Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Scuola di Scienze
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

L'evoluzione del concetto di derivata e la rilevanza di un approccio storico del concetto in ambito didattico

Tesi di Laurea in Storia della matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.
Maria Giulia Lugaresi

Presentata da:
Francesca Barich

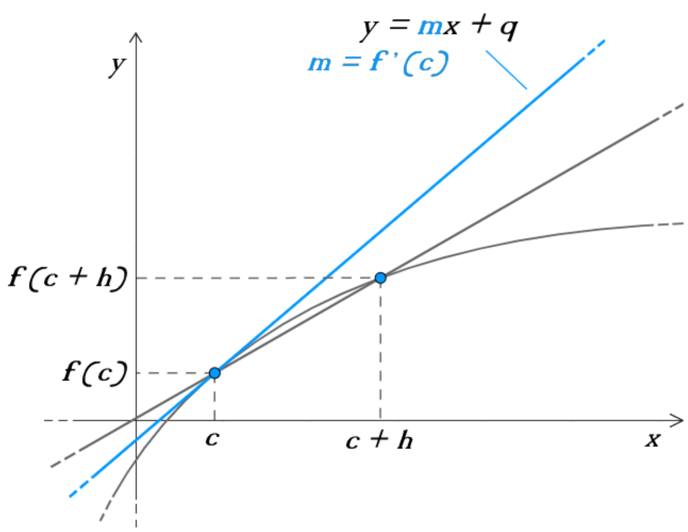
VII Sessione
Anno Accademico 2021/2022

Indice

Introduzione

Nelle scuole italiane l'attuale approccio allo studio della derivazione è strettamente legato alla visione del calcolo infinitesimale secondo l'impostazione di Leibniz, rivista in seguito da Cauchy. Basta infatti aprire un qualsiasi libro di testo rivolto alle classi V di scuola secondaria di secondo grado per trovare, come definizione di derivata, una scrittura simile alla seguente:

Definizione. [1]
Data una funzione $y = f(x)$ definita in un intervallo e dato c un punto interno all'intervallo, si chiama **derivata** della funzione f nel punto c, e si indica con $f'(c)$, il limite, se esiste ed è finito, del rapporto incrementale di f relativo a c per h che tende a zero. $f'(c)$ indica il coefficiente angolare della retta $y = mx + q$ tangente al grafico della funzione nel suo punto di ascissa c.



A Leibniz e Cauchy dobbiamo un immenso patrimonio scientifico, eppure quasi nessuno studente delle scuole superiori conosce il loro nome e quello degli altri grandi studiosi del calcolo infinitesimale.
Newton dal canto suo non viene praticamente considerato in ambito matematico e i suoi contributi sono riportati solo nei libri di testo di fisica, come per esempio le leggi della dinamica. Questo aspetto ci porta a notare come nei libri di testo di fisica venga fornita un'idea dell'evoluzione dei concetti fisici: dalla cinematica si passa alla dinamica, dalle equazioni del moto di Galileo Galilei si passa alle trasformazioni di Lorentz ecc. E' chiaro come i passaggi concettuali ed epistemologici nel corso della storia della fisica siano stati possibili grazie a determinate figure, tra le quali Newton, Galileo, Einstein e che ci sia ancora tanto da scoprire e ri-scoprire. La fisica non è una disciplina statica, slegata dalla nostra realtà.
La matematica, invece, sembra essere ferma, bloccata dai grandi nomi dell'antica Grecia e senza una sua storia evolutiva e necessità di progressione. L'idea collettiva della figura del matematico è quella di uno "studioso di conto", una persona che sa fare calcoli sempre più difficili e che studia e ri-studia sempre gli stessi concetti. Insomma, una carriera non troppo allettante.
Viene da chiedersi perchè la matematica nella scuole e nell'immaginario collettivo sia finita per nascondersi in sé stessa e non possa mostrarsi come la disciplina che realmente è. Reputo che *l'approccio storico* nello studio di alcuni oggetti della matematica nelle scuole possa aiutare a mostrare la natura indagatoria di questa disciplina, la quale non è fine a sé stessa ma ha uno spirito profondamente universale.
Nella mia tesi ho deciso di concentrarmi sul concetto di **derivata** e ho scelto di analizzarlo sia da un punto di vista didattico sia da un punto di vista stori-

co, perchè reputo che nell'unione di queste due dimensioni si possano ottenere buoni risultati di apprendimento del concetto preso in considerazione.

Nel *primo capitolo* ho quindi scelto di parlare delle prove INVALSI, test fondamentali in Italia per la didattica nelle scuole. In particolare ho orientato la mia trattazione del capitolo prima da un punto di vista culturale e storico e poi in maniera specifica sulla prova INVALSI di Matematica e in particolare sui **quesiti sulla derivabilità**. L'analisi dei quesiti ha dato modo di chiedermi che cosa ci si aspetta che i ragazzi sappiano e quali competenze abbiano acquisito sul termine in questione, ma sopratutto che idea del concetto di derivata traspare dalle prove somministrate. E' stato molto interessante analizzare analogie e differenze sui quesiti proposti in riferimento all'indirizzo scolastico nel quale le domande sono state pensate. Come conclusione del capitolo ho aggiunto una mia piccola riflessione sulla disparità tra le definizioni dei termini nei libri di testo e le procedure di risoluzione degli esercizi proposti nelle prove INVALSI: da qui l'esigenza di andare in profondità sul concetto di derivata a partire dalla sua origine storica.

Il *secondo capitolo*, quello più ampio, ripercorre alcune tappe significative dell'evoluzione della derivazione, dalla costruzione della retta tangente al cerchio fornita da Euclide nei suoi *Elementi* (300 a.C.) fino alla definizione di derivata che tutt'ora utilizziamo. In questa parte della tesi ho scelto di concentrarmi solamente sulla nascita del concetto di derivata e sui "semi" piantati nelle epoche precedenti, i quali hanno portato poi a tale importante risultato. In questo elaborato è stato scelto di dare solo un accenno alla questione dell'integrazione, fornendo, all'inizio del secondo capitolo, un'idea generale del problema delle quadrature, per poi spostarsi sull'altro grande problema che aveva interessato gli antichi, cioè quello della determinazione della tangente ad una curva in un punto. Sono stati presentati i metodi per determinare la retta tangente nel XVII secolo, in particolare ho trattato le tecniche di Cartesio, quelle di Fermat, Roberval e Torricelli. La parte più rilevante di questo capitolo è l'analisi dei metodi di Newton e di Leibniz e dei risultati dei loro seguaci. Per concludere la sezione ho nominato Cauchy e ho riportato la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale da lui data.

Nel *terzo capitolo* ho approfondito gli aspetti positivi e le eventuali criticità di un approccio storico alla didattica della matematica, specificando cosa voglia dire adottare realmente questa modalità nella didattica e cosa sia invece più in linea con un percorso storico-narrativo. Mi è sembrato interessante riportare due proposte didattiche per me molto valide, che sono state proposte ad alcune classi all'ultimo anno della secondaria di secondo grado. Entrambi i percorsi si sono concentrati sull'analisi storica del concetto di derivata, ma hanno adottato strategie differenti: una delle due proposte ha dato maggiore rilevanza al metodo di Newton e alla sua applicazione, mentre l'altra ha fornito uno sguardo più ampio e interdisciplinare analizzando le fonti originali di Fermat, Leibniz e Newton. L'obiettivo di entrambe le proposte era quello di mostrare ai ragazzi come le *derivate* non siano un puro strumento meccanico di conto, ma siano profondamente ricche di contenuto e possiedano varie sfumature.

Capitolo 1

Uno sguardo alla situazione italiana: i quesiti sulla derivabilità delle prove INVALSI della scuola secondaria di secondo grado

1.1 Come nascono le prove INVALSI e come sono state modificate negli anni

Durante i primi anni Novanta del Novecento era in corso in Italia una profonda trasformazione del sistema scolastico: la spinta a portare gli istituti scolastici verso l'autonomia era sempre più forte e al contempo avanzavano le prime proposte di un sistema di valutazione a livello nazionale capace di portare ad un'evoluzione del sistema scolastico. In quegli anni il contesto socio-economico e culturale, unito al fenomeno della globalizzazione e a quello della digitalizzazione, stavano portando a nuove esigenze a cui la scuola

non poteva sottrarsi. Nacque l'idea di effettuare verifiche periodiche e sistematiche sulle conoscenze e abilità degli studenti e sulla qualità complessiva dell'offerta formativa delle Istituzioni di Istruzione. Dopo alcune sperimentazioni si svolsero nell'anno scolastico 2007-2008 le prime prove nazionali scritte di matematica e di italiano, somministrate agli studenti all'ultimo anno della scuola secondaria di primo grado per fini statistici. Queste prove erano chiamate INVALSI. Nello specifico INVALSI è l'acronimo di "Istituto Nazionale per la VALutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione", perciò le prove prendevano il nome dall'Ente di ricerca che si occupò e che si occupa tuttora di creare e di valutare i test somministrati nelle scuole. Dopo la somministrazione della prima prova INVALSI ne seguirono altre, che si svolsero in primavera con cadenza annuale. Per valutare il livello di apprendimento e competenza dei ragazzi delle scuole del nostro paese furono selezionate come campione solo alcune classi di Italia, anche se tutti i ragazzi dei vari istituti d'Italia svolgevano in contemporanea le prove. Dai risultati delle prove sono state raccolte informazioni sul funzionamento del sistema educativo italiano e tali risultati sono stati messi poi a disposizione degli istituti, e quindi dei docenti, per l'attività di autovalutazione delle pratiche didattiche della scuola. Nel corso degli anni si ampliò il numero di discipline da valutare nei test: dall'anno scolastico 2010-2011 si aggiunse la valutazione delle conoscenze e delle competenze della lingua slovena nella regione del Friuli-Venezia-Giulia, mentre dall'anno scolastico 2017-2018 entrò nella valutazione nazionale anche la lingua inglese. Oltre all'ampliamento delle discipline da valutare si allargò anche la fascia di età degli studenti a cui sottoporre le prove e cambiò la modalità di somministrazione.
A causa della pandemia, durante l'anno scolastico 2019-2020 le prove INVALSI sono state svolte solo nei giorni 2,3 e 4 marzo 2020 dalle classi di grado

13 e poi sono state sospese dal 5 marzo in poi; coloro che avevano svolto le prove INVALSI nei primi giorni di marzo hanno avuto comunque modo di ricevere i risultati delle prove [2]. Occorre anche sottolineare che i tempi di realizzazione delle prove per il grado 10 nell'anno scolastico 2020-2021 hanno subito dei rallentamenti, proprio a causa della pandemia, perciò il Ministero dell'Istruzione ha deciso di sospendere la somministrazione di tale prova in quell'anno per quello specifico grado (ma solo per quell'anno): questo è dovuto al fatto che le prove del grado 10 e quelle del grado 13 sono entrambe CBT ("Computer Based test", cioè prove svolte al computer) e dovrebbero essere somministrate attraverso i medesimi laboratori, trattandosi di due gradi scolastici entrambi appartenenti al secondo ciclo d'istruzione; si è scelto quindi di dare la priorità alla rilevazione delle prove per i ragazzi della classe quinta della secondaria di secondo grado, essendo studenti uscenti dalla scuola di istruzione [3].
Attualmente le prove vengono svolte dagli studenti dei gradi 2 e 5 (scuola primaria) in modalità cartacea e dagli studenti dei gradi 8, 10 e 13 (scuola secondaria) tramite computer. Nelle prove cartacee vengono presentate le stesse domande a tutti i ragazzi, mentre in quelle al computer ad ogni ragazzo viene proposta una prova diversa da quella dei compagni, ma tutte le prove mantengono lo stesso livello di difficoltà. La somministrazione delle prove agli studenti all'ultimo anno della scuola secondaria di secondo grado risale all'anno scolastico 2018-2019, ed è dall'anno scolastico 2020-2021 che le stesse prove risultano necessarie per l'ammissione all'Esame di Stato.

Tabella 1.1: riferimento all'a.s. in cui sono state . somministrate le prove INVALSI nei diversi gradi [4]

	A.S. 2007-2008	**A.S. 2008-2009**	**A.S. 2009-2010**	**A.S. 2010-2011**
GRADO 2				
GRADO 5				
GRADO 6				
GRADO 8				
GRADO 10				
GRADO 13				
	A.S. 2011-2012	**A.S. 2012-2013**	**A.S. 2013-2014**	**A.S. 2014-2015**
GRADO 2				
GRADO 5				
GRADO 6				
GRADO 8				
GRADO 10				
GRADO 13				
	A.S. 2015-2016	**A.S. 2016-2017**	**A.S. 2017-2018**	**A.S. 2018-2019**
GRADO 2				
GRADO 5				
GRADO 6				
GRADO 8			CBT	CBT
GRADO 10			CBT	CBT
GRADO 13				CBT
	A.S. 2019-2020	**A.S. 2020-2021**	**A.S. 2021-2022**	
GRADO 2	SOSPESA			

(Continua alla pagina successiva)

(Continua dalla pagina precedente)

GRADO 5	SOSPESA		
GRADO 6	SOSPESA		
GRADO 8	SOSPESA	CBT	CBT
GRADO 10	SOSPESA		CBT
GRADO 13	SOSPESA	CBT	CBT

Tabella 1.1: Come precendentemente detto, la dicitura **CBT** sta per "Computer Based Tests" [4].

1.2 La prova di Matematica

Il percorso di produzione di una prova INVALSI di Matematica dura dai due ai tre anni e inizia con la produzione delle domande da parte degli autori, che sono tutti insegnanti o dirigenti del sistema nazionale di istruzione. La formulazione delle domande avviene individualmente e in gruppo.
Le prove INVALSI di Matematica riportano quesiti di diversa difficoltà e che richiedono differenti abilità da parte dello studente per essere risolti. Gli esiti delle prove sono espressi mediante un valore numerico, chiamato "livello", che va da 1 a 5. Più è alto il valore numerico maggiore è il livello di competenza sull'argomento. Questo sistema di valutazione permette di descrivere il risultato della prova di Matematica in termini di *competenze* raggiunte dal singolo allievo, con una descrizione di cosa è in grado di fare rispetto ai *Traguardi* [1]

[1] *I Traguardi per lo sviluppo delle competenze* rappresentano dei riferimenti per gli insegnanti, indicano procedure didattiche da percorrere e aiutano ad orientare l'azione educativa per lo sviluppo integrale dell'allievo. I *Traguardi* costituiscono dei criteri per la valutazione delle competenze attese e le scuole hanno la libertà e la responsabilità di or-

delle *Indicazioni Nazionali.* In questo modo lo studente, il corpo docenti e anche le famiglie hanno modo di conoscere chiaramente il livello di competenza raggiunta dal ragazzo. La prova INVALSI di Matematica e i rispettivi risultati sono strumenti estremamente utili, perciò non devono essere vissuti come interferenze alla valutazione scolastica: quest'ultima tiene infatti conto di elementi che non sono riscontrabili mediante una prova standardizzata; come evidenziato nell'indagine di D. Basilico e A. Maffia [7] uno fra tanti è l'aspetto motivazionale e affettivo che influisce moltissimo sull'apprendimento e sulla successiva prestazione di ogni studente. In ogni caso è importante sottolineare che la prova INVALSI di Matematica non misura solo il grado di conoscenze dello studente, ma anche il suo livello di *competenza.*
Secondo la *Raccomandazione del Parlamento Europeo e del Consiglio* del 18 dicembre 2006 relativa a "competenze chiave per l'apprendimento permanente" (2006/962/CE), per *competenza matematica* si intende [6]:

> *L'abilità di sviluppare e applicare il pensiero matematico per risolvere una serie di problemi in situazioni quotidiane. Partendo da una solida padronanza delle competenze aritmetico-matematiche, l'accento è posto sugli aspetti del processo e dell'attività oltre che su quelli della conoscenza. La competenza matematica comporta, in misura variabile, la capacità e la disponibilità a usare modelli matematici di pensiero (pensiero logico e spaziale) e di presentazione (formule, modelli, costrutti, grafici, carte).*

Per diversificare le tipologie di competenze che lo studente deve mostrare di possedere, le prove di Matematica sono composte da quesiti di diversa tipologia:

---

ganizzarsi e di scegliere l'itinerario più opportuno per consentire agli studenti il miglior conseguimento dei risultati.

- *a risposta chiusa*, cioè quesiti a scelta multipla che presentano quattro opzioni di risposta (tre nel grado 2), una sola delle quali è corretta, e quesiti a scelta multipla complessa che richiedono la determinazione del valore di verità di alcune proposizioni;
- *a risposta aperta univoca*, cioè domande che richiedono, per esempio, il risultato di un calcolo algebrico o numerico;
- *a risposta aperta articolata*, cioè quesiti che richiedono semplici argomentazioni o giustificazioni o anche sequenze di calcoli;
- *cloze*, cioè quesiti che richiedono il completamento di frasi, calcoli o espressioni tramite l'utilizzo di elementi forniti nel testo;
- *associazione*, cioè domande che richiedono di individuare la corrispondenza corretta tra elementi di due insiemi dati.

Per quanto riguarda il contenuto dei quesiti, le domande delle prove INVALSI sono legate a uno dei quattro ambiti previsti dal *Quadro di Riferimento* (QdR): **Dati e Previsioni, Numeri, Relazioni e Funzioni** (non presente al grado 2), **Spazio e Figure** [4]. Ogni domanda viene classificata in un determinato ambito, il quale si deve considerare solo come l'ambito prevalente, e non esclusivo, di riferimento. Nella costruzione delle domande si tiene conto anche di una direzione trasversale ai contenuti, che si riferisce ai possibili processi messi in atto dagli studenti per rispondere alle domande.
Questa direzione trasversale è stata definita a partire dalle indicazioni curricolari e, in particolar modo, dai *Traguardi per lo sviluppo delle competenze*. Il gruppo di lavoro INVALSI ha quindi individuato un possibile raggruppamento sulle prove di Matematica secondo tre dimensioni: **Conoscere, Risolvere problemi, Argomentare** [4].

Per maggior chiarezza riporto la tabella dei *Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di secondo grado*.

Tabella 1.2: la dicitura **D1** indica la dimensione del "Conoscere", **D2** quella del "Risolvere Problemi" e **D3** quella dell' "Argomentare". Le diciture **T1**... **T12** indicano i vari traguardi numerati rispettivamente.
Per vedere le tabelle della primaria e della secondaria di primo grado si rimanda a [4].

Si muove con sicurezza nel calcolo numerico e simbolico; applica correttamente le proprietà delle operazioni con i numeri reali; realizza ordinamenti, calcola ordini di grandezza ed effettua stime numeriche e approssimazioni. Risolve equazioni e disequazioni.	**T1**	**D1**
Riconosce e denomina le forme del piano e dello spazio, le loro rappresentazioni e ne coglie le relazioni tra gli elementi. Utilizza le proprietà delle figure geometriche e teoremi per il calcolo di lunghezze, aree e volumi.	**T2**	**D1**
Rappresenta, elabora, analizza e interpreta dati, anche calcolando indici, per descrivere situazioni e individuare caratteristiche di un fenomeno o di una situazione, eventualmente anche allo scopo di produrre ipotesi e prendere decisioni.	**T3**	**D2**
Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni possedute, le loro relazioni con ciò che si vuole determinare e la coerenza e plausibilità del procedimento risolutivo e dei risultati trovati.	**T4**	**D2**

(Continua alla pagina successiva)

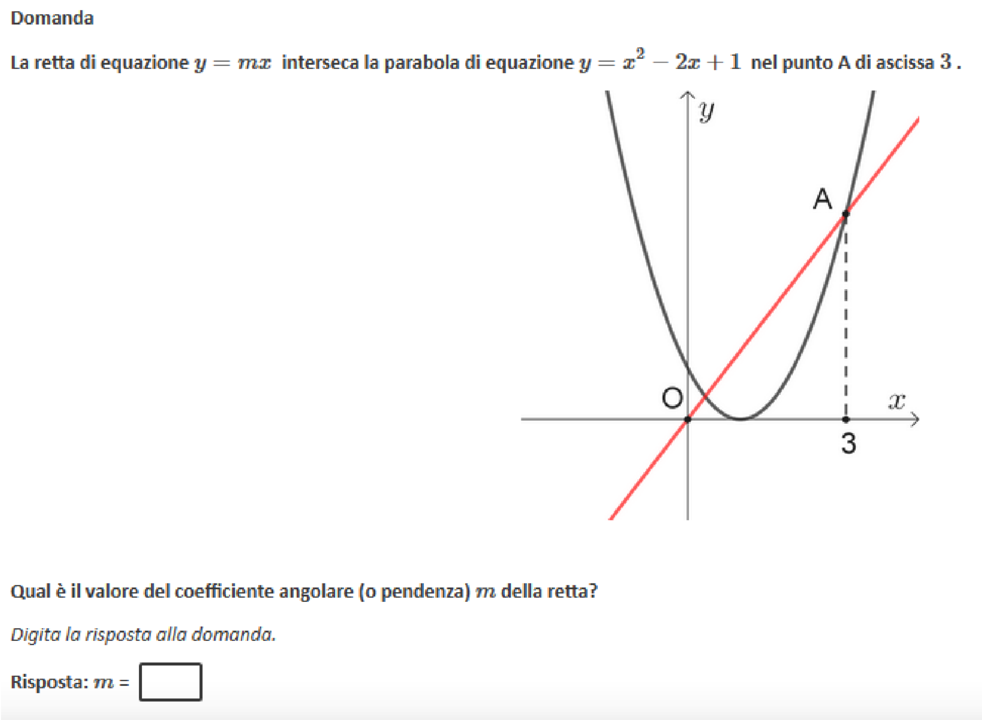
(Continua dalla pagina precedente)

Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi.	**T5**	**D2**
Riconosce, fra diverse argomentazioni, quelle che sono adeguate a sostenere una determinata tesi; produce esempi e controesempi utili a confermare o a confutare una determinata affermazione.	**T6**	**D3**
Produce argomentazioni esplicitando la tesi, utilizzando conoscenze e forme argomentative pertinenti alla tesi oggetto di argomentazione.	**T7**	**D3**
Comprende e utilizza diverse forme di rappresentazione, passando dall'una all'altra a seconda delle esigenze (grafica, numerica, simbolica, nella lingua naturale).	**T8**	**D1**
Riconosce, tra diversi modelli matematici proposti, quelli più adeguati a descrivere determinate situazioni oggetto di interesse.	**T9**	**D2**
Utilizza semplici modelli matematici dati per descrivere situazioni e fenomeni reali.	**T10**	**D2**
Dati una situazione o un fenomeno reali individua le variabili significative e costruisce un modello matematico adeguato a rappresentarli.	**T11**	**D2**
Esprime valutazioni e stime di probabilità in situazioni caratterizzate da incertezza. Esprime stime di probabilità di eventi composti a partire dalla conoscenza delle probabilità di eventi elementari.	**T12**	**D2**

1.3 I quesiti INVALSI sulla derivazione

Le prove INVALSI di Matematica dell'ultimo anno della secondaria di secondo grado presentano maggiori differenze nella tipologia dei quesiti somministrati nei vari indirizzi scolastici, rispetto alle prove di Italiano e di Inglese; questo è dovuto al fatto che il monte orario e gli argomenti trattati di matematica variano notevolmente da un indirizzo scolastico all'altro.
In questa sezione ho quindi voluto riportare alcuni dei quesiti matematici che sono stati somministrati ai ragazzi all'ultimo anno del secondo ciclo di istruzione (grado 13 nell'INVALSI); i quesiti che ho scelto richiedono tutti dimestichezza con il concetto di **derivazione**, perciò fanno tutti parte dell'ambito **Relazioni e Funzioni**. La piattaforma a cui ho fatto riferimento per le domande dei test INVALSI è GESTINV [8], database delle prove INVALSI di Matematica, Italiano e Inglese che sono state somministrate dal 2008 in poi. Le prove che ho selezionato sono state rivolte ai ragazzi che hanno frequentato un qualsiasi indirizzo scolastico tra quelli presenti nelle scuole Italiane negli anni 2019 e 2021. Come anticipato nel paragrafo 1.1, le prove INVALSI nell'anno 2020 sono state sospese a causa della pandemia, mentre le prove INVALSI dell'anno 2022 del grado 13 non sono ancora state caricate sul sito GESTINV.
Per maggior chiarezza ogni quesito riporta una tra le sigle seguenti: LNS (Liceo non Scientifico o Istituto Professionale), LS (Liceo Scientifico) e TEC (Istituto Tecnico). Nella didascalia di ogni quesito, oltre alla *sigla riferita all'indirizzo scolastico*, sono presenti il *numero* del quesito, *l'anno* di somministrazione della prova e la *parola chiave* corrispondente a una (o più) delle quattro categorie: "derivabilità", "calcolo della derivata", "funzione derivata", "significato della derivata". La scelta di riportare alcune delle domande presenti nelle prove INVALSI è nata dal fatto di voler evidenziare su quali

aspetti del concetto di derivata è considerato opportuno che i ragazzi si soffermino, secondo l'attuale organizzazione di valutazione.
Degli undici quesiti sulla derivazione presenti sul sito GESTINV ne ho selezionati cinque riportanti *parole chiave* differenti. La maggior parte dei quesiti dello stesso anno sono stati somministrati sia nei licei scientifici che negli istituti tecnici.



Domanda

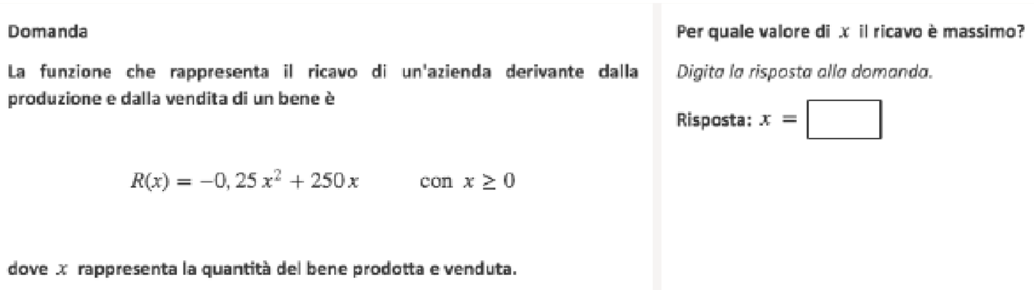
La retta di equazione $y = mx$ interseca la parabola di equazione $y = x^2 - 2x + 1$ nel punto A di ascissa 3 .

Qual è il valore del coefficiente angolare (o pendenza) m della retta?

Digita la risposta alla domanda.

Risposta: m =

Figura 1.1: MAT-LNS-3, 2019, quesito 10-0 (*funzione derivata; significato della derivata*) [8].



Domanda

La funzione che rappresenta il ricavo di un'azienda derivante dalla produzione e dalla vendita di un bene è

$$R(x) = -0,25\,x^2 + 250\,x \qquad \text{con } x \geq 0$$

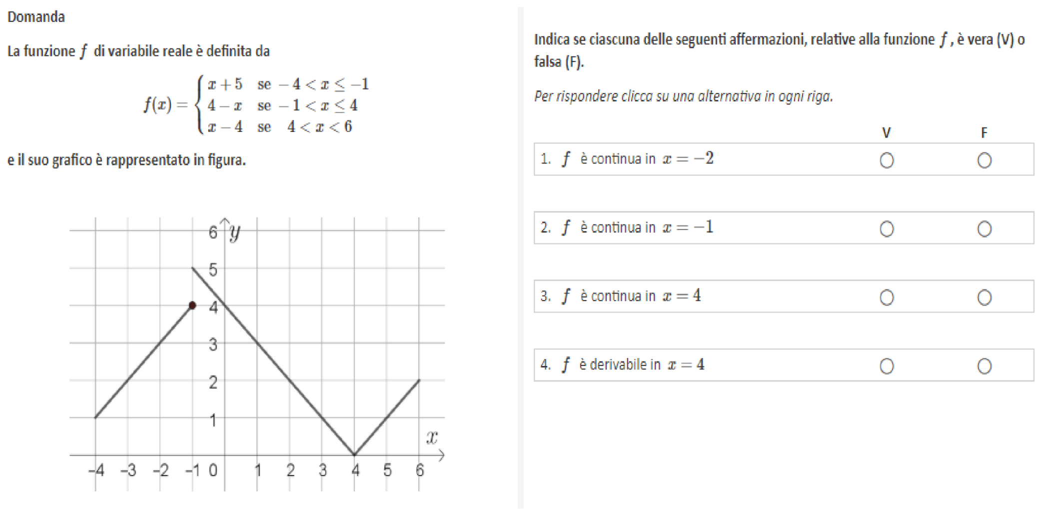
dove x rappresenta la quantità del bene prodotta e venduta.

Per quale valore di x il ricavo è massimo?

Digita la risposta alla domanda.

Risposta: $x =$

Figura 1.2: MAT-TEC-1, 2021, quesito 08-0 (*significato della derivata*) [8].



Domanda

La funzione f di variabile reale è definita da

$$f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{se } -4 < x \leq -1 \\ 4-x & \text{se } -1 < x \leq 4 \\ x-4 & \text{se } \ 4 < x < 6 \end{cases}$$

e il suo grafico è rappresentato in figura.

Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni, relative alla funzione f, è vera (V) o falsa (F).

Per rispondere clicca su una alternativa in ogni riga.

	V	F
1. f è continua in $x = -2$	○	○
2. f è continua in $x = -1$	○	○
3. f è continua in $x = 4$	○	○
4. f è derivabile in $x = 4$	○	○

Figura 1.3: MAT-LS-1, 2019, quesito 09-0; MAT-TEC-2, 2019, quesito 06-0 (*derivabilità*) [8].

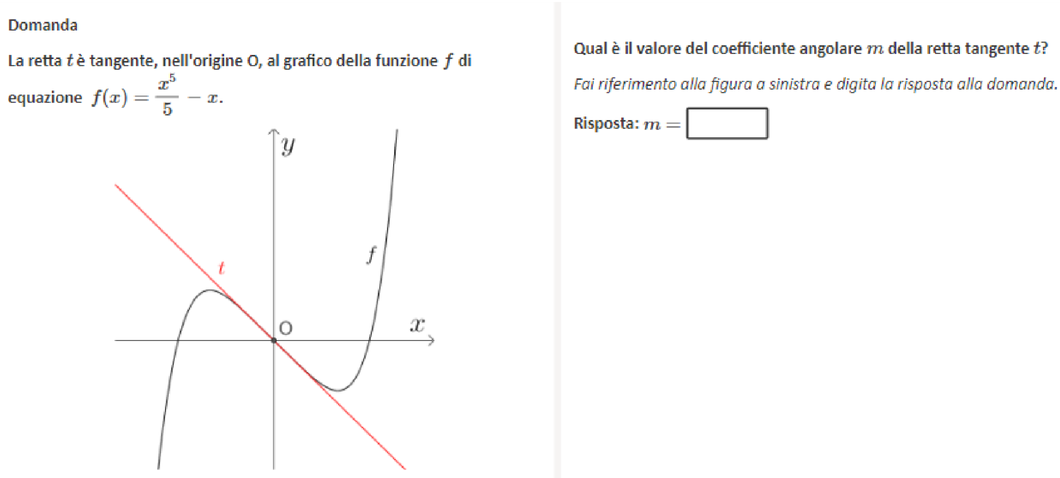


Figura 1.4: MAT-LS-3, 2019, quesito 14-0; MAT-TEC-3, 2019, quesito 07-0 (*calcolo della derivata; funzione derivata; significato della derivata*) [8].

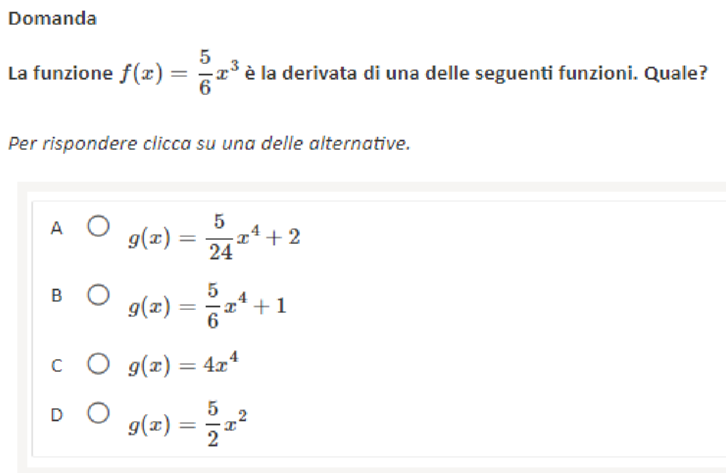


Figura 1.5: MAT-TEC-3, 2019, quesito 15-0 (*funzione derivata*) [8].

E' opportuno sottolineare che:

- su undici quesiti otto hanno come parola chiave "significato della derivata";

- su undici quesiti sette hanno come parola chiave "funzione derivata";

- è presente un solo quesito che ha come parola chiave "derivabilità";

- è presente un solo quesito che ha come parola chiave "calcolo della derivata";

- su undici quesiti solo uno è stato rivolto agli studenti dei licei non scientifici o istituti professionali, sei sono stati rivolti agli studenti del liceo scientifico e nove agli studenti degli istituti tecnici;

- negli istituti tecnici i quesiti sono più variegati rispetto a quelli rivolti ai colleghi dei licei, che invece devono risolvere in prevalenza domande sul significato del concetto di derivata a partire da un grafico di funzione;

- le domande sul concetto di derivata legate all'integrazione sono presenti solo negli istituti tecnici;

- le domande inerenti al massimo o al minimo di una funzione sono rivolte in prevalenza agli studenti degli istituti tecnici.

E' interessante notare come i quesiti legati al concetto di "derivata come pendenza della retta tangente alla curva in un punto" siano considerati più in linea con un percorso di studio di uno studente di liceo scientifico, mentre domande in cui occorre trovare il "minimo/massimo di una funzione" siano rivolte a studenti frequentanti istituti tecnici; entrambe le tipologie di domande sono state di grande interesse nel 1637 per Pierre de Fermat, il quale

ne parlò nella sua memoria *Methodus ad disquirendam maximam et minimam et de tangentibus linearum curvarum*, e di altri prima e dopo di lui.
Per quanto detto nel paragrafo precedente, le prove INVALSI di Matematica mirano a misurare determinate conoscenze e competenze, ma, da quello che si vede dai quesiti riportati, la visione della derivata sembra essere meccanica e procedurale e non risultano domande in cui si ragiona direttamente sulla definizione data nei libri, come limite del rapporto incrementale (l'unico accenno si trova nei quesiti sulla pendenza della retta tangente, ma un esercizio di questo tipo si può risolvere in maniera meccanica senza avere capito fin in fondo il concetto, e sopratutto un esercizio di quel tipo non richiede l'esplicita conoscenza della definione odierna del termine). Molto spesso si trovano nei libri di testo definizioni che sembrano slegate dal resto della teoria e della parte pratica (come avviene, ad esempio, per la parabola, l'iperbole ecc.), e così succede anche per le derivate. Mi sembra perciò importante "tornare alle origini" e ripercorrere l'evoluzione del concetto di derivata, per evidenziare come nascono le definizioni e i risultati che studiamo tuttora durante il nostro percorso alla secondaria di secondo grado.
Nel prossimo capitolo cercherò quindi di ricapitolare alcuni risultati storici che hanno portato al concetto di derivazione che conosciamo oggi, soffermandomi sopratutto sulle nozioni e sui risultati che si trovano negli attuali libri di testo scolastici.

Capitolo 2

L'evoluzione storica del concetto di derivata

2.1 Le origini del calcolo infinitesimale: il problema delle quadrature e quello delle tangenti nell'antichità

Sono due i principali percorsi che hanno portato all'attuale concettualizzazione delle derivate e degli integrali, ovvero il **calcolo delle aree delle figure piane e dei volumi dei solidi** e **la determinazione della retta tangente ad una curva in un suo punto**. Il percorso legato al problema delle tangenti ricevette una minore attenzione nell'antichità rispetto allo studio del problema delle quadrature, principalmente perchè nella geometria classica non ci si staccava mai dalla figura particolare per dare spazio a metodi generali validi per intere classi di figure: nella geometria greca esistevano infatti solo curve e figure che godevano di specifiche proprietà univocamente determinate. Ciò portava ad una minore utilità dello studio delle tangenti rispetto a quello del calcolo delle aree e dei volumi.

Il principale studioso del problema delle quadrature è stato sicuramente **Archimede** (287 a.C.-212 a.C.), il quale nella sua opera *Il Metodo* superò la tecnica di esaustione di Eudosso ed elaborò un procedimento meno laborioso per il calcolo delle aree e dei volumi, che consisteva nel sezionare figure piane con rette parallele (e sezionare solidi con piani paralleli) e ragionare sulle proporzioni e le relazioni tra le figure. I risultati di Archimede hanno portato poi alla teoria degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri (1598-1647) nel corso del XVII secolo, teoria che si colloca tra quelle che hanno dato una notevole spinta verso il metodo scientifico.

Per quanto riguarda l'altro versante, il problema delle tangenti è stato trattato sia da **Euclide** (305 a.C.-283 a.C.) che da **Apollonio di Perge** (262 a.C.-190 a.C.). Entrambi si concentrarono sull'aspetto costruttivo e non su quello analitico, cioè sulla possibilità o meno di tracciare una retta tangente ad una curva seguendo una serie di regole. In particolare, negli *Elementi* Euclide definì la tangente a un cerchio in un suo punto come la retta che, toccando il cerchio e prolungata, non seca il cerchio e mostrò come da un punto dato si possa costruire la retta tangente ad un cerchio dato (Figura 2.1); mentre nel *De tactionibus* di Apollonio è stato approfondito il concetto di tangenza ed è stato mostrato come disegna-

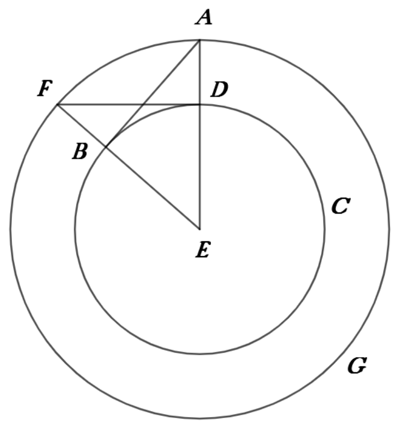


Figura 2.1: A punto dato, BCD cerchio dato e AB segmento costruito a partire da A tangente al cerchio BCD (*Elementi* Libro III, Prop. 17) [11].

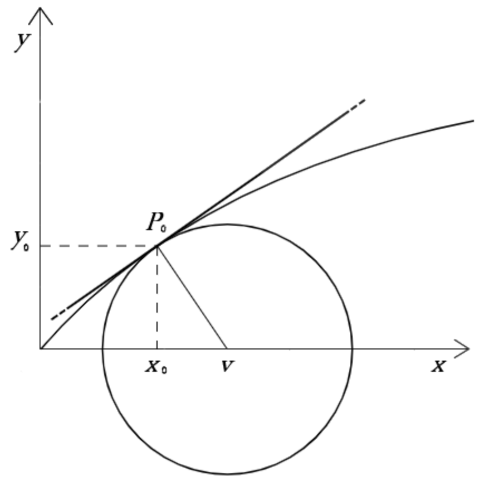
re il cerchio tangente a tre cerchi dati, o più in generale come costruire il cerchio che è tangente a tre oggetti quali linee rette o cerchi. Successivamente l'interesse della maggior parte dei matematici si è rivolta altrove, verso il problema delle quadrature e verso altre questioni dell'algebra e del mondo della fisica. Solo nel XVII secolo il problema delle tangenti tornò ad essere affrontato.

2.2 Il problema delle tangenti nel XVII secolo

Come evidenziato nel paragrafo precedente, si è dovuto aspettare gli inizi del XVII secolo per trovare risultati rilevanti sul problema delle tangenti, infatti è in quel periodo che avviene il passaggio dalla geometria sintetica a quella analitica: al problema specifico si applicano ora risultati (teoremi) generali. Questo cambio di marcia è stato possibile grazie ai lavori di Cavalieri e successivamente alla rivoluzione attuata da **Réné Descartes** (1596-1650); quest'ultimo in particolare si concentrò sulle *curve geometriche* (oggi chiamate curve algebriche) e rivoluzionò la concettualizzazione stessa del termine.

2.2.1 Il metodo Cartesiano per la normale ad una curva (e per la tangente)

Descartes nel suo saggio *La Géométrie*, frutto di risultati di ricerche compiute in ambito geometrico dal 1618 al 1637, cercò di rappresentare l'idea di una scienza che potesse raggiungere l'universalità e l'unità a partire da fondamenti rigorosi, la geometria appunto. Descartes mostrò quindi la corrispondenza fra la notazione simbolica e la rappresentazione visiva, specificando che per risolvere un qualsiasi problema occorra considerarlo come già risolto e assegnare una lettera ad ogni linea che si ritiene necessaria per costruire il problema in questione, sia alle linee conosciute sia a quelle non note, e svolgere infine il problema seguendo l'ordine che naturalmente mostra la dipendenza delle linee dalle altre linee e ottenere un'equazione finale [13]. Descartes sottolineò che bisogna trovare tante equazioni quante sono le linee che sono state supposte come incognite. Ne *La Géométrie* una curva geometrica non è quindi un oggetto matematico determinato da specifiche proprietà, ma il luogo dei punti le cui coordinate soddisfano un'equazione del tipo $F(x, y) = 0$. Da qui l'attenzione di Descartes verso questioni matematiche non ancora dimostrate (problema di Pappo) e verso il problema delle normali (e delle tangenti).



Il metodo[1]:

Per determinare la normale a una curva di equazione $F(x, y) = 0$ in un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ si considera la circonferenza con centro sull'asse x e tangente alla curva in P_0; una volta trovata la circonferenza in questione si ha che il suo raggio passante per P_0 è la normale alla curva $F(x, y) = 0$, e in particolare la retta normale al raggio è la retta tangente. Senza perdita di generalità, si considera che il centro della circonferenza stia nel punto di coordinate $(v, 0)$ e il suo raggio sia r, allora la circonferenza ha equazione:

$$(x - v)^2 + y^2 = r^2$$

[1]Per una maggiore comprensione il metodo di Descartes verrà spiegato utilizzando gli assi cartesiani ortogonali e le notazioni simboliche e linguistiche odierne, per maggiori dettagli si rimanda a [14]

In generale tale circonferenza potrebbe incontrare la curva oltre che in P_0 anche in un altro punto detto P_1, disse Descartes [14]:

> *Bisogna considerare che se questo punto C* (il centro della circonferenza cercata) *è come lo desideriamo, il cerchio di cui sarà centro e che passerà per P_0, vi toccherà la curva senza intersecarla* (secarla). *Al contrario, se questo punto C è un po' più vicino o un po' più lontano di quel che deve essere, il cerchio intersecherà la curva, e non solo nel punto P_0, ma necessariamente anche in qualche altro* (il punto chiamato P_1). [...] *Però tanto più questi due punti, P_0 e P_1, sono vicini tra loro, tanto minore è la differenza che sussiste fra queste radici* (dell'equazione)*; infine, se questi punti giacciono ambedue in uno (cioè se il cerchio che passa per P_0 vi tocca la curva senza intersecarla), queste radici saranno assolutamente uguali.*

Perciò, se la circonferenza è tangente alla curva, necessariamente $P_0 = P_1$ e quindi la molteplicità di intersezione della circonferenza e della curva in P_0 è 2.

Analiticamente, dal momento che la curva ha equazione polinomiale $F(x, y) = 0$, il sistema

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ (x - v)^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

rappresenta l'intersezione tra la curva e la circonferenza. Per evitare di avere due variabili, x e y, si può eliminare la variabile y dal sistema ottenendo così il polinomio $Q(x)$, il quale dovrà avere x_0 come radice doppia ed essere quindi della forma

$$Q(x) = (x - x_0)^2 R(x) \tag{2.1}$$

con $R(x)$ polinomio da determinare. Sia n il grado del polinomio $F(x, y) = 0$, si ha che il grado di $Q(x)$ è $2n$ e di conseguenza $R(x)$ ha grado $2n - 2$. Uguagliando i coefficienti dei termini di pari grado dell'equazione (2.1), si ottengono $2n + 1$ equazioni in $2n + 1$ incognite: i $2n - 1$ coefficienti del polinomio $R(x)$ e i due parametri v e r che determinano l'equazione tangente alla curva e che si ricavano risolvendo il sistema. Una volta trovati i valori di v e r si sostituiscono nell'equazione della circonferenza, e si trova l'equazione della retta su cui giace il raggio passante per il punto P_0. Tale retta è la normale alla curva di equazione $F(x, y) = 0$ e la perpendicolare a tale retta nel punto P_0 è la retta tangente.
Tale metodo è sicuramente funzionale e si applica a tutte le curve che possono essere descritte da un'equazione, ma conduce a calcoli intricati già nei casi più semplici. Verrà ora mostrata l'applicazione del metodo di Descartes considerando come curva la parabola con vertice nell'origine degli assi.

Esempio. Sia $y = \lambda x^2$ la parabola che ha vertice nell'origine degli assi, si vuole trovare l'equazione della circonferenza che ha centro sul'asse delle ascisse e tangente alla curva in $P_0 = (x_0, y_0)$. Sia quindi $(x - v)^2 + y^2 = r^2$ l'equazione della circonferenza che ha centro nel punto $C = (v, 0)$ e raggio r, con v e r valori da determinare. Mettendo le curve a sistema si ottiene

$$\begin{cases} y = \lambda x^2 \\ (x - v)^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

sostituendo la prima equazione nella seconda e svolgendo i conti si ha che

$$\begin{cases} y = \lambda x^2 \\ x^2 + v^2 - 2vx + \lambda^2 x^4 = r^2 \end{cases}$$

considerando solo la seconda equazione del sistema, portando tutti i termini a sinistra dell'uguaglianza e riordinandoli in ordine decrescente di grado in x, si ha

$$\lambda^2 x^4 + x^2 - 2vx + v^2 - r^2 = 0.$$

Chiamiamo $Q(x) = \lambda^2 x^4 + x^2 - 2vx + v^2 - r^2$ il polinomio di grado 4. Per quanto detto in precedenza, occorre che $Q(x)$ abbia una radice doppia per $x = x_0$, cioè che esistano a,b,c parametri tali che $Q(x) = (x - x_0)^2 R(x)$, con $R(x) = ax^2 + bx + c$ polinomio generico di grado 2. Allora per il *principio di identità dei polinomi* si ottiene l'equazione

$$\lambda^2 x^4 + x^2 - 2vx + v^2 - r^2 = (x - x_0)^2 (ax^2 + bx + c),$$

svolgendo i conti e raccogliendo i termini di pari grado a sinistra e a destra dell'uguaglianza si ottiene

$$\begin{aligned} \lambda^2 x^4 + x^2 - 2vx + v^2 - r^2 = ax^4 + (b - 2ax_0)x^3 + (c - 2bx_0 + ax_0^2)x^2 + \\ + (bx_0^2 - 2cx_0)x + cx_0^2, \end{aligned}$$

da cui si ricavano le seguenti relazioni, confrontando i coefficienti di ciascuna potenza di x

$$\begin{aligned} &a = \lambda^2, \\ &b - 2ax_0 = 0, \\ &c - 2bx_0 + ax_0^2 = 1, \\ &bx_0^2 - 2cx_0 = -2v, \\ &cx_0^2 = v^2 - r^2, \end{aligned}$$

dalle quali si ricavano le cinque incognite a, b, c, v e r. Applicando una serie di sostituzioni successive

$$
\begin{aligned}
&a = \lambda^2 \\
&b = 2\lambda^2 x_0 \\
&c = 1 + 3\lambda^2 x_0^2 \\
&v = x_0 + 2\lambda^2 x_0^3 \\
&r = \sqrt{\lambda^2 x_0^4 + 4\lambda^4 x_0^6}
\end{aligned}
$$

si ottengono quindi i valori di v e r che danno l'equazione della circonferenza tangente alla curva in P_0. Supponendo $x_0 \neq 0$ (e non è restrittivo farlo visto che, altrimenti, la circonferenza avrebbe raggio zero e sarebbe un punto) e ricordando che l'equazione della curva è $y = \lambda x^2$ e il punto $P_0 = (x_0, y_0)$ sta nell'intersezione tra la curva e la circonferenza, l'equazione di quest'ultima diventa

$$
\begin{gathered}
\left(x - \left(x_0 + 2\lambda^2 x_0^3\right)\right)^2 + y^2 = \lambda^2 x_0^4 + 4\lambda^4 x_0^6 \\
\left(x - x_0 - 2\frac{\lambda^2 x_0^4}{x_0}\right)^2 + y^2 = \left(\lambda x_0^2\right)^2 + 4\left(\frac{\lambda^2 x_0^4}{x_0}\right)^2 \\
\left(x - x_0 - 2\frac{y_0^2}{x_0}\right)^2 + y^2 = y_0^2 + 4\left(\frac{y_0^2}{x_0}\right)^2 \\
x^2 + y^2 - 2\left(x_0 + 2\frac{y_0^2}{x_0}\right)x + x_0^2 + 3y_0^2 = 0.
\end{gathered}
$$

Per trovare la pendenza della normale alla curva basta considerare i due punti di intersezione del raggio della circonferenza, $C = (x_0 + 2\lambda^2 x_0^3, 0)$ e $P_0 = (x_0, y_0)$, e si ottiene quindi l'equazione della retta tangente alla curva in P_0 (considerando $y_0 \neq 0$)

$$
y = \frac{2\lambda^2 x_0^3}{y_0}x + y_0 - \frac{2\lambda^2 x_0^4}{y_0}.
$$

Alcune considerazioni: Pur essendo un metodo con un'ampia generalità, il metodo di Descartes risulta comunque una procedura un po' macchinosa. In primo luogo, la ricerca della tangente stessa non avviene operando direttamente sull'equazione delllla curva, ma tramite l'utilizzo di un'equazione ausiliaria ottenuta eliminando una delle variabili nel sistema della curva e della circonferenza tangente. Questo comporta la soluzione di un prolisso sistema di $2n+1$ equazioni in $2n+1$ incognite, la maggior parte delle quali risulta irrilevante per il problema in questione, visto che per trovare la circonferenza tangente basterebbe conoscere il valore di v dell'ascissa del centro. Oltre a questo, considerare la circonferenza tangente alla curva invece che considerare direttamente la retta tangente raddoppia il grado dell'equazione iniziale e comporta conti più complicati. Infine, tale metodo si applica solo a curve geometriche (algebriche).

Florimond de Beaune (1601-1652) fu tra coloro che cercarono di semplificare il metodo di Descartes mantenendone la struttura portante; la strategia attuata da De Beaune fu quella di sostituire alla circonferenza la retta tangente di equazione $y = mx + q$, semplificando così notevolmente i passaggi: l'eliminazione della y tra la retta tangente e la curva è immediata e il polinomio $Q(x)$ ha grado n (e non più $2n$).

2.2.2 Il metodo dell'adequazione di Fermat

Nel gennaio 1638, subito dopo la pubblicazione del saggio *Géométrie* di Descartes, **Pierre Fermat** (1601-1665) scrisse una lettera a Marin Mersenne, un gesuita filosofo e matematico che aveva intrattenuto numerose corrispondenze con vari scienziati, nella quale espose un nuovo metodo per trovare massimi e minimi con applicazioni al problema delle tangenti.

Il metodo per la tangente:

Mentre al centro della tecnica cartesiana c'era l'equazione della curva, per Fermat il punto di partenza era *l'adequazione*, una relazione che si ottiene scrivendo la proprietà caratteristica della curva, non per i punti di questa, ma per i punti sulla tangente: si ottiene una relazione approssimata (adequazione) che diventa esatta (equazione) se il punto sulla tangente coincide con quello di contatto.

Per capire meglio il metodo di Fermat verrà ora riportato l'esempio del caso della parabola con vertice nell'origine.

Esempio. Si consideri il caso della parabola di equazione $y = \lambda x^2$ e sia $y - y_0 = m(x - x_0)$ l'equazione della retta tangente alla curva nel punto $P_0 = (x_0, y_0)$ e con pendenza, da dover trovare, pari a m. Per ottenere l'adequazione della parabola si scrive λx^2 al posto di y nell'equazione della retta tangente, e si ottiene

$$\lambda x^2 - y_0 \approx m(x - x_0),$$

dove il simbolo $\approx$ rappresenta l'adequazione. Dal momento che $y_0 = \lambda x_0^2$ si ha che l'adequazione diventa

$$\lambda x^2 - \lambda x_0^2 \approx m(x - x_0),$$

raccogliendo e dividendo per $x - x_0$ i termini a destra e a sinistra dell'adequazione, si ottiene

$$\lambda(x - x_0) \approx m.$$

Se il punto sulla tangente coincide con il punto di contatto, cioè se $x = x_0$, l'adequazione diventa un'equazione e risulta che $m = 2\lambda x_0$. Si ottiene che la retta tangente alla parabola ha equazione

$$y = 2\lambda x_0 x - 2\lambda x_0^2 + y_0.$$

Come anticipato, Fermat si occupò anche dello studio dei massimi e dei minimi, e legò tale studio alle tangenti.

Il metodo per i massimi e i minimi:

L'idea di base era quella di trovare il punto di massimo e quello di minimo di una certa quantità $F(x)$ sfruttando quanto detto nel metodo per trovare la tangente. Si ha che se il punto x_0 è un massimo o un minimo per la quantità $F(x)$, allora la tangente in x_0 alla curva di equazione $y = F(x)$ è orizzontale, e quindi ha equazione $y = F(x_0)$. Scrivendo la proprietà caratteristica della curva su questa tangente (cioè scrivendo $F(x)$ al posto di y) si ottiene l'adequazione $F(x) \approx F(x_0)$, cioè

$$F(x) - F(x_0) \approx 0.$$

Si possono dividere i termini dell'adequazione per $x - x_0$ e si ottiene

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \approx 0,$$

e se ora si pone $x = x_0$ l'adequazione diventa l'equazione

$$\left.\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}\right|_{x=x_0} = 0,$$

dalla quale si può ricavare il valore x_0 del punto di massimo e di minimo.

Esempio. Sia $F(x) = x(1 - x)$ e sia x_0 il punto di massimo di $F(x)$ che si cerca di trovare. Si ha allora $F(x) - F(x_0) \approx 0$ e quindi dividendo per $x - x_0$ e svolgendo i conti si ha

$$\frac{x(1 - x) - (1 - x_0)}{x - x_0} \approx 0$$

$$\frac{x - x_0 - (x^2 - x_0^2)}{x - x_0} \approx 0$$

$$1 - (x + x_0) \approx 0.$$

Ponendo $x = x_0$, l'adequazione diventa un'equazione e si ha

$$1 - 2x_0 = 0$$
$$x_0 = \frac{1}{2}$$

e quindi si è ottenuto il punto di massimo cercato.

Alcune considerazioni: Le limitazioni di tale metodo si possono notare quando l'equazione di una curva algebrica contiene radici o espressioni fratte. In ogni caso, il metodo dell'adequazione di Fermat fu molto rilevante all'epoca e si differenziò da quello di Descartes per il fatto di considerare la proprietà caratteristica della curva tramutandola in adequazione, quando la si scrive sulla tangente. Si stava andando sempre di più verso l'idea della rappresentazione locale di una curva tramite una retta (la tangente) e verso il concetto di limite.

2.2.3 Il metodo cinematico di Roberval e Torricelli

Un altro metodo per costruire la tangente ad una curva in un punto è quello "cinematico", connesso al movimento fisico degli oggetti matematici e maggiormente slegato dai metodi algebrici. Questo tipo di approccio è stato portato avanti sia dal professore al College Royal di Parigi, **Gilles Personne de Roberval** (1602-1675), sia da **Evangelista Torricelli** (1608-1647), ed entrambi i loro lavori furono resi pubblici nel 1644. I due metodi presuppongono che sia nota la generazione cinematica della curva di cui si vuole tracciare la retta tangente in un punto: per tracciare la tangente ad una parabola, per esempio, occorre sapere che questa curva è generata dal moto di un punto che si allontana dal fuoco con la stessa velocità con cui si allontana dalla direttrice, oppure per trovare la tangente ad un ellisse occorre sapere che esso è generato da un punto che si avvicina a un fuoco alla stessa velocità con cui si allontana dall'altro fuoco. Vista la similarità dei due approcci, il metodo analizzato nelle prossime righe sarà quello di Roberval.

Il metodo di Roberval:

Alla base del metodo c'era il *principio d'invenzione* secondo cui la direzione del moto di un punto che descrive una linea curva è la retta tangente alla curva in ogni posizione di quel punto. Il procedimento da seguire per tracciare la tangente imponeva diversi passaggi:

1) esaminare e differenziare i diversi moti che il punto che descrive la curva ha nel posto dove si vuole tracciare la tangente,

2) comporre tali movimenti in uno solo,

3) tracciare la linea della direzione del moto composto, questa retta è la tangente cercata.

Un esempio di tale applicazione è quello della cicloide, una curva generata dal movimento di un punto fisso P che sta sulla circonferenza, la quale è tangente all'asse delle ascisse e si muove sull'asse toccandolo sempre in un solo punto (cioè non si schiaccia mai).

Esempio. La cicloide era considerata da Roberval come la curva generata dal movimento di una circonferenza attorno al suo centro, mentre si muove di moto rettilineo uniforme; questi due movimenti sono sincronizzati in modo che, quando il cerchio ha compiuto un giro, esso si è mosso di un segmento uguale alla sua lunghezza. Dopo aver spiegato come si può tracciare la cicloide a partire dal movimento di un punto, Roberval passò alla descrizione della costruzione della tangente ad un punto E qualsiasi, a partire dalla scomposizione nei due moti simultanei [9]:

si tracci la circonferenza generatrice EBC (Figura 2.2) *in modo che passi per il punto* E*, si prenda un segmento orizzontale* EF (direzione della velocità del moto rettilineo) *e sulla tangente al cerchio* (direzione della velocità del moto rotatorio) *si prenda un segmento* EG *uguale ad* EF (perchè le due velocità di rotazione e di traslazione sono uguali)*; il segmento* EH*, che è la diagonale del parallelogramma* $EFHG$*, è la direzione della velocità del movimento composto che genera la cicloide, e sarà quindi anche la retta tangente alla cicloide nel punto* E*.*

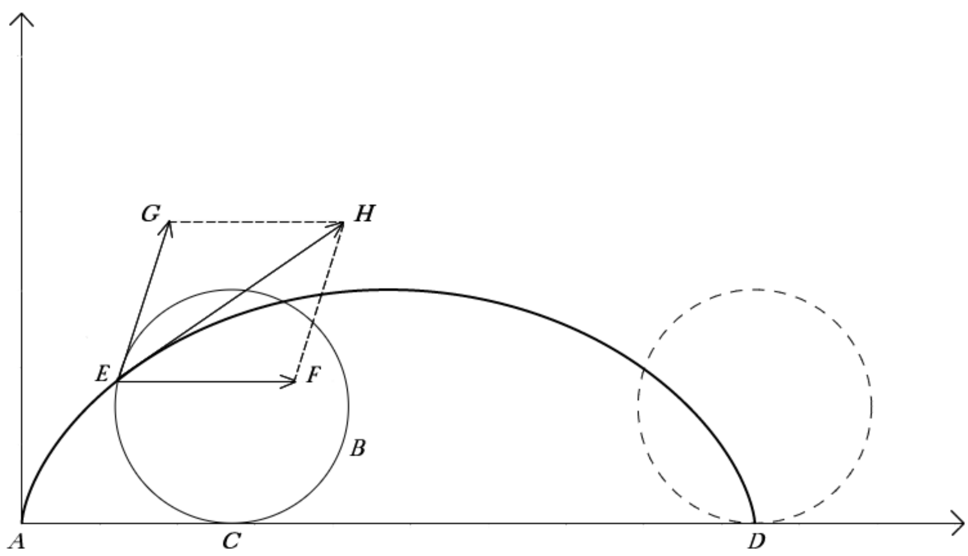


Figura 2.2:

Alcune considerazioni: Il metodo di Roberval (e di Torricelli) richiedeva due condizioni imprescindibili, la prima era quella che la curva fosse data tramite la composizione di movimenti (quelle che oggi noi chiamiamo curve in forma parametrica), la seconda era la possibilità di calcolare la velocità e le direzioni dei movimenti scomposti. Chiaramente non era sempre possibile che entrambe le condizioni venissero soddisfatte, tranne nei casi più semplici.

2.3 Il nuovo metodo di Leibniz

Nel 1684 il tedesco Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) pubblicò sul nuovo giornale scientifico, gli *Acta Eruditorum*, un articolo dal titolo *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus.* In quest'opera il richiamo a Fermat era molto evidente, Leibniz era stato infatti ispirato nel suo lavoro dai risultati della geometria analitica di Fermat e anche dai lavori di Descartes. I metodi precedenti a quelli di Leibniz necessitavano però di una serie di artifizi, tra cui quello di di semplificare l'adequazione $F(x) - F(x_0) \approx 0$, dopo averla divisa per $x - x_0$, per poi andare a porre $x = x_0$. Come detto in precedenza, quantità frazionarie e irrazionali creavano dei grossi problemi ai metodi finora esposti. Il nuovo metodo di Leibniz offrì una svolta: non conviene guardare l'equazione nella sua interezza, perchè così non si riesce a separare l'equazione nelle varie parti più semplici che la compongono, ma è necessario guardare separatamente i due calcoli, quello della derivata di F e quello della soluzione di $F'(x) = 0$. Questo tipo di approccio distinse in due momenti differenti il calcolo della derivata e il successivo utilizzo della derivata calcolata per la ricerca dei massimi e dei minimi della funzione o per la determinazione delle tangenti.
E' importante sottolineare che in Leibniz non era ancora esplicito il concetto di funzione come lo intendiamo ai giorni nostri, ma era presente il concetto di *relazione tra variabili tramite un'equazione* $F(x, y) = 0$, perciò il **problema della derivazione** era inteso come:

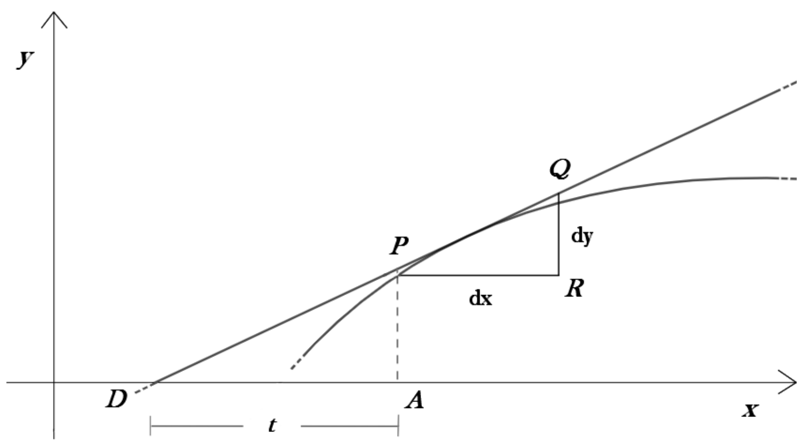
> Data una relazione $F(x, y) = 0$ tra le variabili x e y bisogna trovare la relazione tra la differenza (o differenziale) di x e la differenza (o il differenziale) di y.

I differenziali erano da intendersi mediante la tangente e senza il riferimento esplicito a quantità infinitesime, anche se i segmenti che Leibniz prese arbitrariamente, dx e dy, possono essere considerati infinitesimamente piccoli. **Queste differenze (o differenziali) erano i nuovi parametri principali**, al posto della sottotangente, e quindi l'ordine di priorità che fino a quell'epoca era stato inalterato venne modificato da Leibniz: nel "nuovo metodo" le quantità infinitesime persero il loro ruolo ausiliario di artifici tecnici, utili per la costruzione e destinati a sparire nella formulazione finale, ed assunsero il ruolo di parametri fondamentali per la descrizione delle curve.
La tangente ad una curva $y = f(x)$ era pensata come la retta che unisce due punti sulla curva infinitamente vicini, $P = (x, y)$ e $Q = (x + dx, y + dy)$. Utilizzando le similitudini dei triangoli DAP e PRQ Leibniz arrivò ad ottenere la relazione che lega la sottotangente t della curva con le differenze dx e dy

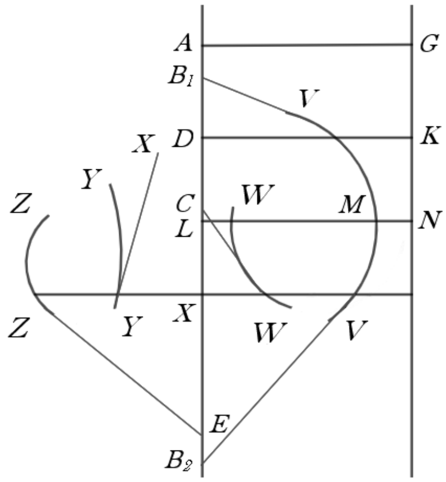
$$t = y \ \frac{dx}{dy}.$$

Leibniz non parlò mai di derivate e non introdusse il concetto di limite.

Figura 2.3:



In realtà la costruzione di Leibniz non fu così semplice come appena enunciato, infatti Leibniz non considerò la tangente ad un'unica curva ma lavorò su più curve, come si vede in figura. Scrisse Leibniz [14, 15]:



Sia dato l'asse AX e più curve come VV, WW, YY, ZZ, e le ordinate di un loro punto, normali all'asse, siano VX, WX, YX, ZX: queste si dicono rispettivamente v, w, y, z (si è scelto di indicare con la stessa lettera due punti distinti delle curve, uno che non appartiene all'asse perpendicolare ad AX e passante per X e uno che appartiene all'asse perpendicolare, inoltre ascisse e ordinate risultano invertite rispetto all'odierno sistema di orientazione degli assi)*; ed il segmento AX, tagliato sull'asse, sia detto x. Le tangenti siano VB, WC, YD, ZE, le quali incontrano l'asse rispettivamente nei punti B* (in figura indicato o come B_1 o come B_2, a seconda del punto V da cui si considera di far partire la tangente)*, C, D, E. Ora si indichi con dx un certo segmento preso arbitrariamente, e si indichi con dv (o dw, o dy, o dz) il segmento che sta a dx come v (o w, o y, o z) sta a XB (o XC, o XD, o XE) cioè dv (o dw, o dy, o dz) è la differenza delle v (o delle w, o delle y, oppure delle z.)*

Da qui proseguì enunciando il **principio di massimo (o di minimo)**

> [...] *e poichè le ordinate v, ora crescono ora decrescono, dv sarà una quantità ora positiva ora negativa, e nel primo caso la tangente VB_1 è tracciata verso A, nel secondo la tangente VB_2 è tracciata dalla direzione opposta. Né un caso né l'altro si presen-*

ta poi nel mezzo in M, nel quale punto le stesse v né crescono né decrescono, ma sono stazionarie e così è $dv = 0$, dove non importa se la quantità è positiva o negativa perchè $+0 = -0$ e in quel punto la v, cioè ***l'ordinata*** *LM,* ***è massima*** *(oppure, se si volgesse la convessità all'asse, sarebbe* ***minima****), e la tangente alla curva in M né si conduce al di sopra di X dalla parte di A, quivi avvicinandosi all'asse, né sotto X in direzione opposta, ma risulta parallela all'asse.*

Leibniz introdusse anche il differenziale secondo, con la notazione ddv, affermando che il suo segno permette di stabilire se la curva sia concava o convessa, per poi specificare che in un **punto di flesso** si verifica $ddv = 0$ con v e dv entrambi non nulli.
Nella sua opera *Nova methodus...* il matematico tedesco enunciò, senza dimostrare, una **serie di regole di differenziabilità**:

1) se a è una quantità costante, $da = 0$ e $d(ax) = adx$;
2) se $y = x$ allora $dy = dx$;
3) $d(z - y + w + x) = dz - dy + dw + dx$;
4) $d(xy) = ydx + xdy$;
5) $d\frac{x}{y} = \frac{xdy - ydx}{y^2}$.

Utilizzando le regole appena elencate si possono trovare i differenziali delle potenze:

$$d(x^2) = d(xx) = xdx + xdx = 2xdx,$$
$$d(x^3) = d(x^2x) = xd(x^2) + x^2dx = 2x^2dx + x^2dx = 3x^2dx,$$
$$\ldots$$
$$d(x^n) = nx^{n-1}dx,$$

e poi anche i differenziali di una radice, osservando che se $z = x^{\frac{1}{k}}$ si ha che $x = z^k$ e quindi $dx = kz^{k-1}dz$, da cui si ha:

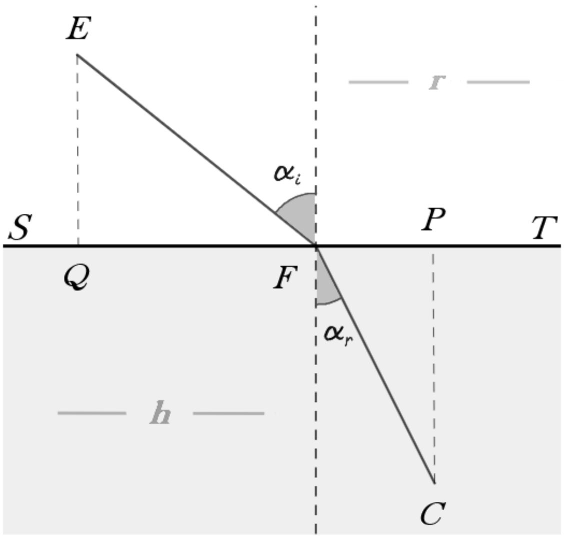
$$dz = \frac{1}{k}x^{\frac{1}{k}-1}dx.$$

Era quindi possibile differenziare qualsiasi combinazione di potenze e radicali e perciò era possibile differenziare quasi la totalità delle funzioni conosciute in quel periodo, anche se il termine funzione all'epoca non era ancora utilizzato. Da quanto appena evidenziato si capisce la grandezza della portata del "nuovo metodo".

Leibniz propose poi alcune possibili applicazioni del nuovo calcolo, tra questi il problema della rifrazione della luce: si trattava della risoluzione di un problema di minimo, relativo al cammino che segue un raggio luminoso nell'attraversare una superficie piana che separa due mezzi di diversa densità (problema trattato anche da Fermat).

Applicazione del metodo al problema della rifrazione della luce:

Dati due punti, C ed E, posti da parti opposte rispetto alla retta ST e che sono immersi in due mezzi di diversa densità, rispettivamente h e r, si vuole determinare il punto F sulla retta ST tale che il percorso da C a E, passando per F, sia il "più facile di tutti i percorsi possibili"[2]. Leibniz suppose il problema risolto, cioè che



[2]Qui si fa riferimento al principio unico di cui parlò Leibniz nelle sue opere, che unifica

esistesse un punto F sulla retta ST tale da minimizzare l'espressione

$$CFh + EFr$$

che indica la difficoltà del percorso del raggio di luce dal punto C al punto E con la condizione che il raggio debba passare per F; tale espressione si denota con la lettera ω. Dal momento che i punti C ed E sono assegnati in partenza, si conoscono anche le proiezioni di tali punti sulla retta ST, che sono rispettivamente P e Q, e quindi i segmenti $QP = p$, $EQ = e$ e $CP = c$. Si assume $FQ = x$ e quindi $FP = p - x$. La relazione precedente, utilizzando il teorema di Pitagora sui triangoli QFE e FPC, diventa

$$h\sqrt{(p-x)^2 + c^2} + r\sqrt{x^2 + e^2}.$$

Svolgendo il quadrato e ponendo $p^2 + x^2 + c^2 - 2px = l$ e $x^2 + e^2 = m$, si ha

$$\omega = h\sqrt{l} + r\sqrt{m},$$

e per il *Principio di minimo* stabilito da Leibniz deve essere $d\omega = 0$ e quindi, utilizzando le regole di differenziazione, si ha

$$d\omega = h\frac{dl}{2\sqrt{l}} + r\frac{dm}{2\sqrt{m}} = 0.$$

Ma

$$dl = 2xdx - 2pdx \qquad \text{cioè} \qquad dl = (2x - 2p)dx,$$
$$dm = 2xdx,$$

l'ottica, la catottrica e la diottrica. Leibniz scrisse infatti [14]: "l'ipotesi primaria di questa scienza comune, dalla quale si determina la direzione di tutti i raggi luminosi in modo geometrico, può formularsi in questo modo: la luce perviene da un punto raggiante al punto che dev'essere illuminato attraverso la via più facile tra tutte quelle possibili" e sostituendo dl e dm nell'equazione precedente si ha

$$d\omega = h\frac{dl = (2x - 2p)dx}{2\sqrt{l}} + r\frac{2xdx}{2\sqrt{m}} = 0,$$

cioè

$$d\omega = h\frac{dl = (x - p)dx}{\sqrt{l}} + r\frac{xdx}{\sqrt{m}} = 0.$$

Se si pone $CF = EF$, ovvero $l = m$, l'equazione precedente diventa

$$h(x - p) + rx = 0,$$

cioè

$$rx = h(p - x),$$

e quindi

$$r : h = (p - x) : x.$$

Ricordando che $FP = p - x$ e che $FQ = x$ la proporzione ottenuta indica che FP e FQ sono proporzionali, rispettivamente, ai seni degli angoli di rifrazione (α_r) e di incidenza (α_i), da cui si ha la legge di rifrazione

$$r : h = FP : FQ = sin\alpha_r : sin\alpha_i,$$

2.4 Le flussioni di Newton

In contrapposizione a Leibniz, non tanto nel contenuto quanto nella forma, ci fu l'inglese Isaac Newton (1643-1727). Newton elaborò una teoria analoga a quella di Leibniz svariati anni prima di lui, ma tardò a pubblicare i suoi lavori: la prima opera di Newton sul calcolo infintesimale, il *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, fu composta nel 1669 e pubblicata nel 1711, mentre la seconda, il *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*, fu l'opera in cui comparve la notazione delle flussioni, redatta nel 1671 e pubblicata postuma nel 1742, infine il *De quadratura curvarum* fu pubblicato nel

1704. Lo sguardo di Newton si rivolse maggiormente verso le questioni del mondo della fisica, in particolare della dinamica, per cui la sua argomentazione fu parecchio influenzata dal concetto di grandezza e di componenti del moto. Differentemente da Leibniz, il quale considerò le grandezze come parti infinitesime, Newton aveva inteso le variabili in funzione del tempo [15]:

> *x e y sono quantità **fluenti**, che ad ogni istante di tempo hanno una determinata **flussione**, $\dot{x}$ e $\dot{y}$ rispettivamente; in particolare, $\dot{x}$ e $\dot{y}$ sono due nuove grandezze chiamate velocità istantanee. Inoltre si possono avere anche le flussioni di $\dot{x}$ e $\dot{y}$* (derivate seconde)*, indicate con $\ddot{x}$ e $\ddot{y}$.*

Perciò, fissata la misura di un tempo t, ad ogni istante corrisponde una velocità di variazione delle fluenti $x(t)$, $y(t)$ ..., e queste velocità, chiamate flussioni, sono indicate da Newton con $\dot{x}$, $\dot{y}$ ..., e corrispondono nella scrittura moderna alle derivate rispetto al tempo $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ ... .
Alla base di questo nuovo approccio c'era il fluire del tempo e la descrizione cinematica delle curve, Newton può essere quindi considerato come prosecutore del metodo cinematico di Roberval e di Torriccelli (anche se probabilmente non aveva mai letto i loro lavori); il metodo di Newton era però molto più generale di quello dei suoi predecessori, questo perchè il matematico inglese non si era fermato alle curve la cui generazione cinematica è data, ma aveva applicato il suo metodo a tutte le curve algebriche.
In ogni caso Newton considerava le quantità matematiche come generate dal continuo fluire del tempo, e perciò erano quantità che si potevano determinare in ogni istante.
Nel *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* Newton applicò queste idee alla risoluzione di due tipologie di problemi:

1) data in modo continuo la lunghezza dello spazio trovare la velocità del moto in ogni tempo proposto;
2) data in modo continuo la velocità del moto trovare la lunghezza dello spazio descritto ad ogni tempo proposto.

I problemi di determinazione della tangente ad una curva, quelli di massimo e di minimo, il calcolo delle aree delle figure e della lunghezza di una curva erano confluiti in queste due tipologie. E' evidente come si stesse delineando l'idea del concetto di derivata e di primitiva di una funzione e del legame tra questi due aspetti. Newton applicò il metodo delle flussioni a tutte le curve algebriche, quindi anche il suo metodo, come quello di Leibniz, era più generale rispetto alle strategie adottate in precedenza.

Il metodo per determinare le flussioni [15]**:**
Si consideri che le variabili x e y siano legate da un'equazione algebrica

$$f(x, y) = 0.$$

Al posto di x e y si pongano i binomi $x+o\dot{x}$ e $y+o\dot{y}$, dove $\dot{x}$ e $\dot{y}$ sono le flussioni incognite, delle quali verrà determinato solo il loro rapporto, finchè non si preciserà il parametro temporale t, e o è un infinitesimo (che nel linguaggio moderno chiamiamo dt). Si proceda quindi a sviluppare

$$f(x + o\dot{x}, y + o\dot{y}) = 0.$$

Ricordando che il punto (x, y) appartiene alla curva $f(x, y)$, si ha che la parte dello sviluppo indipendente da o verrà annullata. Si divida quello che rimane per o e si annulli poi o. Utilizzando la notazione moderna si avrà quindi

$$\frac{df}{dx}\dot{x} + \frac{df}{dy}\dot{y} = 0,$$

e si ricaverà il rapporto

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx}.$$

Nel caso più generale, cioè quello in cui le variabili siano un numero $n > 2$ legate da $n - 1$ equazioni (Newton ricondusse a questo caso anche il caso di una sola equazione, con due variabili, contenente radicali), si ragioni allo stesso modo: si supponga, ad esempio, che la y sia data da un'espressione razionale nella x e in un radicale di un polinomio in x; si uguagli il radicale ad una nuova variabile z, e si ottengano due equazioni razionali in x,y e z: applicando il procedimento indicato sopra si ottengono due equazioni lineari omogenee in $\dot{x}$, $\dot{y}$ e $\dot{z}$ (per maggiore chiarezza si faccia riferimento all'esempio a pag. 47).

Il punto cruciale è il fatto che Newton si sia concentrato sul **rapporto fra le due flussioni** $\dot{y}$ e $\dot{x}$ e non sulla conoscenza delle singole velocità, questo gli permise di determinare, per esempio, la tangente ad una curva anche in casi più complicati, a differenza degli altri prima di lui.
Nella sua trattazione Newton procedette per esempi specifici, enunciando algoritmi di risoluzione e utilizzando, implicitamente, le seguenti **regole per il calcolo delle flussioni**:

1) $(x \dot{+} y) = \dot{x} + \dot{y}$;
2) $(x\dot{y}) = \dot{x}y + x\dot{y}$;
3) $(\dot{x^n}) = nx^{n-1}\dot{x}$.

Prima di enunciare alcuni esempi, verrà mostrato il ragionamento di Newton per ricavare la flussione del prodotto xy, per rendere più chiara l'idea che c'era dietro: Newton aveva osservato che, in un intervallo di tempo infinitesimo o, le variabili x e y diventavano, rispettivamente, $x + o\dot{x}$ e $y + o\dot{y}$; la variazione di xy nel tempo diventava quindi

$$(x + o\dot{x})(y + o\dot{y}) - xy,$$

cioè

$$o(\dot{x}y + \dot{y}x) + 2o\dot{x}\dot{y}.$$

Dividendo per o ed eliminando il termine infinitesimo $o\dot{x}\dot{y}$, si otteneva

$$\dot{(xy)} = \dot{x}y + x\dot{y}$$

(lo stesso risultato ottenuto da Leibniz per la differenziazione del prodotto).

Problema 1: Data una relazione tra due quantità fluenti, determinare la relazione fra le flussioni.

Esempio. Data la relazione tra le due quantità fluenti x e y

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0, \tag{2.2}$$

si trovi l'equazione che lega le due flussioni $\dot{x}$ e $\dot{y}$, considerando a come una quantità determinata e costante.

Il ragionamento di Newton per risolvere questo caso parte dalla considerazione che l'equazione è un'equazione algebrica che non contiene radicali, per cui x e y possono essere sostituite con $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$, rispettivamente. Perciò, sostituendo, si ottiene che l'equazione (2.2) diventa

$$(x + o\dot{x})^3 - a(x + o\dot{x})^2 + a(x + o\dot{x})(y + o\dot{y}) - (y + o\dot{y})^3 = 0.$$

Svolgendo i conti si ottiene

$$x^3 + o^3\dot{x}^3 + 3x^2o\dot{x} + 3xo^2\dot{x}^2 - ax^2 - ao^2\dot{x}^2 - 2axo\dot{x}+$$
$$+ axy + axo\dot{y} + ao\dot{x}y + ao^2\dot{x}\dot{y} - y^3 - o\dot{y}^3 - 3y^2o\dot{y} - 3yo^2\dot{y}^2 = 0,$$

e ricordando l'equazione (2.2) si ha

$$\begin{aligned}
&o^3\dot{x}^3 + 3x^2o\dot{x} + 3xo^2\dot{x}^2 - ao^2\dot{x}^2 - 2axo\dot{x} + \\
&+ axo\dot{y} + ao\dot{x}y + ao^2\dot{x}\dot{y} - o\dot{y}^3 - 3y^2o\dot{y} - 3yo^2\dot{y}^2 = 0,
\end{aligned}$$

e dividendo per o

$$\begin{aligned}
&o^2\dot{x}^3 + 3x^2\dot{x} + 3xo\dot{x}^2 - ao\dot{x}^2 - 2ax\dot{x} + \\
&+ ax\dot{y} + a\dot{x}y + ao\dot{x}\dot{y} - \dot{y}^3 - 3y^2\dot{y} - 3yo\dot{y}^2 = 0.
\end{aligned}$$

Come ultimo passaggio si cancellano tutti i termini che contengono o e si ottiene l'equazione

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ax\dot{y} + a\dot{x}y - \dot{y}^3 - 3y^2\dot{y} = 0. \tag{2.3}$$

Dall'equazione per le flussioni appena trovata, si può ottenere il rapporto tra $\dot{y}$ e $\dot{x}$, cioè

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}.$$

Esempio. Data la relazione tra le due quantità fluenti x e y

$$x^3 - xy^2 + a^2\sqrt{ax - y^2} - b^3 = 0, \tag{2.4}$$

si trovi l'equazione che lega le due flussioni $\dot{x}$ e $\dot{y}$, considerando a e b come quantità costanti.

Si procede allo stesso modo dell'esempio precedente, notando che dall'equazione (2.2) si è passati a (2.3), e sfruttando le regole per il calcolo delle flussioni si ha che l'equazione di partenza (2.4) diventa

$$3x^2\dot{x} - \dot{x}y^2 - 2xy\dot{y} + a^2\dot{\overline{\sqrt{ax - y^2}}} = 0,$$

dove $\dot{a^2} = 0$ e $-\dot{b^3} = 0$ perchè a e b sono quantità costanti che non variano nel tempo, quindi la loro flussione, e quella delle loro potenze, è nulla.
Per trovare la flussione $\dot{\sqrt{ax - y^2}}$ si procede introducendo una nuova variabile z e ponendo

$$\sqrt{ax - y^2} = z,$$

si ottiene quindi

$$ax - y^2 = z^2,$$

da cui si ha, passando alle flussioni, che

$$a\dot{x} - 2y\dot{y} = 2z\dot{z},$$

da cui

$$\frac{a\dot{x} - 2y\dot{y}}{2z} = \dot{z}.$$

Perciò, dal momento che $z = \sqrt{ax - y^2}$ e $\dot{z} = \dot{\sqrt{ax - y^2}}$, si ha che

$$\dot{\sqrt{ax - y^2}} = \frac{a\dot{x} - 2y\dot{y}}{2\sqrt{ax - y^2}},$$

e quindi sostituendo quanto trovato nell'equazione (2.4) si ottiene il risultato

$$3x^2\dot{x} - \dot{x}y^2 - 2xy\dot{y} + \frac{a^3\dot{x} - 2a^2y\dot{y}}{2\sqrt{ax - y^2}} = 0.$$

Problema 2: Determinare la tangente ad una curva con il metodo delle flussioni (Barrow).

Tale metodo è stato in realtà spiegato da **Isaac Barrow** (1630-1677) sotto suggerimento di Newton. Barrow stesso disse [15]:

> *Aggiungo, in forma di appendice, un metodo per determinare tangenti col calcolo, frequentemente usato da me; sebbene io non sappia se, dopo tanti e pregevoli metodi come quelli già visti* (ad

esempio quello di Fermat), *vi sia veramente un vantaggio a far ciò. Tuttavia lo farò per seguire il consiglio di un amico* (Newton), *e tanto più volentieri in quanto il nuovo metodo sembra più fecondo e generale di quelli che ho prima discusso.*

Il **metodo** venne presentato da Barrow così [9]:
Nell'equazione della curva $f(x, y) = 0$, al posto di x e y si pongono $x + h$ e $y + k$ (dove h e k sono i lati infinitesimi di un triangolo "differenziale", come quello di Leibniz, e venivano chiamati da Newton, rispettivamente, $o\dot{x}$ e $o\dot{y}$). Nello sviluppo di $f(x + h, y + k) = 0$ il gruppo di termini indipendenti da h e k si annulla, perchè il punto (x, y) appartiene alla curva. Si cancellino poi tutti i termini che sono infinitesimi di ordine superiore al primo rispetto a h e k: resta quindi un'equazione lineare omogenea in h, k, la quale dà il rapporto

$$h : k = S_t : y,$$

dove S_t è la sottotangente (analogo risultato di pag. 37).

Venne formulata da Barrow un'altra costruzione per trovare il coefficiente direttivo della tangente ad una curva in un punto, tale costruzione sfruttava le similitudini dei triangoli e ragionava anche sulle aree sottese.[3] Nello specifico Barrow presentò il carattere inverso della derivazione (costruzione della tangente) con l'integrazione (quadratura), ma non sostituì all'ente geometrico *tangente* l'ente analitico corrispondente *derivata*.

[3]per una più profonda trattazione si rimanda a [15].

2.5 Il distacco tra gli anglosassoni seguaci di Newton e gli europei prosecutori di Leibniz fino alla metà del XVIII secolo circa

Il metodo di Leibniz e il metodo di Newton non erano così diversi nella sostanza e questo portò a una grossissima disputa, che interessò soprattutto i seguaci dell'uno e dell'altro, piuttosto che i diretti interessati, almeno nelle prime fasi. Tra Newton e Leibniz c'era infatti una notevole stima reciproca e Newton stesso riconobbe, o comunque non mise in dubbio, l'indipendenza della scoperta Leibniziana. Newton però non aveva pubblicato i suoi lavori, cosa che Leibniz invece aveva fatto, e questo portò i seguaci di Newton ad accusare Leibniz di plagio e a sostenere che il *nuovo calcolo* fosse invenzione di Newton stesso e che Leibniz avesse semplicemente modificato la notazione. In realtà noi sappiamo che è stata la costruzione del nuovo calcolo di Leibniz ad essere poi diventata la più diffusa e la più feconda, nonostante al momento della pubblicazione del lavoro il metodo di Leibniz fosse risultato meno generale di quello di Newton. Questo ribaltamento delle parti avvenne, tra l'altro, proprio nel periodo della disputa: con il suo calcolo differenziale Leibniz aveva risolto completamente il problema delle tangenti, e aveva posto su basi algebriche il problema delle quadrature, che era la riduzione ad un caso particolare del problema generale dell'integrazione delle equazioni differenziali; a quell'epoca Newton aveva sviluppato il suo metodo delle flussioni ed era riuscito ad intrecciarlo con lo sviluppo in serie per risolvere varie tipologie di problemi. Il punto centrale fu proprio questo: dove Leibniz pose dei problemi, Newton diede soluzioni, ma facendo questo Newton chiuse ad altre possibilità. Quello che si intende è che il metodo delle flussioni e delle serie (per Newton erano considerati come un unico metodo per trovare soluzioni ai problemi trattati, infatti si poteva ricorrere alle serie quando era impossibile trovare una soluzione in altro modo) quando veniva usato, per esempio, sull'integrazione di equazioni differenziali, forniva una soluzione che era formata da successivi termini di una serie; il problema era che le serie potevano essere usate per operazioni che riguardavano il comportamento della soluzione nell'intorno di un punto, quindi localmente, ma non erano di nessun aiuto quando si volevano studiare le proprietà qualitative e globali delle soluzioni. Questo portò ad un ribaltamento della situazione, e il solco che si aprì tra le due impostazioni fu evidenziato nel 1713 da un seguace di Leibniz di nome Johann Bernoulli [9]:

> *Ora un certo Cheyne se ne va in giro a dire che negli ultimi 20 o 30 anni non abbiamo* (Bernoulli e gli altri seguaci di Leibniz) *pubblicato nulla, che non sia un'ennesima ripetizione o al più un corollario di poco peso di ciò che Newton aveva trovato prima; quasi che per noi non fosse rimasto nulla da fare, e che non siano di alcun pregio le cose che abbiamo pubblicato, e delle quali in Newton non si trovano nemmeno le tracce, come le Catenarie, le Velarie, le Isocrone paracentriche, le Brachistocrone, le nuove proprietà della Cicloide e i suoi innumerevoli segmenti quadrabili, il Calcolo degli esponenziali e il metodo di differenziarli, la misura delle Coevolute, il Moto trattorio e reptorio, la riduzione delle curve alle circolari, e innumerevoli altre che gli inglesi* (seguaci di Newton) *in parte tentarono, ma con tutto il loro calcolo delle flussioni hanno lasciato irrisolte, come si vede dal solo problema della Catenaria e della Trasformazione delle curve, al quale hanno sudato per lungo tempo senza produrre altro che turpi paralogismi.*

Per fare un passo avanti i successori di Newton avrebbero dovuto separare il metodo delle flussioni dal metodo dello sviluppo in serie, ma nessuno si sentì di farlo per tutto il XVIII secolo, perciò il loro contributo in quell'epoca fu prettamente centralizzato sullo studio delle serie.

2.5.1 In Gran Bretagna

Nel Regno Unito in quell'epoca era riconosciuto solo il metodo di Newton, e quindi i seguaci di quel metodo si occuparono di sistemare la teoria delle flussioni o di studiare propriamente le serie. Il rigore era alla base di tutto. In quel periodo ci fu **Brook Taylor** (1685-1731) che nella sua opera del 1715, *Methodus incrementorum directa et inversa*, definì lo sviluppo in serie di Taylor ad una variabile centrata nel punto x_0, che con le notazioni odierne è indicata con

$$f(x_0 + x) = f(x_0) + f'(x_0)x + \frac{f''(x_0)x^2}{2!} + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)x^n}{n!} + ...$$

e questa rappresentava la funzione f come serie di termini calcolati a partire da quelle che noi oggi chiamiamo derivate della funzione stessa nel punto x_0. Inoltre Taylor si occupò anche di dare formule per il cambiamento di variabile e studiò le relazioni tra la derivata di una funzione e la derivata della funzione inversa. Altro rappresentante dello studio delle serie dell'epoca fu **Colin Maclaurin** (1689-1746) il quale diede il suo sviluppo in serie ponendo $x_0 = 0$ nello sviluppo di Taylor e ottenendo quindi l'approssimazione di ordine n della funzione f intorno a 0 e altri risultati.

Non tutto il mondo inglese era perfettamente in linea con l'impostazione Newtoniana, in particolare ci fu un "non matematico e fisico", il filosofo e il vescovo anglicano-irlandese **George Berkeley** (1685 -1753), il quale analizzò profondamente l'impostazione e la struttura del pensiero newtoniano (e anche di quello leibniziano). Berkeley si interessò già da giovane di alcuni trattati matematici e attaccò la dottrina degli infinitesimi in un suo scritto del 1709, *Of Infinities.* Nel 1734 pubblicò il suo più famoso opuscolo dal titolo *The Analyst: A Discourse addressed to an Infidel Mathematician*, che rappresentò un attacco al nuovo calcolo e ai suoi principi, nello specifico criticò la nozione di flussione o variazione infinitesimale (concetti utilizzati da Newton e Leibniz, rispettivamente); Berkeley riteneva che la nozione di flussione di Newton e quella di differenza infinitesima di Leibniz dovessero essere entrambe rifiutate, perchè una teoria fondata su definizioni inconcepibili, cioè una teoria su cui era impossibile costruire immagini mentali, era da considerare inaccettabile [9]:

> "Che cosa sono queste flussioni?"
>
> *Sono le velocità istantanee, definite come i rapporti di incrementi evanescenti di tempi e distanze ...*
>
> "Incrementi evanescenti in che senso? E le flussioni seconde, ovvero flussioni di flussioni, cosa sono?"
>
> *Essi non sono quantità finite, non sono infinitesimi, non sono niente ...*

Queste erano alcune delle riflessioni fatte da Berkeley. Il filosofo non si fermò alla pura analisi epistemologica dei concetti di Newton e Leibniz, ma analizzò anche concettualmente i nuovi metodi: per calcolare la flussione di $f(x)$, per esempio, si doveva dividere $f(x + o\dot{x}) - f(x)$ per o e poi eliminare i monomi in cui era presente o (cioè pensare $o = 0$); ma dividendo per o si faceva l'implicita ipotesi che o non fosse nullo, perciò nel passaggio precedente, quello dove si eliminavano i termini con o, non era lecito pensare che o fosse nullo.
Disse Berkeley [9]:

Fin qui ho supposto che x fluisca, che x abbia un incremento "o" reale, che "o" sia qualche cosa. E sono andato avanti sempre basandomi su tale supposizione, senza la quale non avrei potuto fare alcun passo. E' precisamente partendo da questa supposizione che sono pervenuto a calcolare l'incremento di x^n*, che ho potuto confrontarlo con l'incremento di x, e che ho potuto calcolare il rapporto dei due incrementi. E ora mi permetto di fare una supposizione contraria alla prima, ossia suppongo che non vi sia alcun incremento di x, che "o" sia niente; la quale seconda supposizione distrugge la prima ed è incompatibile con essa, e di conseguenza con tutto quello che da essa si deduce. E tuttavia mi permetto di conservare il termine* nx^{n-1}*, che è un'espressione ottenuta in virtù della prima supposizione e che non poteva essere ottenuta senza di essa. Questo sembra un modo di argomentare piuttosto inconsistente.*

Le tesi di Berkeley condizionarono notevolmente le successive analisi da parte dei matematici inglesi, alcuni di loro presero le difese della teoria di Newton argomentando però in maniera povera e superficiale, altri si impegnarono assiduamente nell'eliminazione delle flussioni dall'analisi (cercarono di eliminare quindi la parte più criticata del metodo, mantenendone però la struttura portante); in questo secondo gruppo ci fu Maclaurin, il quale nel 1742 tentò un'esposizione sistematica in termini geometrici della teoria delle flussioni, evitando infiniti e inifinitesimi, e basandosi sulla velocità istantanea. La definizione rigorosa del termine *velocità istantanea* fu comunque soggetta alle medesime critiche delle quantità infinitesime.

2.5.2 In Europa

La prima esposizione sistematica del calcolo differenziale fu pubblicata anonima da **Guillaume Francois de l'Hôpital** (1661-1704) nel 1696 a Parigi: *Analyse des infiniments petits.* Tale opera fu frutto della collaborazione tra de l'Hôpital e Johann Bernoulli, in particolare fu proprio quest'ultimo a dare lezioni al primo sul nuovo calcolo di Leibniz. L'opera fu poi ampliata cinquant'anni più tardi dallo stesso Johann Bernoulli con una parte relativa al calcolo integrale.
Nell'*Analyse des infiniments petits* era presente una prima parte introduttiva, dove venivano fornite al lettore una serie di definizioni, tra cui quella di differenziale [9]:

> *La parte infinitesima di cui è continuamente aumentata o diminuita una quantità variabile è chiamata* ***differenza*** *di quella quantità* [...] *E' evidente che la differenza di una quantità costante è nulla o zero, ovvero le quantità costanti non hanno differenza.*

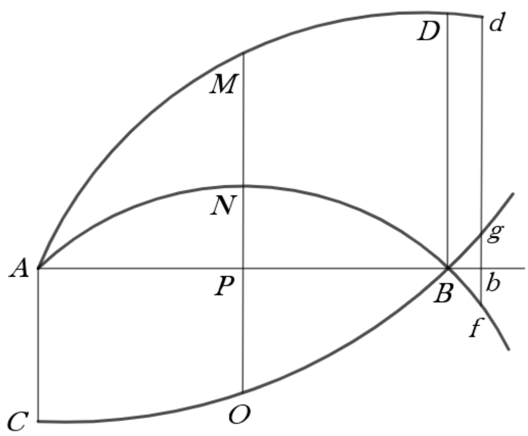
e due supposizioni (cioè postulati) [9]:

1) *Si richiede che due quantità la cui differenza è infinitesima possano essere usate indifferentemente l'una per l'altra.*

2) *Si richiede che una linea* ***curva*** *possa essere considerata come la collezione di una* ***infinità di linee rette****, ciascuna infinitesima, ovvero come poligono di un numero infinito di lati, ciascuno infinitesimo, che tramite gli angoli tra essi formati determinano la curvatura della linea.*

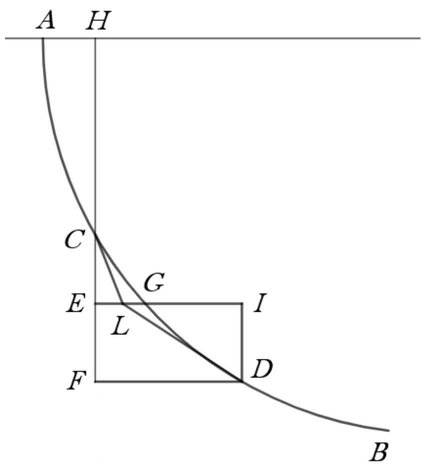
Dopo questa parte introduttiva, venivano poi esposte le regole di differenziazione di Leibniz e spiegate alcune applicazioni del calcolo, tra cui la ricerca delle tangenti, la determinazione di massimi, minimi e flessi di una curva e lo studio della curvatura. Nella sezione nona del volume era presente la cosiddetta **regola di de l'Hôpital** (chiamata anche regola di Bernoulli-de l'Hôpital), espressa nella forma $\frac{0}{0}$ [9]:

Sia AMD una linea curva tale che il valore dell'ordinata y sia espresso da una frazione il cui numeratore e denominatore diventano ciascuno zero quando $x = a$ (dove $AB = a$), ossia quando il punto P cade sul punto B. Si ponga, per semplicità, $AP = x$, $PM = y$. Si domanda quale debba essere allora il valore dell'ordinata BD.



Si considerino due curve, ANB e COB, tali che l'ordinata PN esprima il numeratore, e l'ordinata PO esprima il denominatore, in modo che $y = PM = \frac{PN}{PO}$. Si osserva che le curve ANB e COB si incontrano in B quando il punto P cade nel punto B, dato che in quel punto le ordinate PN e PO sono entrambe nulle. Si prenda allora un'ordinata bd infinitamente vicina a BD, che incontri le curve ANB e COB nei punti f e g, rispettivamente. Si ha chiaramente che, quando l'ascissa $AP = x$ diventa $AB = a$, le ordinate PN e PO si annullano, e che quando AP diventa Ab esse diventano bf e bg, rispettivamente; perciò le ordinate bf e bg sono, rispettivamente, i differenziali delle ordinate del curve ANB e COB. Se allora si prende il differenziale del numeratore e lo si divide per il differenziale del denominatore, si ottiene il valore cercato dell'ordinata BD ponendo $x = a$.

Oltre all'opera *Analyse des infiniments petits*, **Johann Bernoulli** (1667-1748) pubblicò nel 1696 sul giornale *Acta eruditorum* il problema (di minimo) della curva di discesa più rapida detta brachistocrona [9]:
Dati due punti A e B si trovi, tra tutti gli archi di curve che congiungono i due punti, l'arco che rende minimo il tempo che una particella dotata di massa impiega ad andare da A in B quando la particella è soggetta all'azione della gravità.
Con tecniche diverse la seguente curva venne trovata nel versante inglese solo da Newton stesso, mentre dall'altra parte la riuscirono a trovare Leibniz, de l'Hôpital, Johann e Jacob Bernoulli. La curva cercata era una cicloide. Per completezza verrà riportata un'idea generale di come è stato affrontato il problema da **Jakob Bernoulli** (1654-1705), fratello di Johann [9]:



Si vuole determinare la curva brachistocrona, cioè la curva di discesa più rapida; tale problema è un problema di minimo in cui si può assumere che, se una curva minimizza il tempo globalmente, allora deve minimizzarlo anche localmente, cioè anche una porzione piccolissima della curva deve avere la stessa proprietà di minimo. Si considerino incrementi infinitesimi di ascisse, come EC *in figura, e incrementi infinitesimi di ordinate, come* GE*, e anche incrementi ottenuti da variazioni a loro volta infinitesime rispetto a questi, come* GL *rispetto a* GE*. Tramite considerazioni geometriche e relazioni tra velocità e spazio percorsi si ottiene che le ascisse e le ordinate devono soddisfare la relazione* $\frac{EG}{\sqrt{HC}} : \frac{GI}{\sqrt{HE}} = CG : GD$*, che caratterizza la cicloide.*

I problemi di minimo e di massimo furono di vitale importanza per mettere in luce la grande portata dell'impostazione di Leibniz, infatti anche se tale struttura non era particolarmente rigorosa come quella inglese, poteva vantare di riuscire a risolvere problemi altrimenti inaffrontabili.

Bisogna sottolineare come in quegli anni l'analisi stesse prendendo sempre più forma e con essa anche i suoi concetti portanti. Se l'idea di funzione non era ancora presente nell'immaginario di Newton e Leibniz[4], infatti gli oggetti dei loro studi erano le curve descritte come il luogo dei punti che soddisfano un'equazione del tipo $F(x, y) = 0$, è però grazie ai loro contributi che Johann Bernoulli arrivò a definire il concetto di **funzione** [9]:

> *Chiamo funzione di una grandezza variabile una quantità composta in una maniera qualunque da questa grandezza variabile e da costanti.*

Il concetto di funzione fu poi ripreso dal matematico e astronomo svizzero **Leonhard Euler** (1707-1783), il quale considerò la definizione data da Johann Bernoulli e la modificò, dandone una versione più elegante per gli occhi dei matematici moderni [9]:

> *Funzione è un'espressione analitica costruita a partire dalla variabile x mediante una serie di operazioni.*

Con Euler il concetto di funzione sostituì l'idea più generale di relazione e quella di serie, anche se conservò non poche caratteristiche di quest'ultima;

[4] In realtà il termine "funzione" comparve per la prima volta nel 1673 in un'opera di Leibniz, *Methodus tangentium inversa seu de functionibus*, e nelle numerose corrispondenze con Johann Bernoulli, ma non era ancora stato chiarito cosa si intendesse con tale termine e fu Bernoulli a darne una precisa definizione [9].

il punto cruciale di questa nuova visione era che ogni funzione di una variabile potesse essere rappresentata come una serie di potenze positive di quella variabile, cioè una scrittura del tipo $x + bx + cx^2 + ...$ nella variabile x; questa scrittura mutò poi nella forma più generale $az^\alpha + bz^\beta + cz^\gamma + ...$, con z variabile e α, β, γ, ..., numeri qualsiasi, anche complessi. Per il matematico svizzero le prime lettere dell'alfabeto si usavano per indicare le quantità determinate e costanti, mentre le ultime lettere dell'alfabeto servivano per indicare le quantità ignote, le variabili.
Euler studiò anche le varie tipologie di funzioni e le divise primariamente in due gruppi, il gruppo delle funzioni **algebriche** e quello delle **trascendenti**: le prime erano formate a partire da variabili e costanti tramite le quattro operazioni elementari, l'elevamento a potenza, l'estrazione di radice o tramite la soluzione di un'equazione polinomiale, mentre le seconde erano definite tramite esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche e, in generale, tramite integrali; le funzioni algebriche erano divise a loro volta in irrazionali e razionali, e quest'ultime in intere e fratte. Per Euler una **funzione** si poteva chiamare **continua** se era descrivibile nel suo intervallo di definizione per mezzo di un'espressione analitica singola; perciò erano considerate funzioni discontinue quelle definite in maniera diversa nei diversi intervalli di definizione, quindi per esempio la funzione:

$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$$

era una funzione discontinua secondo questa impostazione.
I contributi di Euler non si limitarono solo alla matematica, infatti tramite i suoi studi e le sue pubblicazioni il matematico svizzero diede sistematicità anche alla cinematica e alla dinamica: nei due volumi pubblicati nel 1736, i *Mechanica, sive motus scientia analytice exposita*, Euler definì il **moto co-**

me una funzione che lega lo spazio e il tempo, $s = s(t)$, la velocità come il differenziale dello spazio rispetto al tempo quando l'incremento è infinitesimo, $\frac{ds}{dt} = v$, e l'accelerazione come il differenziale della velocità rispetto al tempo quando l'incremento è infinitesimo, $\frac{dv}{dt} = a$; la sua opera aveva come fine quello di organizzare in maniera strutturata e logica la conoscenza della meccanica, sfruttando l'impostazione del nuovo calcolo leibniziano [17]:

> *In tempi recenti, dopo l'invenzione dell'analisi infinitesimale, entrambe le scienze (statica e dinamica) hanno fatto così grandi progressi che le scoperte di una volta* [...] *quasi scompaiono di fronte ad essi. Tuttavia, queste molteplici scoperte, per mezzo delle quali queste discipline sono state finora accresciute e innalzate, sono disseminate in così tante opere che risulta difficilissimo raccoglierle e leggerle per lo studioso di queste cose. Inoltre, cosa che genera grandissimo fastidio, alcune cose vengono proposte senza alcun ricorso all'analisi e alle dimostrazioni, altre sono celate dietro dimostrazioni fin troppo intricate e preparate secondo la maniera degli antichi, altre ancora, per la verità, vengono derivate da principi non appropriati e poco genuini in modo che non possano essere esaminate e interpretate che con grande fatica e dispendio di tempo.* [...] *Ma in tutte le opere composte senza far uso dell'analisi, e specialmente in quelle di meccanica, capita che il lettore, nonostante sia convinto della verita delle cose che vengono esposte, purtuttavia non può comprenderne l'essenza in maniera sufficientemente chiara e distinta* [...] *a meno che egli non si serva dell'analisi e non dimostri le stesse proposizioni con metodo analitico.*

Fra gli aspetti da sottolineare delle idee di Euler, che lo hanno differenziato da Leibniz, vi sono sicuramente i seguenti:

- il dato di partenza erano le funzioni e non più le curve, questo permise che il calcolo fosse svincolato dalla geometria, dal moto e in particolare anche dal ricorso alle figure;
- i differenziali non erano più oggetti inerenti alle curve, ma valide e logiche costruzioni matematiche che permettono di vedere il calcolo differenziale come un caso speciale del calcolo delle differenze, con una sorta di aritmetizzazione del calcolo.

E' nell'opera del 1755, *Institutiones calculi differentialis*, che Euler discusse il calcolo differenziale come un lavoro di pura analisi, approfondendo lo studio degli incrementi evanescenti utlizzati da Leibniz; già nella nella prefazione alle *Institutiones* era chiara l'idea della struttura sempre più analitica di Euler [17]:

> *Se x designa la quantita variabile, tutte le altre quantità che in qualunque modo dipendono da x o sono determinate da x si chiamano funzioni.* [...] *Una domanda sorge naturalmente: se la quantità x cresce o decresce di quanto cambierà la funzione, sia che cresca o decresca? Per i casi più semplici la risposta è semplice. Se la quantità x è aumentata della quantità ω, il suo quadrato x^2 aumenterà di $2x\omega+\omega^2$. Quindi la crescita di x sta alla crescita di x^2 come ω sta a $2x\omega+\omega^2$, cioè come 1 sta a $2x+\omega$. In modo simile, consideriamo il rapporto di crescita di x con la crescita o decrescita di una qualunque funzione di x, infatti l'indagine su questo tipo di rapporti di incrementi è non solo importante ma è il fondamento di tutta l'analisi. Ritorniamo all'esempio x^2, con*

incremento $2x\omega + \omega^2$ *quando* x *cresce di* ω *per cui il rapporto è* $2x + \omega$ *a* 1. *Da questo dovrebbe esser chiaro che più piccolo prendiamo l'incremento* ω *di* x *più il rapporto si avvicina a* $2x$ *su* 1, *senza, però, mai arrivare ad esso se non quando* ω *si annulla completamente. Da questo capiamo che, se l'incremento della variabile* x *va a zero, allora l'incremento di* x^2 *si annulla, ma il rapporto resta* $2x$ *a* 1. *Quello che abbiamo detto per la funzione* x^2 *vale per qualunque funzione di* x; [...] *In questo modo siamo portati alla* ***definizione di calcolo differenziale****: è un* ***metodo per determinare il rapporto degli incrementi evanescenti che una funzione assume quando alla variabile, di cui lei è funzione, viene dato un incremento evanescente.*** [...] *Quindi il calcolo differenziale tratta non tanto gli incrementi evanescenti, che sono semplicemente zero, ma rapporti e proporzioni mutui. Si chiamano dunque* ***differenziali****, i quali, essendo privi di quantità, sono anche detti infinitesimi e, per la loro natura, sono da interpretarsi come del tutto nulli o uguali a zero* [...] (Con riferimento alle notazioni precedenti) *se scriviamo* dx (al posto di) ω, *il differenziale di* x^2 *diventa* $2xdx$. *In modo simile si vede che il differenziale di* x^3 *è uguale a* $3x^2dx$ *e in generale per* x^n *è* $nx^{n-1}dx$. *Per qualunque altra funzione di* x *possa esser prodotta il calcolo differenziale dà regole per trovare il differenziale.*

2.6 Fondamenti del calcolo infinitesimale: nascita del concetto odierno di "derivata"

Dopo la pubblicazione delle critiche alle flussioni e al metodo leibniziano da parte di Berkeley, numerosi matematici si prodigarono per superare le incongruenze nominate dal vescovo anglicano. Tra coloro che provarono a sistemare rigorosamente questa nuova analisi ci fu il matematico italiano Giuseppe Luigi Lagrangia, naturalizzato francese e perciò conosciuto maggiormente con il nome **Joseph Louis Lagrange** (1736-1813). Lagrange riprese la concezione newtoniana, criticando le impostazioni del calcolo basate sugli infinitesimi, e provò ad evitare le incongruenze usando gli sviluppi in serie di funzioni. E' bene sottolineare che il concetto di funzione di Lagrange era quello di Euler.
Lagrange spiegò [9] che una funzione qualsiasi, nel suo insieme di definizione, era sviluppabile in serie di Taylor (ad eccezione dei punti isolati), e introdusse il termine **derivata**, indicandolo come il coefficiente di $x - x_0$ dello sviluppo di Taylor della funzione f centrato in x_0, cioè nello sviluppo:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ...$$

dove a_i, $i = 0, 1, 2, ...$ erano i coefficienti e dipendevano da x_0; in particolare a_0 era il valore che la funzione f assumeva in x_0 e a_1 era la **derivata** (prima) della funzione f in x_0 ed era indicata da Lagrange con la notazione $f'(x_0)$ e così anche gli altri a_i. Nello specifico, nella sua opera del 1797 *Théorie des fonctions analytiques*, Lagrange iniziò il suo ragionamento considerando la funzione $f(x)$ ad una variabile e incrementò la variabile x di un valore i [18], ottenendo le scritture

$$f(x+i) = f(x) + iP(x),$$
$$P(x,i) = \frac{f(x+i) - f(x)}{i},$$

dove P era una funzione nella variabile x, inizialmente, e poi anche nella i. Considerò una nuova funzione p nella variabile x ottenuta da P ponendo $i = 0$ e prese una funzione Q per cui $Q = \frac{P(x,i)-p(x)}{i}$ e, iterando il ragionamento fatto in precedenza, Lagrange arrivò ad ottenere lo sviluppo di $f(x+i)$

$$f(x+i) = f(x) + ip(x) + i^2q(x) + i^3r(x) + ...$$

Il matematico si concentrò poi sulle derivate: dopo una serie di ragionamenti, tra cui quello di supporre che x venisse incrementata di o e concentrarsi sullo sviluppo di $f(x+i+o)$, Lagrange arrivò ad ottenere

$$f(x+i) = f(x) + f'(x)i + \frac{f''(x)}{2!}i^2 + ...$$

e chiamò $f(x)$ *funzione primitiva*, $f'(x)$ prima funzione derivata o *funzione prima*, $f''(x)$ seconda funzione derivata o *funzione seconda* ecc.

Lagrange ragionò anche sulle rette tangenti ad una curva, sui massimi e minimi e sulla concavità o convessità del cerchio osculatore alla curva in un punto: considerò una curva generica di equazione $y = f(x)$ e una retta di equazione $F(p) = a + bp$, e andò a porre la condizione necessaria per far sì che la retta e la curva abbiano dei punti in comune, cioè

$$f(x) = F(x) = a + bx.$$

Occorreva trovare i valori di a e b.
Lagrange considerò che nei punti in comune tra la curva e la retta dovessero essere uguali le derivate, perciò $f'(x) = F'(x) = b$ e quindi ottenne anche

$a = f(x) - xf'(x)$; sostituendo i valori trovati nell'equazione della retta iniziale, Lagrange ottenne l'equazione

$$q = f(x) - xf'(x) + pf'(x)$$

con q e p coordinate e x costante. Perciò la linea retta di equazione $q = a + bx$ che aveva $a = f(x) - xf'(x)$ e $b = f'(x)$ era la tangente alla curva rappresentata dall'equazione $y = f(x)$ nel punto corrispondente all'ascissa $p = x$. Per semplicità Lagrange ragionò poi con y e non $f(x)$ e quindi con y' al posto di $f'(x)$, ed evidenziò che **la derivata** $y' = b$ (il coefficiente della variabile x nell'equazione della retta) **corrispondeva alla pendenza della tangente** di angolo tra l'asse x e la retta e specificò che $x + \frac{a}{b} = \frac{y}{y'}$ era l'equazione della sottotangente. Lagrange aggiunse che $-\frac{1}{y'}$ corrispondeva alla pendenza della normale alla retta tangente.

L'impostazione di Lagrange riscosse notevoli consensi all'indomani delle sue pubblicazioni, ma venne poi criticata e per certi versi ribaltata dal matematico francese **Augustin Louis Cauchy** (1789-1857). Quello che Cauchy riprese da Lagrange fu sicuramente la notazione, ma la colonna portante della struttura analitica di Cauchy era il **concetto di limite**, introdotto dal matematico **Jean Baptiste Le Rond d'Alembert** (1717-1783) che lo definì nel seguente modo [19]:

> *Diciamo che una quantità è il limite di un'altra quantità quando la seconda si avvicina alla prima più di tutte le altre quantità, anche piccole che siano, e quando si approccia alla prima senza mai superarla; si ha che la differenza tra tale quantità e il suo limite non è assolutamente quantificabile con un valore preciso. Per esempio possiamo considerare due poligoni, uno inscritto in*

una circonferenza e l'altro circoscritto nella stessa circonferenza; risulta chiaro che, se aumentiamo il numero di lati di entrambi i poligoni, questi si avvicineranno sempre di più alla circonferenza e il perimetro del poligono inscritto aumenterà, mentre il perimetro del poligono circoscritto diminuirà, ma il primo non supererà mai la lunghezza della circonferenza e il secondo non sarà mai inferiore alla lunghezza della circonferenza. La circonferenza è quindi il limite dell'incremento del primo poligono e il limite della decrescita del secondo poligono. Entrambi i poligoni potranno diventare infinitamente vicini alla circonferenza ma non coincideranno mai con essa. Il limite di una qualsiasi quantità non coincide mai (o diventa uguale) alla quantità di cui è il limite.

Cauchy fece proprio il concetto di limite e lo pose al centro di tutte le costruzioni della sua analisi, recuperando così la controversa nozione di infinitesimo, definendo la continuità di una funzione e studiando la convergenza di serie e di successioni. Pur conservando la terminologia Lagrangiana, Cauchy definì rigorosamente la derivata come il limite del rapporto incrementale e fornì un nuovo approccio, rigoroso e moderno, alla struttura delle dimostrazioni. Nel suo trattato, *Cours d'analyse*, Cauchy diede prova della modernità della sua nuova impostazione, anche se la definizione di limite che diede era pressocché uguale a quella di d'Alembert [9]:

Allorché i valori successivamente assunti da una stessa variabile si avvicinano indefinitamente a un valore fissato, in modo da finire per differirne di tanto poco quanto si vorrà, quest'ultimo è chiamato il limite di tutti gli altri.

Il punto di modernità di Cauchy era però un altro ed era legato al suo approccio alla dimostrazione, che nell'opera citata in precedenza era molto visibile: il matematico francese dimostrò infatti che il limite di una successione a_n era il numero L, utilizzando il fatto che comunque si prenda un $\epsilon > 0$ si può sempre trovare un N tale che per ogni $n > N$ si abbia $|a_n - L| < \epsilon$, esattamente come quello che fanno i matematici odierni. Non solo, infatti, come anticipato, Cauchy utilizzò la sua definizione di limite per dare la sua definizione di **derivata** come **limite del rapporto incrementale**, cioè:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Cauchy mostrò inoltre che la sua definizione di derivata era più generale e corretta rispetto a quella data da Lagrange, egli fece vedere che una funzione può annullarsi in un punto insieme a tutte le sue derivate ed essere però diversa da zero, perciò la relazione

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ...$$

perse di validità.

Il lavoro di Cauchy ha poi ispirato tanti altri matematici, come l'italiano **Ulisse Dini** (1845-1918) che ha ragionato sull'esistenza delle derivate e sui limiti destro e sinistro del rapporto incrementale, così come tanti altri studiosi che hanno seguito gli studi di Cauchy sull'integrazione oppure sulle successioni e serie. La grandissima rivoluzione attuata da Cauchy è ancora oggi presente nell'impostazione dell'analisi e ha permesso di dare validità alle dimostrazioni, che sono diventate sempre più importanti e imprescendibili nella vita di ogni matematico.

Il "fare matematica" nelle scuole non può non tenere conto della natura dei concetti e della loro evoluzione nel corso dei secoli.

Capitolo 3

Fare la storia della matematica o fare matematica con la sua storia?

3.1 I punti di forza e le possibili criticità di un approccio storico alla didattica della matematica

L'approccio storico alla didattica della matematica può essere un valido alleato per scardinare alcuni preconcetti sulla matematica da parte degli studenti e per favorire l'apprendimento; per far sì che questo tipo di approccio porti all'apprendimento effettivo occorre che i docenti che lo adottino strutturino in maniera adeguata le lezioni e che stiano attenti a seguire una serie di accorgimenti. Non avere alcune accortezze potrebbe portare a risultati mediocri, ma andiamo con ordine.

I pregiudizi sulla matematica e sulle scienze in generale esistono e sono uno degli impedimenti all'apprendimento concreto ed efficace dei ragazzi nelle scuole, e questo si ripercuote poi sull'idea presente nella nostra società che la matematica sia una disciplina più o meno utile ma non necessaria nel nostro bagaglio culturale: un individuo è una persona di cultura se conosce la storia, la letteratura e l'arte, ma se conosce la matematica è solo una persona intelligente. Come se una cosa escludesse l'altra e non fosse importante avere una buona conoscenza di base e avere sviluppato competenze sia nelle discipline scientifiche che in quelle umanistiche.

Questo ci riporta agli inizi del XX secolo in Italia quando ci fu la diatriba tra i neoidealisti italiani, tra cui Benedetto Croce (1866-1952) e Giovanni Gentile (1875-1944), e il movimento di filosofi e scienziati di cui faceva parte anche **Federigo Enriques** (1871-1946) [20, 21]. Enriques e i suoi colleghi erano dell'idea che fosse più che mai necessaria una cultura di divulgazione filosofica e scientifica in Italia, perchè era forte il bisogno di orientarsi nel dominio generale del sapere scientifico. Gentile però si contrappose a questo nuovo movimento e vide nella filosofia scientifica proposta da Enriques la contraddizione tra il "lavoro speciale d'indagine" e lo "sforzo generale di sintesi", cioè per Gentile non era possibile riuscire a far coesistere la tendenza analitica e quella sintetica in un'unica prospettiva filosofica: tale proposta avrebbe portato solo ad incoraggiare il "dilettantismo scientifico", che non avrebbe di certo giovato alla scienza. In realtà l'idea di Enriques era quella di valorizzare la presenza della scienza nella filosofia e nella cultura italiana, intenzione molto nobile che si andò però a scontrare contro la diversa mentalità dei suoi oppositori, nei quali sembrava essere presente tutta una serie di stereotipi sulla matematica e sulla scienza in generale, che tuttora sono presenti nell'insegnamento e nell'immaginario comune [20]:

La scienza ha solo valore pratico per le applicazioni, la matematica è sì una conoscenza perfetta, ma è una disciplina arida e morta, gli scienziati si devono occupare solo del proprio campo e per insegnare basta conoscere i contenuti

della propria disciplina.
La matematica veniva percepita come pura astrazione e le sue applicazioni come rigide risposte a situazioni standard.
Enriques lottò contro questi stereotipi e ribadì l'enorme importanza del lavoro di appropriazione dei concetti matematici da parte degli studenti dei vari gradi scolastici e specificò che studiare e imparare a memoria le nozioni non era di nessun aiuto per incrementare la cultura scientifica dei ragazzi.
Per comprendere in profondità e saper utilizzare le conoscenze scientifiche occorre anche fare un lavoro sulle origini dei contenuti, disse infatti Enriques [22]:

> *Rispondo: non vi è iato o scissura fra matematiche elementari e matematiche superiori, perché queste si sviluppano da quelle, al pari dell'albero dalla tenera pianticina. E come, riguardando l'albero, potremo scoprire nella pianticina nuovi aspetti o comprendere caratteri di cui ci era sfuggito il significato, così anche lo sviluppo dei problemi matematici recherà luce sulle dottrine elementari in cui essi profondano le loro radici. Ad una condizione però: che* ***di ogni dottrina si studi le origini, le connessioni, il divenire, non un qualsiasi assetto statico****; e però che un grado di verità più alto serva ad illuminare il più basso da cui è uscito; che insomma, dopo avere studiato la scienza, ce ne valiamo per comprendere la storia. Quale modo più largo di comprensione, quale più vasta esperienza didattica che l'annodarsi dei problemi e l'urtarsi delle difficoltà entro lo spirito di tutti gli studenti, che hanno faticato prima di noi, nella scuola del mondo?*

Altri studiosi italiani dopo Enriques si occuparono della divulgazione delle scienze e analizzarono nuove metodologie didattiche utili per lo sviluppo di competenze da parte degli studenti, in particolare alcuni di loro si concentrarono **sull'approccio storico alla didattica della matematica** nelle scuole. Il possibile parallelismo tra l'evoluzione storica e lo sviluppo cognitivo degli allievi fu evidenziato da Attilio Frajese (1902-1986), il quale nel 1950 durante il "Corso di perfezionamento in Matematica e Fisica" disse [23]:

> *Come l'umanità, si dice ha dovuto percorrere numerose tappe per giungere al possesso di una dottrina scientifica, attraverso errori, deviazioni, scoperte, così nella mente del discente tali tappe devono essere ripercorse, con analoghi errori, analoghe deviazioni, analoghe scoperte.*

Probabilmente un'impostazione della didattica della matematica unicamente incentrata sullo sviluppo cognitivo tramite l'evoluzione storica dei concetti risulterebbe un po' pesante e controproducente, ma utilizzata a piccole dosi potrebbe dare degli ottimi risultati. Tra i lati positivi ci sarebbe il fatto che i ragazzi capirebbero che la matematica non è una disciplina statica ma che è in continua evoluzione e scoprirebbero, tramite questo approccio, che la matematica non è una materia fredda e distaccata, ma che c'è stato chi ha dovuto faticare per arrivare a concetti che oggi noi magari diamo per scontati come ovvi ma che troviamo difficili da analizzare in profondità. Come è stato studiato e confermato dalle ricerche nella didattica della matematica, l'aspetto affettivo non è da mettere in secondo piano durante l'apprendimento, soprattutto per una disciplina come la matematica dove si sente molto il "giudizio" e che c'è un "giusto" e uno "sbagliato", questo approccio aiuterebbe sicuramente ad entrare in empatia con gli studiosi delle varie epoche e

con le loro fatiche.
C'è però un aspetto da considerare quando si utilizza l'approccio storico alla didattica, anche nel caso in cui venga utilizzato solo sporadicamente dall'insegnante, e cioè il fatto che **le scoperte in ambito scientifico sono state influenzate dal periodo storico, dall'ambiente sociale e dagli "standard"** considerati importanti in quel momento.
Luis Radford, Professore nella facoltà di Scienze dell'Educazione dell'Università Laurenziana in Canada, è giunto alla considerazione che il contenuto della conoscenza della matematica è modellato dalla cultura nella quale si sviluppa: la conoscenza non si può limitare al solo rapporto esclusivo individuo-problema da risolvere, ma è socialmente ottenuta. La sua successiva affermazione è decisamente significativa [23]:

> *Il modo in cui un'antica idea è stata forgiata può aiutarci a ritrovare quegli antichi significati che, mediante un'opportuna opera di adattamento didattico, possono probabilmente essere ridisegnati e resi compatibili con i moderni programmi scolastici.*

Lo stesso Radford, riprendendo Jerome Seymour Bruner (1915-2016), ha evidenziato che attraverso l'uso didattico di elementi storici è possibile mostrare una sorta di **procedimento a spirale dell'apprendimento**; se il docente che parte da una *testimonianza di un risultato storico* riesce a trasportare l'interpretazione che ne è stata data all'epoca *in atto didattico*, allora è possibile ottenere una significativa reinterpretazione della testimonianza storica in questione da parte dell'allievo, secondo un procedimento che può ripetersi, quindi a spirale. Questo moto in circolo può avvenire se *durante la ricerca del significato i preconcetti degli studenti vengono via via rinnovati e sostituiti nel corso del lavoro di interpretazione, in modo sempre più adeguato e sempre maggiormente in sintonia con l'oggetto sul quale si opera* [23]. Questo

processo porta ad un apprendimento significativo.
Come riportato in [23]:

> *La didattica della matematica senza relazioni con l'epistemologia e la storia è come uno strumento agile e potente che nessuno sa usare a pieno; la epistemologia e la storia sono mezzi culturali forti, astratti e profondi che la didattica della matematica rende concreti ed utili al progresso dell'umanità, alla costruzione di competenze, alla consapevolezza del proprio sapere.*

E' allora chiaro come un approccio narrativo degli avvenimenti storici non è considerabile come un "fare la storia della matematica" ma piuttosto come un "fare matematica con la sua storia"[1], anche se non si nega che tale approccio incuriosisca e attiri l'attenzione dei ragazzi tramite il racconto di alcuni aneddoti.
Le schede dei libri di testo delle scuole superiori tendono a prediligere l'approccio narrativo-storico, per così dire, e a volte tendono a non evidenziare la reale natura dei concetti matematici per come sono stati proposti storicamente; un esempio è la scheda del libro Zanichelli [25] che si vede nell'immagine a pag. 74. In questa scheda si dà molto spazio alla parte prettamente storica della disputa tra Newton e Leibniz ma poco si parla dell'impostazione dei metodi dei due matematici; in particolare, si approfondisce di più la trattazione di Leibniz, probabilmente perchè più in linea con la notazione utilizzata nei libri di testo odierni, e molto meno quella di Newton, di cui tra l'altro si riesce a parlare solo facendo un parallelismo con il concetto di rapporto incrementale. Le schede di storia nei libri di testo di matematica possono

[1] questi due termini sono presenti nel lavoro della Professoressa Paola Stoppielli dal titolo "Con lo sguardo rivolto ai giganti: lo studio della matematica attraverso le fonti originali [24].

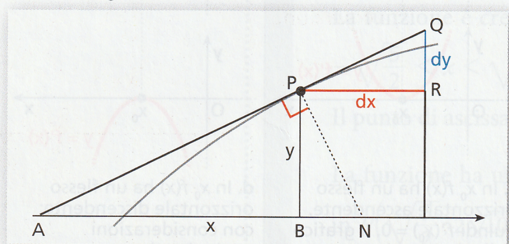
quindi essere dei buoni punti di partenza ma spesso necessitano di un notevole lavoro da parte del docente, se si vuole realmente riuscire a fare "storia della matematica".

ESPLORAZIONE

Chi è il padre del calcolo?

Leibniz o Newton?

Leibniz arrivò al concetto di derivata di una funzione attraverso quello di tangente in un punto. Egli capì l'importanza del *triangolo caratteristico*, che in figura indichiamo con *PRQ*, in cui $\overline{PR}$ e $\overline{QR}$ rappresentano le «differenze» dx e dy, e sfruttò la sua similitudine con i triangoli *ABP* e *PBN*.



Ricavò inoltre le principali regole di differenziazione, come quelle del prodotto e del quoziente, corrispondenti a quelle che abbiamo studiato per le derivate:

$$d(x \cdot y) = xdy + ydx \text{ e } d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

Newton, riferendosi ai suoi studi di dinamica, chiamò *fluenti* le quantità «crescenti con gradualità e in modo indefinito» e *flussioni* «le velocità con cui le singole fluenti aumentano a causa del moto che le genera». Una fluente è quindi una funzione (continua) e una flussione una derivata. Newton calcola la flussione di una fluente attraverso quello che noi chiamiamo rapporto incrementale, considerando il valore da esso assunto quando numeratore e denominatore sono quantità «evanescenti», ovvero che tendono a 0.

La disputa

Il problema di determinare chi tra Newton e Leibniz fu il primo a ideare il calcolo infinitesimale è stato una delle questioni più controverse della storia della matematica.

Leibniz aveva iniziato i suoi studi dopo Newton, ma li aveva pubblicati prima, quindi parte della comunità scientifica riconosceva a lui la paternità del calcolo infinitesimale.

Alla Royal Society, società scientifica inglese presieduta dal 1703 da Newton, si ipotizzava che Leibniz potesse essere venuto a conoscenza degli studi di Newton durante un suo viaggio a Londra.

Leibniz replicò rivendicando il primato nella pubblicazione e rivolgendo una protesta alla Royal Society, di cui lui stesso era membro straniero. La società incaricò una commissione di occuparsi della questione e, influenzata da Newton, pubblicò nel 1712 un *Commercium epistolicum* in cui Leibniz era ancora accusato di plagio e si riconosceva Newton come inventore del calcolo.

Leibniz non accettò questo verdetto e rimase solo nella sua battaglia, abbandonato anche dal duca di Hannover, del quale era stato consigliere e che era diventato re d'Inghilterra.

Oggi non ha molto senso porsi il problema di chi sia il padre del calcolo infinitesimale. È ormai dimostrato che Leibniz e Newton non furono dei veri e propri inventori del calcolo, ma piuttosto riuscirono, indipendentemente l'uno dall'altro, a riordinare il lavoro e le idee di diversi matematici del Seicento, quali Cavalieri, Fermat, Pascal, Wallis, Torricelli, Barrow.

3.2 Due proposte di percorsi didattici sul concetto di derivata con un approccio storico

In quest'ultima sezione verranno esposte due diverse proposte didattiche relative all'introduzione e all'analisi del concetto di derivata, entrambe presentate agli studenti con un approccio storico [24, 26].

3.2.1 Le lezioni di Andrea Camiciottoli ispirate ai lavori di Newton

Il Professore Andrea Camiciottoli ha proposto un modulo di sei lezioni ai suoi studenti della classe III del Liceo classico (quinto anno) "Marsilio Ficino" a Figline Valdarno (FI), che ha concluso con una prova finale a sorpresa [26]. Le sei lezioni erano tutte da un'ora e dovevano introdurre il concetto di derivata con un approccio differente dal solito, un approccio storico per l'appunto. La proposta era nata dalla constatazione che i ragazzi a scuola imparano a calcolare le derivate in maniera meccanica, capiscono come applicarle al calcolo delle rette tangenti e ai problemi di massimo o minimo, ma non hanno chiaro fin in fondo cosa siano davvero queste derivate e la loro utilità. Camiciottoli con queste lezioni si prefisse diversi **obiettivi** di apprendimento e di competenze che gli studenti avrebbero dovuto ottenere:

- Conoscere il contesto storico, sociale e culturale in cui si è sviluppato il calcolo infinitesimale e far passare l'idea che la matematica è legata al contesto;
- Acquisire l'idea che la derivata ha varie interpretazioni e che può essere utilizzata per risolvere problemi di varia natura;

- Conoscere la definizione moderna di derivata e capire come si è arrivati all'attuale concezione del termine studiandone la sua evoluzione nel tempo, osservando che spesso studiamo la matematica in senso opposto a quello cronologico;
- Utilizzare il metodo delle flussioni di Newton per risolvere problemi di massimo e minimo o calcolare la retta tangente ad una curva in un punto; nel seguito verranno risolti gli stessi problemi con il moderno metodo di calcolo, ma questa prima esperienza costituirà una base di partenza.

Tali lezioni sono state presentate dopo aver concluso lo studio del calcolo dei limiti.

Lezione I:

E' stata data un'idea generale dei problemi della ricerca scientifica rimasti aperti fino al XVII secolo, per mostrare come i progressi matematici dell'epoca furono stimolati da questi problemi irrisolti e studiati utilizzando nuovi metodi. E stato poi accennato il problema delle tangenti e la determinazione di massimi e minimi.

Il lavoro dato da fare a casa consisteva nel tradurre e capire un'estratto del *De Quadratura Curvarum* e del *Methodus Fluxionum*, in cui vengono spiegati i termini "fluente" e "flussione" e come sono legati al concetto di spazio e velocità.

Lezione II:

E' stato ripreso il lavoro di traduzione fatto a casa dai ragazzi, con particolare attenzione al fatto che i concetti newtoniani fossero stati appresi correttamente. E' stato poi dato un esempio di applicazione del metodo di Newton alla funzione $y = ax^2$, considerando y come la distanza percorsa da un corpo in un moto accelerato, x il tempo trascorso dall'inizio del moto e

analizzando gli incrementi delle due grandezze dopo un tempo infinitesimo "o". E' stato trovato che $\dot{y} = 2ax$ e quindi che il metodo di Newton fornisce un procedimento per il calcolo della velocità istantanea. Visto che ai ragazzi non era ancora chiaro il procedimento, è stato fornito un altro esempio di applicazione, in cui viene chiesto di calcolare la velocità con cui è stata sparata la palla di un cannone: dall'equazione della traiettoria e da alcune considerazioni sono state ottenute la velocità orizzontale $\dot{x}$ e quella verticale $\dot{y}$ in ogni punto della traiettoria. Sono stati fatti ragionare i ragazzi sulla frase di Newton *sia diminuita la quantità o all'infinito e trascurati i termini evanescenti*, ed è stato evidenziato come fosse presente l'idea di limite in tali parole.
Per la lezione successiva è stato dato come compito quello di ricavare la regola di derivazione del prodotto utilizzando il metodo spiegato a lezione.

Lezione III:

E' stato spiegato come trovare l'equazione di una tangente ad una curva con il metodo di Newton e viene analizzato lo stesso esempio che si trova in questo elaborato a pag. 46. In questa lezione è stato possibile mostrare come le quantità che erano state introdotte come velocità possano essere utilizzate per trovare la tangente ad una curva in un punto, e che quindi tali quantità hanno un significato più ampio.
Come compito a casa è stata data l'equazione di una curva ed è stato chiesto di trovare la tangente alla curva in un punto specifico.

Lezione IV:

E' stato risolto, con il metodo di Newton, il seguente problema di massimo trattato da Fermat: *dato un segmento si richiede di trovare un punto su di esso tale che il rettangolo, che ha come lati i due segmenti in cui il punto divide il segmento dato, sia massimo* (di area massima). E' stato trovato che

il rettangolo di area massima è il quadrato.
Sono stati dati altri esercizi da fare a casa, simili a quello affrontato in classe.

Lezione V:

Durante questa lezione sono state esposte alcune critiche al metodo di Newton fino ad arrivare alla moderna definizione di derivata di Cauchy. Sono stati colti dai ragazzi i problemi sollevati dalle critiche al metodo delle flussioni ed è stato capito che il tassello mancante nella trattazione era proprio una chiara definizione di limite.

Lezione VI:

E' stata somministrata ai ragazzi una **verifica a sorpresa**, per valutare quanto i ragazzi fossero riusciti ad apprendere dalle lezioni senza una preparazione alla prova. Era stato detto agli studenti che non sarebbero stati valutati con un voto tramite questa prova, ma che sarebbe stato valutato il loro apprendimento. La verifica era composta da tre quesiti:

1) Spiega cos'è la derivata di una funzione.
2) Descrivi brevemente i motivi che hanno portato allo sviluppo del calcolo infinitesimale.
3) Spiega la differenza tra il concetto di flussione secondo Newton e il moderno concetto di derivata.

I risultati della prova, sostenuta da 16 studenti, sono stati:
I risultati sono stati estremamente soddisfacenti, gli elementi essenziali sono passati ai ragazzi vedendo le risposte che hanno dato durante la prova.
Le considerazioni finali di Camiciottoli sono:
ritengo che l'approccio storico utilizzato abbia il vantaggio di trasmettere un'idea ampia del concetto di derivata, che si perde se viene proposta soltanto come limite del rapporto incrementale. [...] *Queste lezioni hanno fornito una*

Quesito 1:	7 risposte corrette
	6 risposte corrette ma con imprecisioni
	3 risposte errate
Quesito 2:	16 risposte corrette
Quesito 3:	13 risposte corrette
	3 risposte errate o non date

base di partenza, il lavoro poi deve proseguire con le derivate delle funzioni elementari, le regole di derivazione e i teoremi sulle derivate. [...] *Ritengo* (che le sei lezioni) *siano state un buon investimento in quanto hanno fornito dei buoni spunti di riflessione e ne possono favorire altri nel prosieguo, anche a costo di rinunciare ad altre parti del programma, magari di un teorema o di una dimostrazione. Ritengo sia più utile fornire un'idea chiara e completa di pochi concetti chiave rispetto alla conoscenza disorganica e mnemonica di molti elementi.*

3.2.2 Il modulo interdisciplinare sul calcolo infinitesimale di Paola Stoppielli

La Professoressa di matematica Paola Stoppielli ha proposto ai suoi studenti del Liceo scientifico "Benedetto Varchi" di Montevarchi (AR), una serie di lezioni sulla nascita del calcolo infinitesimale, chiedendo la collaborazione dei colleghi di lingua inglese e latina [24]. L'idea era di far lavorare i ragazzi sulle fonti originali, sia per mostrare loro le differenti notazioni e impostazioni di Fermat, Leibniz e Newton, sia per evidenziare come la matematica sia un *processo* e non una disciplina statica. La scelta di coinvolgere anche gli altri colleghi è stata dettata dal desiderio di mostrare ai ragazzi come le discipline possano fondersi e anche dalla necessità di avere più ore in cui proporre tale modulo. Le letture che sono state selezionate sono le seguenti:

- Lettura da *Sulla trasformazione e semplificazione delle equazioni dei Luoghi*, Pierre de Fermat.
- * Biografia di Gottfried Wilhelm Leibniz.
- * Lettura da *Nova methodus pro maximis et minimis , itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*, Gottfried Wilhelm Leibniz.
- Lettura da *Supplementum geometriae dimensoriae ...* in *Acta Eruditorum* (Il teorema fondamentale del calcolo), Gottfried Wilhelm Leibniz.
- * Biografia di Isaac Newton.
- Lettura da *Specimens of a Universal [System of] Mathematics*, Isaac Newton.
- Lettura da una lettera a Henry Oldenburg sulle serie binomiali (13 giugno 1676), Isaac Newton.
- * Lettura da una lettera a Henry Oldenburg su un Metodo Generale per le Quadrature (24 ottobre 1676), Isaac Newton.
- * Lettura da *Principia Mathematica (sulle prime e ultime ragioni: la teoria dei limiti)*, Isaac Newton.
- * Lettura dall'Introduzione al trattato *De quadratura curvarum*, Isaac Newton.
- * Lettura del *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, Isaac Newton.

La professoressa ha specificato poi che per questioni di tempo le letture proposte in classe sono state solo quelle contrassegnate da un asterisco. In particolare **sono state fatte le letture relative all'introduzione delle derivate**. La lettura delle fonti è stata svolta anche nelle ore di Inglese e di

Latino, infatti l'insegnante di inglese ha proposto la lettura della biografia di Newton e un'introduzione storica al *De Analysi ...*, in cui Newton ha posto le basi del calcolo, mentre l'insegnante di latino ha proposto la lettura del *Nova methodus ...* traducendo quelle che sono le regole introdotte da Leibniz per il suo metodo.
Le ore di matematica sono state invece indirizzate a creare una struttura del processo dell'evoluzione del concetto di derivata, ed è stato svolto secondo i seguenti passi:

1) E' stato evidenziato il motivo per il quale il problema delle tangenti è stato così importante storicamente, spiegando come gli scienziati delle varie epoche (Cartesio, De Beaune, Fermat) abbiano cercato e trovato soluzioni a tale problema, evidenziando pregi e limiti di applicabilità; in particolare è stata data molta attenzione alla tecnica dell'adequazione di Fermat e sono stati analizzati dei semplici esempi di applicazione del metodo e spiegate le criticità quando le equazioni contengono espressioni irrazionali.

2) Sono stati ripresi i contenuti del *Nova Methodus ...*, letto in precedenza con l'insegnante di latino, e sono stati applicati ad esempi concreti, come la ricerca di tangenti a curve di secondo grado tra cui l'ellisse e l'iperbole.

3) E' stata data la moderna definizione di derivata in un punto e come si trova l'equazione della tangente con le derivate, osservando analogie e differenze con il metodo di Leibniz. Sono stati poi forniti esempi di esercizi.

4) E' stato poi riletto il *Nova Methodus ...* in traduzione italiana ed è stato approfondito il legame tra la crescita delle grandezze e il loro

differenziale e l'introduzione del differenziale del differenziale come introduzione al concetto di derivata seconda e quindi il legame con la concavità della curva.

5) E' stata letta la traduzione italiana del *De quadratura Curvarum* per la parte che definisce, attraverso il concetto di flussione e di fluente, l'approccio di Newton alla risoluzione del problema della quadratura. Questa parte è stata pensata per aiutare i ragazzi ad avere meno difficoltà nella trattazione dell'integrazione.

Il progetto non comprendeva una prova finale, perciò gli insegnanti delle varie discipline hanno riportato le loro considerazioni finali sulla base dell'osservazione dello svolgimento delle lezioni e del riscontro dato dai ragazzi durante le letture e le analisi dei testi.
Il punto forte di questo modulo è stato senz'altro l'arricchimento derivato dalla trattazione multidisciplinare, infatti tale approccio ha portato importanti benefici alle lezioni di Matematifca ma anche alle lezioni di Inglese e di Latino, quali:
- I ragazzi hanno preso maggiore dimestichezza con l'uso della lingua latina traducendo testi non di ambito prettamente letterario.
- Gli studenti hanno ottenuto maggiore esperienza e dimestichezza sugli enunciati scientifici nella loro formulazione originaria, quindi senza il filtro di una mediazione divulgativa e didattica.
- Per quanto riguarda la lingua inglese, gli studenti hanno potuto rendersi conto delle differenze tra il linguaggio scientifico e l'inglese letterario dell'epoca. Dal punto di vista strettamente linguistico, si è potuto osservare come l'inglese scientifico sia di facile comprensione e abbia la capacità di esprimere concetti in maniera sintetica.
- Per quanto concerne **la sfera dell'apprendimento della matematica**,

gli obiettivi raggiunti possono essere sintetizzati *nell'ampliamento del bagaglio di conoscenze e tecniche*, rispetto al programma svolto usualmente e *nella modifica in positivo della percezione della matematica da parte degli studenti*, i quali hanno riconosciuto che tale disciplina è un processo e non una costruzione granitica di teoremi e formule, e che in essa è presente una forte umanità, visibile grazie allo studio dei grandi uomini di scienza che hanno cambiato il mondo con le loro idee.

Conclusioni

In questo elaborato è stato presentato un concetto chiave, affrontato nel programma di matematica dell'ultimo anno della scuola secondaria di secondo grado, la derivata, analizzato sotto la lente della storia, cercando di mostrare le varie sfaccettature che tale termine contiene per sua natura. L'analisi dei quesiti delle prove INVALSI si è resa necessaria per avere un'idea più chiara dell'immagine che gli studenti (sembra) che debbano avere del concetto matematico di derivata, mentre l'approfondimento storico è stato fondamentale per cogliere i passaggi cruciali dell'evoluzione del termine in questione. Per rendere più concreto il ragionamento e l'analisi fatta ho scelto di presentare brevemente due proposte didattiche sul concetto di derivata, entrambe strutturate con un approccio storico. Ho trovato particolarmente efficace ed interessante la proposta didattica del Prof. Andrea Camiciottoli, sia perchè il numero di ore richiesto non è eccessivo, sia perchè il percorso proposto va in profondità e attua il cosiddetto "percorso a spirale" dell'apprendimento, portando i ragazzi a interpretare e ri-interpretare le concezioni del termine che stanno apprendendo.

Sicuramente una proposta didattica di questo tipo è più in linea con un *percorso di studi liceale* rispetto a quello di un *istituto tecnico o professionale*, per tali percorsi scolastici sarebbe più interessante adottare altri tipi di didattiche e fare un modulo interdisciplinare con le materie di indirizzo.

In un istituto tecnico di indirizzo elettronico ed elettrotecnico, per esempio, potrebbe essere molto interessante introdurre il concetto di derivata legandosi alla materia di indirizzo Elettronica-Elettrotecnica, per permettere agli studenti di utilizzare concetti loro familiari: dopo aver definito l'intensità di corrente come la quantità di carica che attraversa un conduttore nell'unità di tempo, si può considerare l'intensità di corrente media i_m relativa al passaggio della quantità di carica Δq in un intervallo di tempo Δt e passare a definire l'intensità di corrente istantanea i_{ist} come il limite per Δt che tende a 0 dell'intensità di corrente media, cioè

$$i_{ist} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t} = q'(t).$$

Questo tipo di introduzione potrebbe aiutare gli studenti di questo indirizzo a vedere il concetto di *limite del rapporto incrementale in maniera meno astratta e più concreta.* Il passo successivo potrebbe essere quello di far risolvere ai ragazzi degli esercizi, anche banali, dove devono calcolare l'intensità di carica istantanea utilizzando la definizione appena data, un esempio può essere:

> *Data la legge che segue la quantità di carica che attraversa un certo conduttore nell'unità di tempo* $q = 3t^2 - 2t + 4$, *determinare l'intensità di corrente istantanea nell'istante* $t = 3s$
> (Dopo aver calcolato l'intensità di corrente media, ottenendo $3\Delta t +$ 16 da $i_m = \frac{q(3+\Delta t)-q(3)}{\Delta t}$, si ottiene, passando al limite, che $i_{ist} = 16$A).

Questo passaggio potrebbe aiutare ad introdurre in maniera più efficace il calcolo delle derivate, il modulo interdisciplinare potrebbe poi proseguire approfondendo il legame tra la corrente istantanea e gli altri elementi a cui risulta legata, ad esempio la capacità di un condensatore e la differenza di potenziale tra le armature del condensatore, sempre in un'ottica interdisciplinare. Questo tipo di approccio potrebbe essere molto interessante anche in altri indirizzi del settore tecnico e anche negli istituti professionali di indirizzo di assistenza tecnica e manutentiva. In un liceo scientifico le derivate potrebbero essere presentate anche con questa modalità, sopratutto negli indirizzi con potenziamento informatico in cui non è presente la lingua latina tra le materie di studio, ma lo troverei efficace per le classi in cui la fisica è una disciplina in cui gli studenti hanno un buon rendimento.

Sarebbe interessante anche adottare un approccio economico-statistico per introdurre le derivate agli studenti dei licei scienze umane opzione economico sociale e ai ragazzi degli istituti tecnici di indirizzo grafico e comunicativo; con questa impostazione si potrebbe partire dai dati ISTAT (Istituto Nazionale di Statistica) e analizzare, per esempio, i tassi di crescita e decrescita in Italia in un determinato anno e ragionare sulla pendenza dei grafici.

Bibliografia e Sitografia

[1] https://slideplayer.it/slide/12679880/

[2] https://www.edscuola.eu/wordpress/?p=118054

[3] https://www.miur.gov.it/documents/20182/5385739/Ordinanza+ministeriale+n.132+del+19+aprile+2021.pdf/7f540154-9f60-2d62-077b-42090714de4d?version=1.0&t=1619698911329

[4] https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_MATEMATICA.pdf

[5] M. Castoldi, *Capire le prove INVALSI*, Carocci Editore, 2017.

[6] https://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:2006:394:0010:0018:it:PDF

[7] https://www.researchgate.net/publication/352246729_Indagine_sulle_convinzioni_di_docenti_e_studenti_sulle_prove_INVALSI_di_matematica_del_grado_13

[8] https://www.gestinv.it/Index.aspx

[9] E. Giusti, *Piccola storia del calcolo infinitesimale dall'antichità al novecento*, Istituti editoriali e poligrafici internazionali, 2007.

[10] https://mysite.du.edu/~etuttle/classics/nugreek/lesson22.htm

[11] https://www.wilbourhall.org/pdfs/heath_euclid_ii.pdf

[12] https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Apollonius/

[13] R.Descartes, *Discorso sul metodo, La Diottrica, Le Meteore, La Geometria*, a cura di Ettore Lojacono, Torino, UTET, 1983, libro I, 534-536.

[14] https://web.math.unifi.it/archimede/note_storia/Gavagna-Laboratorio-tangenti.pdf

[15] G. Castelnuovo, *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna*, Milano, Feltrinelli, 1962.

[16] G. Sibilio, *Critica alle flussioni ne l'Analista di Berkeley*, Tesi di Laurea, Università di Bologna, anno accademico 2020/2021, sessione unica.

[17] http://homepage.sns.it/giaquinta/due-Calcolo.pdf

[18] https://books.google.com.pe/books?id=QoM_AAAAcAAJ&printsec=frontcover&hl=it&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

[19] https://digitalcommons.ursinus.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1013&context=triumphs_calculus

[20] https://digilander.libero.it/dibiasio.neoassunti/Scuola%20secondaria\/Matematica/Insegnare.pdf

[21] https://www.treccani.it/enciclopedia/la-polemica-di-gentile-con-federigo-enriques_%28Croce-e-Gentile%29/

[22] www.gioiamathesis.it/index_file/giornale_file/storia%20della%20didattica_file/Insegnamento%20Dinamico%20-1921.pdf

[23] https://tesi.supsi.ch/673/1/LD.KATYA.CATTANEO.pdf

[24] http://php.math.unifi.it/convegnostoria/convegno.php?id=14
(Paola Stoppielli, *Con lo sguardo rivolto ai giganti: lo studio della matematica attraverso le fonti originali*, sezione Workshop secondaria superiore, calcolo infinitesimale.)

[25] M. Bergamini, A. Trifone, G. Barozzi, *Matematica.blu 2.0*, Zanichelli, 2013.

[26] http://php.math.unifi.it/convegnostoria/convegno.php?id=14
(Andrea Camiciottoli, *Introduzione al concetto di derivata. Lezioni ispirate al pensiero di Newton*, sezione Workshop secondaria superiore, calcolo infinitesimale.)