ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

IL PROBLEMA DELLA ROVINA DEL GIOCATORE: DALLE ORIGINI ALLA TEORIA MODERNA DELLA PROBABILITÀ

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
ELENA BANDINI

Presentata da:
SARA SCALTRITI

III Sessione
Anno Accademico 2022/2023

Indice

Introduzione

In questa tesi abbiamo studiato il problema della rovina del giocatore, ripercorrendo il suo studio attraverso i secoli e mostrando i risultati più importanti ottenuti grazie alla teoria delle catene di Markov.

Una delle possibili formulazioni del problema della rovina del giocatore è quella che segue. Due giocatori A e B disputano varie manche di un gioco. In ciascuna giocata la probabilità di vittoria di A è p, mentre la probabilità di vittoria di B è $q = 1 - p$. Il giocatore A inizia a giocare con la disponibilità di m euro e il giocatore B con la disponibilità di k euro. Dopo ogni giocata, chi vince riceve 1 euro dall'avversario. Il gioco termina se uno dei due contendenti rimane senza denaro. In questo contesto si è interessati a capire quale è la probabilità che il giocatore A vinca.

Il problema della rovina del giocatore è noto in letteratura da molto tempo. Fu infatti descritto per la prima volta nel 1656 da Pascal in una lettera che scrisse a Fermat. Entrambi i matematici riuscirono ad arrivare alla soluzione del problema in maniera indipendente l'uno dall'altro usando metodi differenti. Pascal, indicando con E_i la probabilità che il giocatore A vinca il gioco possedendo i euro, arrivò a formulare la seguente relazione

$$E_i = pE_{i+1} + qE_{i-i}, \qquad \textit{con } E_0 = 0, \quad E_{m+k} = 1,$$

da cui dedusse

$$E_i = \begin{cases} \dfrac{1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)^{m+k}}, & \text{se } p \neq q, \\ \dfrac{i}{m+k}, & \text{se } p = q = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Fermat, d'altra parte, arrivò alle stesse conclusioni ma adottando una strategia diversa. Egli infatti decise di analizzare i possibili percorsi che portavano a una conclusione del gioco, enumerando tra questi quelli per i quali A vince.

Da allora matematici del calibro di Huygens, J. Bernoulli, Struyck, De Moivre e Ampère si sono cimentati nella risoluzione di questo problema, percorrendo strade diverse che li hanno portati a risultati equivalenti.

Attualmente il metodo più efficace per risolvere il problema risulta essere la teoria delle catene di Markov. È infatti possibile descrivere la quantità di denaro posseduta da A alla manche n come una variabile aleatoria X_n. Per la formulazione del problema, si ha

$$X_{n+1} = X_n + Z_{n+1},$$

con $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ famiglia di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite tale che $Z_{n+1} = +1$ o $Z_{n+1} = -1$ con probabilità rispettivamente p e q. Di conseguenza X_n è una variabile aleatoria discreta i cui valori appartengono all'insieme finito $\{0, 1, 2, \dots, m + k\}$ e il cui valore dipende solo dal valore assunto da X_{n-1}. Sfruttando le proprietà delle catene di Markov è possibile non solo risolvere il problema (ottenendo lo stesso risultato di Pascal), ma anche rispondere a domande più complesse relative all'evoluzione della successione $(X_n)_n$. Abbiamo in particolare partizionato l'insieme degli stati in classi comunicanti e calcolato la probabilità di assorbimento della catena, ovvero la probabilità che, partendo da uno stato, la catena visiti e rimanga in una particolare classe. Successivamente abbiamo trovato il tempo di prima visita da uno stato i e uno stato j, ovvero la probabilità che partendo da i la catena visiti prima o poi j. Infine, ci siamo concentrati sul calcolo della probabilità di assorbimento entro un tempo prestabilito e del tempo medio di assorbimento.

In letteratura sono note molte varianti del problema della rovina del giocatore. In particolare è possibile considerare dei problemi di arresto ottimo dove, ad ogni giocata, il giocatore A può decidere di giocare (guadagnando 1 euro in caso di vittoria o perdendone 1 in caso di sconfitta), oppure abbandonare il gioco (mantenendo il patrimonio corrente). Rispetto al problema della rovina del giocatore classico in cui l'andamento del gioco dipende esclusivamente dal corso degli eventi e non dalle decisioni del giocatore, nel problema di arresto ottimo il giocatore deve dunque scegliere a ogni turno, in base alle osservazioni precedenti, se abbandonare il gioco o continuare, con l'obiettivo di massimizzare il patrimonio finale atteso. Di conseguenza abbiamo analizzato alcune strategie che il giocatore può seguire per valutare quale risulti essere la più efficace. Ci siamo in particolare concentrati sulle strategie

- "tutto o niente": il giocatore non abbandona mai il gioco;
- "cauta": il giocatore abbandona subito il gioco;
- "naive": il giocatore abbandona il gioco quando il budget corrente diventa inferiore al patrimonio iniziale m;
- "perdita accettabile": il giocatore sceglie un valore $l \in \mathbb{N}$, $0 \leq l \leq m$ e abbandona il gioco quando il budget corrente diventa inferiore $m - l + 1$.

Dall'analisi del problema emerge che, se il giocatore vince ogni turno con probabilità p nota, si ha che:

- se $p > \frac{1}{2}$ conviene adottare la strategia “tutto o niente”,
- se $p = \frac{1}{2}$ tutte le strategie sono equivalenti,
- se $p < \frac{1}{2}$ conviene adottare la strategia “cauta”.

La tesi è strutturata nel modo seguente. Il primo capitolo si occupa di richiamare i concetti fondamentali della teoria della probabilità necessari per risolvere il problema della rovina del giocatore. Per quanto riguarda il secondo capitolo, abbiamo analizzato come il problema venne discusso dapprima da Pascal e Fermat e in seguito da Huygens, J. Bernoulli, Struyck, De Moivre e Ampère. Il terzo capitolo si occupa di richiamare la teoria delle catene di Markov, soffermandosi in particolare sulle proprietà utili per la risoluzione del problema in esame. Nel quarto capitolo abbiamo risolto il problema con la suddetta teoria, calcolando nella fattispecie la probabilità di vittoria, la probabilità di assorbimento, il tempo di prima visita e il tempo medio di assorbimento. Infine, nel quinto capitolo abbiamo esteso il problema al contesto dell'arresto ottimo, analizzando e confrontando le possibili strategie da adottare.

Capitolo 1

Preliminari

In questo capitolo riportiamo le notazioni, alcuni risultati generali e i concetti fondamentali della teoria della probabilità che saranno utili nel seguito. I risultati richiamati sono tratti principalmente da [2], [4], [6], [16].

1.1 Notazioni e risultati generali.

Nel seguito indicheremo con $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali, $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi, $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali, $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali, $\mathbb{N}_0$ l'insieme dei numeri naturali diversi da 0, $\mathbb{R}^+$ l'insieme dei numeri reali maggiori di 0 e con $card(S)$ la cardinalità di un qualunque insieme finito S.

Dati due insiemi A e B, scriveremo $A \subseteq B$ se A è sottoinsieme di B e indicheremo con $A \cap B$ l'intersezione di A e B, $A \cup B$ l'unione di A e B e $A \times B$ il prodotto cartesiano di A e B. Se $A \subseteq B$, indicheremo con $B \setminus A$ l'insieme differenza di B meno A e denoteremo con $f : A \to B$ la funzione che manda gli elementi dell'insieme A in elementi dell'insieme B.

Dato un vettore $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, \dots v_n) \in \mathbb{R}^n$ indicheremo con $||v||$ la norma euclidea del vettore ovvero $||v|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$. Dati due numeri interi non nulli a e b, denoteremo con $MCD(a, b)$ il massimo comune divisore tra a e b.

Infine indicheremo con la sigla $q.c$ l'espressione "quasi certamente", con la sigla $t.c$ l'espressione "tale che" e con la sigla $i.i.d.$ "indipendenti e identicamente distribuite".

Teorema 1.1 (Teorema di Bézout). *Siano a, b numeri interi non nulli e sia $d = MCD(a, b)$. Allora esistono $h,k \in \mathbb{Z}$ tali che $d = ha + kb$.*

Definizione 1.2. *Sia A un insieme non vuoto e $(A_i)_{i=1\dots n}$ una famiglia di sottoinsiemi non vuoti di A. Si dice che $(A_i)_{i=1\dots n}$ è una partizione di A se*

- $\cup_{i=1}^n A_i = A$,

- $A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \forall i \neq j; \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$

Definizione 1.3. *Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri reali. La successione $(S_n)_n$ definita in maniera ricorsiva come*

$$\begin{cases} S_1 = a_1, \\ S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = a_1 + a_2 + \ldots a_{n+1} \qquad \forall n \geq 1, \end{cases}$$

viene denominata successione delle somme parziali di $(a_n)_n$ o serie di a_n, e si indica come

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{1.1}$$

Definiamo

$$\lim_{n \to +\infty} S_n := \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i. \tag{1.2}$$

Classificheremo le serie numeriche in base al comportamento della (1.2).

Definizione 1.4. *La seria di a_n in (1.1) viene definita*

- *convergente se esiste* $\lim_{n \to +\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$,
- *divergente se esiste* $\lim_{n \to +\infty} S_n = \pm\infty$,
- *oscillante se non esiste* $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

Analizziamo di seguito alcune serie notevoli che utilizzeremo nei capitoli successivi.

Definizione 1.5. *Per ogni numero reale q chiamiamo serie geometrica la serie $\sum_{i=0}^{+\infty} q^i$.*

Proposizione 1.6. *Data la serie geometrica $S_n = \sum_{i=0}^{n} q^i$ si ha che*

$$S_n = \begin{cases} n + 1, & \text{se } q = 1, \\ \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & \text{se } q \neq 1. \end{cases}$$

Se $S = \sum_{i=0}^{+\infty} q^i$ si ha che

$$S = \begin{cases} +\infty, & \text{se } q \geq 1, \\ \dfrac{1}{1 - q}, & \text{se } -1 < q < 1, \\ \nexists, & \text{se } q \leq -1. \end{cases}$$

Nel primo caso la serie sarà divergente, nel secondo caso convergente e nel terzo oscillante.

Proposizione 1.7. *Per $x \in \mathbb{R}$, $0 < x < 1$, si ha*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Dimostrazione. Definendo

$$S_m = \sum_{n=0}^{m} nx^{n-1}$$

segue che

$$S_m = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (m-1)x^{m-2} + mx^{m-1}. \tag{1.3}$$

Moltiplicando per x entrambi i membri si ottiene

$$xS_m = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots + (m-1)x^{m-1} + mx^m \tag{1.4}$$

e sottraendo l'equazione (1.3) dall'equazione (1.4) si ha

$$(1-x)S_m = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{m-1} - mx^m.$$

Per la Proposizione 1.6, si ottiene

$$(1-x)S_m = \frac{1-x^m}{1-x} - mx^m = \frac{1 - x^m - mx^m + mx^{m+1}}{(1-x)}$$

da cui segue

$$S_m = \frac{1 - x^m - mx^m + mx^{m+1}}{(1-x)^2}.$$

Da ciò si deduce che

$$S = \lim_{m\to+\infty} S_m = \lim_{m\to+\infty} \frac{1 - x^m - mx^m + mx^{m+1}}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

dove l'ultimo passaggio segue dal fatto che $0 < x < 1$. □

Teorema 1.8. *Siano $(a_{j,k})_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali tali non negativi che $a_{j,k} < a_{j,k+1}$ per ogni $k, j \in \mathbb{N}$. Allora*

$$\lim_{j\to+\infty} \sum_k a_{j,k} = \sum_k \lim_{j\to+\infty} a_{j,k}.$$

Teorema 1.9 (Binomio di Newton). *Siano a e b due numeri reali e n un numero naturale. Ne segue che*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

dove $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

1.2 Spazi di probabilità

Definizione 1.10. *Un* ***esperimento aleatorio*** *è un esperimento di cui non conosciamo con certezza il risultato. Un* ***esito*** *è un ipotetico risultato dell'esperimento aleatorio.*

Esempi classici di esperimenti aleatori sono

- il lancio di una moneta, i cui esiti sono "testa" o "croce",
- il lancio di un dado, i cui esiti sono indicati con i numeri naturali da 1 a 6.

Definizione 1.11. *L'insieme di tutti gli esiti di un esperimento aleatorio si definisce* ***spazio campionario*** *e si denota con Ω. Un elemento $\omega \in \Omega$ si definisce* ***evento elementare****, mentre un sottoinsieme $E \subseteq \Omega$ si definisce* ***evento****. Se $E = \Omega$, E viene definito* ***evento certo****; se $E = \emptyset$, E viene definito* ***evento impossibile****. Si definisce E^c* ***evento complementare*** *di E rispetto a Ω, cioè $E^c = \Omega \setminus E$.*

Definizione 1.12. *Si definisce σ-algebra una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di Ω con le seguenti caratteristiche.*

- $\Omega \in \mathcal{F}$,
- *se $E \in \mathcal{F}$ allora $E^c \in \mathcal{F}$,*
- *se $\{A_i\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ allora $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$.*

Definizione 1.13. *Una coppia ordinata $(\Omega, \mathcal{F})$ con $\mathcal{F}$ σ-algebra di sottoinsiemi di Ω si chiama* ***spazio misurabile****.*

Definizione 1.14. *Dato uno spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{F})$, una funzione*

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$$

è detta ***probabilità*** *su $(\Omega, \mathcal{F})$ se*

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,
- *dati $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tali che $A_i \cap A_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$, si ha*

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i).$$

Definizione 1.15. *La terna ordinata $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si chiama* ***spazio di probabilità****.*

Proposizione 1.16. *Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, si hanno le seguenti proprietà.*

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- ***Additività***: *se $A_1, \dots, A_n$ sono eventi tra loro disgiunti, allora*

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- ***Monotonia***: *se $A \subseteq B$ allora $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.*
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Proposizione 1.17. *Sia A un evento e $B_1, \dots, B_n$ eventi tra loro disgiunti. Allora si ha che*

$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i).$$

1.3 Probabilità condizionata

Supponiamo di essere interessati ad un evento A associato a un qualche esperimento aleatorio. Indichiamo con $\mathbb{P}(A)$ la probabilità corrispondente. Se veniamo a conoscenza del fatto che un altro evento B si è verificato, come cambia $\mathbb{P}(A)$? Indichiamo con $\mathbb{P}(A|B)$ la probabilità che si verifichi A sapendo che si è verificato B.

Definizione 1.18. *Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità, sia $B \in \mathcal{F}$ tale che $\mathbb{P}(B) > 0$. Definiamo per ogni $A \in \mathcal{F}$*

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}. \tag{1.5}$$

Proposizione 1.19. *Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e sia $B \in \mathcal{F}$ tale che $\mathbb{P}(B) > 0$. Si hanno le seguenti proprietà.*

- *Per ogni $A \in \mathcal{F}$ vale che $0 \leq \mathbb{P}(A|B) \leq 1$.*
- $\mathbb{P}(\Omega|B) = 1$ *e* $\mathbb{P}(\emptyset|B) = 0$.
- ***Additività***: *se $A_1, \dots, A_n$ sono eventi tra loro disgiunti, allora*

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n|B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i|B).$$

- $\mathbb{P}(A^c|B) = 1 - \mathbb{P}(A|B)$.

- ***Monotonia**: se $A \subseteq C$ allora $\mathbb{P}(A|B) \leq \mathbb{P}(C|B)$.*

Dalla relazione (1.5) si ottiene la cosiddetta regola della catena.

Proposizione 1.20 (**Regola della catena**). *Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità, sia $B \in \mathcal{F}$ tale che $\mathbb{P}(B) > 0$. Allora per ogni $A \in \mathcal{F}$*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B).$$

Più in generale, dati $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots A_n) > 0$, si ha che

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \ldots \mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_1).$$

Dalla regola della catena si ricava la seguente formula.

Proposizione 1.21 (**Formula di Bayes**). *Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità, siano $A, B \in \mathcal{F}$ tali che $\mathbb{P}(A) > 0$ e $\mathbb{P}(B) > 0$. Vale la formula*

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}. \tag{1.6}$$

Si ha infine il seguente risultato.

Proposizione 1.22 (**Formula delle probabilità totali**). *Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e sia $(B_i)_{i=1,\ldots N}$ una partizione di Ω tale che $\mathbb{P}(B_i) > 0$ per ogni $i = 1, \ldots N$.*

Allora per ogni $A \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(A \cap B_i).$$

1.3.1 Diagrammi ad albero

Nello studio di un esperimento aleatorio formato da più sotto-esperimenti aleatori, in cui sono note alcune probabilità condizionate, può essere utile utilizzare il cosiddetto **diagramma ad albero**. Un diagramma ad albero viene costruito nel modo seguente:

- si rappresenta un nodo "radice" etichettato con Ω, che risulta essere lo spazio campionario;
- si scelgono un insieme di eventi $(A_i)_{i=1}^{n}$, in modo che siano una partizione di Ω, che rappresenteranno i nodi successivi;
- si collega ciascun nodo A_i con il nodo Ω, assegnando all'arco che li collega la probabilità $\mathbb{P}(A_i)$;

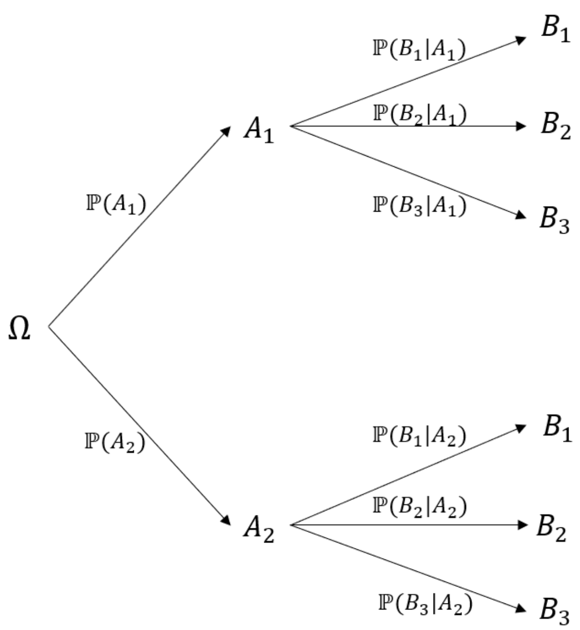
- si scelgono un insieme di eventi $(B_j)_{j=1}^m$, in modo che siano una partizione di Ω, che rappresenteranno i nodi successivi;

- si collega ciascun nodo B_j con ciascun nodo A_i, assegnando all'arco che li collega la probabilità $\mathbb{P}(B_j|A_i)$;

- si ripetono i precedenti due punti in maniera iterativa.

  In generale dato un diagramma ad albero e data una successione di nodi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ indicheremo con $A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n$ il cammino da A_1 a A_n.

Esempio 1.23. *Se $n = 2$ e $m = 3$ si ottiene il seguente diagramma ad albero:*



Si noti che, scelto un cammino che collega la radice ad un evento, ad esempio $\Omega \to A_1 \to B_3$, moltiplicando le probabilità lungo i rami del cammino, si ottiene

$$\mathbb{P}(B_3|A_1)\mathbb{P}(A_1),$$

che per la regola della catena (Proposizione 1.20) equivale alla probabilità delle intersezioni degli eventi, essendo

$$\mathbb{P}(A_1 \cap B_3) = \mathbb{P}(B_3|A_1)\mathbb{P}(A_1).$$

La **probabilità del cammino** $\Omega \to A_1 \to B_3$ è dunque la probabilità $\mathbb{P}(A_1 \cap B_3)$.

1.4 Indipendenza di eventi

Definizione 1.24. *Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e siano $A, B \in \mathcal{F}$. I due eventi A e B si definiscono* ***indipendenti*** *se*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

In questo caso scriveremo $A \perp B$.

Segue, come conseguenza della Definizione 1.24, che

- se $\mathbb{P}(B) > 0$ allora $A \perp B \iff \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$,
- se $\mathbb{P}(A) > 0$ allora $A \perp B \iff \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$.

Definizione 1.25. *Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e siano $A, B, C \in \mathcal{F}$. I tre eventi A, B e C si definiscono* ***indipendenti*** *se valgono simultaneamente le quattro uguaglianze*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),\\ \mathbb{P}(A \cap C) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C),\\ \mathbb{P}(B \cap C) &= \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C),\\ \mathbb{P}(A \cap B \cap C) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).\end{aligned}$$

Più in generale, dati $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, diciamo che gli n eventi sono ***indipendenti*** *se valgono simultaneamente le uguaglianze*

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k}),$$

per ogni $k = 2, \ldots, n$ e per ogni scelta di indici $i_1, \ldots, i_k$ distinti tra loro e compresi tra 1 e n.

1.5 Variabili aleatorie

Definizione 1.26. *Data la misura di Lebesgue λ, consideriamo lo spazio metrico $(\mathbb{R}, \lambda)$. Definiamo la σ-algebra di Borel $\mathcal{B}_\lambda$ come la più piccola σ-algebra che contiene gli aperti di $(\mathbb{R}, \lambda)$. Gli elementi di $\mathcal{B}_\lambda$ sono chiamati boreliani di $\mathbb{R}$ (o semplicemente boreliani).*

Definizione 1.27. *Consideriamo uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dati $H \subseteq \mathbb{R}$ e una funzione $X : \Omega \to \mathbb{R}$, indichiamo con*

$$X^{-1}(H) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in H\}$$

la contro-immagine di H mediante X. Definiamo la funzione $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variabile aleatoria se

$$X^{-1}(H) \in \mathcal{F}, \qquad \forall H \in \mathcal{B}_\lambda.$$

Un esempio di variabile aleatoria è la variabile aleatoria indicatrice.

Definizione 1.28. *Dato una spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e dato un qualunque evento $A \subset \Omega$, si dice **variabile (aleatoria) indicatrice di** A la funzione $1_A : \Omega \to \{0, 1\}$ definita come*

$$1_A(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \notin A, \\ 1, & se\ x \in A. \end{cases}$$

Definizione 1.29. *Siano $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variabile aleatoria. Definiamo **funzione di ripartizione** di X la funzione*

$$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$$

definita da

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Proposizione 1.30 (Caratterizzazione della funzione ripartizione). *Siano $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variabile aleatoria. La funzione di ripartizione F_X di X verifica le seguenti proprietà.*

- *F_X è monotona crescente;*
- *F_X è continua da destra: $\lim_{y \to x^+} F_X(y) = F_X(x^+)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;*
- *$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$;*
- *$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.*

Definizione 1.31. *Siano $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e X una variabile aleatoria. La funzione $p_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ data da*

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x), \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

*è detta **funzione di distribuzione** di X.*

Definizione 1.32. *Siano $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e X una variabile aleatoria. Si dice che X è una **variabile aleatoria discreta** se esiste un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $S_X = \{x_1, x_2, \dots\}$, finito o numerabile, tale che*

$$p_X(x_i) > 0, \qquad \forall x_i \in S_X, \quad e \qquad \sum_{x_i \in S_X} p_X(x_i) = 1.$$

*L'insieme S_X si chiama **supporto** di X.*

Proposizione 1.33. *Siano $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e X una variabile aleatoria. Le seguenti affermazioni sono tra loro equivalenti.*

- *X è una variabile aleatoria discreta con funzione di distribuzione p_X e supporto $S_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ finito o numerabile.*

- *F_X è una funzione costante a tratti, con salti in corrispondenza dei punti $x_1, x_2, \dots$ di S_X con ampiezza pari a*

$$F_X(x_i) - F_X(x_i^-) = p_X(x_i).$$

In particolare,

$$F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Definizione 1.34. *Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e siano X e Y variabili aleatorie discrete con supporti rispettivamente S_X e S_Y. Chiamiamo **funzione di ripartizione condizionata** di Y dato X la famiglia di funzioni $F_{Y|X} = (F_{Y|X=x})_{x \in S_x}$, con $F_{Y|X=x} : \mathbb{R} \to [0, 1]$, definita da*

$$F_{Y|X=x}(y) = \mathbb{P}(Y \leq y | X = x), \qquad \forall x \in S_X.$$

Definizione 1.35. *Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e siano X e Y variabili aleatorie discrete. La **funzione di distribuzione condizionata** di Y dato X è la famiglia di funzioni $p_{Y|X} = (p_{Y|X=x})_{x \in S_x}$ con $p_{Y|X=x} : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definita da*

$$p_{Y|X=x}(y) = \mathbb{P}(Y = y | X = x), \qquad \forall x \in S_X.$$

1.5.1 Valore atteso

Definizione 1.36. *Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e sia X una variabile aleatoria discreta con supporto $S_X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Definiamo **valore atteso** della variabile aleatoria X la quantità*

$$\mathbb{E}[X] := \sum_i x_i p_X(x_i).$$

Osservazione 1.37. *Ricordando la Definizione 1.28, si ha che, per ogni evento A, la variabile aleatoria indicatrice di A, $1_A : \Omega \to \{0, 1\}$, ha come valore atteso*

$$\mathbb{E}[1_A] = \sum_{x_i \in \{0,1\}} x_i p_{1_A}(x_i) = \mathbb{P}(1_A = 1) = \mathbb{P}(A). \tag{1.7}$$

Proposizione 1.38. *Il valore atteso gode della proprietà di linearità, ovvero per ogni coppia di variabili aleatorie X, Y e per ogni coppia di numeri reali a, b si ha che*

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y].$$

Definizione 1.39. *Siano* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *uno spazio di probabilità,* X *e* Y *due variabili aleatorie discrete e* $S_X = \{x_1, x_2, \dots\}$, $S_Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ *i rispettivi supporti. Definiamo* ***valore atteso condizionato*** *di* Y *dato* X *la famiglia* $\mathbb{E}[Y|X] = (\mathbb{E}[Y|X = x])_{x \in S_X}$, *con*

$$\mathbb{E}[Y|X = x] := \sum_i y_i p_{Y|X=x}(y_i), \qquad \forall x \in S_X. \tag{1.8}$$

Osservazione 1.40. *Sia* τ *una variabile a valori in* $\mathbb{N}$ *e sia* X_τ *una variabile aleatoria a supporto* $S_X = \{x_1, x_2, \dots\}$. *Per calcolare la probabilità dell'evento* $\{X_\tau = x\}$ *è possibile partizionare* Ω *nella famiglia di eventi* $(\{\tau = j\})_{j=1,\dots,N}$ *tale che* $\mathbb{P}(\tau = j) > 0$ *per ogni* $j \in 1, \dots, N$. *Ne segue che per formula delle probabilità totali (Proposizione 1.22)*

$$\mathbb{P}(X_\tau = x_i) = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(X_\tau = x_i, \tau = j) = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(X_\tau = x_i|\tau = j)\mathbb{P}(\tau = j). \tag{1.9}$$

Per la Definizione 1.36 e la relazione (1.9), *si ha in particolare che*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_\tau] &= \sum_i x_i p_{X_\tau}(x_i) = \sum_i x_i \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(X_\tau = x_i|\tau = j)\mathbb{P}(\tau = j) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \sum_i x_i \mathbb{P}(X_\tau = x_i|\tau = j)\mathbb{P}(\tau = j) = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{E}[X_\tau|\tau = j]\mathbb{P}(\tau = j),
\end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio segue dalla relazione (1.8).

Capitolo 2

Il problema della rovina del giocatore

Nel 1656 Blaise Pascal pose a Pierre de Fermat un problema di probabilità che riteneva così difficile da dubitare che sarebbe riuscito a risolverlo. Alla fine entrambi i matematici riuscirono ad arrivare alla soluzione in maniera indipendente l'uno dall'altro e utilizzando metodi differenti. Nello stesso anno il medesimo quesito venne posto al matematico olandese Huygens dal francese Carcavi, amico di Fermat. Probabilmente fu lo stesso Pascal, colpito dal lavoro dall'olandese sulla probabilità, a consegnare a Carcavi il problema, in modo che fosse recapitato a Huygens.

Nel 1657 Huygens pubblicò *De Ratiociniis in Ludo Aleae* [9], la prima pubblicazione sulla teoria della probabilità, dove introdusse il teorema della rovina del giocatore oltre ad altri quattro problemi indipendenti. Il problema della rovina del giocatore è dunque conosciuto come il quinto problema di Huygens. Lo studio di tale problema ha contribuito in maniera molto significativa a sviluppare la Teoria della Probabilità, e tra le altre cose, ha dato origine alla nozione di valore atteso.

2.1 Descrizione del problema

Nel 1656 Carcavi trasmise a Huygens il seguente problema: supponiamo che due uomini giochino con tre dadi, il primo giocatore riceve un punto se il risultato della somma dei dadi è 11, e il secondo se è 14. Al posto di accumulare punti nel modo ordinario, un punto viene sommato al punteggio di un giocatore solo se il punteggio dell'altro è uguale a 0, altrimenti un punto viene sottratto dal punteggio dell'altro giocatore. Di conseguenza il giocatore svantaggiato ha sempre 0 punti. Vince il giocatore che raggiunge per primo 12 punti. Quali sono le probabilità di vittoria di ogni giocatore?

Indicheremo nel seguito con P_A e P_B rispettivamente la probabilità di vittoria del giocatore A e del giocatore B.

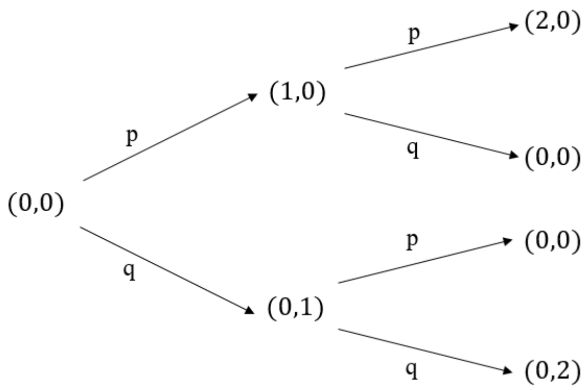


Figura 2.1: Diagramma ad albero che descrive il problema. p e q indicano rispettivamente la probabilità che la somma dei dadi sia 11 e che sia 14. La coppia (a, b) indica che il giocatore A ha a punti e il giocatore B ha b punti.

2.2 Primi approcci risolutivi

La soluzione di Pascal. La soluzione che Pascal diede a Carcavi (si veda [13]), senza spiegare il metodo utilizzato, fu

$$150.094.635.296.999.122 : 129.746.337.890.625 \tag{2.1}$$

da cui si deduce che la probabilità che il giocatore vinca sia

$$\frac{150.094.635.296.999.122}{150.094.635.296.999.122 + 129.746.337.890.625} = 0.999136316... \tag{2.2}$$

Osserviamo che la probabilità che la somma dei valori di 3 dadi sia 11 è $27/216$, la probabilità che sia 14 è $15/216$. Poiché nel caso in cui la somma sia diversa da 11 o 14 non accade nulla, l'unico modo per modificare i punti è che i risultati siano o 11 o 14. Il numero di casi che permettono un cambiamento nel punteggio sono quindi $27 + 15 = 42$. La probabilità che il giocatore A vinca una giocata è $27/42$ mentre la probabilità di vittoria di B è $15/42$, quasi la metà di quella di A. È dunque plausibile che la probabilità di vittoria di A sia un numero grande come indicato nella (2.2).

Anche se non c'è alcun modo di capire come Pascal arrivò alla soluzione finale, è sensato cercare di trovare la soluzione dal problema con il metodo usato nel suo precedente lavoro per risolvere il cosiddetto "problema dei punti" (o "problema della posta").

Il problema dei punti è il seguente. Supponiamo che due giocatori A e B scommettano una stessa quantità di denaro per vincere n punti in un gioco. Supponiamo inoltre che la vittoria di ogni punto sia decisa dal lancio di una moneta equa: testa per A e croce per B. Se il gioco si interrompe quando nessuno dei due giocatori ha raggiunto n punti, come deve essere divisa la ricompensa?

Il metodo di Pascal per risolvere il problema dei punti, inventato nel 1654 e pubblicato postumo, utilizza ciò che noi moderni definiremmo valore atteso. Egli definì $E(a, b)$ il valore atteso della vittoria del giocatore A quando A ha a punti e B ha b punti nel modo seguente:

$$E(a, b) = \frac{1}{2}E(a + 1, b) + \frac{1}{2}E(a, b + 1). \tag{2.3}$$

Il problema della rovina del giocatore è un problema dei punti modificato, dove sono introdotte le probabilità p e q. Edwards (si veda [13]) congetturò che Pascal riuscì ad arrivare al risultato finale a partire dall'equazione (2.3) nel modo seguente. Riprendendo l'equazione (2.3) si ha che

$$E(a, b) = pE(a + 1, b) + qE(a, b + 1). \tag{2.4}$$

In base alla descrizione di Carcavi si ottiene che

$$E(a, b) = \begin{cases} E(a - b, 0), & \text{se } a \geqslant b, \\ E(0, b - a), & \text{se } a < b, \end{cases} \tag{2.5}$$

con $E(12, 0) = 1$ e $E(0, 12) = 0$. Di conseguenza, enumerando le coppie da $(12, 0)$ a $(0, 12)$ utilizzando i numeri naturali da 0 a 24, si ottiene $E(0, 12) = E_0 = 0$, $E(0, 11) = E_1$, $E(0, 10) = E_2, \ldots$, $E(0, 0) = E_{12}, \ldots$, $E(12, 0) = E_{24} = 1$. Con la nuova notazione l'equazione (2.4) diventa il sistema

$$E_i = pE_{i+1} + qE_{i-1}, \qquad i = 1, ..., 23, \tag{2.6}$$

con $E_0 = 0$ e $E_{24} = 1$, ovvero 25 equazioni in 25 incognite.

La relazione (2.6) è un semplice sistema di equazioni lineari differenziali del secondo ordine, omogenee e complete con due condizioni al contorno. I metodi di risoluzione usuali non erano però disponibili a Pascal e ai suoi contemporanei. Pascal usò forse una tecnica che si trova nel suo trattato *Traité du triangle arithmétique* [10] pubblicato nel 1665, dove la somma di successive equazioni consente la semplificazione di molti termini. Nell'equazione (2.6) per ogni $i = 1, \ldots, 23$, è possibile sostituire a E_i l'espressione $pE_i + qE_i$ in quanto $p + q = 1$. Cambiando l'ordine dei termini si ottiene

Essendo $E_0 = 0$, le equazioni sommate algebricamente danno come risultato

$$pE_{i+1} - pE_1 = qE_i, \qquad i = 1, \ldots, 23.$$

Da questo segue che

$$E_{i+1} = \frac{qE_i + pE_1}{p} = \frac{q}{p}E_i + E_1, \qquad i = 1, \ldots, 23.$$

Sostituendo più volte nella formula ricorsiva si ottiene che

$$
\begin{aligned}
E_{i+1} &= \left(\left(\frac{q}{p}\right)^{i} + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} + ... + \left(\frac{q}{p}\right)^{2} + \frac{q}{p} + 1\right) E_1 \\
&= \sum_{k=0}^{i} \left(\frac{q}{p}\right)^{k} E_1 \\
&= \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{i+1}}{1 - \frac{q}{p}} E_1,
\end{aligned}
$$

ovvero

$$
E_m = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{m}}{1 - \frac{q}{p}} E_1, \qquad m = 2, \dots, 24. \tag{2.7}
$$

Poiché $E_{24} = 1$, si ha in particolare dalla (2.7) per $m = 24$ che

$$
E_1 = \frac{1 - \frac{q}{p}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{24}}.
$$

Sostituendo il valore di E_1 nella (2.7) si ottiene dunque

$$
E_m = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{m}}{1 - \frac{q}{p}} \frac{1 - \frac{q}{p}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{24}} = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{m}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{24}}, \qquad m = 2, \dots, 24.
$$

La probabilità che il giocatore A vinca è pertanto

$$
E(0,0) = E_{12} = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{12}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{24}}. \tag{2.8}
$$

Sostituendo $p = 27/42$ e $q = 15/42$ nella (2.8) si ottiene infine

$$
E(0,0) = \frac{1 - \left(\frac{15}{27}\right)^{12}}{1 - \left(\frac{15}{27}\right)^{24}} = 0.999136316...,
$$

ovvero lo stesso risultato nella relazione (2.2). In maniera analoga si può dimostrare che la probabilità di vittoria di B (e la rovina di A) si ottiene dall'equazione (2.8) sostituendo p con q e viceversa. Il rapporto tra P_A e P_B è

$$
\begin{aligned}
\frac{P_A}{P_B} &= \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{12}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{24}} \frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{24}}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{12}} \\
&= \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{12}}{\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^{12}\right)\left(1+\left(\frac{q}{p}\right)^{12}\right)} \frac{\left(1-\left(\frac{p}{q}\right)^{12}\right)\left(1+\left(\frac{p}{q}\right)^{12}\right)}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{12}} \\
&= \frac{1+\left(\frac{p}{q}\right)^{12}}{1+\left(\frac{q}{p}\right)^{12}} = \frac{p^{12}+q^{12}}{q^{12}} \frac{p^{12}}{p^{12}+q^{12}} = \frac{p^{12}}{q^{12}}.
\end{aligned}
$$

Sostituendo $p = 27/42$ e $q = 15/42$ si ottiene

$$150.094.635.296.999.122 : 129.746.337.890.625,$$

lo stesso risultato che Pascal diede a Carcavi, si veda la (2.1).

L'idea che Pascal abbia utilizzato il concetto pionieristico di valore atteso e la tecnica della somma di equazioni per risolvere un sistema complesso, non solo trova giustificazione nei suoi scritti, ma permette anche di capire per quale motivo egli fosse convinto che Fermat non sarebbe riuscito a risolvere il problema. Abbagliato dalla sua stessa soluzione, non si rese conto della presenza di una strada molto più semplice e rapida, strada che Fermat invece trovò immediatamente.

La soluzione di Fermat. Fermat ovviamente non utilizzò il metodo del valore atteso di Pascal, in quanto tale metodo si diffuse solo dopo che Huygens lo riportò nel suo trattato *De Ratiociniis*. Fermat adottò un'altra strategia. Inizialmente si chiese quale sarebbe stato il massimo numero di lanci necessari per completare il gioco, allarmandosi quando scoprì che il gioco può continuare indefinitamente. Pensò dunque di analizzare il gioco a partire dal percorso più breve. Tale percorso è ottenuto quando si eseguono 12 lanci in cui, o vince sempre il giocatore A, o vince sempre il giocatore B. Poiché la probabilità che accada il primo evento è p^{12} e la probabilità che accada il secondo q^{12}, nel caso in cui il gioco si arresti dopo 12 lanci si ha che

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{p^{12}}{q^{12}}. \tag{2.9}$$

Il successivo percorso più breve è ottenuto quando si eseguono 14 lanci. In questo caso 13 punti vengono vinti da un giocatore e un punto dall'altro. Quando Fermat contò le possibili combinazioni si rese conto che solo 12 delle 14 combinazioni portavano a questa situazione: se infatti il giocatore non perde mai nelle prime 12 manche il gioco si interrompe dopo 12 turni. Questo implica che se il gioco termina dopo 14 lanci, un giocatore deve necessariamente aver vinto tutte le manche tranne una. Quest'ultima si troverà tra la prima e la dodicesima posizione. Si ottengono così 12 possibili combinazioni. Se il gioco termina dopo 14 turni si ha dunque che

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{12p^{13}q}{12pq^{13}} = \frac{p^{12}}{q^{12}},$$

lo stesso risultato ottenuto nella (2.9).

Il successivo percorso più breve è ottenuto quando si eseguono 16 lanci: ogni combinazione che porta a una vittoria di A ha probabilità $p^{14}q^2$ mentre ogni combinazione che porta a una vittoria di B ha probabilità p^2q^{14}. Contare il numero di permutazioni è in questo caso più complesso ma le proprietà di simmetria garantiscono che il numero delle vittorie di A e delle vittorie di B sia lo stesso. Se il gioco termina dopo 16 lanci si ha, ancora una volta, che

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{p^{12}}{q^{12}}.$$

Ragionando in maniera analoga, si può dimostrare che, per un gioco di qualunque lunghezza,

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{p^{12}}{q^{12}}.$$

Sostituendo $p = 27/42$ e $q = 15/42$ si ottenne

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{p^{12}}{q^{12}} = \frac{150.094.635.296.999.122}{129.746.337.890.625},$$

lo stesso risultato ottenuto da Pascal nella (2.1). Non avendo a disposizione un calcolatore, è probabile che Fermat sia arrivato al valore finale utilizzando le proprietà dei logaritmi.

La soluzione di Huygens. Huygens inviò la soluzione a Carcavi 15 giorni dopo aver ricevuto il problema. Anche se il metodo di risoluzione non venne incluso nella lettera, fu contenuto in una nota nel 1676 (si vedano [14] e [15]).

Per la dimostrazione Huygens usò una formulazione del problema del giocatore diversa da quella di Pascal anche se equivalente. In particolare, due uomini giocano con tre dadi, il primo giocatore riceve un punto se il risultato della somma dei dadi è 11, e il secondo se è 14. Entrambi i giocatori non hanno denaro e i punti sono accumulati in modo ordinario: per ogni vittoria viene assegnato un punto al giocatore corrispondente.

Vince chi raggiunge per primo i 12 punti. Huygens iniziò la dimostrazione supponendo che il vincitore dovesse raggiungere 2 punti per vincere.

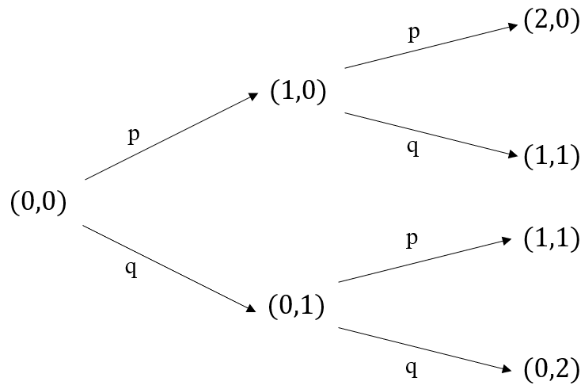


Figura 2.2: Diagramma ad albero che descrive il problema nel caso in cui il giocatore debba raggiungere 2 punti per vincere.

Si denoti sempre con $E(a, b)$ il valore atteso del giocatore A quando A ha a punti e B ha b punti. Si assuma che la posta in gioco sia 1 in modo tale che la probabilità di vittoria di A coincida con la probabilità di rovina del giocatore B. Si ha allora che $E(2, 0) = 1$ e $E(0, 2) = 0$. La probabilità di vittoria di A è $E(0, 0)$. Si ottiene che

$$\begin{cases} E(1,0) &= pE(2,0) + qE(1,1), \\ E(0,1) &= pE(1,1) + qE(0,2), \\ E(0,0) &= pE(1,0) + qE(0,1). \end{cases} \tag{2.10}$$

Per la relazione (2.5) e poiché $E(2, 0) = 1$ e $E(0, 2) = 0$, il sistema diventa

$$\begin{cases} E(1,0) &= p + qE(0,0), \\ E(0,1) &= pE(0,0), \\ E(0,0) &= pE(1,0) + qE(0,1). \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si ottiene che

$$E(0,0) = p(p + qE(0,0)) + qpE(0,0) = p^2 + 2qpE(0,0). \tag{2.11}$$

Ricordandosi che $p + q = 1$ da cui segue che $(p + q)^2 = 1$, l'equazione (2.11) diventa

$$(p + q)^2 E(0,0) = p^2 + 2qpE(0,0).$$

Otteniamo che

$$E(0,0)((p + q)^2 - 2pq) = p^2,$$

da cui

$$E(0,0) = \frac{p^2}{p^2 + q^2}.$$

Huygens continuò la dimostrazione supponendo che il vincitore dovesse raggiungere 4 punti per vincere.

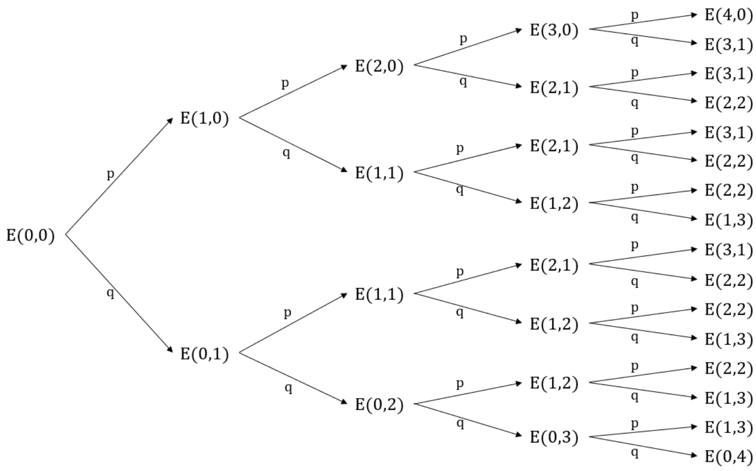


Figura 2.3: Diagramma ad albero che descrive il problema nel caso in cui il giocatore debba raggiungere 4 punti per vincere.

Egli ragionò come nelle relazioni (2.10) ma procedendo a passi di due, ottenendo che

$$\begin{cases} E(2,0) & = p^2 E(4,0) + q^2 E(2,2) = p^2 + q^2 E(0,0), \\ E(0,2) & = p^2 E(2,2) + q^2 E(0,4) = p^2 E(0,0), \\ E(0,0) & = p^2 E(2,0) + q^2 E(0,2), \end{cases}$$

da cui

$$E(0,0) = \frac{p^4}{p^4 + q^4}.$$

L'argomentazione di Huygens non è assolutamente scontata e, dal momento che egli non diede alcuna spiegazione aggiuntiva, non possiamo sapere esattamente quale sia stato il suo ragionamento. Il procedimento esposto sembrerebbe essere errato poiché, procedendo a passi di due, Huygens modifica il gioco: per esempio, non è possibile con questo ragionamento che venga raggiunta la configurazione $(3,1)$, configurazione che nella formulazione originale del gioco si può tuttavia presentare. Nonostante ciò, il valore finale risulta essere corretto. Ciò può essere verificato utilizzando metodi di analisi ad un passo.

Osservando la Figura 2.3 e notando che $E(0,4)=0$ e $E(4,0)=1$, si ha infatti che

$$\begin{aligned}
E(2,0) &= pE(3,0)+qE(2,1)\\
&= p(pE(4,0)+qE(3,1))+q(pE(3,1)+qE(2,2))\\
&= p^2E(4,0)+pqE(3,1)+pqE(3,1)+q^2E(2,2)\\
&= p^2+2pqE(3,1)+q^2E(2,2)\\
&= p^2+2pqE(2,0)+q^2E(0,0),
\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla relazione (2.5). Ricordando ancora che $(p+q)^2=1$ otteniamo

$$((p+q)^2-2pq)E(2,0)=(p^2+q^2)E(2,0)=p^2+q^2E(0,0),$$

da cui

$$E(2,0)=\frac{p^2+q^2E(0,0)}{p^2+q^2}. \tag{2.12}$$

Con calcoli analoghi è possibile mostrare che

$$E(0,2)=\frac{p^2E(0,0)}{p^2+q^2}. \tag{2.13}$$

Osservando la Figura 2.3 si ha infine che

$$\begin{aligned}
E(0,0) &= pE(1,0)+qE(0,1)\\
&= p(pE(2,0)+qE(1,1))+q(pE(1,1)+qE(0,2))\\
&= p^2E(2,0)+pqE(1,1)+pqE(1,1)+q^2E(0,2)\\
&= p^2E(2,0)+2pqE(1,1)+q^2E(0,2),
\end{aligned}$$

che, per la relazione (2.5), diventa

$$E(0,0)=p^2E(2,0)+2pqE(0,0)+q^2E(0,2). \tag{2.14}$$

Sostituendo nella relazione (2.14) la (2.12) e la (2.13), si ha

$$\begin{aligned}
E(0,0) &= p^2\frac{p^2+q^2E(0,0)}{p^2+q^2}+2pqE(0,0)+q^2\frac{p^2E(0,0)}{p^2+q^2}\\
&= \frac{p^4+p^2q^2E(0,0)}{p^2+q^2}+2pqE(0,0)+\frac{p^2q^2E(0,0)}{p^2+q^2}.
\end{aligned}$$

Otteniamo

$$(1-2pq)E(0,0)=\frac{p^4+p^2q^2E(0,0)+p^2q^2E(0,0)}{p^2+q^2}$$

che, ricordando che $1 = (p+q)^2$, diventa

$$\left(1 - \frac{2p^2q^2}{(p^2+q^2)^2}\right) E(0,0) = \frac{p^4}{(p^2+q^2)^2}.$$

Si ottiene

$$((p^2+q^2)^2 - 2p^2q^2)E(0,0) = p^4$$

da cui

$$E(0,0) = \frac{p^4}{p^4+q^4}.$$

In seguito Huygens continuò la dimostrazione supponendo che il vincitore dovesse raggiungere 8 punti per vincere: arrivò anche in questo caso alla conclusione che

$$E(0,0) = \frac{p^8}{p^8+q^8}.$$

Calcolò poi la probabilità nel caso in cui un giocatore dovesse raggiungere 3 punti per vincere. In tal caso $E(3,0) = 1$ e $E(0,3) = 0$.

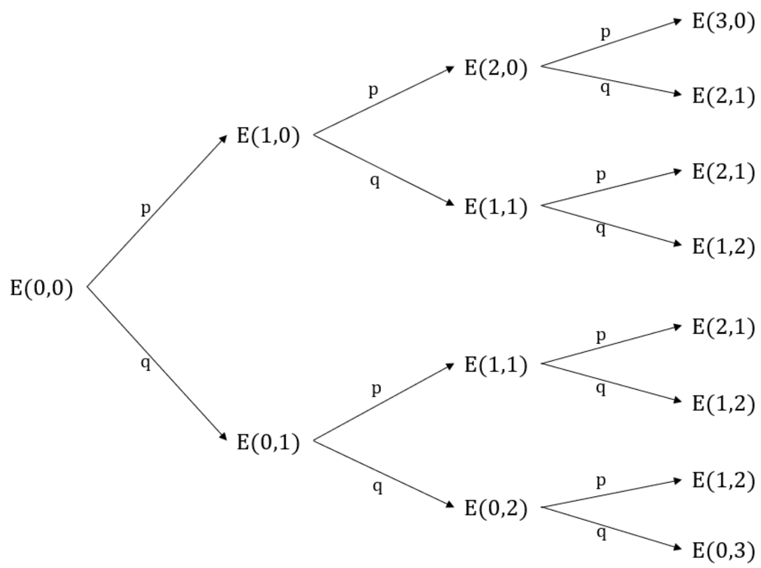


Figura 2.4: Diagramma ad albero che descrive il problema nel caso in cui il giocatore debba raggiungere 3 punti per vincere.

Osservando la Figura 2.4, si ha inoltre che

$$\begin{aligned}E(1,0) &= pE(2,0) + qE(1,1)\\&= p(pE(3,0) + qE(2,1)) + q(pE(2,1) + qE(1,2))\\&= p^2E(3,0) + pqE(2,1) + pqE(2,1) + q^2E(1,2)\\&= p^2 + 2pqE(2,1) + q^2E(1,2)\\&= p^2 + 2pqE(1,0) + q^2E(0,1).\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla relazione (2.5). Procedendo come sopra (usando in particolare $(p+q)^2 = 1$) si ottiene

$$E(1,0) = \frac{p^2 + q^2E(0,1)}{p^2+q^2}. \tag{2.15}$$

Con calcoli analoghi è possibile ottenere che

$$E(0,1) = \frac{p^2E(1,0)}{p^2+q^2}. \tag{2.16}$$

Osservando la Figura 2.4, si ha che

$$E(0,0) = pE(1,0) + qE(0,1). \tag{2.17}$$

Sostituendo nell'equazione (2.17) la (2.15) e la (2.16), si ha

$$\begin{aligned}E(0,0) &= p\frac{p^2 + q^2E(0,1)}{p^2+q^2} + q\frac{p^2E(1,0)}{p^2+q^2}\\&= \frac{p^3 + pq^2E(0,1)}{p^2+q^2} + \frac{p^2qE(1,0)}{p^2+q^2}\\&= \frac{p^3 + pq^2E(0,1) + p^2qE(1,0)}{p^2+q^2}.\end{aligned}$$

Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione per $p^2 + q^2$ e raccogliendo il termine pq si ottiene

$$(p^2+q^2)E(0,0) = p^3 + pq(pE(1,0) + qE(0,1)).$$

Per l'equazione (2.17) si ha

$$(p^2+q^2)E(0,0) = p^3 + pq(E(0,0)),$$

da cui

$$E(0,0) = \frac{p^3}{p^2+q^2-pq}.$$

Ricordando che $1 = p + q$ si ha

$$E(0,0) = \frac{p^3}{(p+q)(p^2+q^2-pq)},$$

da cui

$$E(0,0) = \frac{p^3}{p^3+q^3}.$$

Huygens infine dimostrò il caso in cui il vincitore dovesse raggiungere 6 punti per vincere: arrivò alla conclusione che

$$E(0,0) = \frac{p^6}{p^6+q^6}.$$

Da tutto ciò dedusse che, nel caso in cui il gioco termini quando un giocatore raggiunge n punti, si ha che

$$E(0,0) = \frac{p^n}{p^n+q^n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Di conseguenza

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{\dfrac{p^n}{p^n+q^n}}{\dfrac{q^n}{p^n+q^n}} = \frac{p^n}{q^n}$$

ottenendo lo stesso risultato di Pascal e Fermat. La dimostrazione compiuta da Huygens risulta però essere una prova per induzione incompleta.

La soluzione di Bernoulli e di Struyck. Alla soluzione del problema della rovina del giocatore diede un contributo fondamentale il matematico James Bernoulli. Egli ebbe infatti il merito di generalizzare il problema e completare i risultati ottenuti da Huygens, risultati che vennero pubblicati nel 1713, otto anni dopo la sua morte, nel suo trattato *Ars Conjectandi* [11]. Bernoulli (e in seguito De Moivre) usò una formulazione del problema della rovina del giocatore diversa da quella di Pascal e Huygens ma equivalente. Egli suppose che all'inizio del gioco il giocatore A abbia m monete e il giocatore B ne abbia n e che, per ogni manche, le probabilità di vittoria siano rispettivamente p e $q = 1 - p$. Dopo ogni turno il vincitore guadagna una moneta dal giocatore che perde il turno e il gioco continua finché uno dei due giocatori perde tutti i soldi. Qual è la probabilità di vittoria di A? Si noti che il problema è equivalente a quello fornito da Huygens se si pone $m = n = 12$.

Consideriamo prima il problema nel caso in cui $m = n$. Come visto nella sezione precedente, Huygens risolse il problema nel caso $m = 1, 2, 3, 4, 6, 8$ concludendo che la soluzione generale fosse $P_A : P_B = p^m : q^m$. Nell'*Ars Conjectandi*, Bernoulli considerò la seguente formula ricorsiva

$$e(x) = pe(x+1) + qe(x-1), \qquad x = 1, 2, \dots, 2m-1,$$

dove $e(x)$ indica il valore atteso del guadagno di A, quando A possiede x monete, per $x = 1, ..., 2m-1$. Si ha che $e(0) = 0$ e $e(2m) = 1$. Si noti che, per la definizione data di $E(a, b)$, $e(x) = E(x, 2m-x)$.

Bernoulli risolse l'equazione per $m = 2, 3$ e in seguito affermò che $P_A : P_B = p^m : q^m$, senza però utilizzare il principio di induzione. Al pari di quanto svolto da Huygens, anche la dimostrazione di Bernoulli risultò essere una prova per induzione incompleta. Egli diede la soluzione generale del problema per $m \neq n$ ottenendo

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{p^n q^m - p^{n+m}}{q^{n+m} - p^n q^m}, \tag{2.18}$$

ma lasciando la dimostrazione al lettore.

Una dimostrazione completa del problema generale venne svolta dal matematico olandese Struyck nel 1716 (si veda [12]). L'equazione

$$e(x) = pe(x+1) + qe(x-1), \qquad x = 1, 2, \dots, 2m-1,$$

ricordando che $1 = (p+q)$, può essere scritta come

$$(p+q)e(x) = pe(x+1) + qe(x-1)$$

da cui

$$pe(x+1) = (p+q)e(x) - qe(x-1)$$

che diventa

$$e(x+1) - e(x) = \frac{q}{p}(e(x) - e(x-1)). \tag{2.19}$$

Applicando ricorsivamente la relazione (2.19), si ottiene

$$e(x+1) - e(x) = \left(\frac{q}{p}\right)^x (e(1) - e(0)).$$

Poiché $e(0) = 0$ si ha che

$$e(m) = \sum_{x=0}^{m-1}(e(x+1) - e(x)) = \sum_{x=0}^{m-1}\left(\frac{q}{p}\right)^x e(1) = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^m}{1 - \frac{q}{p}} e(1).$$

D'altra parte, essendo $e(m+n)=1$, ne segue che

$$1 = e(m+n) = \frac{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{m+n}}{1-\dfrac{q}{p}} e(1), \tag{2.20}$$

da cui

$$e(1) = \frac{1-\dfrac{q}{p}}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{m+n}}.$$

Si conclude dalla (2.20) che

$$e(m) = \frac{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{m}}{1-\dfrac{q}{p}} \frac{1-\dfrac{q}{p}}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{m+n}} = \frac{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{m}}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{m+n}}. \tag{2.21}$$

In maniera analoga si può calcolare la probabilità di vittoria del giocatore B sapendo che possiede n monete. Per calcolare quest'ultima è possibile utilizzare la relazione (2.21) ricordando che B ha probabilità di vittoria q di vincere un turno e probabilità p di perderlo. Denotando con $f(n)$ il valore atteso del guadagno di B quando possiede n monete, si ha che

$$f(n) = \frac{1-\left(\dfrac{p}{q}\right)^{n}}{1-\left(\dfrac{p}{q}\right)^{m+n}}.$$

Si noti ora che

$$\begin{aligned}
\frac{P_A}{P_B} = \frac{e(m)}{f(n)} &= \frac{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{m}}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{m+n}} : \frac{1-\left(\dfrac{p}{q}\right)^{n}}{1-\left(\dfrac{p}{q}\right)^{m+n}} = \frac{\dfrac{p^m-q^m}{p^m}}{\dfrac{p^{m+n}-q^{m+n}}{p^{m+n}}} : \frac{\dfrac{q^n-p^n}{q^n}}{\dfrac{q^{m+n}-p^{m+n}}{q^{m+n}}} \\
&= \frac{p^m-q^m}{p^m} \frac{p^{m+n}}{p^{m+n}-q^{m+n}} \frac{q^n}{q^n-p^n} \frac{q^{m+n}-p^{m+n}}{q^{m+n}} \\
&= \frac{p^n}{q^m} \frac{p^m-q^m}{p^n-q^n} = \frac{p^{n+m}-q^m p^n}{p^n q^m - q^{n+m}}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

La (2.22) fornisce dunque un risultato analogo a quello ottenuto da Bernoulli (si veda la relazione (2.18)).

La soluzione di De Moivre. La prima dimostrazione formalmente corretta venne pubblicata da De Moivre nel 1712. Egli produsse una dimostrazione completamente diversa usando un metodo ingegnoso. L'idea della dimostrazione è la seguente: il giocatore A ha a monete e il giocatore B ha b monete che vengono impilate. Le monete sono messe in corrispondenza biunivoca con certi valori come segue.

- Alla moneta che si trova in fondo alla pila del giocatore A viene assegnato come valore $\frac{q}{p}$;
- alla moneta che si trova sopra di essa viene assegnato come valore $\left(\frac{q}{p}\right)^2$;

$$\vdots$$

- alla moneta che si trova in cima alla pila del giocatore A viene assegnato come valore $\left(\frac{q}{p}\right)^a$;
- alla moneta che si trova in cima alla pila del giocatore B viene assegnato come valore $\left(\frac{q}{p}\right)^{a+1}$;
- alla moneta che si trova sotto di essa viene assegnato come valore $\left(\frac{q}{p}\right)^{a+2}$;

$$\vdots$$

- alla moneta che si trova in fondo alla pila del giocatore B viene assegnato come valore $\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}$.

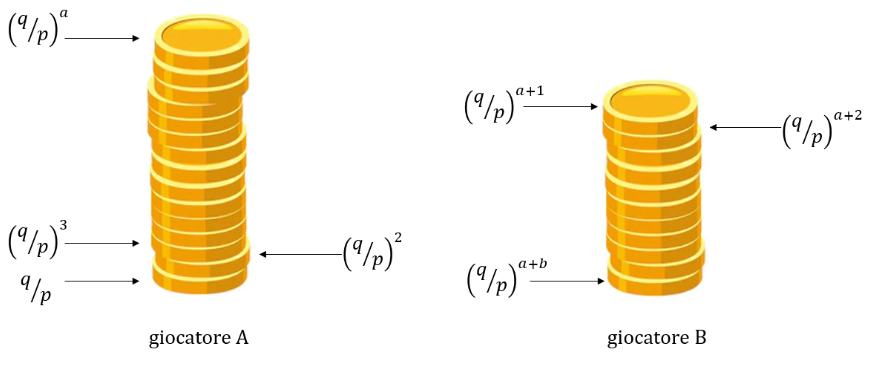


Figura 2.5: Rappresentazione dei valori associati alle monete

Si noti che, in questo modo, in ogni manche vengono utilizzate solo monete a cui sono associati valori del tipo $\left(\frac{q}{p}\right)^x$ e $\left(\frac{q}{p}\right)^{x+1}$. Di conseguenza, indicando con p e q rispettivamente le probabilità di vittoria in un turno di A e di B, il valore del giocatore A in ogni turno è

$$p\left(\frac{q}{p}\right)^{x+1} - q\left(\frac{q}{p}\right)^{x} = \frac{q^{x+1}}{p^x} - \frac{q^{x+1}}{p^x} = 0.$$

Calcolando in maniera analoga il valore di B, ne segue che è uguale a 0. Poiché i valori dei due giocatori sono gli stessi per ogni manche, lo saranno, di conseguenza, anche i valori relativi al gioco intero.

Ne segue che il valore di A nell'intero gioco è uguale al valore di B nell'intero gioco, e, indicando con P_A e P_B rispettivamente le probabilità di vittoria di A e le probabilità di vittoria di B, si ha che

$$P_A\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{a+1} + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}\right] = P_B\left[\left(\frac{q}{p}\right) + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{a}\right].$$

Assumendo che $P_A + P_B = 1$ e raccogliendo termini a fattore comune, si ha

$$P_A\left(\frac{q}{p}\right)^{a+1}\left[1 + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{b-1}\right] = (1-P_A)\left(\frac{q}{p}\right)\left[1 + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{a-1}\right]$$

che diventa

$$P_A\left(\frac{q}{p}\right)^{a}\left[1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{b}\right] = (1-P_A)\left[1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a}\right],$$

da cui

$$P_A\left[1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}\right] = 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a}.$$

Si ha dunque che

$$P_A = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}.$$

Sostituendo $a = b = 12$ si ottiene lo stesso risultato ottenuto da Pascal (si veda la relazione (2.8)).

La soluzione di Ampère. Nonostante Ampère sia noto ai più per il contributo dato come fisico, egli diede un apporto fondamentale anche nella risoluzione di alcuni problemi matematici (si veda [7]). In particolare nel suo primo saggio di matematica *Considérations sur la Théorie mathématique du Jeu* del 1802 [8], studiò il problema della rovina del giocatore utilizzando il calcolo combinatorio e l'espansione delle serie.

Assumendo che il giocatore A avesse una quantità di denaro iniziale m, Ampère si chiese quale sarebbe stata la probabilità di essere rovinato dopo uno specifico numero di turni. Osservò quindi che il giocatore perde se vince N manche e ne perde $m+N$ con $N \in \mathbb{N}$. Indicò in seguito con z il rapporto tra la probabilità di vincere un turno e di perderlo, notando che la prima probabilità potesse essere indicata come $\frac{z}{1+z}$ e la seconda come $\frac{1}{1+z}$. La strategia di Ampère fu di scrivere la probabilità di vincere N turni e di perderne $m+N$ considerando tutte le combinazioni in cui ciò accade. In questo punto nasce una complicazione che lo stesso Fermat notò: il numero di queste combinazioni non è sempre uguale al numero delle combinazioni di classe N di $m+N$ elementi. Se per esempio il giocatore perde i primi m turni, non ha alcun senso considerare le sequenze di N vittorie e $m+N$ sconfitte poiché il gioco si arresta. Ignorando inizialmente queste complicazioni, si ha che ogni combinazione che porta a una sconfitta di A con N vittorie e $m+N$ sconfitte si verifica con probabilità

$$\left(\frac{z}{1+z}\right)^N \left(\frac{1}{1+z}\right)^{m+N} = \frac{z^N}{(1+z)^{m+2N}}.$$

In seguito Ampère calcolò il numero di possibili sequenze in cui si hanno N vittorie e $m+N$ sconfitte e indicò questo numero con A^{m+2N}. Per calcolare A^{m+2N} è necessario sottrarre dal numero di combinazioni di classe N di $m+N$ elementi, il numero dei casi in cui il giocatore viene eliminato dal gioco dopo $m+2r$ turni con $m \leq r < N$. In questi casi le $N-r$ vittorie e le $N-r$ sconfitte che non si presentano possono essere considerate delle possibili sequenze poste all'inizio del gioco. Da questa considerazione segue che

$$\begin{aligned} A^{m+2N} &= \frac{(m+2N)!}{(m+N)!N!} - \sum_{r=0}^{N-1} A^{m+2r} \frac{(2N-2r)!}{(N-r)!(N-r)!} \\ &= \frac{(m+2N)!}{(m+N)!N!} - \sum_{r=0}^{N-1} \frac{(m+2r)!}{(m+r)!r!} \frac{(2N-2r)!}{(N-r)!(N-r)!}. \end{aligned}$$

A causa della presenza di una sommatoria, il calcolo di A^{m+2N} è tutt'altro che banale. Ampère, dopo un lungo lavoro, riuscì a scoprire un modo per riscrivere A^{m+2N} in funzione di $(m+2N-1)!$ ottenendo

$$A^{m+2N} = \frac{m(m+2N-1)!}{N!(m+N)!}. \tag{2.23}$$

La probabilità di essere eliminati dopo m vittorie e $m+N$ sconfitte è dunque

$$A^{m+2N}\left(\frac{z}{1+z}\right)^N\left(\frac{1}{1+z}\right)^{m+N}=\frac{m(m+2N-1)!}{N!(m+N)!}\frac{z^N}{(1+z)^{m+2N}}.$$

Infine Ampère calcolò la probabilità del giocatore A di essere eliminato sommando tra loro i valori di A^{m+2N} al variare di $N\in\mathbb{N}$. Prima di fare ciò utilizzò il criterio di convergenza delle serie per dimostrare che la serie converge se

$$6N>m^2-3m+2.$$

Denotando con P_B la probabilità di sconfitta del giocatore A e ricordando la formula (2.23), si ha

$$P_B=\sum_{N=0}^{+\infty}A^{m+2N}\left(\frac{z}{1+z}\right)^N\left(\frac{1}{1+z}\right)^{m+N}=\sum_{N=0}^{+\infty}\frac{m(m+2N-1)!}{N!(m+N)!}\frac{z^N}{(1+z)^{m+2N}},$$

serie che Ampère riuscì a calcolare espandendo ciascun termine contenente $1+z$ usando il binomio di Newton (Teorema 1.9) e utilizzando alcune formule ricorsive. Facendo ciò ottenne

$$P_B=\left(\frac{1}{z}\right)^m,$$

che risulta essere la probabilità di sconfitta di A se il giocatore B possiede un patrimonio illimitato.

Capitolo 3

Catene di Markov a tempo discreto

Iniziamo la trattazione dando la definizione di processo stocastico. Analizzeremo poi una classe di particolari processi stocastici a tempo discreto noti anche come catene di Markov. Ci soffermeremo in particolare sulle proprietà delle catene di Markov utili per la risoluzione del problema della rovina del giocatore, che verrà studiato con tali strumenti nel capitolo 4. I risultati richiamati sono tratti principalmente da [1], [3], [5].

Supponiamo di voler descrivere matematicamente una quantità aleatoria che evolve nel tempo. Questo corrisponde a una **famiglia di variabili aleatorie** indicizzate mediante un parametro che indica il **tempo**.

Definizione 3.1. *Sia* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *uno spazio di probabilità, sia* E *un insieme* $E \subseteq \mathbb{R}$ *e sia* $T \subseteq \mathbb{R}^+$. *Si definisce* ***processo stocastico*** *una famiglia di variabili aleatorie* $X : \Omega \times T \to E$.

In base alla natura del parametro temporale si distinguono due casi.

- se T è un insieme discreto si parla di **processo stocastico a tempo discreto**;
- se T è un insieme continuo si parla di **processo stocastico a tempo continuo**.

In base alle caratteristiche di E si distinguono due casi:

- se E è discreto si parla di **processo stocastico discreto**;
- se E è continuo si parla di **processo stocastico continuo**.

Nella presente trattazione ci concentreremo solo sullo studio di processi stocastici discreti a tempo discreto. Un esempio di questo tipo è una successione di variabili aleatorie i.i.d. a valori in un insieme E discreto. In generale le variabili aleatorie che intervengono nella descrizione del processo non sono indipendenti, ma legate da relazioni di dipendenza che derivano dalla natura del fenomeno che si vuole descrivere. Per esempio, considerando successioni $(X_n)_n$, può accadere che il valore della variabile aleatoria X_{n+1} dipenda dai valori delle variabili X_1, X_2,...,X_{n-1}.

3.1 Definizione e prime proprietà

Le catene di Markov a tempo discreto sono particolari processi stocastici a tempo discreto in cui il valore della variabile aleatoria X_{n+1} è influenzato solo dal valore della variabile X_n. In altri termini, una volta noto X_n, la conoscenza dei valori di X_1, X_2,..., X_{n-1} è ininfluente per determinare il valore di X_{n+1}. Il termine "catena" fa proprio riferimento a questa particolare struttura.

Definizione 3.2. *Si definisce* ***catena di Markov (a tempo discreto)*** *un processo stocastico a tempo discreto $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che verifica le seguenti proprietà.*

- *Le variabili aleatorie sono discrete e il loro supporto è contenuto nello stesso insieme discreto, ovvero esiste S insieme discreto tale che*

$$S_{X_1} \subset S, ..., S_{X_n} \subset S.$$

  S è detto lo ***spazio degli stati*** *della catena di Markov.*

- *Per ogni scelta di i_1,..., i_{n-1}, i, $j \in S$, vale l'uguaglianza*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_1 = i_1, ..., X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i). \tag{3.1}$$

Quest'ultima proprietà è detta ***proprietà di Markov*** *o dipendenza a "catena".*
La quantità

$$\pi_{i,j}(n) := \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) \tag{3.2}$$

è detta ***probabilità di transizione*** *della catena $(X_n)_n$ all'istante n dallo stato i alla stato j.*

Definizione 3.3. *Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov con spazi degli stati S. Si dice che*

- *$(X_n)_n$ è* ***a stati finiti*** *se S è finito. In tal caso indichiamo con $N = card(S)$.*
- *$(X_n)_n$ è* ***omogenea*** *se $\pi_{i,j}(n)$ è indipendente da n, cioè la probabilità di transizione $\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$ non dipende dal valore di n ma soltanto dai valori di i, j.*
  In tal caso si scrive $\pi_{i,j}$ invece di $\pi_{i,j}(n)$ e si dice che $\pi_{i,j}$ è la probabilità di transizione dallo stato i allo stato j.

In altre parole, nel caso di catene di Markov omogenee, lo stato della catena a un tempo stabilito dipende unicamente dallo stato immediatamente precedente, e non dall'istante dell'osservazione, qualunque sia il tempo considerato. Nel seguito ci occuperemo solo di catene di Markov omogenee e a stati finiti.

3.2 Matrice di transizione

Data $(X_n)_n$ una catena di Markov omogenea e a stati finiti con supporto di cardinalità N, è possibile descrivere completamente la sua struttura di dipendenza a catena utilizzando una matrice quadrata di ordine N, detta matrice di transizione.

Definizione 3.4. *Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov omogenea e a stati finiti con supporto S, con $card(S) = N$. Si chiama **matrice di transizione** la matrice $N \times N$*

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{1,1} & \pi_{1,2} & \dots & \pi_{1,N} \\ \pi_{2,1} & \pi_{2,2} & \dots & \pi_{2,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_{N,1} & \pi_{N,2} & \dots & \pi_{N,N} \end{pmatrix}.$$

Teorema 3.5. *Sia Π la matrice di transizione di una catena di Markov $(X_n)_n$ omogenea e a stati finiti, con supporto in S e $card(S) = N$. Allora vale che*

1. $0 \leq \pi_{i,j} \leq 1$,
2. *la somma degli elementi di una riga vale 1, cioè*

$$\sum_{j=1}^{N} \pi_{i,j} = 1, \qquad \forall i = 1, \dots N. \tag{3.3}$$

Dimostrazione. La proprietà 1 deriva dalla definizione di $\pi_{i,j}$ indicata dalla relazione (3.2), che, essendo una probabilità, ha valori compresi tra 0 e 1.

La proprietà 2 è invece una conseguenza della formula della probabilità totali (Proposizione 1.22). Poniamo

$$B_j = \{X_{n+1} = j\}, \quad \forall i \in S = \{1, \dots, N\}.$$

Si noti che poiché la catena è omogenea, è possibile scegliere n in maniera arbitraria. Di conseguenza gli eventi $B_1, \dots, B_N$ costituiscono una partizione di Ω. Ne segue che, per la formula delle probabilità totali (Proposizione 1.22), definito $A_i = \{X_n = i\}$ per ogni $i \in S$, si ha

$$\mathbb{P}(A_i) = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(A_i \cap B_j),$$

cioè

$$\mathbb{P}(X_n = i) = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(X_n = i, X_{n+1} = j). \tag{3.4}$$

Pertanto si ottiene,

$$\sum_{j=1}^{N} \pi_{i,j} = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = j, X_n = i)}{\mathbb{P}(X_n = i)}$$
$$= \frac{1}{\mathbb{P}(X_n = i)} \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(X_{n+1} = j, X_n = i)$$
$$= 1,$$

dove nell'ultimo passaggio è stata utilizzata la relazione (3.4). □

3.3 Rappresentazione grafica

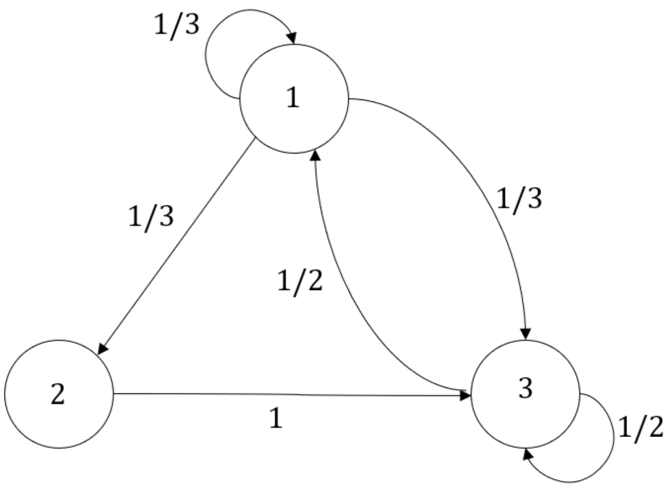
Una catena di Markov può essere rappresentata graficamente tramite un grafo orientato costruito nel seguente modo.

- Ad ogni stato $i \in S$ si fa corrispondere un nodo del grafo.
- Ad ogni probabilità di transizione $\pi_{i,j}$ si fa corrispondere un arco orientato dal nodo i al nodo j. Per non rendere troppo complessa la rappresentazione grafica, un arco viene tracciato solo se la probabilità $\pi_{i,j}$ è strettamente positiva, evitando quindi di rappresentare le probabilità nulle.
- Si riporta il valore di $\pi_{i,j}$ sull'arco corrispondente.

Esempio 3.6. *Consideriamo per esempio una catena di Markov $(X_n)_n$ con spazio degli stati $S = \{1, 2, 3\}$ e matrice di transizione*

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Il grafo ad esso associato è



3.4 Probabilità di transizione a più passi

Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov omogenea e a stati finiti con matrice di transizione $\Pi = (\pi_{i,j})_{i,j}$. Quest'ultima per definizione (si veda la (3.2)) ci fornisce tutte le probabilità condizionate

$$\pi_{i,j} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i), \qquad \forall i, j = 1, \dots, N. \tag{3.5}$$

Quanto vale la probabilità

$$\pi_{i,j}^{(m)} := \mathbb{P}(X_{n+m} = j | X_n = i) \tag{3.6}$$

per un certo $m \geq 0$? Tale probabilità si chiama **probabilità di transizione dallo stato** i **allo stato** j **in** m **passi**. Quando $m = 0$ oppure $m = 1$, tale probabilità di transizione assume l'espressione indicata dalla seguente proposizione.

Proposizione 3.7. *Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov omogenea e a stati finiti con spazio degli stati S, con $card(S) = N$.*

- *Per $m = 0$,*

$$\pi_{i,j}^{(0)} = \begin{cases} 1, & se\ i = j \\ 0, & se\ i \neq j \end{cases}, \qquad \forall i, j \in S. \tag{3.7}$$

Quindi la matrice di componenti $\pi_{i,j}^{(0)}$ *corrisponde alla matrice identità* $N \times N$*, indicata con* I_N*.*

- *Per* $m = 1$*,*

$$\pi_{i,j}^{(1)} = \pi_{i,j}, \qquad \forall i, j \in S.$$

Quindi la matrice di componenti $\pi_{i,j}^{(1)}$ *corrisponde alla matrice* Π *stessa.*

Dimostrazione. Consideriamo separatamente i casi $m = 0$ e $m = 1$.
Caso $m = 0$. Per la relazione (3.6)

$$\pi_{i,j}^{(0)} = \mathbb{P}(X_n = j | X_n = i)$$

dove n è un istante qualsiasi in quanto la catena di Markov è omogenea. Per la definizione di probabilità condizionata (Definizione 1.18), si ha che

$$\mathbb{P}(X_n = j | X_n = i) = \frac{\mathbb{P}(\{X_n = j\} \cap \{X_n = i\})}{\mathbb{P}(X_n = i)}.$$

Di conseguenza

$$\{X_n = i\} \cap \{X_n = j\} = \begin{cases} \{X_n = i\}, & \text{se } i = j, \\ \emptyset, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Quindi

$$\frac{\mathbb{P}(\{X_n = i\} \cap \{X_n = j\})}{\mathbb{P}(X_n = i)} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Caso $m = 1$. Per la relazione (3.6) si ha

$$\pi_{i,j}^{(1)} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \pi_{i,j}.$$

□

Il seguente risultato ci permette di calcolare la transizione da i a j in m passi, con m generico.

Teorema 3.8. *Dati due stati* $i, j \in S$*, le probabilità di transizione in* m *passi* $\pi_{i,j}^{(m)}$ *soddisfano le seguenti equazioni, dette* ***equazioni di Chapman-Kolmogorov****:*

$$\pi_{i,j}^{(m)} = \sum_{r \in S} \pi_{i,r}^{(k)} \pi_{r,j}^{(m-k)}, \qquad \forall m \in \mathbb{N}_0, \forall k \in \{0, 1, \ldots, m\}, \forall i, j \in S,$$

che, scritte in forma matriciale, diventano

$$\Pi^m = \Pi^k \Pi^{m-k}, \qquad \forall m \in \mathbb{N}_0, \quad \forall k \in \{0, 1, \ldots, m\}.$$

Dimostrazione. Se $k = 0$, ricordando la relazione (3.7), segue immediatamente la tesi. Fissato invece $k \in 1, 2, \ldots, m$, si ha

$$\pi_{i,j}^{(m)} = \mathbb{P}(X_m = j | X_1 = i) = \mathbb{P}\left(\{X_m = j\} \cap \left\{ \bigcup_{r \in S} X_k = r \right\} \middle| X_1 = i \right),$$

che, per la σ-additività della probabilità condizionata (Proposizione 1.16) e le proprietà di distribuzione rispetto all'unione (Proposizione 1.17), diventa

$$\begin{aligned} \pi_{i,j}^{(m)} &= \sum_{r \in S} \mathbb{P}(\{X_m = j\} \cap \{X_k = r\} | \{X_1 = i\}) \\ &= \sum_{r \in S} \frac{\mathbb{P}(\{X_m = j\} \cap \{X_k = r\} \cap \{X_1 = i\})}{\mathbb{P}(X_1 = i)}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Per la regola della catena (Proposizione 1.20), la (3.8) diventa

$$\pi_{i,j}^{(m)} = \sum_{r \in S} \frac{\mathbb{P}(X_m = j | \{X_k = r\} \cap \{X_1 = i\}) \mathbb{P}(X_k = r | X_1 = i) \mathbb{P}(X_1 = i)}{\mathbb{P}(X_1 = i)}$$

da cui

$$\pi_{i,j}^{(m)} = \sum_{r \in S} \mathbb{P}(X_m = j | \{X_k = r\} \cap \{X_1 = i\}) \mathbb{P}(X_k = r | X_1 = i).$$

Per la proprietà di Markov (relazione (3.1)) si ottiene che

$$\pi_{i,j}^{(m)} = \sum_{r \in S} \mathbb{P}(X_m = j | X_k = r) \mathbb{P}(X_k = r | X_1 = i) = \sum_{r \in S} \pi_{i,r}^{(k)}(1) \pi_{r,j}^{(m-k)}(k)$$

mentre, sfruttando l'omogeneità della catena si ha

$$\pi_{i,j}^{(m)} = \sum_{r \in S} \pi_{i,r}^{(k)} \pi_{r,j}^{(m-k)}.$$

Riscrivendo l'ultima relazione in forma matriciale, si ottiene che

$$\Pi^m = \Pi^k \Pi^{m-k}.$$

$\square$

Osservazione 3.9. *Per il Teorema 3.8 si ha che,* $\forall m \geq 0$, $\forall i, j \in S, \forall k \in \{0, 1, \ldots, m\}$,

$$\pi_{i,j}^{(m)} = \sum_{r \in S} \pi_{i,r}^{(k)} \pi_{r,j}^{(m-k)} = \pi_{i,1}^{(k)} \pi_{1,j}^{(m-k)} + \cdots + \pi_{i,m}^{(k)} \pi_{m,j}^{(m-k)} \geq \pi_{i,r}^{(k)} \pi_{r,j}^{(m-k)}, \qquad \forall r \in S. \tag{3.9}$$

Teorema 3.10. *Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov omogenea e a stati finiti. Per ogni $m \in \mathbb{N}$, la matrice di componenti $\pi_{i,j}^{(m)}$ è data da*

$$\underbrace{\Pi \cdots \Pi}_{m} = \Pi^m.$$

Π^m è detta matrice di transizione in m passi.

Dimostrazione. Sia S il supporto di $(X_n)_n$. Per il Teorema 3.8 si ha che

$$\Pi^m = \Pi^k \Pi^{m-k}, \qquad \forall m \in \mathbb{N}_0, \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, m\}, \quad \forall i, j \in S.$$

In particolare si ha dunque per $k = 1$

$$\Pi^m = \Pi \cdot \Pi^{m-1}, \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Applicando in maniera ricorsiva tale relazione si ottiene

$$\Pi^m = \Pi \cdot \Pi^{m-1} = \Pi \cdot \Pi \cdot \Pi^{m-2} = \cdots = \underbrace{\Pi \cdots \Pi}_{m}.$$

□

3.5 Distribuzione iniziale e legge della catena

Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov omogenea e a stati finiti con matrice di transizione Π e insieme degli stati S di cardinalità N. Ci poniamo ora il seguente quesito:

qual è la legge della variabile aleatoria X_n?

Poiché X_n è una variabile aleatoria discreta, è necessario trovare il supporto e la densità discreta di X_n. Come supporto considereremo l'insieme degli stati S. Rimane da determinare la densità discreta p_{X_n}. Se supponiamo che lo spazio degli stati sia dato dall'insieme $\{1, 2, \dots, N\}$, allora conoscere la densità discreta p_{X_n} vuol dire conoscere la tabella

X_n	1	2	...	N
p_{X_n}	$p_{X_n}(1)$	$p_{X_n}(2)$	...	$p_{X_n}(N)$

cioè conoscere il vettore riga $\overrightarrow{p}_{X_n}$ dato da

$$\overrightarrow{p}_{X_n} = [p_{X_n}(1), p_{X_n}(2), \dots, p_{X_n}(N)] = [\mathbb{P}(X_n = 1), \mathbb{P}(X_n = 2), \dots, \mathbb{P}(X_n = N)].$$

Per trovare $\overrightarrow{p}_{X_n}$ non è sufficiente conoscere la matrice di transizione Π, dobbiamo anche sapere la distribuzione iniziale della catena di Markov, cioè la distribuzione di X_1.

Definizione 3.11. *Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov a stati finiti. Si definisce* ***distribuzione iniziale*** *di $(X_n)_n$ il vettore*

$$\overrightarrow{p}_{X_1} = [p_{X_1}(1), p_{X_1}(2), \ldots, p_{X_1}(N)] = [\mathbb{P}(X_1 = 1), \mathbb{P}(X_1 = 2), \ldots, \mathbb{P}(X_1 = N)],$$

con $0 \leq p_{X_1}(k) \leq 1$ per $1 \leq k \leq N$ e

$$\sum_{k=1}^{N} p_{X_1}(k) = 1.$$

Vediamo ora come è possibile ottenere la distribuzione $\overrightarrow{p}_{X_2} = [p_{X_2}(1), \ldots, p_{X_2}(N)]$ a partire dalla distribuzione iniziale $\overrightarrow{p}_{X_1}$ e dalla matrice di transizione Π. Sappiamo che, per ogni $k \in S$,

$$p_{X_2}(k) = \mathbb{P}(X_2 = k) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(X_2 = k, X_1 = i)$$

dove l'ultima uguaglianza è una conseguenza della formula delle probabilità totali (Proposizione 1.22). D'altra parte, per la regola della catena (Proposizione 1.20), per ogni $k \in S$,

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(X_2 = k, X_1 = i) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(X_2 = k | X_1 = i)\mathbb{P}(X_1 = i) = \sum_{i=1}^{N} p_{X_1}(i)\pi_{i,k}.$$

Ne segue che

$$\overrightarrow{p}_{X_2} = \overrightarrow{p}_{X_1}\Pi.$$

Inoltre il vettore $\overrightarrow{p}_{X_2}$ è una probabilità, cioè la somma delle sue componenti vale 1 e le componenti sono non negative. Infatti

$$\sum_{k=1}^{N} p_{X_2(k)} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} p_{X_1(i)}\pi_{i,k} = \sum_{i=1}^{N} p_{X_1(i)} \sum_{k=1}^{N} \pi_{i,k},$$

e dato che $\sum_{k=1}^{N} \pi_{i,k} = 1$, si ottiene

$$\sum_{k=1}^{N} p_{X_2(k)} = \sum_{i=1}^{N} p_{X_1(i)} = 1.$$

Infine le componenti di $\overrightarrow{p}_{X_2}$ sono tutte non negative perché sono somme di prodotti di elementi positivi o nulli. In maniera analoga si ottiene che

$$\overrightarrow{p}_{X_3} = \overrightarrow{p}_{X_2}\Pi$$

da cui

$$\overrightarrow{p}_{X_3} = \overrightarrow{p}_{X_1}\Pi \cdot \Pi = \overrightarrow{p}_{X_1}\Pi^2.$$

Più in generale vale il seguente teorema.

Teorema 3.12. *Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov omogenea e a stati finiti con spazio degli stati S di cardinalità N. Allora la distribuzione di X_n è data da*

$$\overrightarrow{p}_{X_n} = \overrightarrow{p}_{X_1}\Pi^{n-1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

In particolare si ha che

$$p_{X_n}(j) = \mathbb{P}(X_n = j) = \sum_{i=1}^{N} p_{X_1}(i)\pi_{i,j}^{(n-1)}, \qquad \forall j \in S, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrazione. Dalla formula delle probabilità totali (Proposizione 1.22) e dalla regola della catena (Proposizione 1.20) si ha che

$$\mathbb{P}(X_n = j) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(X_n = j | X_1 = i)\mathbb{P}(X_1 = i) = \sum_{i=1}^{N} p_{X_1}(i)\pi_{i,j}^{(n-1)}$$

che, in forma matriciale, diventa

$$\overrightarrow{p}_{X_n} = \overrightarrow{p}_{X_1}\Pi^{n-1}.$$

□

Osservazione 3.13. *Anche in questo caso è possibile verificare che il vettore $\overrightarrow{p}_{X_n}$ sia una probabilità, cioè che la somma delle sue componenti sia 1 e le sue componenti siano non negative. Procediamo per induzione su n.*

- *Se $n = 1$ l'asserto è vero in quanto, come già dimostrato, $\overrightarrow{p}_{X_1}$ è una probabilità.*
- *Supponiamo per ipotesi induttiva che $\overrightarrow{p}_{X_{n-1}}$ sia una probabilità. Allora, per quanto dimostrato precedentemente,*

  $$\overrightarrow{p}_{X_n} = \overrightarrow{p}_{X_1}\Pi^{n-1} = \overrightarrow{p}_{X_1}\Pi^{n-2}\Pi = \overrightarrow{p}_{X_{n-1}}\Pi.$$

  Ne segue che

  $$\sum_{k=1}^{N} p_{X_n}(k) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} p_{X_{n-1}}(i)\pi_{i,k} = \sum_{i=1}^{N} p_{X_{n-1}}(i)\sum_{k=1}^{N}\pi_{i,k}.$$

  Dato che $\sum_{k=1}^{N}\pi_{i,k} = 1$, si ottiene

  $$\sum_{k=1}^{N} p_{X_n}(k) = \sum_{i=1}^{N} p_{X_{n-1}}(i) = 1.$$

3.6 Classi comunicanti

Data una catena di Markov $(X_n)_n$ omogenea e a stati finiti con spazio degli stati S, è possibile partizionare S in sottoinsiemi chiamati **classi comunicanti**.

Definizione 3.14. *Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov omogenea e a stati finiti con supporto S. Dati due stati i, $j \in S$, si dice che j è* ***accessibile da*** *i se esiste $m \geq 0$ tale che*

$$\pi_{i,j}^{(m)} > 0.$$

In questo caso scriveremo

$$i \hookrightarrow j.$$

Osservazione 3.15. *Poiché, per definizione, $\pi_{i,i}^{(0)} = 1$, è sempre vero che i è accessibile da se stesso. In altre parole, la relazione "è accessibile da" gode della proprietà riflessiva. Il fatto che i sia accessibile da j non implica però necessariamente che j sia accessibile da i: non è quindi detto che valga la proprietà simmetrica.*

Teorema 3.16. *Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov omogenea e a stati finiti con supporto S. La relazione "è accessibile da" gode della proprietà transitiva: dati tre stati $i, j, k \in S$,*

$$\text{se } i \hookrightarrow j \text{ e } j \hookrightarrow k \text{ allora } i \hookrightarrow k.$$

Dimostrazione. Se i è accessibile da j e j è accessibile da k, significa che esiste $m > 0$ tale che $\pi_{i,j}^{(m)} > 0$ ed esiste $d > 0$ tale che $\pi_{j,k}^{(d)} > 0$; si ha dunque, per la relazione (3.9)

$$\pi_{i,k}^{(m+d)} \geq \pi_{i,j}^{(m)} \pi_{j,k}^{(d)} > 0$$

cioè $i \hookrightarrow k$. □

Teorema 3.17. *Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov omogenea e a stati finiti con supporto S e matrice di transizione Π. Dati $i, j \in S$, $i \neq j$, le due seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$i \hookrightarrow j$;*
2. *esiste $m \in \mathbb{N}$ ed esiste un cammino $i \to i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_{m-1} \to j$ in m passi tale che*
$$\pi_{i,i_1} \pi_{i_1,i_2} \ldots \pi_{i_{m-1},j} > 0.$$

Dimostrazione. Per il Teorema 3.8 si ha che

$$\pi_{i,j}^{(m)} = \sum_{r \in S} \pi_{i,r}^{(k)} \pi_{r,j}^{(m-k)}, \qquad \forall m \in \mathbb{N}_0, \forall k \in \{0, 1, \ldots, m\}, \forall i, j \in S,$$

da cui, scegliendo $k = 1$ e ricordando che, per il Teorema 3.7, $\pi_{i,j}^{(1)} = \pi_{i,j}$ per ogni $i, j \in S$,

$$\pi_{i,j}^{(m)} = \sum_{i_1 \in S} \pi_{i,i_1} \pi_{i_1,j}^{(m-1)}, \qquad \forall m \in \mathbb{N}_0, \forall i, j \in S.$$

Applicando ricorsivamente il Teorema 3.8 si ottiene dunque

$$\pi_{i,j}^{(m)} = \sum_{i_1 \in S} \pi_{i,i_1} \sum_{i_2 \in S} \pi_{i_1,i_2} \pi_{i_2,j}^{(m-2)} = \sum_{i_1,i_2 \in S} \pi_{i,i_1} \pi_{i_1,i_2} \pi_{i_2,j}^{(m-2)} = \sum_{i_1,i_2 \ldots i_{m-1} \in S} \pi_{i,i_1} \pi_{i_1,i_2} \ldots \pi_{i_{m-1},j}.$$

Di conseguenza $\pi_{i,j}^{(m)} > 0$ se e solo se almeno un addendo della sommatoria è positivo, ovvero se e solo se esistono $i_1, i_2 \ldots i_{m-1}$ tali che $\pi_{i,i_1} \pi_{i_1,i_2} \ldots \pi_{i_{m-1},j} > 0$. □

Definizione 3.18. *Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov omogenea e a stati finiti con spazio degli stati S. Dati due stati i, $j \in S$, si dice che gli stati i e j sono* ***comunicanti*** *se $i \hookrightarrow j$ e $j \hookrightarrow i$. In questo caso scriveremo*

$$i \leftrightarrow j.$$

Teorema 3.19. *La relazione "comunicante con" è una relazione di equivalenza sugli spazi degli stati S.*

Dimostrazione. È necessario dimostrare la validità della proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva per la relazione in esame. La proprietà riflessiva è verificata poiché $\pi_{i,i}^{(0)} = 1$ per ogni $i \in S$, si veda il Teorema 3.7. Ne segue che i comunica con se stesso. La proprietà simmetrica è verificata poiché se i comunica con j segue dalla Definizione 3.18 che esistono $n, m \in \mathbb{N}$ tali che $\pi_{i,j}^{(n)} > 0$ e $\pi_{j,i}^{(m)} > 0$. Ne segue che anche j comunica con i. Sempre dalla Definizione 3.18, se i comunica con j e j comunica con k significa che esistono $n, m \in \mathbb{N}$ tali che $\pi_{i,j}^{(n)} > 0$ e $\pi_{j,i}^{(m)} > 0$ ed esistono $r, s \in \mathbb{N}$ tali che $\pi_{j,k}^{(r)} > 0$ e $\pi_{k,j}^{(s)} > 0$. Si ha dunque, per la relazione (3.9), che

$$\pi_{i,k}^{(n+r)} \geq \pi_{i,j}^{(n)} \pi_{j,k}^{(r)} > 0$$

e che

$$\pi_{k,i}^{(s+m)} \geq \pi_{k,j}^{(s)} \pi_{j,i}^{(m)} > 0,$$

pertanto anche la proprietà transitiva è verificata. □

Ne segue che l'insieme degli stati S può essere partizionato in classi di equivalenza, che sono dette **classi comunicanti**. Di conseguenza ogni stato $i \in S$ appartiene ad una e una sola classe comunicante. Se l'insieme $S = \{1, \ldots, N\}$ è composto dalle classi di equivalenza $[1], \ldots, [k]$, $k \leq N$ possiamo scrivere $S = \{[1], \ldots, [k]\}$.

Definizione 3.20. *Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov omogenea e a stati finiti con spazio degli stati S. Diremo che $(X_n)_n$ è* ***irriducibile*** *se esiste un'unica classe comunicante, che coincide con S stesso.*

3.7 Classificazione ed ordinamento degli stati

Definizione 3.21. *Se $(X_n)_n$ non è irriducibile, diremo che dalla classe $[i]$ è possibile* ***raggiungere*** *la classe $[j]$ se ogni elemento della classe $[i]$ comunica con qualche stato della classe $[j]$. Diremo allora che $[j]$ è una* ***classe inferiore*** *alla $[i]$ e scriveremo*

$$[j] \prec [i].$$

La relazione "essere classe inferiore di" non gode della proprietà simmetrica. Infatti, se, per assurdo, $[j] \prec [i]$ e $[i] \prec [j]$ allora gli stati i e j comunicherebbero; di conseguenza le classi $[i]$ e $[j]$ coinciderebbero.

Teorema 3.22. *La relazione "essere classe inferiore di" è una relazione di ordine parziale.*

Dimostrazione. È necessario provare la validità della proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva per la relazione. La proprietà riflessiva è verificata poiché, sapendo che $\pi_{i,i}^{(0)} = 1$, ogni stato della classe $[i]$ comunica con se stesso. Di conseguenza è sempre possibile raggiungere la classe $[i]$ a partire da sé stessa. La proprietà antisimmetrica è verificata poiché se $[j] \prec [i]$ e $[i] \prec [j]$ allora gli stati i e j comunicano e le classi $[i]$ e $[j]$ coincidono. Se dalla classe $[i]$ si raggiunge la classe $[j]$, e dalla classe $[j]$ si raggiunge la classe $[k]$, gli stati di $[k]$ sono accessibili da $[j]$ e gli stati di $[j]$ sono accessibili da $[i]$. Di conseguenza, per la proprietà transitiva della relazione "essere accessibile da", gli stati di $[k]$ sono accessibili da $[i]$. Ne segue che dalla classe $[i]$ si raggiunge la classe $[k]$, pertanto la proprietà transitiva è verificata. $\square$

Poiché la relazione "essere classe inferiore di" è una relazione di ordine parziale, è lecito dare le seguenti definizioni.

Definizione 3.23. *Diremo che una classe di equivalenza è* ***massima*** *se nessuno dei suoi stati può essere raggiunto da stati di altre classi. Viceversa, diremo una classe di equivalenza è* ***minima*** *o* ***ergodica*** *se dai suoi stati non è possibile raggiungere stati di altre classi.*

Osservazione 3.24. *Poiché nelle catene di Markov finite l'insieme degli stati S è finito, esso ammette sempre una classe ergodica e una classe massima che possono coincidere.*

Definizione 3.25. *Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov omogenea e a stati finiti con spazio degli stati S. Sia $C \subseteq S$ una classe di comunicazione. C è una* ***classe chiusa*** *se per ogni $i \in C$ tale che $i \hookrightarrow j$ si ha $j \in C$.*

Osservazione 3.26. *Per le definizioni date precedentemente la nozione di classe chiusa e classe ergodica coincidono per catene a stati finiti.*

Definizione 3.27. *Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov omogenea e a stati finiti con spazio degli stati S. Sia $i \in S$. Chiamiamo* ***istante di primo arrivo in*** i *la variabile aleatoria $T_i : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ definita come*

$$T_i := \min\{n > 1 : X_n = i\}.$$

Lo stato i è detto

- ***transitorio*** *se* $\mathbb{P}(T_i < +\infty | X_1 = i) < 1$,
- ***ricorrente*** *se* $\mathbb{P}(T_i < +\infty | X_1 = i) = 1$.

Poniamo

$$f_i := \mathbb{P}(T_i < +\infty | X_1 = i) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_i = n | X_1 = i).$$

Osservazione 3.28. *Segue dalla Definizione 3.27 che, data $(X_n)_n$ una catena di Markov omogenea e a stati finiti con supporto S, per ogni $i \in S$, i è detto*

- ***transitorio*** *se* $f_i < 1$,
- ***ricorrente*** *se* $f_i = 1$.

Da ciò segue che se i è uno stato ricorrente allora, partendo da i, la catena rivisiterà sicuramente lo stato i. D'altra parte, se i è uno stato transitorio allora, partendo da i, la catena avrà probabilità $1 - f_i$ di non ritornarvi. Di conseguenza, se i è uno stato transitorio, la probabilità che la catena visiti lo stato i esattamente n volte è $f_i^{n-1}(1-f_i)$.

Dato uno stato $i \in S$, definiamo

$$N_i := card\{n \geq 1, X_n = i\} = \sum_{n=1}^{+\infty} 1_{\{X_n = i\}}, \tag{3.10}$$

che rappresenta il numero totale di visite allo stato i.

Teorema 3.29. *Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov omogenea e a stati finiti e sia $i \in S$. Vale che*

- *lo stato i è ricorrente* $\iff$ $\sum_{n=0}^{+\infty} \pi_{i,i}^{(n)} = +\infty$,
- *lo stato i è transitorio* $\iff$ $\sum_{n=0}^{+\infty} \pi_{i,i}^{(n)} = \frac{1}{1-f_i} < +\infty$.

Dimostrazione. (⇒) Dall'Osservazione 3.28, la probabilità che, partendo da i, si ritorni nello stato i esattamente n volte è

$$\mathbb{P}(N_i = n | X_1 = i) = f_i^{n-1}(1 - f_i).$$

Dalla (3.10) e dalla definizione di valore atteso condizionato (Definizione 1.39), si ha che

$$\mathbb{E}[N_i | X_1 = i] = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(N_i = n | X_1 = i) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(N_i = n | X_1 = i). \tag{3.11}$$

Se i è transitorio, per la Proposizione 1.7, l'espressione precedente diventa

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N_i | X_1 = i] &= \sum_{n=0}^{+\infty} n f_i^{n-1}(1 - f_i) = (1 - f_i) \sum_{n=0}^{+\infty} n f_i^{n-1} \\ &= (1 - f_i) \frac{1}{(1 - f_i)^2} = \frac{1}{(1 - f_i)}.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Viceversa se i è ricorrente, per Osservazione 3.28, la formula (3.11) diventa

$$\mathbb{E}[N_i | X_1 = i] = \sum_{n=0}^{+\infty} n = +\infty. \tag{3.13}$$

Inoltre, ricordando la (3.10), la (1.7) e il Teorema 1.8, si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N_i | X_1 = i] =& \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} 1_{\{X_n = i\}} \middle| X_1 = i \right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}[1_{\{X_n = i\}} | X_1 = i] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = i | X_1 = i) = \sum_{n=0}^{+\infty} \pi_{i,i}^{(n)}.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Ne segue che, per la relazione (3.14) e la (3.12), se i è transitorio allora $\sum_{n=0}^{+\infty} \pi_{i,i}^{(n)} = \frac{1}{1-f_i} < +\infty$. Viceversa se i è ricorrente, per la relazione (3.14) e la (3.13), si ha che $\sum_{n=0}^{+\infty} \pi_{i,i}^{(n)} = +\infty$.

(⇐) Se supponiamo che $\sum_{n=0}^{+\infty} \pi_{i,i}^{(n)} = \frac{1}{1-f_i} < +\infty$ e i sia uno stato ricorrente allora, per quanto dimostrato al punto precedente, $\sum_{n=0}^{+\infty} \pi_{i,i}^{(n)} = +\infty$, ottenendo un assurdo. Analogamente, se supponiamo che $\sum_{n=0}^{+\infty} \pi_{i,i}^{(n)} = +\infty$ e i sia uno stato transitorio allora, per quanto dimostrato al punto precedente, $\sum_{n=0}^{+\infty} \pi_{i,i}^{(n)} = \frac{1}{1-f_i} < +\infty$, ottenendo anche in questa caso una contraddizione. □

Teorema 3.30. *Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov omogenea e a stati finiti nell'insieme S e sia $C \subseteq S$ una classe di comunicazione.*

1. *Se lo stato i è ricorrente e $i \in C$, allora per ogni $j \in C$ si ha che j è ricorrente.*

2. *Se lo stato i è transitorio e $i \in C$, allora per ogni $j \in C$ si ha che j è transitorio.*

Dimostrazione. Dimostriamo i due punti separatamente.

1. Poiché $i, j \in C$, esistono m, n tali che $\pi_{i,j}^{(m)} > 0$ e $\pi_{j,i}^{(n)} > 0$. Pertanto dall'equazione (3.9) si ha che
$$\pi_{j,j}^{(n+k+m)} \geq \pi_{j,i}^{(n)} \pi_{i,i}^{(k)} \pi_{i,j}^{(m)} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$
Ne segue che
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \pi_{j,j}^{(n+k+m)} \geq \sum_{k=0}^{+\infty} \pi_{j,i}^{(n)} \pi_{i,i}^{(k)} \pi_{i,j}^{(m)} = \underbrace{\pi_{j,i}^{(n)} \pi_{i,j}^{(m)}}_{>0} \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \pi_{i,i}^{(k)}}_{+\infty} = +\infty$$
dove $\sum_{k=0}^{+\infty} \pi_{i,i}^{(k)} = +\infty$ per il Teorema 3.29.

2. Siano $i, j \in C$ e i stato transitorio. Se j fosse ricorrente per la parte 1 della dimostrazione lo stato i sarebbe ricorrente, ottenendo un assurdo. Ne segue che j è transitorio.

□

Per il Teorema 3.30 diremo che una classe di comunicazione C è una classe transitoria o ricorrente. In particolare, se la catena di Markov è irriducibile, si parla di catena transitoria o ricorrente.

Teorema 3.31. *Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov omogenea e a stati finiti con supporto in S. Allora, data una classe di comunicazione C,*

1. *C è ricorrente $\iff$ C è chiusa;*

2. *C è transitoria $\iff$ C è non chiusa.*

Dimostrazione. Dimostriamo i due punti separatamente.

1. ($\Rightarrow$) Sia $i \in C$ fissato. Dalla Definizione 3.27, se C è ricorrente significa che la catena ritornerà nello stato i con probabilità 1. Dalla Definizione 3.25, per dimostrare che la classe C è chiusa occorre provare che, per ogni $r \in C$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, se $\pi_{i,r}^{(n)} > 0$ allora r appartiene alla stessa classe di comunicazione di i.
Supponiamo per assurdo che esistano r che non appartiene alla stessa classe di comunicazione di i e $n \in \mathbb{N}$ tali che $\pi_{i,r}^{(n)} > 0$. Di conseguenza, poiché gli stati i e r

non appartengono alla stessa classe, per ogni $m \in \mathbb{N}$ $\pi_{r,i}^{(m)} = 0$. Questo implica che, se lo stato r viene raggiunto, non è possibile ritornare allo stato i, cioè

$$\mathbb{P}(T_i < +\infty | X_1 = i) < 1.$$

Per la Definizione 3.27, ciò significa che lo stato i è transitorio, ottenendo un assurdo poiché i appartiene alla classe C che è ricorrente per ipotesi.

($\Leftarrow$) Dalla Definizione 3.25, se C è chiusa significa che

$$\forall i \in C \textit{ tale che } i \hookrightarrow j \textit{ si ha } i \leftrightarrow j.$$

Supponiamo per assurdo che C sia transitoria, cioè

$$\mathbb{P}(T_i < +\infty | X_1 = i) < 1, \qquad \forall i \in C.$$

Ciò significa che esiste un percorso $i \to i_1 \to \dots$ tale che la catena non ritorna mai in i. Perché questo accada è necessario che la catena raggiunga uno stato j tale che i non sia accessibile da j. D'altra parte, poiché j appartiene al cammino percorso, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\pi_{i,j}^{(n)} > 0$. Da ciò segue che

$$\exists i \in C \textit{ tale che } i \hookrightarrow j \textit{ e } i \not\leftrightarrow j$$

cioè C non è una classe di comunicazione chiusa.

2. ($\Rightarrow$) Se la classe C fosse chiusa, per la parte 1 della dimostrazione C sarebbe ricorrente, ottenendo un assurdo. Ne segue che C è non chiusa.

   ($\Leftarrow$) Se la classe C fosse ricorrente, per la parte 1 della dimostrazione C sarebbe chiusa, ottenendo un assurdo. Ne segue che C è transitoria.

□

Per il Teorema 3.31 possiamo ripartire lo spazio degli stati S in classi ricorrenti e classi transitorie, ottenendo $S = T \cup R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_M$, dove T è l'insieme delle classi transitorie e $R_1, R_2 \dots R_m$ sono classi ricorrenti.

Teorema 3.32. *In una catena di Markov irriducibile tutti gli stati sono ricorrenti.*

Dimostrazione. Poiché la catena è a stati finiti deve esistere almeno uno stato ricorrente e poiché la catena è irriducibile lo spazio degli stati S ammette un'unica classe. Ne segue che per il Teorema 3.30 tutti gli stati della catena devono essere ricorrenti. □

3.8 Probabilità di assorbimento

Se la catena possiede più classi ricorrenti è interessante stabilire quale sarà la probabilità di essere assorbiti da una particolare classe ricorrente, partendo da uno stato transitorio.

Definizione 3.33. *Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov omogenea e a stati finiti con supporto in S e sia $C \subseteq S$ una classe chiusa. Definiremo*

$$T_C := \min\{n \geq 1 : X_n \in C\}$$

l'istante di primo arrivo nella classe C.

Teorema 3.34. *Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov omogenea e a stati finiti e spazio degli stati S, con matrice di transizione Π. Siano $R_1, R_2 \dots R_m$ le classi ricorrenti di $(X_n)_n$. Sia $i \in S$. Per ogni $l \in \{1, \dots, m\}$, indichiamo con h_i^ℓ* ***la probabilità di assorbimento della classe ricorrente*** *R_l partendo da i:*

$$h_i^\ell := \mathbb{P}(T_{R_\ell} < +\infty | X_1 = i). \tag{3.15}$$

Si ottiene che

$$h_i^\ell = \begin{cases} 1, & se\ i \in R_\ell, \\ 0, & se\ i \in R_p,\ p \neq \ell, \\ \sum_{k \in S} \pi_{i,k} h_k^\ell, & se\ i \in S \setminus \{R_1 \cup \dots \cup R_m\}. \end{cases} \tag{3.16}$$

Dimostrazione. Poiché i valori di h_i^ℓ per $i \in R_1, \dots, R_m$ sono noti dalle prime due righe della (3.16), la terza riga fornisce un sistema lineare omogeneo di $h = card(S \setminus \{R_1 \cup \dots \cup R_m\})$ equazioni in h incognite. Di conseguenza esiste al più una soluzione di tale sistema.

Occorre verificare che il vettore $(h_i^\ell)_{i \in S}$ sia una soluzione della (3.16). Se $i \in R_\ell$ ne segue che $\mathbb{P}(X_1 \in R_\ell | X_1 = i) = 1$ per cui $\mathbb{P}(T_{R_\ell} < +\infty | X_1 = i) = 1$.

D'altra parte, se $i \in R_p,\ p \neq \ell$, poiché essere classe transitoria equivale a essere classe chiusa, $\mathbb{P}(X_n \in R_p\ \forall n \geq 1 | X_1 = i) = 1$ per cui $\mathbb{P}(T_{R_\ell} < +\infty | X_1 = i) = 0$. Le prime righe della (3.16) sono dunque provate. Rimane da verificare la validità del sistema lineare. Occorre dunque verificare che

$$h_i^\ell = \sum_{k \in S} \pi_{i,k} h_k^\ell, \qquad i \in S \setminus \{R_1 \cup \dots \cup R_m\}.$$

Sia $i \in S \setminus \{R_1 \cup \dots \cup R_m\}$. Si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_{R_\ell} > n | X_1 = i) &= \mathbb{P}(X_2 \notin R_\ell, \dots, X_n \notin R_\ell | X_1 = i) \\ &= \sum_{j \notin R_\ell} \mathbb{P}(X_2 = j, \dots, X_n \notin R_\ell | X_1 = i) \\ &= \sum_{j \notin R_\ell} \mathbb{P}(X_3 \notin R_\ell, \dots, X_n \notin R_\ell | X_2 = j) \mathbb{P}(X_2 = j | X_1 = i), \end{aligned}$$

che, per l'omogeneità della catena diventa

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_{R_\ell} > n | X_1 = i) &= \sum_{j \notin R_\ell} \mathbb{P}(X_2 \notin R_\ell, \ldots, X_{n-1} \notin R_\ell | X_1 = j) \pi_{i,j} \\
&= \sum_{j \notin R_l} \mathbb{P}(T_{R_l} > n - 1 | X_1 = j) \pi_{i,j}.
\end{aligned}$$

Passando al limite per $n \to +\infty$, la cui esistenza è garantita dalla continuità da destra della probabilità condizionata (si veda Proposizione 1.30), si ha

$$\mathbb{P}(T_{R_\ell} = +\infty | X_1 = i) = \sum_{j \notin R_\ell} \mathbb{P}(T_{R_\ell} = +\infty | X_1 = j) \pi_{i,j}$$

che, poiché $\mathbb{P}(T_{R_\ell} = +\infty | X_1 = j) = 0$ se $j \in R_\ell$, diventa

$$\mathbb{P}(T_{R_\ell} = +\infty | X_1 = i) = \sum_{j \in S} \mathbb{P}(T_{R_\ell} = +\infty | X_1 = j) \pi_{i,j}.$$

Di conseguenza, passando al complementare, si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_{R_\ell} < +\infty | X_1 = i) &= 1 - \mathbb{P}(T_{R_\ell} = +\infty | X_1 = i) \\
&= 1 - \sum_{j \in S} \mathbb{P}(T_{R_\ell} = +\infty | X_1 = j) \pi_{i,j} \\
&= 1 - \sum_{j \in S} \pi_{i,j} (1 - \mathbb{P}(T_{R_\ell} < +\infty | X_1 = j)) \\
&= 1 - \sum_{j \in S} \pi_{i,j} + \sum_{j \in S} \pi_{i,j} \mathbb{P}(T_{R_\ell} < +\infty | X_1 = j).
\end{aligned}$$

Ricordando che $\sum_{j \in S} \pi_{i,j} = 1$, abbiamo

$$\mathbb{P}(T_{R_\ell} < +\infty | X_1 = i) = \sum_{j \in S} \pi_{i,j} \mathbb{P}(T_{R_\ell} < +\infty | X_1 = j)$$

da cui

$$h_i^\ell = \sum_{k \in S} \pi_{i,k} h_k^\ell.$$

□

Teorema 3.35. *In una catena di Markov omogenea e a stati finiti, la probabilità che la catena, partendo da qualunque stato, raggiunga in un numero finito di passi una classe ricorrente è pari a 1.*

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che, per l'Osservazione 3.26 e il Teorema 3.31, le nozioni di classe ricorrente, ergodica e chiusa coincidono. Sia k lo stato iniziale della catena. Se k è ricorrente la catena si trova in una classe da cui non potrà più uscire, poiché essere stato ricorrente equivale a essere stato chiuso. Se k è transitorio, poiché per il Teorema 3.31 essere stato transitorio equivale a essere stato non chiuso, esiste j che non appartiene alla stessa classe di k tale che $k \hookrightarrow j$, cioè $[j] \prec [k]$. Reiterando lo stesso ragionamento si ottiene che, mediante passaggi attraverso le classi inferiori di k, in n_k passi viene raggiunta una classe ricorrente. Poiché l'insieme S degli stati è finito, poniamo

$$n = \max_{k \in S} n_k.$$

Ne segue che la probabilità che partendo dallo stato k si raggiungano in al più n passi una classe ricorrente è positiva, cioè esiste un numero $p > 0$ che è inferiore a tale probabilità. Di conseguenza la probabilità che il sistema non raggiunga uno stato transitorio entro n passi, è inferiore a $1 - p$ mentre la probabilità di non raggiungere uno stato ricorrente in hn passi è inferiore a $(1 - p)^h$. Poiché $(1 - p)^h \to 0$ per $h \to +\infty$ si ha che la probabilità che la catena non raggiunga uno stato ricorrente è 0. $\square$

3.9 Distribuzione invariante

Definizione 3.36. *Un vettore a componenti reali $\overrightarrow{\pi}$ è una distribuzione se*

1. *ogni sua componente è compresa tra 0 e 1;*

2. *la somma delle sue componenti è uguale a 1.*

Definizione 3.37. *Sia Π una matrice di transizione e sia $\overrightarrow{\pi}$ una distribuzione. Si definisce $\overrightarrow{\pi}$ una **distribuzione invariante** per Π se*

$$\overrightarrow{\pi} = \overrightarrow{\pi}\Pi,$$

ovvero, indicando con la π_i i-esima componente del vettore $\overrightarrow{\pi}$,

$$\pi_i = \sum_{i \in S} \pi_j \pi_{i,j}. \tag{3.17}$$

Teorema 3.38. *Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov omogenea e a stati finiti con matrice di transizione Π. Se la distribuzione di X_1, $\overrightarrow{p}_{X_1}$, è una distribuzione invariante, ovvero*

$$\overrightarrow{p}_{X_1} = \overrightarrow{p}_{X_1}\Pi,$$

allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la distribuzione $\overrightarrow{p}_{X_n}$ di X_n è ancora $\overrightarrow{p}_{X_1}$.

Dimostrazione. Dal Teorema 3.12 si ha che, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\overrightarrow{p}_{X_n} = \overrightarrow{p}_{X_1}\Pi^{n-1} = \underbrace{\overrightarrow{p}_{X_1}\Pi}_{\overrightarrow{p}_{X_1}}\Pi^{n-2} = \overrightarrow{p}_{X_1}\Pi^{n-2} = \cdots = \overrightarrow{p}_{X_1}\Pi = \overrightarrow{p}_{X_1}.$$

□

In altre parole, se la legge iniziale è una distribuzione invariante, tutte le X_n avranno la stessa legge.

Teorema 3.39. *Sia* $(X_n)_n$ *una catena di Markov omogenea a stati finiti e sia* Π *la matrice di transizione associata alla catena di Markov. Allora esiste almeno una probabilità invariante per* Π.

Dimostrazione. Sia S lo spazio degli stati con $card(S) = N$. Introduciamo

$$D = \{\overrightarrow{\phi} = (\phi(1), \ldots, \phi(N)) : \phi(k) \geq 0 \text{ per } 1 \leq k \leq N \text{ e } \phi(1) + \cdots + \phi(N) = 1\},$$

cioè l'insieme di tutte le distribuzioni di una variabile aleatoria che può assumere N valori. Sappiamo che una distribuzione $\overrightarrow{\phi}$ è invariante se e solo se

$$\overrightarrow{\phi} = \overrightarrow{\phi}\Pi.$$

Consideriamo una qualche $\overrightarrow{\phi} \in D$ e definiamo una successione di elementi di D ponendo

$$\overrightarrow{\phi_n} := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{\phi}\Pi^k, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.18}$$

Per ogni n si ha che ogni componente di $\overrightarrow{\phi_n}$ è non negativa poiché combinazione lineare di quantità non negative. Verifichiamo che la somma delle sue componenti è uguale a 1. Si ha

$$\sum_{i=1}^{N} \phi_n(i) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\phi\Pi^k)(i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=0}^{n-1}(\phi\Pi^k)(i), \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

da cui, tenendo conto che scritto per componenti $\phi\Pi^k(i) = \sum_{h=0}^{N} \phi(h)\pi_{h,i}^{(k)}$, si ottiene

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{h=0}^{N} \phi(h)\pi_{h,i}^{(k)} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{h=0}^{N} \phi(h)\sum_{i=1}^{N} \pi_{h,i}^{(k)}.$$

Come indicato nella relazione (3.3) si ha che $\sum_{i=1}^{N} \pi_{h,i}^{(k)} = 1$ da cui si ottiene

$$\sum_{i=1}^{N} \phi_n(i) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\sum_{h=0}^{N} \phi(h)}_{1} = \frac{1}{n} n = 1,$$

dove $\sum_{h=0}^{N} \phi(h) = 1$ poiché $\overrightarrow{\phi}$ è una distribuzione.

D è un insieme compatto in $\mathbb{R}^N$ perché è chiuso e limitato, ne segue che esiste una sottosuccessione $(\overrightarrow{\phi_{n_k}})$ di $(\overrightarrow{\phi_n})$ convergente a un determinato $\overrightarrow{\pi} \in D$. Verifichiamo che $\overrightarrow{\pi}$ è tale che $\overrightarrow{\pi} = \overrightarrow{\pi}\Pi$.

Per ogni $k \in \mathbb{N}$, per la relazione (3.18) si ha

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\phi_{n_k}} - \overrightarrow{\phi_{n_k}}\Pi &= \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} \overrightarrow{\phi}\Pi^i - \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} \overrightarrow{\phi}\Pi^{i+1} \\
&= \frac{1}{n_k} \overrightarrow{\phi} \left(\sum_{i=0}^{n_k-1} \Pi^i - \sum_{i=0}^{n_k-1} \Pi^{i+1} \right) \\
&= \frac{1}{n_k} \overrightarrow{\phi} (I + \Pi + \cdots + \Pi^{n_k-1} - \Pi - \cdots - \Pi^{n_k-1} - \Pi^{n_k}) \\
&= \frac{1}{n_k} \overrightarrow{\phi} (I - \Pi^{n_k}) = \frac{1}{n_k} (\overrightarrow{\phi} - \overrightarrow{\phi}\Pi^{n_k}).
\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\lim_{k \to +\infty} (\overrightarrow{\phi_{n_k}} - \overrightarrow{\phi_{n_k}}\Pi) = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{n_k} (\overrightarrow{\phi} - \overrightarrow{\phi}\Pi^{n_k}). \tag{3.19}$$

Ora osservando che $\overrightarrow{\phi}$ e $\overrightarrow{\phi}\Pi^{n_k}$ sono vettori di N componenti tutte appartenenti all'intervallo $[0, 1]$, segue che

$$||\overrightarrow{\phi}|| \leq \sqrt{N} \ e \ ||\overrightarrow{\phi}\Pi^{n_k}|| \leq \sqrt{N},$$

da cui

$$||\overrightarrow{\phi} - \overrightarrow{\phi}\Pi^{n_k}|| \leq 2\sqrt{N}.$$

Pertanto dalla (3.19) si ha

$$\lim_{k \to +\infty} ||\overrightarrow{\phi_{n_k}} - \overrightarrow{\phi_{n_k}}\Pi|| = \lim_{k \to +\infty} \left|\left| \frac{1}{n_k} (\overrightarrow{\phi} - \overrightarrow{\phi}\Pi^{n_k}) \right|\right| = 0.$$

Ricordando che $(\overrightarrow{\phi_{n_k}})$ converge a $\overrightarrow{\pi}$, otteniamo

$$\overrightarrow{\pi} - \overrightarrow{\pi}\Pi = 0$$

$\square$

Il Teorema 3.39 non garantisce l'unicità della distribuzione invariante. Per capire in quali casi è unica, è necessario introdurre la nozione di **catena regolare**.

Definizione 3.40. *Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov omogenea e stati finiti con matrice di transizione Π. Diremo che $(X_n)_n$ è regolare se esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che*

$$\pi_{i,j}^{(n_0)} > 0, \qquad \forall i, j \in S,$$

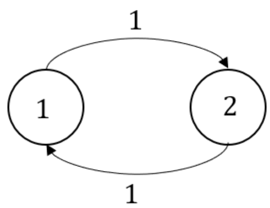
cioè se la matrice Π^{n_0} ha tutte le componenti strettamente positive.

Osservazione 3.41. *Se una catena di Markov è regolare allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\pi_{i,j}^{(n_0)} > 0$ per ogni $i, j \in S$; è quindi possibile andare da un qualunque stato i a un qualunque stato j in al più n_0 passi. Di conseguenza $(X_n)_n$ ha un'unica classe comunicante che coincide con S. Dunque, se una catena di Markov è regolare allora è irriducibile. In generale non è vero il contrario, come dimostra il seguente esempio.*

Esempio 3.42. *Sia $(X_n)_n$ la catena di Markov con matrice di transizione*

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e grafo orientato



Allora $(X_n)_n$ è irriducibile ma non regolare. Infatti $\Pi^2 = I_2$, dove I_2 è la matrice identità di ordine 2. Quindi Π^n è uguale a Π se n è dispari ed è uguale a I_2 se n è pari. Di conseguenza Π^n non ha mai tutte le componenti strettamente positive, cioè $(X_n)_n$ non è mai regolare.

Vediamo, di seguito, quali sono le condizioni necessarie e sufficienti affinché una catena di Markov sia regolare.

Definizione 3.43. *Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov omogenea e stati finiti con matrice di transizione Π. Definiamo il **periodo di uno stato** $i \in S$ come*

$$d_i := MCD\{n \geq 1 : \pi_{i,i}^{(n)} > 0\}.$$

*La catena si dice **aperiodica** se $d_i = 1$ per ogni $i \in S$.*

Teorema 3.44. *Tutti gli stati di una stessa classe di comunicazione hanno lo stesso periodo.*

Dimostrazione. Consideriamo due stati i, j della stessa classe di comunicazione e supponiamo che i loro periodi siano rispettivamente d_i e d_j. Poiché i, j appartengono alla stessa classe, esistono n, m tali che $\pi_{i,j}^{(n)} > 0$ e $\pi_{j,i}^{(m)} > 0$. Per la relazione (3.9), si ha che

$$\pi_{i,i}^{(n+m)} \geq \pi_{i,j}^{(n)} \pi_{j,i}^{(m)},$$

da cui segue che $n+m$ è multiplo di d_i. Sia s un numero positivo tale per cui $\pi_{j,j}^{(sd_j)} > 0$. Si ha, per la relazione (3.9), che

$$\pi_{i,i}^{(n+sd_j+m)} \geq \pi_{i,j}^{(n)} \pi_{j,j}^{(sd_j)} \pi_{j,i}^{(m)}$$

da cui segue che $n + sd_j + m$ è multiplo di d_i. Di conseguenza sd_j è divisibile per d_i che, per l'arbitrarietà di s, implica che d_j è divisibile per d_i . Scambiando il ruolo di i e j si prova che d_i è divisibile per d_j ottenendo $d_i = d_j$.

□

Teorema 3.45. *Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov omogenea e stati finiti. Allora $(X_n)_n$ è regolare se e solo se $(X_n)_n$ è irriducibile e aperiodica.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Abbiamo già osservato che se $(X_n)_n$ è regolare allora è irriducibile. Supponiamo che d sia il periodo per ogni stato $i \in S$. Ci rimane da provare che la catena è aperiodica. Poiché $(X_n)_n$ è regolare, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\pi_{i,j}^{(n_0)} > 0, \qquad \forall i, j \in S.$$

Se $n_0 = 1$ la catena è aperiodica poiché $\pi_{i,i} > 0$ per ogni $i \in S$. Se $n_0 > 1$ si ha

$$\pi_{i,i}^{(n_0+1)} = \sum_{j \in S} \pi_{i,j} \pi_{j,i}^{(n_0)}, \qquad \forall i \in S.$$

Per la relazione (3.3), $\forall i \in S$, $\sum_{j \in S} \pi_{i,j} = 1$ e $\pi_{j,i}^{(n_0)} > 0$. Pertanto si avrà necessariamente $\pi_{i,i}^{(n_0+1)} > 0$. Procedendo in maniera analoga si ottiene $\pi_{i,i}^{(n_0+m)} > 0$ per ogni $m \geq 1$ e $i \in S$, da cui segue l'aperiodicità della catena.

($\Leftarrow$) Poiché la catena è a stati finiti, è sufficiente dimostrare che, per ogni $i, j \in S$, esiste $N_{i,j} \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq N_{i,j}$, si ha $\pi_{i,j}^{(n)} > 0$. Iniziamo dimostrando che, per ogni $i \in S$, esiste $N_i \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq N_i$, si ha $\pi_{i,i}^{(n)} > 0$. Definiamo l'insieme

$$T_i := \{n \geq 1 : \pi_{i,i}^{(n)} > 0\}.$$

Poiché la catena è aperiodica, $d_i = MCD(T_i) = 1$ per cui esistono $n_1, n_2 \dots, n_k \in T_i$ il cui massimo comune divisore è 1. Per il Teorema di Bézout (Teorema 1.1) esistono $a_1, a_2 \dots, a_k \in \mathbb{Z}$ tali che

$$a_1 n_1 + a_2 n_2 + \dots + a_k n_k = 1.$$

Definiamo ora

$$m := |a_1| n_1 + |a_2| n_2 + \dots + |a_k| n_k$$

e $N_i := m^2$. Se $n \geq N_i$, esistono e sono unici $q \geq 0$ e $0 \leq r \leq m$ tali che $n = mq + r$.

Dimostriamo che $n \in T_i$. Osserviamo che l'insieme T_i è chiuso per la somma: se $n, m \in T_i$, per la relazione (3.9),

$$\pi_{i,i}^{(n+m)} \geq \pi_{i,i}^{(n)} \pi_{i,i}^{(m)},$$

cioè $n + m \in T_i$. Da ciò segue che $m \in T$ perché combinazione lineare di elementi di T_i a coefficienti in $\mathbb{N}_0$. D'altra parte, ricordando il Teorema di Bézout,

$$\begin{aligned} m + 1 &= m + a_1 n_1 + a_2 n_2 + \dots + a_k n_k \\ &= (|a_1| + a_1) n_1 + (|a_2| + a_2) n_2 + \dots + (|a_k| + a_k) n_k \in T_i \end{aligned}$$

poiché $|a_i| + a_i \geq 0$. Dunque si ha

$$n = mq + r = mq - mr + mr + r = m(q - r) + (m + 1) r \in T_i$$

poiché combinazione a coefficienti interi positivi di due elementi di T_i.

Ricordando che la catena è irriducibile, per ogni $i \neq j$ esiste $m_{i,j} \in \mathbb{N}$ tale che $\pi_{i,j}^{(m_{i,j})} > 0$. Poniamo $N_{i,j} := N_i + m_{i,j}$. Per la relazione (3.9), per ogni $n \geq N_{i,j}$ si ha

$$\pi_{i,j}^{(n)} \geq \pi_{i,i}^{(n - m_{i,j})} \pi_{i,j}^{(m_{i,j})}.$$

Poiché $n \geq N_{i,j}$ allora $n - m_{i,j} \geq N_i$ da cui segue che $\pi_{i,i}^{(n-m_{i,j})} > 0$. Ricordando che anche $\pi_{i,j}^{(m_{i,j})} > 0$ segue la tesi del teorema. $\square$

Teorema 3.46. ***(Teorema di convergenza all'equilibrio o ergodico)****. Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov omogenea e a stati finiti con matrice di transizione Π.*

Se $(X_n)_n$ è regolare allora esiste un'unica distribuzione invariante $\overrightarrow{\pi}$ tale che, per ogni sia $i \in S$,

$$\lim_{n \to +\infty} \pi_{i,j}^{(n)} = \pi_j, \qquad \forall j \in S.$$

Inoltre, esistono $C > 0$ costante positiva e $0 \leq q < 1$ tali che, $\forall i, j \in S$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|\pi_{i,j}^{(n)} - \pi_j| \leq C q^n,$$

cioè la velocità di convergenza a $\overrightarrow{\pi}$ è esponenziale.

Dimostrazione. Esistenza del limite di $\pi_{i,j}^{(n)}$. Per ogni $j \in S$, definiamo

$$m_j^{(n)} := \min_{i \in S} \pi_{i,j}^{(n)}, \qquad M_j^{(n)} := \max_{i \in S} \pi_{i,j}^{(n)}. \tag{3.20}$$

Per il Teorema 3.8, si ha che

$$\pi_{i,j}^{(n+1)} = \sum_{k \in S} \pi_{i,k} \pi_{k,j}^{(n)},$$

da cui si ottiene che

$$m_j^{(n+1)} = \min_{i \in S} \pi_{i,j}^{(n+1)} = \min_{i \in S} \left(\sum_{k \in S} \pi_{i,k} \pi_{k,j}^{(n)} \right) \geq \min_{i \in S} \left(\sum_{k \in S} \pi_{i,k} \min_{h \in S} \pi_{h,j}^{(n)} \right)$$

ovvero

$$m_j^{(n+1)} \geq \min_{h \in S} \pi_{h,j}^{(n)} \min_{i \in S} \left(\sum_{k \in S} \pi_{i,k} \right). \tag{3.21}$$

Per le proprietà della matrice di transizione, sappiamo che $\sum_{k \in S} \pi_{i,k} = 1$, per cui anche $\min_{i \in S} \sum_{k \in S} \pi_{i,k} = 1$. Pertanto, usando la relazione (3.20) che definisce $m_j^{(n)}$, dalla relazione (3.21) otteniamo

$$m_j^{(n+1)} \geq m_j^{(n)}.$$

Ne segue che la successione $(m_j^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona crescente per ogni $i \in S$. In maniera analoga si dimostra che la successione $(M_j^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona decrescente. Perciò, per provare l'esistenza di $\lim_{n \to +\infty} \pi_{i,j}^{(n)}$ è sufficiente mostrare che

$$\lim_{n \to +\infty} M_j^{(n)} - m_j^{(n)} = 0, \qquad \forall j \in S.$$

Poiché per ipotesi la catena di Markov è regolare, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\pi_{i,j}^{(n_0)} > 0$ per ogni $i, j \in S$. Definiamo $\varepsilon := \min_{i,j} \pi_{i,j}^{(n_0)}$ che, per quanto detto sarà strettamente positivo. Allora per il Teorema 3.8 si ha che

$$\begin{aligned} \pi_{i,j}^{(n_0+n)} &= \sum_{k \in S} \pi_{i,k}^{(n_0)} \pi_{k,j}^{(n)} = \sum_{k \in S} \pi_{i,k}^{(n_0)} \pi_{k,j}^{(n)} - \varepsilon \sum_{k \in S} \pi_{j,k}^{(n)} \pi_{k,j}^{(n)} + \varepsilon \sum_{k \in S} \pi_{j,k}^{(n)} \pi_{k,j}^{(n)} \\ &= \sum_{k \in S} (\pi_{i,k}^{(n_0)} - \varepsilon \pi_{j,k}^{(n)}) \pi_{k,j}^{(n)} + \varepsilon \pi_{j,j}^{(2n)}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Dalla definizione di ε e poiché $\pi_{j,k}^{(n)} \in [0,1]$ si ha $\pi_{i,k}^{(n_0)} - \varepsilon \pi_{j,k}^{(n)} \geq 0$. Dunque, dalla definizione di $m_j^{(n)}$ e dalle relazioni (3.22) e (3.3) , otteniamo

$$\pi_{i,j}^{(n_0+n)} \geq m_j^{(n)} \sum_{k \in S} (\pi_{i,k}^{(n_0)} - \varepsilon \pi_{j,k}^{(n)}) + \varepsilon \pi_{j,j}^{(2n)} = m_j^{(n)} (1 - \varepsilon) + \varepsilon \pi_{j,j}^{(2n)}.$$

Per l'arbitrarietà di i si ottiene

$$m_j^{(n_0+n)} \geq m_j^{(n)}(1-\varepsilon) + \varepsilon \pi_{j,j}^{(2n)}. \tag{3.23}$$

In maniera analoga, dalla definizione di $M_j^{(n)}$ e dalle relazioni (3.22) e (3.3) si ottiene

$$M_j^{(n_0+n)} \leq M_j^{(n)}(1-\varepsilon) + \varepsilon \pi_{j,j}^{(2n)}. \tag{3.24}$$

Utilizzando la (3.23) e la (3.24), si ha

$$M_j^{(n_0+n)} - m_j^{(n_0+n)} \leq (M_j^{(n)} - m_j^{(n)})(1-\varepsilon)$$

da cui

$$\begin{aligned} M_j^{(hn_0+n)} - m_j^{(hn_0+n)} &\leq (M_j^{((h-1)n_0+n)} - m_j^{((h-1)n_0+n)})(1-\varepsilon) \\ &\leq (M_j^{((h-2)n_0+n)} - m_j^{((h-2)n_0+n)})(1-\varepsilon)(1-\varepsilon) \\ &\leq \cdots \leq (M_j^{(n_0+n)} - m_j^{(n_0+n)})(1-\varepsilon)^{h-1} \\ &\leq (M_j^{(n)} - m_j^{(n)})(1-\varepsilon)^h. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Poiché $0 < \varepsilon \leq 1$, $\lim_{h\to+\infty}(1-\varepsilon)^h = 0$, per cui

$$\lim_{h\to+\infty} M_j^{(hn_0+n)} - m_j^{(hn_0+n)} = 0.$$

Abbiamo trovato che esiste una sottosuccessione di $(M_j^{(n)} - m_j^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ che converge a 0. Poiché la successione $(M_j^{(n)} - m_j^{n)})_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona decrescente, ammette limite per $n \to +\infty$ che coincide con quello di ogni sua sottosuccessione, pertanto

$$\lim_{n\to+\infty} M_j^{(n)} - m_j^{(n)} = 0, \qquad \forall j \in S.$$

Definiamo dunque $\overrightarrow{\pi} = (\pi_j)_j$ dove

$$\pi_j := \lim_{n\to+\infty} m_j^{(n)}, \qquad \forall j \in S.$$

Invarianza di $\overrightarrow{\pi}$. Dal Teorema 3.12 si ha che

$$\overrightarrow{p}_{X_{n+1}} = \overrightarrow{p}_{X_n}\Pi. \tag{3.26}$$

Dal Teorema 3.8 sappiamo che

$$p_{X_n}(j) = \sum_{i=1}^{N} p_{X_1}(i)\pi_{i,j}^{(n-1)}$$

per cui

$$\lim_{n\to+\infty} p_{X_n}(j) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{N} p_{X_1}(i)\pi_{i,j}^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{N} p_{X_1}(i)\pi_j = \pi_j, \tag{3.27}$$

dove l'ultimo passaggio segue dal fatto che $\sum_{i=1}^{N} p_{X_1}(i) = 1$. Di conseguenza dall'equazione (3.26) si ha

$$\overrightarrow{\pi} = \overrightarrow{\pi}\Pi.$$

Unicità di $\overrightarrow{\pi}$. Sia $\overrightarrow{\pi_1}$ un'altra misura invariante per Π, cioè

$$\overrightarrow{\pi_1} = \overrightarrow{\pi_1}\Pi.$$

Per il Teorema 3.38, se $\overrightarrow{p}_{X_1} = \overrightarrow{\pi_1}$,

$$\overrightarrow{p}_{X_n} = \overrightarrow{p}_{X_1}\Pi = \overrightarrow{\pi_1}\Pi = \overrightarrow{\pi_1}.$$

Ricordando che per la relazione (3.27) $\lim_{n\to+\infty} \overrightarrow{p}_{X_n} = \overrightarrow{\pi}$, segue che $\overrightarrow{\pi_1} = \overrightarrow{\pi}$.

Convergenza esponenziale. Indichiamo con $z[a]$ parte intera di a e poniamo $h = z[n/n_0]$. Notiamo che $hn_0 \leq n$. Poiché la successione $(M_j^{(n)} - m_j^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona decrescente, per la (3.25) si ha

$$M_j^{(n)} - m_j^{(n)} \leq M_j^{(hn_0)} - m_j^{(hn_0)} \leq (M_j^{(0)} - m_j^{(0)})(1-\varepsilon)^h = (1-\varepsilon)^h, \qquad \forall j \in S,$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $M_j^{(0)} = 1$ e $m_j^{(0)} = 0$. □

Si noti che l'esistenza di un'unica misura invariante si ha anche in casi in cui non vi è alcuna convergenza all'equilibrio, come si vede nel seguente esempio.

Esempio 3.47. *Riprendiamo l'Esempio 3.42. Abbiamo osservato che* $(X_n)_n$ *è irriducibile ma non regolare. Tuttavia esiste una distribuzione* $\overrightarrow{\pi}$ *per* $(X_n)_n$*. Infatti, imponendo*

$$\overrightarrow{\pi} = \overrightarrow{\pi}\Pi,$$

si ottiene il seguente sistema

$$\begin{cases} \pi_1 = \pi_2, \\ \pi_2 = \pi_1. \end{cases}$$

Poiché deve essere $\pi_1 + \pi_2 = 1$ *si ottiene* $\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2}$.

Le catene di Markov irriducibili su uno spazio degli stati finiti hanno la proprietà di ammettere sempre una e una sola distribuzione invariante. Per dimostrare tale risultato è necessario provare la seguente proposizione.

Proposizione 3.48. *Sia* Π *la matrice di transizione di una catena di Markov omogenea e a stati finiti, e sia*

$$Q := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \Pi^n. \tag{3.28}$$

Allora Q *è anch'essa una matrice di transizione. Inoltre, se* Π *è irriducibile, allora tutti gli elementi di* Q *sono strettamente positivi.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 1.6 la serie di matrici (3.28) converge perché ogni elemento di Π^n è una probabilità per cui ogni elemento della matrice ha un valore che appartiene all'intervallo $[0, 1]$. I termini di Q sono tutti maggiori o uguali a 0, bisogna provare che la somma degli elementi sulle righe sia pari a 1. Si ha

$$\sum_{j=1}^{m} q_{i,j} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \pi_{i,j}^{(n)}}_{1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} 2 = 1.$$

Infine se Π è irriducibile, allora per ogni $i, j \in S$, con S insieme dei stati, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\pi_{i,j}^{(n)} > 0$. Poiché la serie ha tutti termini non negativi, ne segue che qualche termine della serie che definisce $q_{i,j}$ è maggiore di 0, cioè $q_{i,j} > 0$. Di conseguenza tutti i termini di Q sono positivi. □

Teorema 3.49. *Sia* $(X_n)_n$ *una catena di Markov omogenea e a stati finiti. Se* $(X_n)_n$ *è irriducibile, allora essa ammette una e una sola distribuzione invariante.*

Dimostrazione. Assumiamo che Π sia irriducibile. Per la Proposizione 3.48 è possibile definire la matrice di transizione

$$Q = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \Pi^n.$$

Supponiamo inoltre che $\vec{\pi}_1$ e $\vec{\pi}_2$ siano distribuzioni invarianti per Π per cui

$$\vec{\pi}_1 \Pi = \vec{\pi}_1 \quad e \quad \vec{\pi}_2 \Pi = \vec{\pi}_2.$$

Segue che, $\vec{\pi}_1$ e $\vec{\pi}_2$ sono probabilità invarianti per Q. Infatti, ricordando che $\vec{\pi}_1 \Pi^n = \vec{\pi}_1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\vec{\pi}_1 Q = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \vec{\pi}_1 \Pi^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \vec{\pi}_1 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \vec{\pi}_1 = \frac{1}{2} 2 \vec{\pi}_1 = \vec{\pi}_1.$$

In maniera analoga si può dimostrare che

$$\vec{\pi}_2 Q = \vec{\pi}_2.$$

Osservando che Q ha tutti i termini strettamente positivi, si deduce che Q è regolare, quindi per il Teorema Ergodico 3.21 esiste una sola probabilità invariante per Q. Di conseguenza

$$\vec{\pi}_1 = \vec{\pi}_2.$$

□

Teorema 3.50. *Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov omogenea e a stati finiti con matrice di transizione Π. Siano $R_1, \dots, R_m$ le classi ricorrenti di $(X_n)_n$. Allora le distribuzioni invarianti di Π sono tutte e sole quelle della forma*

$$\vec{\pi} = \sum_{\ell=1}^{m} \alpha_\ell \vec{\pi}^{\ell}, \quad \alpha_\ell \geq 0, \quad \ell = 1, \dots, m, \quad \sum_{\ell=1}^{m} \alpha_\ell = 1, \tag{3.29}$$

dove $\vec{\pi}^{\ell}$ è l'unica distribuzione invariante della catena rispetto a R_ℓ. $\vec{\pi}^{\ell}$ viene identificata come una distribuzione su S ottenuta ponendo $\pi_j^{\ell} = 0$ se $j \notin R_\ell$.

Dimostrazione. Dimostriamo che le distribuzioni nella forma (3.29) sono invarianti per Π. Sia $\vec{\pi}^{\ell}$ l'unica distribuzione invariante della catena ristretta rispetto a R_ℓ, identificata con una distribuzione su S ponendo $\pi^{\ell}(j) = 0$ se $j \notin R_\ell$. Per il Teorema 3.46 sappiamo che $\vec{\pi}^{\ell}$ esiste ed è unica poiché la catena ristretta rispetto a R_ℓ è irriducibile. Se $i \in R_\ell$ allora $\pi_{i,j} = 0$ per ogni $j \notin R_\ell$, pertanto si ha che $\vec{\pi}^{\ell}$ è una distribuzione invariante dell'intera catena, ovvero $\vec{\pi}^{\ell} = \vec{\pi}^{\ell}\Pi$. Poiché tale proprietà vale per ogni $i = 1, \dots, m$, e la condizione di invarianza è lineare, segue che tutti i vettori riga nella forma (3.29) sono invarianti per Π.

Sia $\vec{\pi}$ una distribuzione invariante per Π. Dimostriamo che allora è nella forma (3.29). Cominciamo con il dimostrare che $\pi_j = 0$ se $j \in S \setminus \{R_1 \cup \dots \cup R_m\}$. Poiché $\vec{\pi}$ è una distribuzione invariante, per ogni $n \geq 1$,

$$\vec{\pi} = \vec{\pi}\Pi,$$

per cui

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i \pi_{i,j}^{(n)}. \tag{3.30}$$

Per ogni $j \in S$, consideriamo la variabile aleatoria $V_j : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ definito come

$$V_j := \max\{n \geq 1 : X_n = j\},$$

dove poniamo $V_j = 0$ se la catena non visita mai j. Ricordiamo che, qualunque sia lo stato iniziale i, uno stato transitorio j viene visitato un numero finito di volte, quasi certamente, ovvero $\mathbb{P}(V_j = +\infty | X_1 = i) = 0$ per ogni $i \in S$. Tenendo conto che

$$\pi_{i,j}^{(n)} \leq \mathbb{P}(V_j \geq n | X_1 = i),$$

si ha
$$\lim_{n\to+\infty} \pi_{i,j}^{(n)} \leq \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(V_j \geq n|X_1 = i) = \mathbb{P}(V_j = +\infty|X_1 = i) = 0.$$
Poiché $\pi_{i,j} \geq 0$ per ogni $i, j \in S$, otteniamo
$$\lim_{n\to+\infty} \pi_{i,j}^{(n)} = 0, \tag{3.31}$$
da cui, ricordando che la relazione (3.30) vale per $n \in \mathbb{N}$, si ottiene $\pi_j = 0$.

Denotiamo ora con $\overrightarrow{\pi}\big|_{R_\ell} = (\pi_j)_{j\in R_\ell}$ la restrizione di $\overrightarrow{\pi}$ a R_ℓ e con $\Pi_l = (\pi_{i,j})_{i,j\in R_\ell}$ la restrizione di Π a R_ℓ. Poiché $\overrightarrow{\pi} = \overrightarrow{\pi}\Pi$ si ha $\overrightarrow{\pi}\big|_{R_l} = \overrightarrow{\pi}\big|_{R_\ell}\Pi_\ell$. Allora, essendo $\overrightarrow{\pi}^\ell$ l'unica distribuzione invariante di Π_ℓ, si ha
$$\overrightarrow{\pi}\big|_{R_\ell} = \sum_{i\in R_\ell} (\overrightarrow{\pi}\big|_{R_\ell})_i \overrightarrow{\pi}^\ell.$$
Definendo $\alpha_\ell := \sum_{i\in R_\ell} (\overrightarrow{\pi}\big|_{R_\ell})_i$, con $l = 1, \dots, m$, si ottiene
$$\pi_j = \begin{cases} 0, & \text{se } j \in S \setminus \{R_1 \cup \dots \cup R_m\}, \\ \alpha_\ell \pi_j^\ell, & \text{se } j \in R_\ell, \quad \ell = 1, \dots, m. \end{cases}$$
Ovviamente si ha per definizione che $\sum_{\ell=1}^m \alpha_\ell = 1$. □

3.10 Tempo di prima visita

Ricordando la Definizione 3.27 di istante di primo arrivo T_j in uno stato $j \in S$, poniamo
$$\rho_{i,j} = \mathbb{P}(T_j < +\infty|X_1 = i) = \mathbb{P}(\{\exists n \in \mathbb{N} : X_n = j\}|X_1 = i), \qquad \forall i, j \in S. \tag{3.32}$$
Si noti che $\rho_{i,j}$ è la probabilità che la catena visiti prima o poi lo stato j partendo dallo stato i. Nel caso in cui $i = j$ si ha dalla Definizione 3.27 che $\rho_{i,i} = f_i$, pertanto dall'Osservazione 3.28 lo stato i sarà

- **transitorio** se $\rho_{i,i} < 1$,
- **ricorrente** se $\rho_{i,i} = 1$.

3.11 Probabilità di assorbimento entro un tempo prestabilito

In questa sezione calcoleremo la probabilità che, partendo da uno stato i, la catena $(X_n)_n$ raggiunga uno stato ricorrente prima di un certo tempo stabilito. Indichiamo con

R l'insieme degli stati ricorrenti, con T l'insieme degli stati transitori della catena, e poniamo

$$\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n \in R\}. \tag{3.33}$$

Definiamo

$$\phi_i(n) := \mathbb{P}(\tau \leq n | X_1 = i). \tag{3.34}$$

Teorema 3.51. *La probabilità che la catena raggiunga uno stato ricorrente entro un certo tempo n è data dalla seguente formula*

$$\phi_i(n+1) = \phi_i(2) + \sum_{r \in T} \pi_{i,r} \phi_r(n), \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.35}$$

Dimostrazione. Siano $i \in S$ e $n \in \mathbb{N}$. Definiamo

$$\pi_i^{(n)} := \mathbb{P}(\{X_2 \in T\} \cap \{X_3 \in T\} \cap \dots \{X_{n-1} \in T\} \cap \{X_n \in R\} | X_1 = i). \tag{3.36}$$

Per il Teorema 3.8

$$\pi_i^{(k+1)} = \sum_{r \in T} \pi_{i,r} \pi_r^{(k)}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.37}$$

Ne segue che

$$\phi_i(2) = \mathbb{P}(\tau = 2 | X_1 = i) = \pi_i^{(2)} = \sum_{j \in R} \pi_{i,j}. \tag{3.38}$$

Di conseguenza, per le relazioni (3.34) e (3.36) si ottiene

$$\mathbb{P}(\tau \leq n+1 | X_1 = i) = \phi_i(n+1) = \sum_{k=2}^{n+1} \pi_i^{(k)} = \pi_i^{(2)} + \sum_{k=3}^{n+1} \pi_i^{(k)},$$

che, ricordando le relazioni (3.37) e (3.38), diventa

$$\begin{aligned} \phi_i(n+1) = \phi_i(2) + \sum_{k=2}^{n} \pi_i^{(k+1)} &= \phi_i(2) + \sum_{k=2}^{n} \sum_{r \in T} \pi_{i,r} \pi_r^{(k)} \\ &= \phi_i(2) + \sum_{r \in T} \pi_{i,r} \sum_{k=2}^{n} \pi_r^{(k)} = \phi_i(2) + \sum_{r \in T} \pi_{i,r} \phi_r(n), \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio segue dal fatto che $\sum_{k=2}^{n} \pi_r^{(k)} = \phi_r(n)$. $\square$

3.12 Tempo medio di assorbimento

In questa sezione calcoleremo il tempo medio che una catena di Markov impiega ad entrare in uno stato ricorrente. Per il Teorema 3.35 è noto che, per una catena di Markov finita, la probabilità di entrare in uno stato ricorrente è pari a 1. Ora siamo interessati a calcolare il numero medio di passi necessari per raggiungere la classe degli stati ricorrenti. Indichiamo ancora con R l'insieme degli stati ricorrenti, con T l'insieme degli stati transitori. Sia τ la variabile aleatoria definita nella (3.33). Poiché l'insieme R si raggiunge con probabilità 1, τ è finito, quasi certamente. Dati S l'insieme degli stati della catena e $i \in S$, poniamo

$$\tau_i := \mathbb{E}[\tau | X_1 = i]. \tag{3.39}$$

Definendo $\pi_i^{(n)}$ come nella (3.36) si ha, per la Definizione 1.36, che

$$\tau_i = \mathbb{E}[\tau | X_1 = i] = \sum_{n=1}^{+\infty} n \pi_i^{(n)}. \tag{3.40}$$

Prima di calcolare i tempi medi τ_i è necessario introdurre il risultato seguente.

Proposizione 3.52. *Sia T l'insieme degli stati transitori di una catena di Markov e, per ogni $i \in S$, siano*

$$u_i^{(n)} = \mathbb{P}(\{X_2 \in T\} \cap \cdots \cap \{X_{n-1} \in T\} \cap \{X_n \in T\} | X_1 = i), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.41}$$

la probabilità di passare per stati transitori per un tempo n finito, una volta partiti da i, e

$$u_i = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=2}^{+\infty} \{X_n \in T\} \big| X_1 = i \right),$$

la stessa probabilità ma per un tempo infinito. Allora per ogni $i \in T$ la successione $(u_i^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ è decrescente e

$$\lim_{n \to +\infty} (u_i^{(n)}) = u_i, \qquad \forall i \in T.$$

Inoltre

$$u_i = \sum_{j \in T} \pi_{i,j} u_j, \qquad \forall i \in T, \tag{3.42}$$

e se l'insieme T è finito, allora l'unica soluzione del sistema (3.42) è

$$u_i = 0, \qquad \forall i \in T.$$

Dimostrazione. Poiché le $(u_i^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ rappresentano le probabilità di eventi contenuti l'uno nell'altro, per la proprietà di monotonia della probabilità condizionata (Proposizione 1.16) la successione $(u_i^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ è decrescente. Inoltre, per la definizione di $u_i^{(n)}$ in (3.41), si ha

$$u_i^{(n+1)} = \sum_{j \in T} \pi_{i,j} u_j^{(n)}, \quad \forall i \in T, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.43}$$

La successione è anche limitata poiché $0 \leq u_i^{(n)} \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, per cui esiste u_i tale che

$$\lim_{n \to +\infty} (u_i^{(n)}) = u_i.$$

L'equazione (3.42) si ottiene passando al limite nella relazione (3.43). Se l'insieme T è finito, allora ricordando la relazione (3.9) e iterando l'equazione (3.42), si ha

$$u_i = \sum_{j \in T} \pi_{i,j} u_j = \sum_{j,k \in T} \pi_{i,j} \pi_{j,k} u_k \leq \sum_{k \in T} \pi_{i,k}^{(2)} u_k. \tag{3.44}$$

Ne segue che, iterando la relazione (3.44) n volte, otteniamo che

$$|u_i| \leq \sum_{j \in T} \pi_{i,j}^{(n)} |u_j| \leq \max_{j \in T}\{|u_j|\} \sum_{j \in T} \pi_{i,j}^{(n)}.$$

Per la relazione (3.31), la tesi segue calcolando il limite per $n \to +\infty$. □

Teorema 3.53. *Sia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una catena di Markov omogenea e a stati finiti con spazio degli stati S. Sia R l'insieme degli stati ricorrenti, T l'insieme degli stati transitori e, per ogni $i \in S$, sia τ_i definito dalla relazione (3.39). Allora*

1. *τ_i ha valore finito, per ogni $i \in S$;*
2. *si ha*
$$\tau_i = 1 + \sum_{r \in T} \pi_{i,r} \tau_r, \qquad \forall i \in S; \tag{3.45}$$
3. *il sistema (3.45) ha una sola soluzione.*

Dimostrazione. Dimostriamo i tre punti separatamente.

1. Ricordando che, per la (3.40), $\tau_i = \mathbb{E}[\tau | X_1 = i]$, poiché per il Teorema 3.35 τ, definito dalla relazione (3.33), non ammette $+\infty$ tra i suoi valori, si ha che $\tau_i < +\infty$.
2. Dalla relazione (3.40) si ha
$$\tau_i = \sum_{n=1}^{+\infty} n \pi_i^{(n)} = \pi_i^{(1)} + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) \pi_i^{(n+1)} = \pi_i^{(1)} + \sum_{n=1}^{+\infty} n \pi_i^{(n+1)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \pi_i^{(n+1)}$$
che, ricordando la formula (3.39) che definisce $\pi_i^{(n)}$, e notando che per il Teorema 3.35
$$\pi_i^{(1)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \pi_i^{(n+1)} = 1,$$

diventa

$$\tau_i = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} n\pi_i^{(n+1)}.$$

Poiché $\pi_i^{(n+1)} = \sum_{r\in T} \pi_{i,r}\pi_r^{(n)}$, si ottiene

$$\tau_i = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} n \sum_{r\in T} \pi_{i,r}\pi_r^{(n)},$$

che, scambiando l'ordine delle sommatorie, diventa

$$\tau_i = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} n \sum_{r\in T} \pi_{i,r}\pi_r^{(n)} = 1 + \sum_{r\in T} \pi_{i,r} \sum_{n=1}^{+\infty} n\pi_r^{(n)} = 1 + \sum_{r\in T} \pi_{i,r}\tau_r.$$

3. Dati $i \in T$, τ_i e w_i due soluzioni distinte del sistema (3.45), si ha

$$\tau_i - w_i = \sum_{r\in T} \pi_{i,r}(\tau_r - w_r) = 0,$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dalla Proposizione 3.52.

□

3.13 Reversibilità

La nozione di reversibilità di una catena di Markov è molto utile se si è interessati a calcolarne la distribuzione invariante.

Definizione 3.54. *Sia $(X_n)_n$ una catena regolare di Markov omogenea e a stati finiti con spazio degli stati S. Sia Π la sua matrice di transizione e sia $\overrightarrow{\pi}$ la sua unica distribuzione invariante tale che $\pi_i > 0$ per ogni $i \in S$. Definiamo la matrice $Q = (q_{i,j})_{i,j\in S}$ come la matrice i cui elementi soddisfano*

$$\pi_i q_{i,j} = \pi_j \pi_{j,i}, \qquad \forall i, j \in S. \tag{3.46}$$

Diremo che la catena è reversibile se $q_{i,j} = \pi_{i,j}$ per ogni $i, j \in S$.

Osservazione 3.55. *Poiché per la (3.46) $q_{i,j} = \frac{\pi_j\pi_{j,i}}{\pi_i}$, la matrice Q ha tutti elementi non negativi e vale che*

$$\sum_{j\in S} q_{i,j} = \sum_{j\in S} \frac{\pi_j}{\pi_i}\pi_{j,i} = \frac{1}{\pi_i}\sum_{j\in S} \pi_j\pi_{j,i} = \frac{\pi_i}{\pi_i} = 1,$$

dove la terza uguaglianza è ottenuta dalla relazione (3.17).

Osservazione 3.56. *L'interpretazione di $q_{i,j}$ è la seguente:*

$$q_{i,j} = \mathbb{P}(X_n = j | X_{n+1} = i).$$

Supponiamo infatti che la distribuzione iniziale della catena $(X_n)_n$ sia $\overrightarrow{\pi}$. In questo caso si avrà

$$\mathbb{P}(X_n = i) = \pi_i, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall i \in S. \tag{3.47}$$

Di conseguenza, per la formula di Bayes (1.6), si ottiene

$$\mathbb{P}(X_n = j | X_{n+1} = i) = \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = i | X_n = j)\mathbb{P}(X_n = j)}{\mathbb{P}(X_{n+1} = i)},$$

che per la (3.46) e la (3.47) diventa

$$\mathbb{P}(X_n = j | X_{n+1} = i) = \frac{\pi_j}{\pi_i}\pi_{j,i} = q_{i,j}. \tag{3.48}$$

Teorema 3.57. *Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov omogenea e a stati finiti con spazio degli stati S, con la matrice di transizione $\Pi = (\pi_{i,j})_{i,j}$. Sia $\overrightarrow{\pi} = (\pi_i)_i$ una distribuzione su S, e sia Q una matrice i cui elementi $q_{i,j}$ soddisfano la 3.46. Allora $\overrightarrow{\pi}$ è una distribuzione invariante di Π.*

Dimostrazione. Fissato $i \in S$, per la (3.46) si ha

$$\sum_{j \in S} \pi_j \pi_{j,i} = \sum_{j \in S} \pi_i q_{i,j} = \pi_i \sum_{j \in S} q_{i,j} = \pi_i,$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla (3.3). □

3.14 Tempo medio di ritorno in uno stato

Se $(X_n)_n$ è una catena di Markov irriducibile ammette un'unica classe comunicante, per cui non ha senso calcolare la probabilità di raggiungere le classi ricorrenti. Calcoliamo invece il tempo medio che la catena impiega a passare da uno stato i a uno stato j dati. Ponendo

$$T_j := \min\{n \in \mathbb{N} : X_n = j\}, \quad \forall j \in S,$$

il tempo medio impiegato ad andare dallo stato i allo stato j è dato da

$$\tau_{i,j} := \mathbb{E}[T_j | X_1 = i], \quad \forall i, j \in S. \tag{3.49}$$

Teorema 3.58. *Siano $i, j \in S$ e $\tau_{i,j}$ il tempo medio definito nella (3.49). Allora vale*

$$\tau_{i,j} = 1 + \sum_{k \neq j} \pi_{i,k} \tau_{k,j}.$$

Dimostrazione. Ricordando la definizione di valore atteso condizionato (Definizione 1.36), si ha che

$$\begin{aligned}
\tau_{i,j} = \mathbb{E}[T_j|X_1 = i] &= \sum_{n=2}^{+\infty} n\mathbb{P}(T_j = n|X_1 = i) = \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)\mathbb{P}(T_j = n+1|X_1 = i) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(T_j = n+1|X_1 = i) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_j = n+1|X_1 = i) \\
&= \mathbb{P}(T_j < +\infty|X_1 = i) + \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(T_j = n+1|X_1 = i) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(T_j = n+1|X_1 = i). \qquad (3.50)
\end{aligned}$$

Poiché la catena è irriducibile, per il Teorema 3.32 tutti gli stati sono ricorrenti e di conseguenza, per la relazione (3.32), $\mathbb{P}(T_j < +\infty|X_1 = i) = 1$ per ogni $j \in S$. Ne segue che per il Teorema 3.35 lo stato i comunica con j in un tempo finito con probabilità 1.

Se $n \geq 1$ e $T_j = n + 1$ si ha che, se la prima transizione avviene da i a $k \neq j$ con probabilità $\pi_{i,k}$, dallo stato k occorrono n transizioni per raggiungere per la prima volta j. Ne segue che

$$\mathbb{P}(T_j = n+1|X_1 = i) = \sum_{k \neq j} \pi_{i,k}\mathbb{P}(T_j = n|X_1 = k).$$

La (3.50) pertanto diventa

$$\begin{aligned}
\tau_{i,j} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} n \sum_{k \neq j} \pi_{i,k}\mathbb{P}(T_j = n|X_1 = k) \\
&= 1 + \sum_{k \neq j} \pi_{i,k} \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(T_j = n|X_1 = k) \\
&= 1 + \sum_{k \neq j} \pi_{i,k}\tau_{k,j}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.59. *Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov omogenea e a stati finiti, con supporto in S. Sia inoltre $(X_n)_n$ una catena irriducibile con distribuzione invariante $\overrightarrow{\pi} = (\pi_i)_{i \in S}$. Risulta che*

$$\tau_{i,i} = \frac{1}{\pi_i}, \quad \forall i \in S.$$

Dimostrazione. Per il Teorema 3.58 si ha che

$$\tau_{i,j} = 1 + \sum_{k \neq j} \pi_{i,k}\tau_{k,j}, \qquad \forall i, j \in S.$$

Addizionando e sottraendo il termine $\pi_{i,j}\tau_{j,j}$ si ottiene, detto $N = card(S)$,

$$\tau_{i,j} = 1 + \sum_{k=1}^{N} \pi_{i,k}\tau_{k,j} - \pi_{i,j}\tau_{j,j}, \qquad \forall i, j \in S,$$

da cui

$$\sum_{i=1}^{N} \pi_i\tau_{i,j} = \sum_{i=1}^{N} \pi_i \left(1 + \sum_{k=1}^{N} \pi_{i,k}\tau_{k,j} - \pi_{i,j}\tau_{j,j}\right) = \sum_{i=1}^{N} \pi_i + \sum_{i=1}^{N} \pi_i \sum_{k=1}^{N} \pi_{i,k}\tau_{k,j} - \sum_{i=1}^{N} \pi_i\pi_{i,j}\tau_{j,j}$$

che, ricordando $\sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1$ poiché $\overrightarrow{\pi}$ è una distribuzione, diventa

$$\sum_{i=1}^{N} \pi_i\tau_{i,j} = 1 + \sum_{k=1}^{N} \tau_{k,j} \sum_{i=1}^{N} \pi_i\pi_{i,k} - \tau_{j,j} \sum_{i=1}^{N} \pi_i\pi_{i,j}.$$

Ricordando la relazione (3.17), si ha che

$$\sum_{i=1}^{N} \pi_i\tau_{i,j} = 1 + \sum_{k=1}^{N} \tau_{k,j}\pi_k - \tau_{j,j}\pi_j$$

da cui, semplificando le espressioni $\sum_{i=1}^{N} \pi_i\tau_{i,j}$ e $\sum_{k=1}^{N} \tau_{k,j}\pi_k$, si ricava

$$\tau_{j,j}\pi_j = 1,$$

da cui segue la tesi. □

Capitolo 4

Risoluzione del problema con la teoria delle catene di Markov

In questo capitolo ci occuperemo di risolvere il problema della rovina del giocatore analizzato nel capitolo 2 utilizzando la teoria delle catena di Markov esposta nel capitolo 3. Tra le diverse formulazioni introdotte in precedenza, utilizzeremo quella che segue.

Due giocatori A e B disputano varie manche di un gioco. In ciascuna giocata la probabilità di vittoria di A è p, mentre la probabilità di vittoria di B è $q = 1 - p$. Il giocatore A inizia a giocare con la disponibilità di m euro e il giocatore B con la disponibilità di k euro. Dopo ogni giocata, chi vince riceve 1 euro dall'avversario. Il gioco termina se uno dei due contendenti rimane senza denaro. Poiché nei casi in cui $p = 0, 1$ il problema è banale, supporremo da qui in avanti $p \in]0, 1[$.

Per risolvere il problema risulta essere molto efficace utilizzare la teoria delle catene di Markov presentata nel capitolo 3. Si può, infatti studiare l'andamento del gioco soffermandosi solo sulla quantità di denaro posseduta dal giocatore A, essendo la somma di denaro di A e B sempre $m + k$. Possiamo dunque descrivere la quantità di denaro posseduta da A alla manche n come una variabile aleatoria X_n. Per la formulazione del problema,

$$X_{n+1} = X_n + Z_{n+1},$$

dove $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ è una famiglia di variabili aleatorie i.i.d. con $Z_{n+1} = +1$ o $Z_{n+1} = -1$ con probabilità rispettivamente p e q.

Poiché la probabilità di vittoria di A è costante, la quantità di denaro posseduta al turno n dipenderà solo dalla quantità di denaro posseduta al turno $n-1$. Di conseguenza X_n è una variabile aleatoria discreta i cui valori appartengono all'insieme finito $S = \{0, 1, 2, \ldots, m + k\}$ e vale la seguente proprietà: $\forall\ i_1,..., i_{n-1}, i, j \in S$ e $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_1 = i_1, ..., X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i),$$

con $\mathbb{P}(X_{n+1} = j|X_n = i)$ che non dipende dal valore di n ma soltanto dai valori di i e j.

Per le Definizioni 3.2 e 3.3, possiamo concludere che la successione $(X_n)_n$ è una **catena di Markov**, **omogenea** e a **stati finiti**. Per quanto detto nelle sottosezioni 3.2 e 3.3, è possibile descrivere completamente la struttura di dipendenza a catena di $(X_n)_n$ tramite la corrispondente matrice di transizione e il corrispondente grafo orientato.

In base ai dati del problema è noto che:

- $\mathbb{P}(A$ vince un turno$)=\mathbb{P}(B$ perde un turno$)= p$;
- $\mathbb{P}(A$ perde un turno$)=\mathbb{P}(B$ vince un turno$)= q$;
- X_n rappresenta la quantità di denaro di A al tempo n;
- $S = \{0, 1, 2, \dots, m + k\}$ è lo spazio degli stati.

Introducendo le probabilità di transizione della catena (si veda (3.5)) si avrà

(i) $\pi_{0,0} = \pi_{k+m,k+m} = 1$;

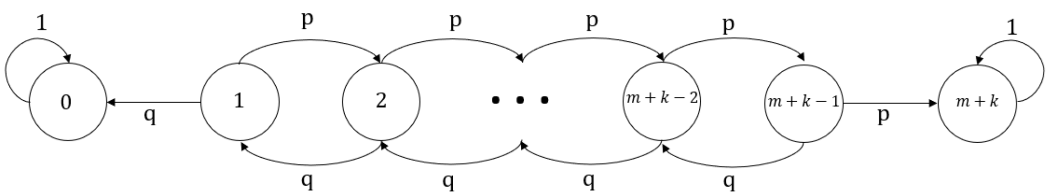
(ii) $\pi_{i,i+1} = p, \ \forall i = 1, 2, \dots, m + k - 1, \quad$ e $\quad \pi_{i,i-1} = q, \ \forall i = 1, 2, \dots, m + k - 1$;

(iii) $\pi_{i,j} = 0$ in tutti gli altri casi.

Di conseguenza la matrice associata è la matrice quadrata di ordine $k + m + 1$ data da

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e il grafo associato è



4.1 Legge della catena associata e probabilità di vittoria del gioco

Vogliamo ora calcolare la probabilità che il giocatore A vinca il gioco. A questo scopo introduciamo i seguenti eventi.

$$E^n_{m,k} = \text{“}A \text{ possiede } m+k \text{ monete all'instante } n\text{”},$$

$$E_{m,k} = \text{“}A \text{ alla fine possiede } m+k \text{ monete”}.$$

Abbiamo pertanto, in termini della catena $(X_n)_n$ introdotta nella precedente sezione,

$$E^n_{m,k} = \{X_n = m+k\}, \quad E_{m,k} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E^n_{m+k}.$$

Denotiamo con $P_i(k)$ la probabilità che A, partendo con i monete, arrivi a possedere $m+k$ monete, ovvero

$$P_i(k) := \mathbb{P}(E_{m,k}|X_1 = i), \qquad i = 0, 1, 2, \dots, N. \tag{4.1}$$

Poiché k indica il patrimonio iniziale del giocatore B, risulta essere una quantità fissata pertanto, quando non sarà necessario specificare la dipendenza da k, scriveremo semplicemente $P_i(k) = P_i$.

Teorema 4.1. *Sia P_i la probabilità introdotta nella (4.1). Allora*

$$P_i = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^i}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{m+k}}, & \textit{se } p \neq q, \\ \dfrac{i}{m+k}, & \textit{se } p = q = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Dimostrazione. Utilizzando la regola della catena (Proposizione 1.20) dalla (4.1) si ha, per ogni $i = 0, \dots, N$,

$$\begin{aligned} P_i &= \mathbb{P}(E_{m,k}|X_1 = i) \\ &= \mathbb{P}(E_{m,k}|X_2 = i+1, X_1 = i)\mathbb{P}(X_2 = i+1|X_1 = i) \\ &+ \mathbb{P}(E_{m,k}|X_2 = i-1, X_1 = i)\mathbb{P}(X_2 = i-1|X_1 = i). \end{aligned}$$

Per la proprietà di Markov (relazione (3.1)) e ricordando che $\pi_{i,j}$ è definito dalla relazione (3.5), ciò equivale a

$$P_i = \mathbb{P}(E_{m,k}|X_2 = i+1)\pi_{i,i+1} + \mathbb{P}(E_{m,k}|X_2 = i-1)\pi_{i,i-1}. \tag{4.3}$$

Introduciamo ora la catena di Markov $Y = \{Y_n\}_{n\geq 1}$ ottenuta da $X = \{X_n\}_{n\geq 1}$ ponendo per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$Y_n := X_{n+1}.$$

Definiamo gli eventi

$$F^n_{m,k} = \{Y_n = m + k\}, \quad F_{m,k} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F^n_{m+k}.$$

Se $1 \leq X_1 \leq m + k - 1$, gli eventi $E_{m,k}$ e $F_{m,k}$ coincidono. Di conseguenza l'equazione (4.3) diventa

$$\begin{aligned} P_i &= \mathbb{P}(F_{m,k}|X_2 = i + 1)\pi_{i,i+1} + \mathbb{P}(F_{m,k}|X_2 = i - 1)\pi_{i,i-1} \\ &= \mathbb{P}(F_{m,k}|Y_1 = i + 1)\pi_{i,i+1} + \mathbb{P}(F_{m,k}|Y_1 = i - 1)\pi_{i,i-1}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Poiché le due catene hanno la stessa matrice di transizione e lo stesso stato iniziale, hanno la stessa distribuzione. Di conseguenza

$$\mathbb{P}(F_{m,k}|Y_1 = i \pm 1) = \mathbb{P}(E_{m,k}|X_1 = i \pm 1) = P_{i\pm 1}, \qquad \forall i \in S.$$

L'equazione (4.4) diventa pertanto

$$P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m + k - 1.$$

Poiché $p + q = 1$, si ottiene

$$(p + q)P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m + k - 1,$$

da cui si ha

$$P_{i+1} - P_i = \frac{q}{p}(P_i - P_{i-1}), \qquad i = 1, 2, \ldots, m + k - 1.$$

Poiché $P_0 = 0$, otteniamo il sistema

$$\begin{aligned} P_2 - P_1 &= \frac{q}{p}(P_1 - P_0) = \frac{q}{p}P_1, \\ &\vdots \\ P_i - P_{i-1} &= \frac{q}{p}(P_{i-1} - P_{i-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} P_1, \\ &\vdots \\ P_{m+k} - P_{m+k-1} &= \frac{q}{p}(P_{m+k-1} - P_{m+k-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{m+k-1} P_1. \end{aligned}$$

Addizionando tra loro le prime $i - 1$ equazioni si ottiene

$$(P_2 - P_1) + (P_3 - P_2) + \cdots + (P_i - P_{i-1}) = \left(\frac{q}{p}\right) P_1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2 P_1 + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} P_1$$

da cui
$$P_i = \left(1 + \left(\frac{q}{p}\right) + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right) P_1$$
ovvero
$$P_i = \sum_{k=0}^{i-1} \left(\frac{q}{p}\right)^k P_1.$$
Di conseguenza, si ha che
$$P_i = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^i}{1-\left(\frac{q}{p}\right)} P_1, & \text{se } p \neq q, \\ iP_1, & \text{se } p = q = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{4.5}$$
Considerando che $P_{m+k} = 1$, calcoliamo il valore di P_1 nei due diversi casi $p \neq q$ e $p = q = \frac{1}{2}$.

- Se $p \neq q$,
$$1 = P_{m+k} = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+k}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)} P_1$$
da cui segue
$$P_1 = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+k}}. \tag{4.6}$$

- Se $p = q = \frac{1}{2}$,
$$1 = P_{m+k} = (m+k)P_1$$
da cui segue
$$P_1 = \frac{1}{m+k}. \tag{4.7}$$

Sostituendo le equazioni (4.6) e (4.7) nella relazione (4.5) si ottiene la (4.2). □

Teorema 4.2. *La probabilità che il gioco termini prima o poi è uguale a 1.*

Dimostrazione. Supponiamo che all'n-esimo round del gioco il giocatore A possegga $i \in \{0, \ldots, m+k\}$ euro (e di conseguenza B ne possegga $m+k-i$). Per il Teorema 4.1 la probabilità che il giocatore A vinca il gioco è pari a

$$P_i = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^i}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{m+k}}, & \text{se } p \neq q, \\ \dfrac{i}{m+k}, & \text{se } p = q = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

mentre la probabilità che perda è pari alla probabilità di vittoria del giocatore B. Per calcolare quest'ultima è possibile utilizzare la relazione (4.2) ricordando che B possiede $m+k-i$ euro, ha probabilità q di vincere un turno e p di perderlo. Denotando con Q_{m+k-i} la probabilità che B, partendo con $m+k-i$ monete, arrivi a possedere $m+k$ monete si ha che

$$Q_{m+k-i} = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\dfrac{p}{q}\right)^{m+k-i}}{1-\left(\dfrac{p}{q}\right)^{m+k}}, & \text{se } p \neq q, \\ \dfrac{m+k-i}{m+k}, & \text{se } p = q = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

Per concludere la dimostrazione è sufficiente dimostrare che il gioco termina certamente con la vittoria di uno dei due giocatori, cioè che $P_i + Q_{m+k-i} = 1$. Dimostriamo separatamente i casi $p \neq q$ e $p = q = \frac{1}{2}$.

- Se $p = q = \frac{1}{2}$,

$$P_i + Q_{m+k-i} = \frac{i}{m+k} + \frac{m+k-i}{m+k} = 1.$$

- Se $p \neq q$,

$$
\begin{aligned}
P_i + Q_{m+k-i} &= \frac{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{i}}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{m+k}} + \frac{1-\left(\dfrac{p}{q}\right)^{m+k-i}}{1-\left(\dfrac{p}{q}\right)^{m+k}} \\
&= \frac{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{i}}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{m+k}} + \frac{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{-m-k+i}}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{-m-k}} \\
&= \frac{\left(1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{i}\right)\left(1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{-m-k}\right) + \left(1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{m+k}\right)\left(1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{-m-k+i}\right)}{\left(1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{m+k}\right)\left(1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{-m-k}\right)} \\
&= \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{i}-\left(\frac{q}{p}\right)^{-m-k}+\left(\frac{q}{p}\right)^{-m-k+i}+1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+k}-\left(\frac{q}{p}\right)^{-m-k+i}+\left(\frac{q}{p}\right)^{i}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+k}-\left(\frac{q}{p}\right)^{-m-k}+1} \\
&= \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{-m-k}+1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+k}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+k}-\left(\frac{q}{p}\right)^{-m-k}+1} = 1.
\end{aligned}
$$

□

4.1.1 Diventare infinitamente ricchi o essere rovinati

A partire dalla formula (4.2) è interessante osservare cosa succede quando il giocatore B ha un patrimonio illimitato ovvero $k \to +\infty$. Denotiamo

$$P_i(+\infty) := \lim_{k \to +\infty} P_i(k). \tag{4.8}$$

Questa quantità rappresenta la probabilità del giocatore A di essere rovinato o di arrivare a possedere una fortuna infinita, nel caso in cui il giocatore B possegga una quantità di denaro infinita.

Teorema 4.3. *Per ogni $k \geq 0$ e $i \in \{0, \dots, m+k\}$, sia $P_i(k)$ la probabilità introdotta nella (4.1) e $P_i(+\infty)$ data dalla (4.8). Allora*

$$P_i(+\infty) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i, & \textit{se } p > \frac{1}{2}, \\ 0, & \textit{se } p \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dimostrazione. Otteniamo che, per il Teorema 4.1,

$$P_i(+\infty) = \lim_{k \to +\infty} P_i(k) = \lim_{k \to +\infty} \begin{cases} \dfrac{1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)^{m+k}}, & \text{se } p \neq q, \\ \dfrac{i}{m+k}, & \text{se } p = q = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{4.9}$$

Dimostriamo separatamente i casi $p > \frac{1}{2}$, $p < \frac{1}{2}$ e $p = \frac{1}{2}$.

- $p > \frac{1}{2}$. Si ha $\frac{q}{p} < 1$, e di conseguenza

  $$\lim_{k \to +\infty} \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{m+k}\right) = 1.$$

  Allora per la (4.9)

  $$P_i(+\infty) = \lim_{k \to +\infty} P_i(k) = \lim_{k \to +\infty} \frac{1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)^{m+k}} = 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i.$$

- $p < \frac{1}{2}$. Si ha $\frac{q}{p} > 1$, e di conseguenza

  $$\lim_{k \to +\infty} 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{m+k} = -\infty.$$

  Allora per la (4.9)

  $$P_i(+\infty) = \lim_{k \to +\infty} P_i(k) = \lim_{k \to +\infty} \frac{1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)^{m+k}} = 0.$$

- $p = \frac{1}{2}$. Si ha dalla (4.9)

$$P_i(+\infty) = \lim_{k\to+\infty} P_i(k) = \lim_{k\to+\infty} \frac{i}{m+k} = 0.$$

$\square$

Da questo risultato segue il cosiddetto teorema della rovina del giocatore

Teorema 4.4. *In un gioco equo contro un banco illimitato, ogni giocatore è destinato a perdere.*

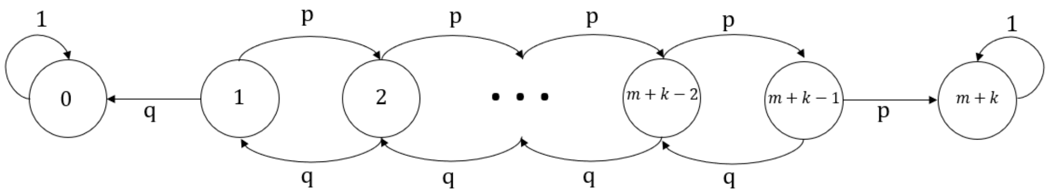
Dimostrazione. Il risultato segue dal Teorema 4.3 nel caso $p = \frac{1}{2}$. $\square$

4.2 Classificazione degli stati e ordinamento della catena

Ricordiamo che la matrice di transizione associata al problema è la matrice quadrata di ordine $k + m + 1$

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

e il grafo associato è



Classifichiamo ora i diversi stati della catena e calcoliamo le probabilità di assorbimento.

Gli elementi $\{0\}$ e $\{m+k\}$ sono classi ergodiche composte da un solo stato e sono chiuse poiché, sia dallo stato 0 che dallo stato $m+k$, non è possibile raggiungere altri stati della catena. Scriveremo $[0] = \{0\}$ e $[2] = \{m+k\}$ per indicare tali classi.

Il problema può dunque essere descritto da un processo discreto a tempo discreto con due **barriere assorbenti**. Gli stati 1, 2, $\dots$, $m+k-1$ appartengono alla stessa classe poiché, per ogni $i \in \{1, 2, \dots m+k-2\}$, i comunica con $i+1$. Ne segue che, per la proprietà transitiva, due stati che appartengono a $\{1, 2, \dots, m+k-1\}$ comunicano tra loro e appartengono alla stessa classe che indicheremo con [1]. La classe [1] è una classe massima, poiché nessuno dei suoi stati può essere raggiunto da stati di altre classi, è non chiusa, poiché da essa è possibile raggiungere altre classi.

Sapendo che $\pi_{1,0} = q$ e $\pi_{m+k-1,m+k} = p$, si ha $[0] \prec [1]$ e $[2] \prec [1]$ mentre [0] e [2] non sono confrontabili.

Dal Teorema 3.31 segue che le classi [0] e [2] sono ricorrenti, mentre la classe [1] è transitoria.

4.3 Probabilità di assorbimento

Calcoliamo ora le probabilità dei vari stati di essere assorbiti nelle classi [0] e [2].

Teorema 4.5. *Sia h_i^ℓ la probabilità definita dalla relazione (3.15), con $\ell \in \{0, 2\}$ e $i \in S$. Si ottiene che*

$$h_i^2 = \begin{cases} 1, & se\ i \in [2], \\ 0, & se\ i \in [0], \\ h_i^2, & se\ i \in [1], \end{cases}$$

dove, se $i \in [1]$,

$$h_i^2 = \begin{cases} \dfrac{1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)^{m+k}}, & se\ p \neq q, \\ \dfrac{i}{m+k}, & se\ p = q = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{4.11}$$

Inoltre,

$$h_i^0 = \begin{cases} 1, & se\ i \in [0], \\ 0, & se\ i \in [2], \\ h_i^0, & i \in [1], \end{cases} \tag{4.12}$$

dove, se $i \in [1]$,

$$h_i^0 = \begin{cases} \dfrac{\left(\dfrac{q}{p}\right)^i - \left(\dfrac{q}{p}\right)^{m+k}}{1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)^{m+k}}, & se\ p \neq q, \\ \dfrac{m+k-i}{m+k}, & se\ p = q = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{4.13}$$

Dimostrazione. Per il Teorema 3.34 si ha che

$$h_i^2 = \begin{cases} 1, & \text{se } i \in [2], \\ 0, & \text{se } i \in [0], \\ \sum_{j \in S} \pi_{i,j} h_j^2, & \text{se } i \in [1]. \end{cases} \tag{4.14}$$

Sviluppando la terza riga della (4.14) si ottiene

$$h_i^2 = \pi_{i,0}h_0^2 + \pi_{i,1}h_1^2 + \pi_{i,2}h_2^2 + \cdots + \pi_{i,m+k-1}h_{m+k-1}^2 + \pi_{i,m+k}h_{m+k}^2, \qquad \forall i \in [1]. \tag{4.15}$$

Poiché $\pi_{i,i+1} = p$, $\pi_{i,i-1} = q$ e $\pi_{i,j} = 0$ con $j \neq i \pm 1$, la (4.15) diventa

$$h_i^2 = qh_{i-1}^2 + ph_{i+1}^2, \qquad i \in \{1, 2, \dots, m+k-1\}.$$

Sostituendo h_i^2 con l'espressione $(p+q)h_i^2$ (poiché $p+q=1$) e cambiando l'ordine dei termini si ottiene

$$\begin{gathered} ph_2^2 - ph_1^2 = qh_1^2 - qh_0^2, \\ \vdots \\ ph_{m+k}^2 - ph_{m+k-1}^2 = qh_{m+k-1}^2 - qh_{m+k-2}^2, \end{gathered}$$

Sommando algebricamente le equazioni del sistema e, ricordando che, per la prima riga della (4.14) $h_0^2 = 0$, si ha

$$ph_{i+1}^2 - ph_1^2 = qh_i^2, \qquad i \in \{1, 2, \dots, m+k-1\}.$$

Da questo segue che

$$h_{i+1}^2 = \frac{qh_i^2 + ph_1^2}{p} = \frac{q}{p}h_i^2 + h_1^2, \qquad i \in \{1, 2, \dots, m+k-1\}. \tag{4.16}$$

Iterando più volte la formula ricorsiva (4.16) si ottiene che

$$h_{i+1}^2 = \left(\left(\frac{q}{p}\right)^i + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \frac{q}{p} + 1 \right) h_1^2 = \sum_{j=0}^{i} \left(\frac{q}{p}\right)^j h_1^2.$$

Di conseguenza per $i \in [1]$ si ha che

$$h_i^2 = \begin{cases} \dfrac{1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)^i}{1 - \dfrac{q}{p}} h_1^2, & \text{se } p \neq q, \\ ih_1^2, & \text{se } p = q = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{4.17}$$

Ricordando che per la prima riga della (4.14) $h_{m+k}^2 = 1$, calcoliamo il valore di h_1^2 nei diversi casi $p \neq q$ e $p = q = \frac{1}{2}$.

- Se $p \neq q$,

$$1 = h^2_{m+k} = \frac{1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)^{m+k}}{1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)} h^2_1$$

da cui segue

$$h^2_1 = \frac{1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)}{1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)^{m+k}}. \tag{4.18}$$

- Se $p = q = \frac{1}{2}$,

$$1 = h^2_{m+k} = (m+k)h^2_1$$

da cui segue

$$h^2_1 = \frac{1}{m+k}. \tag{4.19}$$

Sostituendo le equazioni (4.18) e (4.19) nella relazione (4.17), si ottiene che

$$h^2_i = \begin{cases} \dfrac{1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)} \dfrac{1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)}{1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)^{m+k}}, & \text{se } p \neq q, \\ i\dfrac{1}{m+k}, & \text{se } p = q = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

da cui segue la relazione (4.11).

In maniera analoga si calcolano le probabilità dei vari stati di essere assorbiti nella classe [0] ottenendo le relazioni (4.12) e (4.13) □

Osservazione 4.6. *Si noti che il risultato ottenuto risulta essere analogo alla relazione* (4.2)*. Ciò non deve stupire in quanto, calcolare la probabilità di vittoria a partire dallo stato i, significa calcolare*

$$\mathbb{P}(\min\{n \in \mathbb{N} : X_n \in [2]\} < +\infty | X_1 = i),$$

che è la definizione di h^2_i.

Osservazione 4.7. *Si noti che $h^0_i + h^2_i = 1$ per ogni $i \in S$. Ciò è diretta conseguenza della formulazione del problema che termina con certezza quando si raggiunge o lo stato i o lo stato $m+k$ (si veda il Teorema 4.2).*

4.4 Distribuzione invariante

Vogliamo ora calcolare tutte le distribuzioni invarianti della catena di Markov in esame.

Teorema 4.8. *L'unica distribuzione invariante della catena è data da*

$$\overrightarrow{\pi} = (\alpha, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m+k-1}, 1-\alpha), \qquad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Dimostrazione. Ricordando che le classi con stati ricorrenti della catena sono $R_1 = [0]$ e $R_2 = [2]$, per il Teorema 3.50 sappiamo che le distribuzioni invarianti di Π saranno tutte e sole quelle della forma

$$\overrightarrow{\pi} = \alpha_1 \overrightarrow{\pi}^1 + \alpha_2 \overrightarrow{\pi}^2, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = 1,$$

dove $\overrightarrow{\pi}^1$ è l'unica distribuzione invariante della catena ristretta a R_1 e $\overrightarrow{\pi}^2$ è l'unica distribuzione invariante della catena ristretta a R_2. Calcoliamo dunque $\overrightarrow{\pi}^1$ e $\overrightarrow{\pi}^2$. La matrice Π ristretta a R_1 diventa

$$\Pi\big|_{R_1} = \{1\}.$$

Poiché la catena associata a $\Pi\big|_{R_1}$ è irriducibile, per il Teorema 3.49 esiste una e una sola distribuzione invariante. Imponendo

$$\overrightarrow{\pi} = \overrightarrow{\pi}\Pi,$$

otteniamo:

$$\begin{cases} \pi_1 = \pi_1, \\ \pi_1 = 1, \end{cases}$$

dove l'ultima condizione segue dal fatto che $\overrightarrow{\pi}$ è una distribuzione. Si ha dunque che $\overrightarrow{\pi}^1 = (1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m+k})$. In maniera analoga si dimostra che $\overrightarrow{\pi}^2 = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{m+k}, 1)$. Da ciò segue che

$$\overrightarrow{\pi} = \alpha_1(1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m+k}) + \alpha_2(\underbrace{0, \ldots, 0}_{m+k}, 1), \qquad \alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

□

4.5 Tempo di prima visita

In questa sezione vogliamo calcolare la probabilità che la catena, partendo dallo stato i, visiti prima o poi lo stato j per ogni $i, j \in S$ che, in accordo con la (3.32), è

$$\rho_{i,j} = \mathbb{P}(T_j < +\infty | X_1 = i) = \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N} : X_n = j | X_1 = i).$$

Osserviamo che conosciamo già tale probabilità per alcune coppie (i,j). Infatti poiché $\{0\}$ e $\{m+k\}$ sono classi chiuse, ne segue che

$$\begin{aligned} \rho_{0,0} &= 1, \qquad \rho_{0,i} = 0, \qquad \forall i \in S \setminus \{0\}, \\ \rho_{m+k,m+k} &= 1, \qquad \rho_{m+k,i} = 0, \quad \forall i \in S \setminus \{m+k\}. \end{aligned}$$

In generale $\rho_{i,j}$ può essere calcolata utilizzando la formula del seguente teorema.

Teorema 4.9. *Per ogni $i,j \in \{0,\dots,m+k\}$ con $i \neq 0, m+k$ si ha*

$$\rho_{i,j} = \begin{cases} \frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^j}{1-\frac{p}{q}} \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^i}{1-\frac{q}{p}} pq - \frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^j}{1-\frac{p}{q}} \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i - \left(\frac{q}{p}\right)^{m+k}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+k}} + \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i - \left(\frac{q}{p}\right)^{m+k}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+k}}, & \textit{se } p \neq q, \\ \dfrac{ji}{4} - (j-1)\dfrac{m+k-i}{m+k}, & \textit{se } p = q = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{4.20}$$

Per dimostrare questo teorema occorre introdurre alcuni risultati preliminari.

Proposizione 4.10. *Per ogni $j \in S$, si ha*

$$\rho_{1,j} = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\dfrac{p}{q}\right)^j}{1-\dfrac{p}{q}} pq - \dfrac{1-\left(\dfrac{p}{q}\right)^j}{1-\dfrac{p}{q}} \dfrac{\left(\dfrac{q}{p}\right) - \left(\dfrac{q}{p}\right)^{m+k}}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{m+k}} + \dfrac{\left(\dfrac{q}{p}\right) - \left(\dfrac{q}{p}\right)^{m+k}}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{m+k}}, & \textit{se } p \neq q, \\ \dfrac{j}{4} - (j-1)\dfrac{m+k-1}{m+k}, & \textit{se } p = q = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dimostrazione. Osservando che $\rho_{1,0}$ indica la probabilità di assorbimento dello stato 0 a partire dallo stato 1, si ha che $\rho_{1,0} = h_1^0$. Ricordando la relazione (4.13) si ottiene

$$\rho_{1,0} = \begin{cases} \dfrac{\left(\dfrac{q}{p}\right) - \left(\dfrac{q}{p}\right)^{m+k}}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{m+k}}, & \text{se } p \neq q, \\ \dfrac{m+k-1}{m+k}, & \text{se } p = q = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{4.21}$$

Calcoliamo ora $\rho_{1,j} = \mathbb{P}(T_j < +\infty | X_1 = 1)$ con $j \neq 0$.

Iniziamo calcolando $\rho_{1,2}$. Partendo dallo stato 1 si arriva con probabilità q in 0 e con probabilità p in 2. Di conseguenza, poiché lo stato 0 è chiuso, si ottiene $\rho_{1,2} = p$.

Calcoliamo ora $\rho_{1,1}$. Poiché

$$\rho_{1,1} = \mathbb{P}(T_1 < +\infty | X_1 = 1) = \mathbb{P}(\{\exists n \in \mathbb{N}, X_n = 1\} | X_1 = 1), \tag{4.22}$$

si ha

$$\rho_{1,1} = \mathbb{P}\bigg(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{X_n = 1\} \bigg| X_1 = 1 \bigg)$$

che, per σ-additività della probabilità condizionata (Proposizione 1.16), diventa

$$\rho_{1,1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X_n = 1|X_1 = 1) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A^n|X_1 = 1) \tag{4.23}$$

dove l'ultimo passaggio è ottenuto definendo $A^n := \{X_n = 1\}$.

Ponendo invece $B_r^{n-1} := \{X_{n-1} = r\}$ si ottiene che

$$\bigcup_{r\in S} B_r^{n-1} = \Omega, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Applicando la formula della probabilità totali con la probabilità $\mathbb{P}(\cdot|X_1 = 1)$ (Proposizione 1.22), si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A^n|X_1 = i) &= \sum_{r\in S} \mathbb{P}(A^n|B_r^{n-1} \cap \{X_1 = i\})\mathbb{P}(B_r^{n-1}|X_1 = 1) \\ &= \sum_{r\in S} \mathbb{P}(X_n = 1|\{X_{n-1} = r\} \cap \{X_1 = i\})\mathbb{P}(X_{n-1} = r|X_1 = 1) \end{aligned}$$

che, per la proprietà di Markov (relazione (3.1)) e ricordando che $\pi_{i,j}$ è definito dalla relazione (3.5), diventa

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A^n|X_1 = i) &= \sum_{r\in S} \mathbb{P}(X_n = 1|X_{n-1} = r)\mathbb{P}(X_{n-1} = r|X_1 = 1) \\ &= \sum_{r\in S} \pi_{r,1}\mathbb{P}(X_{n-1} = r|X_1 = 1). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Sostituendo la (4.24) nella (4.23) si ottiene dunque

$$\begin{aligned} \rho_{1,1} &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{r\in S} \pi_{r,1}\mathbb{P}(X_{n-1} = r|X_1 = 1) \\ &= \sum_{r\in S} \pi_{r,1} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X_{n-1} = r|X_1 = 1) \\ &= \sum_{r\in S} \pi_{r,1}\mathbb{P}\bigg(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{X_{n-1} = r\} \bigg| X_1 = 1 \bigg) \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la Proposizione 1.16, ossia

$$\rho_{1,1} = \sum_{r\in S} \pi_{r,1}\mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N}, X_{n-1} = r|X_1 = 1). \tag{4.25}$$

Ricordando che, per la formulazione del problema, se $i, j \neq 0, m+k$, $\pi_{i,j} = 0$ per ogni $i \neq j \pm 1$, la (4.25) diventa

$$\rho_{1,1} = \pi_{2,1}\mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N}, X_{n-1} = 2 | X_1 = 1)$$

ossia, per la definizione di $\rho_{i,j}$ (Definizione 3.32),

$$\rho_{1,1} = \pi_{2,1}\rho_{1,2} = pq. \tag{4.26}$$

In maniera analoga si dimostra che

$$\rho_{1,j} = \rho_{1,j-1}\pi_{j-1,j} + \rho_{1,j+1}\pi_{j+1,j} = \rho_{1,j-1}p + \rho_{1,j+1}q, \qquad j = 1, \dots, m+k-1.$$

Sostituendo $\rho_{1,j}$ con l'espressione $(p+q)\rho_{1,j}$, poiché $p+q=1$, e cambiando l'ordine dei termini si ottiene

$$\begin{gathered} q\rho_{1,2} - q\rho_{1,1} = p\rho_{1,1} - p\rho_{1,0}, \\ \vdots \\ q\rho_{1,m+k} - q\rho_{1,m+k-1} = p\rho_{1,m+k-1} - p\rho_{1,m+k-2}. \end{gathered}$$

Sommando algebricamente le equazioni si ha

$$q\rho_{1,j+1} - q\rho_{1,1} = p\rho_{1,j} - p\rho_{1,0}, \qquad i \in \{1, 2, \dots, m+k-1\}.$$

Da questo segue che

$$\rho_{1,j+1} = \frac{p\rho_{1,j} + q\rho_{1,1} - p\rho_{1,0}}{q} = \frac{p}{q}\rho_{1,j} + \rho_{1,1} - \frac{p}{q}\rho_{1,0}, \qquad i \in \{1, 2, \dots, m+k-1\}.$$

Sostituendo più volte nella formula ricorsiva si ottiene che

$$\begin{aligned} \rho_{1,j+1} &= \left(\left(\frac{p}{q}\right)^j + \left(\frac{p}{q}\right)^{j-1} + \dots + \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \frac{p}{q} + 1\right)\rho_{1,1} \\ &\quad - \left(\left(\frac{p}{q}\right)^j + \left(\frac{p}{q}\right)^{j-1} + \dots + \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \frac{p}{q}\right)\rho_{1,0} \\ &= \sum_{k=0}^{j}\left(\frac{p}{q}\right)^k \rho_{1,1} - \sum_{k=1}^{j}\left(\frac{p}{q}\right)^k \rho_{1,0}. \end{aligned}$$

Di conseguenza si ha che

$$\rho_{1,j} = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\dfrac{p}{q}\right)^j}{1-\dfrac{p}{q}}\rho_{1,1} - \dfrac{1-\left(\dfrac{p}{q}\right)^j}{1-\dfrac{p}{q}}\rho_{1,0} + \rho_{1,0}, & \text{se } p \neq q, \\ j\rho_{1,1} - (j-1)\rho_{1,0}, & \text{se } p = q = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{4.27}$$

Sostituendo le formule (4.21) e (4.26) nella relazione (4.27) si ottiene la tesi. $\square$

Proposizione 4.11. *Per ogni $i \in S$, si ha*

$$\rho_{i,1} = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^i}{1-\dfrac{q}{p}} pq, & \textit{se } p \neq q, \\ \dfrac{i}{4}, & \textit{se } p = q = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{4.28}$$

Dimostrazione. Ripercorrendo la dimostrazione della Proposizione 4.10 dalla relazione (4.22) alla relazione (4.24), sostituendo $X_1 = 1$ con $X_1 = i$, $\rho_{1,1}$ con $\rho_{i,1}$, B_r^{n-1} con B_r^2 e $X_{n-1} = r$ con $X_2 = r$, si ottiene

$$\rho_{i,1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X_n = 1 | X_1 = i) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A^n | X_1 = i) \tag{4.29}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A^n | X_1 = i) &= \sum_{r \in S} \mathbb{P}(X_n = 1 | X_2 = r) \mathbb{P}(X_2 = r | X_1 = i) \\ &= \sum_{r \in S} \mathbb{P}(X_n = 1 | X_2 = r) \pi_{i,r}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Sostituendo la (4.30) nella (4.29) si ottiene dunque

$$\rho_{i,1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{r \in S} \pi_{i,r} \mathbb{P}(X_n = 1 | X_2 = r). \tag{4.31}$$

Introduciamo ora la catena di Markov $Y = \{Y_n\}_{n \geq 1}$ ottenuta da $X = \{X_n\}_{n \geq 2}$ ponendo per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$Y_n := X_{n-1}.$$

L'equazione (4.31) diventa quindi

$$\begin{aligned} \rho_{i,1} &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{r \in S} \pi_{i,r} \mathbb{P}(Y_{n-1} = 1 | Y_1 = r) \\ &= \sum_{r \in S} \pi_{i,r} \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N}, Y_{n-1} = 1 | Y_1 = r). \end{aligned}$$

Poiché le due catene hanno la stessa matrice di transizione e lo stesso stato iniziale, hanno la stessa distribuzione. Di conseguenza

$$\rho_{i,1} = \sum_{r \in S} \pi_{i,r} \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N}, X_{n-1} = 1 | X_1 = r) = \sum_{r \in S} \pi_{i,r} \rho_{r,1}, \tag{4.32}$$

dove l'ultimo passaggio è dato dalle Definizione 3.32 di $\rho_{i,j}$.

Ricordando che per la formulazione del problema, se $i, j \neq 0, m+k$, $\pi_{i,j} = 0$ per ogni $i \neq j \pm 1$, la (4.32) diventa

$$\rho_{i,1} = q\rho_{i-1,1} + p\rho_{i+1,1} \qquad i \in \{1, \dots, m+k-1\}.$$

Sostituendo $\rho_{i,1}$ con l'espressione $(p+q)\rho_{i,1}$ poiché $p+q=1$, e cambiando l'ordine dei termini si ottiene

$$\begin{gathered} p\rho_{2,1} - p\rho_{1,1} = q\rho_{1,1} - q\rho_{0,1}, \\ \vdots \\ p\rho_{m+k,1} - p\rho_{m+k-1,1} = q\rho_{m+k-1,1} - q\rho_{m+k-2,1}. \end{gathered}$$

Sommando algebricamente le equazioni e ricordando che $\rho_{0,1} = 0$, si ha

$$p\rho_{i+1,1} - p\rho_{1,1} = q\rho_{i,1}, \qquad i \in \{1, 2, \dots, m+k-1\}.$$

Da questo segue che

$$\rho_{i+1,1} = \frac{q\rho_{i,1} + p\rho_{1,1}}{p} = \frac{q}{p}\rho_{i,1} + \rho_{1,1}, \qquad i \in \{1, 2, \dots, m+k-1\}.$$

Sostituendo più volte nella formula ricorsiva si ottiene che

$$\rho_{i+1,1} = \left(\left(\frac{q}{p}\right)^i + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} + \dots + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \frac{q}{p} + 1\right)\rho_{1,1} = \sum_{k=0}^{i}\left(\frac{q}{p}\right)^k \rho_{1,1}.$$

Di conseguenza si ha che

$$\rho_{i,1} = \begin{cases} \dfrac{1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)^i}{1 - \dfrac{q}{p}}\rho_{1,1}, & \text{se } p \neq q, \\ i\rho_{1,1}, & \text{se } p = q = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{4.33}$$

Sostituendo la (4.26) nella relazione (4.33) si ottengono i valori di $\rho_{i,1}$ per ogni $i \in S$ indicati nella relazione (4.28). $\square$

Dimostrazione del Teorema 4.9. Ripercorrendo la dimostrazione della Proposizione 4.10 dalla relazione (4.22) alla (4.25), sostituendo $X_1 = 1$ con $X_1 = i$ e $\pi_{r,1}$ con $\pi_{r,j}$, si ottiene che

$$\rho_{i,j} = \rho_{i,j-1}p + \rho_{i,j+1}q, \qquad i, j \in \{1, \dots, m+k-1\}.$$

Ripetendo i passaggi della dimostrazione del Teorema 4.10 sostituendo $\rho_{1,j}$ con $\rho_{i,j}$ e $\rho_{1,1}$ con $\rho_{i,1}$, si ha

$$\rho_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\dfrac{p}{q}\right)^j}{1-\dfrac{p}{q}}\rho_{i,1} - \dfrac{1-\left(\dfrac{p}{q}\right)^j}{1-\dfrac{p}{q}}\rho_{i,0} + \rho_{i,0}, & \text{se } p \neq q, \\ j\rho_{i,1} - (j-1)\rho_{i,0}, & \text{se } p = q = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{4.34}$$

Notando che $\rho_{i,0}$ indica la probabilità di assorbimento dello stato 0 a partire dallo stato i, si ha che $\rho_{i,0} = h_i^0$. Per la relazione (4.13) si ottiene

$$\rho_{i,0} = \begin{cases} \dfrac{\left(\dfrac{q}{p}\right)^i - \left(\dfrac{q}{p}\right)^{m+k}}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{m+k}}, & \text{se } p \neq q, \\ \dfrac{m+k-i}{m+k}, & \text{se } p = q = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{4.35}$$

Sostituendo la (4.35) e la (4.28) nella relazione (4.34) si ottengono i valori di $\rho_{i,j}$ indicati nella relazione (4.20). □

4.6 Probabilità di assorbimento entro un tempo prestabilito

Vogliamo calcolare ora la probabilità che a partire da un determinato stato transitorio i, la catena $(X_n)_n$ raggiunga uno stato ricorrente entro un tempo stabilito n, cioè il gioco finisca entro un tempo n, ovvero calcolare il valore di $\phi_i(n)$ per ogni $i \in S$ e $n \in \mathbb{N}$ nella (3.34).

Partiamo calcolando i valori di $\phi_i(2)$ con $i \in S$. Ricordiamo che, per la formulazione del problema si ha che

(i) $\pi_{0,0} = \pi_{k+m,k+m} = 1$;

(ii) $\pi_{i,i+1} = p,\ \forall i = 1, 2, \ldots, m+k-1$, e $\pi_{i,i-1} = q,\ \forall i = 1, 2, \ldots, m+k-1$;

(iii) $\pi_{i,j} = 0$ in tutti gli altri casi.

Poiché $\phi_i(2) = \mathbb{P}(\tau = 2|X_1 = i) = \mathbb{P}(X_2 = 0|X_1 = i) + \mathbb{P}(X_2 = m+k|X_1 = i)$ e supponendo $m + k \geq 4$, si ha che

$$\phi_i(2) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = 0, \\ q, & \text{se } i = 1, \\ 0, & \text{se } 2 \leq i \leq m+k-2, \\ p, & \text{se } i = m+k-1, \\ 1, & \text{se } i = m+k. \end{cases} \tag{4.36}$$

Di conseguenza, dalle formule (3.35) e (4.36) si ha

$$\begin{aligned} \phi_1(n+1) &= \phi_1(2) + \pi_{1,2}\phi_2(n) = q + p\phi_2(n), \\ \phi_{m+k-1}(n+1) &= \phi_{m+k-1}(2) + \pi_{m+k-1,m+k-2}\phi_{m+k-2}(n) = q\phi_{m+k-2}(n) + p, \end{aligned}$$

e, se $2 \leq i \leq m+k-2$, risulta

$$\phi_i(n+1) = \phi_i(2) + \pi_{i,i-1}\phi_{i-1}(n) + \pi_{i,i+1}\phi_{i+1}(n) = q\phi_{i-1}(n) + p\phi_{i+1}(n).$$

Poiché se il patrimonio dei giocatori è 0 o $m+k$ il gioco termina certamente in n passi, poniamo $\phi_0(n) = \phi_{m+k}(n) = 1$. A questo punto è possibile riscrivere le relazioni precedenti come

$$\phi_i(n+1) = q\phi_{i-1}(n) + p\phi_{i+1}(n), \qquad 1 \leq i \leq m+k-1. \tag{4.37}$$

La formula (4.37) è quindi una formula ricorsiva per calcolare il valore di $\phi_i(n)$ (anche se diventa piuttosto laboriosa da utilizzare se la cardinalità di S diventa molto grande).

Calcoliamo ora i valori di $\phi_i(3)$ con $i \in S$. Utilizzando la formula (4.37) si ottiene che

$$\phi_i(3) = q\phi_{i-1}(2) + p\phi_{i+1}(2), \qquad 1 \leq i \leq m+k-1,$$

per cui, supponendo $m+k \geq 6$, sostituendo i valori $\phi_i(2)$ calcolati nella (4.36) e ricordando che $\phi_0(n) = \phi_{m+k}(n) = 1$, si ha

$$\phi_i(3) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = 0, \\ q, & \text{se } i = 1, \\ q^2, & \text{se } i = 2, \\ 0, & \text{se } 3 \leq i \leq m+k-3, \\ p^2, & \text{se } i = m+k-2, \\ p, & \text{se } i = m+k-1, \\ 1, & \text{se } i = m+k. \end{cases}$$

In maniera analoga è possibile calcolare i valori di $\phi_i(n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, calcolando i valori di $\phi_i(4)$, $\phi_i(5)$,..., $\phi_i(n-2)$, $\phi_i(n-1)$.

4.7 Tempo medio di assorbimento

Ricordando che le classi ricorrenti della catena sono [0] e [2] (Paragrafo 4.2), calcoliamo il tempo medio di assorbimento in [0] e [2] nel caso in cui $p = q = \frac{1}{2}$.

Teorema 4.12. *Sia τ_i il tempo medio di assorbimento della catena nella classe ricorrente [0] definito dalla relazione (3.39). Si ha che*

$$\tau_i = i(m + k - i), \qquad i \in \{1, 2, \dots, m + k - 1\}.$$

In particolare

$$\tau_m = mk.$$

Dimostrazione. Per il Teorema 3.53, ricordando la struttura della matrice associata al problema (si veda la (4.10)), è necessario risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} \tau_1 = 1 + \frac{1}{2}\tau_2, \\ \vdots \\ \tau_i = 1 + \frac{1}{2}\tau_{i+1} + \frac{1}{2}\tau_{i-1}, \\ \vdots \\ \tau_{m+k-1} = 1 + \frac{1}{2}\tau_{m+k-2}, \end{cases}$$

che diventa

$$\begin{cases} 2 = 2\tau_1 - \tau_2, \\ \vdots \\ 2 = 2\tau_i - \tau_{i-1} - \tau_{i+1}, \\ \vdots \\ 2 = 2\tau_{m+k-1} - \tau_{m+k-2}. \end{cases} \tag{4.38}$$

Tale sistema fornisce la relazione

$$\tau_i = i\tau_1 - i(i - 1), \qquad i \in \{1, 2, \dots, m + k - 1\}. \tag{4.39}$$

Dimostriamo la validità della (4.39) per induzione.

L'equazione (4.39) è vera per $i = 1$ poiché $\tau_1 = \tau_1$.

Dimostriamo che la (4.39) è vera per $i + 1$, supponendola vera per i. Dall'equazione $2 = 2\tau_i - \tau_{i-1} - \tau_{i+1}$ otteniamo

$$\begin{aligned} \tau_{i+1} &= 2[i\tau_1 - i(i - 1)] - [(i - 1)\tau_1 - (i - 1)(i - 2)] - 2 \\ &= 2i\tau_1 - 2i^2 + 2i - i\tau_1 + \tau_1 + i^2 - i - 2i + 2 - 2 \\ &= (i + 1)\tau_1 - i^2 - i \\ &= (i + 1)\tau_1 - (i + 1)i, \end{aligned}$$

che equivale alla (4.39) sostituendo i con $i+1$. Abbiamo dunque verificato la validità della (4.39).

Prendendo $i = m+k-2$ e $i = m+k-1$ nella (4.39), si ha

$$\begin{aligned}\tau_{m+k-2} &= (m+k-2)\tau_1 - (m+k-2)(m+k-3),\\ \tau_{m+k-1} &= (m+k-1)\tau_1 - (m+k-1)(m+k-2),\end{aligned}$$

che, sostituiti nell'ultima equazione del sistema (4.38), danno

$$2 = 2[(m+k-1)\tau_1 - (m+k-1)(m+k-2)] - (m+k-2)\tau_1 + (m+k-2)(m+k-3)$$

da cui si ricava

$$(m+k)\tau_1 + m + k - m^2 - 2mk - k^2 = 0.$$

Si ottiene dunque

$$\tau_1 = m+k-1$$

che, sostituita nella (4.39), fornisce

$$\tau_i = i(m+k-1) - i(i-1) = i(m+k-i), \qquad i \in \{1, 2, \ldots, m+k-1\}.$$

□

4.8 Un problema della rovina del giocatore modificato

4.8.1 Reversibilità e invarianza

Modifichiamo ora il problema della rovina del giocatore formulato all'inizio del capitolo 4 nel modo seguente. Due giocatori A e B disputano varie manche di un gioco. In ciascuna giocata la probabilità di vittoria di A è p, mentre la probabilità di vittoria di B è $q = 1-p$. Il giocatore A inizia a giocare con la disponibilità di m euro e il giocatore B con la disponibilità di k euro. Dopo ogni giocata, chi vince riceve 1 euro dall'avversario. *In questo caso però se un giocatore esaurisce il proprio patrimonio riceve 1 euro dal giocatore avversario in modo che la partita possa continuare.*

Anche in questo contesto per risolvere il problema utilizzeremo la teoria delle catene di Markov, descrivendo la quantità di denaro posseduta da A alla manche n con la variabile aleatoria X_n definita nel capitolo 4. Introducendo le probabilità di transizione della catena $\pi_{i,j} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$, $n \in \mathbb{N}$, si ha

(i) $\pi_{0,1} = \pi_{k+m,k+m-1} = 1$;

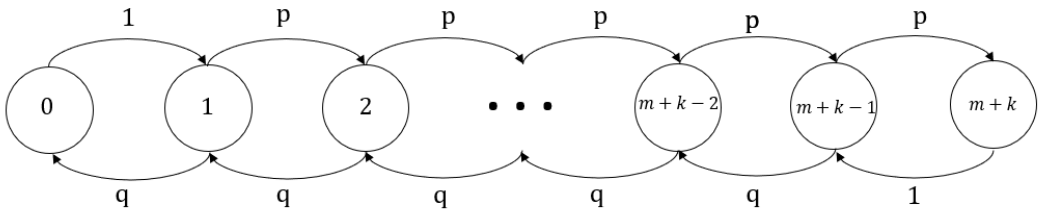
(ii) $\pi_{i,i+1} = p$, $\forall i = 1, 2, \ldots, m+k-1$, e $\pi_{i,i-1} = q$, $\forall i = 1, 2, \ldots, m+k-1$;

(iii) $\pi_{i,j} = 0$ in tutti gli altri casi.

Di conseguenza la matrice associata è la matrice quadrata di ordine $k+m+1$

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e il grafo associato è



Il problema può dunque essere descritto da un processo discreto a tempo discreto con due **barriere riflettenti**. Gli stati 0, 1, 2, ..., $m+k-1$, $m+k$ appartengono alla stessa classe poiché, per ogni $i \in \{0,1,2,\dots m+k-1\}$, i comunica con $i+1$. Ne segue che la catena è irriducibile e per il Teorema 3.49 ammette un'unica distribuzione invariante $\overrightarrow{\pi}$.

Teorema 4.13. *Detta* $\overrightarrow{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{m+k})$ *la distribuzione invariante della matrice* Π *si ha che*

$$\begin{aligned} \pi_0 =& \frac{q^{m+k} - pq^{m+k-1}}{q^{m+k} - pq^{m+k-1} + q^{m+k-1} - p^{m+k-1} + qp^{m+k-1} - p^{m+k}}, \\ \pi_i =& \frac{p^{i-1}}{q^i} \frac{q^{m+k} - pq^{m+k-1}}{q^{m+k} - pq^{m+k-1} + q^{m+k-1} - p^{m+k-1} + qp^{m+k-1} - p^{m+k}}, \qquad i = 1, \dots, m+k-1, \\ \pi_{m+k} =& \frac{p^{m+k-1}}{q^{m+k-1}} \frac{q^{m+k} - pq^{m+k-1}}{q^{m+k} - pq^{m+k-1} + q^{m+k-1} - p^{m+k-1} + qp^{m+k-1} - p^{m+k}}. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Dimostrazione. Per il calcolo di $\overrightarrow{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{m+k-1}, \pi_{m+k})$ dovremmo risolvere il sistema

$$\begin{cases} \overrightarrow{\pi}\Pi = \overrightarrow{\pi}, \\ \pi_0 + \pi_1 + \dots + \pi_{m+k-1} + \pi_{m+k} = 1, \end{cases}$$

che risulta essere un sistema di $m+k+2$ equazioni in $m+k+1$ incognite. In alternativa, per calcolare la distribuzione invariante possiamo sfruttare un'altra proprietà della catena, ovvero la reversibilità. Infatti la catena $(X_n)_n$ è tale che

$$\mathbb{P}(X_n = j | X_{n+1} = i) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i), \qquad \forall i, j \in S,$$

ovvero, ricordando la relazione (3.48), si ottiene

$$q_{i,j} = \pi_{i,j}, \tag{4.41}$$

cioè la catena è reversibile per la Definizione 3.54. Possiamo dunque calcolare la distribuzione invariante $\overrightarrow{\pi}$ usando la formula (3.46) e il Teorema 3.57, da cui

$$\pi_j \pi_{j,i} = \pi_i q_{i,j}, \qquad \forall i, j \in S,$$

che per la (4.41) diventa

$$\pi_j \pi_{j,i} = \pi_i \pi_{i,j}, \qquad \forall i, j \in S.$$

Sostituendo $j = i + 1$ nella precedente espressione, otteniamo

$$\pi_{i+1} = \frac{\pi_i \pi_{i,i+1}}{\pi_{i+1,i}}, \qquad i = 0, 1 \dots, m + k - 1.$$

Ne segue che $\overrightarrow{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{m+k-1}, \pi_{m+k})$ deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} \pi_1 = \dfrac{\pi_0 \pi_{0,1}}{\pi_{1,0}}, \\ \pi_2 = \dfrac{\pi_1 \pi_{1,2}}{\pi_{2,1}}, \\ \vdots \\ \pi_{m+k-1} = \dfrac{\pi_{m+k-2} \pi_{m+k-2,m+k-1}}{\pi_{m+k-1,m+k-2}}, \\ \pi_{m+k} = \dfrac{\pi_{m+k-1} \pi_{m+k-1,m+k}}{\pi_{m+k,m+k-1}}, \\ 1 = \pi_0 + \pi_1 + \dots \pi_{m+k-1} + \pi_{m+k}. \end{cases}$$

Il sistema diventa dunque

$$\begin{cases} \pi_1 = \dfrac{\pi_0}{q}, \\ \pi_2 = \dfrac{\pi_1 p}{q}, \\ \vdots \\ \pi_{m+k-1} = \dfrac{\pi_{m+k-2} p}{q}, \\ \pi_{m+k} = \pi_{m+k-1} p, \\ 1 = \pi_0 + \pi_1 + \dots \pi_{m+k-1} + \pi_{m+k}, \end{cases} \tag{4.42}$$

che risolto rispetto a π_0 diventa

$$
\begin{cases}
\pi_1 = \dfrac{\pi_0}{q}, \\
\pi_2 = \dfrac{p}{q^2}\pi_0, \\
\vdots \\
\pi_{m+k-1} = \dfrac{p^{m+k-2}}{q^{m+k-1}}\pi_0, \\
\pi_{m+k} = \dfrac{p^{m+k-1}}{q^{m+k-1}}\pi_0.
\end{cases}
\tag{4.43}
$$

Sostituendo i valori ottenuti nella (4.43) nell'ultima equazione del sistema (4.42), si ottiene

$$
\begin{aligned}
1 =& \pi_0 \left(1 + \frac{1}{q} + \frac{p}{q^2} + \cdots + \frac{p^{m+k-2}}{q^{m+k-1}} + \frac{p^{m+k-1}}{q^{m+k-1}}\right) \\
=& \pi_0 \left(1 + \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{m+k-2}\left(\frac{p}{q}\right)^k + \frac{p^{m+k-1}}{q^{m+k-1}}\right),
\end{aligned}
$$

da cui

$$
\pi_0 = \frac{q^{m+k-1}}{q^{m+k-1} + q^{m+k-2}\sum_{k=0}^{m+k-2}\left(\frac{p}{q}\right)^k + p^{m+k-1}},
$$

che diventa

$$
\begin{aligned}
\pi_0 &= \frac{q^{m+k-1}}{q^{m+k-1} + q^{m+k-2}\dfrac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{m+k-1}}{1-\frac{p}{q}} + p^{m+k-1}} \\
&= \frac{q^{m+k-1}(1-\frac{p}{q})}{q^{m+k-1} - pq^{m+k-2} + q^{m+k-2} - \dfrac{p^{m+k-1}}{q} + p^{m+k-1} - \dfrac{p^{m+k}}{q}} \\
&= \frac{q^{m+k} - pq^{m+k-1}}{q^{m+k} - pq^{m+k-1} + q^{m+k-1} - p^{m+k-1} + qp^{m+k-1} - p^{m+k}}.
\end{aligned}
\tag{4.44}
$$

Sostituendo la (4.44) nella (4.43), si conclude che il vettore $\overrightarrow{\pi}$ ha componenti date dalla relazione (4.40).

$\square$

4.8.2 Tempo medio di ritorno in uno stato

Visto che il problema della rovina del giocatore con due barriere riflettenti è rappresentato da una catena di Markov irriducibile, è sensato chiedersi quale sia il tempo medio di ritorno in ogni stato, ovvero calcolare $\tau_{i,i}$ dato nella Definizione 3.49 per ogni $i \in S$.

Ricordando che la distribuzione invariante $\overrightarrow{\pi}$ è data dalla relazione (4.40), si ha per il Teorema 3.59 che

$$\tau_{i,i} = \begin{cases} \dfrac{q^{m+k} - pq^{m+k-1} + q^{m+k-1} - p^{m+k-1} + qp^{m+k-1} - p^{m+k}}{q^{m+k} - pq^{m+k-1}}, & \text{se } i = 0, \\ \dfrac{q^i}{p^{i-1}} \dfrac{q^{m+k} - pq^{m+k-1} + q^{m+k-1} - p^{m+k-1} + qp^{m+k-1} - p^{m+k}}{q^{m+k} - pq^{m+k-1}}, & \text{se } i = 1, \dots, m+k-1, \\ \dfrac{q^{m+k-1}}{p^{m+k-1}} \dfrac{q^{m+k} - pq^{m+k-1} + q^{m+k-1} - p^{m+k-1} + qp^{m+k-1} - p^{m+k}}{q^{m+k} - pq^{m+k-1}}, & \text{se } i = m+k. \end{cases}$$

Capitolo 5

Estensioni del problema della rovina del giocatore: alcuni problemi di arresto ottimo

Come abbiamo visto nel capitolo 2 il problema della rovina del giocatore fu posto per la prima volta nel 1656 in una lettera che Pascal scrisse a Fermat, e in seguito analizzato da Huygens, J. Bernoulli, Struyck, De Moivre e Ampère. Nonostante sia noto in letteratura da moltissimo tempo, il problema della rovina del giocatore viene tuttora studiato ed utilizzato in diversi contesti come il rischio di impresa, la meccanica quantistica o lo studio di fenomeni fisici, chimici o biologici. Una possibile estensione consiste nei cosiddetti problemi di arresto ottimo. Consideriamo, come già visto nei capitoli precedenti, che due giocatori A e B disputino varie manche di un gioco. In ciascuna giocata la probabilità di vittoria di A è p, mentre la probabilità di vittoria di B è $q = 1 - p$. Il giocatore A inizia a giocare con la disponibilità di m euro e il giocatore B con la disponibilità di k euro. Ad ogni giocata, il giocatore A può decidere di

- giocare guadagnando 1 euro in caso di vittoria o perdendone 1 in caso di sconfitta;
- abbandonare il gioco mantenendo il patrimonio corrente.

Il gioco termina se uno dei due contendenti rimane senza denaro o se il giocatore A abbandona il gioco. Rispetto al problema della rovina del giocatore classico, in cui l'andamento del gioco dipende esclusivamente dal corso degli eventi e non dalle decisioni del giocatore, nel problema di arresto ottimo il giocatore deve scegliere a ogni turno se abbandonare il gioco o continuare, in base alle osservazioni precedenti, con l'obiettivo di massimizzare il patrimonio finale atteso. In questo capitolo analizzeremo il problema di arresto ottimo mostrando le diverse strategie possibili e confrontandole per stabilire quale massimizzi il patrimonio finale atteso.

5.1 Strategie di arresto ottimo

Per esaminare le diverse strategie di arresto studiamo il problema utilizzando la teoria delle catene di Markov presentata nel capitolo 3. Come spiegato all'inizio del capitolo 4, analizziamo l'andamento del gioco soffermandoci solo sulla quantità di denaro posseduta dal giocatore A, descrivendo la quantità di denaro posseduta da A alla manche n come una variabile aleatoria X_n che soddisfa

$$X_{n+1} = X_n + Z_{n+1},$$

dove $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ è una famiglia di variabili aleatorie i.i.d. con $Z_{n+1} = +1$ o $Z_{n+1} = -1$ con probabilità rispettivamente p e q.

Poiché in questa versione del problema il giocatore può decidere ad ogni round di abbandonare il gioco o continuare, introduciamo una variabile aleatoria $D_n : \Omega \to \{\perp, \top\}$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$D_n = \begin{cases} \perp & \text{se il giocatore abbandona il gioco al round } n, \\ \top & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Indichiamo ora con τ la variabile aleatoria che indica il tempo di arresto del gioco. Il valore di τ dipenderà dai valori delle variabili aleatorie X_n e D_n, ovvero

$$\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} : \{X_n = 0\} \cup \{X_n = m + k\} \cup \{D_n = \perp\}\}.$$

Per il Teorema 4.2 e poiché la regola di arresto del problema della rovina del giocatore modificato è più restrittiva della sua formulazione classica, ne segue che

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\tau \geq n) = 0, \tag{5.1}$$

cioè il gioco si arresta sempre. Indichiamo con $\mathbb{E}[X_\tau]$ il patrimonio finale atteso. Ricordando l'Osservazione 1.40, si ha che

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\tau = n)\mathbb{E}[X_n|\tau = n],$$

che per la relazione (5.1) è ben definito.

Sia $s : (m, k, n, p, X_n) \to \{\perp, \top\}$ la funzione di decisione (o strategia) che definisce i comportamenti del giocatore e che produce la sequenza $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. In altre parole, $D_n = s(m, k, n, p, X_n)$, dove $s(m, k, n, p, X_n)$ risulta essere la strategia adottata dal giocatore A all'istante n con un patrimonio $X_n = i$, un patrimonio da raggiungere pari a $m + k$ e probabilità di vittoria di ogni turno uguale a p. Con la scelta di s la probabilità di vittoria sarà allora data da

$$p_s^{vinco} := \mathbb{P}(\exists h \in \mathbb{N} : \{\tau = h\} \cap \{X_h = m + k\}),$$

la probabilità di sconfitta sarà

$$p_s^{perdo} := \mathbb{P}(\exists h \in \mathbb{N} : \{\tau = h\} \cap \{X_h = 0\}),$$

e la probabilità di abbandonare il gioco sarà

$$p_s^{lascio} := \mathbb{P}(\exists h \in \mathbb{N} : \{\tau = h\} \cap \{D_h = \perp\}).$$

Il nostro scopo sarà quello di analizzare alcune funzioni decisione e individuare tra queste quella che massimizza $\mathbb{E}[X_\tau]$. Di seguito presentiamo alcune differenti strategie che sono presentate in dettaglio in [17].

Strategia "tutto o niente". Il problema della rovina del giocatore di arresto ottimo si riduce alla sua formulazione classica se si adotta la strategia "tutto o niente", seguendo la quale il giocatore non abbandona mai il gioco. In questo caso il giocatore continua a giocare finché o vince o perde. Ne segue che

$$s_{tn}(m, k, n, p, X_n) = \top, \qquad \forall m, k, n, p, X_n \quad e \quad D_n \equiv \top, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Poiché seguendo la strategia "tutto o niente" il giocatore decide di non abbandonare mai il gioco, si ha che

$$p_{s_{tn}}^{lascio} = 0, \qquad \forall m, k, n, p, X_n,$$

e di conseguenza, la relazione (4.2) ci indica che la probabilità di vittoria, partendo con un budget di i euro, è

$$p_{s_{tn}}^{vinco} = \begin{cases} \dfrac{1 - \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^i}{1 - \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{m+k}}, & \text{se } p \neq \frac{1}{2}, \\[2ex] \dfrac{i}{m+k}, & \text{se } p = \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{5.2}$$

dove $q = 1 - p$. Dal Teorema 4.2 si deduce invece che

$$p_{s_{tn}}^{perdo} = 1 - p_{s_{tn}}^{vinco} = \begin{cases} \dfrac{\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^i - \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{m+k}}{1 - \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{m+k}}, & \text{se } p \neq \frac{1}{2}, \\[2ex] \dfrac{m+k-i}{m+k}, & \text{se } p = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Poiché il gioco termina con la vittoria o con la sconfitta del giocatore, ne segue che quasi certamente $X_\tau = m + k$ nel primo caso e $X_\tau = 0$ nel secondo. Di conseguenza, se il giocatore A all'instante n ha un patrimonio $X_n = i$, un patrimonio da raggiungere pari a $m+k$ e probabilità di vittoria di ogni turno uguale a p, $\mathbb{E}[X_\tau]$ sarà per la Definizione 1.36

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_\tau] &= (m+k)\cdot p^{vinco}_{s_{tn}} + 0 \cdot p^{perdo}_{s_{tn}}\\ &= (m+k)\cdot p^{vinco}_{s_{tn}}.\end{aligned}$$

Strategia "cauta". A differenza della strategia "tutto o niente", nella strategia "cauta" il giocatore decide sempre di abbandonare il gioco. Ne segue che

$$s_{cauta}(m,k,n,p,X_n) = \perp, \qquad \forall m,k,n,p,X_n \quad e \quad D_n \equiv \perp, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Le proprietà della strategia "cauta" sono molto elementari da dedurre. Se il giocatore usa questa strategia, il gioco termina sempre per $n = 1$ per cui $\tau \equiv 1$ e $X_\tau \equiv m$. Si ha quindi

$$p^{vinco}_{s_{cauta}} = p^{perdo}_{s_{cauta}} = 0, \quad p^{lascio}_{s_{cauta}} = 1 \quad e \quad \mathbb{E}[X_\tau] = m.$$

Strategia "naive". Sia la strategia "tutto o niente" che la strategia "cauta" sono strategie che non tengono in considerazione i dati e l'andamento del gioco. Al contrario, osservando il valore del budget corrente X_n, nella strategia "naive" il giocatore abbandona il gioco non appena il patrimonio corrente diventa inferiore a m, ovvero al suo patrimonio iniziale. Ne segue che

$$s_{naive}(m,k,n,p,X_n) = \begin{cases} \perp & \text{se } X_n < m, \\ \top & \text{se } X_n \geq m. \end{cases}$$

Seguendo quindi la strategia "naive" il giocatore vince o abbandona il gioco con un budget di $m-1$ euro. Nel caso particolare in cui $m = 1$ è facile osservare che la strategia "naive" coincide con la strategia "tutto o niente". A partire da questa osservazione è possibile calcolare la probabilità di vittoria della strategia "naive" sfruttando la relazione (5.2) e il fatto che i cammini che conducono da m a $m-1$ o $m+k$ sono isomorfi a quelli che conducono da 1 a 0 o $k+1$. Ne segue che la probabilità di vittoria, partendo con un budget di i euro, è

$$p^{vinco}_{s_{naive}} = \begin{cases} \dfrac{1 - \dfrac{1-p}{p}}{1 - \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{k+1}}, & \text{se } p \neq \frac{1}{2}, \\[2ex] \dfrac{1}{k+1}, & \text{se } p = \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{5.3}$$

dove la (5.3) è ottenuta sostituendo nella (5.2) $i = 1$ e $m+k = k+1$. Riguardo il calcolo della probabilità di sconfitta, si può osservare che l'unico caso in cui il giocatore può perdere è quando $m = 1$. Ne segue che

$$p^{perdo}_{s_{naive}} = \begin{cases} p^{perdo}_{s_{tn}}, & \text{se } m = 1, \\ 0, & \text{se } m > 1. \end{cases}$$

Al contrario se $m > 1$ il giocatore abbandona il gioco o vince. Per il Teorema 4.2 si ha dunque

$$p^{lascio}_{s_{naive}} = \begin{cases} 0, & \text{se } m = 1, \\ 1 - p^{vinco}_{s_{naive}}, & \text{se } m > 1. \end{cases}$$

Di conseguenza, se il giocatore A, partito con un patrimonio di m euro, ha all'instante n un patrimonio $X_n = i$, un patrimonio da raggiungere pari a $m + k$ e probabilità di vittoria di ogni turno uguale a p, $\mathbb{E}[X_\tau]$ sarà per la Definizione 1.36

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \begin{cases} (m+k) \cdot p^{vinco}_{s_{naive}}, & \text{se } m = 1, \\ (m+k) \cdot p^{vinco}_{s_{naive}} + (m-1) \cdot p^{lascio}_{s_{naive}}, & \text{se } m > 1. \end{cases}$$

Strategia "perdita accettabile". La strategia "perdita accettabile" generalizza la strategia "naive" e permette di ricavare tutte le strategie sopra descritte grazie all'introduzione del parametro l, un numero naturale compreso tra 0 e m che indica il massimo valore di perdita di denaro ritenuta accettabile dal giocatore. Osservando il valore del budget corrente X_n, nella strategia "perdita accettabile" con parametro l il giocatore abbandona il gioco non appena il patrimonio corrente diventa uguale a $m - l$, patrimonio iniziale di A. Ne segue che

$$s_{pa}(m, k, n, p, X_n) = \begin{cases} \perp & \text{se } X_n < m - l + 1, \\ \top & \text{se } X_n \geq m - l + 1. \end{cases}$$

Seguendo quindi la strategia "perdita accettabile", il giocatore vince o abbandona il gioco con un budget di $m - l + 1$ euro. Nel caso particolare in cui $l = 0, 1, m$ è facile osservare che la strategia "perdita accettabile" coincide rispettivamente con la strategia "cauta", "naive" e "tutto o niente".

In maniera analoga a quanto detto per la strategia "naive" , il calcolo della probabilità di vittoria della strategia "perdita accettabile" avviene sfruttando la relazione (5.2) e il fatto che i cammini che conducono da m a $m - l$ o $m + k$ sono isomorfi a quelli che conducono da l a 0 o $k + l$. Ne segue che la probabilità di vittoria, partendo con un budget di i euro, è

$$p^{vinco}_{s_{pa}} = \begin{cases} \dfrac{1 - \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{l}}{1 - \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{k+l}}, & \text{se } p \neq \frac{1}{2}, \\ \dfrac{l}{k+l}, & \text{se } p = \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{5.4}$$

dove la (5.4) è ottenuta sostituendo nella (5.2) $i = l$ e $m + k = k + l$. Riguardo il calcolo della probabilità di sconfitta, si può osservare che l'unico caso in cui il giocatore può perdere è quando $l = m$. Ne segue che

$$p_{s_{pa}}^{perdo} = \begin{cases} 1 - p_{s_{pa}}^{vinco}, & \text{se } l = m, \\ 0, & \text{se } l < m, \end{cases}$$

Al contrario se $l < m$ il giocatore o abbandona il gioco o vince. Per il Teorema 4.2 si ha dunque

$$p_{s_{pa}}^{lascio} = \begin{cases} 0, & \text{se } l = m, \\ 1 - p_{s_{pa}}^{vinco}, & \text{se } l < m. \end{cases}$$

Di conseguenza, se il giocatore A, partito con un patrimonio di m euro, ha all'instante n un patrimonio $X_n = i$, un patrimonio da raggiungere pari a $m + k$ e probabilità di vittoria di ogni turno uguale a p, $\mathbb{E}[X_\tau]$ sarà per la Definizione 1.36

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \begin{cases} (m+k) \cdot p_{s_{pa}}^{vinco}, & \text{se } l = m, \\ (m+k) \cdot p_{s_{pa}}^{vinco} + (m-l) \cdot p_{s_{pa}}^{lascio}, & \text{se } l < m. \end{cases}$$

Confronto tra le strategie. Una volta esposte tutte le strategie da analizzare stabiliamo quale risulta essere la migliore, ovvero quale massimizza il patrimonio finale atteso $\mathbb{E}[X_\tau]$. Ricordando che $\mathbb{E}[X_\tau]$ è la seguente funzione di l,

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \begin{cases} (m+k) \cdot p_{s_{pa}}^{vinco}, & \text{se } l = m, \\ (m+k) \cdot p_{s_{pa}}^{vinco} + (m-l) \cdot p_{s_{pa}}^{lascio}, & \text{se } l < m, \end{cases}$$

che è continua in $[0, m]$, ne segue che

$$\mathbb{E}[X_\tau] = (m+k) \cdot p_{s_{pa}}^{vinco} + (m-l) \cdot p_{s_{pa}}^{lascio}, \qquad \text{con } 0 \leq l \leq m.$$

Di conseguenza

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \begin{cases} (m+k)\dfrac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^l}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}} + (m-l)\dfrac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^l - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}}, & \text{se } p \neq \frac{1}{2}, \\ (m+k)\frac{l}{k+l} + (m-l)\frac{k}{k+l}, & \text{se } p = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Studiamo dunque la funzione $\mathbb{E}[X_\tau]$ nel caso $p = \frac{1}{2}$ e $p \neq \frac{1}{2}$, al variare di $l \in [0, m]$.

Se $p = \frac{1}{2}$ allora

$$\mathbb{E}[X_\tau] = (m+k)\frac{l}{k+l} + (m-l)\frac{k}{k+l} = \frac{ml + kl + mk - kl}{k+l} = m,$$

ovvero $\mathbb{E}[X_\tau]$ è una funzione costante il cui valore non dipende da l. Pertanto qualsiasi strategia porta $\mathbb{E}[X_\tau] = m$ e pertanto qualsiasi scelta è indifferente.

Se $p \neq \frac{1}{2}$ allora

$$\mathbb{E}[X_\tau] = (m+k)\frac{1-\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{l}}{1-\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{k+l}} + (m-l)\frac{\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{l}-\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{k+l}}{1-\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{k+l}}. \tag{5.5}$$

Trovare il massimo di questa funzione è però tutt'altro che banale a causa della complessità dell'espressione da cui è definita. Cerchiamo intanto di semplificarne la scrittura. Dalla (5.5) si ha

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \frac{m+k-m\left(\frac{1-p}{p}\right)^{l}-k\left(\frac{1-p}{p}\right)^{l}+m\left(\frac{1-p}{p}\right)^{l}-l\left(\frac{1-p}{p}\right)^{l}-m\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}+l\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}}$$

$$= \frac{m+k-k\left(\frac{1-p}{p}\right)^{l}-l\left(\frac{1-p}{p}\right)^{l}-m\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}+l\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}}$$

che, aggiungendo e sottraendo l, diventa

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_\tau] &= \frac{m-m\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}-l+l\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}+k+l-k\left(\frac{1-p}{p}\right)^{l}-l\left(\frac{1-p}{p}\right)^{l}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}}\\ &= m-l+\frac{(k+l)\left(1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{l}\right)}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}}.\end{aligned} \tag{5.6}$$

Dimostriamo che la funzione

$$g(l) = \mathbb{E}[X_\tau](l) \qquad \text{con } 0 \leq l \leq m$$

è strettamente crescente se $p > \frac{1}{2}$ e strettamente decrescente se $p < \frac{1}{2}$. Utilizzeremo questa proprietà per trovare il massimo della funzione $\mathbb{E}[X_\tau](l)$ e decidere quale strategie utilizzare. Prima di fare ciò introduciamo alcuni risultati che ci saranno utili in seguito.

Riscriviamo innanzitutto la formula (5.6) come

$$g(l) = \mathbb{E}[X_\tau](l) = m-l+(k+l)f(l), \quad \text{con } f(l) := \frac{1-\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{l}}{1-\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{k+l}}. \tag{5.7}$$

Segue direttamente dalla definizione di $g(l)$ nella (5.7) che

$$g'(l) = -1 + (k+l)f'(l) + f(l).$$

Proposizione 5.1. *Sia $f(l)$ la funzione definita in (5.7). Allora*

$$f'(l) = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^l \ln\left(\frac{1-p}{p}\right)\left(-1+\left(\frac{1-p}{p}\right)^k\right)}{\left(1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}\right)^2}.$$

Dimostrazione.

$$f'(l) = \frac{\left(1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}\right)\left(-\left(\frac{1-p}{p}\right)^l\right)\ln\left(\frac{1-p}{p}\right)}{\left(1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}\right)^2}+$$

$$+\frac{\left(1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^l\right)\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}\ln\left(\frac{1-p}{p}\right)}{\left(1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^l \ln\left(\frac{1-p}{p}\right)\left(-1+\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}+\left(\frac{1-p}{p}\right)^k-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}\right)}{\left(1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^l \ln\left(\frac{1-p}{p}\right)\left(-1+\left(\frac{1-p}{p}\right)^k\right)}{\left(1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}\right)^2}.$$

□

Proposizione 5.2. *Sia $g(l)$ la funzione definita in (5.7). Allora*

$$g'(l)=\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{l}\left(\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k}-1\right)}{\left(1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}\right)^{2}}h(l) \tag{5.8}$$

dove

$$h(l):=(k+l)\ln\left(\frac{1-p}{p}\right)+1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}. \tag{5.9}$$

Dimostrazione. Si ha

$$g'(l)=-1+(k+l)f'(l)+f(l)$$

che, per la Proposizione 5.1, diventa

$$g'(l)=-1+(k+l)\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{l}\ln\left(\frac{1-p}{p}\right)\left(-1+\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k}\right)}{\left(1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}\right)^{2}}+\frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{l}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}}$$

$$\begin{aligned}
&=(k+l)\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{l}\ln\left(\frac{1-p}{p}\right)\left(-1+\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k}\right)}{\left(1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}\right)^{2}}+\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{l}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}}\\
&=\frac{-(k+l)\left(\frac{1-p}{p}\right)^{l}\ln\left(\frac{1-p}{p}\right)+(k+l)\left(\frac{1-p}{p}\right)^{l+k}\ln\left(\frac{1-p}{p}\right)-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{l}+\left(\frac{1-p}{p}\right)^{l+k}}{\left(1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}\right)^{2}}+\\
&+\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{2l+k}-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{2l+2k}}{\left(1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}\right)^{2}}.
\end{aligned}$$

Facendo un raccoglimento totale si ottiene

$$
\begin{aligned}
g'(l) =& \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^l (k+l)\ln\left(\frac{1-p}{p}\right)\left(\left(\frac{1-p}{p}\right)^k - 1\right)}{\left(1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}\right)^2} + \\
&+ \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^l \left(-1+\left(\frac{1-p}{p}\right)^k + \left(\frac{1-p}{p}\right)^{l+k} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{l+2k}\right)}{\left(1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}\right)^2} \\
=& \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^l \left(\left(\frac{1-p}{p}\right)^k - 1\right)\left((k+l)\ln\left(\frac{1-p}{p}\right) + 1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}\right)}{\left(1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}\right)^2}.
\end{aligned}
$$

□

Proposizione 5.3. *Sia $h(l)$ la funzione definita in (5.9). Si ha che $h(l) < 0$ per ogni $l \in [0, m]$, per ogni $k > 0, p \neq \frac{1}{2}$.*

Dimostrazione.

$$
\begin{aligned}
h'(l) &= \ln\left(\frac{1-p}{p}\right) - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l} \ln\left(\frac{1-p}{p}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1-p}{p}\right)\left(1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}\right).
\end{aligned}
$$

Risolviamo ora la disequazione

$$
h'(l) = \ln\left(\frac{1-p}{p}\right)\left(1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}\right) > 0 \tag{5.10}
$$

nei casi in cui $p < \frac{1}{2}$ e $p > \frac{1}{2}$.

- Se $p < \frac{1}{2}$ si ha $\frac{1-p}{p} > 1$. Di conseguenza, poiché $\ln\left(\frac{1-p}{p}\right) > 0$, la relazione (5.10) diventa

$$
1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l} > 0,
$$

ovvero

$$\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l} < 1,$$

da cui, ricordando che $\frac{1-p}{p} > 1$, si ha $k+l < 0$ da cui $l < -k$.
Ne segue che la funzione ha un massimo in $l = -k$. Calcolando $h(-k)$ si ottiene

$$h(-k) = (k-k)\ln\left(\frac{1-p}{p}\right) + 1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{k-k} = 0,$$

cioè $h(l) < 0$ se $p < \frac{1}{2}$, $l \in [0, m]$ e $k > 0$.

- Se $p > \frac{1}{2}$ si ha $\frac{1-p}{p} < 1$. Di conseguenza, poiché $\ln\left(\frac{1-p}{p}\right) < 0$, la relazione (5.10) diventa

$$1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l} < 0,$$

ovvero

$$\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l} > 1,$$

da cui, ricordando che $\frac{1-p}{p} < 1$, si ha $k+l < 0$ da cui $l < -k$. Ne segue che, come nel caso precedente, la funzione ha un massimo in $l = -k$ in corrispondenza dello zero, cioè $h(l) < 0$ se $p > \frac{1}{2}$, $l \in [0, m]$, $k > 0$.

□

Teorema 5.4. *La funzione* $\mathbb{E}[X_\tau](l) = g(l)$*, con* $k > 0$ *e* $0 \leq l \leq m$*, è strettamente crescente se* $p > \frac{1}{2}$ *ed è strettamente decrescente se* $p < \frac{1}{2}$*.*

Dimostrazione. Per la (5.8) si ha che

$$g'(l) = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{l}\left(\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k} - 1\right)h(l)}{\left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}\right)^{2}} > 0. \tag{5.11}$$

Osservando che $\left(\frac{1-p}{p}\right)^{l} > 0$ e $\left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+l}\right)^{2} > 0$, la (5.11) diventa

$$\left(\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k} - 1\right)h(l) > 0.$$

Poiché, per la Proposizione 5.3, $h(l) < 0$, si ottiene

$$\left(\frac{1-p}{p}\right)^k - 1 < 0. \tag{5.12}$$

Risolviamo la disequazione (5.12) nei casi $p > \frac{1}{2}$ e $p < \frac{1}{2}$.

- Se $p < \frac{1}{2}$ si ha $\frac{1-p}{p} > 1$. Ne segue che $\left(\frac{1-p}{p}\right)^k - 1 > 0$. Di conseguenza $g'(l) < 0$ per ogni $l \in [0, m]$.
- Se $p > \frac{1}{2}$ si ha $\frac{1-p}{p} < 1$. Ne segue che $\left(\frac{1-p}{p}\right)^k - 1 < 0$. Di conseguenza $g'(l) > 0$ per ogni $l \in [0, m]$.

□

Dal Teorema 5.4 segue che se $p > \frac{1}{2}$ la funzione $\mathbb{E}[X_\tau](l) = g(l)$ è strettamente crescente in $[0, m]$ e il massimo viene raggiunto per $l = m$. In questo caso conviene quindi usare la strategia "tutto o niente".

Se $p < \frac{1}{2}$ la funzione $\mathbb{E}[X_\tau](l) = g(l)$ è strettamente decrescente in $[0, m]$ e il massimo si raggiunge per $l = 0$. In questo caso conviene usare la strategia "cauta".

I risultati trovati non devono stupire: se il giocatore vince con probabilità $p < \frac{1}{2}$ ha più da perdere che da guadagnare per cui la scelta migliore è quella di abbandonare subito il gioco. Viceversa, se il giocatore ha probabilità di vincita $p > \frac{1}{2}$ la scelta più conveniente è quella di continuare a giocare. Nel caso in cui $p = \frac{1}{2}$ tutte le strategie sono tra loro equivalenti.

A titolo di esempio abbiamo disegnato, grazie all'utilizzo di Matlab, la funzione $g(l) = \mathbb{E}[X_\tau](l)$ con $m = 6$ e $k = 3$. Nei casi $p = 0,3$ e $p = 0,7$, si vedono i grafici indicati nella Figura 5.1.

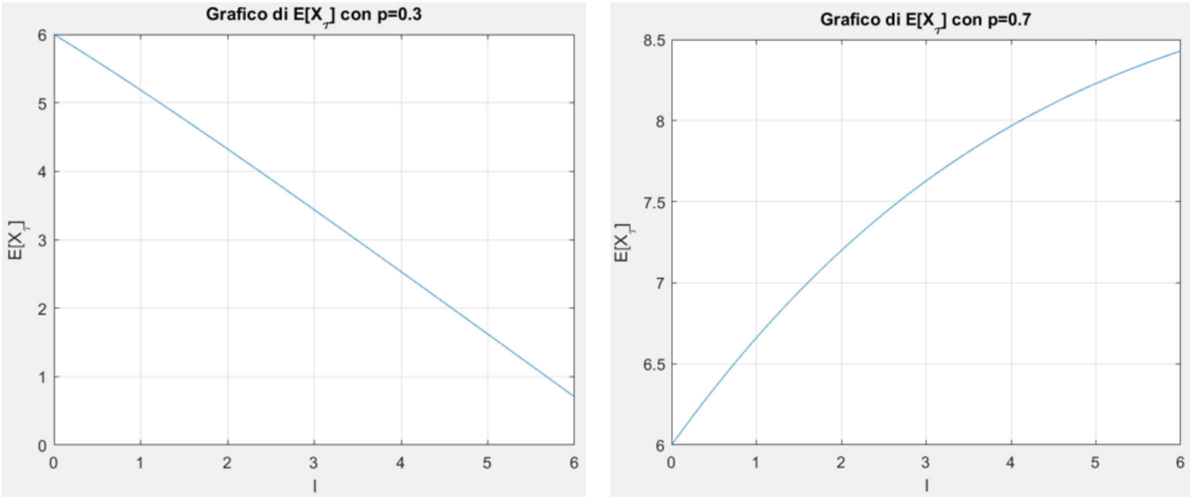


Figura 5.1: Grafici della funzione $\mathbb{E}[X_\tau]$ ottenuti per $m = 6$ e $k = 3$, nei casi $p = 0,3$ e $p = 0,7$.

Possibili sviluppi. Esistono moltissime variazioni del problema di arresto ottimo applicato al problema della rovina del giocatore. Una di queste, come riportato nell'articolo *Deciding when to quit the gambler's ruin game with unknown probabilities* [17], prevede che in ciascuna giocata la probabilità di vittoria del giocatore p, che è costante a ogni round, sia però incognita. Anche in questo caso, il giocatore dovrà giocare cercando di massimizzare il patrimonio finale atteso, giocando se il contesto è favorevole o abbandonando il gioco se il contesto è sfavorevole, ma per prendere questa decisione dovrà stimare il parametro p dalle precedenti osservazioni.

Tale problema modificato comporta una sorta di dilemma esplorazione-sfruttamento. Da un lato, quando il giocatore sceglie di abbandonare il gioco, conosce l'ammontare del suo patrimonio attuale rispetto alla stima dei guadagni futuri che si potrebbero ottenere se continuasse a giocare. Dall'altra parte, poiché questa stima deriva dalle osservazioni, giocare un altro round consente di possedere maggiori informazioni sul parametro sottostante, il che permette di migliorare la precisione della stima, ma implica il rischio di ulteriori perdite.

Per stimare il parametro p, il giocatore osserva gli esiti del gioco tenendo conto che avranno una distribuzione binomiale. In particolare indicando con W_n il numero di successi all'istante di tempo n, si ha che la probabilità di ottenere $W_n = k$ successi, data la probabilità p, è

$$\mathbb{P}(W_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

A partire da questa considerazione la probabilità p verrà stimata utilizzando l'approccio bayesiano della Statistica inferenziale, si veda per esempio [18], [19].

Nell'articolo [17] vengono esposte diverse strategie che possono essere viste come casi particolari della strategia che chiameremo "perdita accettabile p". Quest'ultima risulta essere molto simile a quella già descritta nel paragrafo "Strategia perdita accettabile" della sezione 5.1. La differenza è che, non essendo nota la probabilità p, si suppone che quest'ultima abbia una distribuzione uniforme in $[0, 1]$. Di conseguenza, indicando con $\mathbb{E}[X_\tau]_{s_{pap}}(l, p)$ il patrimonio finale atteso ottenuto seguendo la strategia "perdita accettabile p" e con $\mathbb{E}[X_\tau]_{s_{pa}}(l)$ quello ottenuto seguendo la strategia "perdita accettabile" si avrà

$$\mathbb{E}[X_\tau]_{s_{pap}}(l) = \int_0^1 \mathbb{E}[X_\tau]_{s_{pa}}(l, p)dp.$$

Per capire quale sia la migliore strategia da perseguire è necessario trovare il massimo della funzione $\mathbb{E}[X_\tau]_{s_{pap}}(l)$ con $0 \leq l \leq m$. Questa operazione risulta essere molto complessa e l'articolo [17] si conclude dando semplicemente i valori ottimali di l in corrispondenza di m e $m + k$ si veda la Tabella 5.1. Questi valori sono calcolati confrontando i risultati ottenuti di $\mathbb{E}[X_\tau]_{s_{pap}}(l)$ al variare di $l \in \{0, 1, \ldots, m + k\}$.

$g \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
2	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7	1	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
8	1	2	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
9	1	2	2	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10	1	2	2	2	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
11	1	2	2	2	2	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
12	1	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
13	1	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
14	1	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
15	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
16	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
17	1	2	3	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
18	1	2	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
19	1	2	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
20	1	2	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
21	1	2	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
22	1	2	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-
23	1	2	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-
24	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-
25	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-
26	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	-	-	-	-
27	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	-	-	-
28	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	-	-
29	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	-
30	1	2	3	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1

Tabella 5.1: I valori ottimali di l al variare di m e $g = m + k$.

Bibliografia

[1] P. Brémaud. *Markov Chains Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation and Queues*, volume 31. Springer Science & Business Media, 2020.

[2] A. N. Shiryaev. *Probability-1.* Springer, 2015.

[3] A. N. Shiryaev. *Probability-2.* Springer New York, 2018.

[4] A. Pascucci. *Teoria della Probabilità.* Springer, 2020.

[5] Q. Berger, F. Caravenna, P. Dai Pra. *Probabilità: un primo corso attraverso esempi, modelli e applicazioni*, vol 127. Springer Nature, 2021.

[6] G. R. Grimmett, D. R. Stirzaker. *Probability and Random Processes.* Oxford University Press, 2001.

[7] J. R. Hofmann. *André-Marie Ampère: Enlightenment and Electrodynamics.* Cambridge University Press, 1996.

[8] A. M. Ampère. *Considérations sur la Théorie mathématique du Jeu.* Fréres Perisse, 1802.

[9] C. Huygens. *De ratiociniis in ludo aleae.* Ex officinia J. Elsevirii, 1980.

[10] B. Pascal. *Traité du triangle arithmetique: auec quelques autres petits traitez sur la mesme matière.* Chez Guillaume Desprez, 1978.

[11] J. Bernoulli. *Ars conjectandi.* Impensis Thurnisiorum Fratrum, 1713.

[12] A. Hald. *A history of probability and statistics and their applications before 1750.* John Wiley & Sons, 2005.

[13] A.W.F. Edwards. *Pascal's problem: the Gambler's Ruin.* International Statistical Review, pag. 73-79. JSTOR, 1983.

[14] E. Shoesmith. *Huygens' solution to the gambler's ruin problem.* Historia Math, vol. 13, pag. 153-164, 1986.

[15] S. Song, J. Song. *A note on the history of the gambler's ruin problem*. Communications for Statistical Applications and Methods vol. 20, pag 157-168. The Korean Statistical Society, 2013.

[16] J. Yeh. *Real analysis: theory of measure and integration second edition*. World Scientific Publishing Company, 2006.

[17] F. Studzinski Perotto, I. Trabelsi, S. Combettes, V. Camps, E. Kaddoum, N. Verstaevel. *Deciding when to quit the gambler's ruin game with unknown probabilities*. International Journal of Approximate Reasoning vol. 137, pag 16-33, 2021.

[18] H. Harney. *Bayesian Inference: Data Evaluation and Decisions*. Springer, 2016.

[19] H. Liu, L. Wasserman. *Bayesian Inference*. Carnegie Mellon pag. 299-351, 2014