Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

ANALISI DELLA CONTINUITÀ TRA LINGUAGGIO MATEMATICO E QUOTIDIANO. I PUNTI DI VISTA LESSICALE E MORFOSINTATTICO

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
SILVIA BENVENUTI

Presentata da:
FRANCESCA CALVI

Anno Accademico 2021-2022

Introduzione

La disciplina matematica è una componente fondamentale della formazione culturale di ogni singolo individuo, anche se tale centralità non è universalmente ancora accettata. Possedere almeno le basi della matematica permette infatti di essere *cittadini* migliori, in quanto incrementa la consapevolezza nell'interpretazione delle rappresentazioni matematiche che quotidianamente vengono proposte da media e social network, ma assicura anche degli strumenti efficaci per comprendere ad esempio l'ambito finanziario, economico e statistico, ambiti di cui è necessario essere almeno alfabetizzati per vivere, capire e interpretare correttamente la nostra contemporaneità.

La ricerca in didattica della matematica ha evidenziato ormai da decenni come la componente linguistica sia *centrale* per l'apprendimento ma, nonostante ciò, nel corso del tempo il fatto che il linguaggio matematico degli studenti non sia stato adeguatamente (e in certi casi non curare in alcun modo) curato è diventato un problema didattico. Infatti, nonostante i risultati presenti in letteratura da diversi decenni, la pratica d'aula è rimasta per lo più impermeabile alle raccomandazioni dei ricercatori, ma anche alle conseguenti imposizioni ministeriali, ispirate proprio da tali risultati. È infatti documentato che anche attualmente nel contesto didattico non si tenga abbastanza in considerazione la componente linguistica, e la mancanza totale di controllo su questo aspetto genera errori, misconcezioni e fraintendimenti negli studenti, il che porta a problematiche nell'apprendimento.

Come detto, l'importanza del linguaggio nel contesto dell'apprendimento si riflette nell'inserimento di riferimenti in merito in diversi documenti ministeriali che nel tempo hanno regolato l'istruzione dei ragazzi; analizzeremo in questo caso i documenti italiani. Si noti che l'attenzione al linguaggio tecnico viene sottolineata sia nella sezione dedicata all'insegnamento dell'italiano, sia in quella dell'insegnamento della matematica. Leggiamo in Balboni (2000, pagina 68), ad esempio, stralci di documenti ministeriali del 1979 che decretavano i programmi di insegnamento della lingua italiana della scuola secondaria di primo grado (all'epoca, scuola media): vi leggiamo l'esplicito invito a far emergere agli occhi degli studenti «vari linguaggi più specifici e settoriali: burocratico, scientifico, politico, sportivo, pubblicitario, tecnologico, ecc». Tale indicazione ha avuto però riscontro scarso o nullo nella prassi didattica dell'epoca, che ha invece stabilito una tradizione didattica dell'italiano molto focalizzata sulla lingua standard che si legge nelle antologie, lasciando i linguaggi tecnici in un ruolo molto marginale, abitudine conservata fino ad oggi. Circa dieci anni dopo, i documenti firmati dal sottosegretario Beniamino Brocca suggeriscono durante l'insegnamento della lingua italiana nei primi due anni della scuola secondaria di secondo grado di far compiere agli studenti analisi testuali su «un'ampia varietà di testi, riferibili a tipologie e tematiche diverse: da testi espositivi e informativi a testi argomentativi, da testi scientifici e tecnici a testi letterari»; proseguono inoltre insistendo su come debbano essere individuati «i caratteri specifici della "testualità" e il loro vario manifestarsi nelle diverse forme di testo». Nei più recenti documenti ministeriali, sia riguardanti il primo che il secondo ciclo d'istruzione viene evidenziato il ruolo del linguaggio tecnico per costruire non solo uno studente competente in ogni ambito disciplinare, ma anche un cittadino che abbia accesso a tutti gli ambienti culturali. Già dalla scuola primaria, viene stabilito che l'apprendimento dell'italiano dev'essere appannaggio di tutti i docenti, che dovranno coordinarsi tra loro, e che la padronanza delle abilità di lettura, scrittura ed eloquio devono riguardare tutti gli ambiti, anche quelli tecnici.

Nell'ambito disciplinare della matematica, inoltre, già nel 1979 per l'allora scuola media si stabiliva che l'insegnamento della matematica dovesse sollecitare gli studenti a «esprimersi e comunicare in un linguaggio che, pur conservando piena spontaneità, diventi sempre più chiaro e preciso, avvalendosi anche dei simboli, rappresentazioni grafiche, ecc. che facilitino l'organizzazione del pensiero». Per quanto riguarda invece i documenti attuali, leggiamo nei Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di primo grado che ci si aspetta al termine del primo ciclo un alunno che «produce argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite», «sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi», e in conclusione «utilizza e interpreta il linguaggio matematico (piano cartesiano, formule, equazioni, …) e ne coglie il rapporto col linguaggio naturale». L'obiettivo è quindi rendere agevole e fluida l'esplicitazione di processi e concetti che lo studente ha appreso nel tempo, rendendo centrali pratiche come la discussione e l'argomentazione delle proprie tesi, mettendo al centro il concetto che il linguaggio serva anche a *riflettere*, *operare* e *collaborare* con chi ci circonda, non solo a comunicare. Da questi documenti, come anche dalle Indicazioni Nazionali per i licei e dalle Linee Guida per gli istituti tecnici, traspare il concetto di apprendimento non solo come prodotto, ma anche come processo in cui c'è ampio spazio per negoziazioni, cambi di rotta e anche errori. Tali concetti, come quelli precedentemente espressi per la didattica dell'italiano, non hanno riscontrato grosso seguito nelle pratiche d'aula, che ad oggi rimane invece focalizzata sulla memorizzazione di formule e definizioni e sulla risoluzione di esercizi e al massimo problemi, relegando il fattore linguistico a un ruolo estremamente marginale.

Questo è il contesto in cui si colloca questa tesi, la cui idea centrale ruota attorno al fatto che il linguaggio matematico si mescola inesorabilmente, a vari livelli, con quello usato per comunicare nella vita quotidiana, fuori da aule e contesti tecnici. Da qui, la necessità e l'importanza di studiare la continuità tra questi che, come vedremo, non sono poi così distanti: l'uno è solo un registro elevato dell'altro, il cui uso è regolato da norme non così diverse da quelle dell'altro. Il linguaggio matematico, però, ha la peculiarità di essere multimodale (include cioè testi verbali, espressioni simboliche e rappresentazioni iconografiche) e multivariato (include molteplici registri), e anche queste caratteristiche verranno analizzate da un punto di vista grammaticale per confrontarle con quelle del linguaggio quotidiano.

Nel primo capitolo della tesi, si introduce il linguaggio matematico moderno attraverso un excursus storico che ripercorre non tanto la nascita dei concetti matematici che oggi vengono insegnati a scuola, quanto il linguaggio con cui tali concetti vengono espressi. Si osserva inoltre come lo sviluppo del linguaggio con cui si esprime la matematica non sia sempre legato alla nascita di nuovi concetti e, viceversa, come la nascita di certi concetti non necessariamente abbia influito in maniera determinante sullo sviluppo linguistico. Si espone, nella sezione successiva, il quadro teorico in cui si muove attualmente la ricerca in didattica della matematica per analizzare il problema del linguaggio, cioè il Systemic Functional Language (SFL, in italiano Linguistica Funzionale Sistematica, o sociolinguistica); la filosofia di questa teoria, fondata da M. A. K. Halliday nel 1985, mette al centro le funzioni dei linguaggi rispetto alla forma, e si inserisce in un orientamento pragmatico, considerando che è proprio nell'utilizzo del linguaggio che si concentrano le maggiori difficoltà. Tale ottica permette in maniera molto efficace di superare l'approccio linguistico tradizionale, in primo luogo inserendo il linguaggio in un'ottica interdisciplinare e permettendo che ci si focalizzi non tanto sui prodotti, quanto sui processi, sulle diverse modalità di apprendimento del singolo e sull'analisi (e non sullo stigma) delle differenti difficoltà degli alunni.

La trattazione prosegue illustrando i risultati presenti in letteratura sul linguaggio in ambito matematico, in modo da inquadrare correttamente a che punto sia la ricerca in didattica della matematica nei confronti di questo problema. In particolare, si andranno a illustrare i fattori principali di difficoltà a livello linguistico, che qui elenchiamo in maniera schematica:

- Il *lessico*: la terminologia matematica assume un'importanza molto rilevante all'interno delle dinamiche di apprendimento, poiché la matematica è da una parte ricca di termini con significato esclusivamente tecnico, ma dall'altra lo è altrettanto di termini condivisi con il linguaggio quotidiano, il che crea riscontrate difficoltà;

- L'*abuso del principio di cooperazione di Grice*, principio secondo cui coloro che sono coinvolti in una conversazione, orale o scritta, cooperano con gli altri al fine di condurre a buon fine lo scambio. Tale collaborazione può essere però dannosa nell'apprendimento della matematica;

- Le *capacità di lettura*, determinate in larga parte dalle strategie appropriate o meno utilizzate per leggere e interpretare un testo;

- Le *convinzioni pregresse*, emotive e cognitive, nei confronti del linguaggio matematico e della matematica in sé;

- Alcune *caratteristiche specifiche del linguaggio matematico*, che Halliday (2004) individua in definizioni annidate, tassonomie tecniche, densità lessicale, espressioni speciali, ambiguità sintattica, metafora grammaticale, discontinuità sintattica;

- La *comprensione globale del testo*, che non permette la corretta modellizzazione della situazioni proposte o la comprensione delle richieste del docente o dei problemi. Può derivare sia da problematiche proprie dello studente, che intrinseche del testo;

- La possibilità che si stia interagendo con uno studente con un *Disturbo Specifico dell'Apprendimento*;

- Studenti di cui *l'italiano non sia la madrelingua*.

A questo punto, si apre il secondo capitolo, in cui si approfondisce la *continuità tra linguaggio matematico e quotidiano*: tra le cause di difficoltà che abbiamo elencato, infatti, alcune derivano dalla tensione esistente tra i due linguaggi, in particolare il lessico, l'abuso del principio di cooperazione di Grice e le caratteristiche intrinseche del linguaggio matematico. Questa tensione esiste, come si nota, nei punti più stretti di contatto tra la lingua quotidiana e quella matematica: questo permette di ripensare al problema non tanto come una questione di conflitto, ma a una questione di continuità. Come si vedrà, infatti, questo cambio di prospettiva ben si sposa con il concetto già espresso che il linguaggio matematico non è altro che un particolare registro elevato della lingua quotidiana e che il conflitto è puramente funzionale. Infatti, entrano in conflitto due funzioni del linguaggio: quella comunicativa, tipica del linguaggio quotidiano, e quelle tipiche dei linguaggi scientifici, cioè di organizzare il sapere, le argomentazioni e rappresentare e gestire i processi (Ferrari, 2021).

A questo punto, dopo aver approfondito i primi tratti generali di continuità tra linguaggio matematico e quotidiano, il discorso prosegue approfondendo la continuità tra linguaggio *iconografico* quotidiano e matematico, che si inserisce in un contesto in cui il ruolo delle immagini nella società è sempre più centrale, in particolare per la pervasività dei social network, su cui si comunica principalmente con le immagini.

Infine, il capitolo si conclude analizzando una particolare declinazione del linguaggio matematico, cioè quello usato nei *libri di testo scolastici*, che sono un peculiare punto di incontro tra i due linguaggi nonché lo strumento principe con cui gli studenti dovrebbero apprendere non solo i concetti, ma anche il linguaggio matematico.

Il capitolo successivo è dedicato all'approfondimento della continuità tra linguaggio quotidiano e matematico da un *punto di vista grammaticale*, cioè analizzando i punti di contatto più stretti in ottica lessicale, morfologica e sintattica.

In particolare, per il lessico si va a indagare la continuità analizzando la provenienza dei termini matematici (anche considerando prestiti, calchi e traduzioni da altre lingue) e soprattutto i fenomeni di sinonimia, polisemia e omonimia. Questi ultimi tre, in particolar modo, sono quelli che caratterizzano la continuità lessicale tra linguaggio matematico e quotidiano e sono quelli che in contesto didattico potrebbero portare più problemi agli studenti. Si introducono poi i concetti di densità e ricchezza lessicale, parametri che aiutano nel capire con che tipo di testo si sta interagendo; la prima è il rapporto tra parole portatrici di significato (piene) e il totale delle parole di un testo, che nei testi non tecnici si attesta intorno allo 0.3-0.4, mentre nei manuali scolastici analizzati in Sbaragli e Demartini (2021), si attesta tra 0.56 e 0.62. La seconda, invece, indica la varietà di parole diverse contenute in un testo: il suo valore varia tra 0 e 1, e più è alto, più è variato il testo considerato. Si conclude con un focus sul lessico simbolico, parte fondamentale del linguaggio matematico, rilevante in questo contesto perché parte dei segni usati vengono condivisi col linguaggio quotidiano, come i segni di uguaglianza e disuguaglianza (=, >, <).

A questo punto, il lavoro prosegue con l'approfondimento della continuità tra i linguaggi da un punto di vista *sintattico*. In primo luogo, si descrive lo stile sintattico di un generico testo matematico, analizzando le strutture tipiche, le caratteristiche del sintagma verbale e dell'uso della punteggiatura e, in aggiunta, si approfondisce la funzione di elenchi e riprese anaforiche. In ultimo, come per il lessico, è stata inserita una sezione sulla sintassi del linguaggio simbolico, cogliendo l'occasione per sottolineare il profondo legame tra la sintassi e la semantica dei contenuti.

In conclusione, il lavoro termina con la raccolta di una serie di pratiche didattiche da applicare in aula che abbiano come scopo precipuo quello di potenziare il linguaggio matematico degli studenti. Il senso di questa raccolta è quello di fornire strumenti didattici ad hoc per sviluppare il linguaggio matematico, e non lasciarlo in ombra rispetto alla componente pratica.

Capitolo 1 – Introduzione al problema del linguaggio

Quando si parla di "linguaggio matematico" si intende, con più o meno consapevolezza, un sistema multimodale e multivariato, cioè una struttura che include testi, espressioni simboliche e rappresentazioni figurative, che include un ampio spettro di registri (il concetto di registro linguistico verrà approfondito nella sezione sulla Systemic Functional Linguistic). In maniera analoga rispetto alle lingue moderne, si è sviluppato nel corso dei millenni, dai primi sistemi numerici arrivando fino a consolidare un linguaggio globale generalmente accettato come convenzione.

Quello che ci proponiamo di fare in questo capitolo è, in primo luogo, gettare uno sguardo indietro nei secoli per capire come sia nato e si sia sviluppato il linguaggio matematico, per poi introdurre i risultati della ricerca di in Didattica della Matematica proprio in merito al linguaggio matematico, riflettendo sul perché questo sia un problema al quale dare ampio spazio e sul quale concentrarsi. Si introdurrà poi il quadro teorico in cui meglio ci si muove in questa zona di confine tra matematica e linguistica: la linguistica funzionale (SFL). A questo punto, si analizzeranno tre declinazioni di questo piuttosto vasto argomento di ricerca: la continuità tra linguaggio matematico e quotidiano, il linguaggio matematico nei libri di testo e, infine, come il linguaggio iconografico possa influenzare l'apprendimento della matematica.

1.1 Excursus storico

In linea con l'argomento del lavoro, la presente trattazione vuole fornire solo dei cenni di come, a grandi linee, si è sviluppato il linguaggio matematico in sé, e non la matematica: osserveremo come non sempre le rispettive crescite vadano di pari passo.

Prima di ogni considerazione, una debita premessa: nonostante in maniera minore rispetto al concetto di numero in sé, si pone anche per le prime forme di linguaggio matematico il problema della *contestualizzazione storica*. Tutte le nostre conoscenze non sono infatti altro che il risultato di speculazioni basate sui ritrovamenti attualmente fatti, che con ampia probabilità postdatano la nascita della scrittura e delle prime forme di linguaggio; non possiamo esser certi, infatti, di aver ritrovato ad oggi il primo documento scritto *in assoluto* nella storia dell'uomo, né possiamo esser certi che si sia conservato fino ad oggi e che potrà quindi esser mai trovato.

In ogni caso, al di là dell'interessante disamina sulla nascita del *concetto* di numero, sicuramente antecedente a quella della scrittura, quello su cui vogliamo focalizzarci per questa trattazione è la nascita dell'apparato *simbolico* e *linguistico* che circonda la (proto)matematica.

1.1.1 Storia antica

L'utilizzo di *segni* fu l'inizio dello sviluppo del pensiero matematico astratto, anche se le testimonianze di *parole* che indicassero i numeri sono molto successive rispetto ai segni. Le prime tracce dell'esistenza di un linguaggio matematico sono costituite dai sistemi numerici dei popoli pionieri della scrittura, i Sumeri, dei quali abbiamo trovato diverse testimonianze scritte di simboli cuneiformi utilizzati per indicare numeri. I simboli usati da questa popolazione erano sostanzialmente di due tipi: cuneiforme e stondato, impressi con parti diverse di uno stesso stilo, che andavano poi a comporre tutti i numeri necessari, utilizzando una base mista 10 e 60. Questi simboli conobbero la loro naturale evoluzione nella scrittura cuneiforme, i cui numeri venivano segnalati con due soli simboli, un cuneo verticale per l'unità e le potenze di 60, 𒁹, e un altro simbolo per le decine, 𒌋.

Distinguiamo a questo punto, almeno per i periodi più remoti, da una parte i simboli e dall'altra il linguaggio utilizzato per fare matematica: i primi, come detto, sono segni convenzionalmente usati per indicare i numeri e le prime tavolette di argilla cotta che testimoniano la loro esistenza sono state datate intorno al 3500-3100 a.C. circa; vi leggiamo annotati scambi di merci attraverso simboli *impressi*[1]. Ne abbiamo anche di posteriori che riportano tabelle di calcolo, molto utili anche per moltiplicazioni e quadrati, vista la complessità di queste operazioni a causa della base mista 60 e 10. Un esempio è la Plimpton 322, 1900 -1600 a.C. su cui sono riportare diverse terne pitagoriche. Abbiamo anche testimonianze di figure geometriche, tra cui quelle della tavoletta YBC 7289, 1800 a.C., su cui viene riportato un quadrato con la sua diagonale e le rispettive misure, con un'approssimazione corretta fino alla quinta cifra per quella della diagonale.

Le tavolette in cui invece osserviamo le prime testimonianze di linguaggio, con pittogrammi incisi, affiancano e coesistono con le impressioni dei token, e appaiono nel periodo immediatamente successivo (3300 - 3100 a.C.). Quest'evoluzione del linguaggio ci permette quindi di ottenere le prime tracce scritte di *processi* matematici, ai quali possiamo guardare per trarre delle conclusioni sullo sviluppo del linguaggio matematico: le testimonianze arrivano da tavolette sumere e babilonesi, e da papiri egizi. Abbiamo diversi ritrovamenti di testi di questo tipo, contenenti generalmente problemi, in qualche caso col relativo svolgimento; generalmente si tratta di problemi pratici come il calcolo della larghezza di un canale, le informazioni fornite circa le sue dimensioni, il costo di scavo o il salario giornaliero di un lavoratore. Una delle più

[1] Le prime testimonianze di tavolette, infatti, riportano semplicemente i segni delle impressioni di token. Ricordiamo che i token erano piccoli artefatti d'argilla utilizzati nei primi millenni dell'attività umana (8000-3500 a.C.) per contare beni agricoli, animali o merci.

note in tal senso è la BM13901, tavoletta d'argilla di modeste dimensioni (12 cm x 20 cm), contenente ventiquattro problemi (solo per ventuno, però, è possibile una ricostruzione completa) con le relative soluzioni: i problemi che troviamo riportati sono espressi in linguaggio quotidiano, del quale troviamo diverse traduzioni.

Una delle più recenti, preceduta da una puntuale analisi linguistica, è del danese Jens Høyrup, storico della matematica, che si pone in opposizione all'interpretazione che fino alla fine degli anni Trenta del Novecento si era costruita dell'algebra babilonese, promossa da Otto Neugebauer e da Thureau-Dangin. La tesi fino a quel momento sostenuta era, infatti, che l'algebra babilonese fosse costruita sostanzialmente per estrapolare *numeri* ignoti da complesse relazioni che coinvolgevano le classiche operazioni aritmetiche e che il linguaggio geometrico coinvolto non fosse rilevante ai fini dell'analisi dei procedimenti. Høyrup, in uno studio sulle tavolette YBC 4714 e BM 13901, sostiene, al contrario, che sì l'algebra babilonese antica fosse un insieme di tecniche per "districare" delle quantità da un groviglio di relazioni complesse, ma che queste quantità non fossero numeri, bensì vere e proprie *entità geometriche*, come segmenti, rettangoli e aree delimitate da segmenti, non numeri. Di conseguenza, i metodi della matematica babilonese non erano operazioni aritmetiche come le concepiamo oggi, ma dobbiamo vederle più come tecniche per un intuitivo "taglia-e-cuci" geometrico, che ha luogo senza la necessità di dimostrazioni in tal senso. L'ingenuità di questo metodo pone anche la differenza con la geometria euclidea successiva, poiché non mette in atto nessun tipo di processo dimostrativo, né prove formali, ma abbiamo testimonianze esclusivamente di testi di stampo didattico. Høyrup conduce una puntuale analisi linguistica a sostegno della sua tesi: ad esempio, rileva che per la *somma* vengono utilizzate due parole distinte, e quindi è evidente che venisse effettuata tramite due *modalità*. La prima, indicata dalla parola kamārum, è legata a quella che sembra una genuina addizione numerica, viene usata generalmente per sommare lunghezze o aree, è simmetrica, e lo storico traduce l'espressione con l'inglese "to accumulate", "accumulare". L'altra procedura additiva è indicata come wasābum, associata al verbo "apporre", e opera su entità concrete per effettuare delle vere e proprie unioni; al contrario dell'altra operazione, è *asimmetrica*, come se stessimo aggiungendo qualcosa a qualche altra entità della stessa natura, «*as the identity of my bank account is unchanged when interest is added*» (Høyrup, 2001).

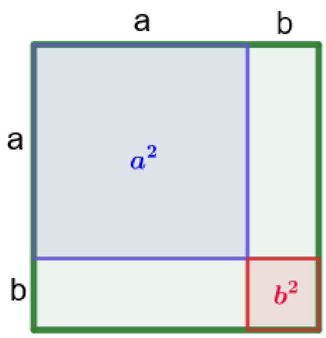
Analogamente, Høyrup individua tre diversi modi per indicare delle *sottrazioni*: una in forma di paragone, "X eccede Y di D", una che è l'opposto della seconda somma che abbiamo visto, "strappare via", e un'ultima che assume il senso di "diventare più piccolo". Le procedure *moltiplicative* sono invece classificate secondo quattro modalità:

- *A-rà*, termine utilizzato nelle tavole moltiplicative e derivato dal linguaggio sumero;
- *Našûm*, usato per moltiplicazioni derivate da considerazioni sulla proporzionalità, o che servano a calcolare aree non derivanti da conseguenze di costruzione delle figure, o anche per conversioni e divisioni operate tramite prodotto dell'inverso;
- *Šutakūlum*, usati per il calcolo delle aree quando invece abbiamo dei numeri prodotto di misurazioni;
- *Esēpum*, legato al procedimento di ripetizione concreta di un'entità tangibile.

Per la *divisione* si utilizza la tecnica della moltiplicazione per il reciproco, chiamato, se n è il generico numero, *igi n*; quest'azione è indicata dal verbo patārum, traducibile in italiano come "separare da".

Non dobbiamo però dimenticarci di quella parte del linguaggio matematico costituito dalla parte figurale, in particolare, dalle costruzioni geometriche; fin da questo periodo, infatti, abbiamo ampie testimonianze di "dimostrazioni" di identità algebriche attraverso figure ottenute per differenza con altre figure geometriche. Abbiamo testimonianza delle identità algebriche più famose, come $(a \pm b)^2$ o $(a+b)(a-b)$. È importante specificare che queste identità avessero un uso strettamente pratico: la prima, ad esempio, veniva usata infatti per calcolare i quadrati di numeri molto grandi, o il prodotto di due numeri attraverso il loro quadrati. La numerazione sumera e babilonese, come detto, era in base 60, il che rendeva il calcolo piuttosto impegnativo quando si trattava di prodotti e quadrati di numeri anche modesti.

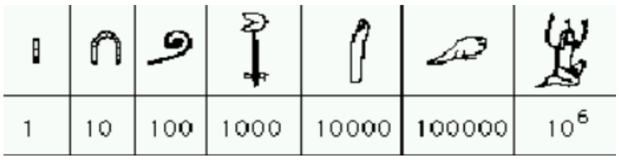
Uno degli esempi più noti di tali identità è il seguente: il quadrato di lato $a+b$ è composto da quattro ulteriori poligoni, un quadrato di lato a, e area a^2, uno di lato b, di area b^2 e due rettangoli di lati a e b, di area ab. Conseguentemente, l'area del quadrato, $(a+b)^2$, è la somma delle aree dei quattro poligoni, cioè $a^2+2ab+b^2$.



In conclusione, quello che ci interessa sottolineare è che già nel III millennio a.C. veniva utilizzato un vocabolario tecnico per operazioni aritmetiche (o geometriche, a seconda dell'interpretazione), ma ogni procedimento e problema venivano "raccontati" tramite il linguaggio naturale, inserendo solo i simboli dei numeri quando necessari: questo modo di esporre la matematica viene chiamato *algebra retorica.*

Posteriori alle testimonianze mesopotamiche sono quelle egizie, arrivate a noi principalmente tramite i più deperibili papiri; i più famosi vengono datati tra il 2000 a.C. (tavoletta di legno del Cairo) e il 1800 a.C. (papiro di Rhind, di Berlino e di Kahun).

I primi simboli utilizzati per i numeri erano geroglifici ispirati alla natura (fiore di loto), a oggetti di uso comune (corda, arco, stiletto, …) o figure religiose (orante).



Da un punto di vista strettamente linguistico, anche in questo contesto troviamo un utilizzo preponderante di linguaggio naturale, senza nessun tipo di formalizzazione, né astrazione. Un esempio lampante è quello del problema 50 del papiro di Rhind, che riporta un problema e la relativa soluzione: *«Calcolare un pezzo di terra circolare di diametro 9 khet*[2]*. Qual è la superficie di terra?»* , *«Devi sottrarre la nona parte di esso, cioè 1. Resta 8. Moltiplica 8 per 8 volte. Diventa 64: questa è la sua area di terra»*.

Il linguaggio naturale veniva usato anche per procedimenti più complessi, come per problemi risolvibili con il *metodo della falsa posizione* e della doppia falsa posizione; troviamo rispettivamente due esempi esplicativi nel problema 26 del papiro di Rhind e nel papiro di Berlino. Il problema 26 pone la seguente questione: «*Una quantità, il suo quarto su di essa fa 15*»; rappresenta una tradizionale equazione di primo grado che oggi scriveremmo come $x + \frac{1}{4}x = 15$. La risoluzione riportata sul papiro non è quella moderna, ma utilizza quello che venne poi chiamato "metodo della falsa posizione", che consiste nell'assegnare un valore arbitrario e provvisorio all'incognita e calcolare il rapporto tra il risultato ottenuto e quello originario; tale rapporto è lo stesso tra il valore provvisorio e quello dell'incognita che stiamo cercando. Leggiamo infatti che lo scriba suppone che $x = 4$, da cui, per sostituzione, $4 + 1 =$

[2] Unità di misura per le lunghezze. Un khet equivale a cento cubiti; un cubito misura circa 52.36cm; quindi, un khet equivale a 5236 dei nostri centimetri, cioè circa 52.36 dei nostri attuali metri.

5: il rapporto tra il risultato originario e quello provvisorio è 3, quindi è pari a 3 il rapporto tra l'incognita originaria e quella provvisorio, da cui segue che $x = 12$.

Inoltre, il papiro di Berlino riporta un problema e la relativa soluzione, sempre espressi in linguaggio naturale, di un problema risolto con il metodo della doppia posizione. Il testo del problema recita: «*Ho un'area di 100 cubiti quadrati in due altri quadrati e il rapporto tra i lati è* 1 *a* $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$». Si noti, come detto, che le frazioni vengono espresse come frazioni unitarie, le uniche utilizzate in Egitto.

Soluzione del papiro	Soluzione moderna
Si introducono *due* ipotesi false per le misure incognite dei lati dei due quadrati, rispettivamente $x = 1$ e $y = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}$. Si calcolano le loro aree, $x^2 = 1$ e $y^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16} = \frac{1}{2}+\frac{1}{16}$ e si sommano tra loro: $x^2+y^2 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$. Questa somma dovrebbe essere quella del quadrato originario, quindi si procede calcolando il lato di questo quadrato "falso" e di quello originario, che rispettivamente sono $\sqrt{100} = 10$ e $\sqrt{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}} = 1+\frac{1}{4}$[3] . Il rapporto tra il lato del quadrato dato e quello ottenuto con i dati provvisori è uguale al rapporto tra i lati incogniti e i rispettivi valori provvisori. Quindi, $\frac{10}{1+\frac{1}{4}} = 8$, da cui $\frac{x}{1} = 8$, quindi $x = 8$ e $\frac{y}{1+\frac{1}{4}} = 8$, quindi $y = 6$.	$\begin{cases} x^2+y^2 = 100 \\ \frac{y}{x} = \frac{3}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2 = 100 \\ y = \frac{3}{4}x \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{9}{4}x^2+x^2 = 100 \\ y = \frac{3}{4}x \end{cases}$ $\frac{25}{4}x^2 = 100 \Rightarrow x = 8$ e $y = \frac{3}{4}8 = 6$

Andando avanti nel tempo, e cambiando area geografica, volgiamo il nostro sguardo alla Grecia, in cui da un punto di vista simbolico abbiamo una prima svolta: sono presenti, infatti,

[3] La radice quadrata di questa somma di frazioni è calcolabile considerando il radicando come il quadrato di un binomio, appunto $1+\frac{1}{4}$.

due diversi sistemi di scrittura per indicare i numeri. Il primo e più antico, il sistema acrofonico, risale al V secolo a.C. ed era usato per pesi, misure e monete; il nome deriva dal fatto che venivano utilizzati come simboli le inziali dei numeri (ad esempio Δ = 10 da Δέκα, appunto dieci, Π = 5, da πέντε, cioè cinque). Il secondo, il sistema alfabetico, usava le ventiquattro lettere dell'alfabeto greco, con l'aggiunta di stigma, ς, coppa, ϟ, e sampi, ϡ, per generare un sistema posizionale in base 10. I ventisette simboli erano organizzati in tre sottogruppi di nove elementi:

- Il primo, costituito dalle prime otto lettere dell'alfabeto greco (da α a θ) e dalla stigma, veniva usato per le unità (con un segno posposto all'apice, α´=1) e per le migliaia (con un segno preposto al pedice, ͵α=1000);
- Il secondo è costituito dalle lettere comprese tra ι e ϟ, e, con un'analoga simbologia rispetto al primo gruppo, veniva usato per le decine e per le decine di migliaia: ad esempio, ι´=10 e ͵ι=10000;
- Il terzo gruppo, infine, costituito dai restanti simboli, con lo stesso metodo indicava centinaia e centinaia di migliaia: ad esempio, ρ´=100 e ͵ρ=100000.

Il modo di fare matematica continua inalterato anche nella Grecia antica, consolidandosi in una modalità retorica che investe ogni aspetto della matematica allora sviluppata e riguarda tutti i matematici, anche i più famosi, quali Talete (640/625 a.C. – 548/545 a.C.), Pitagora (580/570 a.C. – 495 a.C.), Euclide (323 a.C. - 285 a.C.) e Archimede (287 a.C. – 212 a.C.). Questo non vuol dire che concettualmente non venne compiuto alcun progresso: possiamo citare ad esempio come con Talete dal pensiero operativo-concreto di Egiziani e Babilonesi si passa per la prima volta al *pensiero formalizzato*. Da quanto possiamo leggere di Talete, infatti, notiamo come egli possegga il concetto di similitudine in maniera profonda, e non solo come un'intuizione: doveva avere cioè una chiara coscienza non solo della conservazione della forma delle figure simili, ma anche dell'uguaglianza degli angoli e della proporzionalità dei lati. Un altro esempio di grande progresso rispetto ai contenuti concettuali della matematica possiamo trovarlo anche nei famosi paradossi di Zenone di Elea (489 a.C. – 431 a.C.): i tre più famosi, quello di Achille e la tartaruga, della freccia e dello stadio, segnarono l'inizio di processi di pensiero che andranno a chiudersi diversi secoli dopo.

Non possiamo, a tal proposito, non citare il mastodontico lavoro che svolse Euclide con i suoi *Elementi*: per quanto in una formulazione in linguaggio naturale corredata di figure esplicative, quest'opera contiene la prima sistematizzazione e formulazione di quella che oggi è chiamata proprio "*geometria euclidea*". Già nell'opera originale, infatti, troviamo un sistema di definizioni, postulati e nozioni comuni che, per quanto letti oggi risultino poco rigorosi, nel IV secolo a.C. erano più che sufficienti per costruire un impianto sistematico di teoremi per raccogliere e mettere ordine nella geometria dell'epoca.

I progressi nelle notazioni greche si devono a Diofanto (III – IV secolo d.C.), che si occupò principalmente della risoluzione di equazioni di primo e secondo grado, adoperando simboli algebrici per rappresentare le quantità incognite (ς e ςς per una o due variabili, le moderne x e y). Fu il primo ad usare un simbolo numerico per moltiplicare, ma non usò alcun segno speciale per l'addizione. Questo modo di fare matematica con un linguaggio eterogeneo, con rappresentazioni notazionali in parte descrittive, in parte con abbreviazioni letterali e in parte con soluzioni notazionali, venne definita dal filologo tedesco Georg Nesselmann *algebra sincopata*. Tali progressi, però, non vennero adottati da altri studiosi e matematici antichi, e l'algebra retorica continuò a essere il modo con cui si è matematica ancora per molto tempo.

Procedendo nel corso del tempo, incontriamo la società romana: nonostante le ampie testimonianze ritrovate, l'impero che faceva capo a Roma ha lasciato scarsa evidenza di interessi verso la matematica e le speculazioni scientifiche. Quello che infatti interessava era solo il mantenimento della capacità di sviluppare calcoli utili ad attività come i rilevamenti geodetici, o all'ingegneria edile in generale. Gli eruditi romani, anche nel periodo imperiale, non furono veramente mai in grado di comprendere le teorie della scienza e della matematica ellenistica, che erano basate su metodi e sviluppo scientifico che i romani non raggiunsero mai, permanendo durante tutta la storia dell'impero sempre ad un livello prescientifico. La conseguenza della mancata comprensione della scienza dei popoli assoggettati fu l'interpretazione delle conquiste e dei risultati scientifici raggiunti dalla civiltà ellenistica solo a un livello superficiale, e a lungo andare una perdita di fiducia nella conquista scientifica e nella crescita della scienza; l'idea stessa di scienza divenne sempre più confusa e con il progredire dei primi secoli della nostra era si trovò sempre più assimilata a pseudoscienze come l'astrologia. Da un punto di vista simbolico, abbiamo i classici segni che vengono globalmente utilizzati per indicare anni e secoli, anch'essi parzialmente con origine acrofonica (C = 100, da *centum*, e M = 1000, da *mille*).

1.1.2 Storia medioevale

L'algebra retorica continuò a caratterizzare anche la matematica successiva, che nel frattempo stava progredendo: è il momento di parlare della matematica araba. Tra il VII e l'VIII secolo i matematici arabi vissero una fase di assimilazione della cultura greca e orientale, che sfociò dal IX secolo in poi un periodo di intensa traduzione e commento delle più grandi opere classiche. Fu solo tra il XIII e il XV secolo che i matematici arabi ebbero basi abbastanza solide per applicare le conoscenze tramandate dagli antichi per risolvere problemi di tipo astronomico, trigonometrico e algebrico.

Dal punto di vista simbolico, i numeri arabi derivano dalle cifre indiane: divise in due tipi di simboli, diedero origine alle cifre arabe d'Occidente (quelle che sono diventate le nostre cifre) e le cifre arabe d'Oriente, ancora in uso in Turchia e nei paesi arabi. Entrambi gli insiemi di cifre ereditarono inoltre la rivoluzionaria introduzione dello zero. Gli arabi avevano ricevuto il sistema posizionale dagli indiani intorno al 770, e avevano migliorato il sistema indiano aggiungendo lo zero, che gli indiani non usavano (lasciando al suo posto uno spazio vuoto). In India, infatti, il sistema posizionale in base 10 era noto almeno dal 500, e qualcuno sostiene che sia stato a sua volta importato dalla Cina, in tempi ancora più antichi.

A questo punto, è interessante porre l'attenzione sullo *zero*, sia come simbolo che come concetto. Già i Sumeri e i Greci, infatti, avevano affrontato il problema dei numeri con cifre mancanti al loro interno, che avevano risolto lasciando uno spazio tra le cifre proprio per segnalare tale mancanza. Questa pratica, però, risultava in scritture ampiamente ambigue: lo spazio tra le cifre era, per quanto ne sappiamo dalle testimonianza, totalmente arbitrario, lasciando ampia possibilità di fraintendimento[4]. Inoltre, non esisteva il concetto di zero linguisticamente e concettualmente: nessuno dei popoli antichi lo concepì *formalmente*. Questa reticenza ad affrontare il concetto di zero si sposa comprensibilmente con una visione filosofica molto diffusa, soprattutto tra il popolo greco, che non concepisce il concetto di *nulla* e di *vuoto*: infatti, era comune l'idea, che continuò ad esser valida per diversi secoli, che se qualcosa può essere pensato, allora deve esistere. Di conseguenza, pensare a qualcosa che non esiste entrava in contraddizione con l'intero sistema di pensiero del tempo.

L'algebra araba è un'algebra completamente retorica, della quale possiamo comporre un vocabolario più consistente e sistematico, anche perché le opere che ci sono pervenute sono opere molto più organizzate rispetto a quelle precedenti. Prima su tutte, "*Al-kitab al-muhtasar hisab al-giabr wa'l-muqabala*" (che si traduce in "Breve opera sul calcolo di spostare e raccogliere") scritta dal famoso matematico Abu Al-Khwarizmi (490 – 850), che presenta il suo lavoro come l'«*opera che racchiude le più raffinate e le più nobili operazioni di calcolo di cui gli uomini hanno bisogno per la ripartizione delle loro eredità e delle loro donazioni, per le divisioni e i giudizi, per i loro commerci e per tutte le operazioni che essi hanno fra loro relative agli strumenti, alla ripartizione delle acque dei fiumi, all'architettura e ad altri aspetti*

[4] Sempre parlando di ambiguità, i popoli sumero, egizio ma anche arabo non utilizzavano neanche la virgola, che venne introdotta, come la conosciamo oggi, solo nel 1616 da John Napier.

della vita civile». L'opera getta le basi per un approccio sistematico e logico nel risolvere le equazioni lineari di primo e di secondo grado, dando un'iniziale forma all'algebra. Grazie a quest'opera abbiamo una testimonianza di un vocabolario che inizia a essere specialistico proprio di questa disciplina; abbiamo infatti che *dirham*, che generalmente significa "numero" qui indica il moderno termine noto, *say'* ("cosa") o *gizr* ("radice") stanno per *incognita*, e *mal* ("bene") per *quadrato dell'incognita*. Anche le operazioni tipiche della risoluzione delle equazioni assumono un nome proprio: *al-jabr* ("restaurazione" o "completamento") è il trasporto di termini negativi da un membro all'altro dell'equazione, *al-muqabalah* ("riduzione" o "equilibrio") sta a indicare la riduzione dei termini simili che compaiono nei due membri di un'equazione, *al-hatt* è il nome dato al processo di riduzione del coefficiente del termine di secondo grado all'unità.

L'opera era composta di una parte teorica seguita da problemi per consolidare quanto scritto; per capire meglio come fosse strutturato questo tipo di problemi con relativa risoluzione, proponiamo un esempio: si richiede la risoluzione di un'equazione di un tipo chiamato *i quadrati più le radici uguali al numero*, $x^2 + 10x = 39$ che, nella formulazione originale suona come «*I quadrati più le radici uguali al numero è ad esempio quando dici un quadrato più dieci radici sono uguali a trentanove dirham, cioè se aggiunge a un quadrato una quantità uguale a dieci radici, il tutto sarà trentanove*». La risoluzione proposta da Al-Khwarizmi è la seguente: «*Dividi in due metà il numero delle radici viene cinque, che moltiplicherai per sé stesso, e fa venticinque. Lo aggiungi a trentanove, viene sessantaquattro; prendi la radice, che è otto, dalla quale sottrai la metà del numero delle radici, che è cinque. Resta tre, che è la radice del quadrato che cerchi, e il quadrato è nove*».

Letta in questa forma, la risoluzione può sembrare criptica, ma a supporto i matematici arabi utilizzavano figure geometriche che potessero render visibile il processo di pensiero e dare validità al metodo risolutivo.

In questo caso, il processo era:

1. Costruisci un quadrato di lato pari a metà delle radici (il coefficiente del termine di primo grado);

2. Aggiungi la quantità incognita x a due lati del quadrato appena costruito per ottenere un quadrato più grande di lato $(5 + x)$;

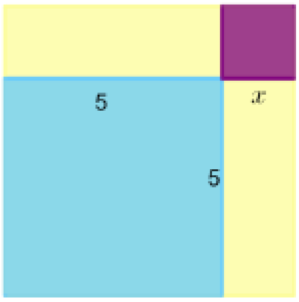
3. Il quadrato ottenuto è composto da quattro elementi: un quadrato di area 25, due rettangoli di area 5x e un quadrato di area x^2;

4. L’area totale è quindi $x^2 + 2(5x) + 25$, ma i primi due termini sono uguali a 39, quindi puoi scrivere $x^2 + 2(5x) + 25 = 39 + 25 = 64$;

5. Essendo a conoscenza dell’identità algebrica (che oggi chiamiamo quadrato del binomio), puoi scrivere $(x+5)^2 = x^2 + 2(5x) + 25 = 64$;

6. A questo punto, con dei passaggi algebrici si ottiene la soluzione $x = 3$.

L’intero processo era supportato da figure come la seguente, per rendere tangibile la sequenza dei passaggi.



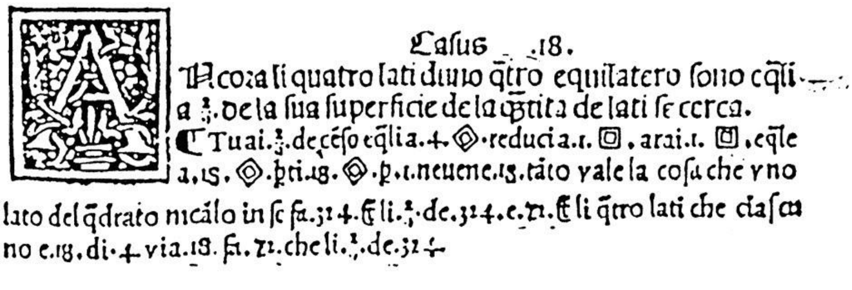
Quello che abbiamo appena visto in un misto di algebra e geometria non è altro che l’algoritmo di quello che modernamente chiamiamo “*completamento del quadrato*”.

Processi risolutivi analoghi sono attestati per tutti i tipi di equazioni di secondo grado che i matematici arabi avevano classificato; a quel tempo, e ancora per molti anni, infatti, i matematici non riuscirono ad accettare e formalizzare i numeri negativi come effettivamente *numeri* a tutti gli effetti. Di conseguenza, i coefficienti e le soluzioni “ammissibili” erano solo quelli positivi: da qui, la classificazione delle equazioni di secondo grado di cui parlavamo.

Col progresso della matematica araba anche il vocabolario specifico della disciplina cominciò a diventare più consistente. Abu Kamil (850 – 930), Al-Karağī (953 – 1029 circa) e Al-Samawal (1130 – 1180) infatti, sistematizzarono e ampliarono il lavoro svolto da Al-Khwarizmi, inserendo come vocaboli parole, ad esempio, per potenze di ordine superiori a quattro e per i numeri irrazionali. Dopo il 1100, però, lo sviluppo matematico arabo si arrestò, da una parte per una reazione antiscientifica per motivi confessionali, dall’altra, forse primariamente, per la conquista e il saccheggio di Baghdad da parte dei Mongoli; dato che la città era un centro di studi molto fiorente, la matematica araba subì un duro colpo, e molti scienziati si trovarono costretti a emigrare da Oriente verso la parte occidentale del califfato, in Nordafrica o addirittura verso le parti del califfato in Spagna. Questa migrazione, insieme alla *Reconquista* spagnola (iniziata nel 1085) e alla costruzione di basi commerciali in Oriente in seguito alle crociate (risale al 1096 la prima vittoria dei crociati contro i Turchi a Nicea), permise la fondamentale osmosi tra il mondo scientifico arabo e quello europeo. Da una parte, infatti, si consolidò in Spagna una tradizione di traduttori dall'arabo al latino, che permise all'Europa di accedere non solo a opere classiche sconosciute o che si ritenevano perse per sempre, ma anche ai fondamentali sviluppi in campo scientifico avvenuti nei secoli precedenti nel califfato; le figure più importanti furono *Adelardo di Bath* (1070 – 1160 circa), *Platone da Tivoli* (prima metà del XII secolo), *Gherardo da Cremona* (1114 – 1187), *Roberto di Chester* (visse intorno al 1150). A quest'ultimo sono attribuiti le notazioni trigonometriche "sin", "cos" e "tang": "sin" è per esempio la traduzione araba di "jaib", cioè insenatura. D'altra parte, le stazioni commerciali europee nel Mediterraneo permisero agli europei in prima persona di affacciarsi al mondo arabo e imparare la matematica dai grandi maestri orientali. Fu proprio così che Fibonacci, al secolo Leonardo Pisano (1170/80 – 1233/41), entrò in contatto con la matematica araba. In questo modo, la lingua in cui si faceva matematica non fu più l'arabo, ma appunto il latino, lingua colta d'Europa. I traduttori si trovarono davanti il compito di tradurre i termini tecnici dell'algebra retorica araba per renderli comprensibili agli studiosi europei. Fu così che vennero tradotti alcuni dei termini più usati: *dirham*, che indicava il termine noto, divenne *numero*, *say'* ("cosa") o *gizr* ("radice"), cioè l'incognita, era *cosa*, mentre invece *mal* ("bene"), il quadrato dell'incognita, era diventato *censo*.

Riportiamo in questo contesto la figura di Fibonacci perché il suo *Liber abaci* (prima edizione, 1202) fu l'opera che maggiormente diffuse l'uso delle cifre arabe, anche perché nel primo capitolo l'autore evidenzia la superiorità da un punto di vista di efficienza delle cifre arabe e della notazione posizionale rispetto alla notazione additiva delle cifre romane. Notiamo anche che fu proprio Fibonacci in quest'opera a dare allo zero il nome di *zephirum*, da cui poi deriva la parola attuale (la parola derivava dal termine *sifr*, nome dato dagli arabi al cerchietto usato per segnalare il posto vuoto in notazione posizionale). L'opera si diffuse notevolmente soprattutto in Toscana: il fatto che fosse scritta in latino e che avesse un discreto grado di complessità impedì che venisse utilizzata direttamente nelle scuole d'abaco, ma ispirò moltissimi maestri d'abaco nei secoli successivi a comporre autonomamente i testi da far usare ai propri studenti, prendendo a piene mani dal *Liber abaci*, soprattutto dai primi otto capitoli, quelli dedicati all'aritmetica di base; i più noti furono il *Trattato d'abaco* di Paolo dell'Abaco e l'opera dall'analogo nome di Benedetto da Firenze. Quello che però è importante ricordare nell'ottica di questo lavoro è che, per la diffusione della matematica araba, continuò a essere utilizzato il linguaggio dell'algebra retorica. I progressi dal punto di vista del linguaggio matematico iniziarono in maniera isolata e non sistematica intorno al XIII secolo, come testimoniano le opere di matematici come Giordano Numerario (morto nel 1237), Fibonacci e Nicola d'Oresme (1323 circa - 1382).

È opportuno ricordare che, come ogni fenomeno di vasta portata, anche il cambiamento del linguaggio matematico è stato graduale e non uniforme: è la bibliografia di frate Luca Pacioli (1445 – 1517) a darcene una testimonianza. Mentre la notazione tradizionale caratterizza infatti la prima opera a stampa di Luca Pacioli, la *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita* pubblicata nel 1494, si assiste a un netto progresso con la sua traduzione in volgare del *Libellus de quinque corporibus regularibus* di Piero della Francesca, che fa parte della prima edizione a stampa del *De Divina Proportione*, pubblicata a Venezia nel 1509. Davanti al seguente problema, «*Ancora li quatro lati d'uno quadrato equilatero sono equali a* $\frac{2}{9}$ *de la sua superficie, de la quantità de lati se cerca*", Pacioli propone questa soluzione: "*Tu ài* $\frac{2}{9}$ *de censo equali a 4* ◈, *reduci a 1* ▣*; arai 1*▣ *equale a 18* ◈*, parti 18* ◈ *per 1 ne vene 18, tanto vale la cosa ch'è uno lato del quadrato. Multiplicalo in sé fa 324 et li* $\frac{2}{9}$ *de 324 è 72 et li quatro lati, che ciascuno è 18, di' 4 via 18 fa 72 ch'è li* $\frac{2}{9}$ *de 324*»[5].



Casus 18 [XIX]

Ancora li quatro lati d'uno quadrato equilatero sono equali a 2/9 de la sua superficie, de la quantità de lati se cerca.

Tu ài 2/9 de censo equali a 4 ◈, reduci a 1 ▣, arai 1 ▣ equale a 18 ◈, parti 18 ◈ per 1 ne vene 18, tanto vale la cosa ch'è uno ‖ lato del quadrato. Multiplicalo in sé fa 324 et li 2/9 de 324 è 72 et li quatro lati, che ciascuno è 18, di' 4 via 18 fa 72 ch'è li 2/9 de 324.

Di questo scritto è particolarmente interessante l'utilizzo dei simboli ◈ e ▣, che stanno rispettivamente per l'incognita e il quadrato dell'incognita. In campo aritmetico, inoltre, Pacioli usa *p* per indicare l'addizione (dove della Francesca utilizzava invece *additus*, *et*, *plus*) e *m* per indicare la sottrazione (al posto delle varie espressioni *ablatus*, *ammissiis*, *deductus*, *demptus*,

[5] La sbarretta orizzontale nelle frazioni che vediamo nel testo originale era usata regolarmente da Fibonacci (ed era nota nel mondo arabo prima di lui), ma fu solo nel XVI secolo che entrò nell'uso generale. (La sbarretta inclinata fu suggerita nel 1845 dal matematico inglese A. De Morgan). (Boyle, 1968)

demìnutus, detractus, minus, remotus), mostrando in modo evidente come il fissarsi di sigle e simboli sia funzionale non solo alla sinteticità del linguaggio matematico, ma abbia un ruolo decisivo anche nei riguardi dell'univocità degli elementi lessicali.

In altri scritti del matematico troviamo diciture come «*Trouame 1.n° che gioto al suo qdrat° facia. 12*»[6], in cui osserviamo l'introduzione di abbreviazioni lessicali e non sostituzioni simboliche per indicare la variabile e il suo quadrato.

Ciò evidenzia come il periodo che va dalla seconda metà del Quattrocento a metà del Cinquecento fu un periodo di svolta per il linguaggio matematico, in cui convissero algebra retorica e sincopata non solo nell'uso dei matematici, ma nelle opere di uno stesso autore.

1.1.3 Storia moderna e contemporanea

Anche Girolamo Cardano (1501-1576), algebrista di grande fama, usava in parte una notazione algebrica sincopata, come ad esempio: «*Qdratu aeqtur 4 rebus p: 32*», che rappresentava l'equazione modernamente scritta con $x^2 = 4x + 32$, anche se era ancora molto legato all'algebra allo stadio retorico.

Rafael Bombelli, di poco successivo rispetto a Cardano, mostra un lessico di abbreviazioni discretamente nutrito:

- Le operazioni di addizione e sottrazione sono indicate con le lettere *p* e *m*;
- Se una radice non è applicata a un numero di potenza corrispondente, questa quantità assume il nome di quantità *sorda* o *indiscreta*;
- Un qualsiasi numero elevato a una potenza superiore al grado tre assumeva nomi specifici, fino al grado settimo: la quarta potenza aveva il nome di *quadroquadrato,* la quinta di *primo relato*, la sesta di *quadrocubico* e la settima di *secondo relato*;
- La radice quadrata viene abbreviata in R.q., quella cubica in R.c.;
- Quella che oggi identifichiamo come la radice quadrata del numero complesso $z = a + ib$, cioè $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$ assume il nome di *radici cubiche legate*;
- L'incognita (definita *tanto*) elevata a potenza era segnalata con un piccolo semicerchio concavo all'insù, entro il quale veniva riportato l'esponente;

[6] Letteralmente, dal volgare, "trovami un numero che sommato al suo quadrato faccia 12", in linguaggio algebrico moderno $x + x^2 = 12$.

- Il numero immaginario $+\sqrt{-1}$ viene chiamato *più di meno*;
- I numeri immaginari generici erano fino a qui rappresentati come radicali, ad esempio come $R(0.m.1) = \sqrt{-1}$.

Alcuni algebristi italiani del Rinascimento usavano inoltre le lettere per indicare sia le incognite che le operazioni da svolgere, ad esempio *12LmIQp48 aequalia 144m24LpIQ*, in cui *L* sta per l'incognita, *m* per meno, *IQ* per incognita al quadrato e *p* per prodotto, cioè, modernamente, $12x - x^2 + 48 = 144 - 24x + x^2$. In seguito, per l'addizione si consolidò la sostituzione degli ingombranti "et" e simili con la lettera *p* o con il simbolo di crescita "&", che poi venne rappresentato col "+", segno della croce, ovvero della crescita dovuta all'avvento della religione cristiana. La sottrazione iniziò a esser rappresentata dal segno "minus" ovvero il nostro -, simbolo che derivò dall'uso di porre una linea nelle forme contratte ("mancante" e quindi "sottrarre").

Un importante contributo al progresso dell'algebra verso il simbolismo attuale fu quello di Michael Stifel (1487 – 1567), che viene ricordato per aver introdotto l'uso dei simboli + e - al posto della notazione *p* e *m* nella sua *Arithmetica integra*, edita nel 1544. L'opera ci conferma anche la resistenza che i matematici ancora facevano verso i numeri negativi, che vengono chiamati "*numeri absurdi*".

Colui che rivoluzionò però il linguaggio matematico fu *François Viète* (1540-1603): il suo merito principale è stato quello di aver rinnovato l'algebra introducendo coefficienti numerici, rendendo concreto il passaggio da algebra sincopata ad *algebra simbolica*. La prima notazione algebrica sistematica compare, infatti, nella sua opera *In artem analyticam isagoge*, pubblicata a Tours nel 1591. Egli basa la sua trattazione sui lavori dei matematici italiani (Cardano, Tartaglia, Bombelli) e su quelli dei matematici greci dell'antichità. Viète introduce la tradizione di usare le lettere per rappresentare le incognite: suggerisce di usare lettere come simboli sia per le quantità note (consonanti) che per quelle incognite (vocali). Ad esempio, l'equazione $A^2 + AB = D^2$ equivale nella moderna notazione a $x^2 + bx = d^2$.

Un importante sviluppo della matematica si ebbe quando il filosofo e matematico francese René Descartes, (1596 – 1650), conosciuto come Cartesio in Italia, applicò l'algebra alla geometria, dando luogo a quella particolare disciplina che è la geometria analitica, facendo corrispondere le equazioni algebriche e le proprietà delle figure geometriche. Ne *La Geometria*, Cartesio perfezionò il simbolismo algebrico con l'uso degli esponenti, delle parentesi graffe, delle lettere x, y e z per indicare le variabili e la notazione $\frac{dy}{dx}$ per la derivata prima e ddy per il differenziale secondo.

Da quel momento in poi diversi simboli moderni furono introdotti in maniera spontanea e disomogenea da un punto di vista geografico e temporale:

- Il segno “=” fu introdotto nel 1557 da Robert Recorde, medico e matematico gallese. Il segno “=” stava a significare che due rette parallele complanari non si sarebbero mai incontrate; quindi, erano perfettamente identiche e perciò esprimevano il concetto di uguaglianza.
- I simboli “>” e “<” per esprimere “maggiore di ” e “minore di” fecero la loro prima comparsa in un libro scritto da Thomas Harriot, matematico inglese, e pubblicato nel 1631, dieci anni dopo la sua morte; questa notazione è però attribuita all’editore.
- A William Oughtred si attribuisce la crocetta “×” per indicare la moltiplicazione, comparsa nella sua opera, *Clavis mathematicae*, edita nel 1631;
- John Wallis contribuì allo sviluppo dell’analisi ed è noto per aver introdotto il simbolo “∞” per l’infinito.
- I numeri con la virgola furono introdotti in Europa da Simon Stevin nel 1585, quasi 400 anni dopo l’introduzione delle cifre indo-arabe;
- Il termine “trigonometria” si deve al matematico tedesco B. Pitiscus, che nel 1595 scrisse un trattato sulla misura degli archi e degli angoli dei triangoli.

Col passare del tempo, l’uso della stessa simbologia matematica fu necessario come strumento di comunicazione internazionale. La creazione del simbolismo e delle nuove metodologie del calcolo infinitesimale di Newton (1643 - 1727) e Leibniz (1646 – 1716) favorirono l’approfondimento (da parte principalmente dei fratelli Bernoulli e di Laplace) del calcolo della probabilità (introdotto da Pascal e Fermat) e la sua applicazione alla demografia ed alle assicurazioni.

Il dibattito tra Newton e Leibniz per la paternità del calcolo infinitesimale avvenuto a cavallo del XVIII secolo portò i matematici europei a schierarsi con uno dei due, adottando quindi il suo sistema simbolico. Alla lunga fu la notazione di Leibniz ad avere la meglio, anche grazie al carattere meno chiuso e indipendente di Leibniz, che condivideva volentieri le proprie scoperte e il proprio sapere con i propri allievi, al contrario di Newton. Le notazioni differenziali di Leibniz furono essenziali per gli sviluppi successivi ($\int$, dx, dy), e sono quelle che utilizziamo tuttora.

Eulero (1707-1783) inventò simboli tuttora usati per la concisione e la potenza della comunicazione algoritmica che sottendono. Si entrò così nel sistema notazionale moderno, con al centro il calcolo infinitesimale e l'analisi geometrica, che consentono di operare in tutti i campi del sapere. Alcune notazioni erano nuove, altre sostituirono i simboli preesistenti. Eulero indicò la notazione "e" alla base dei logaritmi neperiani ed introdusse il simbolo "f(x)" per la funzione, l'attuale notazione per le funzioni trigonometriche come seno e coseno, e la lettera greca Σ per la sommatoria e la lettera i per indicare l'unità immaginaria e rese solida e diffusa la notazione $\frac{dy}{dx}$ e Δ per le derivate parziali e, rispettivamente, per gli incrementi delle funzioni. Il simbolo π di pi greco (nel significato matematico moderno) è stato introdotto da William Jones nel 1706, nel libro *Synopsis Palmariorum Mathesios*, ma fu solo con il suo utilizzo da parte di Eulero che se ne diffuse e consolidò l'uso.

Dopo questo periodo, si fece strada anche la logica: Peano creò un linguaggio formalizzato, in grado di esprimere la logica ed i risultati più importanti delle scienze matematiche (il suo formulario risale al 1894). Questo simbolismo è usato tuttora ($\in$, $\subseteq$, $\cap$, $\cup$, $\dots$).

Un ulteriore contributo terminologico arrivò da Augustin Louis Cauchy, che nel 1821 pubblica il *Cours d'analyse*, da molti considerato come un manifesto della moderna analisi; in quest'opera viene stabilita la terminologia di *limite, infinitesimo, funzione continua, integrali e funzioni primitive, integrale definito, derivata* (con la relativa simbologia).

A questo punto, il linguaggio matematico si consolidò in uno standard abbastanza simile per tutti i matematici, il lessico e la simbologia si ampliarono di pari passo con l'introduzione di nuovi concetti in ambito teorico.

1.2 Quadro teorico di analisi del linguaggio matematico: la Systemic Functional Linguistics

La Linguistica Funzionale Sistemica (Systemic Functional Linguistics, SFL) è l'approccio con cui di recente si è cominciato a studiare il linguaggio matematico: è stata introdotta da Michael Halliday, linguista inglese, nell'opera edita nel 1985 *An Introduction to Functional Grammar*. In particolare, tale approccio nasce dal disaccordo che Halliday provava riguardo alcune credenze associate al linguaggio, tramandate dalla tradizione linguistica. Infatti, al contrario di quanto sosteneva la linguistica fino a quel momento, Halliday afferma che il linguaggio, «non può essere considerato come l'insieme di tutte le frasi dotate di senso grammaticale, a prescindere dal fatto che tale insieme sia finito o infinito»: l'autore rifiuta infatti l'utilizzo della logica formale nelle teorie linguistiche, perché ritenuto non solo irrilevante per la comprensione del linguaggio, ma addirittura disastroso per la linguistica. Halliday è stato molto critico nello specifico anche nei confronti di Chomsky, accusandolo di aver creato problemi "immaginari" o reso problematiche questioni che non lo erano, introducendo alcune dicotomie come ad esempio sintassi/semantica, grammatica/lessico, *linguaggio*/*pensiero*. La problematicità di queste dicotomie, afferma l'autore, risiede nel fatto che una volta che queste dicotomie sono state inserite nell'immaginario collettivo si cerca costantemente di individuare e mantenere questa linea di confine, in modo da tenere separati i due concetti.

Alla luce di questa rottura con la tradizione linguistica del suo tempo, Halliday costruisce un modello linguistico che fa affidamento sulla teoria semiologica del sintagma e del paradigma, formulata in origine da Ferdinand De Saussure. Innanzitutto, è importante considerare che il linguaggio viene considerato come un *sistema*, come un tutt'uno i cui elementi si possono correlare sulle due dimensioni sintagmatica e paradigmatica. Nel linguaggio naturale, secondo De Saussure, colui che parla emette un suono, collocando una serie di elementi uno dopo l'altro in una sequenza lineare: questa è la *dimensione sintagmatica*. All'interno del medesimo linguaggio naturale, invece, ogni nuovo elemento viene selezionato da altri elementi correlati (tutti i nomi formano un insieme, tutti i sinonimi di una parola formano un altro insieme) e questa è la *dimensione paradigmatica*. In altre parole, il parlante o lo scrivente sceglie elementi linguistici che stabiliscono un rapporto associativo, quindi scegli nell'insieme degli articoli/sostantivi/verbi quelli che meglio si adattano al suo scopo comunicativo, termini che poi vengono disposti sull'asse sintagmatico in una sequenza condizionata dalle scelte operate. In questo contesto, la SFL assume come punto di partenza un'ottica *paradigmatica*: di conseguenza, in quest'ottica ogni atto comunicativo implica una scelta.

Un'altra caratteristica che Halliday ha individuato durante i suoi studi è la natura del linguaggio come *sistema semiotico sociale*: la branca della semiotica sociale si occupa di studiare il fenomeno dell'attribuzione di significato, puntando a spiegare il processo di "costruzione del senso" come una pratica sociale umana che muta al variare del contesto e del tipo di interazione tra individui. Questa natura ben si sposa con l'ottica paradigmatica del linguaggio della quale abbiamo appena parlato, in quanto l'atto comunicativo è sì frutto di una scelta, che è una scelta che si deve adattare al contesto in cui chi parla (o scrive) si trova e al destinatario del testo.

Negli anni l'autore ha inoltre elaborato una serie di principi che sono emersi nell'affrontare i problemi legati al linguaggio nei contesti più diversi: è proprio a partire da questi principi che ha elaborato poi tutta la teoria che descrive il linguaggio umano nella sua complessità. I cinque principi sono:

1. Viene formalizzata la *dimensione paradigmatica*, che abbiamo visto in precedenza: ciò significa che il linguaggio è organizzato tramite una fitta rete di scelte correlate tra loro.;
2. Si introduce una *dimensione stratificata* del linguaggio, cioè la sua caratteristica di poter essere ordinato attraverso i suoi stessi termini come una rete puramente astratta di relazioni, che quindi pone il linguaggio come un sistema apparentemente infinito per costruire significati;
3. Il linguaggio ha anche una *dimensione metafunzionale*: si è cioè evoluto principalmente sotto la spinta delle funzioni che deve assolvere; ogni particolare scopo, infatti, influenza la struttura e l'organizzazione del linguaggio in modi diversi. Proprio l'organizzazione del framework attorno al linguaggio per la SFL si chiama metafunzione, e l'autore ne individua quattro:

    a. *Metafunzione ideazionale*, per cui le frasi hanno uno scopo rappresentativo: in questo caso il linguaggio è usato per descrivere esperienze sia vissute fisicamente sia frutto di processi mentali. La struttura delle frasi è principalmente proposizionale e si riscontra uno scarso focus sui partecipanti della conversazione e sui suoi scopi; le frasi sono generalmente strutturate in termini di processi, eventi e partecipanti (rispondendo alle classiche domande "chi?", "dove?", "come?", "quando?");

    b. *Metafunzione interpersonale,* che si utilizza per i contesti relazionali, in cui il linguaggio è il mezzo per entrare in contatto o mantenere tale contatto con un'altra persona, per influenzarne il comportamento o convincerla del nostro punto di vista. La struttura in questo caso non è più focalizzata solo sul contenuto del testo, ma anche sull'esprimere la soggettività del parlante (o dello scrivente) attraverso o forme verbali e lessicali ("mi domando se", "sono sicuro che "ovviamente", "forse") o, nel caso di una conversazione in presenza fisica, attraverso il linguaggio del corpo, o ancora, nella comunicazione scritta attraverso mezzi non lessicali come il grassetto, la sottolineatura, la punteggiatura e le recenti emoticon;

c. *Metafunzione testuale*, utilizzata per organizzare ciò che si vuole comunicare in relazione al contesto degli altri interlocutori e del contesto più generale in cui ci si muove. Questa funzione dà al testo la struttura forse più peculiare: infatti, si divide la frase in due parti, tema e rema. Il primo è il punto di partenza del messaggio, la prima parte, che serve per far capire all'interlocutore qual è l'argomento di cui si intende parlare, mentre il secondo fornisce elementi aggiuntivi che costituiscono il focus dello scambio, attestandone la rilevanza rispetto al contesto;

d. *Metafunzione logica*, identificabile solo nelle frasi più complesse, serve essenzialmente per strutturare le relazioni tra le frasi semplici che compongono il testo.

4. Assume importanza anche la *dimensione sintagmatica*: possiamo osservare il linguaggio anche da un punto di vista sintagmatico, in quanto struttura che si estende nel tempo (nel caso sia parlato) o nello spazio (nel caso sia scritto). Questo tipo di modifica strutturale coinvolge diversi livelli del sistema del linguaggio, che spaziano dal livello più piccolo del morfema a quello più vasto della preposizione;

5. In ultimo, consideriamo anche la *dimensione di istanziazione* del linguaggio. Per istanziazione si intende "l'esemplificazione di un fenomeno con un caso concreto molto specifico", ed è la relazione tra un'istanza e il sistema che ha alle spalle: è una relazione formale tra potenziale e attuale. La linguistica funzionale prevede una relazione molto stretta di continuo feedback tra istanza e sistema: di conseguenza, fare uso del sistema implica la possibilità di un cambiamento del sistema.

Un'ulteriore caratteristica che riguarda la funzione del testo è la *coesione*, cioè la qualità per cui un insieme di parole e frasi è riconosciuto come un testo e non come un agglomerato di parti sconnesse. I linguisti funzionalisti ci ricordano che la coesione è molto diversa dalla coerenza: la prima è un fenomeno *linguistico* che afferisce alla sfera testuale, mentre la seconda è invece un fenomeno mentale che non può essere valutato oggettivamente e facilmente come la coesione. Un testo coerente può non essere coeso nel caso in cui i legami tra le affermazioni anche se esistono manticamente non sono resi espliciti con strumenti linguistici. Esistono diversi metodi per creare coesione all'interno di un testo:

- Attraverso *riferimenti* espliciti, che si attuano con pronomi personali (lei/lui, tu, noi, …), dimostrativi (quello, questo, nello, …) o comparativi (più, meno, ugualmente, …);
- Utilizzando *ellissi*: l'ellissi è l'omissione, in una frase, di un elemento sintattico che è noto o facilmente desumibile dal contesto oppure perché ipotizzabile in una versione completa della frase o dell'enunciato. Per la coesione il significato può essere appunto omesso, ma anche sostituito, come ad esempio in «a te non importa, ma a me sì»: in questo caso, "sì" sostituisce il verbo "importa";
- Inserendo *congiunzioni*, che stabiliscono legami tra significati diversi espressi in frasi diverse. Il loro utilizzo non è equivalente ai due precedenti, considerando che si basano su ripetizioni di uno stesso concetto, mentre le congiunzioni collegano frasi diverse evidenziando anche la natura dei nessi tra le proposizioni;
- Infine, attraverso la scelta del *lessico*, che avviene per ripetizione o attraverso la sostituzione con un sinonimo, un iponimo, un iperonimo o un antonimo.

La linguistica funzionale sfrutta anche il concetto di *contesto* in cui un testo è prodotto e interpretato per approfondire la sua analisi: i testi non possono infatti esser elaborati indipendentemente dal contesto, né il contesto non può non risentire della loro influenza. Si distinguono diversi tipi di contesto: quello *di situazione*, relativo a fattori come il tempo, lo spazio, i partecipanti allo scambio, quello *di testo*, relativo alle altre parti del testo o a testi correlati, e infine quello *di cultura*, relativo appunto al retroterra di convinzioni e conoscenze pregresse proprie dei partecipanti allo scambio.

Nel momento in cui varia il contesto in cui si scrive o si parla, è necessario quindi adattare a costruzione del nostro testo in base a questo cambiamento: è qui che entra in gioco il concetto di *registro*. La linguistica funzionale definisce "registro" la costruzione che collega i testi ai contesti, ma in generale possiamo pensare ai registri come a varianti linguistiche determinate dall'uso che ne fa un individuo, che si forma per selezione delle risorse linguistiche disponibili a un soggetto. Questa selezione non determina però totalmente la natura del registro, anzi, questa è strettamente legata al testo, al sistema linguistico e al sistema sociale. È importante evidenziare che quest'accezione di registro differisce da quella di Raymond Duval, padre del concetto di rappresentazione semiotica e registro semiotico, per cui un registro è un sistema semiotico di rappresentazione. Come riporta Ferrari (2021), quest'idea di registro è collegata con quella di *genere*, dovuta a Bachtin (1986), con la differenza che il primo è legato alle risorse linguistiche, mentre il secondo è determinato dalle situazioni comunicative: a uno stesso genere potrebbero corrispondere diversi registri.

Il discorso sui registri ha offerto ai linguisti un ampio spazio di ricerca: per i nostri scopi, riportiamo la loro classificazione in registri *evoluti* e *colloquiali*. Le differenze tra i due registri si declinano in termini di *intento* (si usa il registro colloquiale quando non ci sono contenuti specialistici da comunicare), *comunanza di retroterra* (nei registri evoluti non si avverte la necessità di conoscere i partecipanti, né le dinamiche in cui si inseriscono, o altre particolari informazioni), *necessità di conoscenza lessicale* o *accurata costruzione sintattica*, possibilità di *negoziazione dei significati* (molto alta nel caso del registro colloquiale, mentre estremamente bassa nel caso dei registri evoluti), *natura dei messaggi condivisi* (in una conversazione in cui si usa il registro colloquiale, non devono essere esaustivi o accurati, data l'ampia possibilità di replica, negoziazione e correzione dei testi, assente per le situazioni in cui è necessario un registro evoluto). La distinzione che abbiamo fatto chiaramente all'atto pratico diventa più sfumata, considerando che non è difficile pensare a testi che abbiano alcune proprietà di uno e dell'altro registro.

Esistono situazioni, oltre quelle in cui si vogliano comunicare contenuti tecnici, in cui è necessario costruire un testo in modo che non sia "situazionale", cioè dipendente dal contesto in cui chi lo legge o lo riceve si trova, o dalla sua familiarità con l'autore: è questo il caso in cui sono utilizzati i registri evoluti, e ne troviamo ampio uso nella comunicazione scientifica, politica, giuridica e letteraria, ma anche nella narrativa generica.

La distinzione tra questi registri assume rilevanza per la ricerca sull'apprendimento matematico, visto che i registri normalmente utilizzati per la comunicazione matematica sono forme molto estreme di registri evoluti. La rilevanza di quest'affermazione potrebbe non sembrare, in prima battuta, così cruciale, ma lo è, perché va a contrastare lo stereotipo di cui abbiamo già parlato, secondo cui il linguaggio matematico e quello ordinario siano fermamente contrapposti. Al contrario, invece, quest'informazione implica che la capacità di padroneggiare il linguaggio matematico si possa costruire attraverso un uso sempre più esperto del linguaggio quotidiano, invece che attraverso l'introduzione sempre più precoce del formalismo matematico.

L'uso del registro evoluto in matematica è, come detto, molto diffuso, ma non si deve credere che sia l'unico registro di cui è consigliabile l'utilizzo: nel caso in cui, infatti, si stia comunicando in maniera informale o si abbiano davanti studenti ai primi stadi dell'apprendimento, il registro colloquiale è quello più indicato. Infatti, chi si approccia a un nuovo concetto ha bisogno di strumenti linguistici flessibili e poco impegnativi da gestire: la correttezza e l'univocità del testo passano in secondo piano rispetto alla possibilità di negoziare e ridefinire il messaggio.

1.3 Problema del linguaggio

La didattica della matematica è una disciplina relativamente giovane, se confrontata alla lontana origine della matematica che abbiamo visto nel paragrafo precedente. Trova infatti i suoi natali tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento: in particolare, nel 1920 inizia la riflessione sistematica sulla didattica della matematica (nel 1930 escono le prime riviste a tema) con il National Council of Teacher of Mathematics. Nel contesto italiano, anticiparono i tempi personalità come Luigi Cremona che nella prefazione ai suoi "Elementi di Geometria Proiettiva" (1837) afferma che «*bisognerà che gli scolari facciano deduzioni e soluzioni da sé: non si costringano alla sola parte passiva dello ascoltare e ripetere le cose dette dal maestro, ma si facciano concorrere attivamente allo svolgimento di cose nuove*». Possiamo citare anche Federigo Enriques, Francesco Saveri («*all'inizio l'insegnamento della matematica deve essere intuitivo e dettato dalla curiosità*») e Beppo Levi («*se un alunno mi ripete una dimostrazione troppo bene, io sento il dovere di disturbarlo: egli conosce bene una strada maestra; occorre cacciarlo nei rati perché impari a ritrovare la strada o il viottolo, non importa*», 1908).

Il primo approccio in assoluto delle teorie sull'insegnamento e apprendimento della matematica era abbastanza ingenuo: se una spiegazione è ben fatta, l'apprendimento è garantito. Possiamo perciò parlare di *modello di senso comune*: la conoscenza matematica è un insieme di oggetti, la mente è un contenitore e la conoscenza viene trasmessa agli studenti attraverso un apprendimento meccanico, con un insegnante che insegna tutto a tutti, senza distinguere gli studenti a seconda delle loro necessità. Il ruolo del linguaggio in questo contesto è legato al momento della spiegazione di un concetto.

Il *comportamentismo* è la prima macro-teoria strutturata sull'apprendimento, sviluppata dallo psicologo John Watson agli inizi del Novecento. È basato sull'assunto che solo il comportamento manifesto dell'individuo possa essere oggetto di studi scientifici, in quanto direttamente osservabile; si elide a priori, infatti, il costrutto teorico di mente, proprio perché non osservabile dall'esterno. L'unità di misura del comportamento viene quindi individuata nel *riflesso,* inteso come nesso tra stimolo e risposta. Si crede inoltre che i bambini nascano senza doti innate: sarà solo l'esperienza a caratterizzare la loro formazione. L'uomo è quindi concepito come il prodotto delle sue esperienze, attraverso le quali acquisisce un repertorio di comportamenti (motori, verbali, sociali…) che costruiranno la sua personalità. Per Watson anche il *linguaggio*, focus del presente lavoro, viene acquisito per *condizionamento* (positivo o negativo): il bambino sente associare a un oggetto un nome e il nome finisce per evocare la stessa risposta evocata dall'oggetto. Il linguaggio, come qualunque altra forma di apprendimento, è quindi il risultato di comportamenti rinforzati da un certo tipo di ricompensa. Per essere più specifici, secondo questa corrente l'uomo condivide la capacità di apprendere con gli animali: perciò si studia il comportamento di animali più semplici per capire quello degli umani. Non a caso, sono passati alla storia i celebri esperimenti di Pavlov sul condizionamento dei cani.

I principali teorici comportamentisti sono: Ivan Pavlov (fisiologo, esponente del condizionamento classico), Burrhus Skinner e Edward Lee Thorndike (esponente del condizionamento operante), John Locke (filosofo, padre dell'empirismo moderno e dell'illuminismo critico), e appunto John Watson (caposcuola del comportamentismo americano, principale assertore della psicologia comportamentista).

Avendo controllo su materiali e comportamenti, il modello di insegnamento comportamentista consisteva nel preparare ottimi materiali e farli fruire passivamente allo studente: tale modello venne però presto sostituito anche a causa del fallimento di diversi ambiziosi progetti di insegnamento, come per esempio quello ideato dal Physical Science Study Committee (PSSC), comitato scientifico del Massachusetts Institute of Technology (MIT). A partire da metà degli anni Cinquanta del Novecento venne incaricato di creare una serie di lezioni per incrementare la popolazione americana competente in Fisica, nel contesto di una sempre più frenetica corsa allo spazio che vedeva gli Stati Uniti gareggiare contro l'URSS nella conquista del primato sullo sbarco sulla Luna. I risultati, come detto, furono modesti anche perché il solo impegno del comitato era stato quello di creare i materiali e le attività, ignorando le meccaniche di apprendimento degli studenti e omologando lo stile di ogni docente a quello previsto dall'attività. La corrente comportamentista ignorava fra l'altro il ruolo cruciale della *comunicazione* in questo processo di 'trasferimento' di informazioni tramite i ben noti materiali didattici: vigeva una fiducia ingenua nel linguaggio e nella sua efficacia, in particolare nel campo dell'insegnamento della matematica, la disciplina che sembrava vantare più di ogni altra un linguaggio specifico, rigoroso e non ambiguo.

Oggi questa teoria è *quasi* superata, nel senso che anche oggi si ritiene necessario l'"addestramento" meccanico come quello concepito dagli esponenti del comportamentismo nell'ambito dell'apprendimento, nell'ottica però di un semplice allenamento alla tecnica e non come spiegazione totale di tutta la disciplina. Nel caso della matematica, infatti, è necessario che gli studenti allenino "l'occhio" per automatizzare certi meccanismi, affinché non siano di ostacolo quando ragionano per risolvere e problemi molto complessi: tale pratica non deve però essere l'unica modalità di insegnamento. Il senso è quindi quello di rendere alcuni processi automatici, in modo che lo studente riesca a guardare oltre quei meccanismi.

Il comportamentismo viene superato dal nuovo modello *cognitivista* (nato tra gli anni '40 e '50, sviluppo nei '60) di elaborazione dell'informazione, che si poggia su assunti molto diversi rispetto alla precedente corrente. In primo luogo, la mente assume un ruolo centrale, in quanto responsabile della trasformazione delle informazioni in entrata. Il focus si sposta verso i processi cognitivi attraverso i quali un organismo acquisisce ed elabora informazioni dall'ambiente, ed esercita su di esse un controllo. Il principale oggetto di studio diventa quindi la mente, vista come sistema di regole, calcolatore indipendente da fattori biologici, sociali, emozionali. Si studia la capacità di replica della mente come fosse letteralmente un calcolatore. Il cognitivismo pone al centro del suo interesse il soggetto attivo che opera nel mondo sviluppando le proprie capacità mentali. Rispetto al comportamentismo, l'approccio cognitivista non si limita all'apprendimento di processi riproduttivi, ma è interessato a studiare anche i processi produttivi. Viene studiato ed elaborato il *problem solving* come strategia efficace di apprendimento e come una delle attività caratterizzanti l'essere umano, e in particolare del fare matematica. Confluirono nel cognitivismo i contributi di discipline diverse: la linguistica, la teoria dell'informazione, la cibernetica, le neuroscienze, la filosofia della mente.

Afferiscono al cognitivismo diversi studiosi, tra cui ricordiamo: Jean Piaget (1896-1980), Jerome Bruner (1915-2016), Lev Semenovic Vygotskij (1896-1934), David Ausubel (1918-2008), Joseph Novak (1933) e Bob Gowin (1926). Gli ultimi tre fornirono un contributo che riconosciamo essere a cavallo tra il cognitivismo e il costruttivismo.

Di questi autori vedremo solo i contributi nei confronti del linguaggio, argomento di questa tesi.

Per Jean Piaget (1896-1980) l'acquisizione di conoscenze non è addizione cumulativa, ma riorganizzazione continua di conoscenze anteriori, quando elementi nuovi si vengono ad aggiungere a questi. L'adattamento avviene per assimilazione e accomodamento: la prima è un'*integrazione* di dati dell'esperienza in strutture preesistenti, senza che queste vengano modificate, mentre l'*accomodamento*, al contrario, è una modificazione di quegli schemi in base a dati nuovi. Per Piaget, lo sviluppo cognitivo del bambino è diviso in vari stadi sequenziali l'uno all'altro e questo sviluppo sequenziale non è importante solo per il pensiero, ma anche per il linguaggio che si sviluppa in conseguenza al pensiero. Il bambino, infatti, tramite questi meccanismi di assimilazione e accomodamento svilupperà il pensiero e di conseguenza riuscirà a sviluppare anche il linguaggio: per Piaget, quindi, lo sviluppo del linguaggio è *conseguente* allo sviluppo del pensiero.

Il bambino, in questo modello, sviluppa la capacità rappresentazionale nella prima infanzia e durante lo stadio *senso motorio* (fino ai due anni di vita) possiede degli schemi molto semplici che gli fanno percepire il mondo esterno e rispondere in maniera riflessa agli stimoli percettivi. Dai 18 mesi ai 7 anni (fase *preoperatoria*) invece si consolidano degli schemi molto più complessi che sono un'evoluzione degli schemi precedenti e che permetteranno al bambino lo sviluppo di rappresentazioni mentali degli oggetti percepiti e di conseguenza anche lo sviluppo del linguaggio. In questa fase della sua vita, secondo Piaget, il linguaggio è prettamente *egocentrico*: il bambino non ha infatti cognizione che al di là del suo punto di vista ne possano esistere altri, per cui non si preoccupa minimamente di adattare il suo linguaggio a quelle che possono essere le esigenze degli interlocutori con i quali si viene a trovare. Nella seconda infanzia, che corrisponde alla fase *operatoria concreta*, che va dai 7 agli 11 anni, il pensiero rimane sempre agganciato alla concretezza, ma diventa meno egocentrico: in questa fase difficilmente il bambino riesce ancora a svincolarsi dal suo punto di vista e a guardare gli altri punti di vista, però il linguaggio diventa più socializzato. Dai 12 anni in su, con lo stadio *logico astratto*, anche il pensiero diventerà ipotetico deduttivo e astratto e il linguaggio sarà più evoluto.

Lev Semenovic Vygotskij (1896-1934), al contrario di Piaget, attribuisce grande importanza all'aspetto della socialità del bambino: per lo psicologo sovietico, infatti, il bambino cresce nell'interazione con gli altri, coetanei e adulti, e questa interazione ha un effetto molto positivo, perché lo aiuta proprio nello sviluppo delle sue capacità mentali. L'analisi che Vygotskij fa del bambino non può essere svincolata dal contesto sociale in cui egli vive.

Vygotskij si interessò in particolare al *linguaggio*, definendolo una funzione psichica fondamentale per il bambino, che si sviluppa, come tutte le capacità mentali, con l'interazione sociale con gli altri. È definito in particolare come una funzione *inter-psichica* che mette in connessione continuamente un bambino con le altre persone. Attraverso l'ambiente esterno, il bambino impara ad interagire con gli altri e a interiorizzare i comportamenti, basandosi proprio sulla comunicazione in un processo di *interazione sociale con l'ambiente* dalla nascita fino al momento in cui muore. Se per Piaget il bambino prima impara a pensare e poi, dopo aver sviluppato queste prime forme di pensiero, avanzando con gli stadi comincia anche a parlare e a imparare il linguaggio, per Vygotskij è esattamente il contrario: il bambino imparerà prima a parlare e poi a pensare. La differenza è che quindi per Piaget il linguaggio è una conseguenza del pensiero, mentre per Vygotskij il linguaggio dà una spinta molto forte alla costruzione dei pensieri e a quei pensieri che da soli non potrebbero nascere se non proprio grazie al linguaggio interiorizzato. Queste due funzioni per Vygotskij sono indipendenti almeno fino ai due anni di vita e poi si fondono insieme, quando il bambino capisce che ogni oggetto ha un nome e si cominciano a usare le parole come simboli.

Inoltre, secondo Vygotskij, intorno ai tre anni di vita il linguaggio interpersonale si divide in due grandi categorie: da una parte il linguaggio comunicativo che rimarrà quello con gli altri e dall'altra il linguaggio egocentrico che invece diventerà il linguaggio con sé stessi. Tale linguaggio egocentrico è quello di cui parla anche Piaget, ma assume un ruolo sostanzialmente diverso nello sviluppo, secondo il pensiero vygotskijano. Essendo il modo con cui inizialmente il bambino parla da solo ad alta voce, il linguaggio egocentrico assume una funzione decisiva, perché aiuta il bambino a guidare il pensiero, ad affrontare i problemi e a pianificare le azioni. Intorno ai 7-8 anni questo linguaggio egocentrico si trasforma nel linguaggio interiore che accompagnerà l'individuo negli anni a venire. La differenza tra gli autori sul linguaggio egocentrico risiede nel fatto che se per Piaget il linguaggio egocentrico è un linguaggio che riflette l'incapacità del bambino di guardare il punto di vista esterno e che poi pian piano crescendo il bambino abbandonerà, per Vygotskij è molto importante perché aiuta il bambino a pianificare le azioni, a risolvere i propri problemi.

Il modello comportamentista, anche grazie alle ricerche di Piaget e Vygotskij, venne ampiamente superato, provocando nel tempo la nascita di una serie di diverse teorie dell'apprendimento: nell'educazione matematica si fa generalmente riferimento al modello *costruttivista*. Secondo tale teoria il bambino che si presenta a scuola, lungi dall'essere un contenitore vuoto da riempire con le conoscenze ritenute opportune, è un soggetto attivo che ha già costruito inconsciamente durante la sua esperienza quotidiana conoscenze e teorie, molte delle quali ingenue. Di conseguenza, l'apprendimento non sarà un semplice "accumulo" di conoscenza, ma consisterà piuttosto nella creazione di collegamenti e relazioni tra le vecchie conoscenze e le nuove. Inoltre, le nuove conoscenze si costruiscono attivamente attraverso l'interazione con l'ambiente: infatti, ogni cosa letta, vista, sentita e percepita viene messa a confronto con la nostra mappa cognitiva preesistente. Di conseguenza, scompare la visione secondo cui l'individuo è una semplice banca-dati che assorbe passivamente l'informazione. La conoscenza non può essere infatti "trasmessa" semplicemente attraverso la lettura o l'ascolto. L'apprendimento, infatti, è particolarmente efficace quando viene costruito e sperimentato anche attraverso gli altri, ed è qui che entra in gioco l'importanza del linguaggio, che permette l'interazione con la società.

1.3.1 Cause principali

Come abbiamo potuto constatare, il linguaggio ha sì ricoperto un certo ruolo all'interno delle macro-teorie sull'apprendimento, ma mai uno centrale, né è mai stato al centro di una riflessione concreta, tanto che ancora all'inizio di questo secolo, Mary J. Schleppegrell (2007) afferma che «*ulteriori ricerche da parte di linguisti applicati ed educatori matematici potranno esplorare le sfide linguistiche dell'apprendimento della matematica nella sua complessità multi-semiotica per fornire maggiore supporto agli insegnanti che vogliano coinvolgere gli studenti in difficoltà*»[7]. Quest'affermazione motiva la sempre crescente ricerca sul linguaggio, che riveste sempre di più un'importanza cruciale in matematica perché si è presa coscienza del fatto che è il mezzo col quale vengono comunicati e *costruiti* i concetti. La funzione del linguaggio nel contesto dell'apprendimento matematico è in realtà duplice: da una parte dev'essere in grado di *rappresentare* correttamente *il sapere matematico*, dall'altra deve *instaurare una comunicazione efficace* tra persone diverse, in contesti specifici. La comunicazione della matematica si trova quindi a mediare tra il linguaggio matematico proprio del sapere accademico e il linguaggio quotidiano (definibile anche come "naturale") che entra in gioco nell'interazione tra esseri umani. La tendenza nei confronti di questa dualità è quella di leggerla in maniera negativa, come una contrapposizione: il linguaggio quotidiano è semplice, comprensibile a tutti ma ambiguo, mentre quello matematico è difficile, padroneggiato da pochi e non ambiguo. Questa posizione di contrapposizione si è estremizzata fino al punto che, come riporta M. A. K. Halliday (2004), qualcuno sia convinto «*che il linguaggio scientifico sia un modo di scrivere superfluo, più o meno rituale, e che la scienza – concetti scientifici e ragionamento scientifico – potrebbe benissimo essere espressa in termini quotidiani, non tecnici*». La posizione del linguista inglese, che ha poi influenzato la ricerca in merito, è che invece la scienza *non possa essere separata* dal proprio linguaggio, ma che anzi ne sia totalmente dipendente, nel senso che non si può separare la scienza da come è scritta; di conseguenza, entrare a contatto con la scienza equivale a confrontarsi col suo linguaggio, e per fare scienza occorre quindi saperne padroneggiare il linguaggio. In conclusione, la difficoltà

[7] «*Further research by applied linguists and mathematics educators can explore the linguistic challanges of mathematics learning in its multi-semiotic complexity to provide more support for teachers who want to engage struggling learners*» (versione originale).

nell’apprendere il linguaggio scientifico non è una difficoltà *aggiuntiva* allo studio delle scienze, ma *intrinseca* alla natura della scienza.

L’apprendimento in matematica, nello specifico, è un fenomeno complesso al quale concorrono moltissimi diversi fattori: un intrinseco fattore concettuale ed epistemologico, lo sviluppo del senso dei numeri, una componente emotiva, fatta di stress e/o motivazione, i diversi stili cognitivi, un fattore mnemonico (per fatti, processi di lavoro, formule) e, infine, il focus del presente lavoro, il linguaggio matematico.

Riguardo al problema che gli studenti hanno nell’acquisire, comprendere e utilizzare il linguaggio matematico, molto è stato scritto e studiato da ricercatori di formazione matematica, pedagogica e linguistica. Citiamo a titolo esemplificativo e ovviamente in maniera non esaustiva Colette Laborde, Hermann Maier, Mary J. Schleppegrell, Michael Halliday, Silvia Sbaragli, Silvia Demartini, Pier Luigi Ferrari, Simone Fornara, Elena Franchini, Bruno D’Amore, Margherita D’Aprile e Cristina Lavinio.

I contributi dei ricercatori in merito hanno evidenziato come le criticità nell’apprendimento e nello sviluppo di competenze di questa disciplina non siano unicamente imputabili a difficoltà *epistemologiche*, cioè proprie della natura della disciplina, ma siano da attribuire anche a componenti *linguistiche*, in modo specifico nell’ambito della risoluzione dei problemi, in cui entrano in gioco molteplici componenti, oltre quelle cognitive, proprie della matematica e no.

In generale, le difficoltà linguistiche degli studenti in matematica possono essere suddivise in:

- comprensione dei *testi verbali*;
- comprensione delle *espressioni simboliche*;
- comprensione delle *figure*.

Ha senso effettuare questa suddivisione per la natura *multimodale* del linguaggio matematico, cioè per la sua possibilità di essere declinato tramite diverse modalità, testuale, simbolica e iconografica. Proprio per questo, il linguaggio matematico può ben adattarsi a usi linguistici molto diversi fra loro, e spesso in contrasto: basti pensare all’uso scolastico che se ne fa, spesso in maniera informale e colloquiale per favorire la costruzione di concetti nuovi, in contrasto alla declinazione più formale e rigida che troviamo nei testi specialistici e anche negli stessi libri scolastici. Le difficoltà sorgono quando non si riesce a far convivere armonicamente questi due aspetti del linguaggio: in particolare in classe, il linguaggio col quale comunicano docenti e studenti nell’ora di matematica è composto di bozze di disegni, schemi, abbozzi di formule e piccole abbreviazioni convenzionali, mentre quello che gli allievi incontrano nel manuale presenta una sintassi rigida che costruisce concetti astratti con figure precise e formule ben scritte. È quindi chiaro che per gli studenti entrare in contatto con entrambi gli aspetti è indispensabile per il corretto apprendimento e rappresentazione di concetti e procedimenti matematici: da una parte, infatti, quello colloquiale permette l'interpretazione di testi che coinvolgono situazioni concrete, mentre padroneggiare quello formale della matematica permette di comprendere e gestire contesti più astratti. Il ruolo del docente è centrale: deve favorire l'armonizzazione tra i due aspetti nel momento della formalizzazione del sapere, una volta che tale sapere è stato acquisito.

Gli errori che coinvolgono la sfera delle competenze linguistiche possono essere comportamenti *rilevabili*, come ad esempio produzione di testi inaccurati, abuso del linguaggio colloquiale, errori di interpretazione di lessico, testi, formule e immagini prodotte in maniera errate o imprecisa, o comportamenti *non rilevabili*, come mancate risposte, risposte a caso o da stress. Le criticità linguistiche sono difficilmente diagnosticabili, soprattutto considerando che parte dei docenti non sembra convinta che il linguaggio possa effettivamente costruire una barriera nei confronti della matematica né un requisito per il suo apprendimento; di conseguenza, non prende in considerazione l'idea che le difficoltà possano non essere cognitive, ma linguistiche. Ferrari e D'Aprile (2003) individuano una forte dipendenza dei futuri insegnanti nell'interpretare gli errori basandosi sui contenuti: questo modello interpretativo è comunque diffusi, riportano gli autori, tra i matematici e i docenti, anche di lunga data, nonostante sia poco funzionale nel portare alla luce le effettive cause degli errori a ogni livello d'istruzione, con l'aggravante di suggerire anche strategie didattiche inadeguate.

La ricerca in merito ha sottolineato in maniera molto chiara che le cause di questi tipi di errori non sono univocamente determinabili, anzi ne esistono diversi tipi, afferenti a diversi ambiti cognitivi e discipline.

In primo luogo, portiamo in evidenza la necessità di una corretta padronanza del *lessico*, matematico e non: possiamo, in primo luogo, distinguere il discorso focalizzandoci su quest'ultimo prima e su quello specialistico poi. Il primo, in particolare, non viene assolutamente considerato come importante all'interno del contesto matematico: Fornara e Sbaragli (2017), ad esempio, evidenziano come la mancanza di un adeguato vocabolario[8] in ambito matematico già nella scuola primaria non viene percepita come un problema. Gli 85

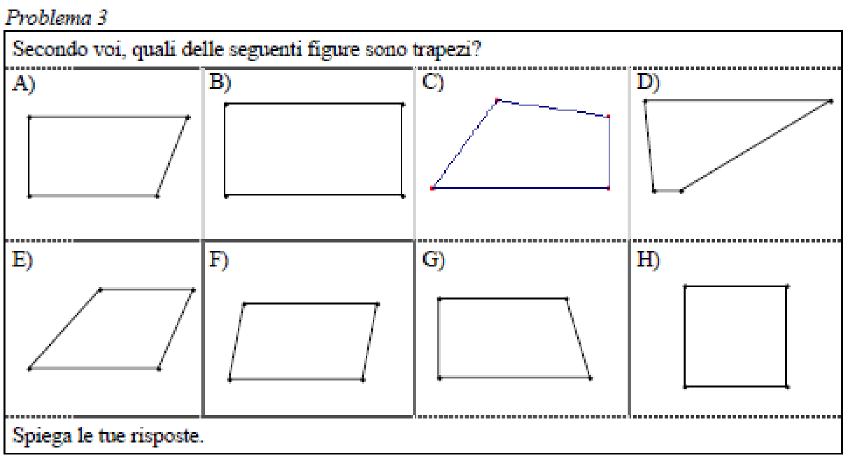
[8] Per "vocabolario" intendiamo una porzione effettiva di lessico limitata all'uso di un individuo, un autore, di una fascia sociale, di una disciplina, … (Ferreri, 2005)

bambini campione di questa ricerca hanno affrontato un problema in due parti, in cui nella seconda comparivano termini come "ovini" e "bovini", che non necessariamente tutti conoscevano. L'intervento didattico è stato quello appunto di spiegare il significato di queste parole ai bambini, provocando un innalzamento significativo della percentuale delle soluzioni corrette (dall'14.1% al 51.8%), ma anche delle soluzioni errate (dal 30.6% al 36.5%), a discapito del problema lasciato in bianco o incompleto (dal 55.3% all'11.7%): gli studenti quindi, in possesso del significato (a volte corretto e a volte no) delle nuove parole, affrontano comunque il problema che prima avevano lasciato in bianco o incompleto. Da qui possiamo estendere la riflessione sul dizionario: se già da bambini si percepisce che il non conoscere dei termini non è un problema al fine della risoluzione di un problema matematico, crescendo quest'abitudine si cementerà, portando avanti un metodo risolutivo dei problemi e in generale consolidando un approccio alla matematica basato su metodi approssimativi e inappropriati.

Dal lato del linguaggio specialistico, come spiegano chiaramente Sbaragli, Franchini e Demartini (2021), appoggiandosi alla classificazione di Monroe e Panchyshyn (1995), citata nel tempo da diversi autori, possiamo classificare le parole del vocabolario matematico in:

- *termini tecnici* (o tecnicismi specifici univoci), cioè parole (come cateto, coseno, …) dal significato univocamente determinato, che al di fuori del contesto matematico non hanno altre accezioni;
- *termini sub-tecnici* (o tecnicismi specifici ambigui), che troviamo in letteratura con il nome di *parole-termini*, sono parole come angolo, punto o figura, che sono invece parole che hanno un impiego tecnico in matematica ma anche nel linguaggio quotidiano, generalmente con sensi differenti;
- *termini generali*, indicano parole o espressioni linguistiche che non sono esclusivamente proprie del linguaggio della disciplina, come *semplificare*;
- *termini simbolici* includono i simboli non alfabetici, come "=", "-", che è importante considerare, visto che è necessario padroneggiarli correttamente per comprendere a pieno la matematica;
- *tecnicismi collaterali* termini tipici di un certo settore non legati a necessità comunicative, ma che sono varianti lessicali determinate dal settore che ne caratterizzano lo stile espressivo (ad esempio *bisecare* in vece di "dividere a metà").

Una difficoltà aggiuntiva legata al lessico risiede nel fatto che una parte dei termini sono inseriti all'interno di una *gerarchia inclusiva*: con questo termine si intende la classificazione di molti enti all'interno di insiemi uno incluso nell'altro. Ad esempio, coppie di parole come equilatero/isoscele, quadrato/rettangolo, razionale/reale, retta/curva o addirittura relazioni come $<$/$\leq$ sono legate dal fatto che le prime sono casi particolari delle seconde. Questo può portare a un problema di *rappresentazione efficiente del sapere matematico*: infatti, nel momento in cui chi parla utilizza uno dei termini a destra nelle coppie, cioè più generici, l'implicazione sottintesa nel discorso è che si stia parlando di un oggetto, di una proprietà, di una relazione, appartenente all'insieme generale privato dell'insieme particolare. A tal proposito Pier Luigi Ferrari (2003), in uno studio che ha condotto sulle conoscenza linguistiche a partire dalla scuola secondaria di primo grado, ha indagato anche questo aspetto. Il seguente è un esercizio sottoposto ai ragazzi in quella sede.



Le risposte, in questo caso, si possono suddividere in due categorie: quelle che fanno riferimento a una definizione verbale (che Ferrari ci dice essere quella del libro di testo, «un trapezio è un quadrilatero avente almeno una coppia di lati paralleli») e quelle che dipendono da stereotipi visuali o linguistici. Il caso che ci interessa è il primo: anche in base ai commenti verbalizzati e alle discussioni successive fra gli alunni, Ferrari ha ipotizzato che gli errori derivassero dall'applicazione di definizioni corrette ma basate sugli usi conversazionali, per i quali la parola "trapezio" non può efficacemente denotare un parallelogramma o un rettangolo, o un quadrato, mentre nel linguaggio matematico questo può accadere.

La problematica non è solo geometrica, né relativa ai gradi più bassi d'istruzione: in D'Aprile e Ferrari (2003) vediamo come i futuri docenti vengano testati proprio su errori di questo tipo, riguardanti la classificazione di radici naturali come reali.

In ultimo, è evidente da diverse ricerche (ad esempio Demartini e Sbaragli (2019a), Fornara e Sbaragli (2017)) che la padronanza di uno studente del vocabolario specifico è un indice attendibile di buone prestazioni matematiche: di conseguenza, una padronanza della lingua non appropriata da un punto di vista sintattico e lessicale non aiuta la costruzione di un sapere tecnico solida e profonda, ipotesi che è condivisa da altri ricercatori.

In conclusione, ignorare la complessità terminologica appena illustrata può influenzare gravemente la comunicazione e l'apprendimento della matematica, ma è altrettanto fondamentale ricordare che è necessario evitare di creare nella mente degli studenti un vocabolario fittizio di soli termini specialistici che non vengono efficacemente messi in connessione con concetti e processi. Così facendo, la lingua smette di essere uno strumento per capire e per comunicare, ma diventa un gergo quasi dialettale, una sorta di "matematichese" che crea l'*illusione* della conoscenza, più dannosa della non conoscenza.

Un altro fattore che contribuisce agli errori linguistici in matematica è l'abuso (quasi sempre involontario) del *principio di cooperazione di Paul Grice*: secondo tale principio, enunciato nel 1975, chiunque partecipi a una conversazione conforma il proprio contributo a quanto è richiesto dall'intento comune o dalla direzione dello scambio verbale intrapresa in quel momento, cioè appunto *coopera* con l'interlocutore.

Si declina in quattro massime: *quantità* ("di' abbastanza, ma non troppo"), *qualità* ("non dire cose false o che non sei sicuro siano vere"), *relazione* ("contribuisci alla conversazione in modo appropriato per ogni suo stadio") e *modo* ("esprimiti in modo chiaro e ordinato"). Questo principio spiega come in linea generale dovrebbero comportarsi dei partecipanti a un dialogo, ma può essere violato, disatteso o contraddetto, con diversi effetti nella comunicazione. In un contesto sociale generico, tali norme sono fondamentali per portare avanti in maniera "normale" una conversazione: per esempio, rispondere alla domanda "sai che ore sono?" con un semplice "sì", senza aggiungere altro, è perfettamente appropriato da un punto di vista logico-matematico, ma se lo si facesse con un conoscente si verrebbe presi per maleducati.

Nelle conversazioni colloquiali, inoltre, è da evitare un eccesso di esplicitazione non richiesto, in quanto viola il principio di quantità; in matematica, invece, argomentare un'affermazione in maniera completa ed esaustiva è generalmente cosa molto gradita all'ascoltatore (ad esempio l'insegnante). Infine, in alcuni casi, in un contesto colloquiale è opportuno rimanere vaghi e lasciare all'interlocutore le conclusioni, per una questione di delicatezza o magari solo di educazione, mentre in matematica si rifugge la vaghezza, anzi, bisogna assicurarsi di essere il più specifici possibile.

Possiamo ulteriormente ampliare il discorso, sulla base di quanto detto: risposte vaghe nei compiti scritti in cui si chiede di argomentare potrebbero essere non un sintomo di mancata conoscenza o incertezza, ma della risposta inconscia alla necessità di partecipare a uno scambio cooperativo in maniera "cortese". Riportiamo per chiarire un esempio di Ferrari (2021): *Lo studente A chiede: «72 è un numero primo?». Una risposta di B come «No. È pari!» sarebbe in molti casi più adeguata rispetto a «No. È pari, e nessun numero pari maggiore di 2 può essere primo»*. Una risposta matematicamente corretta in questo caso avrebbe potuto esser interpretata come una risposta scortese, addirittura saccente, data l'aggiunta della "regola" sui numeri pari. Questa tendenza comunicativa colloquiale potrebbe quindi rimanere agli studenti anche nei compiti scritti o nelle interrogazioni, in cui le risposte vengono date parzialmente nell'ottica di una conversazione cooperativa. È infatti chiaro che lo studente che risponde a una domanda del docente è consapevole che egli ne conosce la risposta, ed è portato ad aspettarsi un certo grado di cooperazione, che a volte può diventare eccessiva. Ad esempio, descrivendo il comportamento di una funzione e parlando di positività o di crescenza, alcuni studenti ne parlano come se fossero proprietà generali e non locali, "dimenticandosi" di specificare gli intervalli di riferimento: magari sono consapevoli della località di queste proprietà, ma aspettandosi cooperazione dal docente, se ne curano meno di quanto dovrebbero, magari anche perché hanno un grafico davanti, *guardano* l'intervallo di riferimento, ma non lo comunicano al docente.

In aggiunta, Grice introduce anche il concetto di *implicatura conversazionale*. Le quattro massime possono anche essere trasgredite spontaneamente, nel qual caso il soggetto parlante tenterà di riportare tale trasgressione all'interno degli schemi del "principio di cooperazione" nel tentativo di suggerire qualcosa che va al di là del significato esplicito delle parole impiegate. Questa parte implicita della comunicazione viene da Grice definita come "implicatura conversazionale", ed è dotata di tre caratteristiche ben definite:

- la *sostituibilità* (anche se usualmente la si coglie intuitivamente, può comunque essere sostituita da un ragionamento);
- la *cancellabilità* (può essere negata senza che con ciò si modifichino i comportamenti e gli esiti delle azioni che si sono intraprese);
- l'*inseparabilità* (non può venir formulata se non come è effettivamente formulata, pena il violare la massima della modalità).

Un esempio notevole è quello di Ferrari (2003) che ha sottoposto a svariati campioni (studenti frequentati dalla scuola secondaria di primo grado all'università) diversi problemi, tra cui il seguente:

Problema 2

Collega con un tratto di penna ciascuna frase di sinistra con la frase o le frasi di destra che hanno significato equivalente:

a) Non tutti gli operai della fabbrica sono italiani	a') Tutti gli operai della fabbrica sono stranieri
	b') Alcuni operai della fabbrica sono italiani
b) Nessun operaio della fabbrica è italiano	
	c') Tutti gli operai della fabbrica sono italiani
c) Non tutti gli operai della fabbrica non sono italiani	d') Alcuni operai della fabbrica sono stranieri

In tutti i campioni presi in considerazione dall'autore, la maggior parte dei soggetti ha associato a entrambe le preposizioni a) e a c) della colonna sinistra le opzioni b') e d') sulla colonna di destra. Da un punto di vista di logica matematica, però, queste risposte sono errate: l'affermazione a) è infatti logicamente equivalente alla preposizione d'), così come c) lo è a b'). Dalla stessa prospettiva, invece, a) non è equivalente a b'), e non è neanche una sua implicazione logica; è però una sua implicatura conversazionale. Se viene infatti affermato che "non tutti gli operai della fabbrica sono italiani" (quindi l'affermazione a) è vera) ma la frase "alcuni operai sono italiani" dovesse risultare falsa (l'affermazione b') è falsa), implicherebbe che la prima affermazione è assolutamente inadeguata da un punto di vista comunicativo. Usando infatti a) in un contesto quotidiano permette all'interlocutore di inferire che il resto degli operai della fabbrica è italiano, cioè b'), nonostante non sia logicamente equivalente. Il legame che gli studenti inconsciamente mettono in gioco collegando le due affermazioni riguarda il *contesto* e non la grammatica, ed è un punto da tenere ampiamente in considerazione in ambito scolastico.

Fonte alternativa e ulteriore di difficoltà risiede nelle *difficoltà nella lettura*: le problematiche legate alle strategie di lettura (diagonale, per parole chiave, …) sono spesso conseguenza di atteggiamenti didattici o il prodotto di pratiche didattiche scorrette. Esiste infatti l'erronea convinzione comune che esista un solo tipo di lettura e che, quindi, di fronte al testo di un problema matematico l'approccio sia necessariamente identico a quello ad altri testi. Al contrario, non si può considerare la lettura come un'azione sempre uguale a sé stessa, senza differenze di procedura e di scopo: leggere la didascalia di un post di Instagram, un testo da studiare e una cartina geografica ha proprio procedure e scopi *totalmente* diversi.

La seguente classificazione, dovuta a Tanner e Green (1988), è un frequente riferimento degli studi in materia di lettura. Secondo questa distinzione, esistono quattro diversi tipi di lettura, differenti per modalità e intenzioni:

- *lettura esplorativa (orientativa), o skimming*: consiste nello scorrere rapidamente e non linearmente un testo per capire quale sia l'argomento trattato e se sia il caso di approfondire. Potremmo chiamarla una lettura "conoscitiva", utile quando siamo davanti a un opuscolo o un articolo che non si è sicuri di voler leggere;
- *lettura selettiva, o scanning*: è la modalità con cui si cercano informazioni all'interno di un testo, come per esempio quando si consultano antologie, dizionari, testi specialistici alla ricerca di argomenti specifici;
- *lettura estensiva (globale), o extensive*: è quella che solitamente si mette in atto in maniera spontanea quando si è davanti a un generico testo narrativo non troppo impegnativo;
- *lettura intensiva (analitica), o intensive, o narrow*: è quella usata per comprendere in profondità un testo, per studiarlo, interpretarlo meglio. Prevede riletture di alcune sezioni, formazione di ipotesi anticipatori mentre si legge, integrazione dei dati estratti dal testo con simboli o figure che affiancano il testo.

Uno degli errori più comuni che porta inevitabilmente a una lettura inefficace è l'applicazione di un tipo di lettura (o solo quello) a un testo che ne richiederebbe un altro (o vari): ad esempio, leggere in modo selettivo un testo che richiederebbe una lettura analitica porta alla mancata formazione di un quadro significativo del senso del testo, che poi si ripercuote sulla comprensione generale. È questo il caso della matematica: sia che si parli di lettura di problemi che di lettura del testo scolastico la comprensione profonda data dalla lettura intensiva è necessaria. Eppure, diverse ricerche (Sowder, 1989; Zan, 2011) evidenziano come la strategia di lettura adottata generalmente per i testi matematici, specialmente i problemi, sia quella selettiva. Il motivo di tale scelta inconsapevole è che gli studenti non stiano in realtà cercando di cogliere il senso globale della situazione descritta, ma si focalizzino, volontariamente o meno, sull'applicazione di strategie alternative per la risoluzione, come la ricerca specifica di dati numerici o di parole chiave che indichino le operazioni da eseguire (*rimasti* indica sottrazione, *in totale*, *insieme* indicano la somma). Questo modo di agire nei confronti di un testo è «*una rinuncia a priori a comprendere, in quanto le strategie utilizzate sembrano prescindere dalla comprensione del testo*» (Zan, 2011, p. 18).

Un ruolo decisivo è giocato anche dalle *convinzioni pregresse* dello studente (e a volte degli insegnanti) nei confronti del linguaggio della matematica e quindi della matematica tutta. Questo filone di ricerca si inserisce nel filone più ampio delle ricerche in merito ai fattori affettivi ed emotivi degli studenti, a cui diversi studiosi italiani hanno apportato il proprio contributo, costruendo un nutrito corpus di ricerche, come Rosetta Zan o Pietro Di Martino. In principio, come riporta Pier Luigi Ferrari (2021), ricordiamo che le convinzioni degli studenti in merito influenzano pesantemente le prestazioni, quindi il rendimento, e si collegano a emozioni e atteggiamenti che i ragazzi interiorizzano e reiterano a lungo nel tempo. In maniera preliminare, tra le convinzioni che possono portare a errori linguistici riportiamo quelle "emotive", approfondite in maniera estesa da diversi ricercatori: in generale, è ormai noto che sentimenti negativi come paura, frustrazione e ansia (sempre più diffusa tra gli studenti) influiscano in maniera estremamente negativa sull'apprendimento, fino a inibirlo totalmente. In maniera più specifica per la nostra trattazione, questi sentimenti impediscono anche il corretto sviluppo linguistico in ambito matematico: per costruire una competenza linguistica adeguata occorre investire del tempo e delle risorse cognitive in quest'attività, che però viene compromessa proprio dalla negatività emotiva che la circonda nella mente dello studente.

Per quanto riguarda gli scopi di questo lavoro, evidenziamo inoltre quanto sia ancora purtroppo diffusa, negli studenti ma anche nei docenti, la convinzione che le competenze linguistiche siano scisse da quelle matematiche. Sintomo (e contemporaneamente causa) di ciò sono alcune frasi diffuse tra gli insegnanti, come "ha capito ma non lo sa esprimere": tale frase rimarca in maniera non poi così implicita quanto l'espressione verbale di un concetto matematico non sia un requisito dell'apprendimento, relegandola al solo momento dell'interrogazione orale o di un più raro elaborato scritto. Saper esprimere in un testo coerente i concetti matematici appresi è invece un indicatore fondamentale della piena comprensione di quella specifica parte.

Queste due ultime cause, in realtà, hanno un punto di intersezione: il caso in cui le convinzioni, il retropensiero, le emozioni, ma soprattutto le convenzioni influiscano sull'interazione del testo matematico, scritto e orale. Accade, infatti, che il significato reale del problema venga oscurato dalla fiducia nella «virtù taumaturgica» (Lolli, 2015) di una matematica non ancora ben assimilata, ma anche nell'inconscia certezza che i rapporti con il docente e con il sapere sono regolati dal cosiddetto *contratto didattico*[9]. Per quanto riguarda i problemi, o in generale gli esercizi, gli studenti sono sempre stati abituati, e quindi si aspettano, che, il testo sottoposto loro abbia senso, che le soluzioni esistano sempre (non vengono contemplati i casi di un infinito numero di soluzioni o nessuna soluzione), che i dati forniti siano tutti e soli quelli necessari alla risoluzione del problema, e che gli strumenti di cui sono in possesso siano sufficienti per arrivare in fondo alla risoluzione. La ricerca ha infatti sottolineato già da molti anni come l'adesione a questo modo di vedere il rapporto tra sé e il sapere influisce in maniera molto negativa, come ad esempio nel caso dell'*effetto età del capitano*, che oggi designa la condotta di un allievo che calcola la risposta di un problema utilizzando una parte o la totalità dei numeri che sono forniti nell'enunciato, allorché questo problema non possieda una soluzione numerica. Di conseguenza, questo effetto è la degenerazione del fenomeno di cui parlavamo, cioè la lettura o l'ascolto di un problema che sono tutti volti non alla comprensione del contesto, ma piuttosto al farsi un'idea del procedimento risolutivo, ancora prima di aver capito di cosa si parla.

Anche le caratteristiche specifiche del linguaggio matematico contribuiscono a creare delle difficoltà, viste le sue indubbie specifiche molto particolari, che spesso però vengono descritte con i classici aggettivi di "astratto", "rigoroso", a volte "difficile". Halliday (2004) ne ha dato una descrizione molto precisa ed efficace, elencando sette elementi di difficoltà che i linguaggi scientifici (tra cui quello matematico) presentano:

- Le *definizioni annidate* descrivono tutti quei casi in cui più termini tecnici vengono definiti in maniera reciproca in una stessa frase. Esemplificativo è il caso geometrico della circonferenza: «una *circonferenza* è una curva piana costituita dall'insieme dei punti equidistanti da un particolare punto, chiamato *centro*. Tale distanza è detta *raggio*». In questa definizione, i termini "circonferenza", "centro" e "raggio" sono tutti e tre introdotti presumibilmente per la prima volta e si definiscono a vicenda. Se proviamo infatti a definire il centro di una circonferenza muniti solo di quanto scritto sopra non potremo fare altro che dire «il centro di una circonferenza è il particolare punto dal quale tutti i punti appartenenti alla circonferenza sono equidistanti». È comprensibile che questo costante autoriferimento possa provocare dei cortocircuiti logici o la perdita di senso dell'intero discorso;

- *Tassonomie tecniche*: sono le classificazioni di enti matematici per tipo o per parti. Le prime sono classificazioni che troviamo per le figure piane (trapezi, parallelogrammi,

[9] Concetto elaborato da Guy Brousseau negli anni Settanta, che ebbe successo e già negli anni Ottanta venne definitivamente confermata dalle sue ricerche e da quelle successive.

rombi, …) o per le funzioni di primo grado (algebriche, trascendenti, trigonometriche, …); le seconde sono invece gli insiemi di parole per designare un oggetto, come ad esempio, riprendendo l'esempio della circonferenza, il gruppo di parole "circonferenza", "cerchio", "centro", "raggio", "corda" e simili;

- Quello della *densità lessicale* è un problema che viene fortemente evidenziato da diverso tempo come una caratteristica tipica del linguaggio matematico, anche a causa dell'ampia presenza di processi di nominalizzazione. Approfondiremo entrambi i concetti nel capitolo dedicato al lessico e alla sintassi del linguaggio matematico, basti sapere che la *nominalizzazione* è il fenomeno di trasformazione in sostantivi di una parola di categoria diversa (aggettivi, verbi, preposizioni, …). Elenchiamo alcuni esempi per render chiaro il concetto: "Dimostriamo che *f* è <u>positiva</u>" diventa "Dimostriamo la <u>positività</u> di *f*", "<u>se</u> vale P, <u>allora</u> vale Q" diventa "Q è <u>conseguenza</u> di P", "<u>abbiamo dimostrato</u> il teorema" diventa "<u>eseguiamo la dimostrazione</u> del teorema". Il processo di progressiva nominalizzazione del testo viene indicato da Halliday come *impacchettamento*, mentre la sua operazione opposta, portata avanti per comprendere un testo impacchettato, viene indicata con il nome di *spacchettamento*.

  Per esemplificare la densità lessicale del linguaggio matematico consideriamo parte della definizione di circonferenza che abbiamo precedentemente osservato: «una *circonferenza* è una curva piana costituita dall'insieme dei punti equidistanti da un particolare punto, chiamato *centro*». In questa frase troviamo ben sei sostantivi, categoria preponderante rispetto a verbi e aggettivi, mentre in un frase di uso quotidiano troviamo questa sproporzione molto ridotta: testi con alta densità lessicale sono brevi, ma forniscono numerose informazioni in più rispetto a un generico testo non specialistico della stessa lunghezza. È stato inoltre riscontrato che l'alta densità lessicale crea difficoltà soprattutto a studenti che leggono i testi matematici utilizzando strategie improprie, utili per testi poco lessicalizzati propri dei registri colloquiali: leggere senza la giusta cura un testo di questo tipo non ne permette la piena comprensione.

  Il problema, però, potrebbe non investire solamente i testi scritti: l'abitudine alla densità lessicale è un tratto che potrebbe esser tramandato dai testi specialistici alla pratica didattica. Non va dimenticato che gli insegnanti devono curare anche il *modo* in cui spiegano certi concetti, e un mancato controllo sulla densità lessicale potrebbe portare a discorsi molto sintetici e di breve durata ma intrisi di informazioni importanti che uno studente che ascolta per la prima volta non riesce a cogliere completamente, vista la sua inesperienza in materia. L'uso di forme linguistiche sintetiche presuppone una profonda padronanza dell'argomento del quale si sta parlando o scrivendo, dato che vengono sottintesi legami logici, termini o specifiche: gli alunni che ascoltano per le prime volte una spiegazione non posseggono la giusta dimestichezza col linguaggio utilizzato per esprimere e comprendere certi argomenti nella forma con la quale viene ad esempio comunicata tra accademici o esperti.

- Con *espressioni speciali* Halliday (2004) intende «espressioni usate nel linguaggio matematico che hanno una loro grammatica speciale» (traduzione autonoma): ai termini tecnici che abbiamo visto nei primi punti, aggiunge la *grammatica tecnica*. Sono espressioni il cui significato non può essere compreso interpretando solamente le parole di cui sono composte, ma sottendono processi più lunghi e complessi: gli esempi che riporta l'autore sono chiaramente in lingua inglese, per cui questa riflessione è più che valida. In italiano, al contrario, questa caratteristica del linguaggio matematico è meno marcata. Alcuni esempi che si possono fare in italiano vengono riportati da Ferrari (2021): possiamo citare "zero di una funzione", o "diagonalizzazione di una matrice";

- *L'ambiguità sintattica* viene rimarcata come un problema da Halliday, anglofono, proprio per la natura stessa della lingua inglese: è infatti uso comune trovare costruzioni nominali anche molto articolate che non rendono espliciti i legami tra i vari elementi della frase. Uno degli esempi che riporta, anche se non di ambito matematico, è indicativo della difficoltà che uno studente anglofono (o che addirittura si trovi a imparare una materia scientifica in lingua inglese, pur non essendo questa la sua madrelingua): "*The growth of attachment between infant and mother signals the firt step in the development of the child's capacity to discriminate amongst people*". Halliday conta 128 ($=2^7$) possibili interpretazioni di questa frase, visto che individua sette possibili ambiguità sintattiche in questa frase, che potremmo agevolmente trovare in un qualsiasi testo di psicologia. Ferrari (2021) riporta come nella sua esperienza abbia sperimentato casi di ambiguità sintattica nella distinzione tra le espressioni "La derivata *f*" e "La derivata <u>di</u> *f*, in cui la difficoltà è racchiusa in un'unica breve frase e può creare problemi a studenti generalmente meno linguisticamente e matematicamente preparati.

- La *metafora grammaticale*, in analogia con la figura retorica, è la trasformazione non tanto di una parola per un'altra, ma di una *categoria* o una *struttura grammaticale* per un'altra: il processo di nominalizzazione che abbiamo visto sopra è un caso particolare di metafora grammaticale. Chiaramente, possiamo progressivamente sostituire parole attraverso metafore grammaticali all'interno di una frase. Ferrari (2021) riporta un efficace esempio di come una frase comprensibile anche da un bambino al primo anno di scuola primaria diventi progressivamente più complessa e *impacchettata* man mano che si procede per sostituzione di parole tramite metafore grammaticali.

"*Se premi un vetro più forte, si rompe più velocemente*": "premi" diventa "applichi pressione" (verbo → verbo + sostantivo) e "si rompe" diventa "le rotture" (verbo → sostantivo);

"*Se applichi più pressione su un vetro, le rotture aumentano più velocemente*": "aumentano" diventa "aumento" (verbo → sostantivo), "velocemente" diventa "veloce" (avverbio → aggettivo), mentre la sostituzione di "più" e "pressione" non avviene per metafora grammaticale, ma per semplice sinonimia;

"*L'aumento delle rotture di un vetro è più veloce se è applicata una maggiore sollecitazione*": "veloce" diventa "velocità" (aggettivo → sostantivo), "se" diventa "dipende" (congiunzione → verbo), "è applicata" diventa "applicata" (verbo → aggettivo)

Si giunge infine alla frase impacchettata: "*La velocità di aumento delle rotture di un vetro dipende dall'intensità della sollecitazione applicata*", il cui significato è totalmente analogo a quella iniziale, ma molto meno esplicito. Si osservi come quest'ultima frase sia fortemente impacchettata: per comprenderne il significato le varie sostituzioni effettuate vanno individuate e progressivamente esplicitate, fino al primo step. In matematica, questo fenomeno di impacchettamento dei testi è molto diffuso, affiancato anche alla presenza di tecnicismi, e proprio per questo leggere tali testi richiede strategie diverse e più raffinate di lettura. Un testo impacchettato, inoltre, richiede maggior pianificazione rispetto a testi non specialistici sia nel momento della produzione sia in quello di interpretazione. Ferrari (2021) evidenzia come la scelta di sottoporre agli studenti un testo impacchettato abbia diverse ripercussioni: come detto, sono più difficili da interpretare, anche se, in presenza di espressioni simboliche, potrebbe segnalare in maniera più evidente la necessità di utilizzare formule per la risoluzione del problema. Inoltre, presentare un testo non impacchettato significa di solito sottoporre agli studenti un testo più lungo, il che potrebbe comunque mettere in difficoltà chi presenti strategie di lettura più deboli.

- La *discontinuità semantica*, in conclusione, è un fenomeno che si sperimenta quando vengono inseriti in un testo nuovi concetti o termini che non hanno legame evidente di tipo semantico con quelli finora incontrati nella lettura.

La *mancata capacità di comprensione del testo*, infine, può negativamente influire sull'apprendimento della matematica. Influisce infatti sia in fase preliminare, di studio, sia in fase di verifica delle conoscenze: da una parte, infatti, non comprendere appieno ciò che si legge comporta necessariamente una mancata acquisizione nella sua complessità dell'argomento. Dall'altra, non decifrare correttamente la domanda del docente, il testo di un esercizio o di un problema implica che non si riuscirà ad esaudire le richieste, pur magari avendo un buon retroterra teorico.

Per quanto riguarda i problemi forniti di testo è importante notare che sia abbastanza diffusa la concezione che un esercizio espresso in forma testuale non sia altro che un pretesto per far fare agli studenti dei calcoli (anche se può capitare che sia vero!). Ciò influenza il modo in cui i ragazzi leggono e interpretano il testo, focalizzandosi solo su informazioni numeriche, parole chiave o ritenute importanti e non sulla situazione globale. Come abbiamo visto nel contesto delle strategie di lettura, questo tipo di atteggiamento potrebbe magari essere performante nel contesto della risoluzione dei classici problemi scolastici, ma non nello studio in generale della matematica o nell'interpretazione di testi di ambito matematico della vita quotidiana. Gli esercizi in cui non solo bisogna padroneggiare conoscenze teoriche ma linguistiche, in realtà, sono fondamentali per compiere il giusto passaggio tra applicazione della teoria e testi di ambito più quotidiano. Lo scopo è infatti quello di riuscire a connettere, ad esempio, l'equazione $2x = x + 7$ col testo «*Giulia, quando è nata la sorella, aveva 7 anni. Ora ha il doppio della sua età. Quanti anni ha la sorella?*» in maniera naturale nella mente dei ragazzi.

Più in generale, gli ostacoli alla comprensione del testo matematico sono diversi, alcuni dei quali citati nell'elenco appena stilato; se ne aggiungono ora, invece, altri, *intrinseci* al testo, che riguardano com'è costruito e strutturato il discorso scritto o parlato.

A tal proposito, citiamo il lavoro di Silvia Sbaragli e Silvia Demartini (2021), che hanno curato l'edizione integrale del volume "Italmatica. L'importanza del dizionario nella risoluzione di problemi matematici", volume che raccoglie i risultati del suddetto progetto Italmatica, focalizzato sull'analisi di libri di testo di argomento geometrico per le scuole primaria e secondaria di primo grado. Le riflessioni delle coautrici sono però pienamente condivisibili anche per discorsi orali e per i gradi d'istruzione superiori, e vale la pena citarle in questa sede.

Nel testo, le ricercatrici elencano le principali difficoltà strutturali e di composizione del testo presenti nei libri scolastici, che approfondiremo nella sezione dedicata, tra cui troviamo:

- Fenomeni che riguardano *elementi concettuali*, come *scorrettezze o imprecisioni matematiche, omissioni o impliciti, mancanza di coerenza del testo, esposizioni restrittive, ridondanze, eccessiva casistica* e infine *argomentazioni lacunose*;
- Fenomeni che riguardano *elementi linguistici*, come *eccessiva nomenclatura, utilizzo di terminologia vincolante o errata, complessità morfosintattica*;
- Fenomeni che riguardano *elementi grafico-figurali*, come *rappresentazioni figurali fuorvianti o errate di enti geometrici, elementi grafici che non veicolano un messaggio corretto, notazioni fuorvianti o incoerenti* e *incoerenza tra elementi grafico-figurali*.

Infine, sono presenti difficoltà linguistiche anche in caso di *alunni con Disturbi Specifici dell'Apprendimento (DSA)*: il discorso è complesso, e va approfondito in separata sede. I Disturbi Specifici dell'Apprendimento, infatti, sono *caratteristiche individuali* che vanno adeguatamente individuate e *assecondate* all'interno del percorso scolastico. I ragazzi con DSA hanno intelligenza e capacità cognitive in linea con l'età, di conseguenza vanno "solamente" adottate misure specifiche per permetter loro di avere le stesse condizioni di partenze dei compagni neurotipici. Per approfondire il discorso sui DSA sono consigliabili i contributi di Anna Baccaglini-Frank ed Elisabetta Robotti (2013);

Un ulteriore caso da considerare, infine, è quello in cui *l'italiano non sia la madrelingua dello studente*: è opportuno ricordare che nel contesto italiano troviamo sempre un maggior numero di classi plurilingui, fenomeno che già da alcuni decenni è presente in altre nazioni quali gli Stati Uniti. Questo fenomeno obbliga infatti a modificare e integrare i modelli interpretativi delle difficoltà linguistiche degli studenti in matematica.

Seguendo gli studi di Cocking e Mestre (1988) sulle influenze culturali e linguistiche sull'apprendimento della matematica, in particolare un articolo di Jose Mestre in cui si focalizza sulla comprensione matematica di studenti del grado 9 (equivalente al nostro primo anno di scuola secondaria di secondo grado) con ragazzi la cui madrelingua era l'inglese o lo spagnolo. La ricerca ha evidenziato tre tipi di competenza linguistica, con le relative influenze sull'apprendimento matematico:

- Si parla di *semlinguismo* quando l'individuo è sotto la soglia minima di entrambe le lingue. Questa condizione ha effetti negativi non solo sull'apprendimento, ma anche sulle interazioni sociali;
- Il *bilinguismo dominante*, fenomeno in cui una persona è al di sopra della soglia solo in una tra le due lingue, ha invece un effetto neutro;
- Il *bilinguismo additivo*, invece, è la padronanza delle due lingue sopra la soglia minima, e sono stati riscontrati da Mestre effetti positivi.

A conferma del fatto che il bilinguismo adattivo abbia effetti positivi sull'apprendimento possiamo inoltre citare lo studio di Levin e Shohamy (2008), effettuato su studenti immigrati in Israele sulla matematica e sull'ebraico accademico. Un altro aspetto messo in luce dagli autori è la correlazione tra un basso status socioeconomico (SES) e difficoltà in ambito linguistico e anche che secondo gli autori le maggiori differenze tra gli immigrati e i nativi è proprio nella risoluzione dei problemi matematici.

In generale, questi e altri i risultati in merito supportano l'opinione secondo cui un'insufficiente competenza nel linguaggio scolastico può inibire il ragionamento matematico, ma soprattutto mette in luce l'inadeguatezza di chi sminuisce l'importanza del linguaggio matematico, perché da una parte presuppone che la matematica sia rappresentata principalmente da simboli indipendenti dal linguaggio e della cultura, sia perché ritiene sufficiente per l'apprendimento un infarinatura linguistica di base, separando quindi dall'apprendimento la capacità di esporre ciò che si è acquisito.

Per concludere, un esempio molto interessante che riporta Schleppegrell (2007) è quello della *trigonometria*: per trattare e risolvere un problema di questa natura vanno padroneggiati contemporaneamente sia il linguaggio naturale, sia il simbolismo matematico, sia la rappresentazione grafica, richiedendo quindi agli studenti che approcciano quest'argomento la capacità di far interagire i diversi sistemi semiotici in gioco. Il problema che propone l'autore per esemplificare quanto dice, prevede un uomo su una collina che guarda la valle sottostante, e vuole calcolare l'ampiezza del fiume con una corda e uno strumento che misura gli angoli. Il linguaggio permette allo studente di acquisire informazioni sul contesto, la simbologia matematica di descrivere le relazioni tra le quantità in gioco e lo schema grafico favorisce la connessione tra il contesto reale (la collina, il fiume, la corda, …) e i processi matematici, connessione che viene formulata ed espressa in linguaggio naturale nel momento dell'esposizione orale in classe. In questo modo, linguaggio scritto e orale, rappresentazione simbolica e iconografica concorrono insieme per costruire e consolidare l'apprendimento mentre docente e studente interagiscono e discutono in classe.

Un'altra branca della matematica che può fornirci un esempio di come il linguaggio possa essere *centrale* è l'*algebra simbolica*, in cui si utilizzano lettere per denotare incognite e coefficienti generici. Questo procedimento rende celere la formalizzazione e risoluzione di molti problemi, e consente di formulare agilmente modelli di determinati tipi di situazioni, facilitandone la risoluzione. Tutto ciò è strettamente connesso a specifici progressi fatti nell'evoluzione del pensiero matematico, che in un certo senso vanno ripercorsi durante l'apprendimento: in maniera preponderante, l'affermarsi di un certo tipo di ragionamento astratto, favorito dall'adesione a un sistema simbolico condiviso in sostituzione dell'algebra retorica. Il progresso in tal senso ha permesso di stabilire relazioni valide tra questi simboli, che permettono di dimostrare l'esistenza di proprietà generali, ad esempio per i numeri. Come riporta Marco Bramanti (2011), ad esempio, per scrivere con cognizione di causa $a(x + 1) = ax + a$ occorre avere chiara in primo luogo la proprietà distributiva, ma bisogna anche aver capito che proprio la generalità con cui vale quella proprietà ci consente di affermare che è lecito scrivere uguaglianze letterali. Queste uguaglianze rimarranno solidamente valide quando sostituiremo a una lettera un numero, proprio perché le proprietà che applichiamo sono valide per ciascun numero. La rivoluzione sta proprio nel capire che si possano utilizzare sistematicamente lettere al posto di numeri, e creare formule di valore generale. Deriva anche da qui la convinzione che il linguaggio matematico non sia semplicemente un modo per comunicare certe idee, ma sia esso stesso *il luogo in cui risiedono certe idee*, incorporando in sé progressi, idee, e astrazioni frutto della storia millenaria della matematica. Proprio per questo, si può dire che il linguaggio si sia fatto carico della maggior parte del lavoro necessario a risolvere certi problemi: gran parte della fatica è però ora racchiusa nell'apprendere il significato e l'utilizzo di tale linguaggio.

Capitolo 2 – Aspetti della continuità tra linguaggio quotidiano e matematico

Dopo aver introdotto le principali sfaccettature del problema del linguaggio matematico, procediamo avvicinandoci al tema centrale di questo lavoro. Delle diverse cause che abbiamo precedentemente elencato alcune possono essere racchiuse sotto l'ombrello del fenomeno della *tensione tra linguaggio matematico e quotidiano* (Ferrari, 2021), tra cui le caratteristiche intrinseche del linguaggio matematico, poi il lessico, i comportamenti derivanti dal principio di cooperazione di Grice, e le difficoltà nell'approccio col testo scritto. L'influenza di questa tensione è già nota ai ricercatori da diverso tempo: numerosi lavori in didattica della matematica, più o meno recenti, hanno messo in evidenza che le interferenze dell'impiego comune della lingua naturale generano molte delle difficoltà linguistiche degli studenti nell'apprendimento e nell'acquisizione del linguaggio specialistico (possiamo citare Demartini, Fornara & Sbaragli, 2018; P. L. Ferrari, 2003, 2021; Sbaragli, Demartini & Franchini, 2021). Ciò conferma che il linguaggio della matematica è influenzato dalla lingua comune più di quanto potrebbe apparire a prima vista, soprattutto sul piano lessicale.

La ricerca in didattica della matematica ha chiarito, però, che la tensione tra i due linguaggi non sia il conflitto generato da due tipi di linguaggio diversi, ma sia invece derivante da una questione di *registri*: i registri utilizzati nella comunicazione in matematica, infatti, sono nient'altro che una forma estrema di registri evoluti del linguaggio quotidiano. Questo cambio di ottica ha un'importanza centrale nello sviluppo della ricerca in merito, dato che una delle implicazioni è che la capacità di usare il linguaggio della matematica possa essere allenata e sviluppata non tanto attraverso un'esposizione precoce e massiccia al linguaggio simbolico, ma attraverso l'uso flessibile dei registri, colloquiali ed elevati, della lingua. La tensione quindi rimane, ma cambia di tipologia: nel campo dell'educazione matematica l'ambito linguistico viene infatti sottoposto a una tensione di tipo strettamente *funzionale*; i registri, infatti, vengono scelti proprio in quest'ottica, dato che devono adattarsi a diversi contesti. In ambito matematico, il linguaggio deve da una parte continuare ad assolvere la sua funzione comunicativa tipica della vita quotidiana per regolare le interazioni con gli altri partecipanti allo scambio, funzione che deve essere comunque assolta in classe, nel rapporto tra docenti e studenti e tra studenti stessi; d'altra parte, invece, il linguaggio deve anche svolgere funzioni proprie e specifiche della matematica, come organizzare il sapere e le argomentazioni intorno a esso, e rappresentare e gestire gli algoritmi e i processi in gioco (Ferrari, 2021). Alla luce di ciò, è comprensibile come questa tensione sia sempre presente, anche perché gli strumenti linguistici necessari per svolgere le funzioni che abbiamo elencato richieste dalla matematica sono profondamente diversi da quelli che si sviluppano in contesti di interazione quotidiani. È anche noto che l'attrito tra i due linguaggi cresce al crescere del grado scolastico, anche perché la richiesta di precisione e accuratezza cresce con l'accumularsi del sapere e del grado d'istruzione. Chi si occupa di educazione matematica, a prescindere dal tipo di target con cui comunica (studenti di ogni età, o pubblico generico), non deve però fuggire da questa tensione, o costruire elaborati metodi per evitare che l'interlocutore vi entri in contatto, ma ne deve invece prendere coscienza in profondità e anzi è opportuno che insista su quei nodi linguistici che provocano più difficoltà.

È però opportuno osservare che la tensione di cui abbiamo parlato nasce nei punti di contatto più stretto tra i due linguaggi. Il confine tra i due, appunto, non è così definito e netto come vuole una lettura tradizionale, e ormai superata, delle discipline scientifiche e umanistiche e dei loro linguaggi, ma *sfumato*. Quelle che abbiamo chiamato cause della tensione in realtà non sono altro che *i segni della continuità* tra i due linguaggi. Da un punto di vista concettuale e lessicale tale cambio di prospettiva risulta vincente: non considerare più i due linguaggi in conflitto, ma vederli e pensarli in continuità, uno come l'evoluzione elevata dell'altro, aiuta a concepirli come manifestazioni diverse di un unico fenomeno, come facce di una stessa medaglia. Tale ottica, in prospettiva di ricerca e didattica, è assolutamente vincente, perché in primis elimina l'accezione negativa di contrasto tra i due, poi aiuta a prendere consapevolezza della natura del linguaggio matematico e infine apre a una serie di conseguenze didattiche e pratiche che possono, nel concreto, aumentare la competenze matematiche e linguistiche degli studenti, obiettivo principale dell'insegnamento, non solo matematico.

In questo capitolo, come del resto in tutto il lavoro, le riflessioni più generali che seguono valgono per tutte le lingue parlate e scritte, ma per amor di semplicità e di fruibilità gli esempi e i riferimenti più specifici fanno fede alla lingua italiana, lingua in cui è scritto il presente lavoro.

2.1 Continuità tra linguaggio quotidiano e matematico: aspetti generali

La sezione qui presente è un approfondimento sugli aspetti generali della continuità tra linguaggio quotidiano e matematico.

Le caratteristiche intrinseche del linguaggio matematico sono un altro punto importante nello scontro tra linguaggio quotidiano e matematico, al quale è difficile aderire anche per le sue intrinseche caratteristiche strutturali. Abbiamo visto, infatti, le ampie differenze col linguaggio quotidiano che generano attriti tra i diversi modi d'uso della lingua: un esempio è quello dei connettivi, per i quali in matematica vale spesso l'interpretazione vero-funzionale, basata sulle tavole di verità, mentre nei registri quotidiani valgono interpretazioni anche molto lontane, e funzioni diverse, specie per l'organizzazione dei testi. Queste differenze sono infatti dovute in gran parte, come detto, alle differenze fra le funzioni attribuite al linguaggio matematico (nelle sue componenti verbale e simbolica) e quelle giocate dal linguaggio verbale dei registri quotidiani (Ferrari, 2003). Un esempio ulteriore della declinazione funzionale del rapporto conflittuale in oggetto si può trovare in Ferrari (2021), in cui l'autore considera il modo in cui si può esprimere l'unicità della soluzione reale 2 dell'equazione $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$. Nel linguaggio quotidiano possiamo comunicarlo con «*2 è l'unica radice reale dell'equazione*»: la frase è chiara e tutto il senso si racchiude nell'aggettivo "unica". Se però si volesse formalizzare quest'affermazione per un contesto teorico opportuno dovremmo scrivere qualcosa come «*Per ogni numero reale a, se a è radice dell'equazione, allora a=2*». Chiaramente le caratteristiche di queste due affermazioni sono molto diverse, anche se esprimono lo stesso concetto. Se siamo in un contesto quotidiano, la prima frase è molto più efficace, dato che riesce a comunicare con una certa chiarezza il concetto di unicità: ha senso utilizzarla anche con studenti che non hanno strumenti linguistici avanzati, per loro mancanza o perché sono all'inizio del loro percorso di apprendimento. La seconda affermazione, invece, ha senso in contesti magari accademici, o comunque in scambi in cui il livello linguistico richiesto sia più elevato, contesti in cui il concetto di unicità in realtà nasce. La scelta del modo di esprimere il concetto di unicità, e in generale ogni concetto, dipende quindi soprattutto da esigenze funzionali che nascono nell'ambito della disciplina matematica.

Come abbiamo visto, anche il *lessico* contribuisce alle difficoltà linguistiche in matematica, in parte proprio perché aumenta la tensione tra linguaggio quotidiano e matematico per l'esistenza di quelle che abbiamo classificato come "*parole-termini*". Anche chiamate "tecnicismi specifici ambigui", sono termini che hanno un utilizzo frequente sia nell'uso quotidiano che in quello matematico e quindi generano attrito tra l'uso colloquiale della lingua e quello in ambito matematico. Se questa ambiguità d'uso, a volte, può risultare una risorsa vincente sul piano didattico, altre volte può costituire un ostacolo, in quanto gli alunni tendono ad applicare pratiche interpretative tipiche del linguaggio quotidiano, indotti dalla presenza di questi termini, al contesto della matematica, che ne richiederebbe altre. In parte, abbiamo già avuto modo, nei paragrafi precedenti, di osservare testimonianze di queste interferenze, sia da un'ottica grammaticale, sia nel modo di condurre una conversazione.

La coesistenza di significati diversi in una parola, cioè il fatto che sia *polisemica*, è quindi uno dei tanti fattori fondamentali da tenere in considerazione nel contesto dell'insegnamento del lessico matematico, e può rivelarsi un ostacolo o una risorsa. Molto significativa è l'espressione che usa Maier (1993) nel descrivere ciò che avviene nella mente degli studenti quando un nuovo significato si aggiunge a quelli di una parola già nota: lo definisce «miscuglio dei sensi». Infatti, i significati legati rispettivamente al linguaggio comune e matematico necessariamente si mescolano tra loro a scuola, creando in certi casi misconcezioni e incoerenze, che minano il corretto apprendimento, sia nella scuola primaria, sia nei gradi scolastici più alti. Questo fenomeno è stato indagato da Demartini, Fornara e Sbaragli (2018) in classi di studenti della scuola dell'obbligo: la ricerca, eseguita su un campione di 200 allievi di primaria e secondaria di primo grado, mette in evidenza in maniera preponderante come il legame tra i significati matematici e colloquiali dei termini siano inestricabilmente legati. Nel leggere alcune delle definizioni più significative si evince quanto sia forte questo legame, ad esempio: «*L'angolo è una cosa che si trova alla fine di qualcosa. In matematica ci sono vari tipi di angolo. (angolo retto, ...)*», frase scritta da uno studente frequentante il terzo anno della scuola secondaria di primo grado. Contribuiscono, insieme alla polisemia, a creare difficoltà lessicali anche i fenomeni di omonimia e sinonimia.

In aggiunta al discorso del lessico, abbiamo citato anche il principio di cooperazione di Grice: abbiamo visto come secondo questo principio, chiunque partecipi a una conversazione conforma il proprio contributo a quanto è richiesto dall'intento comune, cioè appunto *coopera* con l'interlocutore. Questo contribuisce a creare conflitto, perché, come detto, il modo di pensare in maniera "matematica" fa riferimento alla logica matematica, mentre i contesti sociali in cui si usa il linguaggio colloquiale (comprendiamo in questo caso anche la classe!) aggiungono al discorso una serie di regole implicite che possono deviare il senso della conversazione.

Anche i libri di testo, o gli insegnanti, possono contribuire nel rendere meno definito il confine tra conversazione colloquiale e matematica: un esempio è l'uso di espressioni come "a quanto pare", "sembra" e simili. In un contesto sociale, infatti, una delle funzioni di queste espressioni è quella di mitigare la durezza e l'assolutezza di certe affermazioni, per risultare meno categorici e definitivi, mentre in contesto matematico non è assolutamente efficiente utilizzarle, in quanto instilla il dubbio al lettore che esistano casi particolari in cui l'affermazione che segue non sia vera. All'interno del testo di Italmatica (Sbaragli e Demartini, 2021) troviamo un esempio di ciò: «*Per quanto sappiamo*, un triangolo si può sempre inscrivere in una circonferenza, in esso infatti è unico il circocentro»[10]. In un contesto colloquiale, "per quanto sappiamo" potrebbe essere un'espressione utilizzata anche con ironia, come a dire, magari a uno studente poco convinto «chissà se riesci a trovare un caso in cui un triangolo non possa essere iscritto in una circonferenza». Queste espressioni differiscono dalle più innocue forme di comunicazione in prima persona plurale col lettore, come "come abbiamo visto/detto/sappiamo", che non danno alcuna impressione di ambiguità o dubbio.

In ultimo, inseriamo sotto le cause della tensione anche l'approccio con il testo scritto: nella sezione precedente, abbiamo visto che concorrono a creare difficoltà problemi sia nell'adozione di strategie di lettura sia nella comprensione. In primis, infatti, è chiaro che l'*azione* della lettura sia sempre la stessa: ci si prende un momento di calma e possibilmente di solitudine, ci si sistema in un luogo abbastanza comodo (un tavolo, un divano), si apre il testo, o il supporto digitale a disposizione, e ci si immerge tra le pagine, reali o virtuali. Il *processo* di lettura, invece, *deve* cambiare a seconda del tipo di testo che abbiamo davanti: leggere, o meglio, adottare la strategia di lettura con la quale si legge un romanzo per studiare un testo di matematica, anche un libro scolastico, non può portare a un apprendimento solido e proficuo. È anche diverso il modo con cui ne parliamo: un romanzo lo si legge, un libro di matematica lo si studia; questa differenza lessicale sottende una differenza di strategia e di approccio: per il romanzo possiamo limitarci a una lettura lineare, mentre è certamente necessario leggere il testo matematico fino in fondo, ma anche fare collegamenti, tornare indietro per costruire e cementare il senso di quello che si sta leggendo, collegandolo col retroterra di conoscenze matematiche che già esiste nella mente di chi legge.

Ferrari (2003) evidenzia che da una parte il disinteresse per il linguaggio scientifico e dall'altra l'adesione completa e non mediata al linguaggio dei manuali siano approcci non sufficienti a garantire il corretto sviluppo della competenza linguistica in campo matematico. La linea che l'autore suggerisce come ottimale è quella di promuovere l'uso evoluto dei linguaggi anche in contesto scientifico, attraverso attività specifiche e ponderate per far produrre agli alunni testi consapevolmente precisi e accurati da un punto di vista concettuale e linguistico, senza il peso di doversi confermare a un modello come quello dei libri di testo. Costruire infatti il proprio linguaggio nel tempo ha molto più valore rispetto a imparare a imitare il linguaggio di un testo scientifico senza effettivamente senza sentirne la necessità sia da un punto di vista didattico che cognitivo per gli studenti: imparare a gestire un registro evoluto come quello del linguaggio

[10] Flaccavento Romano, G. (2014). Obiettivo competenze. Volume 2. Fabbri editori., p. 100.

matematico li rende consapevoli non solo dei diversi usi della lingua, ma anche di come loro apprendono una disciplina tecnica, e ne riescono ad apprezzare meglio la profondità.

Demartini e Sbaragli (2019b) sostengono con forza, alla luce delle loro ricerche e della collaborazione per il progetto Italmatica, che occorre far acquisire familiarità agli allievi con la particolare varietà di lingua che nasce durante l'ora di matematica, che subisce da un lato l'influenza del linguaggio formale della matematica e dall'altro quella della lingua comune, ma che differisce dalle abitudini di comportamento e dalle prestazioni linguistiche cui sono abituati nella quotidianità. Il legame tra i linguaggi va assolutamente tenuto conto ed esplicitato, tramite il lavoro congiunto tra docenti di italiano e matematica, non solo per accrescere la competenza matematica degli alunni, ma anche per imparare a supportarla con una buona competenza linguistica e lessicale (Demartini, Fornara e Sbaragli, 2018).

Per il problema del lessico, già la ricerca in linguistica (Sobrero, 2009) puntualizza che in Italia esiste un grave problema di povertà, superficialità e scarsa padronanza del lessico nei diplomati e nei neolaureati. Per porre rimedio alla questione è centrale già nella scuola primaria arricchire il lessico di base dei bambini, portando anche in primo piano il lessico tecnico-scientifico, con un'introduzione graduale dei tecnicismi, evidenziando proprio la loro natura di termini specialistici e facendo notare ai bambini che quell'accezione sia una ulteriore rispetto a quella quotidiana. Così facendo, gli alunni avranno nella loro mente già un'idea della continuità tra i due linguaggi, delle loro differenze e dei loro punti di contatto.

La richiesta di collaborazione tra discipline per cementare questa continuità arriva anche dalla ricerca in didattica dell'italiano: in "La didattica dell'italiano. Problemi e prospettive" a cura di Marcello Ostinelli, Cristina Lavinio insiste che il carico dell'educazione linguistica degli studenti vada in misura maggiore o minore riassegnato anche ai docenti delle altre discipline. Questa condivisione del compito educativo non è un mero scarico di responsabilità, ma anzi una possibilità (auspicata ormai da quarant'anni dalle Dieci tesi per un'educazione linguistica democratica della GISCEL[11]) di ampliare la competenza linguistica in altri campi e con altre prospettive. Spostando parte degli obiettivi di apprendimento sul linguaggio, si spingono le altre discipline, matematica compresa, anche a un cambio d'ottica fondamentale, che rende centrale non solo il contenuto appreso dallo studente, ma anche la forma nella quale questo sapere viene esposto, andando in aiuto dello studente e del docente stesso. Nel momento in cui infatti l'esposizione (orale o scritta) è confusa non ci si limiterà soltanto ad ammonire lo studente ma,

[11] Consultabili al link https://giscel.it/dieci-tesi-per-leducazione-linguistica-democratica/

avendo dato priorità anche alla forma e al linguaggio, si andrà a sondare il perché di quelle imprecisioni, così come lo si fa con i concetti. Il docente, di qualsiasi disciplina, proverà a capire se la confusione è solo linguistica o anche concettuale, da quale parte del processo di studio quella confusione è derivata, eviscerando ed esplicitando processi cognitivi che rimangono sempre taciuti ma che sono invece centrali.

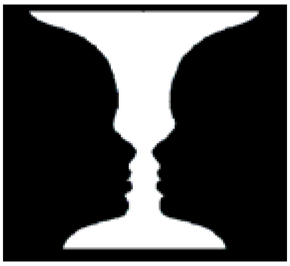
2.2 Continuità tra linguaggio iconografico quotidiano e matematico

Le immagini, già dall'origine dell'uomo, passando per la creazione delle *Bibliae pauperum* nell'ottavo secolo dopo Cristo, fino ai primi sussidiari dell'infanzia del Settecento e ai manifesti pubblicitari e ai social network di oggi, sono state utilizzate dall'uomo come vessillo per messaggi di ogni tipo, anche con funzione didattica.

Nella società odierna le immagini assolvono un ruolo sempre più centrale, anche per la pervasività dei social media e delle nuove tecnologie. Per questo il registro iconografico è diventato assolutamente caratterizzante del nostro quotidiano: pensiamo ai segnali stradali, alle istruzioni di montaggio di mobili, apparecchi elettronici o giocattoli, ma anche alle foto condivise sui social e ai cartelloni pubblicitari che vediamo in strada o trasmessi in televisione. I tipi di immagine che abbiamo appena descritto hanno una caratteristica in comune: sono creati per veicolare un messaggio ben specifico in maniera efficiente, in modo che il loro significato venga compreso al primo sguardo, senza bisogno di troppe inferenze. Questa caratteristica non è un difetto, anzi, esistono professionisti che studiano e lavorano proprio affinché le immagini prodotte siano il più efficaci e immediate possibili. Rappresentazioni di questo tipo sono create appunto per essere molto *cooperative*: chi fruisce di queste immagini sa che sono specificamente create per non essere ambigue; quindi, si ferma alla prima interpretazione che dà all'immagine, che è generalmente quella corretta.

Dedicare parte di un lavoro sul linguaggio come questo al registro iconografico assume grande rilevanza non solo perché componente fondamentale del linguaggio, ma anche perché questo lavoro appartiene all'ambito della didattica della matematica; è quindi pensato e rivolto tenendo a mente un target specifico, quello dei ragazzi in età scolare, che appartengono alla generazione dei nativi digitali. Questa generazione è «ben piantata nella realtà concreta delle cose e che fa un grosso sforzo per astrarre; una generazione che non pensa a un testo come a un insieme ordinato di parole e frasi, ma piuttosto come un agglomerato di oggetti, ricco di relazioni che li collegano tra loro» (Gouthier, 2009). Il loro modo di pensare è stato plasmato dalla grande esposizione alle immagini nel quotidiano, risultando in un continuo crearsi di connessioni tra gli input audio, video, verbali e grafici a cui i ragazzi si espongono. Questa modalità fa perdere ai ragazzi in tempo di attenzione, ma li rende molto abili nel creare connessioni e collegamenti tra tutti gli stimoli ricevuti, e di ciò si deve essere consapevoli, per sfruttare al meglio anche questo canale comunicativo.

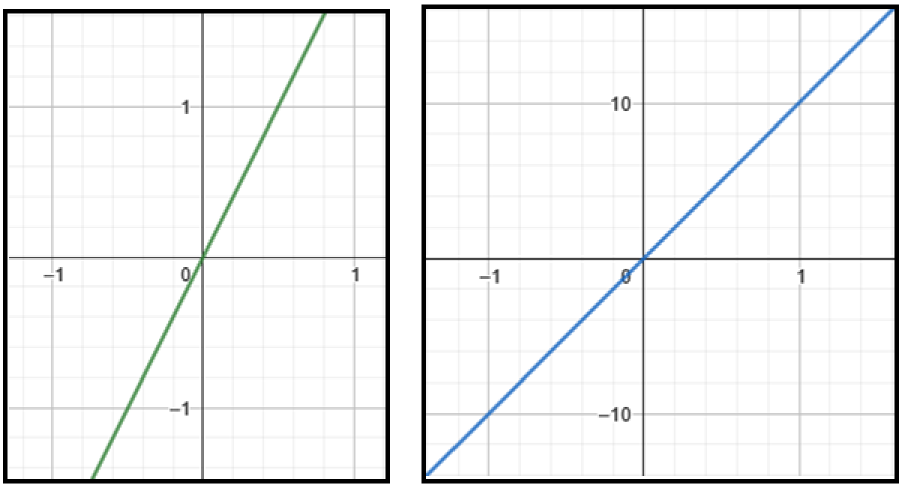
Tutte le rappresentazioni, per loro natura, lasciano ai fruitori maggior libertà interpretativa, e questo potrebbe risultare in interpretazioni ambigue del loro significato. L'ambiguità può derivare da diversi fattori, come rappresentare su un foglio bidimensionale un oggetto tridimensionale, o anche per la natura iterativa della rappresentazione, cioè il fatto che si possano rappresentare delle rappresentazioni. È infatti possibile raffigurare, ad esempio, un giocattolo che assume le sembianze di un animale: avremo quindi la rappresentazione *della rappresentazione* dell'animale. Esistono invece immagini che sono costruite in maniera volutamente ambigua, a volte con lo scopo di ottenere effetti paradossali, come le seguenti, di cui possiamo dare due diverse interpretazioni, a seconda della parte della figura che scegliamo di prendere in considerazione, e a seconda di quale interpretazione diamo ai singoli elementi che compongono l'immagine. Seguono due esempi, tratti dalla rete, di questo tipo di ambiguità:



Se nella prima immagine, infatti, consideriamo la parte nera come sfondo, interpreteremo la figura come un vaso, mentre se fosse la parte bianca a essere lo sfondo, allora avremmo davanti l'immagine di due volti di profilo. Allo stesso modo, l'immagine di sinistra raffigura il mezzobusto di una giovane donna, o il volto di un'anziana signora incappucciata: l'interpretazione cambia a seconda di quale significato diamo alle diverse parti del disegno.

Nel guardare un'immagine, quindi, è possibile non considerare tutte le informazioni che sono contenute al suo interno, focalizzando l'attenzione solo su alcune di esse, anche in virtù dello scopo per cui stiamo interagendo con quell'immagine. Inoltre, non è detto che il fruitore di una rappresentazione sia tenuto a essere completamente consapevole di *tutte* le informazioni contenute in essa: questa caratteristica differenzia il registro grafico da quello testuale o simbolico. Questa particolarità rende quindi le immagini un ottimo strumento per l’apprendimento, perché permettono una graduale presa di coscienza di tutti gli aspetti chiave di un concetto, racchiudendoli però all’interno di un unico strumento didattico.

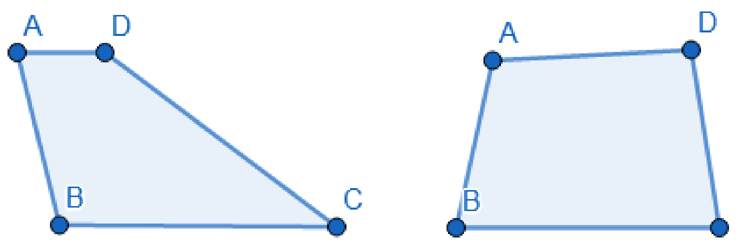
Nel contesto della società odierna, pervasa dal massiccio uso di immagini come mezzo di comunicazione, stonano le lamentele di diversi docenti di matematica riguardo la scarsa capacità degli studenti di costruire, interpretare e utilizzare le immagini matematiche (Ferrari, 2021). La situazione è solo apparentemente paradossale: il fatto è che non possiamo mettere sullo stesso piano la natura delle immagini “quotidiane” rispetto a quelle utilizzate in ambito matematico. Questo perché le differenzia l’uso che se ne fa, o meglio la *funzione* per la quale vengono create. Come abbiamo visto, le immagini appartenenti alla nostra quotidianità sono altamente cooperative, create con lo scopo di trasmettere efficacemente un chiaro messaggio, mentre le immagini di ambito matematico non sono necessariamente cooperative per il fatto che si stia cercando di *rappresentare un ente matematico*, non di trasmettere un messaggio. Proprio per questa caratteristica non è detto che la prima interpretazione data di un’immagine matematica sia quella corretta, anche se si è tentati di fare affidamento sulle poche inferenze possibili a una prima occhiata, influenzati dalla tendenza a fermarsi alla prima interpretazione. Confrontare le pendenze di queste due funzioni, ad esempio, non è fattibile in maniera immediata, ma richiede diverse inferenze in più rispetto al normale (Ferrari, 2021).



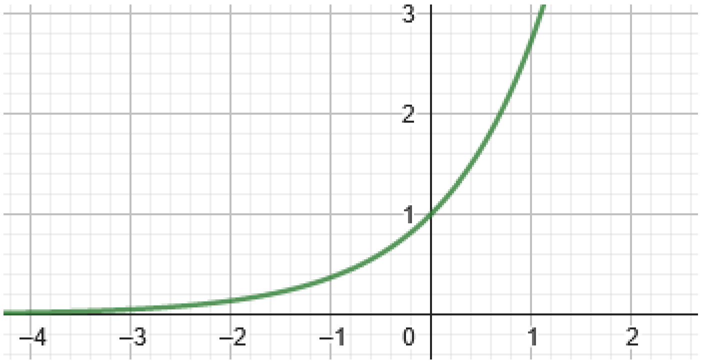
Come giustamente fa notare Ferrari (2021), non si può evitare di confrontarsi con immagini del genere con la scusa del “trabocchetto matematico”: i docenti *devono* insegnare ai ragazzi a valutare criticamente i dati che hanno davanti e abituarli a questa pratica, proprio perché *sanno* quanto possa essere facile farsi ingannare dal guardare con superficialità certi tipi di rappresentazione. Essere in grado di valutare le unità di misura in un grafico, ad esempio, è una capacità che sta diventando sempre più importante: sono noti diversi casi di cronaca in cui proprio le unità di misura sono state utilizzate per effettuare interpretazioni distorte di alcuni eventi. Di Nardo e Liseo (2009) presentano una serie di esempi significativi di come la manipolazione delle unità di misura possa portare alla distorsione dei dati presentati e, in sostanza, della realtà.

La possibilità di considerare solo alcune informazioni che un'immagine contiene è particolarmente utile in matematica: nelle dimostrazioni geometriche, ad esempio, di solito non serve considerare la misura numerica dei lati delle figure che vengono utilizzate, anche se è un'informazione effettivamente presente e a disposizione del fruitore. Però, per effettuare correttamente quest'operazione di selezione concreta delle informazioni utili occorre un forte controllo concettuale, la cui mancanza è segnalata dall'incapacità o dalla difficoltà di trarre informazioni da un'immagine (Ferrari, 2021).

In matematica, in generale, è richiesto un forte controllo sui concetti appresi per essere sicuri di interpretare correttamente ogni tipo di rappresentazione, come per le seguenti.



Occorre infatti una certa padronanza dell'argomento "trapezi" per individuare con certezza, fornendo motivazioni adeguate, quale tra questi due quadrilateri sia un trapezio, così come è necessario avere discrete basi in ambito funzionale per rendersi conto che guardando la seguente rappresentazione cartesiana della funzione esponenziale ($f(x) = e^x$) tale funzione non si annulli al diminuire della x oltre -4, come potrebbe sembrare.



Il mezzo grafico, al di là della necessità che gli studenti sappiano correttamente interpretarlo, è un potente aiuto per la didattica, che il docente deve utilizzare con cura: proprio per l'immediatezza e la chiarezza del mezzo è possibile che un'immagine mal costruita o inappropriata possa far nascere negli studenti misconcezioni che non permettono il corretto apprendimento, ma anzi sedimentano negli studenti idee e conoscenze errate, che non è semplice individuare ed eradicare. Sbaragli (2011) ha riscontrato tale fenomeno in classi della scuola primaria in cui era stato introdotto il concetto di angolo, con le relative rappresentazioni grafiche. L'autrice ha individuato un disallineamento tra il concetto matematico di angolo e il modo in cui alcune delle immagini scelte dai docenti intervistati lo veicolano. L'autrice osserva

che la rappresentazione dell'angolo usata da parte di questi docenti, con le due semirette e l'archetto interno a simboleggiare quale parte del piano si considera, apra alla possibilità di misconcezioni, dovute al fatto che la presenza dell'archetto veicoli il messaggio che l'angolo "finisca" in corrispondenza dell'arco. Sta all'insegnante quindi far presente agli alunni che l'archetto sia una convenzione utile per capire quale parte *illimitata* di piano si debba considerare, e aver cura di sottoporre alla loro attenzione altre rappresentazioni dell'angolo.

Un problema ulteriore, riscontrato da Sbaragli, è che in alcuni casi questa rappresentazione sottende una conoscenza errata del concetto da parte dei docenti: dalle interviste, infatti, appare in qualche caso che alcuni degli stessi docenti siano convinti che l'angolo "termini" dove termina l'archetto, e alla richiesta di disegnare un angolo più grande, il risultato è un angolo (approssimativamente) della stessa ampiezza, ma con segmenti e archetto più lunghi. Al di là della discussione, che non avverrà in questa sede, di come sia possibile che dei docenti di matematica abbiano lacune di questo tipo, dobbiamo riportare che se l'insegnante utilizza una rappresentazione vincolata a una misconcezione non importa che abbia o meno i giusti concetti, sarà più probabile creare nei suoi studenti delle lacune o delle conoscenze errate. Uno dei problemi nell'uso delle immagini, quindi, è anche il loro uso in maniera limitata e inconsapevole rispetto all'aspetto concettuale e culturale del sapere, con la conseguente creazione di misconcezioni, che però sono *evitabili*.

Il registro iconografico ha inoltre un ruolo decisivo in contesti geometrici più avanzati, perché permette la visualizzazione degli enti geometrici dei quali si sta parlando: in contesto didattico ancora in misura maggiore, considerando che basta giustapporre una figura a una definizione per far inferire al lettore la natura di esemplificazione della figura. Diventa però importante fare attenzione al *tipo* di figure che si utilizzano come esempi, ma anche far presente agli studenti la natura di esempio di quanto hanno davanti, per non limitare il loro orizzonte concettale, e, in particolare nei primi anni di istruzione, guidare gli allievi a una corretta interpretazione sia della natura di esempio dell'immagine, sia del rapporto tra registro iconografico e verbale che devono imparare a gestire.

Il *rapporto con le parti linguistiche* del testo è quindi un fattore importante che influenza l'effetto delle immagini sull'apprendimento. Nell'analisi del corpus dei testi di geometria italiani delle scuola primaria e secondaria di secondo grado nel contesto dei poligoni, Sbaragli e Demartini (2021, pagina 146) segnalano ogni volta che una parte linguistica (definizione, esercizio, …) richiama contenuti collegati a una figura come "relazione con figura". In questo modo, è stato possibile estrarre dal corpus il numero di tali relazioni e rapportarle al numero di *macroatti linguistici*[12] totali: il rapporto medio tra relazioni di parti linguistiche e figure, e macroatti risulta pari a 1.92, numero che denota una massiccia presenza di relazioni lingua-figure in questo contesto, il che è comprensibile, data la natura dell'argomento geometrico in oggetto. In maniera abbastanza inaspettata, si registrano i rapporti più alti, se andiamo ad analizzare i dati per annualità, in I e III *secondaria di primo grado*, dato che si conferma anche per il corpus ticinese e grigionese di testi analizzati: questo dato è molto particolare, se si confronta con l'idea nell'immaginario comune delle figure come supporto principe per l'apprendimento dei bambini.

È importante però rendersi conto che non basta inserire delle figure per renderle *funzionali* all'apprendimento. In particolar modo, è importante innescare processi di *conversione* tra il

[12] Illocuzione implicita o esplicita di un testo intero, cioè un atto la cui esecuzione è da rendere nota ad altri e la cui prestazione coinvolge la produzione di "conseguenze convenzionali", come diritti, impegni, obblighi. La definizione di illocuzione è dovuta a John L. Austin, filosofo e linguista inglese della prima metà del Novecento.

registro[13] iconografico e linguistico: il concetto di conversione semiotica è stato elaborato da Raymond Duval; si ha conversione tra registri quando lo stesso concetto, o comunque le stesse informazioni, vengono veicolate attraverso registri diversi. A questo punto, la relazione tra parte testuale e iconografica può essere approfondita studiando il tipo di funzione che giace dietro l'accostamento di testo e figura. Le finalità di questo accostamento sono diverse: possono servire per *far vedere* ai lettori qualcosa di specifico, oppure per fare in modo che *modifichino* la figura stessa, intervenendo con penna, matita o pastelli, o anche per chiedere loro di *fare* qualcosa, come disegnare autonomamente una figura e lavorarci, o, infine, per far *riconoscere* caratteristiche o proprietà specifiche contenute o meno nella figura.

Le autrici di Italmatica specificano come la gran parte delle immagini del corpus non siano *strettamente necessarie* per la comprensione della parte verbale, ma in virtù del concetto di conversione la loro presenza è più che auspicata, anche se a quanto pare gli autori dei testi del corpus non ne hanno tenuto troppo conto, considerando che è emerso che il 53.83% delle figure favorisce la conversione, mentre la restante parte non la favorisce. Il seguente è un ottimo esempio del primo caso, in cui parte figurale e parte verbale agevolano la conversione: vediamo come la procedura di verifica di convessità e concavità viene spiegata e al contempo mostrata con due figure, una concava e una convessa, per far vedere allo studente la caratteristica saliente che differisce i due tipi di poligoni.

Le immagini che favoriscono la conversione sono state classificate in base al tipo di testo al quale sono affiancate, nello specifico *definizioni* («enunciati che stabiliscono il significato di una parola o di un'espressione verbale mediante una frase costituita da termini il cui significato di presume già noto», Sbaragli e Demartini (2021), pagina 93), *denominazioni* («enunciati in cui viene attribuito un nome allo scopo di identificare l'oggetto matematico in questione», Sbaragli e Demartini (2021), pagina 98), *proposizioni* («frasi che descrivono proprietà o

[13] Al contrario delle sezioni precedenti, in questo caso si intende il termine "registro" come Duval, nel senso di *registro semiotico*, ovvero una sistema di rappresentazione semiotica.

relazioni tra oggetti geometrici, o scelte di impostazione strutturale. […] Consente di identificare i riferimenti (ciò di cui si parla) e, una volta identificati questi, po' essere riconosciuta come vera o falsa», Sbaragli e Demartini (2021), pagina 97) e, in misura molto minore, *procedure* («quando sia la parte linguistica sia la figura illustrano un procedimento da svolgere», Sbaragli e Demartini (2021), pagina 151); queste sezioni di testo mostrano come i registri linguistico e figurale lavorino insieme, in una collaborazione a diversi livelli nei testi geometrici.

Il rapporto tra testo e figure viene costruito da chi mette in piedi un libro di testo anche grazie all'utilizzo di risorse quali colore, frecce, disposizioni di layout che evidenziano come lo stesso concetto venga espresso da modalità semiotiche differenti. Sbaragli e Demartini (2021) citano alcuni esempi di questo utilizzo, che può favorire o meno, anche in questo caso, la conversione semiotica: uso del colore in funzione di similarità, prossimità di elementi nell'organizzazione spaziale, segnalazione grafica attraverso linee orientate, cioè frecce.

Alla luce di quanto detto, è evidente quanto sia importante far lavorare gli studenti con le rappresentazioni. Proponiamo ad esempio una tecnica di insegnamento riportata da Landriscina (2012), chiamata da Clement «co-costruzione di modelli in classe», che consiste nel far costruire agli studenti, insieme al loro insegnante, una progressione di rappresentazioni dell'argomento che si affronta in classe, in modo da stimolare una progressiva raffinazione dei loro modelli mentali e inoltre abituarli a questa pratica, in modo da renderli autonomi. L'insegnante, inoltre, è spinto a discutere con la classe queste immagini, evidenziare con delle domande le ragioni per cui esse non sono una descrizione soddisfacente del fenomeno oggetto di studio, e creare il bisogno di elaborare nuove immagini sulla base di quanto emerso dalla discussione, in un processo iterativo in cui le immagini servono sia a rappresentare i modelli mentali degli studenti che a stimolare la costruzione di nuovi modelli. In questo modo, il disegno diventa così un vero e proprio *strumento cognitivo*, che non richiede necessariamente computer o lavagne multimediali, e può essere un modo efficace per diagnosticare la comprensione di un concetto da parte dello studente (Ladriscina, 2012).

2.3 Testi scolastici come esempio fisico di continuità tra linguaggio quotidiano e matematico

Primo e duraturo veicolo del linguaggio matematico è il manuale scolastico. Al netto di *molto* precoci esposizioni alla matematica, saranno gli insegnanti e il libro di testo a fornire il supporto all'apprendimento e all'uso del linguaggio della matematica dalla scuola primaria fino alla secondaria di secondo grado. Viene quindi di conseguenza naturale, in un lavoro incentrato sul linguaggio come questo, dedicare parte delle riflessioni e dell'analisi proprio a questo strumento didattico tanto fondamentale quanto bistrattato.

Uno dei compiti dell'insegnante, come sappiamo, è l'analisi accurata e la scelta del libro di testo, strumento indispensabile per gli studenti e per il docente stesso. Le caratteristiche che si richiedono a un libro di testo variano con l'aumentare del grado scolastico, con il tipo di scuola dalla quale viene adottato, e anche dal taglio che un docente vuole dare al proprio insegnamento, anche se si possono individuare dei tratti auspicabili comuni a tutti gli ordini scolastici. Sobrero (2009), ad esempio, nel portare avanti questo discorso per la scuola primaria, fa presente al lettore che la scelta del testo vada eseguita tenendo presente una serie di caratteristiche imprescindibili e che comportano la totale esclusione di certi manuali nel caso ne siano privi; uno dei parametri che considera è il *lessico*, che sia abbastanza specifico da permettere agli alunni di interfacciarvisi, a patto che sia adeguatamente introdotto e illustrato. Il dibattito sulla scelta del testo va avanti da tanto, già la GISCEL Sardegna (1988) ricorda che, in generale, i criteri-guida per l'adozione dei libri di testo sono tanti, a partire dalla *chiarezza espositiva* che non deve diventare banalizzazione dei contenuti, fino alla presenza della parte "*applicativa*" della disciplina (problemi, esercizi, ma anche approfondimenti e integrazioni).

L'assenza delle caratteristiche di cui abbiamo accennato è la base su cui si fondano sostanzialmente le critiche principali mosse ai manuali: è fondamentale, ribadisce Sobrero (2009), ricordare che è un diritto-dovere dell'insegnante rifiutare un testo che non rispetti le condizioni che ha stabilito per la propria didattica. Quella della scelta del manuale è un'occasione fondamentale per riflettere sull'impostazione di un percorso didattico ragionato, tenendo conto di tutti i fattori del caso, scelta che influirà su tutto il percorso degli studenti. Alla fine, però, l'unico criterio con cui scegliere un libro di testo è quello dell'*efficacia didattica*, obiettivo che si realizza anche attraverso l'acquisizione del linguaggio specifico di una certa disciplina. Il raggiungimento di tale competenza linguistica non solo è auspicato da docenti in primis, ricercatori, pedagogisti e accademici, ma è stato anche formalizzato, come abbiamo visto, dalle Indicazioni ministeriali per tutti i gradi scolastici. Il problema, noto già alla fine degli anni Ottanta, riportato in particolare da GISCEL Sardegna (1988), dell'insuccesso dei propri alunni aveva portato gli insegnanti a notare, e successivamente ammettere, la scarsità delle competenze linguistiche degli studenti, anche se in quella sede la prospettiva di istituire un percorso *incentrato* sul graduale passaggio dal linguaggio comune a quello matematico non era stata registrata come una necessità diffusa.

Il progetto Italmatica (Sbaragli e Demartini, 2021) fornisce una lente ben strutturata e sensata per analizzare i libri di testo di geometria del corpus che hanno scelto, ma che può essere utilizzata per un generico libro di testo. Consiste nell'analizzare in primis gli *elementi concettuali* e la loro correttezza da un punto di vista matematico, poi quelli *linguistici*, in modo da controllare che questo aspetto non ostacoli la comprensione dei concetti, e infine quelli *grafico-figurali*, col fine di far emergere eventuali criticità nell'uso delle rappresentazioni grafiche e figurali, il cui contributo può essere, come vedremo, fuorviante o molto d'aiuto. Viene sottolineato che l'appartenenza a una delle categorie qui sopra non è esclusiva: una stessa sezione può presentare aspetti problematici sia dal punto di vista concettuale che da quello linguistico. Le criticità emerse sono inoltre state divise considerando l'ambito nel quale creano problemi, se quello matematico o quello didattico.

Tra gli elementi concettuali critici, relativi all'ambito dei poligoni, ma estendibili all'ambito matematico generico, Sbaragli e Demartini (2021) riportano:

- *scorrettezze o imprecisioni matematiche*, cioè affermazioni che contengono inesattezze dal punto di vista matematico. Le coautrici di Italmatica distinguono diversi tipi di difficoltà del genere: in primo luogo, la continua *confusione tra ente geometrico e grandezza*, di cui possiamo citare il concetto di perimetro, che viene considerato in alcuni contesti come un ente geometrico (il contorno delle figure) e come grandezza (la misura del contorno delle figure), discorso analogo a quello di area (a volte considerata un ente geometrico, a volte la misura di tale ente, la superficie). In aggiunta, abbiamo la *confusione tra enti geometrici diversi*, come ad esempio sostenere che un asse di simmetria sia un segmento, quando invece è una retta e, negli esempi dei testi, una porzione di retta. Un altro esempio molto calzante è l'utilizzo del sostantivo "spazio", che fa riferimento alle tre dimensioni, per descrivere enti geometrici bidimensionali, come ad esempio nella definizione «*la superficie di un poligono è lo spazio piano che esso occupa all'interno del proprio confine: è la sua regione interna*»[14].

  In ultimo, si aggiungono *definizioni e proposizioni erronee*: purtroppo le coautrici ne riportano diversi esempi, che riguardano scorrettezze che coinvolgono proprietà, relazioni od oggetti geometrici, come ad esempio il concetto di angolo che in questa definizione è problematico: «*L'angolo interno è la parte del poligono delimitata da*

[14]AA. VV. (2017). *Scoprire insieme. Sussidiario delle discipline matematica-scienze e tecnologia*. Volume 4. Lisciani, pagina 370.

due lati consecutivi»[15]. In realtà, però, un angolo è una parte di piano illimitata, di cui quella nel poligono è solo una porzione: è quindi improprio, se non scorretto, parlare di *parte di poligono* (e in realtà anche di lati consecutivi, dato che sono *rette* che contengono i lati consecutivi). La formulazione dovrebbe quindi essere: «*L'angolo interno è la parte di piano contenuta nel poligono delimitata dalle rette che contengono i due lati consecutivi*»;

- *omissioni* o *impliciti*: informazioni mancanti o non esplicitate adeguatamente. In primo luogo, è opportuno ricordare che esiste una differenza importante tra un'informazione totalmente mancante e una implicita, ma deducibile a partire dal testo.

  Chiaramente, nessun testo è completamente privo di impliciti e/o omissioni, ma è centrale che da una parte il nucleo del discorso sia esplicito, e dall'altra che ciò che manca possa essere agilmente inferito dal testo. Il discorso che fanno Sbaragli e Demartini si incentra, come detto, sui libri scolastici: un testo di quel tipo deve essere costruito in modo da *insegnare* ai propri lettori a carpire gli impliciti e colmare le omissioni in maniera fruttuosa. Il processo di ricostruzione del significato di un discorso o di uno scritto è infatti complesso, e parte del suo buon esito deriva proprio dalla corretta gestione di impliciti e omissioni. Le autrici individuano diversi tipi di omissione:

  - *omissione di relazione*: è una delle più diffuse, e consiste nella mancata esplicitazione di enti coinvolti in una relazione. Gli esempi più comuni, presi in prestito dalla Geometria, riguardano parallelismo e perpendicolarità: non è raro trovare gli aggettivi "perpendicolare" e "parallelo" riferiti a segmenti o rette, senza che venga specificato *rispetto a chi* lo siano, creando espressioni prive di senso matematico. In ambito algebrico possiamo citare inoltre le relazioni di disuguaglianza;
  - *omissione di proprietà o grandezza*: è l'omissione della grandezza alla quale si riferisce una data misura. Dire ad esempio "l'angolo misura…" contiene un'omissione di questo tipo: la dicitura corretta sarebbe infatti "l'ampiezza dell'angolo misura…", dato che gli angoli sono enti geometrici.

[15] *Ibidem*, pagina 379.

Un altro esempio molto diffuso è quello di dire, sentir dire o leggere espressioni del tipo «Misuriamo il rettangolo EFGH con il centimetro»[16], in cui le indicazioni operative fornite omettono a livello linguistico elementi invece necessari per il corretto svolgimento dell'esercizi. In questo caso, non è specificato cosa si voglia misurare del rettangolo, né con quale strumento di misura;

Per quanto riguarda invece gli impliciti, le autrici non riportano classificazioni particolare, ma delineano esempi che riguardano sia *procedimenti* (si veda il processo di verifica della concavità di un poligono) sia *definizioni* (come quella della congruenza tra due poligoni).

- *mancanza di coerenza del testo*, cioè presenza di elementi contradditori e incoerenti all'interno del testo. Possiamo classificare queste incoerenze come relative all'uso di termini o concettuali, e la classificazione dei quadrilateri è molto spesso affetta da entrambe di queste incoerenze.

  Da un punto di vista terminologico, se analizziamo in diversi libri di testo la parola associata alla definizione «*quadrilatero che ha due coppie di lati opposti paralleli ma non tutti della stessa lunghezza*» otteniamo risultati piuttosto variegati, più di quanto ci aspetteremmo, anche all'interno di uno stesso testo: romboide, parallelogramma, parallelogramma comune, parallelogramma generico. Questo diventa un ostacolo nel momento in cui non si esplicita che questi termini sono sinonimi tra loro, facendo andare a cadere la classica biunivocità delle terminologie specialistiche e creando confusione nella classificazione.

  Da un punto di vista concettuale, possiamo far riferimento alla seguente definizione di trapezio: «*I trapezi sono quadrilateri che hanno almeno una coppia di lati paralleli, le basi*». All'interno dello stesso libro, nello specchietto riassuntivo finale, vediamo che però i trapezi vengono classificati come quadrilateri "che hanno solo due lati paralleli". Dare queste due definizioni diverse e discrepanti è purtroppo un'usanza abbastanza diffusa (riportata ad esempio in Martini e Sbaragli (2005)), e la natura di gerarchia inclusiva (problema già trattato nell'ambito del lessico) di questa classificazione rende piuttosto difficile l'apprendimento.

  Ostacoli di questo tipo sono molteplici e investono generalmente tutti gli ambiti della matematica: possiamo ipotizzarne la diffusione in primo luogo perché, se non verificati accuratamente con problemi ad hoc, possono passare sottotraccia e in

[16]AA. VV. (2017). La fabbrica dei saperi. Discipline matematica scienze-tecnologia. Volume 4. Giunti scuola, pagina 342.

secondo luogo perché l'utilizzo da parte di uno studente dei termini "area" o "pentagono" al posto di "superficie" e "pentagono regolare", o simili, potrebbe indurre l'insegnante a non correggerlo perché si attiva involontariamente il principio di cooperazione di Grice di cui abbiamo parlato prima. Il docente, infatti, potrebbe ritenere non necessario correggere l'utilizzo dei termini in ottica magari della fluidità del discorso o della tranquillità dello studente, ma alla lunga non porvi attenzione e rimedio potrebbero portare a problemi nell'interpretazione di testi e discorsi;

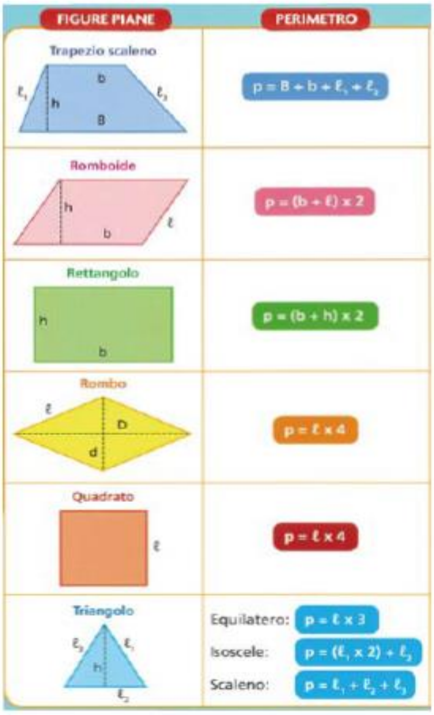
- *esposizioni restrittive*, che includono esempi limitanti, costruzioni vincolanti e restrittive, che risultano non adeguate a evidenziare la generalità di ciò che viene presentato. Spesso infatti nell'esposizione scolastica, anche nei gradi più bassi come la scuola primaria, si tratta di collezioni infinite di oggetti che, attraverso esempi o costruzioni non adeguati, potrebbero essere nella mente degli studenti ridotte di numero. Uno dei casi più comuni si ha nell'esemplificare proprietà generali dei triangoli e usare come esempi triangoli isosceli o addirittura equilateri;
- *Ridondanze*, cioè una sovrabbondanza di informazioni la cui esplicitazione non è necessaria in quanto già contenute all'interno di una data espressione linguistica: sono un problema perché potrebbero risultare non funzionali alla comprensione globale del sapere.

  Una casistica di ridondanze diffuse, sono quelle legate alle *definizioni*: a eccezione della II primaria, come riportano Sbaragli e Demartini (2021) nel corpus italiano di libri di testo di geometria, per gli ordini primaria e secondaria di primo grado, almeno il 7.5% delle definizioni è *ridondante*, con un picco del 25.98% per i testi dedicati alla V primaria (più di una su quattro!). Questa tendenza allontana l'idea che il linguaggio matematico sia esaustivo ma sintetico, per quanto in alcuni casi sia didatticamente sensato inserire delle specifiche in più.

  Altre ridondanze sono quelle legate alle *grandezze*, nate soprattutto dalla confusione tra enti geometrici e grandezze, come abbiamo visto sopra, ad esempio nel caso di "perimetro" e "contorno", o "area" e "superficie" di un poligono. In frasi come "l'area misura…" abbiamo una chiara ridondanza, perché il significato della frase è "la misura della superficie misura…";
- *eccessiva casistica*: elencazione superflua di casi legati a una specifica affermazione o proprietà. Questa problematica non è comune a tutti i testi presi in esame dalle autrici, ma è sicuramente sensato inserirlo in questo elenco, dato che la sua presenza

in alcuni testi di riferimento riflette la sua presenza nella pratica didattica odierna di parte dei docenti.

Un'usanza diffusa e registrata dalle curatrici del volume è quella di inserire *formule ridondanti*, come in questo specchietto riassuntivo sul calcolo del perimetro[17]:



Sarebbe molto più sensato spendere spazio e parole nel testo per lavorare sul *concetto* di perimetro, piuttosto che su "strategie" (discutibili) per semplificare il calcolo e renderlo automatico.

Tale discorso si può ampliare anche al discorso delle *formule inverse*: non è raro, anche nella pratica didattica, che si preferisca fornire agli studenti un elenco di formule, una inversa dell'altra, invece che un'unica formula da cui dedurre tutte le altre. Questa problematica si lega strettamente con la difficoltà diffusa negli studenti più deboli in matematica nel manipolare correttamente le equazioni: forzare gli studenti a ricavare autonomamente le formule inverse e non fornir loro una formula per ogni casistica potrebbe quindi esser visto come estremamente improduttivo nell'ottica del rendimento immediato. Perpetrare però questa sorta di "omertà" riguardo questo ostacolo non fa che aumentare il legame dei ragazzi con formule e meccanismi privi di qualsiasi ragionamento, provocando la totale perdita di senso

[17]Canali, T., & Girotti, G. (2014). *Wikisussi plus delle discipline matematica-scienze e tecnologie*. Volume 4. Minerva scuola., pagina 1.

della matematica, facendola apparire solo come una materia di calcoli e formule sterili.

In ambito aritmetico possiamo anche citare il caso della classificazione delle frazioni, che vengono costantemente divise in *proprie, improprie* e *apparenti*, anche se nella pratica tale classificazione non ha alcun senso, se non stabilire il loro rapporto rispetto a 1. Certo, moltiplicare un numero per una frazione propria rende il numero minore, al contrario di quanto succede moltiplicando per una impropria, ma tale distinzione vale in generale per tutti i numeri minori e maggiori di 1; ciò non giustifica quindi tale suddivisione, che separa invece in maniera ulteriore i numeri scritti in forma decimale e in forma di frazione. La proprietà di cui sopra, infatti, potrebbe essere un modo per far familiarizzare gli studenti con le diverse rappresentazioni dei numeri, quasi come fossero modi di esprimere uno stesso concetto;

- *argomentazioni lacunose*: passaggi argomentativi poco chiari o non esplicitati, o in cui il percorso verso la generalizzazione avviene in modo brusco o sottinteso. È il caso di dimostrazioni, procedimenti e spiegazioni in cui gli autori a volte sopravvalutano in maniera esagerata le capacità dello studente, o sembrano dimenticare il target al quale si rivolgono, omettendo passaggi logici che i ragazzi devono compiere in autonomia (manipolazione di equazioni, applicazione di proprietà di somma e prodotto, …) che in certi gradi d'istruzione non sono scontati.

Tra i problemi relativi all'aspetto linguistico vengono riportati:

- l'*eccessiva nomenclatura*: nei libri di testo si riportano spesso eccessiva nomenclatura, soprattutto nei manuali di scuola primaria. Un esempio è costituito dalla categoria dei *non poligoni*, in opposizione ai poligoni, ma possiamo anche citare tutte le nomenclature legate al concetto (ideato per scopi totalmente didattici) di base, come *angolo al vertice, alla base, lato obliquo*;
- l'utilizzo di *terminologia vincolante* o *errata*. L'esempio precedente è funzionale anche per questa categoria: vincolare gli studenti a individuare sempre una base parallela al bordo del foglio crea problemi di rappresentazione, come hanno anche evidenziato Botta e Sbaragli (2017). È inoltre estremamente restrittivo, inoltre, quando si parla dell'altezza, usare verbi e termini che rimandano al concetto di verticalità, come *cadere*;

- la *complessità morfosintattica*: come detto, i testi dei manuali scolastici appartengono a un genere molto specifico, il cui registro linguistico varia molto, a seconda del grado scolastico a cui è rivolto, e a seconda dei vari intenti che le sue diverse parti hanno. Le sezioni più tecniche adottano un linguaggio che più si avvicina a quello accademico, sia in fatto di stile sintattico che lessicale: la complessità, quindi, aumenta, così come la difficoltà degli studenti nell'interpretarlo.

Infine, da un punto di vista grafico-figurale sono state riscontrate quattro categorie di problematicità:

- il caso in cui le *rappresentazioni* degli enti geometrici siano *fuorvianti o errate*, cioè che non rappresentino correttamente l'ente del quale si sta parlando. Ad esempio, parlando di perimetro è necessario che nelle immagini allegate il contorno dei poligoni sarà indicato come tale, non come perimetro, che è la sua misura, così come è importante evidenziare la distinzione (analoga) tra superficie e area;
- il caso in cui le *rappresentazioni* degli enti geometrici non veicolino il messaggio corretto: ad esempio, nell'elencare i nomi dei poligoni a seconda dei loro lati, vengono rappresentati solo pentagoni, esagoni, ettagoni *regolari*, escludendo la possibilità di poligoni generici o addirittura concavi;
- il caso in cui le *notazioni* di cui le immagini sono corredate siano *fuorvianti o incoerenti*. Le notazioni sono un fattore fondamentale per la coerenza e la continuità all'interno di un testo matematico, in quanto permettono al lettore di capire immediatamente a quale ente geometrico ci si riferisce: per questo, lettere, maiuscole, minuscole, apici, pedici e ogni segno di sorta *devono* essere mantenuti costanti lungo tutto il testo, ma in particolar modo tra figure e testo;
- il caso in cui si avvia *incoerenza tra elementi grafico-figurali e linguistici*. Un esempio molto calzante è quello della classificazione dei quadrilateri: soprattutto in schemi riassuntivi e descrizioni sintetiche si affiancano rappresentazioni iconografiche corrette dei quadrilateri come una serie di insiemi uno contenuto nell'altro, mentre non vi corrispondono definizioni altrettanto corrette. L'insieme dei trapezi, ad esempio, conterrà tutti gli altri insiemi, dai parallelogrammi ai rettangoli e ai rombi, mentre la definizione di trapezio recita che "ha una coppia di lati paralleli". La definizione corretta sarebbe infatti "che ha *almeno* una coppia di lati paralleli".

Puntualizzare alcuni degli ostacoli elencati può sembrare ininfluente o addirittura pedante, ma gli errori di cui ci occupiamo in questo caso sono diffusi anche tra i docenti, oltre ad essere contenuti nei libri di testo: se da una parte è legittimo passar sopra ad alcune scorrettezza e incertezze *degli studenti* in fase di apprendimento, è assolutamente necessario che docenti e autori di testi curino questo aspetto della comunicazione. Questi ultimi sono infatti i mediatori tra il sapere matematico istituzionalizzato e accademico e gli studenti che si interfacciano per la prima volta con la disciplina: il loro ruolo è di guida, e dovrebbe facilitare in ogni modo l'apprendimento.

La centralità del manuale risiede nel fatto che l'insegnamento si fonda prevalentemente sulla lezione frontale, la cui successione di argomenti segue in linea generale l'ordine del testo scelto, rendendo quindi il manuale un supporto importante per lo studio; per lo meno, è un supporto per la *memorizzazione* (non la comprensione) da parte degli alunni di quanto già dato come compreso dopo la spiegazione dell'insegnante, e per confermarlo e consolidarlo attraverso gli esercizi. È più raro (GISCEL Sardegna, 1988) riscontrare la prassi dei docenti di leggere, talvolta, con gli alunni, passi del manuale per spiegarli, anche se non è stata esplicitata la natura di queste spiegazioni, poco probabilmente di natura linguistica. Il manuale, per la maggior parte degli insegnanti, rispetta la struttura tipica del discorso scientifico, e solo in pochi, che gli autori definiscono, a ragione, "i più coscienti", hanno sottolineato che il manuale di per sé è limitato e limitante, anche se si registrano alcune sporadiche eccezioni.

Il testo scolastico, nella sua accezione più generale, appartiene a un tipo testuale molto specifico, definito da A. Ferrari (2019, p. 78) come "espositivo-esplicativo", caratterizzato da una struttura tipica del genere e non riscontrabile in nessun'altra categoria di testo. Un aspetto da notare è la marcata asimmetria cognitiva tra autore e lettore: il primo è il detentore del sapere, e ha redatto il testo per rendere accessibile quel sapere a chi legge, in modo che apprenda e faccia progressi in quella disciplina. La descrizione potrebbe però ricordare non solo i testi scolastici, ma anche quelli scientifici, anche se le differenze tra i due sono piuttosto marcate. I primi sono un esempio di "discorso scientifico pedagogico", in cui la necessità di guidare il lettore marcatamente *non specializzato* all'interno della disciplina forza l'autore a mediare con le esigenze specialistiche della disciplina, da tutti i punti di vista, anche da quello linguistico. Il testo specialistico, invece, si rivolge a un target diverso, di esperti, o quantomeno cultori della materia, che condividono con l'autore delle basi su cui innestare i risultati trattati nel testo. La comunicazione nel caso del testo specialistico, quindi, non è tra esperto e profano, ma tra pari, e questo segna un'enorme differenza in molti aspetti, soprattutto quello linguistico. Inoltre, lo scopo finale dei due testi è profondamente diverso: quello scolastico si propone di sedimentare un apprendimento e una comprensione *profondi* e *sistematici* nella mente dei lettori, che i testi scientifici non si propongono, ma anzi sono spesso particolarmente specifici nella scelta dell'argomento trattato.

Proprio queste differenze rendono assolutamente unico il genere dei testi scolastici, anche da un punto di vista linguistico: troveremo scelte che si adattano alla forma mentis e al livello dei profani per cui è redatto il testo, con argomentazioni più stringate, magari non perfettamente rigorose, come vorrebbe un discorso specialistico. Di conseguenza, tutte le scelte espressivo-comunicative sono peculiari e adattabili a seconda delle necessità comunicative di sorta: a volte, si parla direttamente al lettore, in altre occasioni il discorso è più tecnico, altre più vicino alla lingua comune. Anche l'impostazione del discorso cambia, visto che i testi scolastici scelgono a volte di "narrativizzare" i concetti, rivolgersi al lettore e alla sua esperienza diretta della realtà, strategia assolutamente assente negli altri testi. Gli autori dei testi scolastici puntano non tanto al perfetto rigore del discorso, quanto alla scorrevolezza e alla chiarezza, mediando con la richiesta di precisione e di specificità della disciplina per evitare che il testo sia un ostacolo per chi apprende, coerentemente con lo scopo didattico dei manuali. Da questo punto di vista, all'aspetto lessicale viene data grande attenzione: come detto sopra, il lettore e l'autore *non condividono le stesse basi* disciplinari, il che rende estremamente importante avere sotto controllo la terminologia; ciò significa prevedere sezioni, box e/o glossari in cui specificare il significato di certi termini, in modo da esser certi di consolidare nel lettore un vocabolario specialistico proprio e duraturo. Sono inoltre presenti, all'interno dei testi scolastici, ampie sezioni di attività pratiche per consolidare le parti già spiegate, in maniera da assicurarsi che la lettura della sezione teorica sia effettivamente andata a buon fine, generando la classica impostazione di un testo scolastico, con teoria ed esercizi alternati; si aggiungono in molti casi anche attività laboratoriali, problemi, richiami alla realtà e attività diversificate a seconda della disciplina che permettono al lettore di ampliare il contesto di applicazione dell'argomento in questione. In ultimo, i testi scolastici fanno largo uso del registro grafico-figurale, con anche ottimi risultati confermati dalle ricerche in merito, se tale linguaggio viene usato in maniera proficua, come vedremo nella prossima sezione. Quest'ampio uso di immagini rende importante, molto più che nei testi specialistici, un layout di pagina ottimizzato e anche il rinforzo visivo del legame testo-immagine anche attraverso la scelta dello stile e il colore del testo.

Queste particolarità, che pongono il testo scolastico come un'ulteriore via di mezzo tra i testi specialistici, accademici e divulgativi e i testi *non* specialistici, rendono questa categoria soggetta a continue modifiche, frutto dell'evolversi delle scuole di pensiero in didattica, delle discussioni in seno all'editoria e alla ricerca in materia, ma anche delle esigenze sempre più chiare e sentite degli studenti con Disturbi Specifici dell'Apprendimento.

La posizione intermedia in cui sono situati i testi scolastici può risultare a volte controproducente: nel caso delle dimostrazioni geometriche che si trovano nei testi specialistici, le varie proprietà e postulati che intervengono a costruire la struttura logica della prova non vengono esplicitate, ma date per assodate. Questo accade perché l'autore del testo è certo che chi legge abbia appreso *tutti* i contenuti prerequisiti, o comunque senza troppo preoccuparsi delle conoscenze pregresse, dato che si presuppone che il lettore abbia una certa dimestichezza con i contenuti disciplinari in questione. Anche i libri di testo scolastici, però, rileva Chapman (1995), assumono questo habitus, in maniera totalmente inadeguata rispetto alla preparazione e alla prontezza con cui i lettori possono andar a cercare i perché di certe affermazioni (Sfard, 2000).

Da un punto di vista dell'organizzazione testuale, il manuale scolastico ha caratteristiche molto specifiche, dettate dalle necessità strutturali che abbiamo elencato sopra. Troviamo una divisione in parti (sezioni, capitoli, paragrafi), che espongono ordinatamente gli argomenti in maniera sequenziale, in modo che i lettori siano forniti di tutti i prerequisiti necessari. L'esposizione degli argomenti, a seconda del tipo di argomento trattato, varia: si osserva in maggioranza la modalità *top-down* (dagli aspetti generali a quelli particolari), seguita da quella *bottom-up* (dal particolare al generale); le due modalità si alternano all'interno dei testi, per meglio adattarsi alle necessità di efficienza didattica che abbiamo decretato essere la direttrice di scelta di un manuale scolastico. Le varie sezioni del testo sono inoltre in forte connessione tra loro: è caratteristica peculiare di questi testi avere rimandi alle sezioni precedenti, paragrafi o capitoli che siano, ma anche rimandi a parti diverse di una stessa sezione. Per il caso della matematica, le diverse sezioni sono utili anche per distinguere le parti teoriche da quelle degli esercizi, in cui si mette alla prova ciò che si è letto e auspicabilmente compreso nella parte teorica, generalmente precedente. Ricordiamo che fino a qualche decennio fa, gli esercizi e i problemi erano tutti relegati alla parte finale del libro, mentre ora l'alternanza è molto più fitta e serrata, spesso preceduta da esercizi guidati, a riprova del continuo lavoro della comunità di ricerca in questo senso.

In aggiunta, il testo è *misto* anche da un punto di vista di registri semiotici, in particolare quello matematico, ricco di illustrazioni, figure, box e sezioni specifiche di approfondimento staccate dal corpo principale del discorso. Anche tra queste parti si instaura (o meglio, ci si aspetta che si instauri) un dialogo continuo che riesca ad amalgamare la discontinuità di registro semiotico in maniera funzionale per l'apprendimento. L'utilizzo non sempre coerente di registri semiotici differenti (verbale, figurale, simbolico) all'interno di uno spazio limitato rende infatti, in alcuni casi, difficoltosa la comprensione profonda dell'oggetto matematico in discussione (Canducci, 2019).

Da un punto di vista sintattico, gli autori dei testi scolastici prediligono una struttura essenziale, con frasi brevi e giustapposte l'una all'altra, o al massimo coordinate, soprattutto per i gradi scolastici più bassi. Al salire dell'ordine scolastico si riscontrano strutture più complesse, con subordinate, anche implicite, per l'uso sempre più diffuso del *gerundio*, del congiuntivo (nella specifico uso che se ne fa in matematica, ad esempio in «Sia AB un segmento…») o di forme impersonali. La complessità della sintassi, quindi, cresce al crescere dell'età dello studente, e quindi anche della sua supposta destrezza nel padroneggiare il linguaggio nel quale la matematica viene insegnata, permettendo agli autori di farlo avvicinare al modo in cui la lingua naturale si declina in ambito matematico: l'uso delle forme impersonali e dei gerundi, infatti, non è solo un aumento di complessità fine a se stesso, ma una particolarità del linguaggio matematico. Infatti, utilizzando tali forme verbali in modo sistematico si riesce a spostare il focus dell'attenzione non su *chi* compie l'azione, ma sull'azione stessa, che è appunto il fulcro del discorso matematico. L'utilizzo di queste forme verbali eleva il registro del discorso verso quello elevato della matematica. In aggiunta, si nota anche un aumento anche dei processi di nominalizzazione, che abbiamo visto rendere *impacchettato* il discorso, quindi più difficile da interpretare e comprendere.

Si riscontra però, per quanto riguarda i testi dei primi anni della scuola primaria, anche una tendenza in senso opposto. Molte frasi vengono strutturate in maniera complessa attraverso la costruzione *per + verbo all'infinito*, come ad esempio «Per calcolare il perimetro del poligono somma le misure di tutti i suoi lati»[18], mentre sarebbe più semplice formulare la frase come «il perimetro del poligono si calcola sommandole misure di tutti i suoi lati»: quel modo di costruire la frase, però, ha il grande vantaggio di spingere gli studenti a *fare*, a mettere subito in pratica

[18] Girotti, G. (2016). C'era una volta… una classe terza. Disciplina matematica. Volume 3. Minerva scuola., p. 107

quanto letto, ed è proprio lo scopo che gli autori vogliono raggiungere, al prezzo di un piccolo aumento di complessità.

La sintassi dei manuali fornisce ampi spazi di riflessione anche per quanto riguarda l'uso dei *connettivi* e del loro uso, a volte improprio. In particolar modo, possiamo citare il connettivo *quindi*, connettivo consecutivo di cui spesso si registra un uso inappropriato, come in questa definizione: «*Poligoni che occupano la stessa superficie, e quindi hanno la stessa area ma forme diverse, si chiamano equiestesi*»[19]. Il significato del connettivo, in questo caso, implica l'esclusione del caso in cui due poligoni possano essere congruenti, il che potrebbe provocare un cortocircuito cognitivo nel caso appunto si vadano a indagare aree di poligoni congruenti.

Sempre parlando di connettivi, si riscontrano invece casi in cui la loro presenza sarebbe necessaria per eliminare ambiguità relative al discorso che si sta facendo, come in questo estratto: «*I poligoni sono figure piane delimitate da una linea spezzata chiusa, non intrecciata*»[20]. In questo caso, l'ambiguità generata dalla virgola si sarebbe evitata con l'utilizzo di una *e* per evitare di porre in rapporto di sinonimia gli aggettivi "chiusa" e "non intrecciata", che sinonimi non sono, ma anzi, sono le condizioni necessarie e sufficienti per essere un poligono. Sbaragli e Demartini (2021) riformulano la definizione inserendo questa congiunzione o addirittura eliminando la virgola: in questo modo il senso di separazione delle due proprietà rimane inalterato e soprattutto non ambiguo.

Il caso completamente opposto è quello dell'uso o dell'assenza di *cioè*, congiunzione con funzione dichiarativa ed esplicativa, che in molti casi viene omessa, lasciando magari solo una virgola ad esplicitare il legame logico tra due parti del discorso, come nel caso di «*Osserva: un poligono equilatero ha tutti i lati uguali, della stessa lunghezza*»[21]. Anche in questo caso la virgola non è sufficiente per rendere chiaro il rapporto tra "ha i lati uguali" e "[sono] della stessa lunghezza": come nel caso precedente, le informazioni potrebbero essere separate, ed entrambe necessarie affinché un poligono sia definibile equilatero, così come una linea spezzata deve essere sia chiusa che non intrecciata affinché la figura piana che descrive sia un poligono. Va sempre ricordato, però, che l'uso di un connettivo potrebbe non essere sufficiente per spiegare il profondo legame logico e matematico tra le parti che il connettivo mette in relazione: per essere esplicitato, tale legame potrebbe necessitare di un buon controllo sia sulla parte

[19] Bordi, G., Bertella, A., & Ronca, A. (2016). Piccoli eroi. Discipline volume unico. Volume 3. Fabbri editori., p. 106
[20] Bardi, S., & Raimondi, S. (2017). Uno per tutti super! Discipline matematica-scienze e tecnologia. Volume 5. De Agostini., p. 287
[21] Fabbri, C., Giarolli, S., Marchetti, O., Rigoni, G., & Toso, E. (2017). Super favoloso! Discipline matematica-scienze. Volume 3. Editrice La Scuola., p. 74

linguistica (cosa significano i connettivi) che su quella contenutistica (quali sono i concetti messi in gioco dalle frasi).

Anche il ruolo della punteggiatura, come abbiamo iniziato a vedere e come approfondiremo nel capitolo successivo, è determinante considerando quanto possa incidere sulla sintassi. Un caso emblematico è quello degli incisi, che hanno un impatto notevole sulla sintassi e in particolare sulla gerarchizzazione delle informazioni: proprio per questo rilievo è opportuno prestare attenzione a ciò che si inserisce in un inciso. Il rischio è quello di porre in secondo piano informazioni che invece sono fondamentali all'interno del discorso, col risultato di oscurarle e rendere quantomeno meno intellegibile il testo, oppure di rendere implicito il rapporto a volte complesso tra la frase principale e il contenuto dell'inciso. Una delle soluzioni per rendere più intellegibili i testi, riporta la ricerca (ad esempio Sbaragli e Demartini (2021)), è quella di separare le frasi con un segno di interpunzione forte, che sia un punto fermo o un punto e virgola, anche con la possibilità di ripetere parti del discorso per mantenere intatto il senso originale la frase.

Sul piano lessicale, la ricerca in merito (Sbaragli e Demartini, 2021) evidenzia una sostanziale dicotomia nella composizione qualitativa del discorso, in un'alternanza (spesso anche in una breve porzione di testo) di lessico piano e specialistico. Questa successione, che potrebbe sembrare una forzatura, deriva dallo scontro tra due necessità, proprie del linguaggio quotidiano e matematico: da una parte gli autori cercano di utilizzare un lessico non troppo ricercato, che sia anche parzialmente accattivante, o perlomeno non respingente, mentre dall'altra hanno l'obiettivo di creare progressivamente negli studenti un vocabolario di termini tecnici sistematico, che possa accompagnarli per almeno parte del loro percorso di studi. Il ruolo dei manuali scolastici per far lavorare gli studenti sul lessico è centrale: la sperimentazione attiva e variata, accompagnata dalla verbalizzazione di ciò che si sta vivendo, è un ingrediente chiave per promuovere l'arricchimento del lessico disciplinare. Queste piste operative sono, per quanto riguarda i libri di matematica, difficilmente proposte, neanche come suggerimenti di attività d'aula. Infatti, mentre per alcuni elementi di collegamento con la realtà e di attenzione alle competenze la manualistica presenta tratti di rinnovamento, per quanto riguarda gli aspetti linguistici e specificamente lessicali si verifica un generale adagiarsi su modi tradizionali, comprensivi di scelte terminologiche e di stilemi sedimentati nel tempo. Osservare più da vicino la natura dei vocaboli dei libri di matematica per la scuola e quantificarne la presenza nei testi è un primo passo per ripensare il quadro d'insieme delle parole disciplinari da proporre in contesto didattico, distinguendo le necessarie, dalle accessorie, dalle inopportune, e cogliendone le differenze.

Un'altra interessante riflessione sul lessico dei libri di testo, portata avanti da Canducci, Demartini e Sbaragli (2021), riguarda la categoria grammaticale del *numero*, che verrà adeguatamente approfondita nella sezione riguardante la morfosintassi del linguaggio matematico.

I manuali di matematica, come detto, cercano di indirizzare gli studenti alla creazione di un autonomo pensiero matematico, anche attraverso come strutturano le loro componenti. Nello specifico, una componente molto comune all'interno dei testi scolastici *e* specialistici è la *definizione*. L'atto di definire è un processo codificato all'interno del modus matematico, e rispetta delle regole non scritte ma codificate dalla lunga storia della disciplina; già Aristotele scrisse che una definizione, per essere ben fatta, deve essere chiara e non ridondante. Da quel momento, l'atto di definire, in matematica, ha sempre dovuto rispettare tali caratteristiche, affinandosi nel tempo fino ad assumere gli aspetti di sinteticità ed eleganza che vi troviamo oggi. Nel linguaggio comune, definire è però un sinonimo di *descrivere*, anche se da un punto di vista matematico sottendono due processi completamente diversi: tale distanza porta quindi gli studenti a non sviluppare autonomamente, in ambito matematico, un'attitudine definitoria appropriata. L'atto di descrivere, infatti, è caratterizzato dalla Treccani come il «*rappresentare con parole un luogo, un oggetto, una persona, notandone gli aspetti, le qualità, ecc. […] Anche, di cose astratte. […] Di fatti, esporli in modo da farne seguire con l'immaginazione lo svolgimento, le manifestazioni, fin nei minimi dettagli*»[22]: leggiamo quindi come le caratteristiche di essenzialità di cui abbiamo parlato poco sopra sono assolutamente lontane dalle dinamiche della descrizione. Anzi, in estrema sintesi, si potrebbe dire che le descrizioni siano definizioni ridondanti. Per essere chiari: la frase «un triangolo è un poligono con tre lati e tre angoli» è una descrizione, non una definizione, mentre una definizione di triangolo è «poligono con tre lati». Il testo di un manuale è costruito in modo che il lettore già sappia che i poligoni sono figure delimitate da linee spezzate chiuse non intrecciate, sappiamo cosa sia un angolo, un lato, e di conseguenza, è sufficiente dire che «un triangolo è un poligono con tre lati» per *definire* cosa sia un triangolo; il fatto che abbia tre angoli deriverà dalla natura di poligono del triangolo, non c'è bisogno di inserirlo nella definizione. In questo attrito, il libro di matematica può essere d'aiuto, fornendo un esempio di com'è che si dovrebbe definire un concetto da un punto di vista matematico. Sbaragli e Demartini (2021) hanno raccolto e

[22] https://www.treccani.it/vocabolario/descrivere/

analizzato le definizioni del corpus di libri di geometria italiani per la primaria e la secondaria di secondo grado, andando a studiare anche il rapporto di definizioni *ridondanti* all'interno del corpus. I dati non sono confortanti: almeno il 7.5% delle definizioni analizzate risulta ridondante, con un aumento di più del doppio tra la IV primaria e la I secondaria di primo grado. In sostanza, non si riscontra la volontà di abituare gli studenti, man mano che il grado scolastico (e la dimestichezza con la matematica) aumentano, alle caratteristiche tipiche delle definizioni matematiche, alle caratteristiche tipiche delle definizioni matematiche.

Capitolo 3 – Continuità tra linguaggio quotidiano e matematico da un punto di vista lessicale e morfosintattico

In questo capitolo spostiamo la nostra lente sul linguaggio matematico nella sua interezza, nella sua declinazione "più pura", cioè quella utilizzata negli ambiti più tecnici, non modificata dall'intento didattico o comunicativo, a confronto con il linguaggio quotidiano e colloquiale.

Il linguaggio che incontriamo a scuola, nei libri di testo e nelle conversazioni orali, infatti, è una curiosa mescolanza, come abbiamo visto, tra questi due linguaggi, che si influenzano reciprocamente, con la consapevolezza o meno di chi parla, o scrive, e legge.

L'approfondimento che segue, come da titolo, si focalizzerà sull'aspetto *grammaticale* della continuità tra linguaggio matematico e quotidiano, poiché non solo la dimensione testuale definisce il linguaggio come tale. Come vedremo, molti tratti specifici della lingua matematica risiedono in aspetti lessicali o sintattici, ed è fondamentale porvi attenzione, non tanto per una questione di eccesso di zelo, ma perché il linguaggio, come abbiamo detto, è lo *strumento* che permette di veicolare i concetti matematici. Avere sempre maggiore consapevolezza dello strumento che quotidianamente si maneggia in ambito didattico e comunicativo permette di ottimizzare uno degli aspetti del processo di insegnamento-apprendimento.

3.1 Lessico

In una riflessione approfondita sul lessico, è in primo luogo importante *utilizzarlo* correttamente: come fa notare Balboni (2000), interfacciandoci con le *microlingue scientifiche*[23], nel nostro caso quella matematica, il linguaggio tecnico non ha al suo interno semplici parole, ma *termini*. Non si sta rinnegando la classificazione del lessico matematico riportata nel primo capitolo, ma si sta ragionando a un livello diverso: le parole del linguaggio quotidiano hanno una caratterizzazione spesso soggettiva e incerta, mentre ciò non accade per il linguaggio scientifico. I termini, infatti, perdono (in linea teorica) ogni tipo di connotazione culturale e individuale, garantendo, generalmente, un grado di chiarezza e precisione molto maggiore, diventando una «unità puramente denotativa» (Balboni, 2000). La caratterizzazione delle parole tecniche come termini, nell'accezione di Balboni, comprende quindi *tutte* le parole alle quali abbiamo attribuito un'etichetta nella sezione precedente. Oltre al carattere denotativo dei termini, l'autore riporta altre caratteristiche specifiche dei termini, come il fatto di essere

[23] Definite dall'autore come «varietà di lingua, uno cioè dei sottosistemi che costituiscono, intrecciandosi e non giustapponendosi, il macrosistema linguistico» (Balboni, 2000).

tendenzialmente non ambigui, cioè monoreferenziali: ogni termine, infatti, viene usato per designare un solo concetto, oggetto o processo all'interno della disciplina.

Una caratteristica ulteriore è la *stabilità*: con ciò si intende la tendenza, una volta che un termine viene accettato dalla comunità scientifica o professionale di appartenenza, a non cambiarlo. È infatti noto che l'uso di alcuni termini tecnici matematici, ma anche giuridici, biologici, fisici sia cementato da decenni, se non secoli, come il termine *funzione*, introdotto da Gottfried Leibnitz a metà del Seicento, rimasto inalterato fino a oggi. A tal proposito è interessante notare come la tendenza, in questi campi, sia quella di preferire termini magari obsoleti, ma non ambigui e condivisi globalmente, a termini che potrebbero essere più precisi o appropriati, ma che dovrebbero essere introdotti ex novo in una comunità già comodamente adagiata sull'uso di un termine già esistente. Tale conservatività è però minata, in tempi recenti, dalla globalizzazione del sapere, e dal preponderante uso della lingua inglese come lingua neutra della ricerca.

In ultimo, Balboni (2000) individua come caratteristica dei termini tecnico-scientifici il fatto che possano talvolta essere utilizzati come mezzo di riconoscimento tra membri della stessa comunità scientifica. Dal modo in cui espone tale riflessione, però, appare una visione della comunità scientifica, in particolare medica, molto elitaria, che utilizza ad hoc espressioni poco intellegibili, sia appartenenti al linguaggio medico che alla lingua quotidiana, per affermare una presunta superiorità intellettuale su pazienti o persona di bassa estrazione culturale. Tale aspetto è sicuramente presente anche in ambito matematico, ma è un atteggiamento che attualmente si registra in maniera sempre minore, anche per il fenomeno di globalizzazione dell'informazione e di ampliamento delle possibilità di accesso all'istruzione specialistica accademica.

La terminologia, cioè lo studio dei termini appartenenti alle discipline tecnico-scientifiche, è una branca della *lessicografia*, nonostante si riportino alcuni autori (come Sager, Taylor) in letteratura che vogliono vederle come discipline separate, anche se molto connesse. In particolare, per l'italiano, l'estensione della terminologia matematica rispetto al lessico totale viene attestata da un'analisi di De Mauro (1984) sul *Lessico universale italiano* intorno al 2.2%. L'autore riporta che su 263000 lemmi (tra cui nomi propri, parole e termini), sia monosemici che polisemici, il dominio della matematica si attesta terz'ultimo tra 18 categorie di saperi (che occupano i due terzi del lessico totale) con appunto la percentuale di poco superiore al 2%.

Nell'introdurre le caratteristiche generali dei termini, Balboni (2000) parla di parole *tendenzialmente* non ambigue. L'inserimento dell'avverbio non è effettuato senza una ragione, ma si accoda alla tesi già presente in letteratura che stabilisce un ruolo importante, in questo ragionamento, del concetto di *contesto*. Infatti, anche nei linguaggi tecnico-scientifici non è sempre detto che esista una biunivocità *assoluta* tra termine e concetto, ma che, stabilito il contesto microlinguistico in cui ci si muove, allora il significato di quel termine è univoco. Nel caso della matematica, ad esempio, possiamo pensare all'aggettivo "algebrico", che riferito a "equazione", "calcolo", "somma" assume ogni volta significati diversi, che però non si sovrappongono e non creano confusione proprio in virtù dei diversi contesti di utilizzo. Il concetto di contesto viene ripreso anche da Cazzato (2011) che, in accordo con Preti (1953) e Gilbert (1945), afferma che proprio la contestualizzazione di un termine in ambito matematico può appunto dirsi assolutizzante: questo perché, confinato in una branca specifica della disciplina, il termine non possiede altro significato se non quello che assume all'interno del proprio «universo del discorso» (Preti, 1953). L'esempio che cita l'autore è molto calzante: il concetto di "linea retta" definito dagli assiomi euclidei *non significa altro* nell'ambito geometrico, mentre fuori da questo sistema hanno un altro significato.

Approfondendo il discorso sul lessico matematico, possiamo analizzare la *struttura* dei termini matematici. In generale, come leggiamo in Balboni (2000) i termini tecnici possono essere generati da elementi greco-latini, o tramite il ricorso a prestiti, calchi e traduzioni da altre lingue o, alternativamente, tramite metafore o analogie.

Per quanto riguarda la matematica, è raro trovare termini appartenenti alle ultime due categorie, in cui troviamo con più facilità, ad esempio, termini informatici, branca decisamente molto più recente rispetto alla millenaria matematica: internet si *naviga* come marinai su una barca, i device come computer e smartphone hanno *memoria* come gli esseri umani, come loro sono soggetti agli attacchi di *virus* e si compongono di *software* e *hardware*. Insieme a questi termini si possono considerare anche quelli derivanti da *sigle*, come per esempio *laser* (da Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation), o da onomatopee, come il verbo *cliccare*.

È importante notare che il caso della matematica è abbastanza peculiare, considerando che la maggior parte del suo lessico si è consolidato nel corso di una tradizione millenaria che non è così diffusa tra le altre scienze. Il lessico matematico è molto ricco di parole di origine greca e latina, come ad esempio per "ascissa" (da *abscissam*, participio passato di *abscindo*, taglio), "addizione" (da *additio, -nis*, da *additio*, aggiungo), "equazione" (da *aequatio, -nis*, uguagliamento), ma anche "angolo" (da αγκύλος, curvo), "ellissi" (da ἒλλιπσις, mancanza, perché l'ellissi era ritenuta un cerchio imperfetto). Si noti che praticamente tutta la terminologia geometrica deriva in maniera abbastanza prevedibile dal greco, considerando il cruciale contributo di Euclide, ma anche di Aristotele e Platone, nel costruire una prima struttura logica della geometria. Barozzi (2001) evidenzia come molte parole abbiano un'etimologia produttiva, come *isoscele*, derivante dal greco ἰσοσκελή, composto di ἴσος, "uguale" e σκέλος "gamba, lato".

Si registrano anche ampi fenomeni di prestito lessicale da altre lingue, come l'arabo: è il caso di "zero" (da *sefir,* radice anche della parola "cifra"), considerando che l'Europa non aveva il concetto di zero, al momento della sua introduzione insieme ai numeri arabi e alla notazione posizionale. È rilevante anche il caso del termine "algebra", da *al-ğabr*: quest'ultima parola, in realtà, ci fornisce anche un esempio di formazione di parola per metonimia[24], visto che la parola araba non denota la disciplina intera, ma solamente l'operazione di "trasporto" di un termine da un membro all'altro di un'equazione. Si rilevano anche prestiti dal francese, per "suriettiva", da *surjectif.*

La peculiarità del linguaggio matematico, però, risiede nel fatto che, andando oltre un certo grado di astrazione, per nominare nuovi concetti e oggetti, si tende a non inventare parole dal nulla. In particolare, nell'Ottocento, quando cominciarono ad essere inventati nuovi strumenti e branche della matematica, si ricorse al greco, lingua colta per eccellenza, e al latino, lingua internazionale del progresso scientifico, per introdurre nuovi termini. Tali parole, però, vennero scelte appositamente per essere *evocative*: è ad esempio il caso di *logaritmo,* ideato da John Napier a partire da λόγος, "proporzione" e ἀριθμός, "numero", o dell'aggettivo *prostaferesi*, unendo πρόσθ(εσις), "aggiunta" e ἀφαίρεσις, "sottrazione", o anche di "omomorfismo" (dall'aggettivo ὁμοιόμορφος, "dalla stessa forma"). In alternativa, si utilizzano parole già esistenti nel linguaggio quotidiano, come "reticolo", "ideale", "toro" (la terminologia matematica condivide l'etimologia non con il bovino, ma con un tipo di modanatura), "successione", "connesso", "aperto", "crescente" a cui si assegnano nuovi significati: sono queste, come abbiamo visto, le parole a più alto rischio di creazione di difficoltà ed errori. L'apprendimento del significato matematico, infatti, verrà necessariamente influenzato, come abbiamo visto, dal significato non tecnico della parola, portando a misconcezioni che abbiamo osservato nella sezione precedente.

[24]Dall'enciclopedia Treccani: «Procedimento linguistico espressivo, e figura della retorica tradizionale, che consiste nel trasferimento di significato da una parola a un'altra in base a una relazione di contiguità spaziale, temporale o causale, usando, per es., il nome del contenente per il contenuto, della causa per l'effetto, della materia per l'oggetto, del simbolo per la cosa designata, del nome dell'autore per l'opera, del luogo di produzione o di origine per la cosa prodotta, dell'astratto per il concreto, e simili». Definizione consultabile al link: https://www.treccani.it/vocabolario/metonimia/.

Ricordiamo inoltre come esista la possibilità, meno sfruttata, di utilizzare per oggetti e strutture matematiche i nomi dei rispettivi inventori, come nel caso delle “algebre di Boole” o quelle “di Lie”.

In ogni caso, al fine di creare nuovi termini trasparenti per l’intera comunità scientifica *mondiale*, si utilizzano diversi stratagemmi per renderli più facilmente comprensibili. In primo luogo, è frequente l’inserimento di particelle di origine greca e latina, il cui significato è ormai universalmente noto a studiosi di ogni disciplina: la pratica, infatti, ha radici antiche, fin da quando il latino era la lingua universale della comunicazione internazionale. È opportuno specificare, però, che in un contesto globalizzato come quello attuale, in cui lo studio delle lingue classiche non è diffuso come in alcuni paesi europei come l’Italia, le particelle utilizzate sono quelle più note, come gli affissi “ipo-/iper-”, “macro-/micro-“ e “mono-/pluri-“. Al latino si va sostituendo la lingua inglese, non tanto nell’uso di particelle come quelle latine e greche, ma nella formazione di parole tramite calchi, prestiti o traduzioni, in una strada sempre più spianata verso l’internazionalizzazione dei linguaggi scientifici.

La terminologia matematica, come abbiamo ampiamente visto, si compone di un’ampia varietà di lemmi, alcuni, come detto, propri esclusivamente della disciplina, e altri in comune col linguaggio quotidiano. Cazzato (2011) li divide in categorie, facendo riferimento al *Grande Dizionario della Lingua Italiana* (GDLI)[25]:

- entrate non incluse nel dizionario, tra cui figurano termini come *antisimmetria*, *biettivo*, *confrontabile*, *controimmagine*. Nello specifico, alcuni di questi, i primi due ad esempio, non sono presenti neanche nel GRADIT[26], mentre tale dizionario riporta ad esempio *confrontabile* col significato di "che si può confrontare". Lemmi come quest’ultimo, riflette Cazzato (2011), la cui presenza in dizionari come il GDLI dipende dalla frequenza d’uso, sono quelli, della loro categoria, più esposti al rischio di banalizzazione da parte di chi apprende, nello scenario in cui quest’ultimo si affidi proprio al dizionario per comprendere il senso del termine che ha davanti, o che, avendo già noto il significato del termine in senso comune, non sospetti dell’accezione matematica che esso assume;
- entrate monosemiche di accezione puramente matematica, come *algebra, apotema, ascissa, circocentro, coseno, coefficiente*. Questo tipo di lemmi presenta quello che,

[25]Il GDLI è stato pubblicato tra il 1961 e il 2002, I Supplementi sono usciti nel 2004 e nel 2009. La versione messa in Rete nel sito dell’Accademia della Crusca risponde fedelmente alla forma del dizionario stampato dalla casa editrice UTET. (consultabile digitalmente al link https://www.gdli.it/).
[26]De Mauro: 1999-2003, *Grande dizionario italiano dell’uso*.

riporta Cazzato (2011), citando Serianni (2003, pagina 25), un “grado di impenetrabilità” molto alto per gli studenti e ciò, al contrario di molti altri termini tecnici, rende questi lemmi meno esposti al rischio di banalizzazione, non avendo altro significato oltre quello matematico.

- entrate monosemiche di altra accezione, il cui utilizzo matematico non è riportato nel dizionario, tra le quali figurano parole come *analogia, assiale, cartesiano, congetturare*. In questa categoria, al contrario della precedente, l’accezione matematica è completamente assente dai dizionari etimologici, o, se riportata, è di molto successiva a quella altra. Come nel primo caso, anche per questi lemmi il rischio di banalizzazione è molto alto, soprattutto se non viene fatto esplicito riferimento al contesto di applicazione, o se chi legge non è guidato da un esperto all’interpretazione del termine. Per entrare nello specifico, il termine *cartesiano* ha come principale riferimento quello alla *filosofia* cartesiana, e il significato di aggettivo legato al piano che abitualmente si usa in matematica è molto successiva.
- entrate polisemiche, sono quelle con più di un significato, e possono essere classificate in:
  - entrate polisemiche la cui accezione altra sia individuata come principale: sono lemmi come *acuto, assorbente, chiuso, consecutivo, cubo, assioma, arrotondare, altezza*. Di questi, l'accezione matematica è riportata in secondo luogo, o non è riportata affatto in alcuni dizionari. La continuità dei distinti significati di questi lemmi permette loro di diventare strumenti di contatto tra la matematica e il linguaggio comune, anche perché il linguaggio utilizzato dal dizionario per descrivere i termini di questa categoria si avvicina molto al linguaggio tecnico-scientifico.
  - entrate polisemiche la cui accezione matematica sia individuata come principale, come *cerchio, addizione, moltiplicazione, cono, curva, centro, circonferenza*. Anche in questo caso, il metalinguaggio adottato per la loro definizione rispecchia un tasso di specialismo molto vicino a quello matematico.
  - entrate polisemiche di sole accezioni altre, ma che vengono comunemente utilizzate anche in contesto matematico, sia con significati specifici, come ad esempio *affine, approssimato*, oppure è abitudine utilizzarli nel discorso matematico, come *contraddizione, coppia, condizione.* L’appartenenza di questi termini al lessico matematico è talmente sfumata che il rischio di fraintendere il significato *specifico* è elevato.

Per chiarezza, riportiamo alcuni esempi di parole polisemiche, il cui significato utilizzato nella lingua quotidiana entra in conflitto con quello matematico, aprendo alla possibilità, se non trattato con attenzione, di creare misconcezioni.

In primo luogo, la già citata parola *altezza*, entrata polisemica il cui significato altro è riconosciuto come principale: il vocabolario Treccani definisce l'altezza come; «In generale, una delle tre dimensioni di un corpo, di solito quella verticale […]. In termini più precisi, la distanza, misurata verticalmente, di un punto da una superficie o da una linea di riferimento: *fissare la mensola a due metri di a. dal pavimento*. Genericam., distanza verticale dalla superficie terrestre: *l'aquila*, *l'aeroplano volava a grande altezza*»[27]. Quello che quindi possiamo evincere è lo stretto legame tra la parola altezza e il concetto di *verticalità*. Tutti i termini spaziali, "verticale" incluso, sono però totalmente insensati all'interno del discorso matematico e nello specifico geometrico. La misconcezione che quindi si genera è che il segmento che gli alunni pensano e quindi tracciano come altezza sia non tanto perpendicolare a un lato specifico, ma perpendicolare al foglio sul quale si sta scrivendo, quasi come fosse presente la forza di gravità a guidare la matita. Tale tendenza è abbastanza preoccupante da una parte perché è già presente nei bambini della scuola primaria (Sbaragli, 2016), sia perché viene rafforzata dalle sfortunate scelte didattiche di alcuni libri di testo, che suggeriscono il filo a piombo come aiuto visuale per la comprensione. Chiaro è che tale associazione vada in primo luogo evitata ma anche individuata ed eradicata, anche perché se non le viene dedicata la giusta attenzione, rimane cementata nell'immaginario degli studenti. Botta e Sbaragli (2017) hanno infatti verificato che in alcuni item delle prove INVALSI (sottoposte ad alunni del terzo anno di scuola secondaria di primo grado e del biennio della scuola secondaria superiore), la maggior parte degli studenti non riconoscano un segmento esterno al triangolo che era loro sottoposto come altezza, improvvisando strategie e percorsi di risoluzione più lunghi, complessi e spesso fallimentari.

Altra influenza distruttiva della polisemia è l'utilizzo nel linguaggio colloquiale che si fa del concetto di *moltiplicazione*, associata con l'aumento di quantità: il vocabolario Treccani recita, infatti, che per moltiplicazione si intende «il fatto di moltiplicarsi, aumento numerico, rapido accrescimento: *la m. degli abitanti di una città*, *dei primi cristiani*, *la m. dei debiti*, ecc. (in questi casi, più com. *il moltiplicarsi*). In partic., il moltiplicarsi degli organismi mediante la riproduzione biologica: *la m. degli animali*, *delle piante*; *il caldo e il sudiciume favoriscono la*

[27] https://www.treccani.it/vocabolario/altezza/

m. delle mosche»[28]. In matematica ciò è vero soltanto se i numeri moltiplicati sono interi, mentre sappiamo che ciò può diventar falso se moltiplichiamo in $\mathbb{Q}$.

Un altro esempio di questo tipo è quello riguardante il termine "ipotesi". La riflessione di Rosetta Zan (2007) nasce da un confronto con la figlia Alice che, nell'analizzare i teoremi, continua a confondere ipotesi e tesi: una volta accertato che il problema fosse sistematico e non frutto di fattori esterni, la madre-autrice scopre, andando oltre l'errore in sé e facendo domande alla figlia, che il problema era di natura *lessicale*. Alice, infatti, argomenta che «*Quando in un discorso normale, o anche nelle scienze, diciamo 'faccio un'ipotesi' poi però dobbiamo far vedere che è vera... Cioè la dobbiamo dimostrare*»: la sovrapposizione tra queste due accezioni del termine ipotesi genera un cortocircuito per cui l'ipotesi si sovrappone alla tesi. Quello che infatti la ragazza intende con la sua accezione di ipotesi è ciò che in matematica si chiama *congettura*, anche se, appunto, in italiano, sono sinonimi. In questo caso, però, il conflitto tra linguaggio quotidiano e matematico avviene su un doppio livello, dato che anche gli insegnanti alimentano involontariamente questa tensione, utilizzando nell'accezione di congettura la parola ipotesi, anche durante l'ora di matematica. Questo uso di termini diversi per indicare la stessa cosa in contesti diversi (ipotesi e congettura), unito alla contrapposizione dei significati della stessa parola (ipotesi) in contesti diversi, genera appunto tensione che sfocia nel cortocircuito portato alla luce da Alice, ma sicuramente silenziosamente presente in molti studenti.

Come abbiamo visto, il fattore *polisemia* è centrale nella continuità tra linguaggio matematico e quotidiano, che però possiamo affiancare anche al fattore *omonimia*. I due fenomeni vengono presentati spesso in coppia, uno come il complementare dell'altro: infatti, se la prima è la coesistenza in un segno unico di diversi significati, la seconda è invece il fenomeno per cui due parole di etimologia e significato diversi, condividono il suono o, per lo meno, la grafia. Possiamo in realtà distinguere, come specifica De Mauro (2005, pagina 40), citato in Cazzato (2011), omonimi "relativi", come ad esempio *bolle*, dal sostantivo *bolla* e dal verbo *bollire* declinato al presente indicativo alla terza singolare, e "assoluti", come banda. Su questa grafia convergono infatti diverse etimologie e significati:

- il provenzale *banda*, probabilmente derivato dal latino medievale *banda*, nel senso di "partito, fazione", che porta al significato italiano di "lato, parte" o di "ciascuno dei due lati di una nave"[29];

[28] https://www.treccani.it/vocabolario/moltiplicazione/
[29] https://www.treccani.it/vocabolario/banda1/

- il latino *bandum*, “insegna”, al plurale *banda*, “partito, fazione”, sul quale converge anche il gotico *bandwō*, ”segno”, che portano al significato di “insegna di corpi militari”, “reparto di soldati”, o anche “compagnia di suonatori”[30];
- dal franco *binda*, che conduce al significato di “porzione stretta e lunga di stoffa”[31].

In ambito matematico, la parola *binomio* è quella che esemplifica meglio i rapporti di omonimia, con una distinzione molto spiccata tra i due significati e le rispettive etimologie: da una parte il latino *binominis*, “con due nomi”[32] che ha portato all’aggettivo dallo stesso significato in italiano, e dal latino medievale *binomium*, calco del greco ἐκ δύο ὀνομάτων, “di due nomi”, che ha invece generato il sostantivo maschile che assume significato matematico di “somma algebrica di due quantità qualsiasi” (e anche di “accostamento di due nomi idealmente e strettamente congiunti”)[33].

In aggiunta, come abbiamo accennato in precedenza, la continuità tra i due linguaggi vive anche nei rapporti di *sinonimia* tra le parole: abbiamo visto nel primo capitolo, come riportato da Zan (2007), il caso di ipotesi/congettura. Fenomeno analogo si riscontra anche tra parole come banale/facile e criterio/condizione sufficiente, tra cui sussiste una relazione di sinonimia che porta a possibili fraintendimenti quando le si usino in ambito matematico. Notiamo come queste parole siano non tanto relative a oggetti matematici specifici, ma a parole che vengono utilizzate nella costruzione di discorsi, argomentazioni, dimostrazioni e proposizioni. Nel caso della coppia banale/facile, infatti, nel linguaggio comune la prima assume il significato di comune, ovvio, scontato, mentre in contesto matematico viene usato, oltre che per “ovvio” (cioè immediato, facile), ma anche “privo di interesse o significato”, e in aggiunta anche “di immediata deduzione in base a quanto già noto”. Ne viene quindi che utilizzare la parola “banale” senza il giusto contesto o le giuste specifiche può portare non solo al fraintendimento degli intenti di chi parla, ma anche a ripercussioni di tipo emotivo. Nel caso in cui, infatti, in risposta all’intervento di uno studente, un docente dica “questa soluzione è banale”, con il significato di “di immediata deduzione in base a quanto già noto” senza aver specificato questa accezione allo studente, questi, a conoscenza solo del significato della parola in contesto quotidiano, potrebbe essere intimidito dal fatto che la propria risposta è stata classificata come “ovvia” e “scontata”, e ciò potrebbe innescare in lui una serie di emozioni negative.

[30] https://www.treccani.it/vocabolario/banda2/
[31] https://www.treccani.it/vocabolario/banda3/
[32] https://www.treccani.it/vocabolario/binomio1/
[33] https://www.treccani.it/vocabolario/binomio2/

Una critica che potrebbe esser mossa a quest'ultima riflessione è che l'attenzione posta su queste conseguenze dell'uso linguaggio sia eccessiva, e che la cura nell'esposizione richiesta conseguentemente a questa tesi sia esagerata. Il filone della ricerca in merito, però, già attivo da diversi decenni, pone particolare attenzione sul fattore emotivo del processo di apprendimento-insegnamento, mettendo al centro ciò che provano gli studenti. In particolare, è evidenziato dalla letteratura come sia invece *fondamentale* il fattore emotivo nell'apprendimento: è infatti emerso che stati di panico, paura, o in generale di emozioni negative, inibiscano fortemente, fino a impedire del tutto l'apprendimento[34].

Le sovrapposizioni che abbiamo appena visto possono generare *ambiguità*, cioè la possibilità di interpretare in maniera differente uno stesso termine. Tale fenomeno è però ben distinto da quello della vaghezza: quest'ultima, infatti, si presenta quando il significato di una parola non è ben definito, e tale lemma ha bisogno di essere inserito all'interno di una situazione comunicativa per essere chiarito. Esempi di parole vaghe sono gli aggettivi *alto, stretto, grande, piccolo*, che necessitano un contesto di riferimento per risultare definiti: dire che un oggetto è "grande" potrebbe significare che è della dimensione di una moneta, di una macchina o di un albero a seconda di ciò di cui stiamo parlando. Il fenomeno generato da polisemia, omonimia e sinonimia è invece l'ambiguità, che, innescandosi tra linguaggio matematico e quotidiano, dà luogo a una zona di «parziale isomorfismo» (Preti (1953), pagina 46, citato in Cazzato (2011)), che ci permette di capire chiaramente come possa esser possibile che il linguaggio sia una barriera di accesso all'apprendimento matematico. L'ambiguità, infatti, induce chi è alle prime esperienze in matematica a pensare di poter affrontare processi e ragionamenti con lo stesso *habitus* mentale col quale si relaziona con contesti quotidiani (in fatto di lessico, ma anche di processi e concetti), rendendo l'isomorfismo di cui parla l'autrice non più limitato a certi aspetti, ma totale. Il fatto è che, infatti, non essendo consapevoli della parzialità della relazione di biunivocità, gli studenti potrebbero desumere che sia «pacifico e concesso l'isomorfismo» (Preti, 1935), cioè che il modo di ragionare, di interpretare i testi, relazioni e rapporti sia assolutamente analogo tra linguaggio scientifico e comune.

Dopo aver analizzato il tipo di termini del lessico della matematica, osservati in continuità con il linguaggio quotidiano, è sensato effettuare una riflessione sull'*uso* di questa terminologia. Il linguaggio matematico ha una struttura molto più rigida e inquadrata rispetto a quello standard,

[34]A tal proposito si consiglia la lettura di articoli come Di Martino, P. (2011). I fattori affettivi nel processo di insegnamento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 34A, 343-352, Di Martino, P. (2015). I fattori affettivi e il loro ruolo nell'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 38A/B, 343-362 e Zan, R. (2000) Emozioni e difficoltà in matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 23A(5), 207-232 e n. 4, 327-345.

e ciò si riflette anche da un punto di vista lessicale. Un primo esempio, che possiamo portare per sottolineare come sia diverso l'uso del linguaggio, è la presenza in misura maggiore, rispetto al linguaggio quotidiano, di parole che scandiscono sezioni specifiche di testo, come "ad esempio", "in primo luogo", "quindi", "in conclusione". Il testo matematico, infatti, è generalmente diviso in sezioni funzionali all'organicità del testo e al portare avanti il filo logico del discorso; quindi, il linguaggio quotidiano fornisce a quello matematico dei termini specifici per introdurre sezioni di volta in volta esplicative, descrittive, argomentative.

Le parole che assumono quindi un ruolo cruciale non sono solo i termini, di cui abbiamo ampiamente parlato, ma anche tutte quelle che hanno un ruolo a livello semantico e funzionale, utilizzate per stabilire rapporti tra gli elementi in gioco: ogni/un, i/tutti, alcuni, è/sono/si dice, almeno/al massimo. L'importanza risiede nel fatto che, nell'implicita traduzione che avviene tra i due linguaggi in gioco, queste parole devono essere tradotte con determinati quantificatori logici, ma nel linguaggio naturale il significato è molto più sfumato. Approfondiremo in maniera più specifica il discorso della traduzione tra linguaggio naturale e matematico nel paragrafo dedicato alla sintassi: per ora ci limitiamo a constatare che viene attribuito in contesto tecnico un significato specifico a determinate particelle, eliminando ogni tipo di sfumatura che potrebbe presentarsi in contesto quotidiano.

Nell'elaborare meglio un quadro chiaro sull'uso dei termini tecnici nei discorsi matematici si possono sfruttare diversi concetti (Sbaragli, Demartini (2021)). Nello specifico, è molto interessante analizzare:

- il rapporto tra il numero di parole del Vocabolario di Base[35] e il numero totale di parole nel testo in oggetto. Più alta è la percentuale, più è alto il numero di parole del linguaggio quotidiano e basso quello dei termini tecnici nel testo. Tale dato necessita però di una puntualizzazione: esistono branche della matematica, infatti, come la geometria, i cui termini tecnici, soprattutto ai gradi inferiori di istruzione, sono inclusi nel Vocabolario di Base, andando a "sporcare" il dato. La difficoltà che in questo caso non emerge è quella degli studenti di assegnare un nuovo significato a parole che appartengono alla lingua d'uso;

[35]Insieme di 7500 parole circa, classificate secondo criteri di frequenza e percezione in fondamentali, di alto uso e di alta disponibilità, usate e comprese dalla maggior parte di chi parla italiano (De Mauro, 1980), pubblicato in una recente edizione nel 2016 (De Mauro, 2016).

- la *ricchezza lessicale* media, cioè il rapporto tra il numero di lemmi di un testo e il numero di occorrenze: indica la varietà di parole diverse contenute in un testo. Il suo valore numerico varia tra 0 e 1, e più si avvicina a 1, più variato è il testo in analisi;
- la *densità lessicale* media, cioè il rapporto tra parole portatrici di contenuto (*piene*, lo sono sostantivi, verbi, aggettivi e avverbi) e il totale delle parole di un testo. Nel linguaggio quotidiano, tale rapporto, il cui valore può variare anch'esso tra 0 e 1, si attesta normalmente intorno a 0,3-0,4.

Tramite questi criteri, Sbaragli e Demartini (2021) hanno analizzato gli enunciati delle definizioni dei libri di testo di geometria riguardanti l'argomento dei poligoni delle scuole primaria e secondaria di primo grado italiane e ticinesi, con i seguenti risultati.

	II SP	III SP	IV SP	V SP	I SSPG	II SSPG	III SSPG
Parole del VdB	93%	87%	85%	84%	83%	80%	76%
Ricchezza lessicale media (TTR)	0,96	0,96	0,93	0,91	0,89	0,93	0,95
Densità lessicale media	0,62	0,57	0,59	0,61	0,56	0,56	0,53

I dati riportati evidenziano un'ampia presenza di termini del Vocabolario di Base in questi testi ma ciò non è dovuto allo scarso approfondimento degli argomenti matematici, ma al fatto, come riportato poco sopra, che i termini tipici dell'argomento "poligoni" appartengono anche al Vocabolario di Base. Ciò non significa che gli argomenti non siano correttamente e adeguatamente approfonditi, anche se com'è ovvio che sia, il grado di profondità aumenta con l'aumentare del grado scolastico: come è evidente dai dati, la percentuale diminuisce con l'aumentare del grado scolastico, segnalando un aumento dei termini tecnici.

La ricchezza lessicale è in generale molto alta nei discorsi tecnici, ma assume i picchi più alti nelle definizioni: tale fatto non è assolutamente sorprendente, considerando la tendenza del linguaggio matematico all'estrema sintesi. Ogni parola, quindi, diventa portatrice di un significato indispensabile per la comprensione di tutta la frase, e ignorarne una o più potrebbe portare alla mancata comprensione del concetto esposto. L'alta densità lessicale, inoltre, conferma il trend segnalato dalla letteratura in materia, cioè che testi sintatticamente compatti, come quelli matematici, fanno registrare un'alta densità lessicale.

Oltre l'esperienza pratica, anche rigorose analisi sperimentali sui manuali scolastici (come quella di Sbaragli e Demartini (2021)) evidenziano la maggior presenza di sostantivi rispetto al linguaggio quotidiano nei testi matematici, accademici o scolastici che siano, specialmente nelle definizioni; l'effetto di questa tendenza è quello di rendere il testo *deagentivizzato* e *atemporale,* nel ricercato effetto di focalizzare l'attenzione di chi ascolta o legge non tanto sull'autore dell'azione, ma sull'azione stessa. Per ottenere questi effetti si utilizza ampiamente anche la già citata *nominalizzazione*, che prevede la trasformazione della categoria di una parola in quella di sostantivo, provocando l'innalzamento del numero di sostantivi all'interno del testo, ma anche la riorganizzazione sintattica della frase. Approfondiremo il discorso sulla nominalizzazione nella sezione dedicata alla sintassi.

L'uso spiccato del lessico in ambito matematico che abbiamo appena evidenziato non è però sempre produttivo: si riscontrano diversi casi in cui, soprattutto nei manuali scolastici, gli autori imbastiscano una classificazione sovrabbondante dell'argomento trattato, che risulta in una difficoltà aggiuntiva o addirittura in un fattore di creazione di misconcezioni. Abbiamo osservato, in accordo con Sbaragli e Demartini (2021), come i testi scolastici inseriscano la categoria dei "non poligoni" come una classe di figure effettivamente esistenti, quando in realtà tale etichetta non è produttiva, né utile ai fini sia del sapere matematico sia dell'apprendimento scolastico. Un altro esempio, forse più "distruttivo" a livello concettuale, è la tendenza, quando si parla della proprietà associativa dei numeri, di distinguere nella pratica *due* proprietà distinte: la proprietà associativa e quella *dissociativa*. Al di là del fatto che in molti casi venga presentato senza l'utilizzo delle parentesi, perdendo un'ottima occasione per rinforzarne ed esplicitarne la funzione e il corretto uso, da un punto di vista superiore è assolutamente insensato distinguere i due casi. Questo perché nello scrivere la proprietà, ad esempio per $15 + 5 + 36 = 20 + 36 = 15 + 41$ la lettura dell'espressione può avvenire da sinistra a destra, com'è usuale fare anche per il linguaggio quotidiano, ma anche da destra a sinistra. Il fatto che la scrittura matematica, al contrario di quella del linguaggio comune, possa essere letta anche "al contrario" è una proprietà fondamentale della relazione di uguaglianza, ma che nella pratica è raro veder evidenziata, sottolineata o usata in un contesto scolastico.

Come si è visto nel primo capitolo, una delle caratteristiche principali del linguaggio matematico è quella dell'utilizzo di *metafore grammaticali*. Il concetto di *metafora*, in ambito linguistico, affonda le sue radici fin dai tempi di Aristotele, ed è trasversale rispetto a diverse branche del sapere, matematica compresa. In questa particolare disciplina, col passare dei secoli sono stati distinti diversi tipi di metafora e di processo metaforico: citiamo ad esempio gli studi di Lakoff e Núñez (2000), che propongono di fondare le idee matematiche su un impianto metaforico che agisce a diversi livelli della menta umana. Da questa linea di pensiero si discostano le definizioni di “metafora grammaticale” e “metafora lessicale” di Halliday (2004), che fanno riferimento più a un piano linguistico che di pensiero, e che meglio si adattano al nucleo di questo lavoro.

La definizione di metafora (come quello di analogia, per cui è valido questo stesso discorso) è stata ampiamente discussa in letteratura, ma in questo contesto possiamo affidarci a quella del vocabolario Treccani: «è una figura retorica che risulta da un processo psichico e linguistico attraverso cui, dopo aver mentalmente associato due realtà differenti sulla base di un particolare sentito come identico, si sostituisce la denominazione dell’una con quella dell’altra»[36]. La metafora trasferisce quindi un sistema di relazioni proprio di un dominio a un altro: il senso è appunto quello di permettere al fruitore di concentrarsi sulle *relazioni* che esistono tra gli oggetti (o i concetti) nei rispettivi domini, riuscendo ad escluderne gli aspetti contingenti per ampliare la propria conoscenza dell’argomento oggetto di metafora.

Le metafore sono ampiamente utilizzate in matematica: possiamo citare come esempio l’idea che un’equazione sia una bilancia, in modo da render chiaro che per mantenere valida l’uguaglianza bisogna operare allo stesso modo su entrambi i suoi termini. Un’altra metafora molto diffusa, anche a livello accademico, è quella che vede i numeri reali come punti su una retta: è particolarmente importante citarla in questo contesto perché unendo due domini diversi della matematica si creano collegamenti tra i diversi termini di ogni campo, permettendo a chi apprende di rafforzare e migliorare l’utilizzo del lessico, creando nella propria mente una struttura più solida della disciplina. Alcune di queste metafore sono entrate a far parte del dominio della matematica da arrivare ad esser chiamate, nella letteratura di riferimento, *estinte* (Black (1962), citato in Salvi (2014)), proprio perché una metafora che perde la sua capacità di creare di relazioni e significati smette, per l’appunto, di essere una metafora. È necessario però puntualizzare che le metafore matematiche *non sono definizioni*: servono invece a giustificare e a fare accettare le definizioni stesse. Uno stesso concetto matematico, infatti, viene descritto da diverse metafore, che sottolineano di volta in volta relazioni e caratteristiche diverse, ed è bene che la parzialità di queste metafore sia chiara a chi legge. Lolli (2002) ribadisce che se ci fosse una metafora per ogni concetto, allora basterebbe usare quella, e il concetto matematico diventerebbe superfluo, così come se bastasse un termine del linguaggio comune per descrivere un concetto matematico, non esisterebbe il corrispettivo termine. È quindi proprio della natura delle idee matematiche non indentificarsi con un’unica metafora, ma essere qualcosa di comune a un’intera *famiglia* di metafore. Proprio perché le metafore *spiegano* un concetto, però, gli

[36]https://www.treccani.it/enciclopedia/metafora/

studenti tendono ad affidarsi al loro significato familiare che è di più agile comprensione, e a non prestare attenzione alle definizioni rigorose, che risultano loro troppo restrittive e indirizzate piuttosto ad armonizzarsi con altre definizioni (SUPSI, Ostinelli, 2015). È quindi necessario, nell'usare una metafora in ambito matematico, prendere consapevolezza e ricordare che, per quanto calzanti, le metafore descrivono un concetto con un grado di precisione non perfettamente accurato, e non in maniera totale. Diversi esempi di tali parzialità sono reperibili in Ferrari (2021, pagine 83-4), di cui ne citiamo uno, che si ritrova in ambito accademico: quello che mette in discussione gli insiemi chiusi e aperti, in cui la metafora regge fintanto che si rimane in contesti poco astratti (ad esempio, nello spazio metrico euclideo), ma che viene a cadere quando sono coinvolti spazi metrici più astratti, andando a collassare per esempio nel concetto di insieme sia aperto che chiuso (in inglese, *clopen*) quando nell'idea comune gli attributi di chiusura e apertura sono mutualmente esclusivi. È comunque importante integrare processi critici di creazione e utilizzo delle metafore anche in contesto scolastico, per aiutare gli studenti a sviluppare la loro creatività e l'abilità di problem solving, sempre più utile e richiesta.

Prima di concludere il discorso sul lessico matematico, è utile includere anche una sezione sul lessico simbolico che possiamo trovare all'interno di un testo matematico, e che in alcuni casi viene condiviso totalmente o parzialmente con il linguaggio quotidiano. Esistono simboli di diversa natura, utilizzati per scopi specifici, come ad esempio segni che designano particolari *oggetti* matematici, come per esempio $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ (che vengono tipicamente scritte in maniera graficamente diversa dalle classiche N e R), utilizzate per designare gli insiemi di numeri naturali e reali, o tutte le lettere usate come variabili, generalmente x, y, z. Si distinguono anche segni che *si leggono*, come quelli operazionali tra numeri (+, -, ×, :), tra insiemi (ad esempio $\cup$, $\cap$), segni che indicano relazioni, come quelli di uguaglianza e disuguaglianza tra numeri (=, $\neq$, $\geq$, $>$, $<$, $\leq$) e tra insiemi ($\subset$, $\subseteq$, $\not\subseteq$, $\subsetneq$ e i rispettivi inversi) (Cazzato, 2011, pagina 84). A tali simboli si aggiungono anche i quantificatori universale, $\forall$, ed esistenziale, $\exists$, insieme ai connettivi logici di congiunzione, $\wedge$, e disgiunzione, $\vee$, che molto più raramente si trovano nei testi non tecnici. Ciò che in questo contesto preme sottolineare è proprio il fatto che questi simboli sono elementi di confine tra i due linguaggi, e va posta attenzione nel trattarli. Generalmente, infatti, l'utilizzo di questi simboli, escludendo l'ambito *puramente* accademico, è completamente inserito in un contesto di linguaggio quotidiano: per questo, anche i non esperti, approcciandosi a un testo matematico, potrebbero coglierne un vago senso, pur non avvicinandosi a quello esatto. Tale fenomeno contribuisce a creare fraintendimenti e confusione in chi apprende, di cui un esempio risiede nel simbolo di uguaglianza, =: in ambito matematico questo simbolo relazionale genera una scrittura leggibile sia da destra verso sinistra che in senso opposto; il linguaggio quotidiano, invece, è leggibile solamente da sinistra verso destra. Non è quindi raro registrare casi di studenti che fossilizzandosi sulla lettura delle espressioni solo in maniera analoga al linguaggio quotidiano, limitano fortemente la propria gestione delle equazioni, anche e soprattutto nella risoluzione di problemi non necessariamente di ambito matematico.

L'analisi compiuta della terminologia matematica, dei suoi contesti e della frequenza d'uso ha permesso di evidenziare, nonostante il dominio piuttosto ristretto in rapporto a quello quotidiano, la profonda influenza reciproca che i due linguaggi hanno tra di loro. Tale influenza che, agli occhi di un non-esperto generalmente passa inosservata, ma è talmente pervasiva da influenzare i processi di insegnamento e apprendimento della matematica.

3.2 Morfologia

La morfologia è quella branca della grammatica che analizza e descrive le forme assunte dalle parole a seconda della funzione che svolgono e dei significati che rivestono: questo aspetto della grammatica, infatti, si occupa di declinazioni e coniugazioni di verbi, nomi, articoli, aggettivi e pronomi.

La continuità morfologica tra linguaggio matematico e quotidiano è senza dubbio totale. Questo perché, a differenza di sintassi e lessico, non si registra nessuna variazione tra i due linguaggi: non cambiano, infatti, le regole grammaticali tra l'uno e l'altro, con la conseguenza di una perfetta corrispondenza morfologica. Infatti i sostantivi, le coniugazioni, i verbi devono sottostare alle stesse identiche regole, che si stia scrivendo o leggendo un testo tecnico o meno. È questo il motivo per cui, in letteratura, questo aspetto non viene indagato, se non nel momento in cui criticità morfologiche possono impattare sull'apprendimento: è il caso di Canducci, Demartini e Sbaragli (2021) che analizzano la disomogeneità morfologica dei casi singolare e plurale dei libri di testo italiani, ticinesi e grigionesi nell'introduzione dell'argomento "poligoni".

La categoria del numero è quella che serve a codificare e a veicolare la quantità di ciò a cui ci si riferisce, cioè del referente del discorso: tendenzialmente, attribuiamo questa categoria a nomi e pronomi, ma è un elemento che influenza diverse altre parti del discorso, come aggettivi, articoli e verbi; di conseguenza, giocano un ruolo fondamentale nell'interpretazione di un testo. In italiano, esiste la contrapposizione tra singolare e plurale, anche se a volte la distinzione si fa meno definita, per la presenza di pluralia tantum (nozze, occhiali, …), di sostantivi con più plurali (braccio in braccia e bracci) e di nomi collettivi, che accettano comunque il plurale (gregge, folla, …). In generale, l'uso del numero all'interno del discorso è abbastanza intuitivo (al netto di persone che stanno apprendendo la lingua), in quanto basato sul significato, e proprio per questo tratto di naturalezza gli autori hanno approfondito le scelte operate dai libri di testo nei confronti del numero nelle definizioni dei poligoni. Infatti, la tesi degli autori è che la non aderenza sistematica alla numerosità degli enti di cui si parla possa ostacolare la corretta rappresentazione semantica e quindi l'apprendimento dei concetti matematici. L'analisi, quindi, si incentra sulla resa morfologica del numero, con particolare attenzione all'omogeneità o meno delle scelte dei manuali. Gli autori hanno quindi individuato quali enti geometrici legati ai poligoni potessero essere soggetti alla scelta di numero (lo sono i lati e gli angoli, ma non il perimetro) e hanno considerato quale categoria di numero i testi utilizzino per parlarne e se tale categoria sia omogenea per tutti gli enti o meno all'interno di una stessa sezione. Hanno poi osservato che effettivamente la disomogeneità di numero produca una mancanza di aderenza tra la forma linguistica e il contenuto semantico e matematico oggetto del testo. La categoria grammaticale del numero assume quindi un ruolo significativo nella trasmissione, nella comprensione e nella costruzione del sapere matematico in gioco. Questa affermazione acquista ancora più senso pensando al target dei manuali di cui si occupano Canducci, Demartini e Sbaragli, cioè bambini e ragazzi che frequentano il primo ciclo d'istruzione: infatti, questo tipo di allievi non è sempre pronto a gestire la lettura di testi complessi come può diventarlo uno matematico, per la ricchezza di impliciti e inferenze che vanno necessariamente elaborati.

Da questa analisi, emerge in generale che spesso non vi sia sufficiente attenzione nell'effettuare scelte linguistiche di numero omogenee e aderenti alla realtà matematica, optando per scelte linguistiche disomogenee dal punto di vista morfologico, non in linea col contenuto matematico.

Come abbiamo visto, quindi, anche la componente morfologica, nonostante sia pienamente condivisa tra linguaggio naturale e matematico, ha un ruolo nel favorire o meno il corretto apprendimento della matematica. Per quanto comunque marginale, tale ruolo non è da sottovalutare, considerando la difficoltà che gli studenti già incontrano nell'apprendere, proprio per la natura intrinseca della disciplina: sembra quindi opportuno stimolare chi è in grado di farlo a prendere tutti i provvedimenti necessari, anche di natura grammaticale, per evitare di ostacolare un apprendimento già minato da altri fattori.

3.3 Sintassi

La sintassi di una lingua è l'insieme delle norme che regolano l'uso dei procedimenti mediante i quali gli elementi del discorso si combinano tra loro per esprimere rapporti di significato, sia all'interno di una frase sia nell'ambito di frasi diverse. Differisce dalla morfologia perché si focalizza sulle *funzioni* delle varie parole, mentre la morfologia si occupa della *formazione* delle suddette parole.

Anche se storicamente l'ambito più studiato è quello lessicale, l'analisi sul piano sintattico del linguaggio matematico porta all'osservazione di diverse peculiarità (comuni e non al linguaggio scientifico in generale). Diversi autori (uno su tutti Borello (1994), pagina 11, citato in Cazzato (2011)) confermano che la letteratura parla di «atipicità *quantitativa*», non qualitativa, delle strutture sintattiche del linguaggio matematico, intendendo che la sintassi differisce da quella quotidiana non tanto per la diversità in termini di strutture, ma per la loro diversa distribuzione in fatto di *quantità* all'interno del discorso. Infatti, lo stile sintattico caratteristico della matematica altera la frequenza delle strutture che osserviamo nel linguaggio quotidiano per diversi scopi, come la chiarezza o la spersonalizzazione, ma anche per ragioni puramente stilistiche.

In linea generale, la sintassi del periodo matematico prevede una maggioranza di paratassi, con il periodo formato da una successione di proposizioni coordinate tra loro, stile che ricorda molto la lingua inglese, a sfavore di una relazione ipotattica, invece tipica delle lingue neolatine e del latino stesso. Tale scelta è condizionata dal fatto che lo scopo del linguaggio scientifico è quello di essere il più chiaro, semplice e non ambiguo possibile. Come vedremo anche più avanti, l'inglese, ormai lingua internazionale della comunità scientifica, contribuisce alla diffusione della coordinazione anche in contesti come quello italiano in cui la costruzione delle frasi è principalmente ipotattica. Nel tradurre articoli e contenuti scritti originariamente in lingua inglese, infatti, chi scrive tende a non riformulare completamente i periodi per adattarli allo stile della propria lingua, preferendo mantenere la sintassi intatta: in questo modo, la coordinazione prende piede anche in ambienti di ricerca la cui lingua di riferimento utilizza più frequentemente la subordinazione.

Come detto, la sintassi del linguaggio matematico è caratterizzata da diverse strutture tipiche, utilizzate con molta più frequenza rispetto al linguaggio quotidiano. In primo luogo, Balboni (2000, pagina 45) riporta il fenomeno dell'*eliminazione di articoli e preposizioni*, che si osserva con maggiore frequenza in lingue come l'inglese, ma anche nell'italiano e addirittura nel tedesco, in cui gli articoli assumono un ruolo funzionale centrale. L'autore ipotizza che, per i linguaggi scientifici e giuridici, tale tendenza sia dovuta ai richiami alla lingua latina, priva di articoli, che fino a qualche secolo fa era la lingua con la quale il sapere veniva prodotto e condiviso a livelli accademici; per i linguaggi informatici, invece, l'ipotesi più sensata è che gli articoli vengano omessi per una questione di scarso spazio disponibile su schede tecniche o finestre di segnalazione di sorta.

Un'altra caratteristica sintattica tipica è quella dell'ampia presenza dei sostantivi in sostituzione di verbi e aggettivi, frutto del processo di *nominalizzazione* che abbiamo osservato nelle precedenti sezioni. Questo fenomeno ha luogo in maniera molto frequente nell'ottica di rendere il discorso matematico il più possibile non-ambiguo (nei limiti di cui si è discussi nel paragrafo precedente). Nel riformulare le frasi, la tendenza è quella di sostituire il verbo o con un altro verbo per rendere sensato l'inserimento di un sostantivo al posto di un'altra parola, oppure con una *copula*, se è il verbo l'oggetto della sostituzione; questo focus è dovuto al fatto che il verbo è linguisticamente l'unità sintattica più complessa da un punto di vista morfologico e sintattico; quindi, si cerca di ridurne il più possibile l'impatto. Spesso, infatti, la struttura del periodo è definita dalla *consecutio temporum* dei verbi al suo interno. È opportuno, inoltre, inserire un'osservazione finale sul fenomeno della nominalizzazione: come detto, essendo l'inglese la lingua con la quale attualmente si condivide il sapere a livello internazionale, Balboni (2000) evidenzia come il processo di traduzione possa influire sull'incidenza di questo fenomeno. Infatti, la lingua inglese è portata ad affiancare a questo fenomeno l'uso del genitivo possessivo, struttura molto semplice e di largo uso, che viene mantenuta inalterata nelle traduzioni, lasciando quindi intatta la struttura sintattica con tutti i sostantivi che sono stati inseriti, senza che il traduttore si adoperi per riformulare la frase.

Aggiungiamo alle caratteristiche tipiche della sintassi matematica, utilizzata di frequente nell'ottica della maggior leggibilità e semplicità del testo, una procedura simile alla nominalizzazione, che prevede l'eliminazione delle subordinate relative, che in quanto subordinate aggiungono una difficoltà in più nella lettura, con aggettivi che riassumono al loro interno il significato della proposizione. Ad esempio, per rimanere in tema, la frase "un termine che può creare ambiguità" diventerà, in quest'ottica, "un termine ambiguo".

Al di là del fatto che la coordinazione sia il tipo di struttura *prediletta* dal linguaggio matematico, è pacifico presupporre che anche la subordinazione sia una scelta sintattica frequentemente utilizzata, soprattutto per discorsi più strutturati, come le dimostrazioni.

La più diffusa struttura sintattica è quella *condizionale*, specifica di enunciati di teoremi, dimostrazioni, e in generale di tutto il discorso matematico, classicamente espressa tramite la struttura *se … allora …*; in aggiunta, riportiamo che la particella *allora* può risultare implicita, se la frase è formulata scambiando l'ordine delle proposizioni. Ad esempio, possiamo scrivere indifferentemente, senza alterare il significato, "se una funzione è continua, allora è derivabile" e "una funzione è derivabile se è continua". In aggiunta, si attesta anche un'ampia presenza di relazioni di *consecuzione*, segnalate da connettivi specifici, come *quindi, perciò, dunque, di conseguenza*, come in "l'equazione è di secondo grado, *quindi* ha esattamente due soluzioni". Come vediamo dall'esempio, in queste proposizioni viene espressa una premessa, poi l'affermazione che ne deriva grazie a un ragionamento di tipo inferenziale. In maniera speculare, si riscontra un'ampia presenza di relazioni di *causa* o *motivazione*, in cui viene espressa un'affermazione, poi le motivazioni che la giustificano. Invertendo l'esempio precedente, infatti, abbiamo "l'equazione ha esattamente due soluzioni *perché* è di secondo grado". A tal proposito, Sbaragli e Demartini (2021) fanno notare che, per quanto utile al lettore l'esplicitazione delle motivazioni per cui l'affermazione scritta è vera, spesso non basta giustapporle a tale affermazione per rendere il testo esplicito. Può capitare, infatti, che sola presenza del connettivo non sia sufficiente per esplicitare il legame profondo che potrebbe sussistere tra i due fatti: pur comprendendo a livello linguistico quello che il testo afferma, quindi, il lettore potrebbe non capire il legame logico tra le proposizioni. Nel caso del nostro esempio, devono esser posseduti e padroneggiati dallo studente diversi concetti e informazioni: in primis cos'è un'equazione e come individuare il suo grado, cos'è la soluzione di un'equazione, e infine il legame tra il grado di un'equazione e il numero delle sue soluzioni, espresso tramite il teorema fondamentale dell'algebra.

Un altro tipo di subordinata molto interessante da analizzare è quella di tipo *finale*, spesso presente nella costruzione implicita del *per + infinito*. Sbaragli e Demartini (2021) registrano un ampio uso di questa struttura, in particolare nei testi scolastici di II e III primaria, spiegando quest'alta frequenza con la volontà degli autori di non complicare inutilmente la lingua, e quindi la materia, per i più piccoli, che, per la loro età, non è scontato padroneggino ancora completamente la lingua. D'altra parte, il senso finalistico della struttura assume un valore *metatestuale* che si discosta molto da quello matematico: l'utilizzo di questa struttura è infatti volto a spronare chi legge a svolgere l'operazione concreta oggetto della frase. Scrivere ad esempio "*Per calcolare* l'area del rettangolo, bisogna moltiplicare il lato per l'altezza" sprona chi legge a cercare un rettangolo, i suoi lati, e a moltiplicarli tra loro, mentre la frase, matematicamente equivalente, "L'area del rettangolo si calcola moltiplicando tra loro base e altezza del rettangolo", ha un valore metatestuale molto più neutro, meno marcato. La differenza tra queste due frasi è proprio in questa "call to action" implicita che si percepisce nei confronti del lettore: nel discorso scientifico primario, in realtà, si utilizzano frasi come la seconda, chiamate *non marcate*, cioè non caratterizzate da fenomeni particolari di enfasi e dislocazione di elementi, come invece lo sono quelle che adoperano la costruzione con "per" e l'infinito. Lo scopo di questa scelta è in linea con la scelta di rendere impersonale il discorso tecnico, liberandolo da pressioni operative e facendolo rimanere il più neutro possibile.

L'elemento sintattico del verbo, come abbiamo visto, è quasi sempre il perno attorno al quale ruota la struttura della frase e, nel perseguire gli scopi di spersonalizzazione e chiarezza, spesso viene ridotto a copula, spostando l'attenzione del fruitore su sostantivi e aggettivi. Colui che compie l'azione, infatti, sfuma sullo sfondo, diventando un «agente non più individuale ma epistemico» (Arcaini, 1988, pagina 37, in Cazzato (2011)), in modo da mettere meglio al centro del discorso i processi matematici. Le finalità di spersonalizzazione e passivazione sono centrali rispetto alla filosofia che muove la costruzione del testo scientifico. Gli strumenti principali che una generica lingua utilizza per spersonalizzare il discorso sono diversi a seconda del tipo di lingua che prendiamo in considerazione: l'italiano usa generalmente le forme impersonali, come verbi al passivo, verbi come *bisognare* e *importare*, costruzioni come *verbo essere* + aggettivo o avverbio (come "è ovvio", "è chiaro", "è impossibile"), e altre, altrettanto diffuse[37]. Queste scelte sintattiche però impattano negativamente la semplicità di lettura del testo, ma la volontà di spostare l'attenzione del fruitore sull'azione descritta è prioritaria rispetto alla semplificazione estrema conseguente l'utilizzo del costrutto "soggetto-verbo-oggetto".

Il discorso sui verbi al passivo, però, non può limitarsi semplicemente alla loro partecipazione al processo di spersonalizzazione: il caso del passivo deagentivizzato è infatti solo uno dei modi in cui può essere utilizzata questa diatesi. La letteratura registra come il suo uso permette di stabilire una relazione di priorità tra gli elementi in gioco: la forma generale del passivo permette di porre in posizione privilegiata l'argomento del discorso, poi l'azione compiuta su di esso, e si lascia su un piano meno evidente, come complemento d'agente, l'individuo che compie l'azione, non necessario per il fine del discorso. Balboni (2000) specifica che, nello studiare la diatesi passiva, vada posta particolare attenzione a non confonderla con i verbi *stativi*: sono particolari forme verbali che non denotano eventi, ma che descrivono, come da nome, stati, processi o azioni (come, ad esempio, nella frase "il tasto è posizionato in alto a sinistra"). L'avvertimento deriva dal fatto che sono strutturalmente identici ai passivi, ma non conservano le caratteristiche e le funzioni metatestuali che abbiamo appena descritto per i passivi; per questo, riprende l'autore, è necessario porre particolare attenzione nell'interpretare

[37] https://www.treccani.it/enciclopedia/verbi-impersonali_%28La-grammatica-italiana%29/

alcune statistiche in merito, che vedono categorizzati come "passivi" anche gli stativi. Conseguenza di ciò è che la diatesi passiva sia in realtà meno frequente nei testi scientifici e matematici rispetto a quanto ci si aspetti da una prima magari superficiale valutazione.

Come abbiamo visto, il sintagma verbale nelle proposizioni matematiche viene spesso ridotto a copula, in un processo che tende a rendere il testo il più esplicito e intellegibile possibile semplificando la parte verbale. A questo punto, però, si ritiene importante una specifica di natura *semiotica*: il fatto che siano presenti molte copule pone una questione di *senso* che va correttamente interpretata, questione che viene portata alla luce, ad esempio, da Gilbert (1945). Anche nel linguaggio quotidiano, infatti, tendiamo a utilizzare ampiamente le copule, spesso facendo ricorso a ellissi del soggetto per rendere la frase leggibile e scorrevole. Facciamo un esempio: le frasi "a è b" e "il cavallo è bianco" hanno (apparentemente) la stessa struttura sintattica, mentre hanno un significato logico matematico drasticamente diverso. Una frase come la prima è fortemente tipica del linguaggio matematico, considerando i simboli letterali a e b, mediato però da quello quotidiano, risultando in una frase di senso logico *implicito*, anche se potrebbe non sembrare, vista la comune familiarità della maggior parte della popolazione con almeno le basi del linguaggio simbolico matematico. Tale frase, infatti, sottende che a sia uguale a b ($a = b$), cioè che si eguaglino, che siano sovrapponibili e interscambiabili; al contrario, la seconda non implica niente di tutto ciò, anzi, non è possibile mettere nella stessa relazione di uguaglianza il cavallo, un animale, e un colore, il bianco. L'equivalente esplicito della frase "il cavallo è bianco" è infatti "il colore del cavallo è bianco", rendendo quindi effettivamente possibile effettuare una sovrapposizione tra i due termini. La grande differenza tra le due frasi risiede quindi nel fatto che soggetto *reale* e *grammaticale* coincidano o meno: come abbiamo visto, il soggetto reale della frase "il cavallo è bianco" è "colore", non "cavallo", che è invece il soggetto grammaticale, cioè quello rispetto al quale il verbo e il complemento si accordano. Il fatto che questi soggetti non coincidano non si trasforma in un problema di comprensione del testo perché è il *contesto* che permette al lettore di inferire che il vero fulcro del discorso sia il colore, non il cavallo. Di conseguenza, la corretta comprensione di una frase presuppone la condivisione tra lettore e autore degli schemi logico-concettuali su cui giace la costruzione del discorso; tali schemi differiscono in maniera importante tra il linguaggio matematico e quello quotidiano, da un punto di vista grammaticale e logico, portando quindi in errore chi cerchi di interpretare frasi di un linguaggio con l'impostazione dell'altro. Cazzato (2011) evidenzia come alla luce di ciò, in ottica di una comunicazione del sapere internazionale, sarebbe opportuno ridurre al minimo ogni tipo di traduzione "verbale" dei concetti espressi, in quanto ogni lingua utilizza strategie differenti per evidenziare tali schemi logici.

Alternativamente, affidarsi unicamente all'inglese potrebbe essere un modo per aggirare il problema.

La struttura della frase assume nei testi matematici un'importanza molto più rilevante rispetto a quella del linguaggio ordinario; in particolare, è importante porre attenzione anche al modo in cui vengono *gerarchizzate le informazioni* all'interno del discorso. Come abbiamo avuto modo di accennare nel primo capitolo, una delle componenti sintattiche più importanti per stabilire correttamente la priorità tra le informazioni è la punteggiatura, nello specifico, la *virgola*. Proprio per questo motivo, l'utilizzo della virgola nei testi matematici è cruciale: come apprendiamo dalla grammatica, questo segno di interpunzione permette di identificare i diversi costrutti sintattici all'interno di una frase. Come vedremo, definisce inizio e fine di un inciso, è utile, come si vedrà più avanti, per separare gli elementi di un elenco in continuum col testo, oppure per sottolineare i rapporti di coordinazione (molto diffusi nei testi matematici), di giustapposizione, ma soprattutto subordinazione tra le proposizioni che compongono un periodo. È quindi un segno d'interpunzione che influisce direttamente sull'organizzazione sintattica della frase: svolge, nello specifico, un ruolo "segnaletico", che permette al lettore di orientarsi fra le informazioni, fornendo una guida anche nell'interpretazione delle intenzioni dello scrittore. La grande flessibilità di questo segno, però, porta con sé anche un certa (riscontrata) difficoltà nel suo corretto uso e nella sua interpretazione, soprattutto negli studenti più deboli, che fanno difficoltà sia nella produzione che nella comprensione dei testi scritti. La virgola, infatti, è uno dei segni della punteggiatura il cui uso è più abusato, nella lingua italiana come nelle altre: si tende infatti a usarla come una sorta di "tuttofare", in sostituzione (errata) di segni interpuntivi più forti, come il punto fermo, il punto e virgola e i due punti. Tale fenomeno si chiama, dall'inglese, virgola (comma) *splice*, ed è particolarmente diffuso nell'italiano moderno: questo tipo di errore diventa particolarmente grave in contesto matematico, in quanto può provocare ambiguità nei legami logici tra le proposizioni. Hack e Sommers (2015, citati in Pornthanachotanan e Singhapreecha (2020)) suggeriscono quattro modi per correggere una virgola splice: usare una congiunzione coordinante (come "e", "ma", "oppure") insieme alla virgola, usare il punto e virgola, da solo o con una congiunzione, dividere le due frasi con un punto fermo, o anche rendere una delle due frasi dipendente dall'altra.

Un modo particolare in cui la gerarchia delle informazioni viene pesantemente influenzata e modificata attraverso le virgole, è tramite gli *incisi*: sono brevi frasi, collocate all'interno di un periodo da cui però sono sintatticamente indipendenti[38]. Gli incisi, come anche le proposizioni che troviamo tra parentesi *non partecipano* alla configurazione logico-sintattica della principale, ma sono indipendenti, e funzionano quasi come un'aggiunta non necessaria alla struttura della frase, ma che appunto fornisce informazioni aggiuntive. Il problema, in ambito matematico, è che uno scarso controllo sulla gerarchizzazione delle informazioni implica situazioni in cui concetti e informazioni che dovrebbero andare sullo stesso piano rispetto alla frase principale, vengono relegate sullo sfondo proprio perché inserite all'interno di incisi. Questo discorso, come altri all'interno di questo lavoro, potrebbe sembrare il frutto di un'eccessiva attenzione alla grammatica, ma è invece fondamentale sottolineare che aspetti linguistici come questo influiscano in maniera importante sull'apprendimento. È infatti necessario ricordare che anche queste sottigliezze formali potrebbero passare inosservate nel processo di insegnamento-apprendimento ma comunque possono generare *inavvertitamente* misconcezioni e fraintendimenti. Sbaragli e Demartini (2021) riportano diversi esempi in merito, come il seguente: «Un poligono è una figura geometrica piana, delimitata da una linea spezzata chiusa, non intrecciata, che racchiude uno spazio»[39]. In questo caso, l'informazione nell'inciso non è assolutamente secondaria, in quanto racchiude parte delle caratteristiche che una figura piana deve avere per essere definita poligono. Pochi si porrebbero il problema di evidenziare tale uso inappropriato dell'inciso, molto diffuso nei testi scritti, ma l'effetto che ha su chi ascolta è esattamente quello che è stato evidenziato: porre in secondo piano un informazione che è in realtà *cruciale*, cioè che la linea spezzata chiusa che racchiude uno spazio per essere definita un poligono deve essere *non intrecciata*.

In aggiunta, le criticità che generalmente chi ha difficoltà con la punteggiatura riscontra nella disciplina linguistica, in matematica vengono acuite dal fatto che le relazioni logiche tra le diverse informazioni presenti sono alla base del discorso, e quindi centrali nella comprensione profonda e globale del testo. Inoltre, ciò aggrava ulteriormente il problema della comprensione del testo, poiché leggendo un testo di argomento non tecnico è possibile desumere i rapporti logici tra le parti anche analizzando il contesto e facendo affidamento all'interpretazione più probabile; è chiaro che in matematica tale strategia, generalmente funzionale per i testi non della materia, sia assolutamente inefficace, e anzi possa portare alla creazione di misconcezioni ed errori.

---

[38] https://www.treccani.it/vocabolario/inciso2/

[39]Bertella, A., & Parravicini, A. (2017). *Mapperchè. Sussidiario delle discipline matematica-scienze e tecnologia*. Volume 5. Fabbri scuola, pagina 309

Per dovere di completezza, citiamo un fenomeno molto più raro, speculare alla virgola splice, che prevede la separazione di due parti di una frase in due proposizioni con un punto fermo, quando invece sarebbe bastato un segno d'interpunzione meno forte, come la virgola, a costruire correttamente il senso del testo.

Per completare il quadro dei segni interpuntivi utilizzati in matematica, citiamo l'ampio (a volte troppo) uso dei due punti negli elenchi o al fine di stabilire relazioni di consecuzione, e un estremamente ridotto utilizzo del punto e virgola: questa tendenza è in linea con il fatto che è il segno con l'uso in generale meno frequente anche in italiano. Il discorso vale in particolare per gli studenti, soprattutto dei gradi d'istruzione inferiori, che stanno iniziando a padroneggiare il corretto uso della lingua, si sentono poco sicuri nell'usarlo; quindi, tendono a evitare di inserirlo nei testi che costituiscono il corpus di documenti su cui i ricercatori lavorano.

Si ritiene però necessario sottolineare che in virtù delle caratteristiche di sintesi e compattezza del linguaggio matematico, le frasi sono generalmente abbastanza corte, o comunque non troppo articolate; di conseguenza, la possibilità di frequenti usi scorretti e ambigui della virgola sono molto ridotti, considerando proprio l'uso molto standard della punteggiatura che tale struttura sintetica richiede (Sbaragli e Demartini (2021), pagina 223).

La sintassi di un testo scientifico, sempre perseguendo l'obiettivo della maggior chiarezza espositiva possibile, viene caratterizzato da altre strutture particolari, come ad esempio l'uso di elenchi, o le riprese anaforiche.

L'*anafora* è, linguisticamente, una figura retorica che consiste nel ripetere, all'inizio di un verso o di una proposizione, una o più parole, con cui ha inizio il verso o la proposizione precedente[40], e, all'interno di un testo, l'utilizzo di anafore è un modo di mantenere il discorso coeso, collegando tra loro porzioni di testo più o meno distanti tra loro, attraverso appunto la ripetizione di parti del testo stesso. Per effettuare questo procedimento esistono diversi modi, ognuno con un grado di trasparenza diverso: si può ripetere la stessa parola, usare un sinonimo, un iperonimo, una perifrasi, un pronome. In generale, nel linguaggio quotidiano, la ripetizione di una stessa parola è abbastanza demonizzata per questioni cacofoniche, visto che è considerato migliore da leggere e da ascoltare un discorso privo di ripetizioni molto serrate, anche a costo di usare sinonimi poco chiari, o addirittura pronomi o ellissi che rendono il discorso molto più ambiguo. In ambito matematico, però, tale discorso viene a cadere, considerando che lo scopo principale di un testo non è quello di essere piacevole da fruire, ma chiaro nei suoi contenuti.

[40]https://www.treccani.it/enciclopedia/anafora/

Di conseguenza, una delle particolarità sintattiche del testo matematico è quella di presentare, in maniera molto più spiccata rispetto al linguaggio quotidiano, ripetizioni e riprese anaforiche con lo scopo di rendere il testo il più esplicito possibile. A tale proposito, diverse ricerche evidenziano che non è raro leggere elaborati matematici di studenti che risultano ambigui e poco chiari proprio per l'adesione degli scriventi a modelli di testo quotidiani, essendo poco o per nulla istruiti sulla costruzione di un testo scientifico. Tali testi, a volte sono anche scritti senza errori ortografici e in maniera grammaticalmente corretta, ma senza alcun controllo sul significato di quello che scrivono (Ferrari, 2018).

Altrettanto caratteristica della continuità sintattica tra i due linguaggi sono gli *elenchi*, che nel linguaggio scientifico hanno una frequenza molto più alta: puntati, numerati, o in linea col testo, sono spesso utilizzati per esporre in maniera chiara le diverse classificazioni che possono presentarsi nello studio della disciplina. Tale struttura sintattica permette inoltre di dare respiro al testo e aumentarne la leggibilità, a patto che le sue norme redazionali vengano rispettate; Sbaragli e Demartini (2021, pagina 234-5) riportano alcuni esempi di cattiva gestione della punteggiatura e della struttura degli elenchi, errori che vanno a intaccare non solo la sfera stilistica e formale, ma anche quella della chiarezza comunicativa. Le caratteristiche positive degli elenchi e la loro facilità di utilizzo, inoltre, generano una forte tendenza ad utilizzarli, anche quando non sono necessari, a volte anche a costo di introdurre classificazioni superflue. Gli elenchi in generale, anche non puntati e scritti di seguito nel testo, vengono utilizzati con una certa rilassatezza, anche formale, soprattutto nei manuali scolastici: considerando che il target del testo matematico è costituito da persone che generalmente non hanno ancora pienamente sviluppato i loro strumenti linguistici, questo uso poco controllato impatta sull'apprendimento delle norme grammaticali e della punteggiatura, riflettendosi anche nelle loro produzioni scritte degli alunni (ampi esempi di alunni della scuola primaria e secondaria di primo grado si possono recuperare in Fornara, Cignetti, Demartini, Guaita, Moretti (2015)).

Per approfondire ulteriormente, si ricorda che è considerata parte della sintassi del linguaggio matematico anche la sintassi del linguaggio algebrico. Per linguaggio algebrico si intende un sistema di segni e regole sintattiche che regolano la costruzione e trasformazione delle espressioni simboliche nel contesto appunto dell'algebra (Bazzini e Chiappini, 2004). Tale linguaggio, per essere correttamente padroneggiato, richiede l'interiorizzazione delle sue diverse funzioni: stenografica, di sintesi, di generalizzazione, di individuazione, di trasformazione. La natura dell'algebra e del suo linguaggio è, in ambito scolastico, quella di generalizzazione e continuazione dell'aritmetica con l'introduzione di parametri al posto dei numeri.

Come detto nella sezione precedente, la base dell'attuale linguaggio algebrico è costituita da *simboli*: per quanto conservi una serie di norme da seguire per esprimere correttamente i concetti, vede cadere i classici costrutti grammaticali di soggetto, predicato e verbo, che riappaiono solamente nell'atto di tradurre la formula dal linguaggio simbolico a quello naturale (Gilbert (1945) in Cazzato (2011)). Questa traduzione è o dovrebbe essere, come accade per le lingue, soltanto un modo per esprimere in maniera diversa un concetto: in tale ottica, dovrebbe anche essere trattato il linguaggio algebrico, ma non sembra che sia un modo di ragionare ampiamente condiviso. Infatti, le scritture algebriche non sono solo strutture sintattiche da manipolare, ma hanno anche valore *semantico*, in quanto portatrici di concetti e significati ben definiti.

Consideriamo ad esempio la definizione di limite di una funzione: la dicitura $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ equivale in linguaggio simbolico alla sua definizione, esplicitata dalla scrittura $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \mid \forall x \in Dom(f), x - \delta \leq x \leq x + \delta \Rightarrow l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon$ che, esplicitata in linguaggio naturale, risulta in "preso un qualsiasi valore positivo piccolo a piacere ε, esiste un valore positivo δ tale che, preso un qualsiasi elemento del dominio della funzione, se questo elemento è compreso tra x – δ e x + δ, allora la funzione sarà compresa tra l – ε e l + ε". Lo stesso concetto, "il valore della funzione si avvicina a l quando x si avvicina a x_0", è stato quindi espresso in linguaggio simbolico compatto, con la sua definizione simbolica, e con quella espressa in linguaggio naturale, traduzione (abbastanza letterale) dell'espressione simbolica. Quello che si può osservare in questo contesto è che, come anticipato, confrontando i due linguaggi non si riesce a individuare un preciso simbolo o struttura che possano fungere da soggetto, da oggetto o da ogni complemento di sorta che invece riscontriamo nella grammatica del linguaggio quotidiano. Il linguaggio simbolico, però, *ha* una sua logica interna, che viene spesso disattesa, con la conseguenza di, in primo luogo, scorrettezze sintattiche, ma anche, più spesso, di errori concettuali. Ad esempio, in presenza di relazioni binarie, come le operazioni, è necessario avere *due* numeri coinvolti, mentre quando si considerano le funzioni, ad esempio quelle trigonometriche, la loro scrittura non può essere disgiunta da quella della variabile da cui dipendono: non si può quindi scrivere soltanto "sen", ma va specificata la variabile indipendente, α, completando quindi la scrittura in "senα", eventualmente con le parentesi, "sen(α)".

Proseguendo nel ripensare alla sintassi del linguaggio algebrico ricaviamo uno spunto interessante da Zan (2007, pagina 83-4): nel riportare le difficoltà di Marco nell'uso delle parentesi, quello su cui l'autrice si sofferma è il fatto che il ragazzo percepisce la *necessità* dell'uso di questi simboli unicamente in quanto puro segno stenografico di appoggio *personale*, non regolato da indicazioni esterne e condivise da tutti. Nello scrivere erroneamente $x + 1(x + 2)$ quello che in realtà lo studente intende è invece l'espressione *corretta* $(x + 1)(x + 2)$, tanto che esegue in maniera impeccabile il calcolo. Il punto di questa riflessione è che l'uso delle parentesi venga considerato non come uno strumento per determinare esplicitamente l'ordine delle operazioni da eseguire, ma come un'espressione provvisoria del pensiero, come se ciò che Marco scrive fosse una bozza da non far leggere a nessuno, per giungere infine al risultato corretto. Rileggendo quello scritto, probabilmente, né l'autore né chiunque altro potrebbe ricavarne alcun aiuto nell'interpretare il procedimento. La tensione, quindi, si crea per il fatto che l'omissione di una coppia di parentesi non abbia ripercussioni in un contesto quotidiano, ma che nel contesto simbolico della matematica abbia appunto conseguenze gravi. Questo tipo di tensione, esemplificato dall'erroneo uso delle parentesi, ricorda Ferrari (2021), si ritrova in situazioni in cui la funzione del testo o di una rappresentazione non è tanto la comunicazione quanto il *supporto dei processi di pensiero*; ciò perché la matematica è un insieme organizzato di conoscenze e processi, il cui ordine è riflesso dal proprio linguaggio. L'uso di un linguaggio disorganizzato e impreciso, però, non sempre è un male assoluto da evitare: nella fase di elaborazione dei concetti, infatti, l'utilizzo di espressioni e rappresentazioni imprecise, ambigue o persino sbagliate possono avere un ruolo positivo, viste nel contesto più ampio dell'apprendimento. È chiaro, infatti, che uno studente alle prime armi con un nuovo argomento non possa immediatamente padroneggiarne il linguaggio tecnico, ma sicuramente commetterà errori e imprecisioni nel tentare di costruire i concetti di base, creando una contrapposizione quantomeno linguistica tra il linguaggio della matematica e quello che sta usando per esprimerla e studiarla. Tale contrapposizione non va però combattuta, nascosta o evitata: va invece approfondita e tenuta in considerazione dal docente in ambito di apprendimento, evidenziandola agli occhi dello studente non in ottica valutativa, ma cooperativa e didattica.

Il primo incontro con la sintassi del linguaggio algebrico avviene con le espressioni, prima numeriche e poi letterali, che gli studenti incontrano per la prima volta alla fine della scuola primaria e secondaria di primo e secondo grado. Già Burton (1988) sosteneva la tesi che il fattore più grande di difficoltà per gli studenti, in ambito algebrico, fosse di tipo linguistico, originato dal non considerare il linguaggio simbolico dell'algebra come una *lingua* a sé stante, dotata, sì, di una grammatica propria, ma anche di un valore semantico, suggerendo anche che i rimedi dovessero operare principalmente in campo linguistico. Il linguaggio delle espressioni numeriche, se non padroneggiato correttamente, ha ricadute su tutto il percorso scolastico, ma anche sulla vita quotidiana. Non saperle maneggiare correttamente, infatti, porta anche, ad esempio, a un cattivo uso della calcolatrice, con evidenti ripercussioni sulla vita quotidiana.

È però importante far capire agli studenti che il linguaggio simbolico non sia soltanto un puro strumento sintattico da manipolare, così come non lo è il linguaggio quotidiano: è dotato di un significato semantico, che varia col variare della sintassi. Già Benvenuto (1994) contribuisce alla causa, con una serie di attività fortemente interdisciplinari che si focalizzano sull'analogia tra la sintassi della lingua italiana, latina, greca e quella del linguaggio matematico, anche nell'ottica della costruzione di competenze informatiche. Le attività sono volte sostanzialmente alla creazione della consapevolezza che il linguaggio simbolico delle espressioni sia dotato di un apparato *semantico* e contemporaneamente *sintattico*.

Il problema fondamentale nell'apprendere e padroneggiare il linguaggio algebrico è che, nonostante questo linguaggio abbia aspetti sintattici e semantici, la sintassi è spesso la sua unica dimensione di analisi, completamente oscurando il discorso semantico. Gli studenti fanno quindi molta difficoltà non perché il linguaggio matematico sia simbolico (le lingue stesse lo sono), ma perché non lo riconoscono e di conseguenza non lo utilizzano come sistema semiotico: le criticità sono quindi relative, per la maggior parte, nell'attribuire significato alle scritture algebriche, andando quindi a minare non tanto la manipolazione simbolica quanto la traduzione dal linguaggio quotidiano a quello matematico e viceversa.

L'utilizzo del linguaggio algebrico è quindi sensato (e ovviamente anche più efficace) se gli aspetti sintattici e semantici si uniscono insieme, armonizzandosi a formare effettivamente un linguaggio completo: questo perché diventa più facile manipolare un qualsiasi linguaggio simbolico se si ha controllo su sintassi e semantica contemporaneamente. Per essere concreti, manipolare solo l'aspetto sintattico di un linguaggio (i simboli, nel caso algebrico, le lettere nel caso di una lingua) significherebbe nella pratica cercare di comporre una frase di senso compiuto, esprimendo un preciso concetto, in una lingua sconosciuta, essendo soltanto a conoscenza dei simboli dell'alfabeto e delle regole grammaticali; il compito diventa chiaramente più agevole se oltre le norme grammaticali siamo a conoscenza anche del significato dei termini che si sa porre in una frase sintatticamente corretta. Anche questo aspetto viene sottolineato nell'esercitazione di Benvenuto (1994, pagina 5), in cui si scindono gli aspetti sintattici e semantici del linguaggio naturale e di quello matematico per evidenziare come anche una scrittura sintattica corretta possa non aver effettivamente alcun significato. Anche Sbaragli e Demartini (2021) focalizzano l'attenzione sul fatto che sintattica e semantica *debbano* essere utilizzate l'una al servizio dell'altra: per le definizioni, ad esempio, oggetto delle riflessioni delle autrici, riflettere sulla costruzione sintattica dell'enunciato considerando anche l'ambito semantico diventa più proficuo ed efficace proprio perché permettono di volta in volta di considerare quale sia la forma linguistica più efficace per esprimere un particolare contenuto disciplinare.

L'argomento del linguaggio algebrico è particolarmente di rilievo per diversi motivi, primo tra tutti quello epistemologico: i rudimenti del linguaggio algebrico educano alla modellizzazione e al pensiero astratto, permettendo agli studenti di iniziare un percorso di elevazione e astrazione dei loro processi di pensiero che durerà per gran parte del loro iter di formazione. Un altro motivo fondamentale per cui è centrale porre attenzione sul linguaggio algebrico è che è proprio con l'introduzione del calcolo letterale che il rapporto di molti studenti con la matematica si interrompe. Le motivazioni sono diverse: una tra queste è probabilmente il fatto che il passaggio dal calcolo numerico a quello letterale è intrinsecamente complesso da assimilare e comprendere in profondità. In aggiunta, però, è anche opportuno ricordare che il momento in cui viene richiesto questo primo passo verso l'astrazione si colloca nel pieno dell'adolescenza dei ragazzi, momento delicato di crescita e passaggio.

3.4 Esempio di analisi testuale

In conclusione di questo capitolo, riteniamo opportuno inserire un esempio di come può essere condotta un'analisi testuale secondo i criteri che abbiamo elencato e studiato in questo e nei precedenti capitoli. Il seguente estratto proviene dal libro di testo "Analisi matematica", di Bertsch, Dal Passo e Giacomelli: è una raccolta di argomenti classici dei corsi di base di Analisi matematica, che spazia dagli insiemi numerici fino a equazioni differenziali e trasformate di Laplace e Fourier.

L'estratto scelto, anche per agevolare il maggior numero di lettori nella totale comprensione di quanto segue, è stato scelto nella prima parte, dedicata agli elementi di base: si tratta di una sezione con una definizione particolare di numero reale, la successiva dimostrazione della proprietà di densità in $\mathbb{R}$ e, infine, una piccola sezione dedicata alle notazioni (Bertsch, Dal Passo, Giacomelli (2011), pagina 9 e 10[41]).

[41] La dimostrazione del Teorema 1.3 che riportiamo dopo l'estratto dal manuale è reperibile all'interno del documento (pagina 2) scaricabile al link https://highered.mheducation.com/sites/8838668949/student_view0/dimostrazioni_richiamate_nel_testo_.html, sezione online pensata come sostegno al testo cartaceo.

DEFINIZIONE 1.2

Un **numero reale** è un allineamento decimale proprio. L'insieme dei numeri reali si indica con $\mathbb{R}$.

Gli allineamenti che non sono limitati o periodici si dicono **numeri (reali) irrazionali**. In particolare $x = \sqrt{2}$ è un numero irrazionale e segue facilmente dalla (1.3) che è *la soluzione positiva* di $x^2 = 2$ (si veda anche il Teorema 1.11).

Partendo da questa definizione è possibile, anche se non daremo i dettagli, estendere a $\mathbb{R}$ la struttura algebrica (addizione e moltiplicazione) e l'ordinamento totale $\leq$ che abbiamo considerato nel caso particolare dei numeri razionali[2]. In tal modo $\mathbb{R}$ risulta un corpo ordinato, ovvero valgono le proprietà (1)-(17) del paragrafo precedente. Si può dimostrare inoltre che anche la proprietà di Archimede e la sua conseguenza (19) continuano a essere valide. In particolare la proprietà (17) può essere generalizzata come segue:

• PARENTESI

• INCISO

TEOREMA 1.3 Proprietà di densità

Siano $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $x < y$. Allora:

$$\exists \text{ infiniti numeri razionali } z : x < z < y, \tag{1.4}$$

$$\exists \text{ infiniti numeri irrazionali } z : x < z < y. \tag{1.5}$$

Proprietà di densità in $\mathbb{R}$

Dimostrazione

Notazioni. Dati due numeri reali a, b tali che $a < b$ si pone:

$$\begin{aligned}
(a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},\\
[a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},\\
(a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},\\
[a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}.
\end{aligned}$$

Intervalli

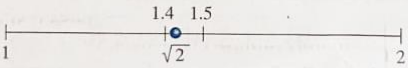


Figura 1.6 $(1.4)^2 \leq 2 < (1.5)^2$.

[2] Per esempio, il prodotto di due numeri reali $x = p.\alpha_1\alpha_2 \ldots$ e $y = q.\beta_1\beta_2 \ldots$ può essere definito considerando i prodotti q_n dei rispettivi troncamenti, ovvero $q_n = (p.\alpha_1 \ldots\alpha_n) \cdot (q.\beta_1 \ldots\beta_n)$, e mostrando che le cifre decimali di q_n "si stabilizzano", nel senso che le prime m cifre decimali di q_n restano le stesse a partire da un certo n in poi; l'unica accortezza sarà quella di ridefinire opportunamente i casi in cui si ottenga un allineamento decimale non proprio.

uso ":"

Tali insiemi sono detti **intervalli limitati**. In questo contesto, i simboli "(",")", "[" e "]" si leggono rispettivamente "aperto a sinistra", "aperto a destra", "chiuso a destra": ad esempio, (3, 5] è un intervallo aperto a sinistra e chiuso a destra, [0, 1] è un intervallo chiuso. Sono detti **intervalli illimitati** i seguenti insiemi ($a \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}
(-\infty, +\infty) &:= \mathbb{R},\\
(-\infty, a] &:= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\},\\
(-\infty, a) &:= \{x \in \mathbb{R} : x < a\},\\
[a, +\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\},\\
(a, +\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}.
\end{aligned}$$

In particolare indicheremo con $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}^-$ rispettivamente gli intervalli $(0, +\infty)$ e $(-\infty, 0)$.

Dimostrazione del Teorema 1.3 (proprietà di densità di $\mathbb{R}$), pag. 9

Dobbiamo dimostrare che se $x, y \in \mathbb{R}$ sono tali che $x < y$, allora l'insieme $\{z \in \mathbb{R} : x < z < y\}$ contiene infiniti numeri razionali e infiniti numeri irrazionali.

Consideriamo prima il caso in cui $y < 0$. Per la positività di $y - x$ e per la proprietà 19 del Paragrafo 1.2, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$y - x > 10^{-n_0} = 10 \cdot 10^{-(n_0+1)} > 2 \cdot 10^{-(n_0+1)}. \tag{D1.1}$$

Sia $y = -p.\beta_1\beta_2 \ldots$. Per la (1.2)

$$-p.\beta_1\beta_2 \cdots \beta_{n_0+1} - 10^{-(n_0+1)} < y \le -p.\beta_1\beta_2 \cdots \beta_{n_0+1} \,. \tag{D1.2}$$

Posto

$$p.\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{n_0+1} := p.\beta_1\beta_2 \cdots \beta_{n_0+1} + 10^{-(n_0+1)},$$

si ha:

$$\begin{aligned} x &\overset{(D1.1)}{<} y - 2 \cdot 10^{-(n_0+1)} \overset{(D1.2)}{\le} -p.\beta_1 \ldots \beta_{n_0+1} - 2 \cdot 10^{-n_0+1} \\ &= -p.\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{n_0+1} - 10^{-(n_0+1)} < -p.\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{n_0+1} \overset{(D1.2)}{<} y. \end{aligned}$$

Allora ogni allineamento decimale della forma $z = p.\alpha_1 \cdots \alpha_{n_0+1}\gamma_{n_0+2}\gamma_{n_0+3} \cdots$ verifica $x < z < y$. Variando i valori di γ_j, $j \ge n_0 + 2$, si ottengono infiniti allineamenti limitati o periodici (numeri razionali) e infiniti allineamenti non limitati e non periodici (numeri irrazionali) che verificano $x < z < y$.

Se $0 \le y = p,\beta_1\beta_2 \ldots$, si pone $\hat{y} = y - p - 1$ e $\hat{x} = x - p - 1$, cosicché $\hat{x} < \hat{y} < 0$. Per quanto appena dimostrato, esistono infiniti numeri razionali e infiniti numeri irrazionali $\hat{z}$ tali che $\hat{x} < \hat{z} < \hat{y}$: ponendo $z = \hat{z} + p + 1$ si ottengono infiniti numeri razionali e infiniti numeri irrazionali che verificano $x < z < y$.

Abbiamo scelto per questo esempio una sezione che comprendesse diversi tipi di testo: una definizione, un teorema e la sua dimostrazione (disponibile nella sezione digitale, aperta a tutti, dedicata al manuale), parti testuali di collegamento, e naturalmente una sezione con ampio uso di linguaggio simbolico, sia utilizzato nella dimostrazione che in una parte dedicata proprio all'interpretazione della notazione simbolica.

In prima istanza, notiamo il layout del testo cartaceo: sono presenti riquadri e colori diversi per sezioni diverse, richiami laterali che riassumono e descrivono in breve il contenuto del testo al quale sono affiancati e persino una figura esplicativa; il testo digitale è più essenziale, ma probabilmente ciò è dovuto al fatto che si tratti di una dimostrazione, più che per la sua natura di supporto online.

Da un punto di vista lessicale, possiamo effettuare diverse osservazioni: in primo luogo, facendo riferimento agli strumenti già citati usati da Sbaragli e Demartini (2021), possiamo calcolare il rapporto tra numero di parole del Vocabolario di Base e numero di parole totali, la densità lessicale (ricordiamo che un testo non tecnico, standard si attesta intorno allo 0.3-0.4) e la ricchezza lessicale per capire quanto tecnico questo testo sia. Per questo proposito, abbiamo scelto tre sezioni testuali diverse da analizzare: la definizione 1.2, il testo che la collega al Teorema 1.3 e la conclusione della dimostrazione del Teorema 1.3.

La dimostrazione consta di 17 parole, di cui 11 piene, il che la porta a un indice di densità lessicale di 0.65; il numero totale di lemmi è 14 sulle 17 parole totali, quindi l'indice di ricchezza lessicale è di 0.82.

Per la parte testuale di collegamento tra definizione e teorema calcoliamo il valore di densità lessicale, che risulta 0.58 (63 parole piene su un totale di 109 parole totali), mentre quello di ricchezza lessicale risulta 0.82 (28 lemmi su 34 occorrenze totali).

Il testo che conclude la definizione ha un indice di densità lessicale pari a 0.69 (43 parole piene su 62 totali) e uno di ricchezza lessicale di 0.52 (33 lemmi su 63 occorrenze totali).

Il rapporto tra parole del Vocabolario di Base e il totale delle parole dei tre testi si attesta rispettivamente su 0.79, 0.75 e 0.91, valori che si allineano con quelli dei libri di testo del corpus di Sbaragli e Demartini (2021). I lemmi presenti in questi testi che non appartengono al Vocabolario di Base sono *algebrico, allineamento, Archimede, cosicché, decimale, generalizzato, irrazionale, moltiplicazione, ordinato, paragrafo*.

Infine, specifichiamo che il valore molto alto del testo a conclusione della dimostrazione è dovuto all'elevata presenza di simboli, che lasciano poco spazio a lemmi che non siano congiunzioni o verbi come "verificare", "ottenere" e "dimostrare", che fungono da collegamento tra le diverse informazioni.

Secondo questi dati, i testi sono sia lessicalmente *densi* che *ricchi*, in linea col fatto che la sezione analizzata appartenga a un testo universitario.

Alcune delle parole presenti in questo testo sono *polisemiche*, come *infinito, irrazionale, periodico*, e per questo è opportuno che gli studenti (che a questo punto del percorso si presuppongono abbastanza autonomi nello studio) vi pongano la giusta attenzione.

In conclusione, per il lessico, analizziamo il linguaggio simbolico. Sono presenti un largo numero di simboli diversi, come: $\mathbb{R}, \sqrt{\ }, \leq, \exists, \epsilon, +\infty, -\infty$, ma abbiamo anche l'uso funzionale di apici e pedici, di lettere greche e latine come variabili, e di tutte e tre i tipi di parentesi, tonde, quadre e graffe, ognuna con un significato specifico. Le parentesi tonde vengono usate (a seconda del contesto) come segno di punteggiatura e come segnalatore di inizio e fine di intervallo, quelle quadre anch'esse per segnalare inizio e fine degli intervalli, quelle graffe per segnalare la descrizione degli elementi di un insieme, come nel seguente: $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$. Notiamo anche i diversi usi del segno “:”, che viene usato con tre significati diversi: come abbiamo appena visto, viene abbinato al segno di uguaglianza per indicare che tale uguaglianza è una *definizione*, viene utilizzato anche con significato di *tale che* e in ultimo come *segno di interpunzione* nelle parti testuali.

Da un punto di vista sintattico, invece, riportiamo frasi corte, con un uso della punteggiatura molto standard che, come detto, ha un diffuso uso di coordinazione: non è presente nessun punto e virgola, e solo due occorrenze di due punti. Si registra la presenza di poche subordinate, di cui una esplicita relativa e diverse *implicite* (il loro verbo è declinato al gerundio), tutte *condizionali* («*Partendo* da questa definizione, è possibile […] estendere …», «*Variando* i valori […] si ottengono […]» e infine «*ponendo* […] si ottengono […]»). Tra le altre strutture sintattiche che abbiamo introdotto nel corso dei capitoli, registriamo l’uso di parentesi e incisi per gerarchizzare le informazioni: in questo caso è una gestione molto corretta di questa funzione della punteggiatura. Infatti, per quanto riguarda l’inciso, lo riscontriamo nella dimostrazione, e al suo interno c’è un’informazione che effettivamente può essere messa in secondo piano, cioè i valori possibili di *j*; anche le parentesi vengono correttamente utilizzate per aggiungere informazioni non cruciali senza appesantire il testo.

Osservando i sintagmi verbali, notiamo che sono per la maggior parte coniugati solo alla terza persona singolare («contiene», «esiste», «verifica», «può essere generalizzata», «posto») e alla seconda persona plurale («abbiamo considerato», «dobbiamo dimostrare»), generalmente del presente indicativo, oppure sono presenti forme impersonali («sono detti», «si leggono», «si ottengono», «si pone») o, come visto poco sopra, verbi coniugati al gerundio. Tale scelta verbale si allinea perfettamente con gli scopi di un testo di questo tipo: da una parte l’intento comunicativo di coinvolgere il lettore nella spiegazione viene raggiunto con la seconda persona plurale, che si trova lungo tutto il testo e la dimostrazione, dall’altra quello di spersonalizzazione che si raggiunge con i molti verbi impersonali, in modo da permettere al lettore di focalizzarsi esclusivamente sugli oggetti e i processi descritti, non su chi stia compiendo l’azione.

Inoltre, da un punto di vista sintattico è importante notare l’uso funzionale dell’*elenco*: in queste sezioni sono presenti due elenchi, utilizzati per esporre in modo chiaro e compatto le diverse tipologie di intervalli, finiti e infiniti, che si incontreranno durante la lettura del testo. Un’obiezione che si potrebbe sollevare è che sia eccessivo elencare tutte le possibili combinazioni di parentesi e di estremi che possiamo avere in un intervallo: è d’altra parte necessario notare, però, che tale elenco è in una sezione dedicata esplicitamente alla notazione. Per la sua natura di libro di testo, gli autori del manuale hanno inserito al suo interno proprio sezioni dedicate alla notazione simbolica, utile affinché gli studenti imparino a gestire la simbologia di base per affrontare gli argomenti (e le relative descrizioni simboliche) più complessi che verranno. Di conseguenza, non sembra così ridondante ed eccessivo elencare, una volta per tutte, le varie tipologie di intervallo.

Infine, aggiungiamo un'osservazione sul linguaggio simbolico. Per la sua natura di testo dedicato agli studenti universitari (seppur matricole) la sintassi del linguaggio algebrico è abbastanza complessa: ad esempio, nella dimostrazione, l'espressione indicata con (D1.1) è una catena di disuguaglianze e uguaglianze che non è facilmente gestibile per uno studente di un grado d'istruzione inferiore. In generale, il linguaggio algebrico è usato in ogni parte dell'estratto, e gli autori, considerando appunto il target al quale è rivolto, partono dal presupposto che il lettore sappia gestirlo correttamente, o che impari a farlo proprio con la lettura del manuale.

In conclusione, quello che abbiamo analizzato è un testo matematico dal layout pulito ed essenziale, ad alta densità e ricchezza lessicale, con una sintassi del periodo poco complessa, ricca di frasi brevi, coordinate tra loro. Da un punto di vista linguistico, può costituire un ostacolo, se consideriamo l'utilizzo articolato del linguaggio algebrico nella dimostrazione, ma lessicalmente non dovrebbe costituire un problema per il target di riferimento, viste le alte percentuali di lemmi che appartengono al Vocabolario di Base.

Capitolo 4 – Pratiche d’aula

Questo capitolo finale racchiude alcune idee che la ricerca italiana in didattica della matematica ha sviluppato e analizzato nel corso del tempo, validandone l’efficacia per il potenziamento delle competenze linguistiche degli studenti di diversi gradi scolastici.

Le attività specifiche che hanno come scopo principale il potenziamento del linguaggio (e non solo delle competenze strettamente matematiche) sono sensate perché è un ambito ancora poco esplorato e preso in considerazione nella pratica d’aula: è infatti poco inserito nelle routine di spiegazione di un argomento nuovo esplicitare anche come *si parla* del nuovo concetto che si sta introducendo o, per esempio, come si leggono i simboli coinvolti nella sua descrizione. Infatti, all’interno di un’aula la dinamica è quella di un insieme di alunni che sanno, in larga parte, padroneggiare discretamente il linguaggio quotidiano in entrambi i suoi aspetti, ai quali viene sottoposta la richiesta di reimparare a modulare pensieri e parole per adeguarsi agli standard della disciplina matematica. Anche se è certamente vero che nell’introdurre un nuovo concetto si punta a costruire consapevolezza in entrambi gli ambiti, grammaticale e semantico, il problema sorge nel momento in cui, nella pratica successiva, viene dato molto più ampio spazio al primo, nella fattispecie all’aspetto sintattico del linguaggio matematico, cioè alla *manipolazione dei simboli*. La motivazione sottostante è che padroneggiare abbastanza bene questo aspetto permette allo studente di portare a termine in maniera soddisfacente diverse categorie molto diffuse di esercizi, per lo meno quelle più standard e meccaniche che possono essere proposte; a tal proposito possiamo pensare alle espressioni e alle equazioni letterali, ma anche a quelle trigonometriche, o alla geometria analitica, in cui imparare a memoria come manipolare i simboli porta alla corretta risoluzione di alcuni esercizi, e da qui all’illusione della comprensione dei concetti.

Il ruolo della ricerca, in questo caso, è quello di favorire l’incontro tra disciplina matematica e linguistica, fornendo, oltre le motivazioni, anche materiali, risorse, idee e stimoli, in modo da non lasciare i docenti soli davanti alla necessità di strutturare percorsi e modalità didattiche nuove, magari dopo anni, se non decenni d’insegnamento focalizzato solo sulle competenze matematiche. A tal proposito, il contributo di D’Aprile e Ferrari (2003) si focalizza sui docenti in formazione, analizzando conoscenze, convinzioni e atteggiamenti degli specializzandi della Scuola di Specializzazione per l’Insegnamento Secondario dell’Università della Calabria nei confronti del ruolo che la competenza linguistica ha sull’apprendimento degli studenti. Le loro riflessioni si orientano sull’estrema difficoltà a mettere in discussione i modelli tradizionali che stabiliscono cosa renda efficace l’insegnamento e ottimo un docente, anche alla luce delle necessità evidenti degli studenti e degli espliciti risultati della ricerca in merito. Infatti, nonostante sia almeno plausibile che uno specializzando al secondo (su quattro) semestre di scuola di specializzazione esprima indifferenza per la problematica linguistica proposta, non è invece giustificabile la rigidità nel cambiare l'ottica con cui guardare la disciplina. Nello specifico, gli specializzandi hanno dimostrato una certa ritrosia nel mettere sullo stesso piano aspetti linguistici e disciplinari, mostrando una spiccata tendenza a concentrarsi su questi ultimi e attribuendo loro tutte le criticità che uno studente può trovarsi ad affrontare. Da qui la necessità di creare corsi di studio e indirizzi specifici per ampliare le vedute dei futuri insegnanti, allenandoli a guardare gli argomenti matematici da molteplici punti di vista e attraverso le rappresentazioni più diverse, affinché restituiscano ai loro studenti la malleabilità e la plasticità della matematica e del suo linguaggio. È inoltre ormai noto che gli insegnanti delle materie scientifiche in generale non sono perfettamente consapevoli di possedere competenze linguistiche molto più adatte di quelli delle discipline linguistiche a svolgere il compito di mediare tra linguaggio quotidiano e scientifico: da una parte, sanno usare il primo per comprendere il secondo, dall'altra, sanno usare il secondo per comprendere la realtà. È in particolar modo importante che i docenti siano sempre più consapevoli delle loro competenze linguistiche, anche alla luce di quando Balboni (2000) evidenzia, cioè che l'insegnamento dell'italiano ignora spesso, volontariamente o meno, perfino l'*esistenza* delle microlingue scientifico-professionali, la cui introduzione agli studenti è lasciata come totale appannaggio dell'insegnante della materia specialistica. Gli studenti, infatti, pur essendo esposti alla matematica e al suo linguaggio fin da bambini, possono arrivare a sperimentare difficoltà, sia nella formulazione scritta che orale di un testo matematico. Tali difficoltà nell'impossessarsi di un linguaggio matematico appropriato sono probabilmente attribuibili sia a una costruzione non perfettamente raffinata del testo dei manuali di riferimento, ma anche al lavoro non accurato dei docenti nello sviluppare la competenza linguistica dei loro studenti.

Come abbiamo chiarito nei capitoli precedenti, il linguaggio matematico non è altro che un registro elevato della lingua quotidiana: padroneggiarlo correttamente significa quindi imparare ad usare un aspetto specifico della propria lingua, con conseguenti benefici anche nella disciplina linguistica. È per questo che le pratiche d'aula qui raccolte si rivelano estremamente interdisciplinari: sarebbe infatti opportuno che il docente di matematica avesse la collaborazione di quello di italiano, in modo da poter seguire e guidare i propri studenti su percorsi di pensiero e di lavoro molto più proficui. Questa collaborazione è vista sempre di più come una necessità per sviluppare le competenze linguistiche auspicate, proprio perché le ricadute positive hanno un alto impatto in entrambe le discipline, sia in termini di apprendimento della matematica, sia in quanto a padronanza della lingua. Un ulteriore elemento di conferma alla necessità di giungere a proposte didattiche concrete e applicabili in tempi brevi è l'entusiasta risposta dei docenti che vengono coinvolti in progetti e iniziative interdisciplinari, come hanno registrato Fornara, Demartini e Sbaragli (2020).

Una prima attività per potenziare il linguaggio matematico, che potrebbe sembrare così basilare da risultare banale, consiste nel *confrontarsi attivamente col testo matematico*: l'obiettivo è quello di sviluppare nel lettore un senso critico, che gli permetta di elaborare una riflessione critica di ciò che gli viene sottoposto. Per sviluppare l'abitudine a quella che di fatto è un'attività di *controllo metacognitivo*, bisogna abituare gradualmente il lettore a interrogarsi costantemente sul senso di ciò che fruisce, stimolando questo processo attraverso attività significative ad hoc. L'attività di lettura consapevole del testo permette di migliorare l'acquisizione e la padronanza del linguaggio tecnico: il manuale scolastico è senza dubbio il punto di partenza perfetto per esperienze di questo tipo. Pur con tutti i difetti di cui abbiamo accennato nei capitoli precedenti, il libro di testo è uno strumento di cui discutere e da utilizzare per capire insieme agli studenti in cosa e perché riscontrano difficoltà di comprensione, e magari insieme a loro riscrivere sezioni di testo e definizioni per aumentare la fruibilità del testo. Le attività da poter fare sul manuale (o su un generico testo matematico) sono molteplici, e vanno dall'analizzare sezioni specifiche del testo (come le definizioni, ponendo ad esempio l'attenzione sulla loro brevità o sul fatto che ogni loro parte sia necessaria per definire l'oggetto o il concetto) al considerarne il lessico, esaminandone l'etimologia, i contesti d'uso, l'eventuale polisemia o l'omonimia con altre parole. Tali lavori potrebbero portare a riscritture pratiche di parti del testo, magari in lavori di gruppo in cui gli studenti collaborano per trovare la forma più comprensibile e leggibile per tutti, anche alla luce delle difficoltà di eventuali compagni con DSA.

Un'altra attività molto interessante per potenziare il linguaggio è stata in realtà già citata in precedenza, ed è quella che Benvenuto (1994) utilizza come inizio di un percorso, presso il liceo classico V. Lanza di Foggia, fortemente interdisciplinare. Lo scopo dell'attività è quello di aumentare la consapevolezza degli studenti che la matematica non sia semplicemente una manipolazione simbolica senza senso, ma che sia dotata di un apparato grammaticale e semantico e che grazie a questo acquisisca sempre maggiore dignità. Come abbiamo già avuto modo di osservare nei capitoli precedenti, la docente struttura un lavoro abbastanza articolato, in diverse schede, che punta a consolidare nella mente degli studenti l'abitudine a pensare alle espressioni simboliche (espressioni ed equazioni) come a frasi dotate di una propria sintassi legata al loro significato.

Ferrari (2021, pagina 154 e successive) raccoglie una serie di consigli per mettere in pratica in aula attività mirate all'acquisizione e al miglioramento del linguaggio negli studenti. Il primo consiglio che dà è quello di inserire gli studenti in una situazione in cui sia necessario *comunicare con soggetti che non condividono parte del loro stesso contesto*: che sia contesto *fisico* (persone che non frequentano la stessa scuola o non vivono nella stessa città), *culturale* o *d'età* (alunni di classi scolastiche inferiori), lo scopo è quello di imporre forzosamente l'esplicitazione di riferimenti, modi di dire, lessico comuni, per spingere gli studenti a riflettere proprio su come comunicano. Un esempio molto efficace, descritto anche in Ferrari (2003) coinvolge due classi: la prima ha il compito di calcolare l'area del piano terra della propria scuola, tracciandone la pianta in scala e, in una seconda fase, porre il problema a un'altra classe, fisicamente lontana, senza l'utilizzo delle figure. Questa richiesta impone quindi agli studenti della prima classe uno sforzo di esplicitazione di concetti che spesso, in una conversazione tra pari che vivono lo stesso contesto fisico, rimangono impliciti. In aggiunta, il dover descrivere tramite un testo una figura geometrica complessa impone agli studenti una riorganizzazione del testo e della lingua che raramente esercitano, e che mette in gioco la comunicazione tra i diversi modi in cui vengono rappresentati gli oggetti geometrici.

Un altro modo per aiutare la formazione del linguaggio matematico degli studenti è insistere nello svolgimento di attività, a gruppi o individuali, a scuola o in classe, di *conversione tra i diversi registri semiotici* di cui si serve il linguaggio matematico (verbale, simbolico e figurale) o tra testi orali, scritti provvisori e scritti definitivi. Che sia tra registri o forme diverse, tale traduzione stimola confronti tra strutture e testi differenti che appartengono però alla stessa lingua in uso agli studenti. Una versione simile di quest'attività è quella della *traduzione di un testo tecnico da una lingua all'altra*: il docente che decida di portare avanti un lavoro di questo tipo con i suoi studenti, però, avverte Ferrari, dovrà essere consapevole che il punto non sarà la sola traduzione scolastica del testo. Infatti, il linguaggio viene potenziato solo se si chiede agli studenti di riflettere attivamente su quanto stiano facendo, ad esempio esplicitando eventuali impliciti presenti nel testo originale, riorganizzando la struttura per rendere la traduzione coesa, magari attivamente evidenziando questi cambiamenti in un confronto successivo.

Su una linea differente muovono invece i consigli successivi di Ferrari, che si basano su testi scritti. Una prima attività consiste nel *completare un testo* dal quale sono stati eliminati alcuni dati: gli sforzi degli studenti avranno quindi come scopo quello di inferire le informazioni mancanti attraverso la comprensione globale del testo. È però fondamentale ricordare che le parole mancanti non devono essere soltanto quelle chiave, e che le informazioni mancanti siano inferibili solo attraverso la comprensione globale del testo; questo per non abituare gli studenti al fatto che nei testi matematici la cosa importante sia far riferimento a parole chiave, inducendoli a utilizzare strategie di lettura errate in futuro.

Un'attività simile prevede la *ricostruzione di due testi separati*, divisi in frasi mescolate tra loro; per la ricostruzione è necessario che gli studenti esaminino diversi aspetti del testo, da quello semantico a quello stilistico, in un tentativo di abituare i ragazzi all'individuazione di legami di tipo diverso tra le frasi all'interno di un testo coeso, che loro stessi devono ricreare.

Infine, Ferrari propone due idee che coinvolgono un più alto contributo personale degli studenti in termini di creatività e attitudine: la *stesura di regolamenti* per attività comuni, e *l'invenzione di un sistema di segni*. La prima, utile nella costruzione di attività più ampie, come gare interne alla classe o tra classi diverse, prevede la verbalizzazione e la messa su carta di una serie di regole che dovranno esser rispettate durante l'evento o la competizione in oggetto. Questo processo è in larga parte analogo all'assiomatizzazione di una classe di strutture, considerando che si tratta di definire in forma scritta e comprensibile per chiunque delle condizioni che regolino processi e relazioni in un determinato ambito.

La seconda, invece, è un'idea la cui realizzazione ha bisogno di una certa cura. Nello stimolare negli studenti la necessità di formalizzare un sistema simbolico o di notazione, lo scopo non è di giustificare o validare il sistema simbolico attualmente in uso nella comunità matematica in ambito algebrico e aritmetico, o farne ammirare la bellezza agli studenti. La finalità ultima, infatti, si uniforma allo spirito con cui la ricerca in didattica della matematica e con cui in questo lavoro considerano il linguaggio: è infatti una finalità *funzionale*. Ferrari sottolinea come infatti sia un modo per evidenziare in modi e situazioni diverse i collegamenti tra le funzioni diverse del linguaggio e le rispettive forme. Quest'attività ha però una possibile conseguenza della quale i docenti devono essere consapevoli: è possibile che gli studenti *adottino un sistema notazionale diverso dallo standard*, se non addirittura in contrasto. Quest'atteggiamento, però, è inevitabile se la richiesta è quella che gli alunni assumano un ruolo attivo nei confronti del linguaggio: se si vuole che gli studenti rafforzino e padroneggino il linguaggio matematico, è necessario che tale linguaggio non venga loro imposto dall'alto, ma nasca come una necessità funzionale. In questo modo, infatti, verrà posto al primo posto il legame tra testi e scopi, e gli studenti stessi saranno in grado di creare nuovi legami e nuovi significati davanti a nuove notazioni. L'idea viene descritta in due sue applicazioni in Ferrari (2021, pagine 120 – 125) per bambini alla fine del secondo anno della primaria.

Diversi di questi spunti si allineano con una tesi molto diffusa nell'ambito della ricerca in didattica dell'italiano, esplicitata ad esempio in SUPSI, Ostinelli (2015), secondo cui l'arricchimento dell'italiano degli allievi può essere stimolato anche attraverso la scrittura in diversi contesti disciplinari, come ad esempio la matematica. La richiesta si rivolge infatti ai docenti di altre discipline, in modo da permettere agli studenti di esercitarsi con il mezzo scritto in molteplici contesti di utilizzo: per *studiare* (quindi per un uso da una parte più informale, ma che deve anche essere chiaro per occhi esterni), per *essere sintetici*, per *rielaborare* diversi contributi in un unico test coeso, per *ricostruire percorsi logici*. Queste forme di scrittura possono essere esercitate in ogni disciplina, dalla matematica alla filosofia, e sono fondamentali per la formazione a tutto tondo degli studenti, indipendentemente dal grado di istruzione che frequentano e anche eventualmente dal tipo di formazione secondaria e superiore che scelgono di intraprendere.

Un'attività che può essere molto proficua è quella descritta e svolta da Bini e Montagnani (2020), che esplorano le potenzialità didattiche dei *meme matematici*. I meme, espressione tipica della cultura contemporanea, rappresentano uno degli strumenti di comunicazione visiva più immediato e utilizzato nell'ambiente dei social media, frequentato quotidianamente e in maniera intensiva anche da adolescenti e giovani adulti, target dell'insegnamento. Il lavoro di Bini e Montagnani mostra che i meme possono entrare in classe in maniera efficace per arricchire l'esperienza degli studenti, facendo entrare in contatto la scuola con la loro sub-cultura creata all'interno dei social. L'attività si basa sul fatto che i meme sono l'intersezione di tre diversi significati parziali:

- Il primo è *strutturale*, e risiede nell'esistenza di un'estetica e una grafica riconoscibili e uniformi tra tutti i meme: generalmente, si tratta di scritte in alto e in basso (da sovrapporre poi a un'immagine che farà da sfondo), oppure di un banner bianco con scritte nere a cui mettere sotto un'immagine collegata;
- Il secondo è *social*: si basa sulla condivisione di significati legati a immagini che sono magari diventate virali, o comunque di cui tutti sono a conoscenza, visto che magari provengono da prodotti cinematografici o audiovisivi di sorta appartenenti alla cultura popolare;

- Il terzo è *specializzato*, ed è relativo all'ambito specifico riguardo cui si vuole costruire il meme. Nel caso corrente, sarà l'ambito matematico.

Per interpretare correttamente un meme, quindi, vanno correttamente decifrati e collegati tutti e tre i significati parziali riportati: in mancanza anche di uno solo di questi, il messaggio non arriva correttamente a destinazione. La potenzialità di questo strumento in ottica didattica è molto alta, per la quotidiana esposizione degli studenti, soprattutto dei gradi scolastici più alti, proprio a una grande quantità di meme presenti sui social. Potrebbe essere anche molto utile inserire questo elemento all'interno di una classe anche per "movimentarne" le dinamiche: chi è molto bravo in matematica potrebbe non conoscere tutti i meme virali al momento, o magari potrebbe essere meno creativo nell'uniformare l'ambito matematico con le immagini condivise. Anche alla luce di ciò, e dell'efficacia ormai accertata della *peer instruction*, è consigliato svolgere quest'attività dividendo la classe in gruppi, anche per amalgamare adeguatamente le diverse competenze dei ragazzi.

Bini e Montagnani hanno già effettuato delle sperimentazioni in materia con studenti di scuola secondaria di primo e secondo grado: si sono però concentrati su creazione e discussione di meme dopo aver svolto l'attività di spiegazione. Il fine era infatti quello di cementare e consolidare conoscenza già acquisite nelle lezioni precedenti. Se è infatti vero che per creare e interpretare un meme, come detto, è necessario padroneggiare anche l'aspetto che abbiamo chiamato specializzato, cioè appunto l'argomento matematico, è altrettanto vero che proprio il confronto con i meme permette di sistematizzare conoscenze che magari non lo erano, e che erano passate inosservate dal docente. Di conseguenza, sia l'*atto creativo*, possibilmente svolto in gruppo, sia la *fruizione dei meme* ha un attuale valore didattico, dato che favorisce la metacognizione e l'emergere di difficoltà o misconcezioni. L'attività svolta è strutturata su tre ore e divisa equamente in altrettante fasi: la prima prevede il lavoro degli studenti a coppie e l'obiettivo è quello di creazione di meme, tramite siti appositi o, nel caso di impossibilità di utilizzo di dispositivi connessi a Internet, attraverso schede cartacee appositamente predisposte, e vengono consegnati con una breve frase di spiegazione orale o scritta. La seconda fase, invece, si focalizza sull'approfondimento dell'argomento matematico oggetto dei meme, seguita da un'ultima fase di discussione collettiva moderata dal docente.

Un percorso didattico parallelo a quelli citati fin ora è quello che mira a lavorare sulla *capacità di lettura*. Demartini e Sbaragli (2019a, pagina 20 e successive) affrontano il discorso, suggerendo che i primi stimoli in tal senso potrebbero essere già sottoposti agli studenti durante la scuola primaria, con attività di gruppo in cui mettere a contatto i bambini con diversi tipi di testo matematico (filastrocche, dizionari, riviste, volantini, libri divulgativi e il loro stesso manuale). Una volta che i ragazzi hanno preso confidenza con i diversi formati testuali, consigliano le autrici, è possibile chieder loro di classificarli, eventualmente fornendo loro stimoli e criteri per separarli secondo loro personali criteri. A questo punto, si può ancora approfondire la discussione, facendo riflettere gli studenti sugli intenti dell'autore, su cosa percepiscono di diverso da un testo all'altro in termini di informazioni, piacere nel leggere, fino ad arrivare a farli prender consapevolezza del processo di lettura che hanno effettuato nel leggere i diversi testi. Di conseguenza, è molto importante tener traccia di queste strategie e dei loro scopi per aiutare i bambini ad essere auto-consapevoli. L'attività può essere integrata con lavori specifici per ogni testo: cercare un termine matematico sul dizionario e riportarne la definizione e l'uso in diverse frasi, spiegare a parole proprie cosa chiede un problema, cercare il prezzo più basso di un certo articolo su un volantino, e ogni sorta di richieste che implichino un *utilizzo critico del testo* che gli studenti hanno davanti. Si è rivelato anche utile ricordare ai ragazzi di tener traccia delle domande e delle difficoltà incontrate nell'intero processo, in particolare nell'approccio al testo: si noterà che diversi individui attuano strategie di lettura diverse, anche all'interno di uno stesso gruppo, che poi si riveleranno più o meno funzionali agli scopi del singolo. È compito dell'insegnante, a questo punto dell'attività, aiutare i ragazzi a strutturare una sana "routine" di lettura dei testi matematici, attraverso domande non banali di comprensione del testo matematico che hanno davanti.

Anche Navarra (2014) porta il suo contributo al problema del linguaggio, con due diversi concetti. In primo luogo suggerisce, come anche Ferrari (2021), che la traduzione tra i diversi sistemi semiotici della matematica sia quella più efficace per stimolare le competenze di argomentazione e generalizzazione, puntando quindi sul far parlare gli studenti. In particolare, cerca di stimolare gli insegnanti a far *verbalizzare* agli studenti i loro pensieri, per l'evidente relazione tra la capacità di argomentare e parafrasare e quella di generalizzare. In una particolare trascrizione commentata, leggiamo di un'alunna che interviene cercando di trovare una legge generale che determini la forma di una certa figura dopo un certo numero di step: all'inizio dell'intervento, Ylenia, la ragazza, non è giunta ad alcuna conclusione sul problema che le è stato posto, ma *mentre verbalizzava*, ha dedotto ed espresso la regola generale che tutta la classe andava cercando.

L'autore porta poi alla luce un aspetto cruciale, cioè che nella pratica d'aula è fondamentale anche il linguaggio usato dagli insegnanti nell'interazione con i propri studenti e il modo con cui interagiscono con loro contino in maniera importante nella costruzione del linguaggio degli studenti. In primis, fornisce una serie di indicazioni su come gli insegnanti possono interagire con gli studenti in maniera più *efficiente*, ad esempio evitando domande troppo generiche o aperte, che devono almeno un po' cercare di guidare gli studenti nella direzione giusta, senza però vincolarli troppo; un esempio di domande troppo generiche sono quelle a risposta corale "sì-no" («avete capito?», «Tutto chiaro?»), quelle dubitative, ma retoriche («è davvero necessario questo calcolo?») e quelle che sfociano in un botta e risposta. Navarra suggerisce invece domande che spingano gli alunni a rimettere in discussione le loro idee ma anche i loro metodi comunicativi, come richieste interlocutorie («prova a dirlo in un'altra maniera, fammi capire meglio»), inviti a socializzare una spiegazione («hai capito, prova a spiegarlo ai compagni che non hanno le idee chiare») o a riformulare la propria argomentazione o quella di un compagno, fino all'invito alla collaborazione col docente.

L'autore si focalizza anche sulla differenza tra domande che iniziano con *perché* e con *come*, cioè sulla differenza che sussiste tra la domanda «perché hai scritto questo?» e «Come hai capito di dover scrivere questo?». Apparentemente la richiesta è la stessa, cioè argomentare la risposta data, ma il messaggio sottostante è differente: la prima ha come risposta il *prodotto* del ragionamento, mentre la seconda è finalizzata a far esporre il *corpo* del ragionamento allo studente. Da qui, la differenza, piccola eppure fondamentale, tra i due modi di porre la stessa domanda.

In ultimo, Navarra fa notare un fenomeno molto diffuso: l'insegnante nel parlare con un alunno avvia una frase e chiede agli allievi di completarle, imponendo loro una frase che non hanno elaborato. L'effetto di quest'abitudine, chiamata "a completamento" o "a risposta obbligata" è quella di limitare fortemente lo sviluppo delle competenze linguistiche degli studenti. Inoltre, dato che in questi casi la costruzione della frase è completamente appannaggio del docente, gli studenti non imparano ad argomentare autonomamente, ma cominciano a dipendere completamente dal docente per la verbalizzazione dei propri pensieri e procedimenti. Infine, l'attenzione degli studenti si focalizza non più su cosa sia corretto, ma su cosa voglia sentirsi dire l'insegnante, anche quando esistono diversi modi corretti di argomentare una risposta o descrivere un processo. A tal proposito, la ricerca in didattica della matematica, nella persona di Guy Brousseasu, ha creato il costrutto teorico dell'*effetto Topaze*, che descrive il fenomeno per cui il focus dell'insegnante si sposta dall'apprendimento dello studente verso il raggiungimento di un certo obiettivo prefissato (la corretta risoluzione di un esercizio, di un problema, la ripetizione di una definizione), indipendentemente dal modo con cui vi si arriva.

Quelle appena proposte sono solo alcune delle diverse attività che la ricerca in merito ha sperimentato per l'uso didattico. L'auspicio è che la comunicazione tra il mondo della ricerca in didattica della matematica (e dell'italiano) e quello scolastico sia sempre maggiore e proficua, in modo che anche questi risultati e questo habitus mentale di interdisciplinarità permeino in misura sempre maggiore nei docenti di entrambe le discipline. Gli sforzi dei docenti sono infatti sempre volti all'apprendimento, ma deve cambiare il tipo di apprendimento: non più nozionistiche definizioni e sterili manipolazioni di simboli, ma concetti e modi di pensare multiformi e non limitati al solo svolgimento degli esercizi. Il fine è infatti di educare studenti consapevoli e competenti che diventeranno cittadini consapevoli e competenti, in grado di leggere il mondo intorno a loro nella maniera più chiara e corretta possibile.

Conclusioni

Al termine di questo lavoro quello che preme ribadire è che, come abbiamo ampiamente avuto modo di dimostrare, il linguaggio matematico non è assolutamente l'opposto di quello quotidiano, né tantomeno sono così distanti come potrebbe sembrare a un occhio superficiale. Come detto, il linguaggio matematico è uno specifico registro elevato di quello quotidiano e, per quanto differenti, la loro continuità da un punto di vista grammaticale è molto marcata. Anche se considerare il linguaggio matematico da un'ottica strettamente linguistica è un modo di percepirlo molto diffuso in ambito di ricerca, non lo è altrettanto all'interno dell'ambiente scolastico. La tradizione didattica che si è consolidata in questi decenni di insegnamento, infatti, si basa sulla separazione tra materie umanistiche e scientifiche ed è ormai *culturalmente consolidata* tanto da influenzare anche la maggior parte dei docenti di matematica e di italiano. È però sempre presente e incessante lo sforzo dei ricercatori in didattica della matematica e dell'italiano, che premono per riabilitare questo legame interdisciplinare così importante per l'apprendimento.

Anche in questo contesto, infatti, è stato dimostrato che il fattore linguistico, e in particolar modo grammaticale, è influente nell'ottica di un apprendimento profondo della disciplina che non si limiti al semplice espletare esercizi meccanici. Il processo di miglioramento delle competenze linguistiche degli studenti è senza dubbio non banale, e richiede un discreto impegno in primis da parte del personale docente: come detto, la tradizione didattica vorrebbe una separazione degli ambiti, e tale separazione vive anche nell'inconscio dell'insegnante, anche se spesso ha una lunga esperienza alle spalle. La ricerca, anche in ambito italiano mette a disposizione studi, conoscenze e strumenti pratici per provare a destrutturare queste consuetudini un simbolo alla volta, una rappresentazione alla volta, un verbo alla volta.

Il punto è quindi che è *necessario* avere come obiettivo un insegnamento e un apprendimento di qualità, che permettano agli studenti di essere realmente competenti in matematica: il raggiungimento di tale obiettivo passa anche dal padroneggiarne correttamente il linguaggio. Abbiamo ampiamente dimostrato come le probabilità di un apprendimento proficuo della materia (come lo abbiamo descritto e come lo descrivono i documenti ministeriali) calano drasticamente se non viene posta la giusta attenzione nel curare le competenze linguistiche degli studenti.

Inoltre, fenomeni come la didattica a distanza, la centralità e la pervasività di social network e tecnologia nella vita degli studenti e il ruolo sempre più sostanziale della lingua inglese nella quotidianità potrebbero sembrare ostacoli a un insegnamento linguistico proficuo, ma li si può trasformare in opportunità per migliorare e potenziare la conoscenza matematica e linguistica degli studenti.

Quest'attenzione alle competenze linguistiche non implica però che la componente teorica vada oscurata, dimenticata o considerata meno importante, anzi: permettere agli studenti di sviluppare un appropriato linguaggio significa colmare lo scollamento che si è creato nel tempo tra componente sintattica e semantica della matematica e che ha sempre di più influito negativamente sull'apprendimento della disciplina. Capire ciò permette ai docenti di interpretare errori e comportamenti degli studenti in maniera più profonda e soprattutto di poterli aiutare a superare tali difficoltà, in un tentativo di ristabilire un rapporto comunicativo docente-studente che permetta al docente di matematica di recuperare la sua figura di *educatore* superando quella di mero solutore di esercizi.

Bibliografia

Arzarello, F., Bazzini, L., & Chiappini, G. (1994). *L'Algebra come strumento di pensiero: analisi teorica e considerazioni didattiche*. Università di Pavia.

Baccaglini-Frank, A., Robotti, E. (2013). *Didattica della matematica e disturbi specifici dell'apprendimento: da quadri teorici di riferimento a pratiche efficaci per fare matematica nella scuola di tutti*. Atti del XXXI Convegno UMI-CIIM. (https://uni.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2013/12/Baccaglini_Robotti.pdf)

Balboni, P. E. (2000). Le microlingue scientifico-professionali. *Torino: Utet*.

Barozzi, G. C. (2001). Le parole della matematica. *Nuova Secondaria*, 83-85.

Batchin, M.M. (1986). *Speech Genres and Other Late Essays* (trad. Vern W. McGee). Austin TX: University of Texas Press.

Benvenuto, M. (1994). Linguaggio naturale, linguaggio matematico. *Ratio Mathematica*, 7(1), 135-142.

Bertsch, M., Dal Passo, R., & Giacomelli, L. (2011). Analisi matematica-Seconda edizione. In *Analisi matematica-Seconda edizione* (pp. 1-611). The McGraw-Hill Companies, Srl.

Bini, G., & Montagnani, M. (2020). Comprendere, creare e utilizzare in classe i meme matematici. In *Matematica e Fisica nella cultura e nella società* (pp. 339-346). Università di Torino.

Black M. (1962). *Modelli, Archetipi, Metafore*. Pratiche Editrice.

Borello, E. (Ed.). (1994). *L'incomunicabilità di massa: linguaggi settoriali: funzionamento e apprendimento* (Vol. 4). Edizioni dell'Orso.

Botta, E., & Silvia, S. (2016). Il caso dell'altezza. Un sapere fondante. *Nuova secondaria*, (1/2016), 112-116.

Boyer Carl, B. (1976). Storia della matematica. *Oscar Mondatori, Milano*.

Bramanti, M. (2011). I linguaggi matematici: idee e simboli. *Parte I–Emmeciquadro*, (42).

Burton, M. B. (1988). A linguistic basis for student difficulties with algebra. *For the learning of mathematics, 8(1)*, 2-7.

Canducci, M., Demartini, S., Franchini, E., & Sbaragli, S. (2019). Analisi di manuali scolastici di matematica dal punto di vista linguistico e disciplinare. *B. Di Paola (A cura di), Pratiche d'aula e ricerca didattica: nuove e vecchie sfide di insegnamento/apprendimento matematico per una scuola competente e inclusiva*, 43-44.

Canducci, M., Demartini, S., & Sbaragli, S. (2021). Plurale o singolare? Disomogeneità linguistica di numero nei manuali di matematica della scuola primaria e secondaria di primo grado italiani. *Italiano a scuola*, 3, 99-132. (consultabile e scaricabile al link https://italianoascuola.unibo.it/article/view/12935)

Cazzato, F. (2011) Il lessico della matematica nella lingua italiana: analisi semantico-lessicale.

Cocking, R. R., & Mestre, J. P. (2013). *Linguistic and cultural influences on learning mathematics*. Routledge.

Cormaci, G., Paviglianiti, C., Pellicanò, S., Peluso, R., & Romeo, C. (nd) "Signor professore, Marco se la spassa con SUA moglie!"

D'Aprile, M., & Ferrari, P. L. (2003). Linguaggi e rappresentazioni nella formazione degli insegnanti di matematica. *La matematica e la sua didattica*, 4, 1-21.

De Mauro, T. (1984). *Ai margini del linguaggio*. Editori riuniti.

De Mauro, T. (2016a). Il Nuovo vocabolario di base della lingua italiana. https://www.internazionale.it/opinione/tullio-de-mauro/2016/12/23/il-nuovo-vocabolario-di-base-della-lingua-italiana

De Mauro, T. (2019). *Guida all'uso delle parole. Parlare e scrivere semplice e preciso per capire e farsi capire*. Laterza. (Edizione originale pubblicata nel 1980).

Demartini, S., Fornara, S., & Sbaragli, S.(2017). Dalla parola al termine. Il cammino verso l'apprendimento del lessico specialistico della matematica nelle definizioni dei bambini. Atti del convegno Giscel, Milano, 22-24.09. 2016. La lingua di scolarizzazione nell'apprendimento delle discipline non linguistiche, 79-101.

Demartini, S., & Sbaragli, S. (2019a). La porta di entrata per la comprensione di un problema: la lettura del testo. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, (5), 9-43.

Demartini, S., & Sbaragli, S. (2019b). Le parole che "ingannano". La componente lessicale nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica.

Demartini, S., Sbaragli, S., & Ferrari, A. (2020). L'architettura del testo scolastico di matematica per la scuola primaria e secondaria di primo grado. *Italiano LinguaDue*, 2, 160-180.

Di Nardo, E., & Liseo, B. (2009). L'arte di raccontare bugie con l'ausilio dei grafici e non solo. *Induzioni*, 38, 75-96.

Farnè, R. (2002). Iconologia didattica. Le immagini per l'educazione: dall'Orbis Pictus a Sesame Street. Zanichelli, Bologna.

Ferrari, P. L. (2003). Costruzione di competenze linguistiche appropriate per la matematica a partire dalla media inferiore. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate A*, *26*, 469-496.

Ferrari, P. L. (2018). Il controllo semantico sui testi matematici all'inizio dell'università. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, (3), 35-49.

Ferrari, P. L. (2021). *Educazione matematica, lingua, linguaggi: Costruire, condividere e comunicare matematica in classe*. De Agostini Scuola SpA.

Ferrari, A. (2019). *Che cos' è un testo* (Vol. 587). Carocci.

Ferreri, S. (2005). L'alfabetizzazione lessicale: studi di linguistica educativa. Roma: Aracne.

Fornara, S., Cignetti, L., Demartini, S., Guaita, M., & Moretti, A. (2015). Costruzione del testo e punteggiatura tra norma, uso e didattica negli elaborati del corpus TIscrivo. In J. Miecznikowksi, M. Casoni, S. Christopher, A. Kamber, E. M. Pandolfi & A. Rocci (Eds), *Bullettin suisse de linguistique appliquée, Actes du colloque VALS-ASLA 2014* (Lugano, 12-14 février 2014) (pp. 71-94). VALS-ASLA.

Fornara, S., & Sbaragli, S. (2017). Italmatica. L'importanza del dizionario nella risoluzione di problemi matematici. *F. De Renzo & ME Piemontese (A cura di), Educazione linguistica e apprendimento/insegnamento delle discipline matematico-scientifiche*, 211-224.

Fornara, S., Demartini, S., & Sbaragli, S. (2020). Se la sintesi diventa un problema. Alcune caratteristiche del linguaggio specialistico della matematica in prospettiva didattica. In *Linguaggi settoriali e specialistici. Sincronia, diacronia, traduzione, variazione. Atti del XV Congresso della Società Internazionale di Linguistica e Filologia Italiana (SILFI), Genova, 28-30 maggio 2018* (pp. 499-506). Cesati.

Freguglia, P., & Fulvi, V. (nd) “L’algebra” di Rafael Bombelli: nuova trascrizione e commento”.

Gilbert, E. J. (1945). Langage de la science. Paris: Biologica.

Gouthier, D. (2009). Immagini della Matematica. Matematica per immagini. *Pratiche matematiche e didattiche in aula, Atti del Convegno Castel San Pietro Terme*, 6-7.

Halliday, M. A. K., & Webster, J. J. (2003). *On Language and Linguistics: Volume 3*. A&C Black.

Halliday, M. A. K. (2004). *Language of Science*. London: Continuum.

Høyrup, J. (2001). The Old Babylonian square text BM 13907 and YBC 4714: retranslation and analysis. In *Changing views on ancient Near Eastern mathematics*. Dietrich Reimer Verlag.

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from* (Vol. 6). New York: Basic Books.

Landriscina, F. (2012). Didattica delle immagini: dall’informazione ai modelli mentali. *Form@ re-Open Journal per la formazione in rete, 12*(80), 27-34.

Levin, T., & Shohamy, E. (2008). Achievement of immigrant students in mathematics and academic Hebrew in Israeli school: A large-scale evaluation study. *Studies in Educational Evaluation, 34*(1), 1-14.

Lolli, G. (2002). La metafora in matematica. *GL Beccarla & C. Marello (a cura di), La parola al testo. Scritti per Bice Mortara Garavelli*, 221-232.

Lolli, G. (2015). Le parole nella matematica. *Quale didattica dell’italiano? Problemi e prospettive dell’insegnamento dell’italiano: Problemi e prospettive*.

Maier, H. (1993). Problemi di lingua e di comunicazione durante le lezioni di matematica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 69-80.

Martini, B., & Sbaragli, S. (2005). *Insegnare e apprendere la matematica* (pp. 13-143). Tecnodid.

Navarra G. (2014). “Cinque per tre fa quin… ?” “… dici” “Bravo!” - *La metodologia delle trascrizioni pluricommentate come strumento per lo studio dei comportamenti linguistici dei docenti di matematica e la promozione di sensibilità e competenze in tale ambito*. Atti del Convegno Nazionale GISCEL 2014. Roma. 239-252.

Pornthanachotanan, M. P., & Singhapreecha, P. (2020). *An Analysis of Thai Students' Errors on English Fragments, Run-Ons, and Comma Splices: A Comparison Between Science-Math and Intensive Science-Math Programs* (Doctoral dissertation, Doctoral dissertation, Thammasat University).

Porteri Ferdani, L. (2011). *Le equazioni tra significato e sintassi* (Doctoral dissertation, Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana (SUPSI)).

Preti, G. (1953). *Linguaggio comune e linguaggi scientifici*. Fratelli Bocca.

Proust, C. (2018). Segmentation of texts in Old Babylonian mathematics. In *Pieces and Parts in Scientific Texts* (pp. 49-70). Cham: Springer International Publishing.

Salvi, M. (2014). Metafora ed Analogia in Didattica della Matematica. *L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE*, 37(3), 241-263.

Sardegna, G. I. S. C. E. L. (1988). Materie scientifiche, libri di testo e linguaggio: il punto di vista di insegnanti e studenti. *L'educazione linguistica ei linguaggi delle scienze*, Firenze, La Nuova Italia, 267-286.

Serianni, L. (2003). Il lessico scientifico nei dizionari italiani dell'uso. *Il lessico scientifico nei dizionari italiani dell'uso*, 19-44.

Sbaragli, S. (2011). Incoerenze nelle intenzionalità degli insegnanti tra aspetti concettuali, culturali e semiotici dell'angolo. *Insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 34, 373-386.

Sbaragli, S. (2016). L'importanza dei saperi fondanti. Il caso dell'altezza dei poligoni. *La matematica e la sua didattica. Convegno del trentennale. Bologna: Pitagora*, 35-40.

Sbaragli, S., & Demartini, S. (2021). Italmatica. Lingua e strutture dei testi scolastici di matematica.

Sbaragli, S., Demartini, S., & Franchini, E. (2021). Le difficoltà di comprensione e di gestione dei termini specialistici della geometria all'ingresso della scuola secondaria di primo grado. *La matematica e la sua didattica*, 29(1), 7-37.

Schleppegrell, Mary J. (2007). The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. *Reading & writing quarterly* 23.2 139-159.

Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana, & Ostinelli, M. (2015). *La didattica dell'italiano: problemi e prospettive*. DFA.

Sobrero, A. A. (2009). L'incremento della competenza lessicale, con particolare riferimento ai linguaggi scientifici. *Italiano LinguaDue*, 1(1), 211.

Sowder, L. (1989). Searching for affect in the solution of story problems in mathematics. *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*, 104-113.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica: Osservare, interpretare, intervenire*. Springer Science & Business Media.

Zan, R. (2011). L'errore in matematica: alcune riflessioni. PQM 2010/2011.

Sitografia

https://storiografia.me/2013/12/10/storia-dei-simboli-matematici/

https://it.wikipedia.org/wiki/Matematica_greco-ellenistica

https://www.saperescienza.it/biologia/il-linguaggio-dell-algebra-29-12-14

https://keespopinga.blogspot.com/2010/05/le-tre-algebre-di-luca-pacioli.html

https://alessandrofanello.it/vygotskij-e-piaget-lo-sviluppo-del-linguaggio/

https://en.wikipedia.org/wiki/Michael_Halliday

https://en.wikipedia.org/wiki/Systemic_functional_linguistics