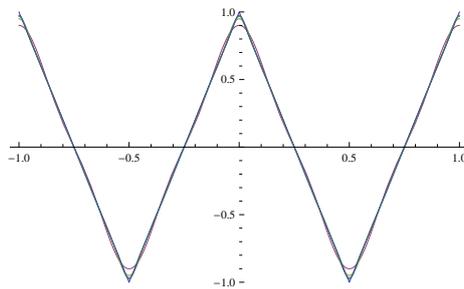


Figura 1.19: Troncamento dello sviluppo in serie di Fourier di $\xi(t)$ per $k = 1, 3, 5, 7$

Lo sviluppo in serie di Fourier (Fig. 1.18) è

$$\zeta(t) = -\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \sin\left(2\pi k \left(t - \frac{1}{2}\right)\right)$$

i cui coefficienti $\zeta_k \sim \frac{1}{k}$. Si definisce in particolare trailing edge la $\zeta(t)$, leading edge la $-\zeta(t)$.

2. Il caso con $c(t)$ a forma d'onda triangolare $\xi(t)$ è detto Double-edge PWM. Considerando $T = 1$,

$$\xi(t) = \begin{cases} -1 + 4(t - k) & k \leq t < k + \frac{1}{2} \\ -1 - 4(t - k) & k - \frac{1}{2} \leq t < k \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \quad (1.3)$$

Lo sviluppo in serie di Fourier (Fig. 1.19) è

$$\xi(t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin\left((2k+1)2\pi \left(t + \frac{1}{4}\right)\right) \quad (1.4)$$

i cui coefficienti $\xi_k \sim \frac{1}{k^2}$.

Gli spettri di $\zeta(t)$ e $\xi(t)$ sono entrambi illimitati, e decadono rispettivamente come $\frac{1}{k}$ e $\frac{1}{k^2}$ in $k f_c$. Qualora il segnale $c(t)$ sia generato da un DAC, essendo ζ, ξ non

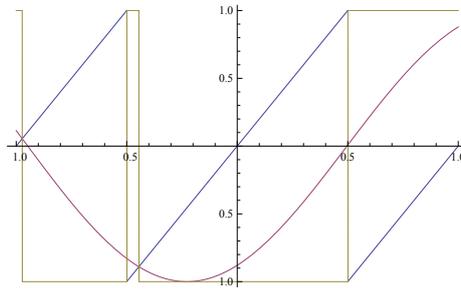


Figura 1.20: Single-edge PWM

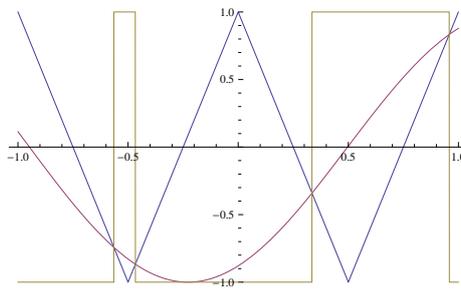


Figura 1.21: Double-edge PWM

limitate in banda non potranno essere perfettamente sintetizzate per via numerica (in t discreto); sarà quindi introdotto un troncamento nello spettro a seconda della frequenza di campionamento del DAC.

Si osserva che in entrambi i casi $s(t)$ interseca $c(t)$ in almeno due punti per ogni periodo di $c(t)$, ovvero

$$\{t_{2k}, t_{2k+1}\} \text{ t.c. } s(t) - c(t) = 0 \Rightarrow p(t) = 0$$

1. Nel caso Single-edge, $t_{2k+1} = k\frac{T}{2}$ è deterministico ed occorre ad ogni periodo T di $\zeta(t)$, mentre t_{2k} dipende da $s(t)$
2. Nel caso Double-edge, entrambi i t_{2k}, t_{2k+1} dipendono da $s(t)$

Per $f_c = \frac{1}{T}$ generico si considera il segnale portante $c(f_c t)$ per cui

$$p(t) = \text{sign}(s(t) - c(f_c t)) \quad (1.5)$$

Affinché non vi sia perdita d'informazione nella modulazione, la frequenza fondamentale f_c deve essere molto maggiore della banda del segnale $s(t)$. Assumendo che $s(t)$ abbia banda limitata $[0, f_m]$, è ragionevole considerare che la frequenza di Nyquist $f_N = 2f_m = 1$ e $f_c \geq f_N$. In modo analogo al teorema del campionamento, affinché possa essere recuperato senza aliasing il contenuto informativo del segnale modulato con un filtro passa basso lo spettro di $c(f_c t)$ deve essere lontano dalla banda del segnale

$s(t)$. Una successiva analisi dello spettro di $p(t)$ evidenzierà l'allargamento della banda a causa delle componenti armoniche introdotte dalla non linearità $\text{sign}(\cdot)$, per cui nella pratica $f_c \gg f_N$ affinché la distorsione armonica non interferisca con lo spettro di $s(t)$.

Un altro fenomeno di aliasing non trascurabile si ha approssimando $p(t)$, $t \in \mathbb{R}$ con un segnale $p(t)$ in t discreto, i.e. una sequenza di campioni emessa da un DAC che corrisponde alla modulazione PWM digitale. Un'analisi spettrale del fenomeno è sviluppata in [21].

1.3.2 Analisi armonica del segnale PWM

Si vuole effettuare l'analisi di Fourier di un segnale PWM, così da poterne modellare lo spettro come in [5].

Def. 1.3. Sia $t \in \mathbb{R}$ e $s(t) \in \mathbb{R}$ un generico segnale modulante, $s \in (-1, 1)$. Un possibile modello del segnale PWM Double-edge è dato dalla funzione

$$p(s, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2 \text{rect} \left(\frac{t - k}{\tau(s)} \right) - 1$$

dove $\text{rect}(\cdot)$ indica l'impulso rettangolare centrato

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 0, & |t| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & |t| = \frac{1}{2} \\ 1, & |t| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

e

$$\tau(s(t)) = \frac{s(t) + 1}{2}, \quad \tau \in (0, 1)$$

che indica la dipendenza del fattore di scala dell'impulso τ dall'ampiezza del segnale modulante s .

Un segnale PWM Double-edge con triangolare a frequenza fondamentale f_c è ottenuto scalando t :

$$p_{s, f_c}(t) = p(s(t), f_c t)$$

ovvero

$$p_{s, f_c}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2 \text{rect} \left(\frac{t - kT}{T\tau(s)} \right) - 1$$

dove è evidente l'effetto del fattore τ sul periodo T . Questa relazione vale anche qualora f_c sia nella banda di $s(t)$.

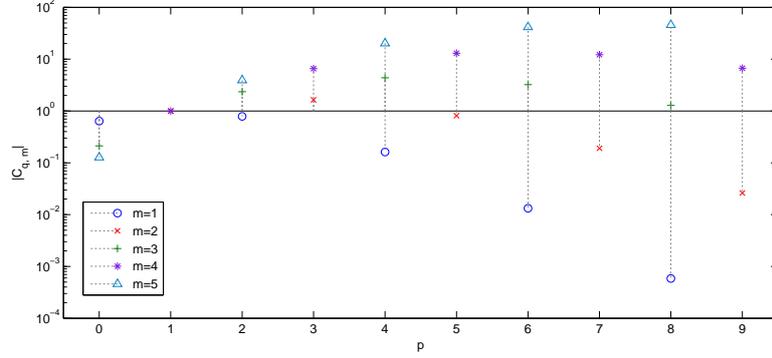


Figura 1.22: Andamento (log) dei primi coefficienti $C_{q,m}$ per $m = 1, \dots, 5$ armoniche e $q = 0, \dots, 9$ potenze

Prop. 1. Sia $p(s, f_c t)$ un segnale PWM Double-edge con $f_c = 1$ e $s(t)$ segnale modulante in $(-1, 1)$. Allora vale

$$p_{s,f_c}(t) = s(t) + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} C_{q,m} s^q(t) \cos(2\pi m f_c t) \quad (1.6)$$

con

$$C_{q,m} = \begin{cases} (-1)^{\frac{m+q-1}{2}} \frac{1}{q!} \left(\frac{\pi m}{2}\right)^{q-1}, & \text{mod}_2(m+q) = 1 \\ 0, & \text{mod}_2(m+q) = 0 \end{cases}$$

Dim. Si vuole sviluppare $p(s, t)$ in serie rispetto al periodo e.g. $T = 1, f_c = 1$ del segnale triangolare.

1. Si richiama la serie di Fourier di esponenziali complessi [22]

$$a(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m e^{i2\pi \frac{m}{T} t}$$

di coefficienti

$$A_m = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} a(t) e^{-i2\pi \frac{m}{T} t} dt$$

2. Si richiama la trasformata di Fourier dell'impulso rettangolare centrato

$$\mathcal{F} \left[\text{rect} \left(\frac{t}{\tau} \right) \right] (f) = \tau \text{sinc}(f\tau)$$

come (1.1).

3. Sviluppando la ripetizione periodica di periodo 1

$$a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t-k}{\tau(s)}\right)$$

i coefficienti

$$A_m = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_k \text{rect}\left(\frac{t-k}{\tau}\right) e^{-i2\pi mt} dt$$

in $\xi = t - k$ vale

$$A_m = \sum_k e^{-i2\pi mk} \int_{-\frac{1}{2}-k}^{\frac{1}{2}-k} \text{rect}\left(\frac{\xi}{\tau}\right) e^{-i2\pi m\xi} d\xi$$

ma $k \in \mathbb{Z}$ e il supporto dell'integrando è $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, quindi di \sum_k è non nullo solo il termine in $k = 0$:

$$A_m = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \text{rect}\left(\frac{\xi}{\tau}\right) e^{-i2\pi m\xi} d\xi = \tau \text{sinc}\pi m\tau$$

quindi

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t-k}{\tau(s)}\right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tau \frac{\sin(\pi m\tau)}{\pi m\tau} e^{i2\pi mt}$$

4. Dato che

$$e^{i2\pi mt} = \cos(2\pi mt) + i \sin(2\pi mt)$$

è possibile riscrivere lo sviluppo di $a(t)$ come

$$a(t) = \alpha_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \cos(2\pi mt) + \beta_m \sin(2\pi mt)$$

dove

$$\alpha_0 = A_0, \alpha_m = A_m + A_{-m}, \beta_m = i(A_m - A_{-m})$$

ma gli A_m della funzione in esame sono tutti in \mathbb{R} , perciò $\alpha_m = 2A_m$ e $\beta_m = 0$ così che

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t-k}{\tau(s)}\right) = \tau + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi m} \sin(\pi m\tau) \cos(2\pi mt)$$

5. Sostituendo in $p(s, t)$ lo sviluppo per spostamenti infinitesimi di $\tau(s)$

$$p(s, t) = 2\tau(s) - 1 + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi m} \sin(\pi m\tau(s)) \cos(2\pi mt)$$

ovvero

$$p(s, t) = s(t) + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi m} \sin\left(\pi m \frac{s(t)+1}{2}\right) \cos(2\pi mt)$$

6. Per la nota identità trigonometrica

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

allora

$$\sin\left(\frac{m\pi s}{2} + \frac{m\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{m\pi s}{2}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{m\pi s}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)$$

ovvero

$$\sin\left(\pi m \frac{s(t)+1}{2}\right) = \begin{cases} \sin\left(\frac{m\pi s(t)}{2}\right) (-1)^{\frac{m}{2}} & m \text{ pari (even)} \\ \cos\left(\frac{m\pi s(t)}{2}\right) (-1)^{\frac{m-1}{2}} & m \text{ dispari (odd)} \end{cases}$$

Si evidenziano nella serie i termini di ordine m pari e dispari

$$\begin{aligned} p(s, t) = s + 2 \sum_{m=1, m \text{ even}}^{+\infty} \frac{2}{\pi m} \sin\left(\pi m \frac{s}{2}\right) (-1)^{\frac{m}{2}} \cos(2\pi m t) + \dots \\ + 2 \sum_{m=1, m \text{ odd}}^{+\infty} \frac{2}{\pi m} \cos\left(\pi m \frac{s}{2}\right) (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cos(2\pi m t) \end{aligned}$$

7. Si richiamano gli sviluppi in serie di potenze (i.e. $\sum a_n t^n$, [23])

$$\sin(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1!} = t - t^3 + t^5 + \dots \quad (1.7)$$

$$\cos(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{2n!} = 1 - t^2 + t^4 + \dots$$

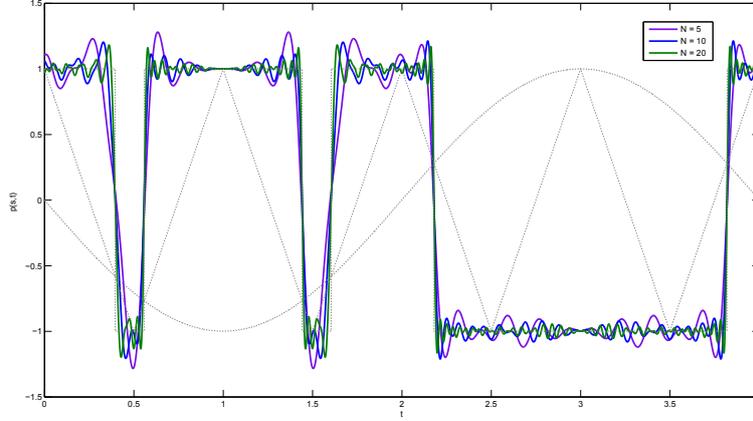
che applicati a

$$\frac{2}{\pi m} \sin\left(\frac{\pi m}{2} s\right) = \sum_{q=0, q \text{ odd}}^{+\infty} (-1)^{\frac{q-1}{2}} \left(\frac{\pi m}{2}\right)^{q-1} \frac{s^q}{q!}$$

$$\frac{2}{\pi m} \cos\left(\frac{\pi m}{2} s\right) = \sum_{q=0, q \text{ even}}^{+\infty} (-1)^{\frac{q}{2}} \left(\frac{\pi m}{2}\right)^{q-1} \frac{s^q}{q!}$$

per cui lo sviluppo diviene

$$\begin{aligned} p(s, t) = s + 2 \sum_{m=1, m \text{ even}}^{+\infty} \sum_{q=0, q \text{ odd}}^{+\infty} (-1)^{\frac{q-1}{2}} \left(\frac{\pi m}{2}\right)^{q-1} \frac{s^q}{q!} (-1)^{\frac{m}{2}} \cos(2\pi m t) + \dots \\ + 2 \sum_{m=1, m \text{ odd}}^{+\infty} \sum_{q=0, q \text{ even}}^{+\infty} (-1)^{\frac{q}{2}} \left(\frac{\pi m}{2}\right)^{q-1} \frac{s^q}{q!} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cos(2\pi m t) \end{aligned}$$


 Figura 1.23: Troncamento dello sviluppo in serie di $p(s, t)$ (serie approssimante di un segnale PWM)

8. Considerando che i termini della $\sum \sum_{m,q}$ verificano tutti la condizione

$$\text{mod}_2(m + q) = 1$$

ovvero m e q mai entrambi pari o dispari, si definiscono i coefficienti

$$C_{q,m} = \begin{cases} (-1)^{\frac{m+q-1}{2}} \frac{1}{q!} \left(\frac{\pi m}{2}\right)^{q-1}, & \text{mod}_2(m + q) = 1 \\ 0, & \text{mod}_2(m + q) = 0 \end{cases}$$

per cui

$$p(s, t) = s(t) + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} C_{q,m} s^q(t) \cos(2\pi m t)$$

e scalando il segnale a frequenza f_c

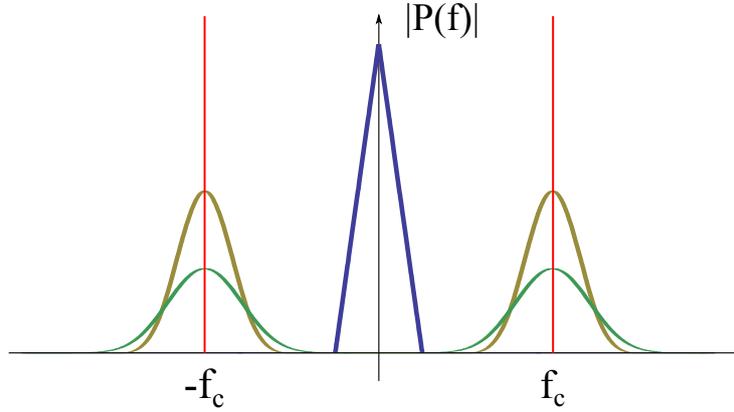
$$p_{s,f_c}(t) = p(s(t), f_c t) = s(t) + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} C_{q,m} s^q(t) \cos(2\pi m f_c t)$$

Dall'andamento dei coefficienti $C_{q,m}$ riportato in Fig. 1.22 si evince che le potenze di ordine q pari sono centrate attorno alle armoniche m dispari, e viceversa le potenze di ordine q dispari sono centrate attorno alle armoniche m pari. Un esempio di sviluppo in serie al variare del numero di armoniche è riportato in Fig. 1.23.

Prop. 2. Lo spettro di un segnale $p_{s,f_c}(t)$ modulato PWM Double-edge è del tipo

$$P(f) = S(f) + \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} C_{q,m} (S_q(f - m f_c) + S_q(f + m f_c)) \quad (1.8)$$

dove $S(f) = \mathcal{F}[s(t)](f)$, $S_q(f) = \mathcal{F}[s^q(t)](f)$.


 Figura 1.24: Componenti dello spettro $|P(f)|$ intorno $(-f_c, f_c)$

Dim. Per

- la linearità di $\mathcal{F}[\cdot]$
- $\cos(2\pi m f_c t) = \frac{1}{2} (e^{i2\pi m f_c t} + e^{-i2\pi m f_c t})$
- la proprietà di traslazione in frequenza di $\mathcal{F}[\cdot]$:

$$\mathcal{F}[s(t)e^{i2\pi\xi t}](f) = \mathcal{F}[s(t)](f - \xi)$$

allora

$$P(f) = \mathcal{F}[p_{s,f_c}(t)] = S(f) + \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} C_{q,m} (S_q(f - mf_c) + S_q(f + mf_c))$$

Lo spettro $P(f)$, $f \in \mathbb{R}$ è quindi costituito dalle trasformate di Fourier delle potenze di $s(t)$, centrate a seconda dell'ordine q intorno alle armoniche mf_c , $m = 1, \dots, +\infty$ del segnale portante $c(t)$. In particolare, attorno a f_c ($m = 1$) vi saranno le componenti di ordine pari $S_0(f)$ (il tono a frequenza f_c), $S_2(f - f_c)$, $S_4(f - f_c)$, \dots (Fig. 1.24) la cui banda è considerevolmente aumentata rispetto ad $S(f)$. Qualora f_c sia vicina alla banda di $s(t)$ (i.e. al supporto di $S(f)$) parte del profilo di $S_q(f - f_c)$, q pari si sovrapporrà ad $S(f)$ producendo aliasing e quindi perdita d'informazione. Parte dell'obiettivo di questa tesi è determinare le condizioni per cui si possa ridurre f_c con aliasing minimo da parte delle componenti non lineari di ordine q .

Prop. 3. Sia $p(s, f_c t)$ un segnale PWM Single-edge con $f_c = 1$ e $s(t)$ segnale modulante in $(-1, 1)$. Allora vale

$$p_{s,f_c}(t) = p\left(s(t), f_c t + \frac{s(t) - 1}{4}\right)$$

dove $p(s, t)$ è lo sviluppo in serie di (1.6).

1.3.3 Analisi spettrale “a posteriori” del segnale PWM

Def. 1.4. Sia $p(t)$ un segnale PWM con $f_c = 1$ e

- $t \in \mathbb{R}$ continuo
- $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ t. c. $\forall k, t_k < t_{k+1}$ successione degli istanti di transizione (o zero crossing) di $p(t)$
- $p_k \in \{a, b\}$ valore di $p(t)$ nel k -esimo intervallo (t_k, t_{k+1})

1. Si definisce segnale PWM $p(t)$

$$p(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \chi_k(t) \quad (1.9)$$

con

$$\chi_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in (t_k, t_{k+1}) \\ 0 & t \notin (t_k, t_{k+1}) \end{cases}$$

funzione caratteristica del k -esimo intervallo. Tale definizione è “a posteriori” nel senso che prescinde dalla conoscenza di $s(t)$ e richiede la conoscenza di $\{t_k\}$ su tutto il supporto del segnale.

La funzione caratteristica equivale a

$$\chi_k(t) = H(t - t_k) - H(t - t_{k+1})$$

con

$$H(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

funzione gradino di Heaviside. Allora la (1.9) diviene

$$p(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k (H(t - t_k) - H(t - t_{k+1}))$$

2. Se i simboli $p_k \in \{-1, 1\}$, essendo noto che $p(t)$ alterna -1 e 1 allora

$$p_k = (-1)^k$$

e

$$p(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (H(t - t_k) - H(t - t_{k+1}))$$

è il segnale PWM bipolare.

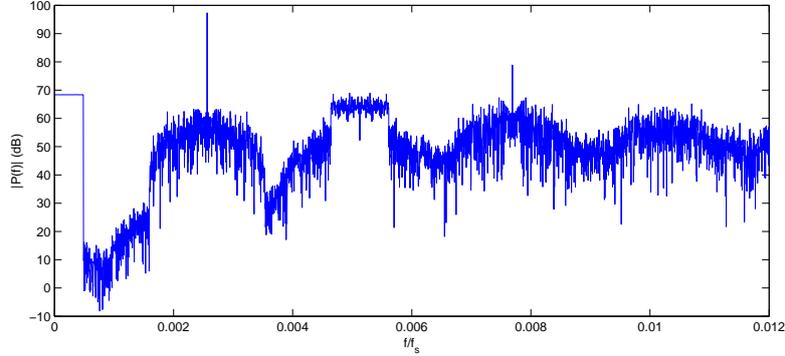


Figura 1.25: Esempio di spettro “a posteriori” di un segnale PWM

3. Se i simboli $p_k \in \{0, 1\}$, essendo noto che $p(t)$ alterna 0 e 1 allora

$$p_k = \begin{cases} 1, & k = 2m \\ 0, & k = 2m + 1 \end{cases}, m \in \mathbb{Z}$$

e

$$p(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} H(t - t_{2m}) - H(t - t_{2m+1})$$

è il segnale PWM unipolare.

Prop. 4. Lo spettro di un segnale PWM bipolare è dato da

$$P(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{i}{2\pi f} (e^{-i2\pi f t_k} - e^{-i2\pi f t_{k+1}}) \quad (1.10)$$

Dim. Nota

$$\mathcal{F}[H(t)](f) = \frac{i}{2\pi f}$$

e quindi

$$\mathcal{F}[H(t - \tau)](f) = \frac{i}{2\pi f} e^{-i2\pi f \tau}$$

allora

$$P(f) = \mathcal{F}[p(t)](f) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (\mathcal{F}[H(t - t_k)](f) + \mathcal{F}[H(t - t_{k+1})](f))$$

da cui segue la (1.10).

Si può inoltre vedere come si compongono gli istanti di ordine pari e quelli di ordine dispari separando $k = 2m, 2m + 1$ e scrivendo

$$P(f) = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^{2m} \frac{i}{2\pi f} (e^{-i2\pi f t_{2m}} - e^{-i2\pi f t_{2m+1}}) + \dots$$

$$\begin{aligned}
 & \dots + (-1)^{2m+1} \frac{i}{2\pi f} (e^{-i2\pi f t_{2m+1}} - e^{-i2\pi f t_{2m+2}}) \\
 = & \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{i}{2\pi f} (e^{-i2\pi f t_{2m}} - e^{-i2\pi f t_{2m+1}}) - \frac{i}{2\pi f} (e^{-i2\pi f t_{2m+1}} - e^{-i2\pi f t_{2(m+1)}}) \\
 = & \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{i}{2\pi f} (e^{-i2\pi f t_{2m}} + e^{-i2\pi f t_{2(m+1)}}) - \frac{i}{\pi f} e^{-i2\pi f t_{2m+1}}
 \end{aligned}$$

Un esempio di spettro del segnale PWM bipolare calcolato a posteriori dagli istanti di transizione è riportato in Fig. 1.25.

Prop. 5. Lo spettro di un segnale PWM unipolare è dato da

$$P(f) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{i}{2\pi f} (e^{-i2\pi f t_{2m}} - e^{-i2\pi f t_{2m+1}}) = \frac{i}{2\pi f} \left[\sum_{m=0}^{+\infty} e^{-i2\pi f t_{2m}} - \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-i2\pi f t_{2m+1}} \right]$$

e

$$P(0) = \sum_{m=0}^{+\infty} t_{2m} - \sum_{m=0}^{+\infty} t_{2m+1}$$

Dim. Per $f \rightarrow 0$ si ha

$$P(f) \longrightarrow \frac{i}{2\pi f} \left[\sum_{m=0}^{+\infty} 1 - i2\pi f t_{2m} - \sum_{m=0}^{+\infty} 1 - i2\pi f t_{2m+1} \right]$$

quindi

$$P(0) = \sum_{m=0}^{+\infty} t_{2m} - \sum_{m=0}^{+\infty} t_{2m+1}$$

Nelle considerazioni precedenti non è esplicita la dipendenza di $p(t)$ dal segnale modulante $s(t)$. Questa è implicita nella successione dei $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$

- se il segnale modulante $s(t)$ è nullo i t_k sono gli istanti in cui la portante $c(f_c t) = 0$, che nel caso triangolare sono almeno due per periodo T , ovvero

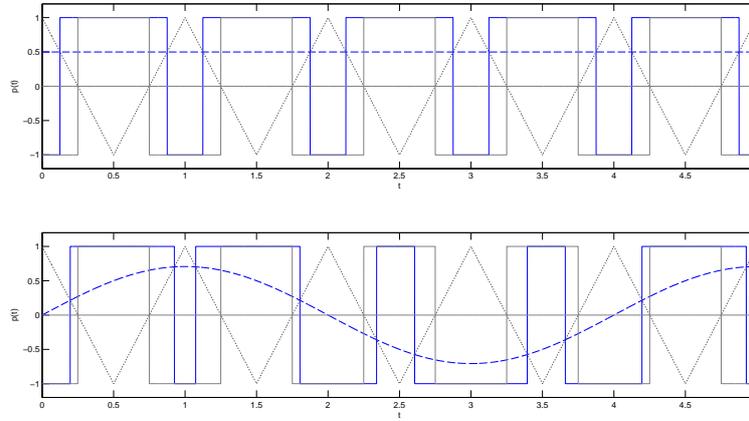
$$\begin{cases} t_{2m} = \frac{4m+1}{4f_c} \\ t_{2m+1} = \frac{4m+3}{4f_c} \end{cases}, m \in \mathbb{Z}$$

Questi corrispondono agli istanti in cui si annulla

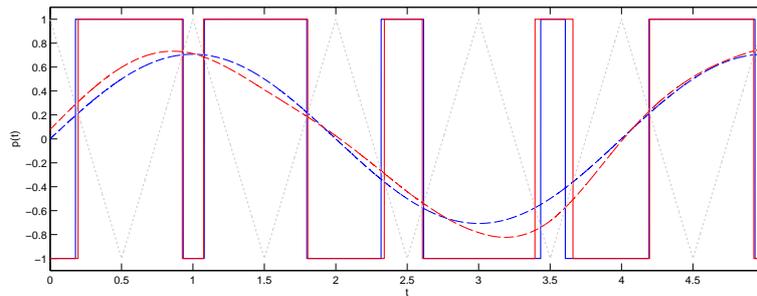
$$\cos(2\pi f_c t) = 0$$

$$t_l = \frac{1}{4f_c} (2l+1), l \in \mathbb{Z} \quad (1.11)$$

come indica Fig. 1.19.



(a) Per effetto del segnale modulante $s(t)$



(b) Per effetto di $s(t)$ e $\nu(t)$ rumore

Figura 1.26: Spostamento degli zeri di $p(t)$

- se il segnale modulante $s(t)$ è non nullo i t_k sono gli istanti in cui la portante $c(f_c t) = s(t)$; l'ampiezza del segnale modulante varia quindi la posizione degli istanti di transizione rispetto al caso non modulato (Fig. 1.26(a)).
- qualora al segnale modulante $s(t)$ si sommi un contributo di rumore $\nu(t)$, l'effetto di quest'ultimo è uno spostamento degli zeri rispetto al caso di $\nu(t)$ assente (Fig. 1.26(b)).

In sostanza, il contenuto informativo del segnale modulante viene mappato in una successione d'istanti di transizione $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$: a meno del segno, il segnale PWM è completamente descritto da $\{t_k\}$ e quindi ogni coppia

$$s(t), c(t) \text{ t. c. } \forall t^* \in \{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}}, s(t^*) = c(t^*) \Rightarrow p(t^*) = \text{sign}(s(t^*) - c(t^*)) = 0$$

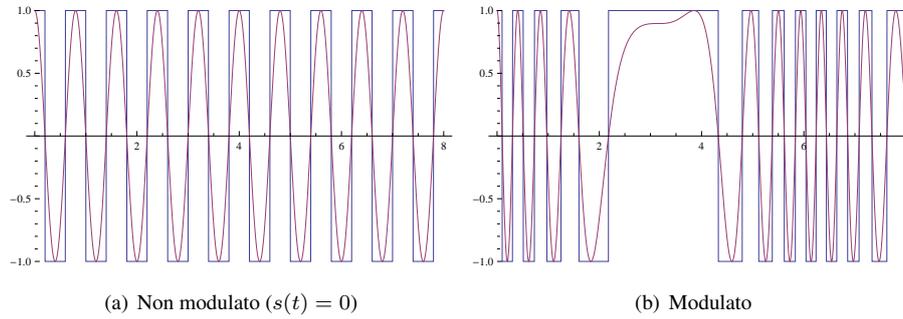


Figura 1.27: Rappresentazione time warping del segnale PWM

cioè le infinite coppie di segnali modulanti e segnali portanti che si intersecano negli stessi istanti $\{t_k\}$ sono mappate nello stesso segnale PWM $p(t)$.

1.3.4 Rappresentazione time warping del segnale PWM

Essendo gli istanti di transizione di $\cos(2\pi f_c t)$ gli stessi di $c(f_c t)$ triangolare (Fig. 1.19), è possibile pensare il segnale PWM non modulato (Fig. 1.27(a))

$$p_{0,f_c}(t) = \text{sign}(\cos(2\pi f_c t)) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos(2\pi(2k+1)f_c t)$$

ed il segnale modulato come una rotazione $\delta_{s,f_c}(t)$ dipendente da $s(t)$ (Fig. 1.27(b)) così che

$$p_{s,f_c}(t) = p_{0,f_c}(t + \delta_{s,f_c}(t))$$

Questo modello (“time warping” poiché mappa $s(t)$ a una compressione/espansione dell’asse temporale) è approfondito in [24], ma è oltre gli scopi di questa tesi.

2

AMPLIFICATORI IN COMMUTAZIONE MODULATI PWM

In questo capitolo si propone un nuovo schema di generazione del segnale PWM volto ad ottimizzare l'efficienza degli amplificatori in classe D attraverso la riduzione adattativa della frequenza di commutazione media del sistema. Sono riviste brevemente le caratteristiche principali degli amplificatori di potenza operanti in commutazione, a seguito delle quali viene proposto un innovativo schema di modulazione PWM digitale-analogico, che sfrutta alcune proprietà matematiche per minimizzare la banda dei segnali sintetizzati.

2.1 Amplificatori in classe D

Sono introdotti gli amplificatori di potenza e gli amplificatori operanti in commutazione, con l'obiettivo di individuare la dipendenza delle prestazioni dalla frequenza di

commutazione media f_c . Per approfondimenti sulle applicazioni elettroniche per la conversione dell'energia si veda [3].

2.1.1 Alcune premesse

Gli amplificatori di potenza sono dispositivi elettronici essenziali per tutte le applicazioni in cui sia necessario trasferimento di energia fra sorgente e carico, quali il controllo di motori elettrici e macchine elettromeccaniche, la trasmissione a grande distanza di segnali a radiofrequenza, la distribuzione di energia su terminali portatili a batteria e l'amplificazione di segnali audio per la riproduzione su cuffie auricolari o altoparlanti. Le potenze trasferite variano a seconda dell'applicazione: dai pochi milliwatt (mW) richiesti dalle cuffie di un dispositivo portatile alle decine o centinaia di kilowatt (kW) richieste dalle macchine industriali, l'obiettivo è operare scambi di energia ad alto rendimento per cui il rapporto

$$\eta = \frac{\text{Potenza trasferita al carico}}{\text{Potenza erogata dalla sorgente}} \rightarrow 1$$

Il problema è quindi garantire un trade-off ottimale fra i parametri e limiti di progetto di un amplificatore di potenza:

- Rendimento energetico, ovvero l'efficienza nel trasferimento di potenza quantificata da

$$\eta = \frac{P_o}{P_s + P_i}$$

dove P_o , P_s , P_i sono i valori medi rispettivamente della potenza in uscita al carico, della potenza del segnale di controllo (i.e. il contenuto informativo) e della potenza fornita dalla sorgente di alimentazione.

- Dissipazione di calore per effetto Joule, quantificata da

$$P_d = P_i + P_s - P_o \simeq P_i - P_o$$

con $P_s \ll P_i, P_o$. La potenza dissipata in calore è quindi

$$P_d = P_o \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right)$$

per cui massimizzando η si minimizza P_d , evitando conseguenti fenomeni di autoriscaldamento critici per i dispositivi a semiconduttore.

- Distorsione sul segnale di uscita, dovuta alla non linearità dei dispositivi elettronici impiegati come elementi attivi. Si quantifica tale parametro con la distorsione istantanea

$$\Delta(t) = v_o^*(t) - v_o(t)$$

fra il valore $v_o^*(t)$ del segnale con amplificazione ideale ed il valore reale $v_o(t)$ su cui è presente un contributo di distorsione che ne altera le componenti armoniche. Si definisce anche il fattore di distorsione armonica

$$D = \frac{\Delta_{RMS}}{v_{o,RMS}^*} = \frac{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \Delta^2(t) dt}}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |v_o^*(t)|^2 dt}}$$

dove RMS (root mean square) indica il valore efficace.

- Guadagno di uscita, per cui con $v_s(t)$ segnale di controllo di potenza media P_s si definisce

$$G_{dB} = 10 \log_{10} \frac{P_o}{P_s}$$

- Larghezza di banda di funzionamento, dipendente dalle caratteristiche dei dispositivi attivi e dallo schema di amplificazione

L'obiettivo di questa tesi è il progetto di un modulatore per amplificatori operanti in commutazione, approfonditi di seguito. I principi sviluppati sono applicabili ad un'ampia classe di tecnologie: in questa trattazione si considerano amplificatori a transistor MOS per segnali a bassa potenza e in banda audio ([20, 22000] Hz), che più si prestano all'integrazione ed alla realizzazione di amplificatori audio per dispositivi portatili a batteria.

2.1.2 Amplificatori di potenza operanti in commutazione

In Fig. 2.1 è riportato un semplice schema di amplificatore invertente a transistor MOS [25], la coppia di transistor complementari n-p. Per ottenere amplificazione lineare entrambi i dispositivi MOS sono polarizzati in regione lineare (attiva) e sono sempre in conduzione. Questo regime di funzionamento è detto in classe A; più in generale, gli amplificatori di potenza sono classificati in base alla conduzione dei dispositivi di potenza rispetto ad un ingresso sinusoidale $\sin(\theta)$ [26]

- Classe A: i dispositivi operano in regione lineare per l'intero periodo ($\theta \in [0, 2\pi]$) e l'amplificazione è lineare nel punto di riposo; la distorsione è nulla, ma il basso rendimento $\eta_A \ll 0.5$ rende questa topologia adatta solo per applicazioni in cui sia necessaria alta linearità ad alto guadagno.
- Classe B: i dispositivi sono in regione lineare per un semiperiodo ($\theta \in [0, \pi]$) ed interdetti nel semiperiodo complementare. Sull'uscita è presente distorsione di crossover [25] dovuta alla soglia di spegnimento dei transistori. In questo caso si

2. AMPLIFICATORI IN COMMUTAZIONE MODULATI PWM

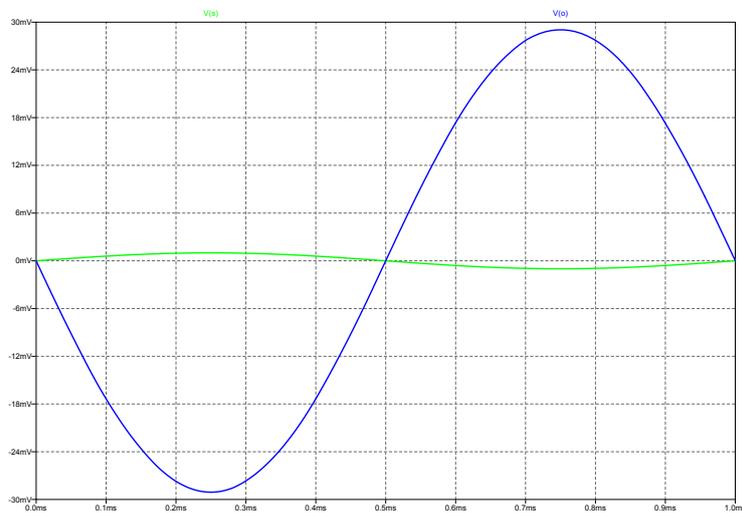
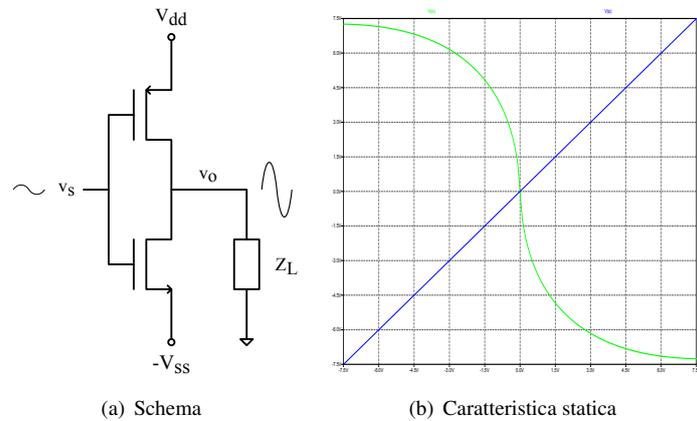
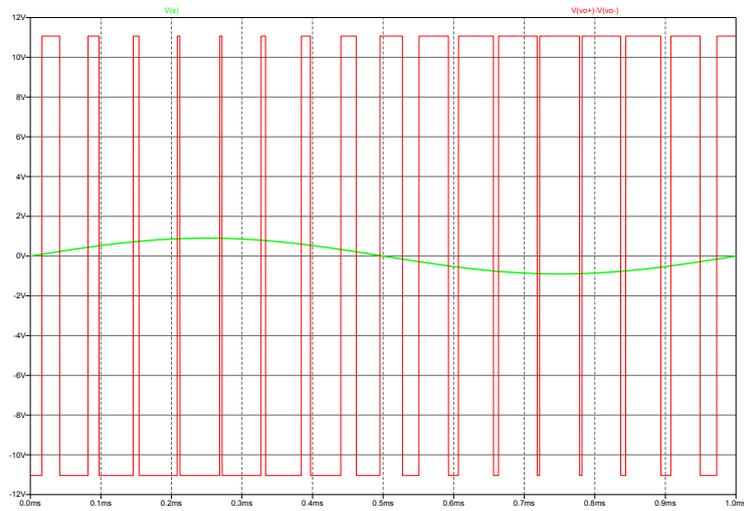


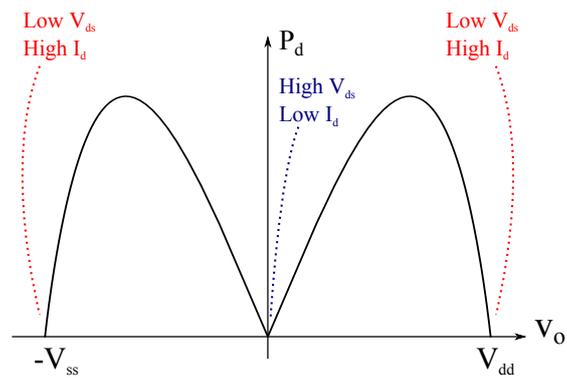
Figura 2.1: Invertitore CMOS (amplificatore in classe A)

verifica che il rendimento $\eta_B < \frac{\pi}{4} \simeq 0.785$, avendo però distorsione armonica sull'uscita.

- Classe AB: i dispositivi sono in regione lineare per un semiperiodo, ma si elimina la distorsione di crossover introducendo un intervallo in cui entrambi i dispositivi sono in conduzione. Questo causa una riduzione di rendimento per cui in genere $\eta_A \ll \eta_{AB} < \eta_B$ ma la distorsione è minore rispetto all'amplificatore in classe B.
- Classe C, E, ...: diversi trade-off fra distorsione e rendimento al variare dell'angolo di conduzione dei dispositivi.



(a) Funzionamento in classe D



(b) Relazione fra potenza dissipata e tensione di uscita di una coppia n, p MOS

Figura 2.2: Proprietà di un amplificatore in classe D

- Classe D: i dispositivi non operano mai in regione lineare, ma commutano fra regione di saturazione e interdizione, ovvero i due stati per cui la potenza dissipata dai transistori è minima (Fig. 2.2(b)). Il funzionamento a interruttore (switching) è intrinsecamente non lineare e l'uscita è fortemente distorta (Fig. 2.2(a)), ma il rendimento è teoricamente $\eta \rightarrow 1$ e nella pratica $\eta \approx 0.9$.

Allo scopo di realizzare un amplificatore a massima efficienza energetica si opta quindi per lo schema in classe D.

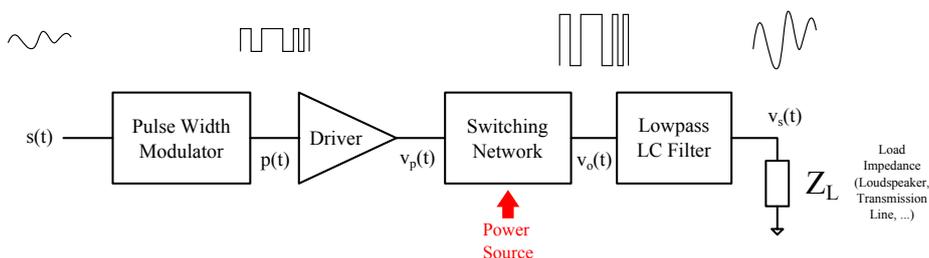


Figura 2.3: Schema a blocchi di un amplificatore in classe D ad anello aperto

2.1.3 Amplificatore in classe D

Lo schema a blocchi di un amplificatore in classe D ad anello aperto è riportato in Fig. 2.3:

- Il segnale $s(t)$ da amplificare è il segnale modulante in ingresso ad un modulatore PWM, che emette una successione d'impulsi $p(t)$ a frequenza media f_c in cui è mappata l'informazione di $s(t)$ (digitale o analogico).
- All'uscita del modulatore PWM il range di tensione di $p(t)$ può essere incompatibile con la tensione di controllo richiesta dagli switch della rete di commutazione. Inoltre, a causa degli effetti RC dei dispositivi a semiconduttore potrebbero verificarsi transitori in cui interruttori complementari sono entrambi accesi. Per controllarne l'accensione si interpone quindi uno stadio driver che emette i segnali di controllo $v_p(t)$ e $-v_p(t)$ compatibili con le caratteristiche di accensione-spegnimento degli switch.
- La rete di commutazione (schema a mezzo ponte (HB), Fig. 2.4(a) o a ponte intero (FB), Fig. 2.4(b)) è costituita da coppie di interruttori complementari: nel caso in esame si considerano transistor nMOS e pMOS di potenza, che operano fra le tensioni di alimentazione $(-V_{ss}, V_{dd})$ con tensione di gate $v_p(t)$. All'uscita della rete di commutazione si ha un segnale $v_o(t)$ che commuta fra $\{V_{ss}, V_{dd}\}$ (HB) o $\{V_{ss} - V_{dd}, V_{dd} - V_{ss}\}$ (FB) e il cui spettro, nella forma di Eq. (1.8), è a banda teoricamente illimitata*.
- Il segnale $v_o(t)$ è filtrato da una rete di induttanze e capacità (Fig. 2.5) dimensionata per eliminare le componenti di $v_o(t)$ fuori dalla banda base di $s(t)$ e trasferire all'impedenza di carico Z_L il segnale amplificato $v_s(t)$.

É rilevante notare che seppure il circuito di potenza costituito da driver, rete di commutazione e filtro LC sia sempre analogico, il segnale PWM può essere generato

*Nella pratica è limitata dagli effetti RLC parassiti dei dispositivi e delle interconnessioni

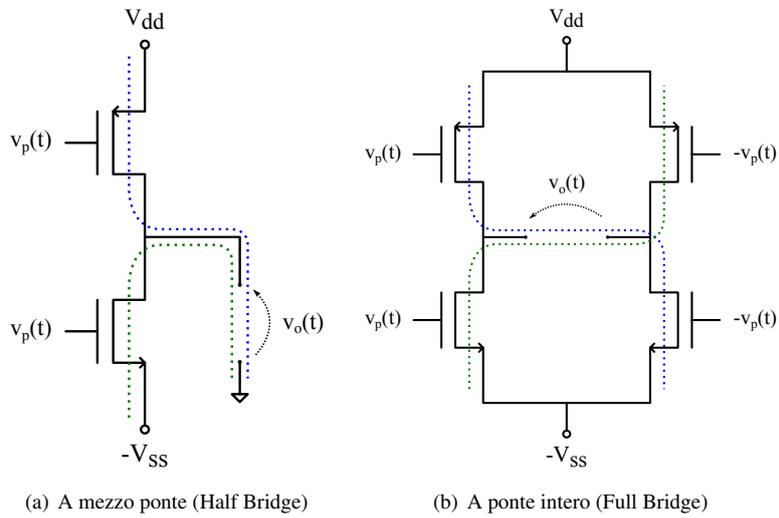


Figura 2.4: Implementazione CMOS della rete di commutazione

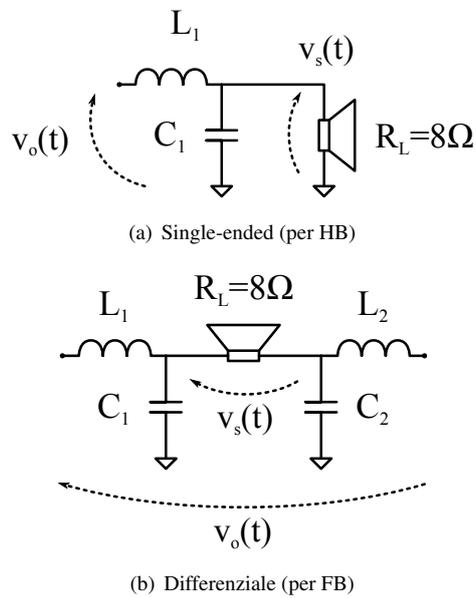


Figura 2.5: Filtro LC e carico speaker

da uno schema analogico o calcolato da un elaboratore digitale (e.g. microcontrollore o DSP).

Stato dell'arte

L'implementazione del sistema ad anello aperto è semplice e intrinsecamente stabile, ma non ha compensazione della distorsione sull'uscita $v_s(t)$: allo stato dell'arte [6, 27, 4] le implementazioni prevedono un anello di retroazione negativa sull'ingresso, per cui il segnale modulante della PWM è l'errore $\Delta(t)$ elaborato da un filtro (analogico o digitale) che ne effettua la correzione

Sono inoltre previste varianti che utilizzano un modulatore PDM [28], i.e. un DAC $\Sigma\Delta$ ad 1 bit che controlla la rete di commutazione: il principale limite di questo approccio è l'elevata frequenza di commutazione f_c della rete di switching, per cui il consumo di potenza è maggiore del caso PWM. Per questo motivo si esclude la PDM dalle scelte di sistema sulla modulazione ad alta efficienza energetica. Essendo l'introduzione del feedback negativo e del filtro dispendiose in termini di risorse lo schema che si considera in questa tesi è ad anello aperto.

2.1.4 Potenza dissipata da una rete di commutazione MOS

Si consideri lo schema di Fig. 2.4(a). La potenza media dissipata in un amplificatore in classe D è

$$P_d = P_{sw} + P_{on} + P_{gd} \quad (2.1)$$

dove [31]:

- P_{sw} è la potenza dissipata nelle commutazioni,

$$P_{sw} = 2 \cdot \frac{1}{2} f_c C_o V_{dd}^2$$

con C_o capacità al nodo di uscita, V_{dd} tensione di alimentazione, f_c frequenza di commutazione media della rete (avendo considerato transistori MOS simmetrici).

- P_{gd} è la potenza dissipata dai driver che pilotano i gate dei transistor MOS. Tale contributo dipende dalla carica Q_g accumulata sul gate per cui si ha la tensione gate-source V_{gs} ; il ciclo di carica avviene a frequenza media f_c perciò

$$P_{gd} = 2 \cdot \frac{1}{2} f_c Q_g V_{gs}$$

- P_{on} è la potenza dissipata dai dispositivi in regione di saturazione, ed è data da

$$P_{on} = \frac{1}{2} R_{ds,on} I_L^2$$

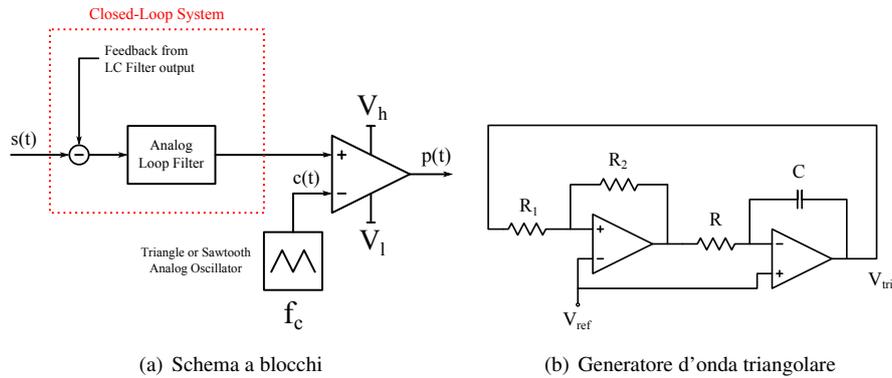


Figura 2.6: Modulatore PWM analogico

dove I_L è il valore di picco della corrente sul carico ed $R_{ds,on}$ è la resistenza drain-source del transistor MOS in saturazione.

Si è osservato che $P_d \propto f_c$, perciò una riduzione della frequenza di commutazione f_c aumenterà il rendimento come

$$\eta_D = \frac{P_o}{P_i + P_s} \simeq \frac{P_o}{P_d(f_c) + P_o} = \frac{1}{\kappa f_c + 1}$$

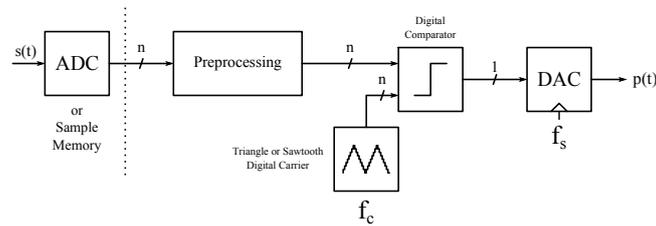
Dualmente, la riduzione di f_c peggiora il fattore di distorsione armonica: sull'adattamento di f_c alla potenza ed allo spettro del segnale in ingresso si concentra l'ottimizzazione in esame.

2.2 Modulatori PWM

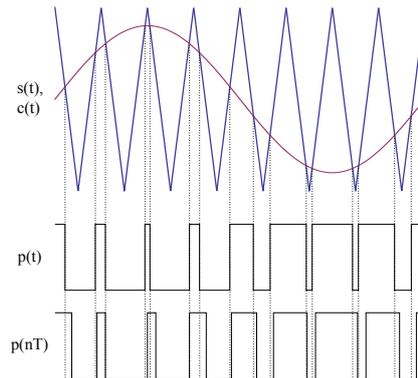
Si è visto che allo scopo di minimizzare il consumo di potenza dell'amplificatore in classe D è necessario ridurre quanto possibile la frequenza di commutazione media f_c della rete, che è la frequenza fondamentale del segnale portante di un modulatore PWM del tipo descritto in Sez. 1.3. Per generare una modulazione PWM esistono molteplici schemi, il cui principio è il confronto fra $s(t)$ e $c(t)$ di Eq. (1.5). Si distinguono schemi completamente analogici (Fig. 2.6(a)), completamente digitali (Fig. 2.7(a)) e misti in cui la generazione dei segnali avviene in digitale su un elaboratore di segnale (DSP) mentre il confronto è operato in analogico rispetto al riferimento a massa (Fig. 2.8(a), 2.8(b)).

- Un modulatore PWM completamente analogico genera il segnale PWM a partire da un oscillatore analogico ad onda triangolare (e.g. Fig. 2.6(b)) e dal segnale modulante in ingresso $s(t)$; è inoltre comune l'implementazione con retroazione negativa. Per avere buone prestazioni questo schema richiede componenti ad

2. AMPLIFICATORI IN COMMUTAZIONE MODULATI PWM



(a) Schema a blocchi



(b) Quantizzazione temporale degli istanti di transizione

Figura 2.7: Modulatore PWM digitale

alta precisione ed ha un consumo di potenza generalmente superiore rispetto all'equivalente digitale [6]; è inoltre meno robusto alle non idealità ed agli effetti di rumore nel circuito analogico. Il comparatore analogico rende il confronto $s(t) - c(t)$ ideale non avendo effetti di quantizzazione di t : un segnale PWM così generato è detto a campionamento naturale (Natural Sampling PWM).

- Un modulatore PWM completamente digitale genera il segnale PWM su di una piattaforma di calcolo (microcontrollore, FPGA o DSP) implementando il confronto come operatore logico fra campioni. Il segnale digitale sintetizzato $p(n)$ è convertito da un DAC a frequenza $f_s = \frac{1}{T}$; il periodo di campionamento T è il limite inferiore alla risoluzione degli istanti di transizione (Fig. 2.7(b)): a causa di questo effetto nello spettro del segnale PWM si crea un contributo di aliasing [21]. La qualità del segnale di uscita migliora con l'uso di un DAC $\Sigma\Delta$, che deve operare ad f_s elevata per rappresentare tutto lo spettro del segnale PWM (idealmente illimitato). Il segnale così generato è detto a campionamento uniforme (Uniform Sampling PWM).
- I modulatori PWM a flusso di segnale misto digitale-analogico coniugano la semplicità e la precisione algoritmica di generazione dei segnali su piattaforme

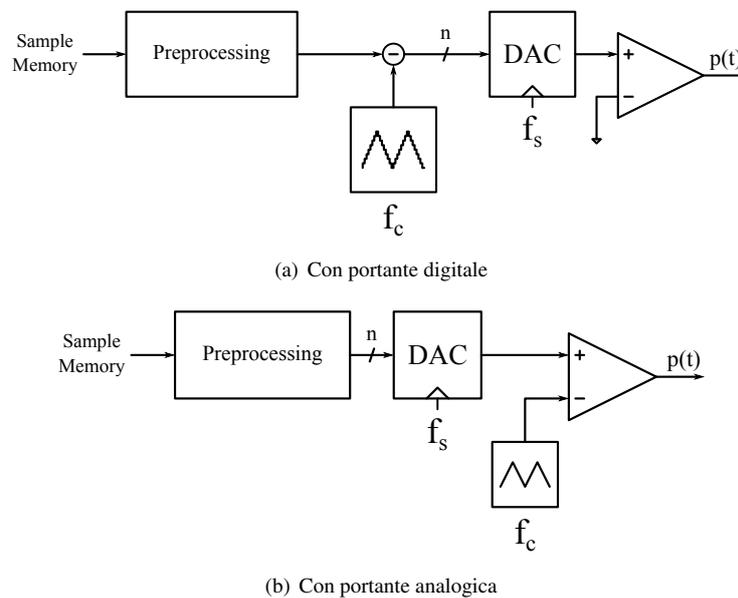


Figura 2.8: Modulatore PWM digitale-analogico

di calcolo con la risoluzione temporale infinita data dall'uso di un comparatore analogico ad alta precisione, così che l'uscita sia ancora a campionamento naturale. In entrambi i casi il segnale modulante è elaborato da una cascata di interpolatori digitali (e relativi filtri elimina-immagini) che ne effettuano il sovracampionamento.

- Nel caso a portante digitale (Fig. 2.8(a)) $c(n)$ triangolare è sintetizzata numericamente: il segnale all'ingresso del DAC $\Sigma\Delta$ è la sequenza $g(n) = s(n) - c(n)$. Di tale sequenza si osserva che la banda è determinata dalla $c(n)$ a frequenza fondamentale $f_c \ll f_s$: per una buona approssimazione dell'onda triangolare $c(t)$ è necessario un DAC a frequenze elevate (Eq. (1.4)). Infine, l'approssimazione del caso analogico (ad infiniti livelli di quantizzazione) è tanto migliore quanto più alto il numero n di bit.
- Nel caso a portante analogica (Fig. 2.8(b)) $c(t)$ è generata da un oscillatore analogico ad alta precisione: seppure il consumo di potenza per generare la portante sia maggiore, la banda che il DAC deve sintetizzare è inferiore ad f_c e quindi si può operare a frequenza f_s minore, o produrre a parità di f_s un segnale d'uscita $s(t)$ con un SNR più elevato.

Si noti che in tutti i DAC riportati è considerato il circuito di ZOH ideale di periodo T ed un filtro passa basso anti-imaging analogico (Sez. 1.1.3).

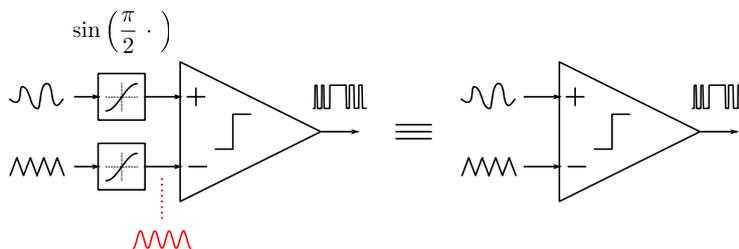


Figura 2.9: Schema concettuale della relazione fra trasformazione non lineare e funzione segno

2.2.1 Trasformazioni non lineari e segnali PWM

Si consideri uno schema di generazione analogica del segnale PWM $p(t)$ con $s(t), c(t) \in [-1, 1]$; si ricorda che $p(t) = \text{sign}(s(t) - c(t))$ e che le transizioni di $p(t)$ corrispondono agli istanti in cui

$$s(t^*) = c(t^*)$$

Applicando un generico operatore distorsione non lineare $D[\cdot]$ ad entrambi i lati dell'uguaglianza

$$D[s(t^*)] = D[c(t^*)]$$

1. Una distorsione pari è tale che $D[x] = D[-x]$, ma così facendo si perde l'informazione sul segno di $x \in [-1, 1]$
2. una distorsione dispari è tale che $D[x] = -D[-x]$ per cui è preservato il segno di x , ovvero $D[\cdot]$ è invariante rispetto alla funzione $\text{sign}(\cdot)$.

Quindi se $D[\cdot]$ dispari è applicata ugualmente a $c(t)$ e $s(t)$, il segnale PWM

$$p(t) = \text{sign}(s(t) - c(t)) \equiv \text{sign}(D[s(t)] - D[c(t)])$$

perché gli istanti di transizione non sono spostati per effetto di $D[\cdot]$.

L'applicazione di una non linearità su $s(t)$ di cui non è noto a priori lo spettro $S(f)$ ne aumenta in generale l'occupazione di banda; è possibile dimostrare che applicando una particolare non linearità al segnale portante triangolare $c(t)$ il suo sviluppo in serie di Fourier (1.4) si semplifica ad un solo termine centrato sulla frequenza fondamentale f_c .

Di tutte le non linearità dispari possibili si sceglie l'unica funzione per cui lo spettro di $c(t)$ triangolare è ridotto ad un singolo tono; sia

$$D[x] = \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right), \quad x \in [-1, 1]$$

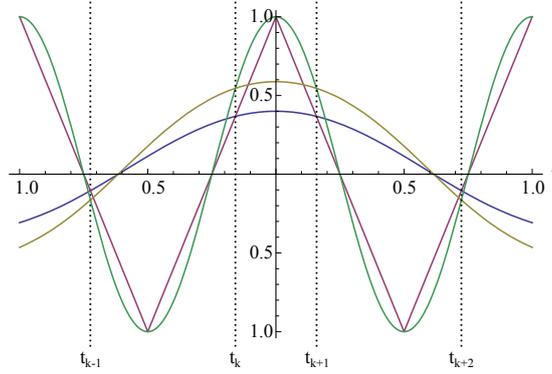
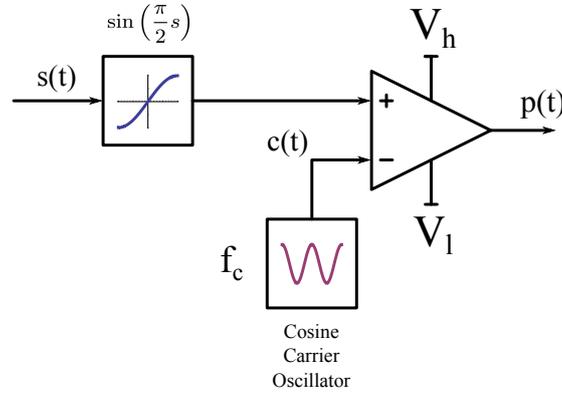

 Figura 2.10: Confronto fra $s(t)$, $c(t)$ (blu-viola) e $\sin\left(\frac{\pi}{2}s(t)\right)$, $\cos(2\pi t)$ (giallo-verde)


Figura 2.11: Modulatore PWM analogico a portante sinusoidale, con distorsione a ramo di senoide

allora da (1.3)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}c(t)\right) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}(-1 + 4(t - k))\right) = \sin\left(2\pi(t - k) - \frac{\pi}{2}\right) & k \leq t < k + \frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}(-1 + 4(t - k))\right) = \sin\left(-2\pi(t - k) - \frac{\pi}{2}\right) & k - \frac{1}{2} \leq t < k \end{cases}$$

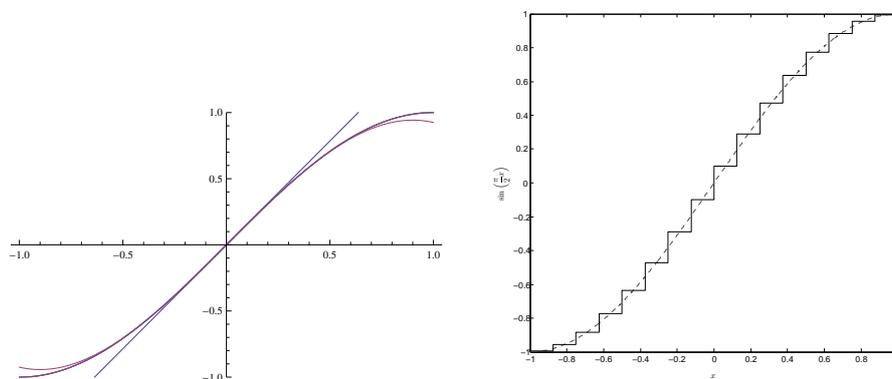
$$= \cos(2\pi(t - k)), \forall k \in \mathbb{Z}$$

per cui se la portante è generata a frequenza f_c

$$s(t^*) - c(f_c t^*) = \sin\left(\frac{\pi}{2}s(t^*)\right) - \cos(2\pi f_c t^*) \quad (2.2)$$

negli istanti di transizione t^* (Fig. 2.10). Applicando $\text{sign}(\cdot)$ ad entrambi i lati ne risulta lo stesso segnale PWM $p(t)$ (Fig. 2.11).

Un'implementazione della non linearità a ramo di senoide analogica è ricavabile, a meno del fattore di guadagno $\frac{\pi}{2}$, dal circuito discusso in [33]. A causa dei vincoli



(a) Troncamento dello sviluppo in serie di potenze (b) Approssimazione con lookup table ad $l = 4$ bit per $k = 1, 3, 5, \dots$

Figura 2.12: Approssimazioni di $\sin\left(\frac{\pi}{2}s\right)$

Ordine	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
Ampiezza	3.92	-3.80	-21.97	-46.59	-75.89	-108.88	-144.89	-183.49	-224.34	-267.18	-311.80
Ampiezza a -10 dB	-6.0776	-33.7958	-71.9716	-116.5918	-165.8937	-218.8767	-274.8944	-333.494	-394.3406	-457.1763	-521.7965
Ampiezza a -20 dB	-16.0776	-63.7958	-121.9716	-186.5918	-255.8937	-328.8767	-404.8944	-483.494	-564.3406	-647.1763	-731.7965

Tabella 2.1: Ampiezza (dB) dei coefficienti dello sviluppo in serie di potenze di $\sin\left(\frac{\pi}{2}s\right)$

di precisione necessari affinché la (2.2) sia verificata si esclude questo approccio dalle successive valutazioni.

L'implementazione digitale di $\sin\left(\frac{\pi}{2}s\right)$ dipende dall'architettura dell'elaboratore utilizzato: nei processori più semplici (i. e. in cui non è disponibile un moltiplicatore hardware, ovvero microcontrollori e celle elementari di FPGA) si fa uso di CORDIC [34] che sintetizza le funzioni trigonometriche di base con somme, sottrazioni, bit shift e lettura da una tabella di valori (lookup table, LUT). Qualora sia disponibile un moltiplicatore hardware efficiente l'algoritmo di calcolo ottimale in termini di risoluzione è il troncamento dello sviluppo in serie di potenze (1.7), ovvero l'approssimazione polinomiale del ramo di senoide (Fig. 2.12(a)). Le potenze dispari fino all'ordine $2n + 1$ possono essere calcolate con $s^{2n+1} = s \cdot \underbrace{s^2 \cdot \dots \cdot s^2}_n$ ovvero con $n + 2$ moltiplicazioni.

Se si opera su campioni ad l bit (2^l valori possibili), il metodo che richiede il minor numero di operazioni per svolgere il calcolo è il confronto con una lookup table. In particolare sfruttando la disparità di $\sin(x) = -\sin(-x)$ a fronte di 2^l valori in ingresso è necessario memorizzare 2^{l-1} valori di uscita (a meno del bit di segno, che è lo stesso dell'ingresso).

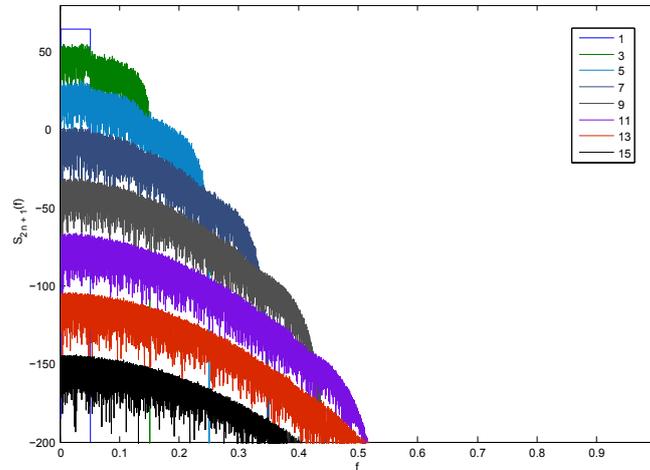


Figura 2.13: Spettro di $s(t)$ e di alcune $s^q(t)$ su un range di 260 dB

Dal punto di vista spettrale l'effetto della non linearità a ramo di sinusoidale è evidente dallo sviluppo

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}s(t)\right) = \frac{\pi}{2}s(t) - \frac{\pi^3}{8 \cdot 3!}s^3(t) + \frac{\pi^5}{32 \cdot 5!}s^5(t) + \dots \quad (2.3)$$

In sostanza ad $s(t)$ si sommano algebricamente le potenze dispari $s^{2n+1}(t)$ attenuate per i coefficienti $C_{2n+1} \sim \frac{1}{2n+1!}$. La banda dello spettro $S_{2n+1}(f)$ aumenta al crescere di n , ma il coefficiente C_{2n+1} fa sì che tale componente non lineare sia attenuata come in Tab. 2.1.

È rilevante notare che con $s(n)$ segnale digitale allora

1. Se $s(n)$ è campionato a $2f_m$ (Nyquist rate) prima della non linearità è necessaria un'interpolazione (upsampling) per evitare aliasing su s da parte delle potenze s^q del segnale (Fig. 2.13).
2. Se $s(n)$ non occupa tutto il range dinamico (i.e. non è a potenza massima, “full scale”) le potenze dispari sono fortemente attenuate (Tab. 2.1), raggiungendo in pochi ordini il floor di rumore di quantizzazione dato dalla precisione del calcolo. Per 16 bit in virgola fissa questo è posto a -98 dB (architetture DSP per segnali audio), per 64 bit in virgola mobile è posto a -313 dB (MATLAB). Di conseguenza, tanto minore il numero l di bit, quanto minore il numero di coefficienti significativi dello sviluppo (2.3).

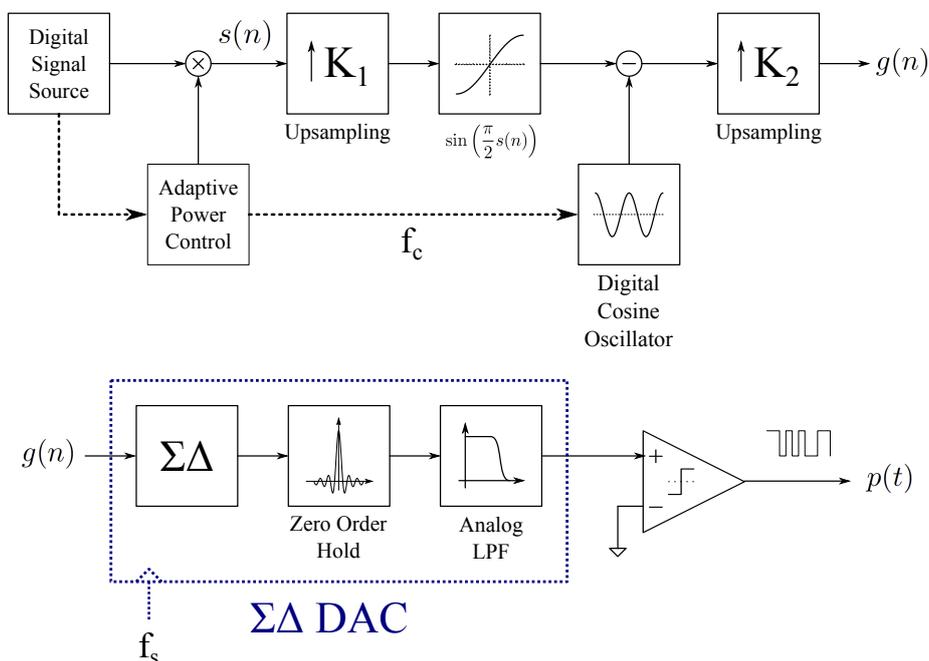


Figura 2.14: Schema a blocchi di un modulatore PWM digitale-analogico a frequenza f_c adattabile e portante sinusoidale

2.3 Modulatore PWM digitale-analogico a portante sinusoidale

Si introduce un modulatore PWM digitale-analogico che implementa i principi discussi:

1. l'idea che la frequenza f_c della portante $c(n)$ digitale non sia una costante, ma una variabile adattata alla potenza ed allo spettro del segnale d'ingresso;
2. l'uso della distorsione a ramo di sinusoide $\sin\left(\frac{\pi}{2}s(n)\right)$ su $s(n)$, così da operare il confronto con

$$c(n) = \cos\left(2\pi f_c \frac{n}{N}\right)$$

la cui sintesi numerica è semplice e precisa. Quindi il segnale in ingresso al DAC è $\Sigma\Delta$

$$g(n) = \sin\left(\frac{\pi}{2}s(n)\right) - \cos\left(2\pi f_c \frac{n}{N}\right)$$

Ad ogni elemento dello schema di Fig. 2.14 corrispondono scelte progettuali che dipendono dal segnale digitale $s(n)$ proveniente da un flusso di dati, e. g. l'uscita di un decodificatore audio per dispositivi portatili.

In particolare:

- Si devono dimensionare gli elementi di sovracampionamento di fattore K_1 e K_2 tali che il modulatore $\Sigma\Delta$ operi su una sequenza sovracampionata di $K = K_1 \cdot K_2$. Per l'implementazione dell'upsampling in un circuito reale è necessario introdurre filtri passa basso (LPF) digitali progettati per eliminare le $K - 1$ ripetizioni periodiche o immagini dello spettro in banda base introdotte dall'interpolazione. Si apre quindi un problema di filter design con trade-off fra complessità algoritmica, stabilità dello schema ed attenuazione delle immagini fuori banda.
- Il modulatore $\Sigma\Delta$ dev'essere progettato in base alla banda utile di $g(n)$ e K : va implementato il filtro digitale d'anello ed l numero di bit del quantizzatore/del segnale d'uscita, che determinano la caratteristica di noise shaping di ordine L ed il rumore di quantizzazione discussi in Sez. 1.2.
- Considerando l'uscita costante a tratti del DAC $\Sigma\Delta$ (zero order hold) si applica un LPF analogico dimensionato per avere banda passante $[0, f_c + \Delta f]$ con Δf tale da garantire spettro di ampiezza massimamente piatto e fase lineare. In particolare si considerano filtri a soli poli, il cui numero dipende da L per garantire l'attenuazione del rumore di quantizzazione fuori banda.
- Il comparatore analogico che termina lo schema opera su t non quantizzato; è richiesto un comparatore ad alto slew rate, progettato per operare a basso rumore e basso consumo (si considera il segnale PWM generato prima dello stadio driver).

Nello schema è riportata la stima della potenza del segnale $s(n)$ d'ingresso rispetto al segnale a range massimo, che nell'esempio di modulazione di un segnale audio digitale è un semplice controllo del volume. La riduzione della potenza di s attenua esponenzialmente le componenti non lineari s^q di Eq. (1.6), per cui l'ordine q della prima $S_q(f - f_c)$ (1.8) che interferisce con il segnale in banda base è progressivamente ridotto. È quindi possibile avvicinare progressivamente la frequenza f_c della portante alla frequenza massima f_m del segnale in banda base, preservandone il range dinamico inferiormente limitato dal rumore di quantizzazione. La misura di questo fenomeno, la modellazione e la simulazione numerica dello schema proposto ed il prototipo su FPGA di alcuni moduli sono discussi nei capitoli successivi.

3

MISURE, MODELLI NUMERICI E MODULATORI PWM

In questo capitolo si discutono

- alcune misure di laboratorio svolte su un modulatore PWM analogico che attestano la possibilità di ridurre f_c in adattamento alla potenza del segnale, a vantaggio del rendimento energetico del sistema;
- un modello MATLAB del modulatore PWM digitale-analogico ad alta efficienza che implementa i concetti introdotti nei capitoli precedenti;
- semplici metodi di stima dello spettro del segnale PWM t -continuo, che consentono di valutare le prestazioni teoriche dello schema implementato.

3.1 Misura dello spettro di un segnale PWM reale

Per studiare lo spettro del segnale PWM al variare di f_c si sono svolte alcune misure preliminari su un circuito reale equivalente allo schema di Fig. 1.16: la scheda riportata in Fig. 3.1 interfaccia due canali d'ingresso analogici al comparatore analogico Linear

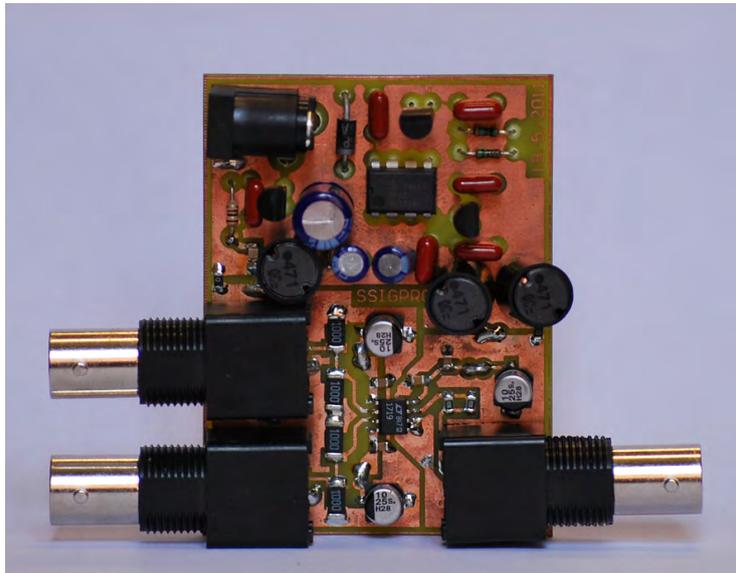


Figura 3.1: Scheda di valutazione per la generazione di un segnale PWM analogico

Technologies LT1719 caratterizzato da alto slew rate

$$SR = \max \left| \frac{dv_{\text{out}}(t)}{dt} \right| = 2 \frac{\text{V}}{\text{ns}}$$

e basso consumo di potenza [35]. Il circuito integrato ad alte prestazioni consente di operare misure sul segnale modulato PWM in uscita a transistori quasi ideali.

3.1.1 Generazione dei segnali d'ingresso

I segnali in ingresso al comparatore sono sintetizzati da

- Agilent 33220A: generatore di forma d'onda arbitraria a frequenza massima 20 MHz e DAC a 14 bit [36]
- Agilent 33250A: generatore di funzione a frequenza massima 80 MHz e DAC a 12 bit [37]

Entrambi i generatori adottano la direct digital synthesis (DDS, [38]) per sintetizzare forme d'onda ad alta precisione: per generare il segnale portante triangolare $c(t)$ si è scelto il generatore con DAC a 12 bit e un massimo di 200 MSPS*; per generare il segnale modulante $s(t)$ si è optato per il generatore con DAC a 14 bit e 50 MSPS.

Allo scopo di memorizzare il segnale modulante sul generatore Agilent 33220A si è interfacciato quest'ultimo a National Instruments LabView tramite la porta GPIB e

*Mega Samples per Second

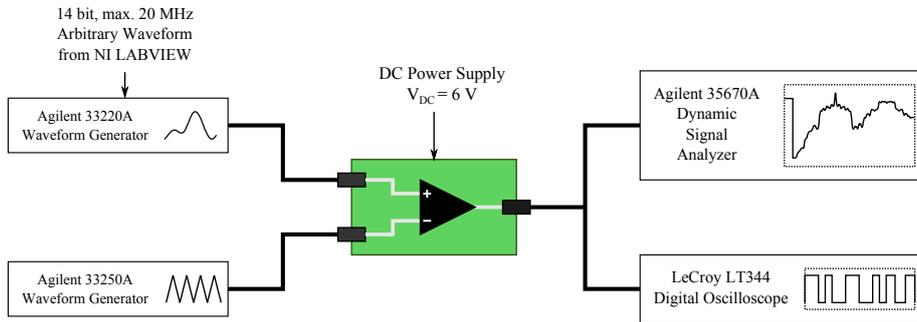


Figura 3.2: Setup di misura dello spettro di un segnale PWM analogico

la programmazione di un semplice virtual instrument (VI) (Fig. 3.4). Questo consente di trasferire allo strumento una sequenza di 65536 interi già quantizzata ad un massimo di 14 bit, che coincide con i 64 Kbyte di memoria non volatile disponibili per memorizzare segnali arbitrari.

Generazione del segnale modulante

Il segnale di prova convenzionalmente adottato per valutare le prestazioni degli amplificatori in classe D è il tono sinusoidale puro, che evidenzia le componenti di intermodulazione nate a causa della non linearità delle operazioni svolte sul segnale. Questo approccio non consente una vera stima del comportamento in banda del segnale di uscita; inoltre le intermodulazioni di una somma di toni sono a loro volta toni sinusoidali indistinguibili dalle componenti non distorte.

Come segnali di prova sono proposte sequenze pseudocasuali di campioni; i segnali sono progettati passa-basso a spettro piatto nella banda del segnale. Per ottenere questa proprietà si sintetizzano

1. Sequenza a spettro quasi piatto

$$s(n) = 2\nu_n - 1, \quad n = 1, \dots, N$$

con ν_n variabile aleatoria a PDF uniforme in $[0, 1]$

2. Sequenza a spettro perfettamente piatto

$$s(n) = \sum_{m=1}^{N/2} \cos\left(\frac{2\pi mn}{N} + \theta_m\right), \quad n = 1, \dots, N$$

con θ_m variabile aleatoria a PDF uniforme in $[0, 2\pi]$

Generati i campioni si introduce una ridondanza nella sequenza, che corrisponde ad un'interpolazione ideale di un fattore M ottenuta dalla Fast Fourier Transform (FFT)

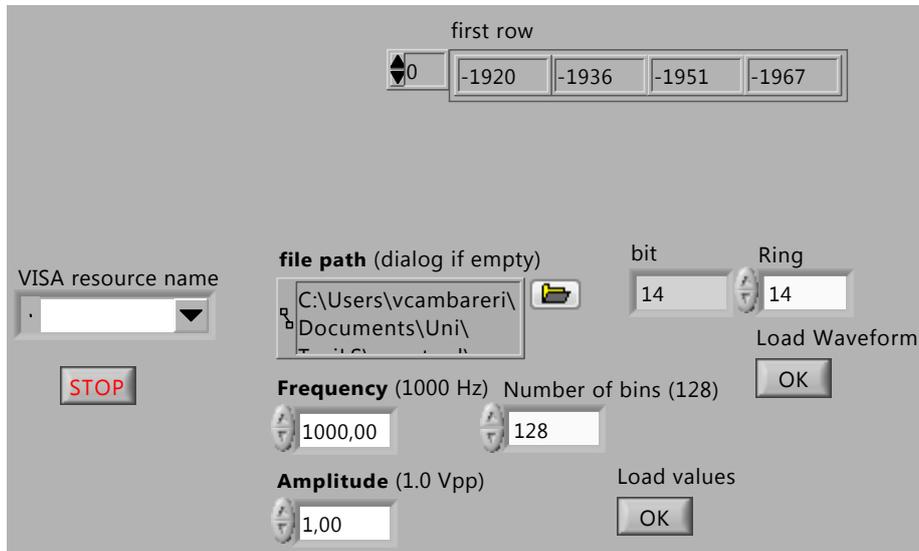


Figura 3.3: Interfaccia LabView del VI che controlla Agilent 33220a

di $s(n)$:

$$S(j) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n)e^{i2\pi\frac{n}{N}j}, \quad j = 0, \dots, N-1$$

il vettore interpolato alle FFT è

$$\bar{S} = \left[S(0), \dots, \frac{1}{2}S(N/2), \underbrace{0, \dots, 0}_{(M-1) \cdot N}, \frac{1}{2}S(N/2), \dots, S(N-1) \right]$$

di $M \cdot N$ elementi. La sequenza interpolata $s(n) \in [-1, 1]$, $n = 1, \dots, M \cdot N$ è la IFFT di \bar{S} ; per essere compatibile con le specifiche di Agilent 33220A, $s(n)$ è quantizzata ad interi a 14 bit con segno (nell'intervallo $[-2^{13}, 2^{13} - 1]$). Si assumono $N = 2^8$, $M = 2^8$ così che complessivamente siano caricati 2^{16} campioni nella memoria dello strumento.

Il segnale di prova è trasferito sul generatore grazie all'interfaccia di Fig. 3.3, sulla quale si imposta la frequenza di ripetizione periodica della sequenza, la quantizzazione dei valori fra 6 e 14 bit e la tensione picco-picco V_{pp} ; la riduzione di quest'ultima (con valore iniziale 1 V_{pp}) consente di simulare il calo di potenza P_s del segnale $s(t)$ in ingresso e di verificarne l'effetto sul segnale PWM. Si imposta la frequenza di ripetizione della sequenza affinché la frequenza massima del segnale sia $f_m = 5$ kHz. Con questo setup risulta lo spettro di Fig. 3.5.

3.1 MISURA DELLO SPETTRO DI UN SEGNALE PWM REALE

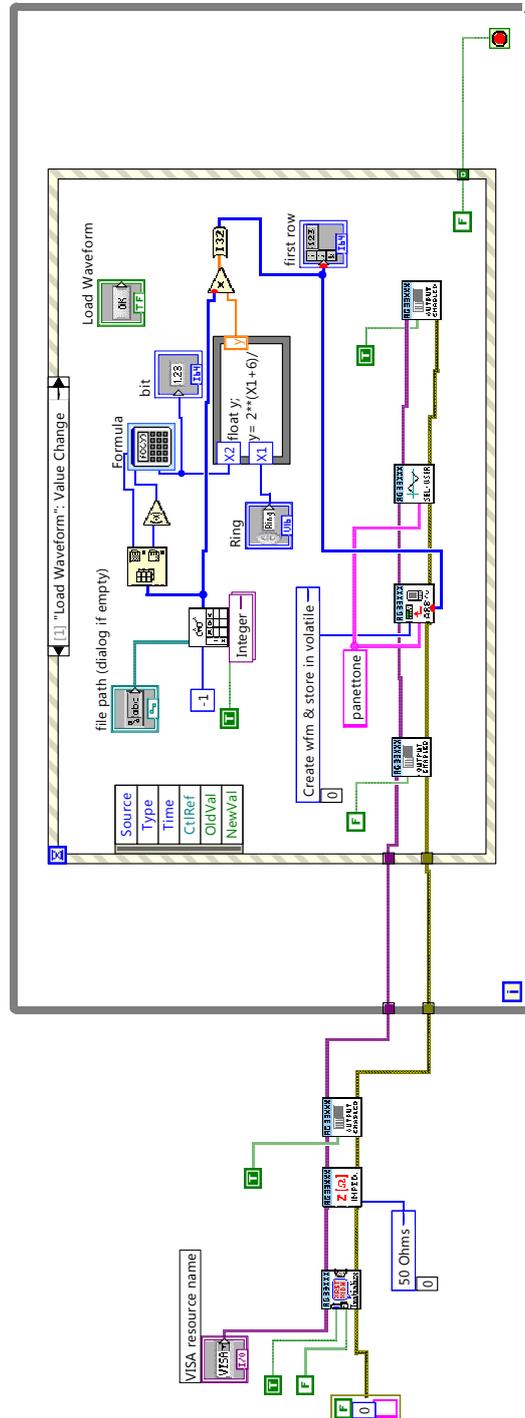


Figura 3.4: Schema a blocchi LabView del VI che controlla Agilent 33220a

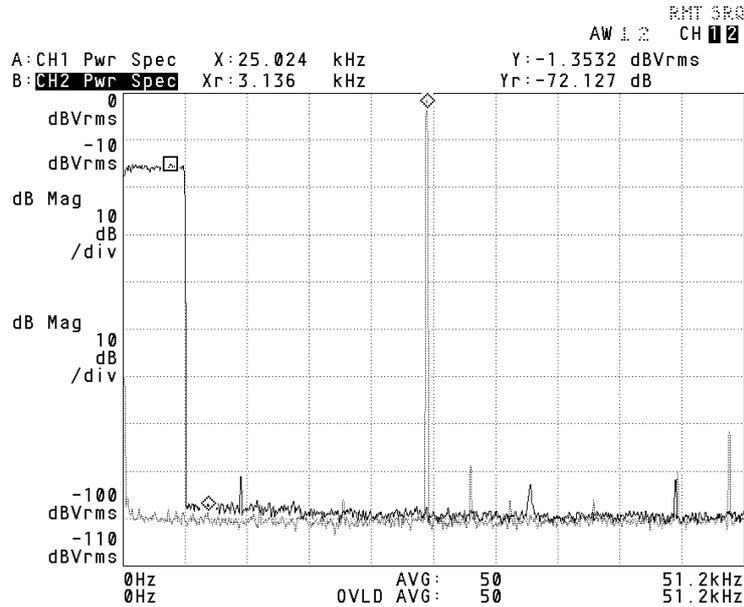


Figura 3.5: Spettro dei segnali modulante ($f_m = 5$ kHz) e portante ($f_c = 25$ kHz, tratteggiato); in alto a destra il range di -72.127 dB individuato dal marker sul segnale modulante

Generazione del segnale portante

Il segnale portante è generato configurando lo strumento Agilent 33250A direttamente dal pannello: si seleziona una forma d'onda Ramp con Symmetry = 50% (triangolare); Offset = 0 V_{DC}; Ampl = 1.000 V_{pp}; Freq = 50.000 kHz. Alla pressione del tasto Output il generatore emette sul connettore BNC d'uscita un'onda triangolare $c(t) \in [-1, 1]$ a $f_c = 50$ kHz.

3.1.2 Misure e risultati

L'obiettivo dei test è, come premesso, la stima dello spettro di un segnale PWM reale all'uscita di un comparatore analogico. Lo strumento usato a questo scopo è Agilent 36570A Dynamic Signal Analyzer [39, 40] che effettua la stima dello spettro di potenza con il metodo del periodogramma modificato [17]. L'analizzatore svolge una media di 50 osservazioni dello spettro (FFT) del segnale applicando una finestra mobile di tipo Flat Top [8] ed un overlap del 50% fra finestre adiacenti. Di seguito è riportata la configurazione dello strumento per riprodurre i risultati sperimentali; = indica un valore numerico, → una selezione da menù.

1. Si connette alla porta CH 1 l'uscita del circuito di Fig. 3.1. Da Inst Mode si abilita Channels→1;

2. si configura il tipo di analisi con Meas Data→Pwr Spec Channel 1;
3. si sceglie la scala logaritmica a 10 dB per divisione con:
Trace Coord→db Magnitude
4. per impostare il calcolo del periodogramma, si impostano nel menù Avg:
Average = ON, Number Averages = 50, Average Type = RMS,
Overlap Percent = 50%, Window→Flat Top.
5. la banda massima dell'analizzatore è 102.4 kHz: con il segnale d'ingresso a 5 kHz è sufficiente osservare il segnale fra [0, 51.2] kHz alla massima risoluzione possibile. Nel menù Freq si impostano:
Span = 51.2 kHz, Resolutn(Lines) = 1600

Per evincere informazioni sull'effetto della riduzione di potenza P_s del segnale in ingresso e frequenza f_c del segnale portante si individua il range dinamico fra il segnale di prova a spettro piatto e la somma dei disturbi che interferiscono con esso. Selezionando il Marker è possibile effettuare una misura

1. del range fra spettro dell'ingresso a potenza P_s variabile, floor di rumore e non linearità introdotte dalla modulazione PWM; in questo caso la metrica con cui si classificano le prestazioni del sistema è il rapporto segnale-interferenze (SIR o SINAD [7]).
2. della potenza dei disturbi in banda in rapporto alla potenza massima del segnale d'ingresso; in questo caso la metrica con cui si classificano le prestazioni del sistema è il range dinamico (DR [7]).

In Fig. 3.5 è riportata la misura dello spettro dei segnali $s(t), c(t)$ in ingresso al comparatore: dai marker si legge $SNR_s \simeq 72$ dB in contrasto con $SNR_s > 84.3$ dB atteso per un DAC a 14 bit (Agilent 33220A). Da questo divario fra valore teorico e valore osservato si suppone che al rumore di quantizzazione siano sommati altri contributi di rumore dovuti alle interconnessioni ed agli strumenti di misura.

Essendo il setup sperimentale connesso come in Fig. 3.2 è legittimo attendere un risultato ulteriormente degradato in SIR all'uscita del circuito PWM, in quanto i contributi di rumore osservati interagiscono in maniera non lineare nel comparatore.

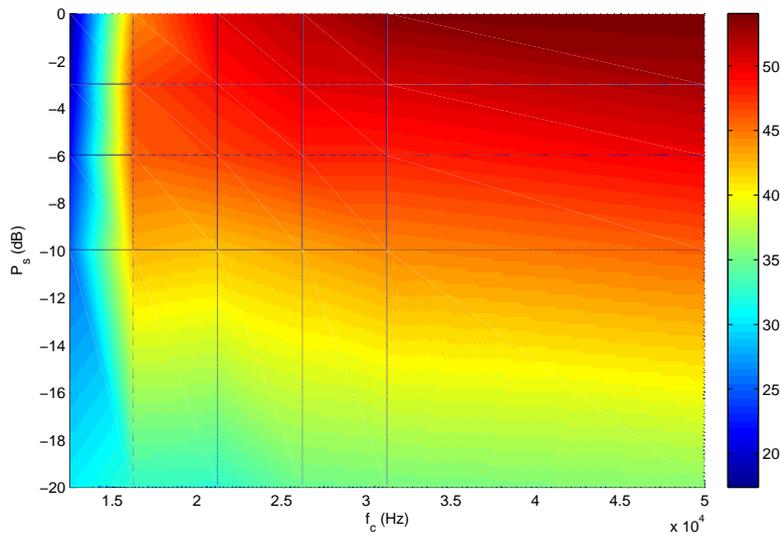
I risultati delle acquisizioni al variare di f_c e P_s sono riportati nelle Fig. 3.8-3.12 e riassunti in Fig. 3.6, 3.7 rispetto alle metriche definite.

Dai dati ottenuti (e.g. Fig. 3.8) è evidente il limite di qualità di queste osservazioni, che si manifesta come un elevato floor di rumore: questo fenomeno impedisce di apprezzare il comportamento delle non linearità dello spettro PWM oltre il termine

3. MISURE, MODELLI NUMERICI E MODULATORI PWM

f_c (kHz)	12.50	16.25	21.25	26.25	31.25	50.00
$P_s = 0$ dB	17.39	44.18	50.18	51.81	53.57	54.05
$P_s = -3$ dB	19.37	46.56	48.56	50.19	50.54	52.36
$P_s = -6$ dB	22.19	45.81	46.75	48.01	48.02	49.76
$P_s = -10$ dB	25.48	42.56	42.07	43.10	44.15	45.60
$P_s = -20$ dB	30.62	32.63	32.52	34.77	35.09	35.77

(a) Tabella dei valori misurati



(b) Piano dei valori misurati

Figura 3.6: SIR (dB) all'uscita del circuito PWM analogico al variare di f_c e P_s

$q = 4$ di Eq. (1.8). Il rumore maschera difatti tutti i termini pari e $q > 4$ centrati sull'armonica $m = 1$ del segnale portante.

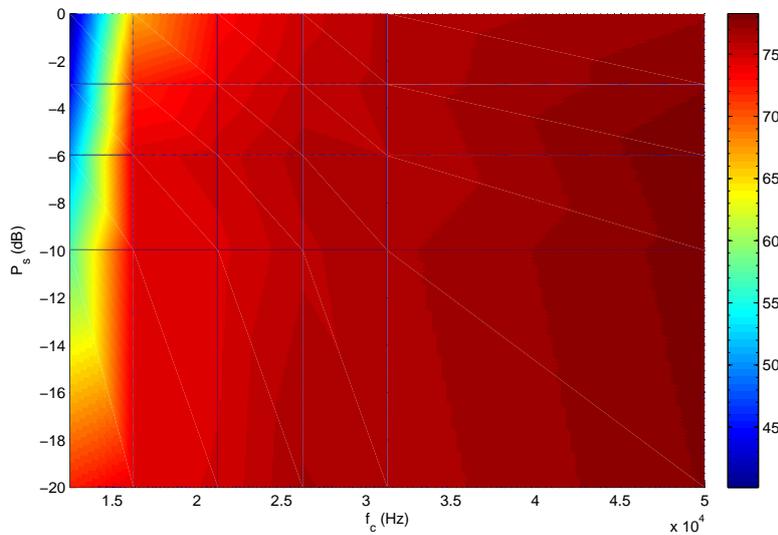
Nonostante i limiti del setup di generazione e misura è possibile osservare che le non linearità $S_2(f - f_c)$ ed $S_4(f - f_c)$ decadono rapidamente rispetto allo spettro $S(f)$ del segnale modulante. In particolare per $f_c = 3.25f_m$ (Fig. 3.8-3.12 (b)) si nota che già a $P_s = -6$ dB la S_4 è sepolta sotto il floor di rumore: ulteriori effetti di decadimento delle S_q dovuti al calo di P_s sono nascosti sotto di esso e quindi non osservabili.

Dai valori misurati e dal piano di Fig. 3.6(b) si desume che il floor di rumore vincola l'aumento del SIR, riducendo i vantaggi del calo non lineare della potenza delle $s^q(t)$. Il modello teorico di Eq. (1.8) è quindi verificato dai risultati sperimentali a meno del rumore, componente ineliminabile presente in ogni sistema fisicamente

3.1 MISURA DELLO SPETTRO DI UN SEGNALE PWM REALE

f_c (kHz)	12.50	16.25	21.25	26.25	31.25	50.00
$P_s = 0$ dB	40.15	66.67	73.04	75.04	76.04	77.04
$P_s = -3$ dB	44.44	72.03	74.07	75.48	76.11	77.66
$P_s = -6$ dB	50.61	74.38	74.98	76.16	75.87	78.27
$P_s = -10$ dB	57.43	74.16	74.50	75.76	76.34	78.00
$P_s = -20$ dB	72.27	74.48	74.77	76.57	76.08	77.74

(a) Tabella dei valori misurati



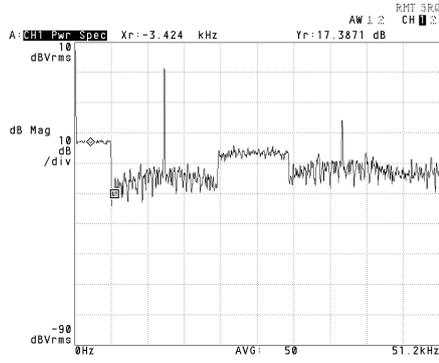
(b) Piano dei valori misurati

Figura 3.7: DR (dB) all'uscita del circuito PWM analogico al variare di f_c e P_s

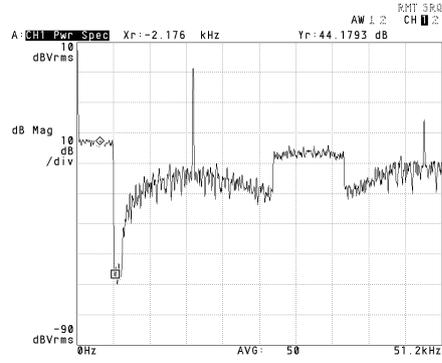
realizzabile.

Nel Cap. 2 sono stati introdotti alcuni modulatori PWM, di cui lo schema analogico è l'implementazione più semplice e meno robusta rispetto alle non idealità circuitali. Alcuni amplificatori in classe D moderni ad alte prestazioni fanno uso di modulatori PWM digitali con sintesi a DAC $\Sigma\Delta$ [6]: in linea con lo stato dell'arte si prosegue la trattazione progettando uno schema di modulazione PWM a sintesi digitale.

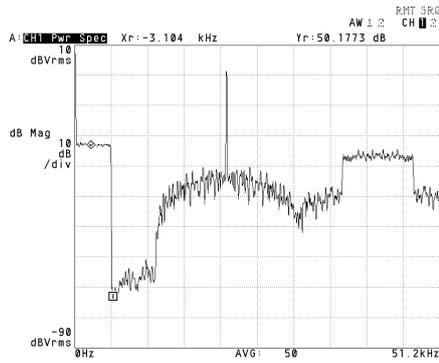
3. MISURE, MODELLI NUMERICI E MODULATORI PWM



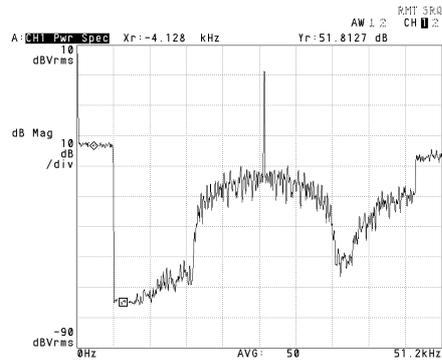
(a) $f_c = 12.50$ kHz



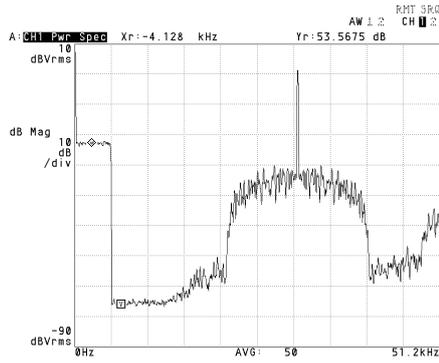
(b) $f_c = 16.25$ kHz



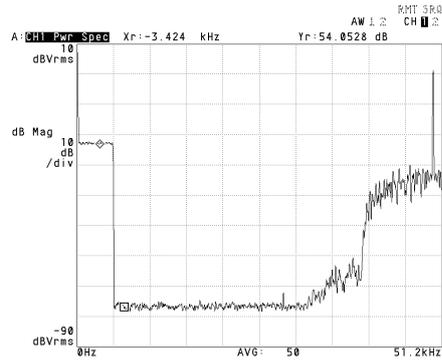
(c) $f_c = 21.25$ kHz



(d) $f_c = 26.25$ kHz



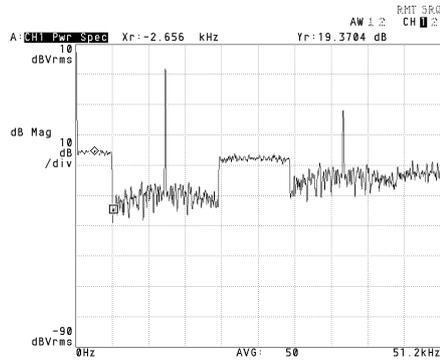
(e) $f_c = 31.25$ kHz



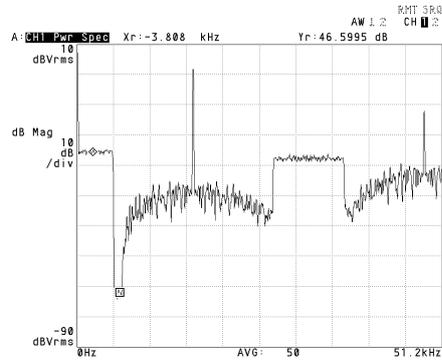
(f) $f_c = 50.00$ kHz

Figura 3.8: Segnale a $P_s = 0$ dB

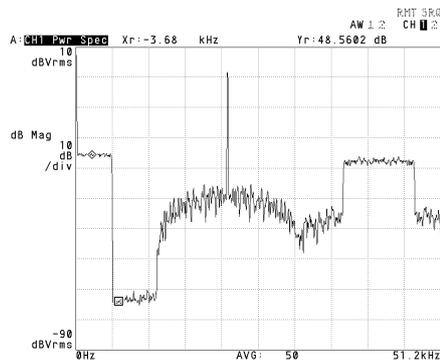
3.1 MISURA DELLO SPETTRO DI UN SEGNALE PWM REALE



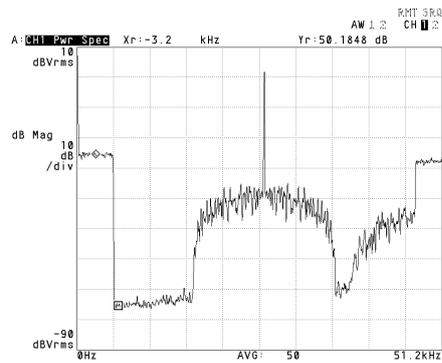
(a) $f_c = 12.50$ kHz



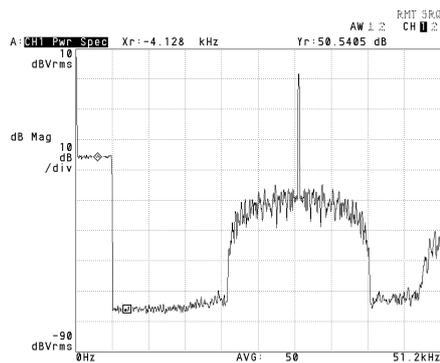
(b) $f_c = 16.25$ kHz



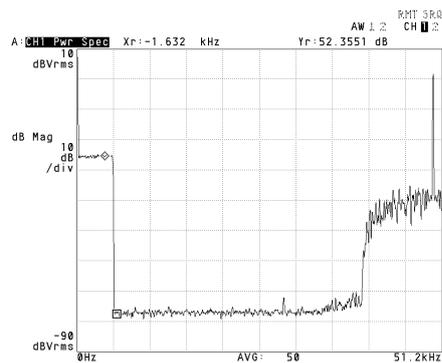
(c) $f_c = 21.25$ kHz



(d) $f_c = 26.25$ kHz



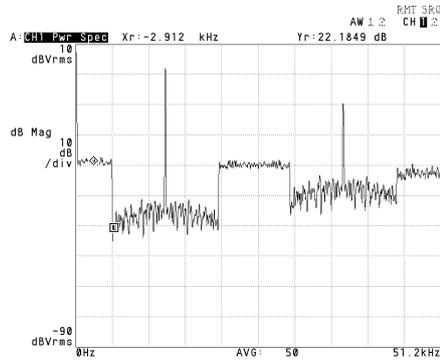
(e) $f_c = 31.25$ kHz



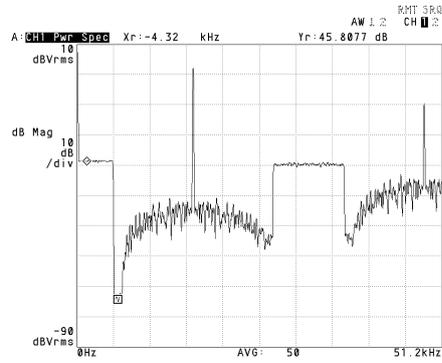
(f) $f_c = 50.00$ kHz

Figura 3.9: Segnale a $P_s = -3$ dB

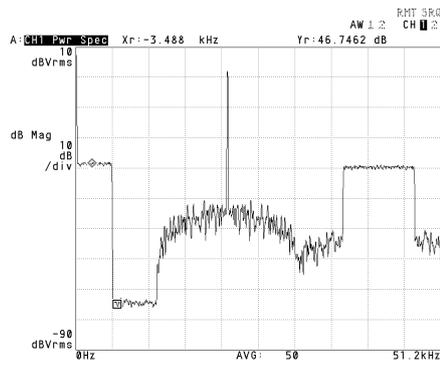
3. MISURE, MODELLI NUMERICI E MODULATORI PWM



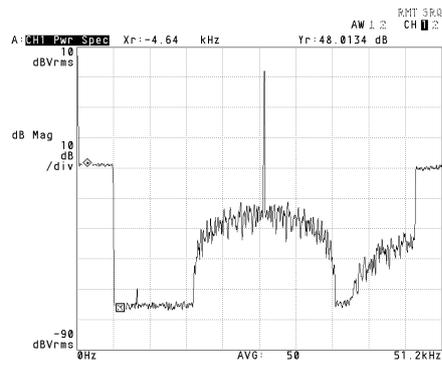
(a) $f_c = 12.50$ kHz



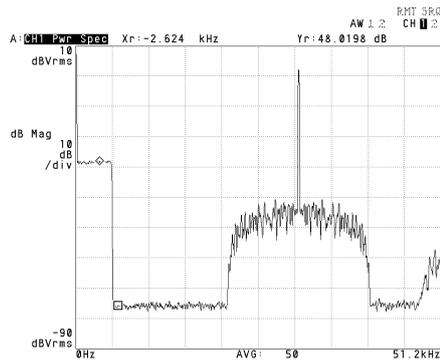
(b) $f_c = 16.25$ kHz



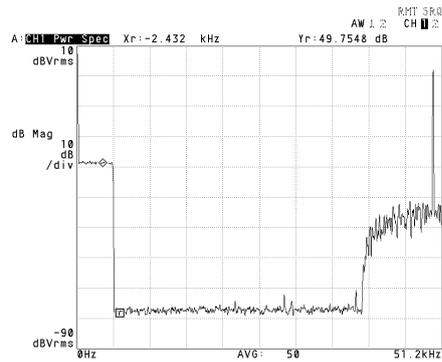
(c) $f_c = 21.25$ kHz



(d) $f_c = 26.25$ kHz



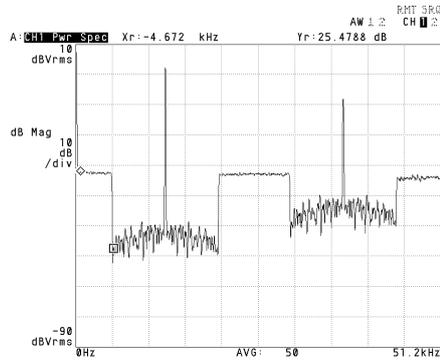
(e) $f_c = 31.25$ kHz



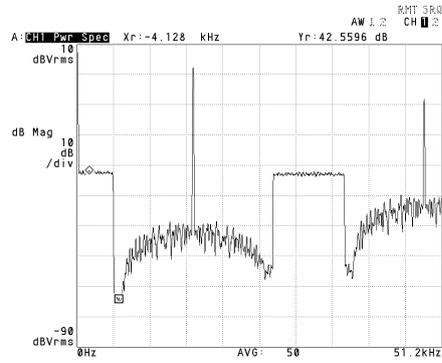
(f) $f_c = 50.00$ kHz

Figura 3.10: Segnale a $P_s = -6$ dB

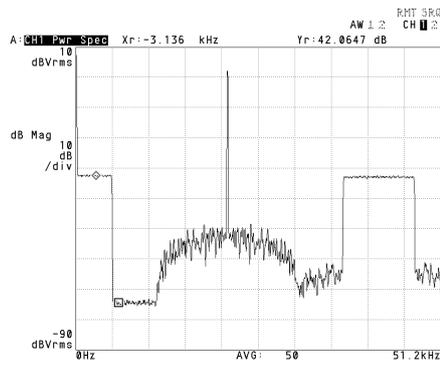
3.1 MISURA DELLO SPETTRO DI UN SEGNALE PWM REALE



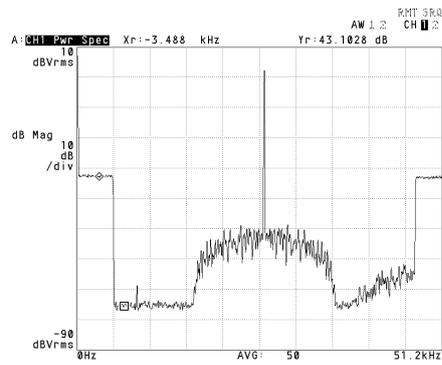
(a) $f_c = 12.50$ kHz



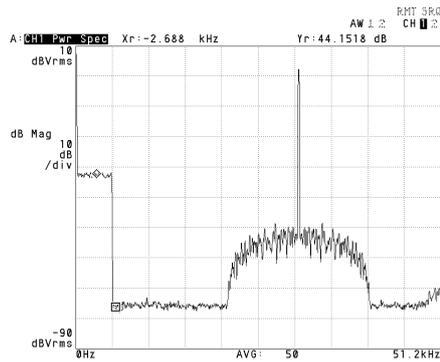
(b) $f_c = 16.25$ kHz



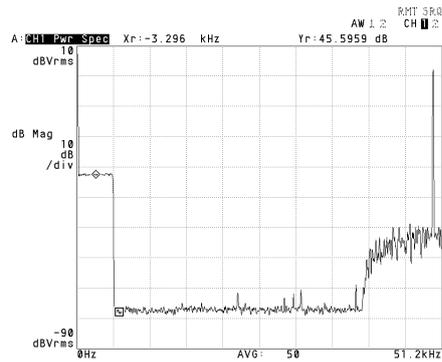
(c) $f_c = 21.25$ kHz



(d) $f_c = 26.25$ kHz



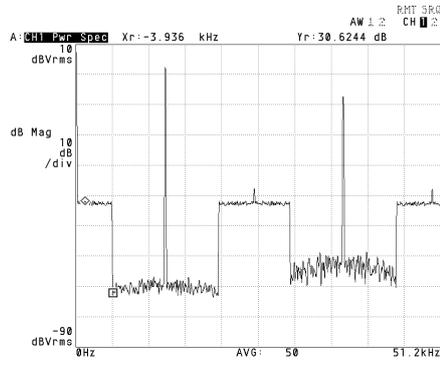
(e) $f_c = 31.25$ kHz



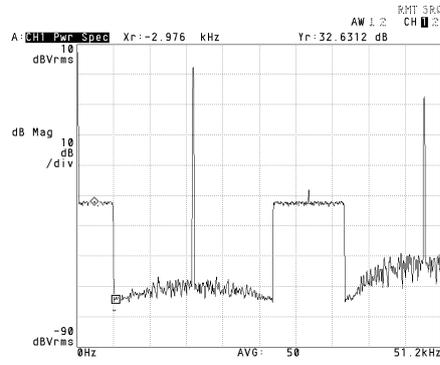
(f) $f_c = 50.00$ kHz

Figura 3.11: Segnale a $P_s = -10$ dB

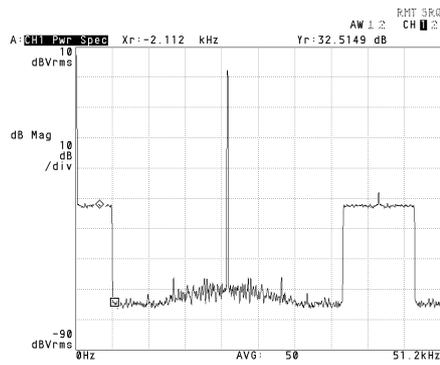
3. MISURE, MODELLI NUMERICI E MODULATORI PWM



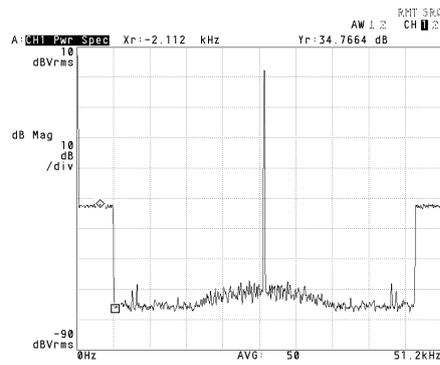
(a) $f_c = 12.50$ kHz



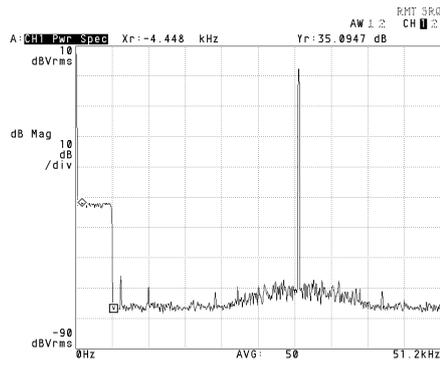
(b) $f_c = 16.25$ kHz



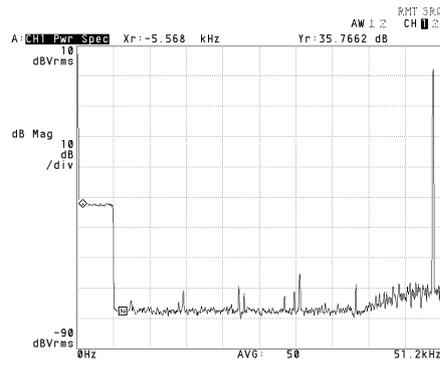
(c) $f_c = 21.25$ kHz



(d) $f_c = 26.25$ kHz



(e) $f_c = 31.25$ kHz



(f) $f_c = 50.00$ kHz

Figura 3.12: Segnale a $P_s = -20$ dB

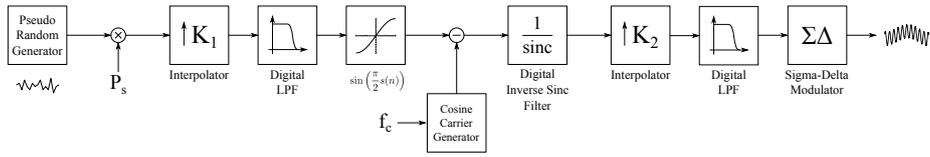


Figura 3.13: Schema a blocchi della parte digitale del modulatore PWM implementato

3.2 Modello MATLAB del modulatore PWM

I risultati riportati nel paragrafo precedente dimostrano che il modello dello spettro e l'ottimizzazione proposta - che sfrutta il decadimento spettrale rapido delle non linearità $s^q(t)$ rispetto ad $s(t)$ - sono validi e attuabili. La riduzione di f_c è possibile se sono disponibili filtri a banda di transizione ripida all'uscita dell'amplificatore in classe D, volti ad eliminare le non linearità in $f \geq f_m$.

Si procede con un modello numerico sviluppato in MATLAB che consente di simulare le prestazioni teoriche del segnale PWM al variare di P_s e f_c . Il modello implementa le considerazioni di Sez. 2.3 in un sistema digitale; la parte analogica del sistema è invece trattata come un insieme di informazioni che legano la sequenza t -discreta e quantizzata in uscita dal DAC allo spettro del segnale PWM t -continuo risultante da Eq. (1.10). Tutti i riferimenti di codice riportati di seguito sono script e funzioni implementate o integrate nell'ambiente MATLAB.

3.2.1 Schema a blocchi del sistema digitale

Lo schema a blocchi implementato e simulato è riportato in Fig. 3.13: la parte digitale del modulatore sintetizza, a partire da una sequenza di campioni pseudocasuale $s(n)$, una sequenza quantizzata di campioni $g(n)$ in uscita dal modulatore $\Sigma\Delta$. Rispetto allo schema di Fig. 2.14 è evidenziata la necessità di progettare tre filtri digitali:

1. due filtri anti-imaging che attenuino le $K_{1,2} - 1$ immagini introdotte dagli interpolatori a rate K_1 e K_2 ;
2. un filtro FIR che precompensa l'effetto in frequenza dello Zero Order Hold all'uscita (Eq. (1.2)).

Altrettanto critico è il progetto del modulatore $\Sigma\Delta$, per il quale si scelgono specifiche sovradimensionate (numero di bit e anello di ordine elevato). Di seguito sono esposti i criteri con cui si è dimensionato e simulato il sistema.

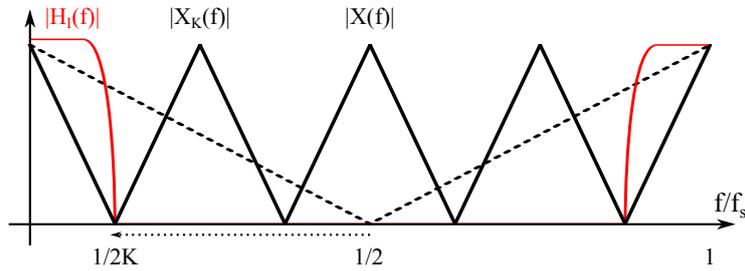


Figura 3.14: Effetto dell'interpolazione a rate K : spettro del segnale d'ingresso ($X(f)$, tratteggiato), segnale sovracampionato ($X_K(f)$) e maschera del filtro anti-imaging ($H_I(f)$)

Generazione dei segnali

La generazione del segnale di prova è identica a quella adottata nelle misure precedenti: si richiama

$$s(n) = \sum_{m=1}^{N/2} \cos\left(\frac{2\pi mn}{N} + \theta_m\right), \quad n = 1, \dots, N \quad (3.1)$$

Nel codice l'aleatorietà di $\theta_m \in [0, 2\pi]$ è simulata con `rand(1, N/2-1) * 2 * pi`; il codice implementa direttamente la (3.1). Nelle simulazioni si sono scelti $N = \{2^8, \dots, 2^{12}\}$ potenze di due. Per valutare le prestazioni a regime del sistema si ripete periodicamente la sequenza Q volte. Per ulteriori dettagli si veda App. A.1.1.

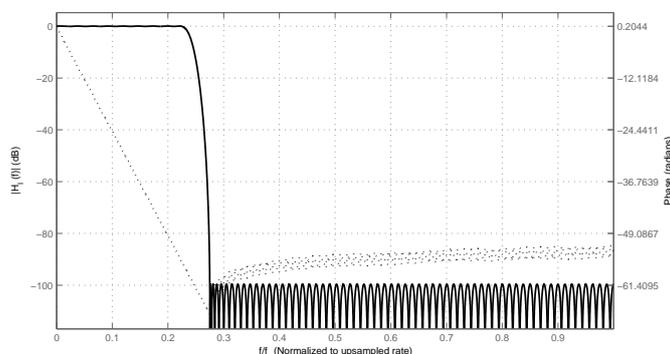
Interpolatori e filtri digitali anti-imaging

La necessità degli interpolatori è dovuta in primis al fatto che il modulatore $\Sigma\Delta$ opera su sequenze sovracampionate ad un rate $K = K_1 \cdot K_2$, ed in secondo luogo al fatto che la non linearità $\sin\left(\frac{\pi}{2} x\right)$ espande la banda del segnale; si rende quindi necessario dividere il sovracampionamento in due interpolatori, di cui il più critico è il primo (rate K_1) mentre il secondo (rate K_2) completa l'upsampling.

Dal punto di vista operativo è noto che l'interpolazione di un generico fattore K è svolta inserendo $K - 1$ zeri fra un campione e l'altro [8] e che questa dilatazione nel tempo causa una compressione in frequenza, i.e. l'introduzione senza aliasing di $K - 1$ ripetizioni dello spettro in banda come evidenzia la Fig. 3.14 per $K = 4$. Si pone quindi il problema di progetto di un filtro digitale passa-basso: se $f_s = 1$ è la frequenza di campionamento del segnale d'ingresso, il filtro deve avere frequenza di taglio $\frac{1}{2K}$ a fronte di un'interpolazione a rate K . In banda passante $[0, \frac{1}{2K}]$ il filtro dev'essere idealmente

$$H_I(f) = 1, \quad f \in \left[0, \frac{1}{2K}\right]$$

mentre fuori dalla banda utile si deve avere attenuazione A_{stop} tale da garantire che l'effetto delle immagini sia trascurabile all'ingresso della $\sin\left(\frac{\pi}{2} x\right)$ e all'ingresso del DAC $\Sigma\Delta$, e.g. $A_{\text{stop}} = -100$ dB.


 Figura 3.15: Filtro anti-imaging di ordine $L = 158$ per $K_2 = 2^2$: ampiezza e fase (tratteggiato)

	K_1	K_2
Upsampling Rate	64	4
L (firpm)	2519	158

Tabella 3.1: Caratteristiche degli interpolatori utilizzati

Nel progetto concorrono quindi attenuazione fuori banda, ripple in banda passante, linearità di fase, ordine del filtro, stabilità (se IIR) e complessità della realizzazione hardware. In questa sede è particolarmente importante realizzare il filtraggio a fase lineare, con forte attenuazione fuori banda e banda di transizione stretta. Si ricorre all'algoritmo di Parks-McClellan per la sintesi di un filtro FIR equiripple a fase lineare [41] specificando

$$\text{Passband Ripple} : \delta_p = 0.1 \text{ dB}$$

$$\text{Stopband Ripple} : \delta_s = -100 \text{ dB}$$

$$\text{Passband Frequency} : f_{\text{pass}} = \frac{0.45 f_s}{K}$$

$$\text{Stopband Frequency} : f_{\text{stop}} = \frac{0.55 f_s}{K}$$

Un filtro FIR con queste specifiche ha un numero di coefficienti elevato che cresce rapidamente con il rate K a causa della banda di transizione $f_{\text{stop}} - f_{\text{pass}} = 0.1 f_s / K$. Una stima dell'ordine L minimo con il metodo `firpmord` restituisce i valori di Tab. 3.1: in Fig. 3.15 ne è riportato un esempio.

Per rilassare le specifiche dei filtri anti-imaging è possibile fattorizzare i rate di sovracampionamento K_i in più stadi, e.g. $K_i = K_{i,1} \cdot K_{i,2} \cdot \dots$ ed interporre fra questi dei filtri meno ripidi e quindi meno complessi. Nell'ambito di questa tesi l'efficienza d'implementazione dei filtri è d'interesse secondario, quindi non si entra nel merito dell'ottimizzazione dei filtri: nello schema sono simulati due interpolatori con le caratteristiche di Tab. 3.1.

Distorsione a ramo di senoide e portante sinusoidale

In Sez. 2.2.1 si è discussa la non linearità a $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ di cui l'implementazione in linguaggi ad alto livello è immediata. Nel codice sviluppato questa e la sottrazione della portante sono svolte nella funzione `pulseModulation` (App. A.1.3).

- La non linearità è $\sin(0.5*\pi*signal)$ se il segnale è $s(n) \in [-1,1]$, viceversa è necessario scalare $\max(abs(signal))$ del segnale affinché sia minore di 1.
- La portante digitale oscilla a frequenza $f_c = Rf_m$; per $f_m = \frac{1}{2}$ e considerando l'upsampling iniziale a rate K_1 (Fig. 3.13) si sottrae al segnale la

$$c(n) = \cos\left(2\pi\frac{R}{2}\frac{n}{K_2}\right), n = 0, \dots, K_1 \cdot N - 1$$

A seconda dell'espansione di banda causata dalla non linearità si regola il fattore di upsampling $K_1 > K_2$, e.g. $K_1 = 2^6$ per cui non vi è aliasing apprezzabile nella FFT della sequenza.

Compensazione della Sinc

In Eq. (1.2) si è dimostrato che un DAC con Zero Order Hold non ha risposta in frequenza piatta: da qui la necessità di compensare $|G(f)| = |\text{sinc}(fT)|$ con un filtro FIR $H_{SC}(z)$ progettato affinché nella banda del segnale $B = \left[0, \frac{1}{2K}\right]$ valga

$$|H_{SC}(f)| \simeq \frac{1}{|G(f)|} = \frac{1}{|\text{sinc}(fT)|}, f \in B$$

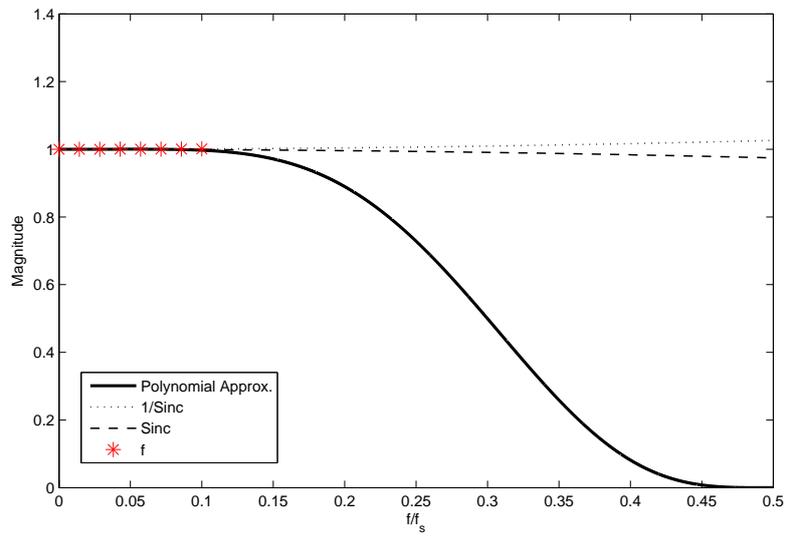
che dà risposta complessivamente piatta fra ZOH e filtro compensatore.

Per progettare il filtro:

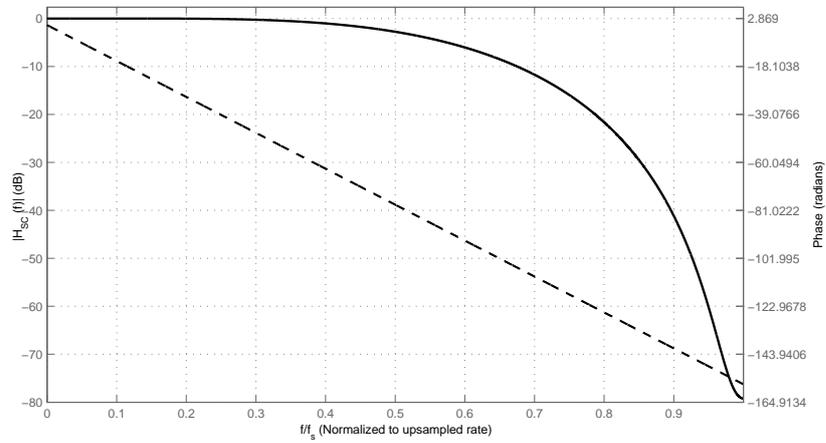
1. Si sceglie un asse discretizzato di $m + 1$ frequenze $\bar{f} = (0, f_1, f_2, \dots, f_m)$ rispetto al rate $K_1 K_2$ dell'uscita;
2. Si calcolano i valori di $\frac{1}{|G(f)|}$ al rate corrente del segnale rispetto all'uscita, ovvero

$$\bar{I} = \frac{1}{\left|\text{sinc}\left(\bar{f}\frac{1}{K_2}\right)\right|} = (1, I_1, I_2, \dots, I_m)$$

3. Sulla coppia (\bar{I}, \bar{f}) si costruisce un'approssimazione polinomiale di ordine n [42] che corrisponde alla risoluzione del sistema di equazioni lineari (matrice di



(a) Approssimante polinomiale di $\frac{1}{\text{sinc}}$



(b) Risposte di ampiezza e fase del filtro FIR

Figura 3.16: Progetto del filtro compensatore

Vandermonde)

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ f_1^n & \dots & f_1^2 & f_1^1 & 1 \\ f_2^n & \dots & f_2^2 & f_2^1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 1 \\ f_m^n & \dots & f_m^2 & f_m^1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_n \\ w_{n-1} \\ \vdots \\ w_1 \\ w_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

a cui si aggiungono le d condizioni alle derivate nei due estremi $\{f_0, f_{\frac{1}{2}}\}$ dell'asse delle frequenze normalizzato

$$\begin{bmatrix} (f_0^{(1)})^n & \dots & (f_0^{(1)})^2 & f_0^{(1)} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 1 \\ (f_0^{(d)})^n & \dots & (f_0^{(d)})^2 & f_0^{(d)} & 1 \\ (f_{\frac{1}{2}}^{(1)})^n & \dots & (f_{\frac{1}{2}}^{(1)})^2 & f_{\frac{1}{2}}^{(1)} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 1 \\ (f_{\frac{1}{2}}^{(d)})^n & \dots & (f_{\frac{1}{2}}^{(d)})^2 & f_{\frac{1}{2}}^{(d)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_n \\ w_{n-1} \\ \vdots \\ w_1 \\ w_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0^{(1)} \\ \vdots \\ I_0^{(d)} \\ I_{\frac{1}{2}}^{(1)} \\ \vdots \\ I_{\frac{1}{2}}^{(d)} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

4. Dalla risoluzione del sistema tramite fattorizzazione QR [42] si ottiene un vettore di coefficienti $\bar{w} = (w_0, w_1, \dots, w_n)$ della polinomiale approssimante la funzione desiderata (Fig. 3.16(a)). Il calcolo della polinomiale in f su un insieme discreto di frequenze consente di determinare la risposta desiderata per il progetto di un filtro FIR. Dalla risposta in frequenza si ottiene la risposta all'impulso (IR) applicando la IFFT.
5. L'IR è troncato applicando una funzione finestra di tipo Kaiser [8] ed ordine L : si ottengono così i coefficienti del filtro compensatore. Il risultato di questo progetto per $L = 96$ è riportato in Fig. 3.16(b).

Modulatore Sigma Delta

Il modulatore Sigma Delta è posto a valle di un upsampling complessivo $K = 256$. In linea con le specifiche scelte per gli altri blocchi sul flusso di segnale si sceglie un modulatore $\Sigma\Delta$ con quantizzatore a $b = 8$ bit (i.e. ad alta risoluzione). Il filtro d'anello è di ordine 5 ed ha NTF progettata ad-hoc mediante il Delta Sigma Toolbox [43]: in particolare si progetta la NTF passa alto con frequenza di taglio

$$f_{\text{NTF}} = (1 + \varepsilon)f_{c,\text{max}}$$

con ε margine arbitrario, affinché il rumore sia enfatizzato per $f > f_{\text{NTF}}$ e fortemente attenuato nella banda utile del segnale (Fig. 3.17). Al crescere del numero di livelli del

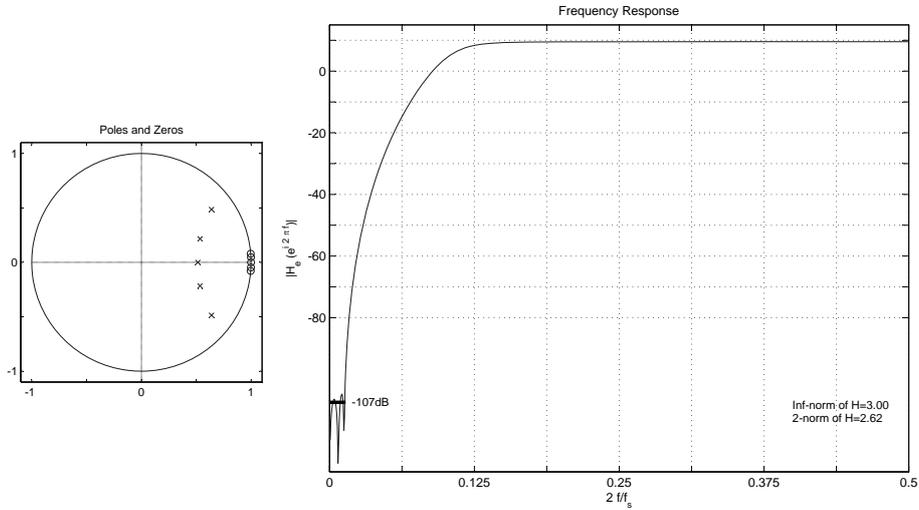


Figura 3.17: Noise transfer function di ordine 5

quantizzatore diminuisce la potenza del rumore iniettato nell'anello di retroazione, ed è quindi garantita la stabilità del modulatore.

3.2.2 Modello funzionale dell'elaborazione analogica

Sia $g(n)$ una successione di campioni emessi dal modulatore $\Sigma\Delta$: l'uscita del sistema digitale è elaborata da due sistemi LTI analogici come indicato in Fig. 3.18. Sia $h_S(t)$ risposta all'impulso del ZOH e $h_L(t)$ risposta di un generico filtro di ricostruzione causale e analogico. Date

$$h_S(t) = \chi_{[0,T]}(t)$$

$$h_L(t) = H(t)\beta(t)$$

$$H(t) = \chi_{[0,+\infty)}(t)$$

allora

$$f(t) = h_S(t) * h_L(t)$$

dove $\beta(t)$ è l'antitrasformata di Laplace di una funzione razionale fratta a poli reali o complessi coniugati.

La convoluzione è risolta integrando in ξ , con $h_S(\xi)$ a supporto compatto e $h_L(t - \xi)$ a supporto in generale illimitato. Si ottiene

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \text{ supporti disgiunti} \\ \int_0^t \beta(t - \xi)d\xi & 0 \leq t \leq T \text{ supporti parzialmente congiunti} \\ \int_0^T \beta(t - \xi)d\xi & T < t \text{ supporti completamente congiunti} \end{cases}$$

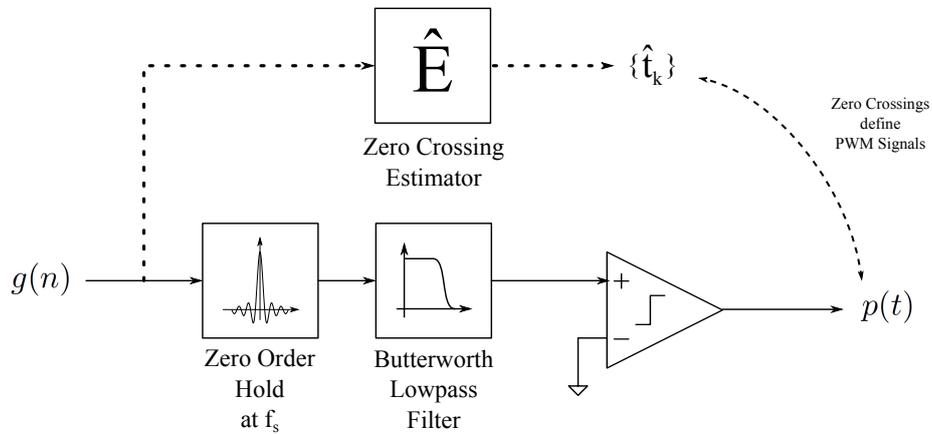


Figura 3.18: Schema a blocchi dell'elaborazione analogica e stimatore degli istanti di transizione

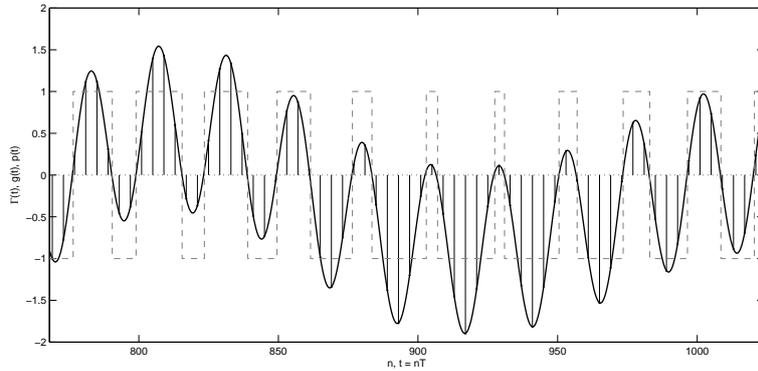


Figura 3.19: Segnale in uscita dal modulatore PWM: $\Gamma(t)$ in uscita dal modulatore $\Sigma\Delta$, $g(t)$ in uscita dal filtro analogico e $p(t)$ in uscita dal comparatore (tratteggiato)

Dato che l'uscita del modulatore $\Sigma\Delta$ è una somma di delta di Dirac traslate e modulate dai campioni $g(n)$

$$\Gamma(t) = \sum_{n=0}^{KN-1} g(n)\delta(t - nT)$$

all'uscita dei due sistemi LTI

$$g(t) = \Gamma(t) * f(t) = \sum_{n=0}^{KN-1} g(n)f(t - nT) \quad (3.4)$$

Nota la successione di campioni $g(n)$ e $f(t)$ specificando il filtro $h_L(t)$ utilizzato si conosce la $g(t)$ in forma analitica. Se $f(t)$ è derivabile allora si conosce anche $g'(t)$ per linearità dell'operatore derivata. Infine il segnale PWM è ottenuto saturando $g(t)$, ovvero $p(t) = \text{sign}(g(t))$ (Fig. 3.19). Le informazioni ricavate possono essere

Filtro analogico anti-imaging

In questa sezione si discute il filtro anti-imaging che elabora l'uscita del DAC $\Sigma\Delta$ attenuando tutto ciò che è posto oltre la frequenza di taglio della NTF, i.e. un filtro che elimina tutte le componenti armoniche oltre f_c . Per la realizzazione di questo filtro passa-basso è scelta la tipologia Butterworth, che garantisce risposta massimamente piatta (non distorta) in banda passante. Per un'implementazione circuitale del filtro in un futuro prototipo sono dimensionate di seguito la topologia RLC a componenti passivi e la cascata di celle Sallen-Key a componenti attivi. Il filtro è da non confondere con il filtro di ricostruzione LC dell'amplificatore in classe D, che è oggetto di diverse considerazioni e ha banda passante molto più stretta.

Si considera come filtro anti-imaging un filtro di Butterworth di ordine L

$$|H_L(s)|^2 = H_L(s)H_L^*(s) = \frac{1}{1 + (-1)^L s^{2L}}$$

Il filtro di Butterworth è ottenuto selezionando gli L poli

$$p_i, i = 1, \dots, L \text{ t. c. } \Re[p_i] < 0$$

La funzione di trasferimento è del tipo

$$H_L(s) = \frac{1}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_L)}$$

ovvero considerando $s = j \frac{\omega}{\omega_0}$

$$H_L(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2L}}} = \frac{\omega_0^L}{\sqrt{\omega_0^{2L} + \omega^{2L}}}$$

con ω_0 pulsazione di taglio.

Se L è pari i poli sono disposti a coppie complesse coniugate lungo la circonferenza di raggio unitario del piano s essendo le radici di

$$1 + (-1)^L s^{2L} = 0$$

Allora si ordinano le coppie

$$p_i = \sigma_i + j\omega_i, p_{i+1} = \sigma_i - j\omega_i, i \in \mathbb{Z} \text{ dispari}$$

Si vuole calcolare l'IR $\beta(t)$ a meno del gradino $H(t)$. Un filtro di Butterworth ha solo poli semplici, quindi si può scrivere

$$H_L(s) = \frac{1}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_L)} = \frac{\kappa_1}{s - p_1} + \frac{\kappa_2}{s - p_2} + \dots + \frac{\kappa_L}{s - p_L}$$

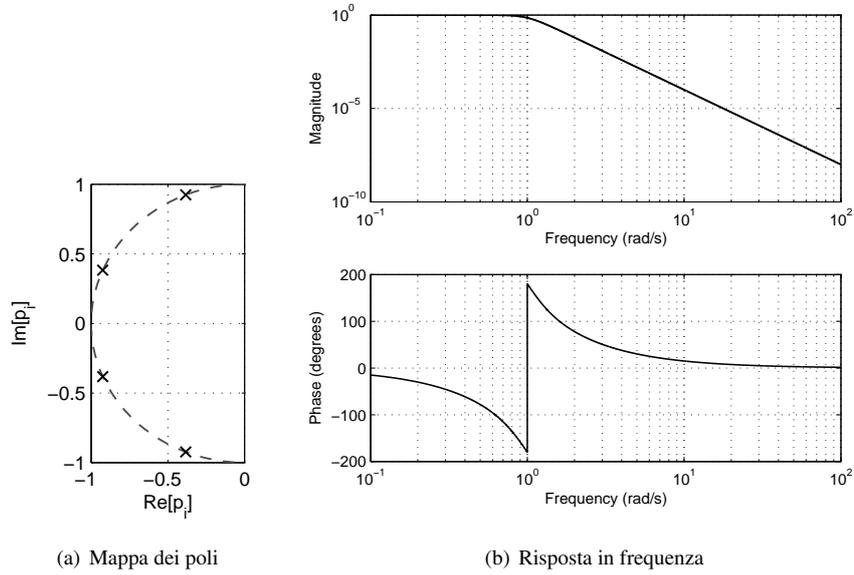


Figura 3.20: Filtro di Butterworth con $L = 4$ e $\omega_0 = 1$

e l'antitrasformata di Laplace

$$\beta(t) = \sum_{i=1}^L \kappa_i e^{p_i t}$$

con i residui

$$\kappa_i = (s - p_i) H_L(s) \Big|_{s=p_i}$$

Nel caso in esame consideriamo un filtro di Butterworth passa-basso di ordine $L = 4$ (Fig. 3.20) di pulsazione di taglio

$$\omega_0 \geq \max \left\{ 2\pi f_{\text{NTF}}, 2\pi \frac{f_s}{2} \frac{R_{\text{max}}}{K} \right\}$$

dove $R_{\text{max}} = \frac{f_{c,\text{max}}}{f_m}$. Allora $p_i \leftarrow \omega_0 p_i$ e i residui

$$\kappa_1 = \frac{\omega_0^L}{(p_1 - p_3)(p_1 - p_2)(p_1 - p_4)}$$

$$\kappa_2 = \frac{\omega_0^L}{(p_2 - p_1)(p_2 - p_3)(p_2 - p_4)}$$

$$\kappa_3 = \frac{\omega_0^L}{(p_3 - p_1)(p_3 - p_2)(p_3 - p_4)}$$

$$\kappa_4 = \frac{\omega_0^L}{(p_4 - p_1)(p_4 - p_2)(p_4 - p_3)}$$

3.2 MODELLO MATLAB DEL MODULATORE PWM

$\omega_0 = 1$	$i = 1$	2	3	4
p_i	$-0.3827 + 0.9239j$	$-0.3827 - 0.9239j$	$-0.9239 + 0.3827j$	$-0.9239 - 0.3827j$
κ_i	$-0.4619 + 0.1913j$	$-0.4619 - 0.1913j$	$0.4619 - 1.1152j$	$0.4619 + 1.1152j$
$\omega_0 = 0.6872$	$i = 1$	2	3	4
p_i	$-0.2630 + 0.6349j$	$-0.2630 - 0.6349j$	$-0.6349 + 0.2630j$	$-0.6349 - 0.2630j$
κ_i	$-0.3175 + 0.1315j$	$-0.3175 - 0.1315j$	$0.3175 - 0.7664j$	$0.3175 + 0.7664j$

Tabella 3.2: Poli e residui del filtro di Butterworth con $L = 4$

Noto che $p_2 = p_1^*$, $p_4 = p_3^* \Rightarrow \kappa_2 = \kappa_1^*$, $\kappa_4 = \kappa_3^*$ l'IR è

$$\beta(t) = \kappa_1 e^{p_1 t} + \kappa_1^* e^{p_1^* t} + \kappa_3 e^{p_3 t} + \kappa_3^* e^{p_3^* t} \quad (3.5)$$

In Tab. 3.2 sono riportati i valori di poli e residui da sostituire nella (3.5).

Filtro a scala RLC

Il filtro di Fig. 3.21 realizza un filtro di Butterworth di ordine 4 a componenti passivi, minimizzando quindi il consumo di potenza della rete filtrante. Si calcola la funzione di trasferimento

$$\begin{aligned} Z_1(s) &= sL_1 + R_1 \\ Z_2(s) &= \frac{1}{sC_1} \\ Z_3(s) &= sL_2 \\ Z_4(s) &= \frac{1}{sC_2 + \frac{1}{R_2}} \\ H_4(s) &= \frac{Z_4(s)Z_2(s)}{Z_1(s)(Z_4(s) + Z_3(s) + Z_2(s)) + Z_2(s)(Z_4(s) + Z_3(s))} \end{aligned}$$

che è ridotta a

$$\begin{aligned} H_4(s) &= \frac{R_2}{R_1 + R_2 + (L_1 + L_2 + (C_1 + C_2)R_1R_2)s + (C_2(L_1 + L_2)R_2 + \dots} \\ &\quad \frac{R_2}{\dots + C_1(L_2R_1 + L_1R_2))s^2 + C_1L_2(L_1 + C_2R_1R_2)s^3 + C_1C_2L_1L_2R_2s^4} \end{aligned}$$

nella forma

$$H_4(s) = \frac{b_0}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + a_4s^4}$$

I coefficienti del filtro di Butterworth $L = 4$ sono

$$a_0 = \omega_0^4, a_1 = 2.6131\omega_0^3, a_2 = 3.4142\omega_0^2, a_3 = 2.6131\omega_0, a_4 = 1, b_0 = \omega_0^4$$

Per ottenere i valori dei componenti: se $R_{p,1} = R_{p,2} = 1, \omega_0 = 1$

$$C_{p,1} = 1.8478, L_{p,1} = 0.7654, L_{p,2} = 1.8478, C_{p,2} = 0.7654$$

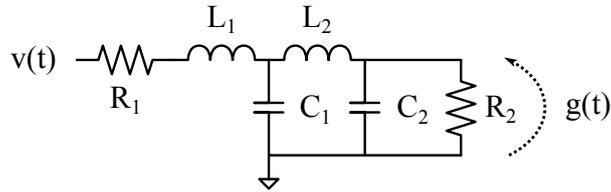


Figura 3.21: Filtro di Butterworth RLC per $L = 4$

Dai valori del filtro prototipo si passa a $R_1 = R_2 = R$ e

$$L_i = \frac{R}{\omega_0} L_{p,i}, \quad C_i = \frac{1}{\omega_0 R} C_{p,i}$$

che completano il progetto del filtro.

Si noti infine che il guadagno statico è

$$|H_4(s=0)| = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{2}$$

se le resistenze sono uguali, quindi il circuito attenua l'uscita a -6 dB a causa dell'uso di componenti passivi.

Filtro di Sallen-Key

La topologia Sallen-Key [19] è un noto schema d'implementazione di filtri analogici a componenti attivi: ogni cella di ordine 1, 2 richiede un amplificatore operazionale in retroazione per introdurre uno o due poli nella funzione di trasferimento.

Si dimensiona il filtro di Fig. 3.22(a). La risposta della i -esima cella di secondo ordine è [44]

$$H_i(s) = \frac{b_{i,0}}{1 + a_{i,1}s + a_{i,2}s^2}$$

con

$$b_{i,0} = 1 \quad (3.6)$$

$$a_{i,1} = \omega_0 C_{i,2} (R_{i,1} + R_{i,2}) \quad (3.7)$$

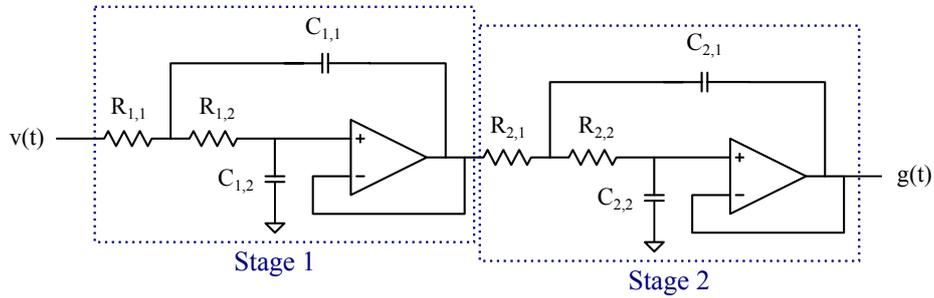
$$a_{i,2} = \omega_0^2 R_{i,1} R_{i,2} C_{i,1} C_{i,2} \quad (3.8)$$

La cella di ordine 2 è replicata due volte per ottenere un filtro di ordine $L = 4$

$$H_4(s) = H_1(s)H_2(s)$$

I coefficienti sono riportati in Tab. 3.22(b). Per concludere il progetto si fissa il valore delle $C_{i,j}$ che verifica

$$C_{i,1} \geq C_{i,2} \frac{4a_{i,2}}{a_{i,1}^2}$$



(a) Schema del circuito

Cella	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$
1	1.8478	1.0000
2	0.7654	1.0000

(b) Tabella dei coefficienti

 Figura 3.22: Filtro di Butterworth a celle Sallen-Key per $L = 4$

e i resistori necessari a sintetizzare i coefficienti del filtro di Butterworth dalle (3.7)-(3.8).

In questo caso la $H_4(s)$ ha guadagno statico 0 dB avendo utilizzato componenti attivi per sintetizzare il filtro desiderato.

Risposta all'impulso dello stadio di uscita

Risolviendo l'integrale

$$\int_a^b \beta(t - \xi) d\xi = \sum_{i=1}^L K_i e^{p_i t} \left. \frac{e^{-p_i \xi}}{p_i} \right|_a^b$$

si trova

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sum_{i=1}^L \kappa_i e^{p_i t} \frac{1 - e^{-p_i t}}{p_i} & 0 \leq t \leq T \\ \sum_{i=1}^L \kappa_i e^{p_i t} \frac{1 - e^{-p_i T}}{p_i} & T < t \end{cases}$$

che con $L = 4$ diviene

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \kappa_1 \frac{e^{p_1 t} - 1}{p_1} + \kappa_1^* \frac{e^{p_1^* t} - 1}{p_1^*} + \kappa_3 \frac{e^{p_3 t} - 1}{p_3} + \kappa_3^* \frac{e^{p_3^* t} - 1}{p_3^*} & 0 \leq t \leq T \\ \kappa_1 e^{p_1 t} \frac{1 - e^{-p_1 T}}{p_1} + \kappa_1^* e^{p_1^* t} \frac{1 - e^{-p_1^* T}}{p_1^*} + \kappa_3 e^{p_3 t} \frac{1 - e^{-p_3 T}}{p_3} + \kappa_3^* e^{p_3^* t} \frac{1 - e^{-p_3^* T}}{p_3^*} & T < t \end{cases} \quad (3.9)$$

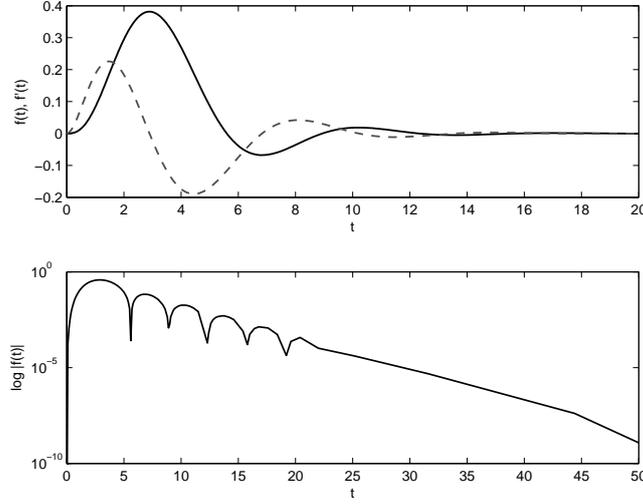


Figura 3.23: Risposta all'impulso della catena di elaborazione analogica: $f(t)$, $f'(t)$ (tratteggiata) ed $f(t)$ in scala log

Nel seguito è necessaria anche la derivata di $f(t)$,

$$f'(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \kappa_1 e^{p_1 t} + \kappa_1^* e^{p_1^* t} + \kappa_3 e^{p_3 t} + \kappa_3^* e^{p_3^* t} & 0 \leq t \leq T \\ \kappa_1 e^{p_1 t} (1 - e^{-p_1 T}) + \kappa_1^* e^{p_1^* t} (1 - e^{-p_1^* T}) & T < t \\ + \kappa_3 e^{p_3 t} (1 - e^{-p_3 T}) + \kappa_3^* e^{p_3^* t} (1 - e^{-p_3^* T}) & \end{cases}$$

da cui si può scrivere la derivata del segnale $g(t)$

$$g'(t) = \sum_{k=0}^{KN-1} g(n) f'(t - nT)$$

$f(t)$ ed $f'(t)$ (Fig. 3.23) completano il modello del sistema digitale-analogico.

3.3 Metodi di ricerca degli istanti di transizione

In Sez. 1.3.3 si è introdotto un metodo per stimare lo spettro del segnale PWM dalla sequenza d'istanti di transizione che lo caratterizza completamente. Il metodo di stima proposto permette di esprimere lo spettro PWM come una funzione $\hat{P}(f)$ al continuo senza applicare trasformate t -discrete.

Per completare l'algoritmo da (1.10) è necessario implementare un metodo di ricerca degli istanti di zero crossing $\{\hat{t}_k\}$ che a partire da una sequenza di campioni

t -discreta in uscita dal DAC calcoli i punti in cui la sua proiezione sull'IR del filtro analogico in uscita si annulla.

Gli algoritmi di ricerca sono ottenuti costruendo una griglia di intervalli in t

$$t_{\text{start}} = (0, \tau, 2\tau, \dots), \quad t_{\text{stop}} = (\tau, 2\tau, \dots)$$

entro i quali eseguire la ricerca di uno zero locale con τ passo della griglia, $\tau \leq \frac{1}{4Rf_m}$ con $R = \frac{f_c}{f_m}$. I metodi usati sono i classici bisezione e Newton-Raphson adattati per funzionare in parallelo su un vettore d'intervalli contigui.

Si verifica che il costo computazionale del metodo di ricerca è per la maggior parte dovuto al calcolo della funzione $g(t)$ sulla griglia. Questa complessità dipende dal numero di campioni $g(n)$ che influenzano $g(t^*)$ in un certo istante t^* , i.e. la memoria del filtro $f(t)$. Si può stimare la memoria dalla durata δ_t di $f(t)$ (Fig. 3.23 in scala logaritmica) a seconda della precisione desiderata: nelle simulazioni si è scelta

$$\delta_t = \left\lfloor \frac{10}{f_0 T} \right\rfloor$$

con T periodo di campionamento, f_0 frequenza di taglio del filtro di Butterworth. L'algoritmo che calcola il valore di una funzione del tipo (3.4) in un istante $t \in \mathbb{R}$ è riportato in App. B.1.1.

3.3.1 Metodo di bisezione

La ricerca degli zeri è eseguita con il metodo di bisezione (Alg. 1): t_{mid} è un vettore di istanti, l'algoritmo è adattato per operare con condizioni vettoriali sui soli intervalli nei quali $g(t_{\text{stop}})g(t_{\text{start}}) < 0$ (Fig. 3.24). La convergenza $t_{\text{mid}} \rightarrow \{\hat{t}_k\}$ avviene entro ≈ 30 iterazioni del ciclo con criterio di arresto

$$t_{\text{diff}} < \text{TOLERANCE} = 10^{-9}$$

3.3.2 Metodo di Newton-Raphson

Si applica il metodo di Newton-Raphson (Alg. 2) per la ricerca degli zeri; l'algoritmo richiede il calcolo punto per punto di $g(t)$ e $g'(t)$. Si noti che in Alg. 2 il vettore di initial guess t^* è critico per la convergenza dell'algoritmo sugli intervalli individuati. Se la tangente $g'(t^*)$ è piccola $t^{(1)}$ può uscire dalla regione di ricerca e condurre allo zero di un altro intervallo (Fig. 3.25). Un'inizializzazione semplice è

$$t^* = \frac{t_{\text{stop}} + t_{\text{start}}}{2}$$

che non garantisce la convergenza dell'algoritmo.

Algorithm 1 Metodo di bisezione

Require: $g(t_{\text{stop}})g(t_{\text{start}}) < 0$

while $N_{\text{iter}} < \text{MAXITER}$ **do**

$N_{\text{iter}} \leftarrow N_{\text{iter}} + 1$

$t_{\text{mid}} \leftarrow \frac{t_{\text{stop}} + t_{\text{start}}}{2}$

$t_{\text{diff}} \leftarrow \frac{t_{\text{stop}} - t_{\text{start}}}{2}$

if $g(t_{\text{mid}}) = 0$ **or** $t_{\text{diff}} < \text{TOLERANCE}$ **then**

return t_{mid}

else

if $g(t_{\text{mid}})g(t_{\text{start}}) > 0$ **then**

$t_{\text{start}} \leftarrow t_{\text{mid}}$

else

$t_{\text{stop}} \leftarrow t_{\text{mid}}$

end if

end if

end if

end while

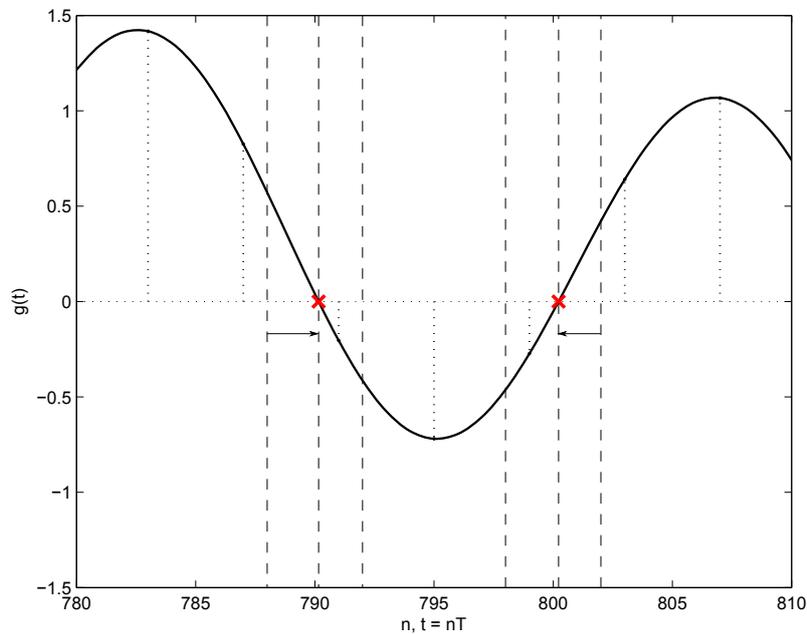


Figura 3.24: Ricerca degli zeri con il metodo di bisezione

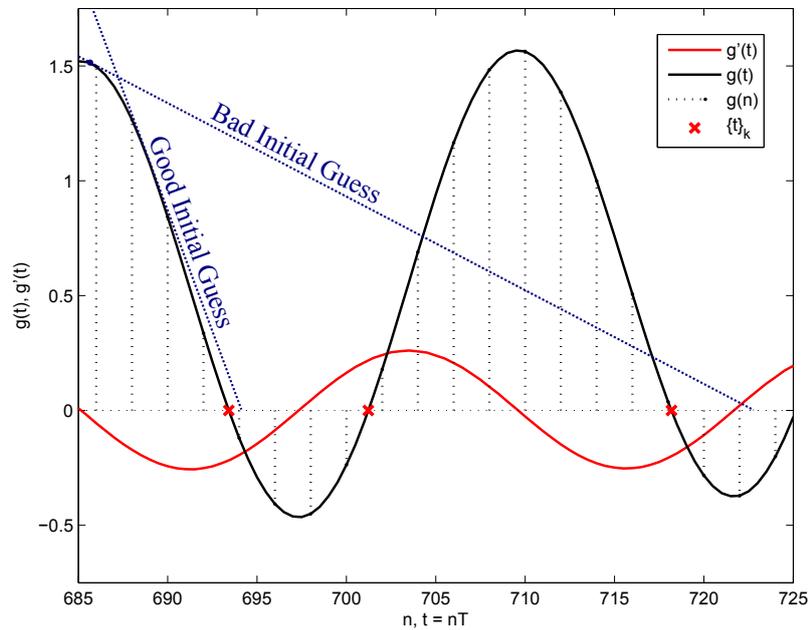
Algorithm 2 Metodo di Newton-Raphson**Require:** $g(t_{\text{stop}})g(t_{\text{start}}) < 0$ (Safety Check) $t^{(0)} \leftarrow t^*$ **while** $N_{\text{iter}} < \text{MAXITER}$ **do** $t^{(N_{\text{iter}}+1)} \leftarrow t^{(N_{\text{iter}})} - \frac{g(t^{(N_{\text{iter}})})}{g'(t^{(N_{\text{iter}})})}$ **if** $|t^{(N_{\text{iter}}+1)} - t^{(N_{\text{iter}})}| / \tau < \text{TOLERANCE}$ **then****return** $t^{(N_{\text{iter}}+1)}$ **end if** $N_{\text{iter}} \leftarrow N_{\text{iter}} + 1$ **end while**

Figura 3.25: Ricerca degli zeri con il metodo di Newton-Raphson (o delle tangenti)

Per migliorare l'initial guess si può

1. Ridurre il passo τ così da effettuare la ricerca solo in intervalli dove $g'(t)$ è grande. Questo metodo aumenta i calcoli iniziali ed è quindi inefficiente.
2. Sfruttare le informazioni a priori sulla struttura del segnale partendo dagli zeri della portante non modulata (1.11) e tenendo conto dello sfasamento introdotto dai filtri.

La convergenza $t^{(N_{\text{iter}})} \rightarrow \{\hat{t}_k\}$ avviene entro ≈ 5 iterazioni del ciclo con criterio di arresto

$$\left| \frac{t^{(N_{\text{iter}+1)}} - t^{(N_{\text{iter}})}}{\tau} \right| < \text{TOLERANCE} = 10^{-9}$$

3.4 Simulazione del modulatore PWM

Sono esaminati di seguito i risultati prodotti osservando alcune caratteristiche del segnale PWM simulato; in particolare si valuta l'effetto della quantizzazione in t sul segnale PWM; la compensazione delle non linearità dello schema proposto all'uscita del sistema; le prestazioni teoriche del modulatore nell'implementazione feedforward digitale-analogica.

3.4.1 Effetto della quantizzazione in t sul segnale PWM

Nei modulatori PWM completamente digitali (Fig. 2.7(a)) la sintesi del segnale PWM avviene in t discreto, per cui gli istanti di transizione sono vincolati alla risoluzione temporale del DAC - il periodo di campionamento T , come discusso in Sez. 2.3. In questa trattazione si è invece proposto un modulatore PWM mixed-signal (Fig. 2.14) in cui le transizioni sono calcolate in t continuo, così da evitare gli effetti descritti in [21] e ridurre il rumore sul segnale PWM $p(t)$ all'uscita del sistema.

Volendo confrontare le due architetture, si consideri t discretizzato con

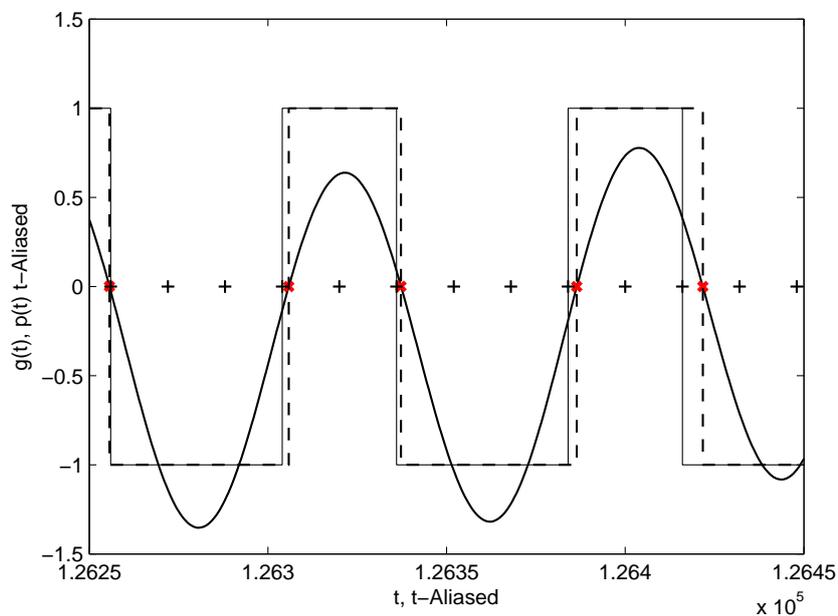
$$\tilde{t} = T \left\lceil \frac{t}{T} \right\rceil$$

la quantizzazione temporale causa lo spostamento degli zeri del segnale ai primi vicini in t discreto (Fig. 3.26(a)) ovvero

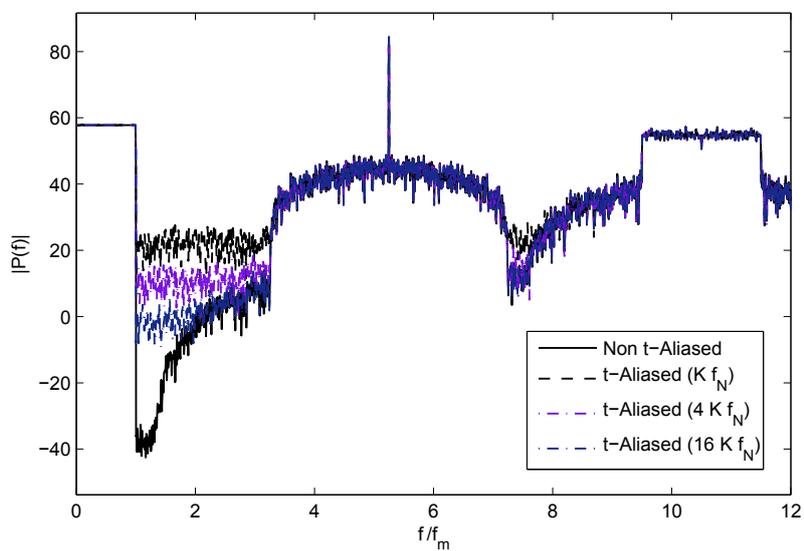
$$\{\tilde{t}_k\} = \frac{1}{f_s} \lceil f_s \{t_k\} \rceil$$

Rispetto alla frequenza di Nyquist $f_N = 2f_m$ di $s(t)$ l'asse temporale discretizzato

$$\tilde{t} = \lceil K f_N t \rceil \tag{3.10}$$



(a) In t : la griglia \tilde{t} è indicata con +



(b) In f

Figura 3.26: Effetto della quantizzazione temporale su $p(t)$

con un DAC a rate di oversampling K . In Fig. 3.26(b) si osserva il degrado dello spettro $P(f)$ al variare di K in (3.10).

I risultati evidenziano che a parità di frequenza di campionamento $f_s = K f_N$ un modulatore PWM completamente digitale (tratto nero, tratteggiato) presenta un livello di rumorosità intrinseco molto più alto del modulatore PWM implementato e dovuto alla quantizzazione degli istanti di transizione.

3.4.2 Compensazione delle non linearità

In Eq. (2.2) è riassunta l'idea che l'applicazione di una trasformazione non lineare dispari e senza memoria sui segnali all'ingresso del comparatore non alteri la posizione degli zeri che caratterizzano il segnale PWM. In un sistema immune da tutte le non idealità introdotte nel modello simulato l'identità di (2.2) vale in senso stretto: la distorsione applicata è invariante rispetto al comparatore (i.e. la funzione segno), ovvero il comparatore neutralizza l'effetto della distorsione.

Il sistema implementato presenta invece rumore di quantizzazione, filtri ad attenuazione finita ed operazioni con memoria fra la distorsione a $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ ed il comparatore. Per misurare la qualità del segnale $g(t)$ sintetizzato dal sistema digitale si deve valutare l'ingresso equivalente del comparatore, applicando l'operazione inversa della distorsione al segnale $g(t)$.

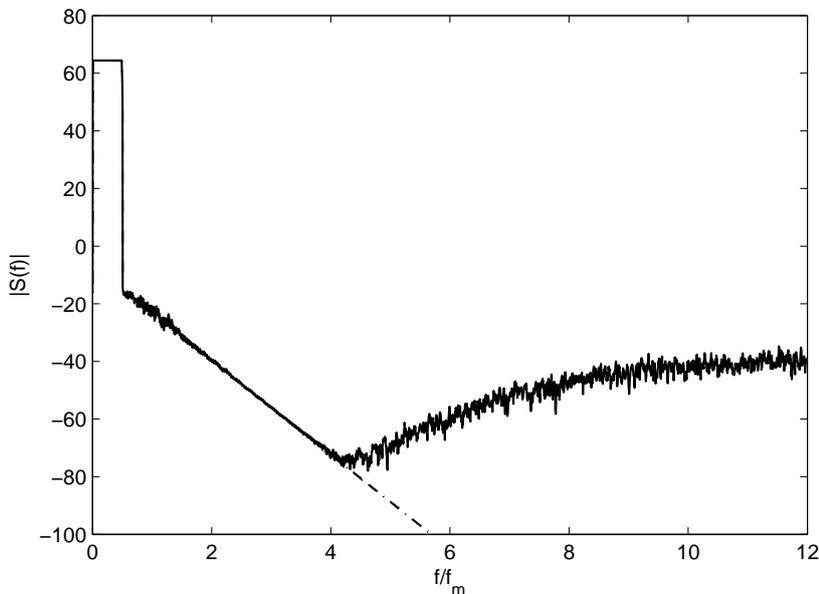


Figura 3.27: Spettro del segnale equivalente $\hat{s}(t)$: con e senza DAC (tratteggiato)

Si cerca quindi il segnale equivalente

$$\hat{s}(t) = \frac{2}{\pi} \arcsin(g(t) + \cos(2\pi f_c t) * f(t))$$

che sostituito a $s(t)$ di (1.6) compone lo spettro del segnale PWM $p(t)$ all'uscita del comparatore (Fig. 3.18); quest'operazione consente di studiare con un metodo alternativo lo spettro di $p(t)$. A causa delle non idealità del modulatore simulato si attende su $g(t)$ un residuo di non linearità non compensate.

Per vedere questo fenomeno si calcola la sequenza

$$\hat{g}(n) = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}s(n)\right) - \cos(2\pi f_c n) + e(n) \right] * f(n)$$

ottenuta ricampionando $g(t)$, dove $e(n)$ è il rumore di quantizzazione del modulatore $\Sigma\Delta$ ed $f(n) = f(nT_s)$ da (3.9) (dove $T_s \leq T$ del DAC). Per trovare il segnale equivalente $\hat{s}(t)$ al discreto:

$$\hat{s}(n) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\hat{g}(n) + \cos(2\pi f_c n) * f(n))$$

Lo spettro della sequenza $\hat{s}(n)$, riportato in Fig. 3.27, esibisce un floor di rumore ed alcune componenti non lineari residue che interferiscono con il segnale in banda base. La loro presenza degrada il range dinamico all'ingresso del comparatore: con i parametri $K = 256$, $R = 5.25$ si misura $DR = 81.23$ dB, i.e. le non linearità non compensate a potenza massima si collocano a ≈ -80 dB sotto il segnale a $P_s = 0$ dB massima.

Il profilo del rumore di Fig. 3.27 in $f/f_m > 4$ è dovuto alla quantizzazione del DAC ad 8 bit (tratto continuo): il suo massimo è ≈ -100 dB rispetto al segnale, ma non decade con essa; nel caso senza rumore (tratteggiato) sono invece visibili le sole non linearità residue.

3.4.3 Prestazioni teoriche del modulatore PWM implementato

Applicando il metodo di stima (1.10) con gli algoritmi di ricerca degli zeri (Alg. 1, 2) si ottiene una funzione $\hat{P}(f)$, che calcolata su un vettore $f \mapsto |\hat{P}(f)|$ produce lo spettro del segnale PWM: in Fig. 3.28-3.32 sono riportati gli spettri risultanti dal procedimento di stima.

Riducendo gradualmente P_s si osserva il progressivo decadimento delle non linearità: questo andamento è identico nei casi con (tratto continuo) e senza (tratteggiato) DAC $\Sigma\Delta$, finché in Fig. 3.29 non si osservano le prime differenze fra i due spettri per $P_s = -6$ dB, $R = 5.25$; per tali valori si manifesta il floor di rumore dovuto alla quantizzazione ad $l = 2^b$ livelli del segnale sintetizzato, che sposta gli zeri di $g(t)$, $p(t)$ all'uscita del sistema. Il caso senza rumore non presenta questo floor: il livello dei disturbi è collocato 22.23 dB sotto al caso con rumore.

P_s (dB)	0	-3	-6	-9	-12
R_{\min} s.t. SIR > 70 dB	4.75	4.5	3.75	3.25	3.25
R_{\min} s.t. SIR > 80 dB	5	4.75	4.5	4.25	3.75

Tabella 3.3: Riduzione di R con P_s

Al variare di P_s il livello di rumore resta costante a -100 dB rispetto alla potenza massima della sequenza modulante: il divario con il caso senza rumore aumenta al calare di P_s ed al crescere di R , come apprezzabile dagli spettri di Fig. 3.30-3.32 (linee tratteggiate).

Analisi dei risultati sperimentali

Sulle osservazioni di Fig. 3.28-3.32 è possibile applicare le stesse metriche di Sez. 3.1.2. Le variabili $R = f_c/f_m$ e P_s sono discretizzate in $R = [2.25, 6]$, $P_s = [-30, 0]$ dB; in Tab. 3.33(a), 3.34(a) sono riportate le prestazioni del sistema in termini di SIR e DR (dB), ottenuti misurando il livello dei disturbi in presenza di rumore: da esse sono generati i piani di Fig. 3.33(b), 3.34(b) da cui è possibile individuare le superfici a prestazioni costanti nei parametri (R, P_s) .

Per quantificare all'utilizzatore le prestazioni del sistema realizzato si ricerca il valore R_{\min} che verifica le specifiche di SIR desiderate: in Tab. 3.3 sono riportati i dati per SIR > {70, 80} dB. Dalla Fig. 3.35 si vede come al decrescere di P_s le specifiche di SIR sono verificate per R_{\min} sempre più bassi.

In sostanza, rispetto al dimensionamento empirico $f_c \geq 10f_m$ comunemente adottato nel progetto di modulatori PWM per amplificatori in classe D, si può abbassare $f_c = Rf_m$ quando il segnale modulante $s(t)$ non è a full scale.

Allo stesso modo, fissando invece la potenza dei disturbi che interferiscono con la banda del segnale, si ottengono gli spettri di Fig. 3.36, in cui la stessa quantità di rumore e distorsione è ottenuta per tre coppie di (R, P_s) .

Un'applicazione pratica di quanto è stato simulato si ha nel controllo del volume di un segnale audio amplificato in classe D: se l'involuppo del frammento di segnale riprodotto non è a range dinamico massimo, si può scalare la frequenza della portante avvicinandola alla banda base (i.e. il contenuto informativo) in accordo con gli andamenti di Fig. 3.35, mantenendo inviolate le specifiche sulla qualità dell'uscita e massimizzando l'efficienza del trasferimento energetico fra sorgente di alimentazione e carico, e.g. lo speaker di un sistema audio portatile.

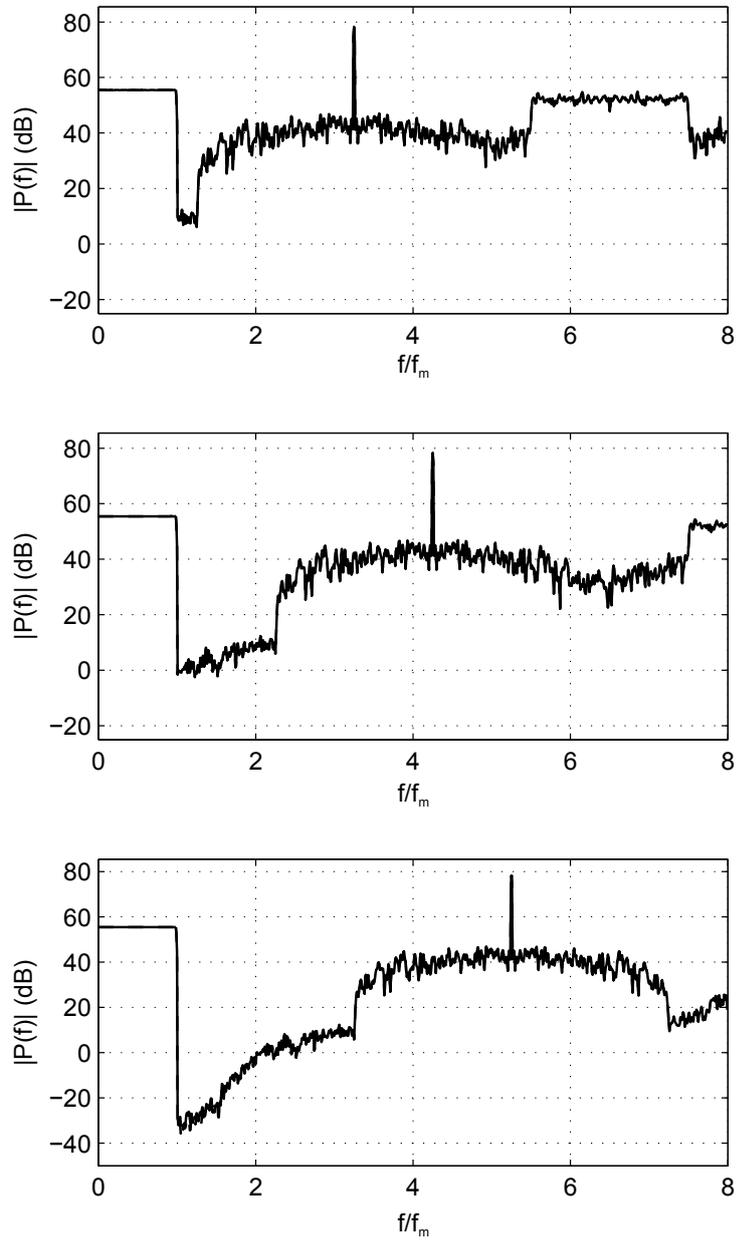


Figura 3.28: Spettro del segnale PWM simulato per $R = (3.25, 4.25, 4.25)$ e $P_s = 0$ dB, con e senza DAC

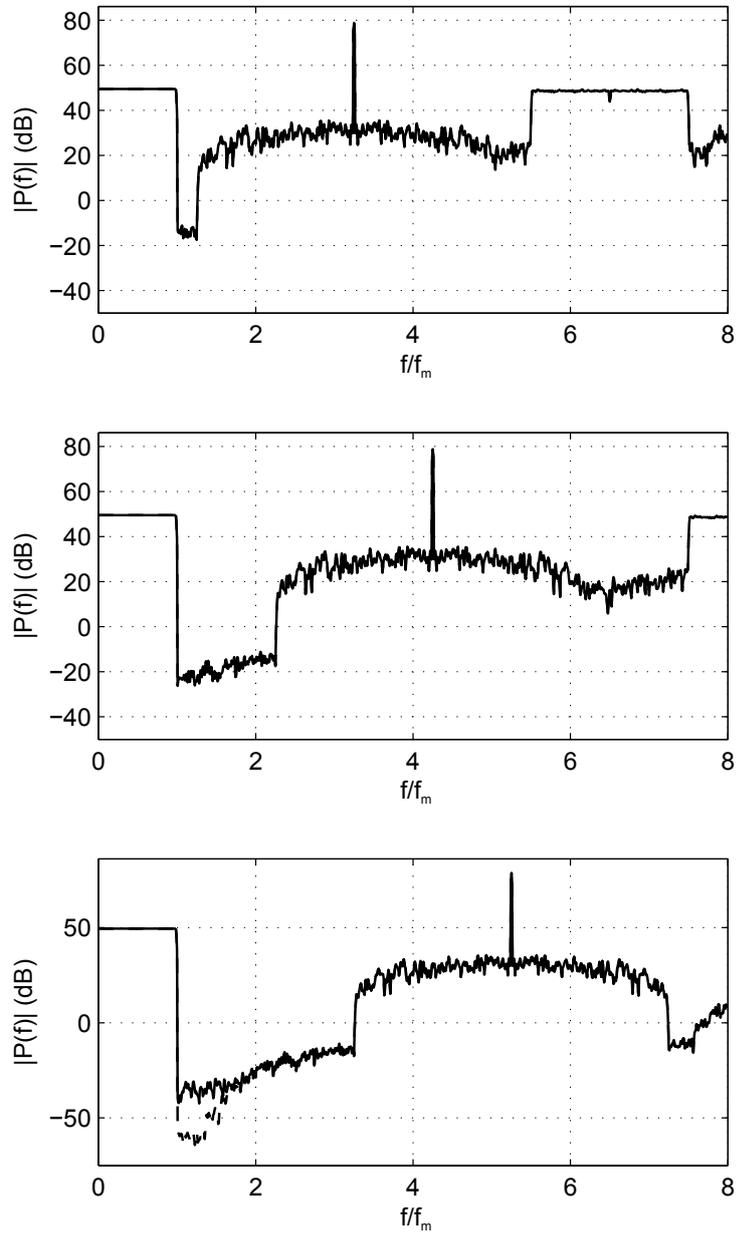


Figura 3.29: Spettro del segnale PWM simulato per $R = (3.25, 4.25, 4.25)$ e $P_s = -6$ dB: con e senza DAC (tratteggiato)

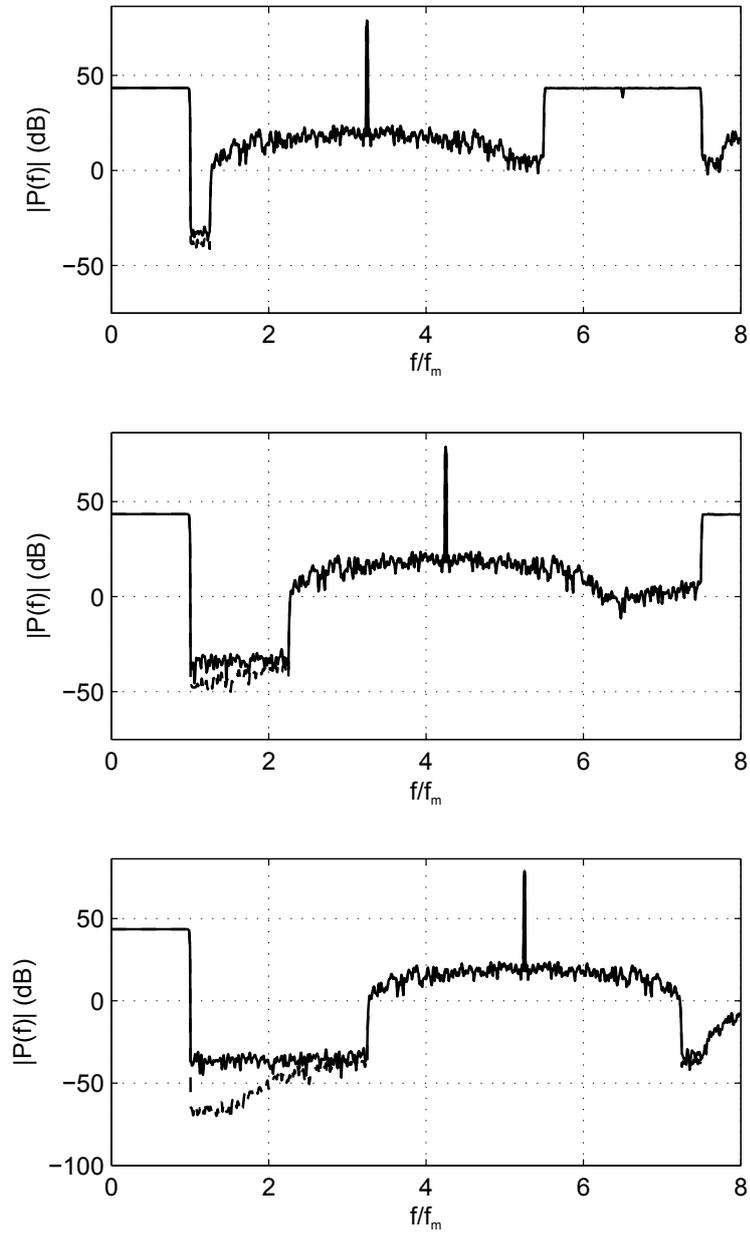


Figura 3.30: Spettro del segnale PWM simulato per $R = (3.25, 4.25, 4.25)$ e $P_s = -12$ dB: con e senza DAC (tratteggiato)

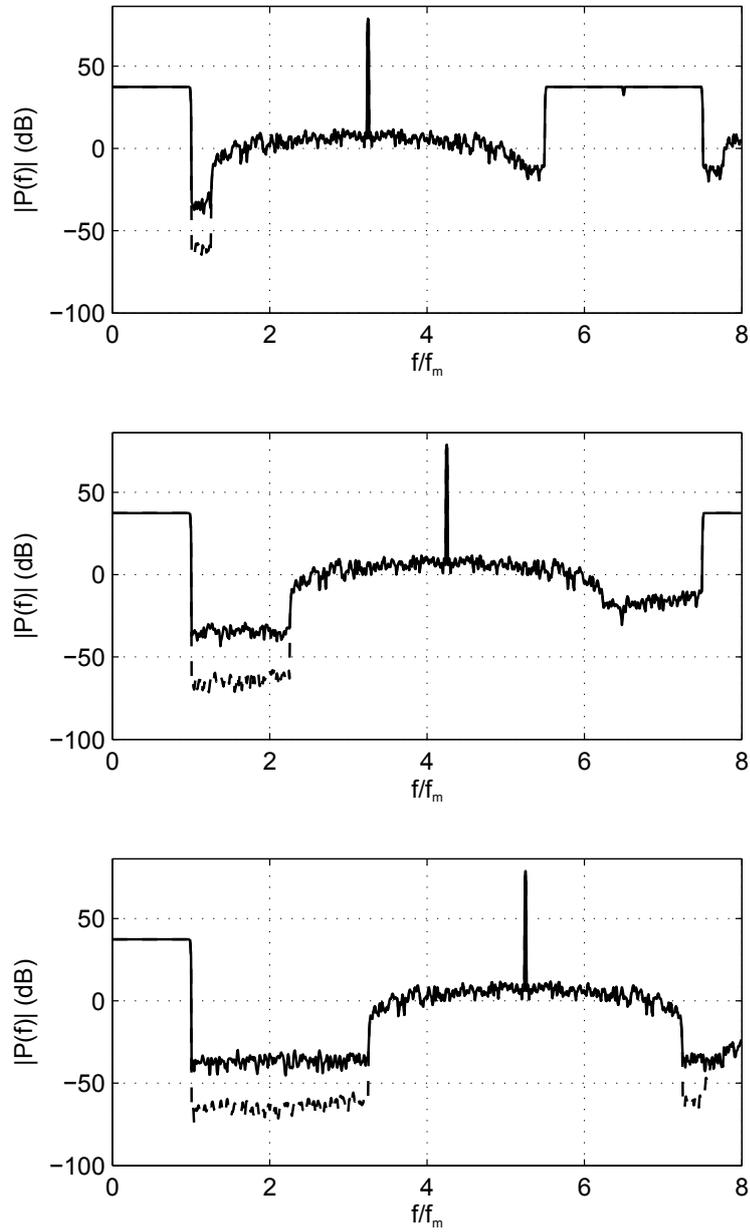


Figura 3.31: Spettro del segnale PWM simulato per $R = (3.25, 4.25, 4.25)$ e $P_s = -18$ dB: con e senza DAC (tratteggiato)

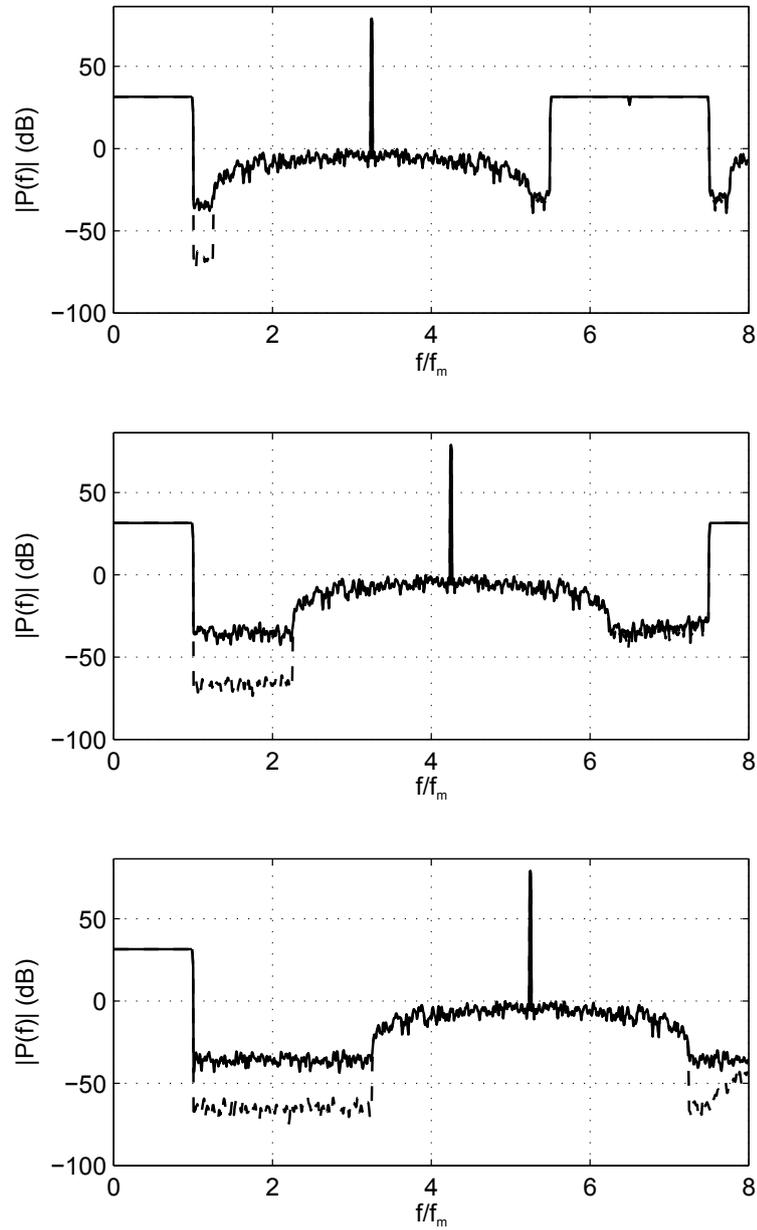
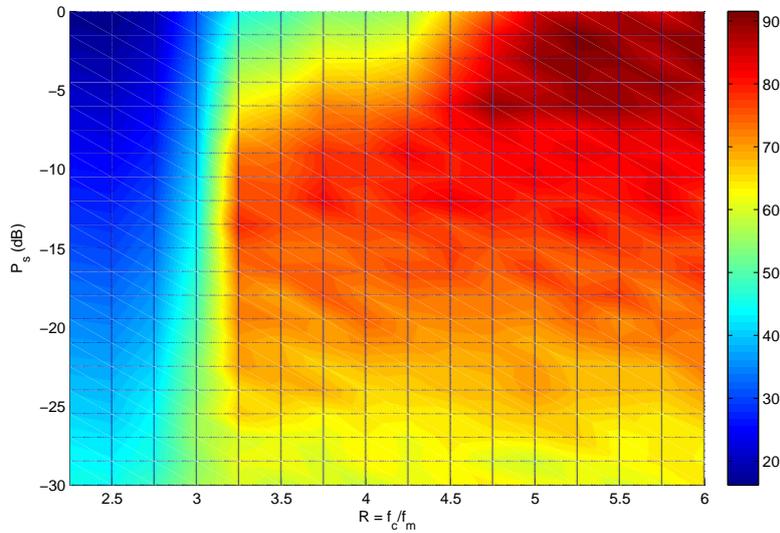


Figura 3.32: Spettro del segnale PWM simulato per $R = (3.25, 4.25, 4.25)$ e $P_s = -24$ dB: con e senza DAC (tratteggiato)

3. MISURE, MODELLI NUMERICI E MODULATORI PWM

$R = f_c/f_m$	2.25	2.5	2.75	3	3.25	3.5	3.75	4	4.25	4.5	4.75	5	5.25	5.5	5.75	6
$P_s = 0$ dB	16.45	16.16	19.01	31.24	45.82	48.41	53.85	54	56.34	66.25	75.1	85.02	85.61	87.84	84.13	90.1
$P_s = -1.5$ dB	17.7	17.36	20.34	32.64	50.1	52.79	58.04	58.16	60.59	70.86	80.97	87.38	91.52	88	89.39	89.23
$P_s = -3$ dB	19.02	18.65	21.71	34.08	54.54	57.14	62.5	62.48	64.9	75.28	83.11	89.17	89.82	89.66	85.93	90.58
$P_s = -4.5$ dB	20.39	20	23.12	35.52	59	61.48	66.68	66.83	69.06	78.13	85.18	85.61	89.36	88.12	89.47	87.84
$P_s = -6$ dB	21.8	21.39	24.56	36.96	62.99	65.74	71.74	71.23	73.49	81.89	89.46	87.56	88.72	88.95	86.99	84.9
$P_s = -7.5$ dB	23.24	22.81	26.01	38.42	67.14	70.42	74.29	74.93	78.27	81.05	83.04	81.39	81.56	83.74	83.11	85.64
$P_s = -9$ dB	24.7	24.25	27.47	39.94	72.78	73.52	78.52	77.36	81.88	79.38	80.94	81.68	82.86	82.11	81.7	82.1
$P_s = -10.5$ dB	26.16	25.73	28.96	41.4	75	74.81	78.65	77.99	78.67	79.46	80.89	82.53	80.86	80.66	82.82	81.16
$P_s = -12$ dB	27.65	27.19	30.43	42.86	75.48	75.63	80.86	76.02	80.38	82.89	80.63	78.84	79.02	79.96	83.45	77.56
$P_s = -13.5$ dB	29.14	28.68	31.91	44.27	78.83	75.69	75.19	76.41	77.65	75.87	78.21	77.69	81.98	77.24	79.67	79.18
$P_s = -15$ dB	30.61	30.16	33.44	45.69	74.7	73.02	73.16	74.59	73.74	76.94	74.84	74.7	75.86	77.21	75.29	74.91
$P_s = -16.5$ dB	32.16	31.68	34.82	47.22	73.22	74.27	74.38	73.86	76.13	76.27	73.68	77.77	73.44	74.51	74.95	78.73
$P_s = -18$ dB	33.66	33.15	36.45	48.73	71.42	68.96	75.21	71.55	72.94	72.48	72.65	72.19	75.89	77	71.69	74.64
$P_s = -19.5$ dB	35.04	34.63	37.85	49.9	71.9	71.44	69.77	73.9	70.6	71.38	71.36	70.85	73.9	70.72	73.26	73.14
$P_s = -21$ dB	36.52	36.2	39.38	51.78	69.36	67.97	69.54	70.8	70.41	69.37	69.71	68.28	70.41	71.73	72.62	71.93
$P_s = -22.5$ dB	38.04	37.68	40.84	53.58	69.53	68.58	65.57	67.53	67.22	67.81	68.34	69.91	66.83	67.21	67.97	72.68
$P_s = -24$ dB	39.63	39.18	42.6	53.91	64.69	67.46	68.33	64.93	65.74	67.29	67.3	70.04	67.55	67.29	66.86	69.47
$P_s = -25.5$ dB	40.88	40.14	44.09	55.77	66.21	64.63	62.84	64.22	63.84	63.74	66.02	67	65.48	64.84	64.07	66.77
$P_s = -27$ dB	42.94	42.21	45.23	55.96	60.13	61.3	61.08	63.17	61.64	64.06	63.58	64.16	66.01	62.27	63.72	63.27
$P_s = -28.5$ dB	43.97	43.48	46.11	54.56	61.41	62.01	60.06	63.37	61.81	62.81	60.36	59.3	61.78	62.46	63.73	63.1
$P_s = -30$ dB	45.14	45.33	48.61	56.01	60.24	58.62	60.48	59.08	61.4	62.37	63.74	62.08	61.52	60.31	61.38	63.92

(a) Tabella dei valori misurati



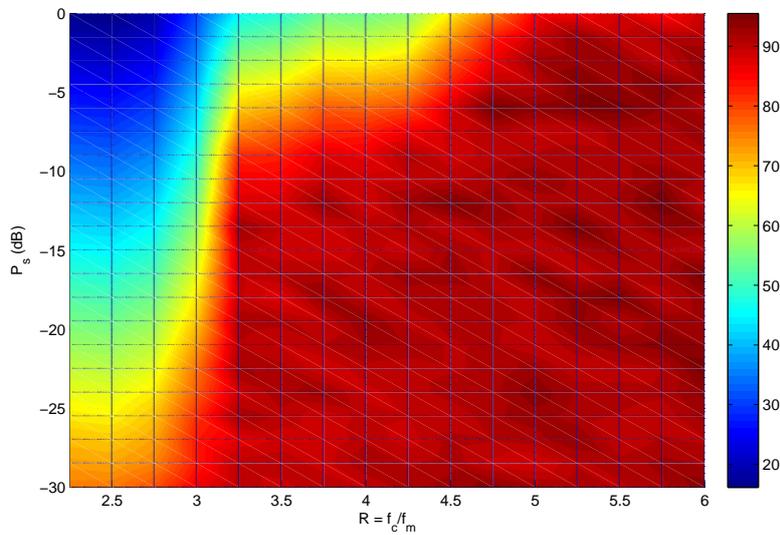
(b) Piano dei valori misurati

Figura 3.33: SIR (dB) all'uscita del modulatore PWM simulato al variare di R e P_s

3.4 SIMULAZIONE DEL MODULATORE PWM

$R = f_c/f_m$	2.25	2.5	2.75	3	3.25	3.5	3.75	4	4.25	4.5	4.75	5	5.25	5.5	5.75	6
$P_s = 0$ dB	16.49	16.16	19.01	31.24	45.81	48.41	53.85	54	56.34	66.25	75.10	85.03	85.61	87.84	84.13	89.10
$P_s = -1.5$ dB	19.24	18.86	21.83	34.14	51.59	54.29	59.55	59.66	62.09	72.36	82.47	88.89	93.02	89.50	90.89	90.73
$P_s = -3$ dB	22.06	21.65	24.71	37.08	57.54	60.14	65.50	65.48	67.90	78.28	86.11	92.17	92.82	92.66	88.94	93.58
$P_s = -4.5$ dB	24.93	24.50	27.61	40.02	63.50	65.98	71.18	71.33	73.57	82.63	89.69	90.11	93.86	92.62	93.97	92.34
$P_s = -6$ dB	27.84	27.39	30.55	42.96	68.99	71.74	77.74	77.23	79.50	87.89	95.46	93.56	94.72	94.95	92.99	90.9
$P_s = -7.5$ dB	30.78	30.31	33.50	45.92	74.65	77.92	81.79	82.44	85.77	88.55	90.54	88.89	89.06	91.24	90.61	93.14
$P_s = -9$ dB	33.73	33.25	36.47	48.94	81.78	82.53	87.52	86.36	90.88	88.39	89.95	90.68	91.86	91.11	90.70	91.1
$P_s = -10.5$ dB	36.69	36.23	39.46	51.90	85.50	85.31	89.15	88.49	89.17	89.96	91.40	93.03	91.37	91.17	93.32	91.66
$P_s = -12$ dB	39.67	39.20	42.43	54.86	87.48	87.64	92.86	88.02	92.38	94.89	92.63	90.84	91.03	91.96	95.45	89.56
$P_s = -13.5$ dB	42.66	42.18	45.41	57.77	92.33	89.20	88.69	89.92	91.16	89.37	91.71	91.19	95.49	90.74	93.17	92.68
$P_s = -15$ dB	45.63	45.16	48.44	60.69	89.70	88.02	88.16	89.59	88.74	91.94	89.84	89.70	90.86	92.21	90.29	89.91
$P_s = -16.5$ dB	48.67	48.18	51.32	63.72	89.72	90.77	90.89	90.36	92.64	92.77	90.18	94.28	89.94	91.01	91.45	95.23
$P_s = -18$ dB	51.68	51.15	54.45	66.73	89.42	86.97	93.21	89.55	90.95	90.48	90.66	90.19	93.89	95	89.69	92.64
$P_s = -19.5$ dB	54.55	54.13	57.35	69.41	91.40	90.94	89.27	93.40	90.10	90.88	90.86	90.35	93.41	90.22	92.76	92.64
$P_s = -21$ dB	57.53	57.20	60.39	72.78	90.36	88.97	90.54	91.80	91.41	90.37	90.71	89.29	91.41	92.73	93.62	92.93
$P_s = -22.5$ dB	60.55	60.18	63.34	76.08	92.03	91.08	88.07	90.03	89.73	90.32	90.84	92.41	89.33	89.71	90.47	95.18
$P_s = -24$ dB	63.64	63.18	66.60	77.91	88.69	91.46	92.33	88.93	89.74	91.30	91.31	94.05	91.55	91.29	90.86	93.47
$P_s = -25.5$ dB	66.38	65.64	69.59	81.27	91.71	90.13	88.35	89.72	89.34	89.24	91.52	92.50	90.98	90.34	89.57	92.27
$P_s = -27$ dB	69.94	69.21	72.23	82.97	87.13	88.30	88.08	90.17	88.65	91.06	90.58	91.16	93.02	89.27	90.72	90.27
$P_s = -28.5$ dB	72.47	71.98	74.61	83.06	89.91	90.51	88.56	91.87	90.32	91.31	88.86	87.80	90.28	90.96	92.23	91.6
$P_s = -30$ dB	75.15	75.33	78.61	86.02	90.24	88.62	90.49	89.08	91.40	92.37	93.74	92.08	91.52	90.31	91.38	93.92

(a) Tabella dei valori misurati



(b) Piano dei valori misurati

Figura 3.34: DR (dB) all'uscita del modulatore PWM simulato al variare di R e P_s

3. MISURE, MODELLI NUMERICI E MODULATORI PWM

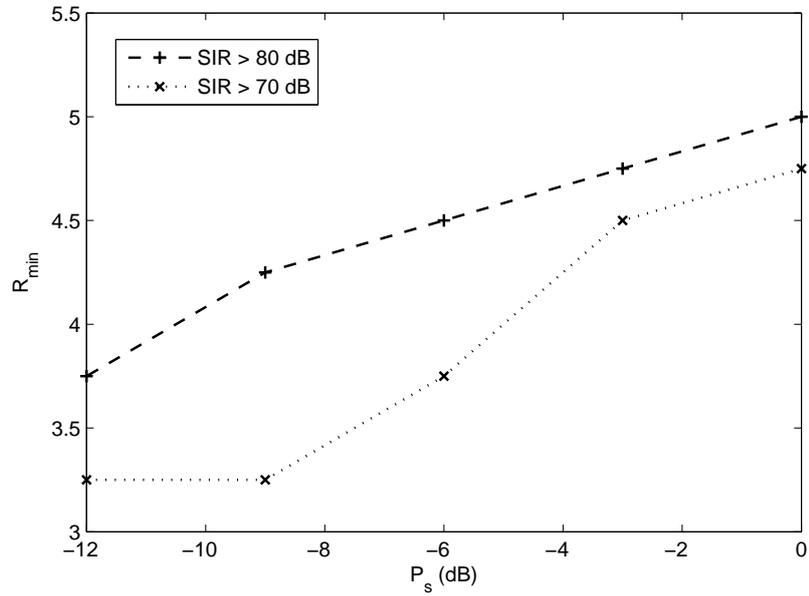


Figura 3.35: Prestazioni teoriche del modulatore PWM a frequenza f_c adattata

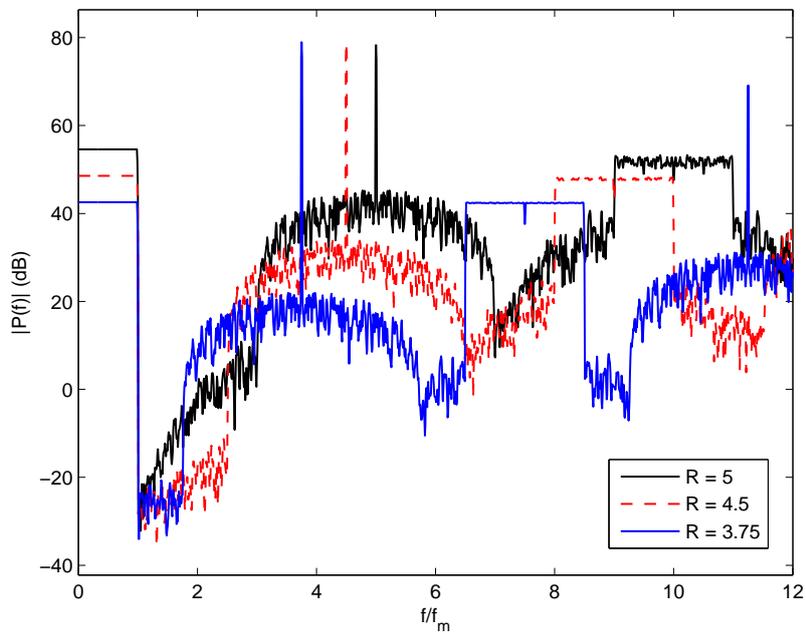


Figura 3.36: Spettro del segnale PWM al variare di R e P_s

CONCLUSIONI

In questa tesi è stata illustrata una strategia di riduzione dei consumi di una particolare classe di sistemi elettronici: gli amplificatori di segnale operanti in commutazione (o in classe D). Questi schemi sfruttano una legge di modulazione che

1. mappa il contenuto informativo del segnale d'ingresso in una sequenza di commutazioni fra due livelli logici;
2. controlla una rete di interruttori, parzializzando il flusso di energia fra la sorgente di alimentazione ed il carico.

La modulazione, detta a larghezza d'impulso (PWM), è generata dal confronto (\geq) fra il segnale d'ingresso ed un'onda triangolare, che oscilla ad una frequenza fondamentale molto maggiore della banda dell'ingresso: questa frequenza coincide con la frequenza media delle commutazioni della rete.

Per minimizzare la potenza dissipata dall'amplificatore in classe D, in questa trattazione è stata approfondita l'idea di adattare la frequenza media delle commutazioni al segnale d'ingresso: nelle applicazioni allo stato dell'arte questa è almeno 10 volte sopra la banda del segnale da amplificare; negli obiettivi di questa trattazione la frequenza del segnale portante è una variabile in adattamento alla potenza del segnale d'ingresso: abbassando la frequenza di commutazione quando possibile si massimizza l'efficienza energetica dell'amplificatore.

Per perseguire questo obiettivo:

- Dal punto di vista teorico si è fatto uso di una rappresentazione analitica del segnale modulato PWM, funzionale allo studio degli effetti non lineari della modulazione ed al loro comportamento al variare della potenza dell'ingresso; si è ottenuto un metodo di analisi del segnale PWM basato sull'osservazione degli istanti di transizione, che ne caratterizzano completamente lo spettro; si è verificato che la generazione del segnale PWM può avvenire in un sistema che adotta un metodo di sintesi innovativo, in cui è applicata una particolare trasformazione non lineare senza memoria per semplificare la sintesi della portante, che diviene un singolo tono sinusoidale.

- Dal punto di vista pratico si sono svolte le verifiche sperimentali del modello analitico del segnale PWM su una scheda di valutazione analogica; si è implementato un accurato modello MATLAB di un nuovo schema di modulazione PWM, composto da una parte di sintesi digitale del segnale seguita da una semplice catena di elaborazione analogica; sono stati implementati i metodi di stima necessari a valutare le prestazioni del modulatore in termini di qualità del segnale modulato all'uscita dello schema.

Per verificare la fattibilità dell'ottimizzazione proposta si sono raccolti dati sperimentali sul segnale PWM generato al variare della frequenza fondamentale della modulazione e della potenza del segnale in ingresso. Dai risultati si è osservata la relazione che lega la frequenza di commutazione alla potenza dell'ingresso fissando una soglia minima di rapporto segnale-disturbi all'utilizzatore. Dalla misura del rapporto segnale-disturbi al variare dei parametri emergono curve di prestazioni a qualità del segnale d'uscita costante, che indicano come sia possibile ridurre la frequenza di commutazione senza degradare la qualità del segnale d'uscita quando questo non è a full scale.

Sviluppi futuri

Quest'attività di tesi ha quantificato le prestazioni teoriche di un sistema di modulazione PWM ad elaborazione mixed-signal: la parte di elaborazione numerica dello schema è programmabile su architetture di calcolo quali microprocessori general purpose, digital signal processors (DSP) e field programmable gate arrays (FPGA).

In particolare si vuole realizzare un prototipo mappando interpolatori, filtri digitali, trasformazione non lineare, oscillatore sinusoidale e modulatore $\Sigma\Delta$ in VHDL mappato su Xilinx Spartan (FPGA); il prototipo sarà seguito da un filtro di ricostruzione analogico e dal comparatore che genera il segnale PWM. La realizzazione di questa scheda di valutazione permetterà di eseguire misure simili a quelle già svolte sulla scheda PWM analogica.

Resta poi da definire uno stimatore in tempo reale della potenza del segnale in ingresso ed una relazione fra la frequenza di commutazione ed i parametri dell'ingresso (potenza e banda) che vari in maniera stabile e consenta la correzione della frequenza in linea.

A valle di questi approfondimenti si implementerà un circuito integrato che realizza le funzioni del prototipo su un singolo chip a larga scala di integrazione, in grado di operare ad alto rendimento risparmiando energia.



MODELLO DEL MODULATORE PWM

A.1 Blocchi di elaborazione digitale del segnale

A.1.1 Generazione del segnale

```
function [signal, M] = generateSignal(N, bandOccupation, type)  
% Generates a random signal of N samples, then shrinks its baseband in order  
% to occupy a given fraction of the available bandwidth.  
%  
5 % Mandatory arguments are:  
% N - number of random samples in baseband.  
%  
% bandOccupation - the ratio of occupied bandwidth  
%  
10 % type - either 0 for random variables uniformly distributed in [-1, 1] or  
% 1 for samples of cosines whose phase is uniformly distributed in [0, 2*pi]  
%  
% Output arguments are:  
% signal - the generated random sequence  
15 %  
% M - the total number of random samples
```

A. MODELLO DEL MODULATORE PWM

```
% Signal Generation
if type == 0
20   s = 2*(rand(N, 1)-0.5); % Random signal
else
    phase = rand(1, N/2-1)*2*pi;
    s = 0;
    for ii = 1:N/2-1
25     s = s + cos(2*pi*(0:N-1)'*ii/N+phase(ii)); % Random phase cosines
    end
end

% Spectrum stretching
30 s = s(:);
Sf = fft(s); % FFT (original spectrum / information)
if bandOccupation < 1
    L = 2*(floor(N/2/bandOccupation) - floor(N/2)) - 1;
    Sdf = [Sf(1:N/2); 0.5*Sf(N/2 + 1); zeros(L, 1); 0.5*conj(Sf(N/2 + 1)); Sf(N/2
        + 2:end)];
35   M = numel(Sdf);
    signal = ifft(Sdf);
    signal = signal/max(abs(signal));
    return;
else
40   signal = s/max(abs(s));
    M = N;
end

return;
```

A.1.2 Interpolatore

```
function [signal, M] = signalUpsample(signal, rate, filtLength, varargin)
% Upsamples the input signal by rate times, given that the interpolation is
% not ideal and requires an anti-imaging FIR filter of length filtLength.
%
5 % Mandatory arguments are:
% signal - input signal
%
% rate - upsampling rate
%
10 % filtLength - length of the FIR filter (taps)
%
% Optional arguments are:
% bandOccupation - the true band occupation of the baseband signal is used
% as a prior information to the cutoff frequency of the anti imaging filter
15 %
% ideal - a flag that indicates whether interpolation should be ideal
% (circulant sinc) or with finite length FIR filter
%
% Output arguments are:
20 % signal - the upsampled sequence
%
% M - the number of samples in the output signal

if isempty(varargin)
25   bandOccupation = 1;
else
```

```

        bandOccupation = varargin{1};
    end

30 if size(varargin, 2) > 1
        ideal = varargin{2};
    else
        ideal = 1;
    end
35
    N = numel(signal);

    % The calculation should be divided in two steps in order to achieve better
    % anti-imaging: the FIR filter requirements are relaxed and with two
40 % filters of the same order we achieve better image suppression.

    % Upsampling with Kaiser-windowed response interpolation
    signal = rate*interpol(signal, rate, filtLength, bandOccupation, ideal);
    M = numel(signal);
45 return;

function [y] = interpol(x, K, filtLength, varargin)
    % Interpolates signal x at rate K and suppresses the images with a FIR
    % filter of length 'filtLength'. Band occupation and ideal filtering may be
50 % specified.

    if size(varargin) < 1
        bandOcc = 1;
    else
55     bandOcc = varargin{1};
    end

    if size(varargin, 2) > 1
        ideal = varargin{2};
60 else
        ideal = 0;
    end

    % Input signal and signal length
65 x = x(:);
    N = numel(x);
    halfN = floor(N/2);

    % Upsampling without anti-imaging
70 xu = upsample(x, K);

    % Sinc windowing
    if ideal
        Xf = fft(xu);
75     y = ifft([Xf(1:halfN); Xf(halfN + 1); zeros(N*(K - 1) - 1, 1); ...
                conj(flipud(Xf(2:halfN + 1)))]);
    else

        % Specifications
80     Wp = 0.45/K; Ws = 0.55/K;
        Rp = 0.1; Rs = 100;

        % Compute deviations

```

A. MODELLO DEL MODULATORE PWM

```
magDevs = [(10^(Rp/20)-1)/(10^(Rp/20)+1) 10^(-Rs/20)];
85  cutF = [Wp Ws];
    ampSpecs = [1 0];

    [nOrd, fp, ap, w] = firpmord(cutF, ampSpecs, magDevs, 1);
    coeffs = firpm(nOrd, fp, ap, w);
90
    % LINEAR CONVOLUTION
    y = conv(xu, coeffs, 'same');

    % CIRCULAR CONVOLUTION
95  % y = cconv(xu, coeffs.', K*N);
end

return;
```

A.1.3 Distorsione a ramo di senoide

```
function [modSignal, M] = pulseModulation(signal, rate, varargin)
% We assume delta sigma modulation is done on the oversampled random input,
% as if our function generator had a SD oversampling DAC.
%
5 % Mandatory arguments are:
% signal - the input signal (a sequence of samples)
%
% rate - upsampling rate currently applied on the signal
%
10 % Optional arguments are:
% R - carrier rate (in multiples of the original Nyquist rate); if this
% argument is specified, the carrier will be added
%
% attdB - attenuation on the input signal (in dB) before distortion (this
15 % may be used to simulate a decrease in signal power)
%
% Output arguments are:
% modSignal - the attenuated / distorted / cosine added signal
%
20 % M - the number of output samples (should be the same as the input)

% Sinusoidal distortion
if any(signal)
    % signal = signal(:)./max(abs(signal)); % Signal normalization
25  signal = signal(:)./max(abs(signal)*1.1); % Signal normalization
end

if nargin > 3
    attGain = 10^(varargin{2}/20);
30  sDist = sin(0.5*pi*signal/attGain);
else
    sDist = sin(0.5*pi*signal); % Sinusoidal distortion
end

35 % The following math is done before sigma-delta digital-to-analog
% conversion and is an ideal approximation which doesn't take into account
% quantization noise, distortion and noise filtering (NTF) introduced by a
% real sigma-delta DAC.
```

```

40 if (size(varargin) < 1)
    % No cosine carrier
    modSignal = sDist;
else
    % Digital cosine carrier generation
45 carrierRate = varargin{1}/2;
    N = numel(sDist);
    cCos = cos(2*pi*(carrierRate/rate)*(0:N - 1)');
    modSignal = (sDist - cCos); % With no sign function!
end
50 M = numel(modSignal);

```

A.1.4 Filtro 1/sinc

```

function [signal, M, hCompSinc] = inverseSincFilter(signal, rate, N, filtLength,
    varargin)
% Mandatory arguments are:
% signal - the input signal to be filtered
%
5 % rate - rate of upsampling with respect to the original band
%
% N - original samples, useful band with respect to rate*N
%
% filtLength - length of the FIR filter realizing the inverse sinc
10 %
% bandOccupation - if the occupied band is smaller than 1, then the
% frequency - magnitude constraint array of the inverse sinc filter is
% shorter
%
15 % Output arguments are:
% signal - the output signal after inverse sinc filtering
%
% M - the number of output samples

20 if isempty(varargin)
    bandOccupation = 1;
else
    bandOccupation = varargin{1};
    rate2 = varargin{2};
25 end

% Sinc compensation
midSig = rate*N/2;
fullRate = rate*N;
30 freqIdx = ceil(bandOccupation*fullRate);
freqAxis = (0:freqIdx-1)/fullRate;

invSinc = 1./sinc(freqAxis/rate2); % Inverse sinc response
35 sBanddB = -80; % Attenuation at fs/2 in dB
sBandLin = 10^(sBanddB/20); % Attenuation (linear)

outBandVal = 0.5;
40 p = polyHerFit(freqAxis, invSinc, 16, outBandVal, sBandLin, 3);

```

A. MODELLO DEL MODULATORE PWM

```
% Calculate impulse response and convolve the result
maskPolyFit = polyval(p, (0:midSig)/fullRate);
desResp = [maskPolyFit fliplr(maskPolyFit(2:end-1))];
45
hComp = fftshift(iffc(desResp(:)));
hCompSinc = hann(filtLength).*hComp(midSig - filtLength/2 + 1:midSig + filtLength
/2);

M = length(signal);
50
% LINEAR CONVOLUTION
signal = conv(signal, hCompSinc, 'same');

% CIRCULAR CONVOLUTION
55 % signal = cconv(signal, hCompSinc, M);
return;

function [p, W] = polyHerFit(x, f, order, x0, f0, n)
% Returns the polynomial Hermitian fitting of the values f on the axis x,
60 % given n null derivatives in (x0, f0)

% Vandermonde matrix of the input (powers 0 to order)
V = vander(x);
V = V(:, end-order+1:end);
65
% Polynomial order N
N = size(V, 2);

% Derivatives matrix
70 D = zeros(N);
D(1, :) = x0.(0:N-1);
C = 1:N-1;

for i = 2:N
75 D(i, i:end) = C.*(x0.(0:N-i));
C = (1:N-i).*C(2:end);
end

% Data and derivatives matrix
80 W = [V; fliplr(D(1:n+1, :))];

% Function values in f, f0 and derivatives in f0
a = [f(:); f0; zeros(n, 1)];

85 % QR factorization
[Q, R] = qr(W);

% Polynomial fit under given conditions (least squares approach)
p = R\Q'*a;
90 return;
```

A.1.5 Modulatore $\Sigma\Delta$

Il codice seguente fa uso del Delta Sigma Toolbox di Richard Schreier [43].

```
function [digSignal, M] = sigmaDeltaConv(signal, osr, bits, order, varargin)
% [digSignal, M] = sigmaDeltaConv(signal, osr, bits, order)
```

A.1 BLOCCHI DI ELABORAZIONE DIGITALE DEL SEGNALE

```
%
% We assume delta sigma modulation is done on the oversampled random input,
5 % as if our function generator had a SD oversampling DAC.
%
% Mandatory arguments are:
% signal - the input signal (a sequence of samples)
%
10 % osr - oversampling rate already applied to the input signal
%
% bits - bits in the quantizer stage of the SD loop
%
% order - flag for the order of the NTF in the SD loop, either 0 -> 2 or
15 % 1 -> 4

signal = signal(:)';

if any(signal)
20   % signal = signal/max(abs(signal) + eps); % Normalization
   % signal = signal/max(abs(signal)*1.1); % Normalize to -0.8 dB
   signal = signal/2.4; % Safe normalization

   % Safety check to avoid overloading
25   if any(signal) > 1
       signal = nan(size(signal));
       return;
   end
end
30
if (order == 0)
   order = 2;
else
   order = 5;
35 end

maxGain = 3;

if isempty(varargin)
40   f0 = 0;
else
   f0 = varargin{1};
end

45 ntf = synthesizeNTF(order, osr, 1, maxGain, f0);
   [a, g, b, c] = realizeNTF(ntf);

   % Display the NTF
   % DocumentNTF(ntf, osr);
50 % [bb, aa] = zp2tf(ntf.z{:}, ntf.p{:}, ntf.k);
   % fvttool(bb, aa);

   ntfMatrix = stuffABCD(a, g, b, c);

55 digSignal = mySimulateDSM(signal, ntfMatrix, bits);
   digSignal = digSignal(:);
   M = numel(digSignal);

return;
```

A. MODELLO DEL MODULATORE PWM

```

function [v,xn,xmax,y] = mySimulateDSM(u, arg2, nbit)
% [v,xn,xmax,y] = mySimulateDSM(u,ABCD,nbit=2,x0=0)
%   or
% [v,xn,xmax,y] = simulateDSM(u,ntf,nbit=2,x0=0)
5 %
% Compute the output of a general delta-sigma modulator with input u,
% a structure described by ABCD, an initial state x0 (default zero) and
% a quantizer with a number of levels specified by nbit.
%
10 % Adapted from Richard Schreier's DELTA SIGMA TOOLBOX

if nargin < 3
    disp('Error. This function needs at least three arguments.\n');
    return;
15 end

% Handle the input arguments
parameters = {'u','arg2','nbit','x0'};
defaults = [ NaN NaN 2 NaN ];
20 for i=1:length(defaults)
    parameter = char(parameters(i));
    if i > nargin | ( eval(['isnumeric(' parameter ')']) & ...
        eval(['any(isnan(' parameter ')) | isempty(' parameter ')']) )
        eval([parameter '=defaults(i);'])
25 end
end
nu = size(u,1);
nq = length(nbit);
if isobject(arg2) & strcmp(class(arg2),'zpk')
30     ntf.k = arg2.k;
        ntf.zeros = arg2.z{:};
        ntf.poles = arg2.p{:};
        form = 2;
        order = length(ntf.zeros);
35 elseif isstruct(arg2)
        if any(strcmp(fieldnames(arg2),'zeros'))
            ntf.zeros = arg2.zeros;
        else
            error('No zeros field in the NTF.')
40 end
        if any(strcmp(fieldnames(arg2),'poles'))
            ntf.poles = arg2.poles;
        else
            error('No poles field in the NTF.')
45 end
        form = 2;
        order = length(ntf.zeros);
elseif isnumeric(arg2)
        if size(arg2,2) > 2 & size(arg2,2)==nu+size(arg2,1) % ABCD dimesions OK
50         form = 1;
            ABCD = arg2;
            order = size(ABCD,1)-nq;
        else
            fprintf(1,'The ABCD argument does not have proper dimensions.\n');
55         if size(arg2,2) == 2 % Probably old (ver. 2) ntf form
            fprintf(1,'You appear to be using the old-style form of NTF
                specification.\n Automatic conversion to the new form will be

```

```

        done for this release only.\n');
        ntf.zeros = arg2(:,1);
        ntf.poles = arg2(:,2);
        form = 2;
60     order = length(ntf.zeros);
        else
            error('Exiting simulateDSM.')
        end
    end
65 else
    error('The second argument is neither an ABCD matrix nor an NTF.\n');
end
if isnan(x0)
    x0 = zeros(order,1);
70 end

if form==1
    A = ABCD(1:order, 1:order);
    B = ABCD(1:order, order+1:order+nu+nq);
75    C = ABCD(order+1:order+nq, 1:order);
    D1= ABCD(order+1:order+nq, order+1:order+nu);
else
    [A,B2,C,D2] = zp2ss(ntf.poles,ntf.zeros,-1); % A realization of 1/H
    % Transform the realization so that C = [1 0 0 ...]
80    Sinv = orth([C' eye(order)])/norm(C); S = inv(Sinv);
    C = C*Sinv;
    if C(1)<0
        S = -S;
        Sinv = -Sinv;
85    end
    A = S*A*Sinv; B2 = S*B2; C = [1 zeros(1,order-1)]; % C=C*Sinv;
    D2 = 0;
    % !!!! Assume stf=1
    B1 = -B2;
90    D1 = 1;
    B = [B1 B2];
end

N = length(u);
95 v = zeros(nq,N);
y = zeros(nq,N);
if nargout > 1 % Need to store the state information
    xn = zeros(order,N);
end
100 if nargout > 2 % Need to keep track of the state maxima
    xmax = abs(x0);
end

for i=1:N
105    y(:,i) = C*x0 + D1*u(:,i);
        v(:,i) = quantizeSD(y(:,i), nbit);
        x0 = A * x0 + B * [u(:,i);v(:,i)];
        if nargout > 1 % Save the next state
            xn(:,i) = x0;
110    end
        if nargout > 2 % Keep track of the state maxima
            xmax = max(abs(x0),xmax);

```

A. MODELLO DEL MODULATORE PWM

```
    end
end
115 return

function [y, e] = quantizeSD(x, b)

% Type of quantizer is midriser (for now)
120 type = 1;

% Apply quantization
if type == 0
    Q = 2^b - 1; % Midtread
125    delta = 2/(Q-1);
    y = delta * (floor(x/delta + 0.5)); % Midtread
else
    Q = 2^b; % Midriser
    delta = 2/(Q-1);
130    y = delta * (floor(x/delta) + 0.5); % Midriser
end

threshold = delta * (floor(1/delta) + 0.5);

135 if abs(x) > threshold
    y = sign(x)*threshold;
end

% Quantization error
140 e = y - x;
return;
```

B

SIMULAZIONE DEL SEGNALE

PWM

B.1 Metodi per l'analisi del segnale analogico

B.1.1 Sintesi della forma d'onda analogica

```
function [analogOut, T, nSmp, derivative] = analogWaveform(digSignal, cutFreq,  
    tHold, varargin)  
% Returns an analog function handle, which represents a continuous time  
% signal. This signal is the convolution between a train of Dirac delta (a  
% sequence of samples output from a DAC) and a basic continuous time  
5 % waveform. This basic waveform is either a step (zero order hold) or the  
% convolution between the step and the impulse response of an analog  
% lowpass filter - in our case a 4th order, 4-pole Butterworth filter.  
%  
% Mandatory arguments are:  
10 % digSignal - a sequence of digital samples which are output in the analog  
% domain  
%  
% cutFreq - the cutoff frequency at which the Butterworth Filter is set;  
% this also changes the duration of the impulse response, and therefore the  
15 % "memory" of the system at time t  
%
```

B. SIMULAZIONE DEL SEGNALE PWM

```

% tHold - the period of the zero order hold, i.e. 1/fs
%
% Optional arguments are:
20 % mode - either:
% 'cos' - Zero order hold & Butterworth filter + analog cosine carrier
% 'tri' - Zero order hold & Butterworth filter + analog triangle wave carrier
% 'step' - Zero order hold
% 'tristep' - Zero order hold + analog triangle wave carrier
25 % any other - Zero order hold & Butterworth filter
%
% R - how many times the carrier frequency is greater than the first
% harmonic of the signal
%
30 % rate - the oversampling rate on the samples (to find the right carrier
% frequency)
%
% flag - tells whether the function should output the derivative handle or
% not
35
% Filter parameters
Nord = 4;
w0 = 2*pi*cutFreq;
[z, p] = buttap(Nord); %#ok<ASGLU>
40 K = zeros(Nord, 1);

% Filter pole plot
p = p*w0;
for ii = 1:2:Nord
45 K(ii) = (w0^Nord);
    for jj = 1:Nord
        if (jj == ii)
            else
                K(ii) = K(ii)/(p(ii) - p(jj));
50        end;
    end;
    K(ii + 1) = conj(K(ii));
end;

55 % Check frequency response
% [b, a] = zp2tf(z, p, w0^Nord);
% freqs(b, a, linspace(0, 4*pi, 1e5));
% pzmap(tf([b, a]))

60 % Filter impulse response
% B = @(t) K(1)*exp(p(1)*t) + K(2)*exp(p(2)*t) + K(3)*exp(p(3)*t) + K(4)*exp(p(4)*
t);

% Sample and hold parameters
T = tHold;
65
% Basic waveform of the analog output signal expansion
F1 = @(t) (K(1)*(exp(p(1)*t) - 1)/p(1) + K(2)*(exp(p(2)*t) - 1)/p(2) + K(3)*(exp(p
(3)*t) - 1)/p(3) + K(4)*(exp(p(4)*t) - 1)/p(4)).*(t >= 0).*(t < T));
F2 = @(t) (K(1)*exp(p(1)*t)*(1 - exp(-p(1)*T))/p(1) + K(2)*exp(p(2)*t)*(1 - exp(-p
(2)*T))/p(2) + K(3)*exp(p(3)*t)*(1 - exp(-p(3)*T))/p(3) + K(4)*exp(p(4)*t)
*(1 - exp(-p(4)*T))/p(4)).*(t >= T);
F = @(t) real(F1(t) + F2(t));

```

```

70
% Signal samples
nSmp = numel(digSignal);

if size(varargin, 2) > 3
75     flag = varargin{4};
    else
        flag = 0;
    end

80 switch varargin{1}

        case 'tristep'
            ...
        case 'tri'
85             ...
        case 'step'
            ...
        case 'cos'
            ...
90     otherwise
        analogOut = @(t) symOutput(digSignal, t, F, nSmp, T, 0, cutFreq);
    end

if flag
95     dF1 = @(t) (K(1)*exp(p(1)*t) + K(2)*exp(p(2)*t) + K(3)*exp(p(3)*t) + K(4)*exp(
        p(4)*t)).*((t >= 0).*(t < T));
    dF2 = @(t) (K(1)*exp(p(1)*t)*(1 - exp(-p(1)*T)) + K(2)*exp(p(2)*t)*(1 - exp(-p
        (2)*T)) + K(3)*exp(p(3)*t)*(1 - exp(-p(3)*T)) + K(4)*exp(p(4)*t)*(1 -
        exp(-p(4)*T))).*(t >= T);
    dF = @(t) real(dF1(t) + dF2(t));

    switch varargin{1}
100        case 'cos'
            ...
        case 'tri'
            ...
        otherwise
105        derivative = @(t) symOutput(digSignal, t, dF, nSmp, T, 0, cutFreq);
    end
else
    derivative = [];
end
110 return;

function [gOut] = symOutput(alpha, t, F, nSmp, T, varargin)
% Returns the values of the analog signal at time t, where time may be an
115 % array of instants (or a continuity of values if t is in a function
% handle).
%
% Mandatory arguments are:
% alpha - input sequence
120 % t - instant or array of instants at which the evaluation is performed
% F - function handle for the basic waveform
% nSmp - number of samples in alpha
% T - zero order hold time

```

B. SIMULAZIONE DEL SEGNALE PWM

```
%
125 % Optional arguments are:
    % nStop - how many samples should be taken into account at each instant;
    % this depends on the impulse response duration, and is normally default to
    % nSmp (which increases complexity)
    %
130 % cutFreq - if this is specified, an empirical approximation of the
    % duration of the impulse response in samples is made, so that no error is
    % made by truncating the calculation to a window of the previous samples

    alpha = alpha(:);
135 t = t(:);
    M = size(t);

    if isempty(varargin)
        nStop = nSmp;
140 else
        nStop = varargin{1} + 1;
        if size(varargin, 2) > 1
            cutFreq = varargin{2};
            % nStop = floor(10/(cutFreq*T)) + 1; % Mid Precision
145         nStop = floor(8/(cutFreq*T)) + 1; % Lower Precision
            % nStop = floor(15/(cutFreq*T)) + 1; % Hi Precision (eps)
        end
    end

150 gOut = zeros(size(t));

    % Corresponding samples
    for i = 1:M
        % Last sample related to i-th instant of the array t
155         n = floor(t(i)/T) + 1;

        % If resulting n is more than available samples, set n to last sample
        if n > nSmp
            n = nSmp;
160         end

        % If the current sample interval is longer than the current sample
        % time, reduce the interval for this calculation
        if n > nStop
165             idxStop = nStop - 1;
        else
            idxStop = n - 1;
        end

170         % Look up to nSmp samples backwards in time
        gOut(i) = F(t(i) - ((n-idxStop:n) - 1)*T) * alpha(n-idxStop:n);

        % for k = 0:idxStop
        % alphaIdx = n - k;
175         % gOut(i) = gOut(i) + alpha(alphaIdx).*(F(t(i) - (alphaIdx - 1)*T));
        % end
    end
end
return;
```

B.1.2 Ricerca degli istanti di transizione

```

function [tZero, outZero] = zeroCrossSearch(analogOut, T, nSmp, method, varargin)
% Searches a given analog waveform output from a DAC for the instants where
% zero crossing takes place and their values. The search is performed with
% the root finding method specified in the arguments.
5 %
% Mandatory arguments are:
% analogOut - a function handle containing the information to calculate the
% analog waveform at a given instant.
%
10 % T - the sample period of the DAC by which the waveform is generated
%
% nSmp - number of samples in the sequence
%
% method - the root finding method, either 'bisech' or 'newton'
15 %
% Arguments for bisection:
% tStep - the step for the search
%
% tol - tolerance on either the absolute signal value or the difference
20 % between left and right approximation instants
%
% maxIter - maximum number of iterations of the whole method
%
% dmode - debug mode flag, either 0 (off) or 1 (on)
25 %
% crit - criterion mode flag, either 0 (absolute error on the signal value)
% or 1 (absolute error on the difference between left and right
% approximation instants)
%
30 % Arguments for newton:
% tStep - the step for the search
%
% tol - tolerance on either the absolute signal value
%
35 % maxIter - maximum number of iterations of the whole method
%
% derivative - a function handle containing the information to calculate
% the derivative of the analog waveform at a given instant

40 switch method
    case 'bisech'
        % Multiple Binary Search Method
        if size(varargin, 2) > 0
            tStep = varargin{1};
45             tol = varargin{2};
        else
            tStep = T;
            tol = eps;
        end
50
        tStart = T*(1 + nSmp/3):tStep:2*T*nSmp/3; % The central part is the valid
            signal
        tStop = tStart + tStep;

        aOut = analogOut(tStart);

```

B. SIMULAZIONE DEL SEGNALE PWM

```
55     validInt = not(diff(sgn(aOut)) == 0);

        nIter = 0;

        if size(varargin, 2) > 3
60         maxIter = varargin{3};
        else
            maxIter = 100;
        end

65     if size(varargin, 2) > 4
            dmode = varargin{4} > 0;
            crit = varargin{5} > 0;
        else
70         crit = false;
            dmode = false;
        end

        solved = false;
        intVals = find(validInt);
75     tMid = zeros(size(validInt));

        if crit
            tDiff = zeros(size(validInt)); %
        end

80     aOut = aOut(intVals);

        if any(validInt)
            while nIter < maxIter
85                 nIter = nIter + 1;

                    if nIter == maxIter
                        solved = false;
90                     break;
                    end

                    tMid(intVals) = (tStart(intVals) + tStop(intVals))/2;

95                 % Other criterion (time difference)
                    if crit
                        tDiff(intVals) = (tStop(intVals) - tStart(intVals))/2; %
                        intVals = intVals(tDiff(intVals)/tStep > tol); %
                        if dmode
100                            max(abs(analogOut(tMid(intVals)))) %
                        end
                    else
                        intVals = intVals(abs(aOut) > tol);
                    end

105                 aOut = analogOut(tMid(intVals));

                    if not(any(intVals))
                        solved = true;
110                     break;
                    else
```

```

        leftVals = intVals((aOut.*analogOut(tStart(intVals))) > 0);
        tStart(leftVals) = tMid(leftVals);
        rightVals = intVals((aOut.*analogOut(tStop(intVals))) > 0);
115         tStop(rightVals) = tMid(rightVals);
        end
    end

    if solved
120         tZero = tMid(validInt);
        outZero = analogOut(tZero);
    else
        if dmode
            tZero = tMid(validInt); % Debugging tMid
125         else
            tZero = 'ERROR';
        end
        outZero = 'ERROR';
    end
end
130 else
    tZero = 'NONE';
    outZero = 'NONE';
end

135 case 'newton'
    % Multiple Newton Search Method
    if size(varargin, 2) > 0
        tStep = varargin{1};
        tol = varargin{2};
140     else
        tStep = T;
        tol = eps;
    end
end

145 % The central part is the valid signal
tStart = T*(1 + nSmp/3):tStep:2*T*nSmp/3;
tStop = tStart + tStep;

aOut = analogOut(tStart);
150 validInt = not(diff(sgn(aOut)) == 0);
tMid = (tStart + tStop)/2;

nIter = 0;

155 if size(varargin, 2) > 3
    maxIter = varargin{3};
else
    maxIter = 100;
end

160 solved = false;
intVals = find(validInt);

derivative = varargin{4};

165 aOut = analogOut(tMid(intVals));
dOut = derivative(tMid(intVals));

```

B. SIMULAZIONE DEL SEGNALE PWM

```

    if any(validInt)
170     while nIter < maxIter

        nIter = nIter + 1;

        if nIter == maxIter
175             solved = false;
            break;
        end

        oldVals = tMid(intVals);
180         rOut = (aOut./dOut)';
        tMid(intVals) = oldVals - rOut;

        stopCrit = (abs(tMid(intVals) - oldVals)/tStep > tol) & (abs(rOut)
            > eps);
        intVals = intVals(stopCrit);
185         aOut = analogOut(tMid(intVals));
        dOut = derivative(tMid(intVals));

        if not(any(intVals))
            solved = true;
190             break;
        end
    end

    if solved
195         tZero = tMid(validInt);
        tNan = isnan(tZero);

        outZero = analogOut(tZero);
        outZero(tNan) = NaN;
200
    else
        % tZero = tMid(validInt); % Debugging tMid
        tZero = 'ERROR';
        outZero = 'ERROR';
205
    end
    else
        tZero = 'NONE';
        outZero = 'NONE';
    end
210
    otherwise
        disp('Not defined. Please choose newton or bisection.');
```

B.2 Script di simulazione

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% PWM Simulation Script %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

5 clear all; close all; clc;
   %% Signal parameters
   % Parameters
```

```

nFreq = 16;
nAtt = 21;
10 numTrials = nFreq*nAtt;
    trial = cell(numTrials, 1);

    % Number of samples
    N = 2^8;
15
    % Band occupation of the basic signal
    % This may be used as a prior information to improve anti-imaging cutoff

    % emptyBand = 1;
20 % bandOccupation = 1/emptyBand;
    bandOccupation = 1;

    % Type of signal: 0 for randn, 1 for random phase sum of cosines
    type = 1;
25
    %% Upsampling parameters
    % Rate of upsampling, divided in two steps to improve anti-imaging cutoff
    % Expect rate - 1 images
    rate = 2^8;
30 rate1 = 2^6;
    rate2 = rate/rate1;

    % FIR anti-imaging filter
    filtLength = 96;
35
    %% Distortion and DAC parameters
    bits = 8; % Quantizer bits

    %% Analog simulation parameters
40 % Sampling frequency of the DAC (the real frequency at which the samples
    % are fed into the zero-order hold
    fs = 1;
    cutFreq = fs*8/rate;
    tHold = 1/fs; % Hold time in the analog domain
45
    % Analog modes
    mode = 'none';

    % Attenuation
50 att = 0:1.5:30;

    % Carrier rates
    R = 2.25:0.25:6;

55 % Test signal generation
    [signal, M] = generateSignal(N, bandOccupation, type);
    signal = repmat(signal, [3 1]);
    save('testSignal', 'signal');

60 for jj = 1:nFreq
    for ii = 1:nAtt
        %% Digital domain
        % Load from file
        load testSignal;

```

B. SIMULAZIONE DEL SEGNALE PWM

```

65     f0 = fs*R(jj)/(2*rate); % Carrier frequency
       ntfFreq = ceil(fs/(1.1*f0)); % NTF cutoff

       % Upsampling
70     [signal, M] = signalUpsample(signal, rate1, filtLength, bandOccupation, 0)
           ;

       % Predistortion and modulation
       [signal, M] = pulseModulation(signal, rate1, R(jj), att(ii));
       c = myCosine(R(jj), M, rate1); % Carrier

75     % Inverse sinc filter
       [signal, M, hCompSinc] = inverseSincFilter(signal, rate, N, filtLength,
           cutFreq, rate2);
       c = signalUpsample(inverseSincFilter(c, rate, N, filtLength, cutFreq,
           rate2), rate2, filtLength);

80     % Second upsampling
       [signal, M] = signalUpsample(signal, rate2, filtLength, 1, 1);

       % Sigma delta conversion (5th order)
       [dSignal, M] = sigmaDeltaConv(signal, ntfFreq, bits, 1);

85     %% Analog domain
       method = 'newton';
       dflag = 1;
       % method = 'biseq';
90     % dflag = 0;
       tol = 1e-9;

       % Nonquantized
       % Analog waveform generation (symbolic)
95     [analogOut, T, Ns, derivative] = analogWaveform(signal, cutFreq, tHold,
           mode, R(jj), rate, dflag);

       % Zero crossing search on nonquantized signal
       tic;
       % [tZero, outZero] = zeroCrossSearch(analogOut, T, Ns, method, T, tol,
           100, 0, 1); % Bisection
100    [tZero, outZero] = zeroCrossSearch(analogOut, T, Ns, method, T/2, tol,
           100, derivative); % Newton
       toc;

       % Inverse of sin - distortion & compensation
       % Filter parameters
105    Nord = 4;
       [p, K, T] = analogFilterDesign(Nord, cutFreq, tHold);
       F = @(t) (K(1)*(exp(p(1)*t) - 1)/p(1) + K(2)*(exp(p(2)*t) - 1)/p(2) + K(3)
           *(exp(p(3)*t) - 1)/p(3) + K(4)*(exp(p(4)*t) - 1)/p(4)).*(t >= 0)
           .*(t <= T) + (K(1)*exp(p(1)*t)*(1 - exp(-p(1)*T))/p(1) + K(2)*exp
           (p(2)*t)*(1 - exp(-p(2)*T))/p(2) + K(3)*exp(p(3)*t)*(1 - exp(-p(3)
           *T))/p(3) + K(4)*exp(p(4)*t)*(1 - exp(-p(4)*T))/p(4)).*(t > T);
       hResp = F(T*(0:1:800));
       cCos = conv(c, hResp);

110    tic;

```

```

aOut = conv(signal, hResp);
arcInput = aOut + cCos; % Argument of Arcsin
toc;
115
    % Quantized
    % Analog waveform generation (symbolic)
    [analogOut, T, Ns, derivative] = analogWaveform(dSignal, cutFreq, tHold,
        mode, R(jj), rate, dflag);
120
    % Zero crossing search on quantized signal
    tic;
    % [tZero, outZero] = zeroCrossSearch(analogOut, T, Ns, method, T, tol,
        100, 0, 1); % Bisection
    [tZero, outZero] = zeroCrossSearch(analogOut, T, Ns, method, T/2, tol,
        100, derivative); % Newton
    toc;
125
    tic;
    aOut = conv(dSignal, hResp);
    darcInput = 2.4*aOut + cCos;
    toc;
130
    %% Analyze results
    err = dtZero - tZero;
    absErr = abs(err); % Difference between instants
135
    % Save results of this trial
    trialResult.signal = signal; trialResult.dSignal = dSignal;
    trialResult.absErr = absErr; trialResult.tZero = tZero;
    trialResult.dtZero = dtZero; trialResult.outZero = outZero;
    trialResult.doutZero = doutZero; trialResult.arcIn = arcInput;
140
    trialResult.darcIn = darcInput;
    trial{ii + (jj - 1)*nAtt} = trialResult;

    end
end
145
    % Trials general information
    trialInfo.samplingFreq = fs;
    trialInfo.carrierFreq = R;
    trialInfo.overSampling = rate;
150 trialInfo.effectiveSamples = N;
    dataSet.info = trialInfo;
    dataSet.results = trial;
    dataSet.size = numTrials;
    save(strcat('DS_Rv_N8_T', num2str(numTrials)), 'dataSet');

```

Tutto il codice riportato è proprietà intellettuale del gruppo di elaborazione statistica dei segnali presso ARCES - Università di Bologna.

BIBLIOGRAFIA

- [1] J. Paradiso and T. Starner, “Energy scavenging for mobile and wireless electronics,” *Pervasive Computing, IEEE*, vol. 4, no. 1, pp. 18 – 27, jan.-march 2005.
- [2] J. Holtz, “Pulsewidth modulation-a survey,” *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 39, no. 5, pp. 410–420, 1992. [Online]. Available: <http://www.et.upt.ro/admin/tmpfile/fileH1224952113file49034931929a3.pdf>
- [3] N. Mohan, T. Undeland, and W. Robbins, *Power electronics*. Wiley New York, 1995.
- [4] M. Berkhout, L. Breems, and E. van Tuijl, “Audio at low and high power,” in *Solid-State Circuits Conference, 2008. ESSCIRC 2008. 34th European. IEEE*, 2008, pp. 40–49. [Online]. Available: http://www.ee.iitm.ac.in/~nagendra/EE480/200808/berkhout_classd.pdf
- [5] S. Caporale, R. Rovatti, and G. Setti, “Spectral expansion of pwm signals for adaptive power management,” in *Submission to IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, Submitted 2012.
- [6] M. Wang, X. Jiang, J. Song, and T. Brooks, “A 120 db dynamic range 400 mw class-d speaker driver with fourth-order pwm modulator,” *Solid-State Circuits, IEEE Journal of*, vol. 45, no. 8, pp. 1427–1435, 2010. [Online]. Available: http://www.ieee-cicc.org/best_paper/2-4.pdf
- [7] “An740: Glossary of frequently used high-speed data converter terms,” Maxim Integrated Products, 2001. [Online]. Available: <http://pdfserv.maxim-ic.com/en/an/AN740.pdf>
- [8] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer, and J. R. Buck, *Discrete-time signal processing (2nd ed.)*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1999. [Online]. Available: <http://www.ketab.ir/DataBase/BookPdf/89B10103.pdf>

BIBLIOGRAFIA

- [9] S. Mallat, *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press, 1998.
- [10] L. Calandrino and M. Chiani, *Lezioni di comunicazioni elettriche*. Pitagora, 2004.
- [11] D. Slepian, "On bandwidth," *Proceedings of the IEEE*, vol. 64, no. 3, pp. 292–300, 1976. [Online]. Available: <http://www.sm.luth.se/csee/courses/sms/022/2001/artiklar/Sle76e.pdf>
- [12] C. Shannon, "Communication in the presence of noise," *Proceedings of the IRE*, vol. 37, no. 1, pp. 10–21, 1949. [Online]. Available: <http://www.stanford.edu/class/ee104/shannonpaper.pdf>
- [13] J. G. Proakis, *Digital Communications*. McGraw-Hill, New York :, 1983.
- [14] R. McEliece and R. Palanki, "Intersymbol interference in pulse-amplitude modulation signaling systems satisfying a spectral mask constraint," *Interplanetary Network Progress Report 42-150, April–June 2002*, pp. 1–14, 2002. [Online]. Available: http://tmo.jpl.nasa.gov/progress_report/42-150/150M.pdf
- [15] H. Inose, Y. Yasuda, and J. Murakami, "A telemetering system by code modulation - δ - σ modulation," *Space Electronics and Telemetry, IRE Transactions on*, no. 3, pp. 204–209, 1962.
- [16] P. Aziz and H. Sorensen, "An overview of sigma-delta converters," *Signal Processing Magazine, IEEE*, vol. 13, no. 1, pp. 61–84, 1996. [Online]. Available: http://repository.upenn.edu/ese_papers/136/
- [17] R. Rovatti, *Elementi di teoria statistica dei segnali*. Zanichelli, 2005, (in Italiano).
- [18] B. Boser and B. Wooley, "The design of sigma-delta modulation analog-to-digital converters," *Solid-State Circuits, IEEE Journal of*, vol. 23, no. 6, pp. 1298–1308, dec 1988.
- [19] D. Johns and K. Martin, *Analog integrated circuit design*. John Wiley & Sons, 1997.
- [20] S. Norsworthy, R. Schreier, G. Temes, and I. C. . S. Society, *Delta-Sigma data converters: theory, design, and simulation*. IEEE Press, 1997.
- [21] S. Santi, R. Rovatti, and G. Setti, "Spectral aliasing effects of pwm signals with time-quantized switching instants," in *Circuits and Systems, 2004. ISCAS '04. Proceedings of the 2004 International Symposium on*, vol. 4, may 2004, pp. IV – 689–92 Vol.4.

-
- [22] G. Folland, *Fourier analysis and its applications*. American Mathematical Society, 1992, vol. 4.
- [23] G. Shilov and R. Silverman, *Elementary real and complex analysis*, ser. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 1996.
- [24] S. Caporale, R. Rovatti, and G. Setti, “Representation of pwm signals through time warping,” in *Submission to IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, Submitted 2012.
- [25] E. Gaalaas, “Class d audio amplifiers: What, why, and how,” *Analog Dialogue*, vol. 40, 2006. [Online]. Available: http://www.analog.com/library/analogDialogue/archives/40-06/class_d.pdf
- [26] F. Raab, P. Asbeck, S. Cripps, P. Kenington, Z. Popovic, N. Potheary, J. Sevic, and N. Sokal, “Power amplifiers and transmitters for rf and microwave,” *IEEE TRANSACTIONS ON MICROWAVE THEORY AND TECHNIQUES*, vol. 50, no. 3, 2002. [Online]. Available: http://sigma.ucsd.edu/research/articles/2002/2002_13.pdf
- [27] B. Putzeys, A. Veltman, P. vd Hulst, and R. Groenenberg, “All amplifiers are analogue, but some amplifiers are more analogue than others,” in *120th AES convention, Paris, France, 2006*. [Online]. Available: <http://www.piak.nl/pdf/REF24.pdf>
- [28] E. Gaalaas, B. Liu, N. Nishimura, R. Adams, and K. Sweetland, “Integrated stereo $\delta\sigma$ class d amplifier,” *Solid-State Circuits, IEEE Journal of*, vol. 40, no. 12, pp. 2388–2397, 2005.
- [29] T. Hung, J. Rode, L. Larson, and P. Asbeck, “Design of h-bridge class-d power amplifiers for digital pulse modulation transmitters,” *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, vol. 55, no. 12, pp. 2845–2855, 2007. [Online]. Available: rfic.ucsd.edu/papers/2007_19.pdf
- [30] M. Sarkeshi, R. Mahmoudi, and A. van Roermund, “Accurate determination of switching loss in class-d power amplifiers with random gaussian excitation using rice formula,” in *Power Amplifiers for Wireless and Radio Applications (PAWR), 2011 IEEE Topical Conference on*, jan. 2011, pp. 73–76.
- [31] S. El-Hamamsy, “Design of high-efficiency rf class-d power amplifier,” *Power Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 9, no. 3, pp. 297–308, 1994.
- [32] K. Nielsen, “A review and comparison of pulse-width modulation (pwm) methods for analog and digital input switching power amplifiers,” in

BIBLIOGRAFIA

- Audio Engineering Society Convention 102*, 3 1997. [Online]. Available: <http://www.icepower.bang-olufsen.com/files/convention/4446.pdf>
- [33] B. Gilbert, "A universal trigonometric function generator," in *Solid-State Circuits Conference. Digest of Technical Papers. 1982 IEEE International*, vol. 25. IEEE, 1982, pp. 42–43.
- [34] J. Volder, "The cordic trigonometric computing technique," *Electronic Computers, IRE Transactions on*, no. 3, pp. 330–334, 1959. [Online]. Available: http://www.jacques-laporte.org/Volder_CORDIC.pdf
- [35] "Lt 1719 data sheet," Linear Technologies. [Online]. Available: <http://cds.linear.com/docs/Datasheet/1719fa.pdf>
- [36] "33220a data sheet," Agilent Technologies. [Online]. Available: <http://cp.literature.agilent.com/litweb/pdf/5988-8544EN.pdf>
- [37] "33250a data sheet," Agilent Technologies. [Online]. Available: <http://cp.literature.agilent.com/litweb/pdf/5968-8807EN.pdf>
- [38] "Comparing function generator performance: Direct digital synthesis versus point-by-point technology," Agilent Technologies. [Online]. Available: <http://cp.literature.agilent.com/litweb/pdf/5990-7460EN.pdf>
- [39] "Agilent 35670a dynamic signal analyzer product overview," Agilent Technologies. [Online]. Available: <http://cp.literature.agilent.com/litweb/pdf/5966-3063E.pdf>
- [40] "Understanding dynamic signal analysis," Agilent Technologies. [Online]. Available: <http://cp.literature.agilent.com/litweb/pdf/5988-6774EN.pdf>
- [41] J. McClellan, T. Parks, and L. Rabiner, "A computer program for designing optimum fir linear phase digital filters," *Audio and Electroacoustics, IEEE Transactions on*, vol. 21, no. 6, pp. 506–526, 1973.
- [42] K. Atkinson, *An introduction to numerical analysis*. Wiley, 1989.
- [43] R. Schreier and G. Temes, *Understanding delta-sigma data converters*. IEEE Press, 2005.
- [44] R. Mancini, *Op Amps For Everyone*. Texas Instruments, 2002. [Online]. Available: <http://www.ti.com/lit/an/slod006b/slod006b.pdf>