

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Umanizzare la Matematica. Continua il viaggio attraverso Pi Greco.

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Prof.ssa
Alessia Cattabriga

Presentata da:
Arianna Munari

Correlatore:
Prof.
Fabio Filippi

VI Sessione
Anno Accademico 2021/2022

Per tutti quelli che non si sentono mai all'altezza

Indice

Introduzione	V
Elenco delle figure	VIII
1 Inquadramento teorico	1
1.1 I pregiudizi ed il <i>justification problem</i>	1
1.1.1 Il progetto KOM	5
1.1.2 Materie utili e materie inutili: la risposta è la cultura	7
1.2 Umanizzare la matematica attraverso la sua storia	11
1.2.1 Le Indicazioni Nazionali per i Licei	12
1.2.2 Umanizzare la matematica	13
1.2.3 Integrare la storia della matematica	17
1.2.4 Controindicazioni	21
2 La storia di Pi Greco attraverso quattro personaggi	24
2.1 La storia antica di Pi Greco	25
2.1.1 I Babilonesi	25
2.1.2 Gli Egizi	26
2.1.3 Gli Ebrei	27
2.1.4 I Greci	28
2.1.5 I Cinesi	30
2.2 La storia di Pi Greco continua	31
2.3 Archimede da Siracusa	37
2.3.1 Archimede e Pi Greco	42
2.4 Il cardinale Niccolò Cusano	45
2.4.1 Filosofia e matematica	49
2.4.2 Cusano e la quadratura del cerchio	50
2.4.3 Le critiche alla dimostrazione di Cusano	54
2.5 François Viète, il matematico dilettante	59
2.5.1 Viète e la matematica	63
2.5.2 La formula di Viète per il calcolo di Pi Greco	66
2.6 Il padre del calcolo infinitesimale Isaac Newton	69

2.6.1	La produzione scientifica di Newton	77
2.6.2	Il nuovo metodo per calcolare Pi Greco	81
3	Continua il viaggio attraverso Pi Greco	84
3.1	Struttura, target e obiettivi del progetto	84
3.1.1	Target	84
3.1.2	Prerequisiti	85
3.1.3	Obiettivi e metodologia	85
3.1.4	Struttura	86
3.1.5	Questionari ed interviste	88
3.2	Archimede da Siracusa	90
3.3	Il cardinale Niccolò Cusano	91
3.3.1	Il cardinale Niccolò Cusano e la quadratura del cerchio	92
3.4	François Viète, il matematico dilettante	93
3.4.1	Viète e la prima espressione numerica di Pi Greco	93
3.5	Il padre del calcolo infinitesimale Isaac Newton	94
3.5.1	Newton e il nuovo metodo per calcolare Pi Greco	95
4	Lo svolgimento in aula	97
4.1	Lezione 1: Archimede da Siracusa	98
4.2	Lezione 2: il cardinale Niccolò Cusano	99
4.2.1	Niccolò Cusano e la quadratura del cerchio	99
4.3	Lezione 3: Approssimazione e il significato dei "..."	104
4.4	Lezione 4: François Viète, il matematico dilettante	106
4.4.1	Viète e la prima espressione numerica di Pi Greco	106
4.5	Lezione 5: Il padre del calcolo infinitesimale Isaac Newton	110
4.5.1	Newton e il nuovo metodo per calcolare Pi Greco	110
5	Questionari, interviste e conclusioni	114
5.1	Questionario iniziale	114
5.2	Questionario finale	122
5.3	Interviste	133
5.3.1	Intervista alunno 1	134
5.3.2	Intervista alunno 2	136
5.3.3	Intervista al professore	138
5.4	Conclusioni	139
A	Cusano e la quadratura del cerchio	142
B	Viète e la prima espressione numerica di Pi Greco	151
C	Newton e il nuovo metodo per calcolare Pi Greco	156
D	Questionari	161

Introduzione

Il percorso elaborato in questa tesi costituisce il continuo del lavoro già avviato sulla storia di Pi Greco condotto dalla Dott.ssa Solmi nella tesi *Alla scoperta di Pi Greco: introdurre la storia della matematica nella pratica d'aula* [43].

L'elaborato citato presenta, attraverso cinque unità didattiche, l'evoluzione e le scoperte avvenute sulla costante più "trascendente" della matematica, in un percorso che si interessa del periodo più antico: dal 1900 circa a.C. con la matematica Babilonese fino al III secolo a.C. con la matematica Cinese.

La storia, come suggerisce il titolo, viene introdotta per indagare come la storia della matematica, inserita nel suo insegnamento, possa aiutare a comprendere i concetti, permettendo allo studente di contestualizzare la nozione per comprenderne lo sviluppo concettuale e favorire quindi una migliore acquisizione.

Anche in questa tesi la storia viene utilizzata come strumento a supporto dell'insegnamento tradizionale della matematica, ma con una differente sfumatura.

Infatti, seppur i due percorsi condividano lo stesso punto di partenza, quello che in letteratura prende il nome di *justification problem*, il fine di questo lavoro risulta essere differente poiché si pone come audace scopo quello di umanizzare la matematica.

Questa espressione viene utilizzata come provocazione per mettere in luce e di conseguenza abbattere, in particolare, due dei tanti pregiudizi che circolano attorno a questa scienza.

Il primo riguarda propriamente la matematica che viene spesso considerata come una disciplina a-storica, caratterizzata da una struttura molto rigida. Imparare la matematica significa per molti memorizzare una serie di risultati (teoremi, dimostrazioni, formule, ecc.) che sono scritti sul libro di testo attraverso simboli differenti dal nostro parlare quotidiano e che spesso risultano incomprensibili. Questa visione schematica ed inumana non lascia trasparire ciò che in realtà è la matematica: una delle massime espressioni dell'attività del pensiero umano, al pari della poesia e della filosofia prova ne è che in matematica, non sempre $1 + 1 = 2$ come ci raccontano a scuola, dipende dalle regole che si concordano per il gioco. Il secondo pregiudizio da combattere riguarda invece il matematico di professione che, nell'immaginario collettivo, viene spesso visto come un genio, distante dalla società, non particolarmente interessato agli aspetti più superficiali della vita quotidiana, dedito esclusivamente allo studio. In poche parole, il matematico di professione viene visto come un essere un po' fuori dalla norma.

Il miglior strumento per sradicare queste credenze può essere la storia, non tanto pensata come disciplina scritta per date ed eventi, ma piuttosto come storia della vita dei personaggi coinvolti, in questo caso nelle scoperte su Pi Greco, affiancata da un'analisi del contesto socio-culturale in cui questi studiosi hanno potuto esprimere le loro idee e costruire le loro teorie.

Le attività previste da questa tesi, seguendo l'ordine cronologico, mirano a raccontare una storia, una narrazione dello sviluppo riguardante la caratterizzazione di Pi Greco e della quadratura del cerchio, attraverso tre figure chiave che identificano la storia più recente di questa costante.

Questi sono: Niccolò Cusano (1401-1464) un cardinale che si interessò alla matematica elaborando una dimostrazione fallace sulla quadratura del cerchio, François Viète (1540-1603) matematico dilettante al quale si deve la prima espressione di Pi Greco attraverso un prodotto infinito e Isaac Newton (1642-1727), matematico e fisico, padre del calcolo infinitesimale, che raggiunse un'approssimazione della costante grazie allo sviluppo di due metodi innovativi.

Un quarto personaggio viene ripreso dalla tesi della Dott.ssa Solmi per iniziare a raccontare la storia di Pi Greco e dell'impossibilità di quadrare il cerchio: Archimede, filosofo e matematico vissuto intorno al III secolo a.C..

Il desiderio di proporre un elaborato che miri all'umanizzazione della matematica e all'auspicato conseguente coinvolgimento degli studenti rispetto a questa disciplina, deriva sia dallo studio effettivo di queste problematiche in ambito di corsi universitari quali Didattica della Matematica, sia dalla necessità di dover rispondere in prima persona alle domande degli studenti riguardo l'utilità dello studio della matematica a livello scolastico.

Di recente ho avuto l'opportunità di svolgere presso un Istituto Tecnico della provincia di Rimini un periodo di supplenza come insegnante di matematica.

In particolare, in una delle due quinte assegnatemi, alla fine di un'intensa ora di spiegazione sulla risoluzione delle disequazioni logaritmiche ed esponenziali, uno studente che aveva partecipato attivamente alla lezione e che dunque sembrava coinvolto, mi ha rivolto sconcertato la seguente domanda:

«Sì, ok, ho capito che devo invertire il verso della disequazione se la base del logaritmo o dell'esponenziale è minore di 1, ma perché? Cioè, quando mai mi servirà tutto ciò?»

Questo genere di domande rientra nella trattazione del già citato *justification problem*, tema di rilevante importanza nell'ambito della didattica della matematica. Seppur a conoscenza della problematica e della necessità di dover giustificare lo studio di questa disciplina, fronteggiare in prima persona questo tipo di quesiti suscita sconcerto e perplessità nell'insegnante.

Secondo l'opinione comune, le persone "normali" che conducono una vita "normale" non hanno bisogno della matematica che si affronta dopo la quinta elementare e che supera concettualmente le quattro operazioni aritmetiche. Di conseguenza i matematici di professione e gli studiosi di questa disciplina rientrano in quella categoria di persone geniali, al limite della follia, che si occupano di qualcosa che non serve e nemmeno esiste e che dunque non ha nessuna ragione di essere studiato.

La stessa percezione si ha, seppur con un punto di vista differente, nella vita di tutti i giorni quando ci si trova a dover rispondere alla domanda «Che cosa fai nella vita?». Risposte quali

«Studio matematica» o «Sono laureato in matematica, vorrei insegnare» riscuotono quasi sempre la stessa reazione nell'interlocutore: un senso di stupore e incredulità che si manifesta nella maggior parte dei casi sia nell'espressione facciale sia attraverso esclamazioni quali: «Ma tu sei matto/a?!» o «Ma sei un genio!?».

Alla luce dell'esperienza personale sia come insegnante, sia come studentessa, è nato quindi il desiderio di sradicare questo tipo di pregiudizi che aleggiano attorno alla matematica per far conoscere e comprendere l'importanza e la bellezza di questa disciplina, frutto non della follia di eletti studiosi, ma della creatività e delle idee di esseri umani, spesso non matematici di professione.

L'intero lavoro di tesi è stato suddiviso in cinque capitoli. Il primo capitolo è interamente dedicato all'inquadramento teorico dell'elaborato: vengono esposte le teorie a supporto dell'utilizzo della storia nell'insegnamento della matematica, si propongono i riferimenti che contestualizzano il lavoro rispetto alle Indicazioni Nazionali per i licei e si dedica un'intera sezione all'obiettivo principale della tesi, quello di umanizzare la matematica, in cui si cerca di spiegare in modo esaustivo il significato di questa espressione e le metodologie per raggiungere questo traguardo. Nel secondo capitolo vengono presentate le biografie dei quattro protagonisti della tesi: Archimede, Cusano, Viète e Newton. La vita di questi personaggi viene analizzata sia nei tratti tradizionali di carattere biografico, sia cercando di entrare più in profondità rispetto alle loro esistenze di esseri umani: il carattere, le peculiarità, la fama tra i contemporanei ed i posteri, il contesto storico e socio-culturale in cui esprimono la loro personalità. All'inizio di questo capitolo si propone anche un breve riassunto dell'evoluzione di π Greco dalla storia più antica fino ai giorni nostri per dare una visione completa della costante che lega le biografie di questi quattro personaggi e che dunque costituisce il filo conduttore dell'intero lavoro di tesi. Il terzo capitolo si occupa di descrivere la struttura teorica della progettazione dell'intero percorso suddiviso in quattro unità didattiche, una per ogni personaggio nominato precedentemente. Nel quarto capitolo, invece, si descrive l'effettiva realizzazione del progetto in aula e si presentano le risposte degli studenti della classe in cui è stato sperimentato il progetto. Il quinto capitolo si occupa dell'analisi dei dati raccolti dai questionari che sono stati sottoposti agli studenti all'inizio e alla fine del progetto. Inoltre, in questo capitolo, sono state inserite le interviste al professore di Matematica e Fisica e a due studenti campione della classe che forniscono una panoramica più completa dell'analisi dei risultati e indagano più accuratamente la riuscita del progetto e il gradimento.

Elenco delle figure

1.1	Estratto del Quesito XXXIII, libro IX dell'opera "Quesiti et inventioni diverse". . .	3
1.2	Il ciclo di modellizzazione [1, p. 100].	7
2.1	Riproduzione della tavoletta YBC 7302.	25
2.2	Un frammento del papiro di Rhind.	26
2.3	Tsu Ch'ung-chih.	31
2.4	L. Fibonacci.	32
2.5	M. Stifel.	32
2.6	L. Van Ceulen.	33
2.7	J. Wallis.	33
2.8	L. Euler.	34
2.9	J. Lambert e F. Von Lindemann.	35
2.10	Archimede.	37
2.11	Guillaume Courtois, La morte di Archimede, XVII secolo, Olio su tela, Ariccia, Museo del Barocco.	38
2.12	La vite di Archimede.	39
2.13	Macchine belliche	40
2.14	La spirale di Archimede.	42
2.15	Circonferenza con esagono inscritto e circoscritto.	44
2.16	Niccolò Cusano.	46
2.17	Monumento funebre del cardinale Niccolò Cusano presso la chiesa di S. Pietro in Vincoli, Roma.	48
2.18	Prima linea in rosso e seconda linea in viola nei poligoni regolari con 3, 4, 5, 6, ∞ lati.	51
2.19	Figurazione geometrico-pratica.	54
2.20	Regiomontano.	55
2.21		57
2.22	François Viète.	60
2.23	Costruzione geometrica utilizzata da Viète.	67
2.24	Isaac Newton.	69
2.25	R. Cartesio, G. Keplero, G. Galilei.	77
2.26	La costruzione geometrica del metodo di Newton.	82

3.1	Progetto "Continua il viaggio attraverso Pi Greco"	86
3.2	Attività "Identikit" Archimede tramite cartellone	91
3.3	Attività "Identikit" Archimede tramite Canva	91
4.1	Suddivisione delle lezioni, argomenti e date	97
B.1	Variorum de rebus Mathematicis responsorum, Libro VIII, pag. 30	152
C.1	Regola 1	158
C.2	Regola 2	159
D.1	Questionario preliminare parte 1.	161
D.2	Questionario preliminare parte 2.	162
D.3	Questionario finale parte 1.	163
D.4	Questionario finale parte 2.	164

Capitolo 1

Inquadramento teorico

Il punto di partenza di questo lavoro di tesi è il *justification problem*, ossia quel problema che in didattica definisce la necessità di dover giustificare lo studio della matematica. L'inserimento della storia nell'insegnamento della matematica è una metodologia molto studiata nella didattica di questa disciplina poiché, se utilizzata in modo consapevole e mirato, può sortire un effetto positivo sul processo di insegnamento-apprendimento e diminuire la demotivazione degli studenti di tutti i livelli e gli indirizzi scolastici. In questa tesi, la storia viene inserita nell'insegnamento della matematica attraverso la storia dei personaggi, cioè la loro biografia. In questo capitolo si analizzano le teorie che supportano l'inserimento della storia nell'insegnamento della matematica, si inquadra il progetto all'interno delle Indicazioni Nazionali e per fornire una trattazione completa dell'argomento, si inseriscono anche le problematiche che possono sorgere rispetto a questa particolare metodologia di lavoro.

1.1 I pregiudizi ed il *justification problem*

I pregiudizi che aleggiano attorno alla matematica sono tanti e ben radicati e contribuiscono alla costruzione di un'aura negativa su questa disciplina. Gli effetti di questa percezione si riscontrano principalmente nell'attività di apprendimento-insegnamento in ambito scolastico, ma si riflettono anche nella vita quotidiana di ogni individuo che per dovere o diletto si interessi alla matematica. Tra i tanti pregiudizi, troviamo quello per cui la matematica viene percepita esclusivamente come numeri e calcoli, come se l'attività di fare matematica fosse estranea al ragionamento.

I corsi di Analisi, Geometria, Algebra, Fisica che vengono proposti negli studi universitari di indirizzo matematico, garantiscono ad una persona che li intraprenda di essere allenata a fare di conto, ma risulta fondamentale sottolineare che un matematico non è un calcolatore. Al contrario, chi esercita questa scienza come professione ha come obiettivo quello di semplificare il problema che si trova di fronte per arrivare alla soluzione effettuando il minor numero di calcoli possibile. Alfio Quarteroni, matematico e ricercatore tra i più illustri del contesto italiano, in una puntata della trasmissione *#maestri di Rai Scuola* [39], parlando dei pregiudizi della matematica, mette in evidenza proprio l'esistenza di un'idea sbagliata ma molto diffusa secondo la quale fare matematica significhi utilizzare un approccio meccanicistico e arido. Il ricercatore, in risposta a questo

pregiudizio, propone una serie di esempi di utilizzi di equazioni e modelli matematici in ambiti finanziari, industriali, ecologici, sportivi e medici, sottolineando come in realtà la matematica sia una scienza viva e come serva, per generalizzarla, molta intuizione, molta fantasia e una eccellente capacità di sintesi. In effetti, molti non addetti ai lavori non si rendono conto che fare matematica significa proprio risolvere un problema difficile dividendolo in piccoli sotto-problemi più semplici da analizzare, e così si limitano a guardare le procedure risolutive senza comprenderle per poi dichiarare che la matematica è la materia più complicata tra tutte le discipline scolastiche.

Il linguaggio simbolico formale della matematica rappresenta anch'esso un fattore che alimenta questo pregiudizio. Il simbolismo algebrico utilizzato nei libri di testo costituisce una vera e propria lingua dotata di una sua semantica e di una sua sintassi che devono essere imparate con regole e significati ben definiti.

L'obiettivo della matematica è modellizzare i problemi della realtà e semplificarne la risoluzione, dunque è ragionevole pensare che anche il suo linguaggio miri ad agevolarne l'operato. Per esempio, una semplice espressione matematica con i numeri naturali, descritta senza il linguaggio simbolico, necessita di un'importante quantità di parole, tanto da risultare di difficile comprensione. Inoltre, la traduzione dal registro simbolico a quello tradizionale e viceversa, costituisce un esercizio base dell'algebra.

Viene riportato di seguito un esempio di questo tipo di esercizi utilizzati nelle aule proprio per allenare gli studenti alla traduzione tra i diversi registri:

Calcolare il quadrato della somma tra 1 e il risultato della divisione tra la somma della divisione tra 6 e 2 con 1 e la differenza tra il quadrato di 3 e 5.

Tradotto in linguaggio simbolico:

$$[1 + (6 : 2 + 1) : (3^2 - 5)]^2$$

Quasi immediatamente, dalla seconda scrittura, si deduce che il risultato corretto è 4 e dunque che il linguaggio simbolico ne semplifica il raggiungimento.

Essendo un esempio piuttosto semplice, si potrebbe ribattere che, pur facendo a meno dei simboli, sia comunque fattibile raggiungere il risultato ma chiunque sia entrato in contatto con le opere originali dei matematici del passato, tra cui Euclide, Archimede, Pitagora, per citarne alcuni, può affermare che questi avrebbero pagato qualsiasi cifra per avere accesso ai simboli ed al linguaggio che abbiamo oggi a disposizione nel fare matematica.

E non è necessario ricondursi sino ad Euclide, IV secolo a.C., ed al linguaggio delle sue opere per rendersi conto della necessità di un metodo di comunicazione della matematica che risulti semplice ed efficace per la comprensione, lo studio e la divulgazione di questa scienza.

Vengono proposti in Figura 1.1 alcuni famosi versi del dialogo avvenuto nel 1539 a Milano tra Niccolò Tartaglia e Gerolamo Cardano, due tra i più importanti matematici del XVI secolo, in uno scambio di informazioni relative al metodo di risoluzione dell'equazione cubica $x^3 + px = q$. I versi sono estratti dal quesito XXXIII, libro IX dell'opera *Quesiti et inventioni diverse* di Niccolò Tartaglia

Tartaglia aveva per primo scoperto la "formula generale" di risoluzione che da tempo si cercava e dunque la custodiva gelosamente poiché temeva che qualche suo contemporaneo potesse

sottrargliene il merito. Cardano dovette scrivere diverse lettere a Tartaglia per convincerlo a confidargli la sua scoperta. Dopo diversi tentativi riuscì a farsi spiegare il metodo di risoluzione con la promessa di non pubblicare la formula del suo corrispondente. Tartaglia però, rimanendo diffidente, escogitò di esporre al collega la sua procedura attraverso una sorta di componimento poetico piuttosto enigmatico che risultò per Cardano di difficile traduzione proprio perché privato di ogni riferimento al simbolismo algebrico che in quell'epoca era già piuttosto avanzato ed efficiente.

**Quando chel cubo con le cose appresso
Se agguaglia à qualche numero discreto
Trovàn dui altri differenti in esso.
Dapoi terrai questo per consueto
Che'l lor prodotto sempre sia eguale
Al terzo cubo delle cose neto,
El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi ben sottratti
Varrà la tua cosa principale.**

Figura 1.1: Estratto del Quesito XXXIII, libro IX dell'opera "Quesiti et inventioni diverse".

La traduzione dei versi di Tartaglia in linguaggio simbolico risulta invece di immediata comprensione:

Quando chel cubo con le cose appresso
 $x^3 + px$
Se agguaglia a qualche numero discreto
 $= q$
Trovàn dui altri differenti in esso
 $u - v = q$
Dapoi terrai questo per consueto
Che'l lor prodotto sempre sia eguale
 $u \cdot v =$
Al terzo cubi delle cose, neto
 $\left(\frac{p}{3}\right)^3$
El residuo poi suo generale
Delli loro lati cubi per sottratti
 $\sqrt{u} - \sqrt{v}$
Varrà la tua cosa principale...
 $= x$

Cioè:

$$x^3 + px = q$$

$$u - v = q$$

$$u \cdot v = \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

$$\sqrt{u} - \sqrt{v} = x$$

L'analisi e l'utilizzo di esempi che provengano da fonti storiche dirette, come in questo particolare esempio, può risultare molto efficace nell'insegnamento della matematica. Sia per giustificare e sottolineare l'importanza di questo linguaggio formale che viene spesso non compreso e sottovalutato dalla maggior parte degli studenti, sia per mostrare che questo linguaggio è il risultato di secoli di evoluzioni e scoperte su questa disciplina che risulta dunque essere una disciplina viva e in continuo sviluppo.

Con questi precisi obiettivi sono stati inseriti in ogni attività che costituisce questo progetto di tesi, alcuni estratti delle opere originali o della traduzione di queste ed, in particolare, è stato chiesto ai ragazzi di riscrivere le formule traducendole dal testo originale (cfr. allegato B), interpretare il ragionamento esposto in registro letterario (cfr. Allegato A) oppure la semplice lettura dai testi originali (cfr. Allegato C).

Seppur l'esempio sul dialogo tra Cardano e Tartaglia e le fonti originali proposte nelle attività siano soltanto alcuni tra i tanti esempi che confermano l'utilità e l'innegabile necessità del simbolismo algebrico per fare e divulgare la matematica, una disciplina che viene considerata complicata e misteriosa già a partire dal suo linguaggio, avrà la tendenza ad essere percepita inaccessibile dai più ed inevitabilmente questa percezione porta alla formazione di un altro pregiudizio secondo il quale chi si occupa di matematica deve per forza essere un genio o un iniziato di quella strana setta di persone che comprende e ama la matematica.

Il percorso sviluppato in questa tesi, tra i tanti obiettivi, si propone di combattere in particolare questa ma anche le altre errate e superficiali credenze relative a questa scienza poiché l'attitudine rassegnata e di conseguenza ostile di chi si appresta a studiarla, risulta essere un grosso ostacolo nel processo di insegnamento-apprendimento della stessa.

Non è raro che chi studia o ha dovuto studiare questa materia nell'ambito scolastico, proprio a causa dei pregiudizi diffusi, dichiari, come se fosse normale e certe volte con orgoglio, di non aver mai capito nulla di matematica e che le nozioni utili di questa disciplina siano esaurite alla scuola primaria.

In un contesto in cui questa scienza è sempre più protagonista di ogni aspetto della società, si percepisce dunque la necessità di umanizzare la matematica, restituendole il suo valore e trasmettendo, in particolare agli studenti, che chiunque, se dotato dei giusti strumenti e della giusta motivazione, può studiare, comprendere e magari di conseguenza amare la matematica.

La svalutazione della matematica ed il conseguente bisogno di riscoprirne l'importanza, come anticipato in precedenza, risultano molto evidenti durante le ore di lezione nelle classi di qualsiasi livello ed indirizzo scolastico e tutti quegli interrogativi che nascono dalla necessità di dover

giustificare il senso dell'educazione matematica costituiscono il problema che in didattica viene indicato con il termine *justification problem*.

Di fronte alla demotivazione e alla diffidenza degli studenti, un professore di matematica si trova costretto a elaborare, sin dalle prime esperienze della sua carriera, un'arringa di difesa valida a motivare lo studio della sua disciplina.

Le argomentazioni che solitamente vengono proposte fanno leva sia sul fatto che la matematica nel nostro millennio è sempre più presente in ogni aspetto della nostra vita quotidiana (tecnologia, economia, infrastrutture, salute pubblica, assicurazioni,...) sia che la matematica insegna un metodo di ragionamento, quello ipotetico-deduttivo, utile al singolo per esprimere in modo logicamente corretto un pensiero o un discorso in un qualsiasi contesto.

Vi è inoltre una ragione auto-justificante, secondo la quale la matematica è una materia scolastica e dunque il successo in questa disciplina è condizione (quasi sempre) necessaria al proseguimento degli studi verso qualsiasi tipo di indirizzo o carriera [1].

Sebbene queste motivazioni siano già ampiamente sufficienti a giustificare lo studio di una scienza così utile a livello socio-economico, negli ultimi decenni la ricerca in didattica della matematica si è concentrata proprio sulla risoluzione del *justification problem* in seguito alle evidenti difficoltà che gli studenti manifestano nell'apprendimento di questa disciplina in tutti i livelli e gli indirizzi scolastici.

1.1.1 Il progetto KOM

Mogen Niss, ricercatore in ambito matematico, negli anni 2000 coordinò il progetto educativo KOM che in Danese indica “competenza e apprendimento della matematica” [35]. Questo progetto, promosso dal Ministero dell'Educazione danese, nacque in seguito all'identificazione di alcune problematiche e sfide educative per l'insegnamento della matematica tra le quali troviamo anche il *justification problem*.

I risultati di questo progetto misero in luce la necessità di un rinnovo totale dell'educazione matematica a tutti i livelli, nel tentativo di dimostrare la rilevanza dell'educazione di questa disciplina nel nuovo millennio e per far fronte alle crescenti difficoltà ed ai dubbi degli studenti danesi nello studio della matematica, difficoltà che si riscontravano in modo analogo in molti altri Paesi, tra cui l'Italia.

Padroneggiare la matematica non può e non deve esaurirsi con la conoscenza di nozioni e di abilità procedurali, ma deve implicare anche altre forme di consapevolezza e ragionamento.

L'obiettivo finale del progetto era quello di riscrivere i curricula scolastici ed universitari trasformandoli da semplici programmi contenenti liste di argomenti, procedure e abilità da raggiungere, in indicazioni più discorsive e generali su come sviluppare la padronanza della matematica e dunque riflettere sull'importanza di trasportare la competenza matematica acquisita in ambito scolastico anche in ambito extra-scolastico, motivando di conseguenza lo studio della disciplina.

Secondo Niss, per rispondere alle domande degli studenti sull'utilità della matematica è necessario operare a livello individuale per giustificare poi socialmente il senso della matematica e il perché la società debba investire sforzi e soldi per garantire l'insegnamento della matematica a

tutti [1].

Sul piano individuale, vengono selezionate dal KOM Project alcune strategie per superare i pregiudizi e l'avversione. Tra queste troviamo il bisogno di recuperare le potenzialità dell'educazione matematica nella formazione dell'individuo verso un tipo di ragionamento che promuova lo sviluppo di una forma mentis tipica dell'approccio matematico. È necessario argomentare al singolo perché si ritiene che tali aspetti siano un valore, al di là delle scelte educative e professionali future [1]. Per far sì che l'individuo al termine del suo percorso di studi possieda una certa padronanza e competenza è necessario spostare l'attenzione su cosa significhi avere una certa padronanza della matematica.

Niss affronta questo argomento mettendo sullo stesso piano la padronanza del linguaggio con la corrispettiva padronanza in ambito matematico, definita attraverso il termine *mathematical literacy*. Egli compie questo paragone riconoscendo tre aspetti che caratterizzano o devono caratterizzare entrambi i campi. Questi sono [1, pp. 97-99]:

1. avere padronanza del linguaggio cioè saper utilizzare vari registri linguistici e saperli alternare in base al contesto,
2. le componenti principali del linguaggio sono identiche sia nell'alunno di scuola primaria sia nel professore universitario, la differenza sta nel livello e nel controllo su di essi,
3. padroneggiare il linguaggio vuol dire possedere conoscenze ed abilità specifiche relative ad ortografia, grammatica e lessico ma non si riduce solo a questo.

Da questi assunti il KOM Project deduce che nell'insegnamento della matematica sia necessario presentare gli strumenti matematici e mettere alla prova gli studenti in diversi contesti, lavorare in verticale tra i vari livelli scolastici ed infine sottolineare che conoscenze ed abilità sono fondamentali, ma non bastano da sole per poter dire di avere padronanza della matematica.

In quest'ottica, la definizione stessa di competenza matematica, inserita dal Parlamento Europeo tra le otto competenze chiave «di cui tutti hanno bisogno per la realizzazione e lo sviluppo personali, la cittadinanza attiva, l'inclusione sociale e l'occupazione» [17, p. 7] sembra essere una risposta al *justification problem*. Si riporta una rielaborazione del 2012 della definizione che era stata proposta dal Progetto KOM:

«La competenza matematica è l'abilità di un individuo di formulare, utilizzare, interpretare la matematica in una varietà di contesti. Include la capacità di ragionare matematicamente e di usare concetti, procedure, fatti e strumenti della matematica per descrivere, spiegare e predire fenomeni. Aiuta gli individui a riconoscere il ruolo che la matematica ha nel mondo e a formulare giudizi e decisioni ben fondati, come richiesto a cittadini costruttivi, impegnati e riflessivi.» [1, p. 100]

Questa definizione lascia trasparire, in risposta al problema, che l'educazione matematica serve a contribuire, insieme a tutte le altre discipline, alla formazione culturale del cittadino, in modo da consentirgli di partecipare alla vita sociale con consapevolezza e capacità critica.

Il lavoro sviluppato dal KOM Project si trova alla base dell'indagine internazionale PISA (*Programme for International Student Assessment*) promossa dall'OCSE, l'Organizzazione per la

cooperazione e lo sviluppo economico. Questa organizzazione ha come obiettivo quello di verificare il livello di competenza in tre ambiti attraverso rilevazioni a cadenza triennale che riguardano letteratura, matematica e scienze.

L'obiettivo è verificare se i quindicenni scolarizzati abbiano raggiunto le competenze essenziali per essere dei cittadini attivi ed essere in grado di continuare ad apprendere tutta la vita.

Questa indagine non si focalizza sui curricula ma sulle competenze acquisite ed il quadro teorico del PISA sulle competenze di matematica è speculare a quello del KOM, a sottolineare quanto il progetto danese abbia influenzato questa indagine.

Tornando al *justification problem*, il PISA elabora un'ulteriore risposta a quest'ultimo introducendo il ciclo della modellizzazione. Con questo termine si intende descrivere le fasi attraverso le quali gli individui risolvono problemi in un determinato contesto e quindi esemplifica cosa nel pratico voglia dire competenza matematica.

Il processo della modellizzazione consiste nell'esaminare problemi o situazioni reali e formulare un modello cioè una descrizione di questo problema attraverso delle rappresentazioni matematiche (modelli, equazioni, funzioni, grafici di dati) volte alla risoluzione del problema stesso. La matematica dopodiché viene utilizzata per risolvere il problema iniziale, traendo risultati che devono essere interpretati, ossia diventa necessario adattare i risultati al contesto e validarli per la risoluzione del problema reale di partenza.

In Figura 1.2 si riporta lo schema del ciclo di modellizzazione descritto precedentemente.

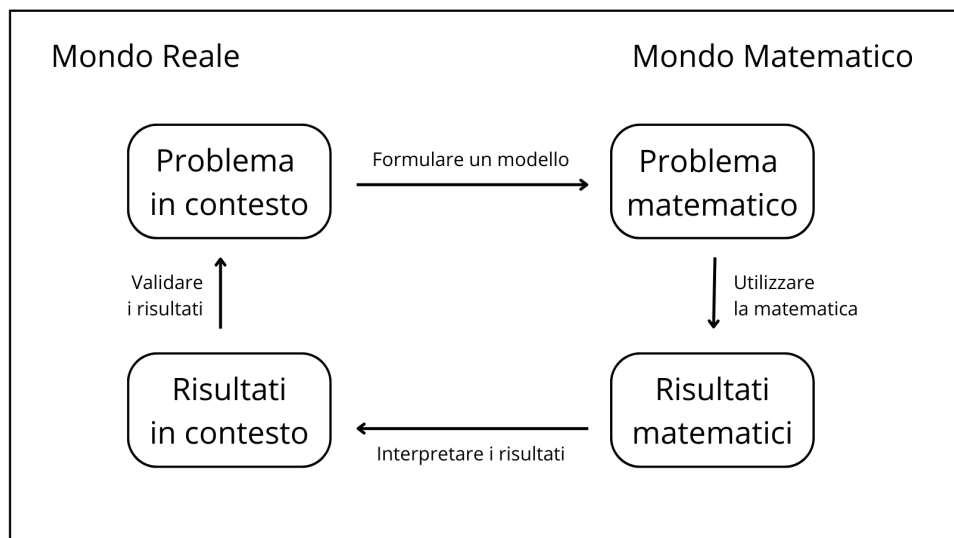


Figura 1.2: Il ciclo di modellizzazione [1, p. 100].

1.1.2 Materie utili e materie inutili: la risposta è la cultura

Per ampliare la ricerca di una risposta al *justification problem*, dopo aver trattato una serie di motivazioni a favore dell'importanza dello sviluppo di una buona competenza matematica che fanno leva sul ruolo essenziale del linguaggio e del ragionamento necessari per l'acquisizione di

una corretta capacità di giudizio, per l'interpretazione del reale e non per la costruzione di un bagaglio astratto di nozioni, si propone un'ulteriore riflessione che coinvolge tutte le discipline, in particolare quelle di carattere umanistico.

In effetti, un analogo del *justification problem* esiste anche per materie quali la letteratura e la storia ma soprattutto per le lingue classiche quali il greco ed il latino, considerate dall'opinione pubblica come lingue "morte".

Per queste discipline vengono spesso mosse le stesse critiche che vengono proposte per la matematica: nessuno verrà a chiederci mentre camminiamo per strada il V canto dell'*Inferno* della Divina Commedia di Dante, la data in cui abdicò l'ultimo zar di Russia o la terza declinazione latina. Dunque, sotto questo punto di vista, è possibile compiere un parallelo tra discipline scientifiche e discipline umanistiche con l'obiettivo di trovare una risposta al *justification problem*, cioè l'esigenza di giustificare lo studio delle materie che appartengono ad entrambi i campi del sapere.

Per evitare di compiere un'analisi ingenua della situazione che accomuna queste discipline risulta necessario soffermarsi su alcune premesse e mettere in luce due differenze sostanziali che esistono tra queste materie ed il loro studio in ambito scolastico.

Naturalmente, tutti gli interrogativi simili a quelli riportati in precedenza, impattano sulla pedagogia sottesa agli ordinamenti didattici delle scuole e dunque sulla formazione dei giovani. La mancanza di un riscontro diretto della richiesta in ambito extrascolastico delle nozioni oggetto degli studi scolastici di particolari discipline, porta gli studenti a compiere una classificazione spietata delle materie che vengono divise tra "utili" ed "inutili".

La distinzione è mossa da un criterio che predilige le materie che favoriscono una formazione "professionalizzante", incentrata sull'insegnamento delle nuove tecnologie e basata sulla promessa del trionfo dell'utilità di un sapere che sia sempre e comunque immediatamente innestabile nel mondo del lavoro e della produzione [38].

In prima analisi, questo criterio di valutazione delle discipline, dovrebbe portare ad inserire la matematica tra le materie utili, viste le numerose ed importanti applicazioni di questa scienza all'interno della società moderna. Al contrario la letteratura, il latino, il greco e la storia sono sicuramente materie che gli studenti saranno portati ad etichettare come inutili, non trovandone riscontro diretto e richiesta nella realtà esterna al contesto scolastico [10].

Scendendo più nello specifico, seppur l'opinione pubblica sia d'accordo riguardo l'utilità della scienza matematica, per le nozioni specifiche (teoremi, formule, teorie) non vale lo stesso giudizio. Le nozioni ed i concetti che vengono considerati più complessi saranno messi in discussione dagli studenti poiché non riescono a cogliere il progetto più ampio che mira alla costruzione di una competenza matematica utile per la realizzazione e lo sviluppo personale (cfr. la Sezione 1.1.1). Lo stesso Freudenthal (1905-1990), matematico tedesco e ricercatore in didattica della matematica, già nel secolo scorso, sottolineava la necessità di trasmettere agli studenti che la matematica non viene insegnata per risolvere problemi matematici, ma per imprimere negli studenti un metodo di risoluzione dei problemi quotidiani che sia "matematico" e per fare ciò, l'insegnante, deve necessariamente passare attraverso alcuni concetti di "matematica pura" [27].

Un'altra distinzione da compiere riguarda i curricula scolastici. La matematica e la letteratura italiana risultano essere materia di studio presente in tutti gli indirizzi scolastici, per lo meno nel primo biennio, mentre le lingue classiche vengono studiate esclusivamente in alcune particolari

tipologie di liceo o di indirizzi scolastici.

La motivazione degli studenti relativa allo studio delle lingue classiche, almeno a livello teorico, dovrebbe essere maggiore e auto-giustificata rispetto a quella relativa alla matematica, poiché si suppone che la scelta di un liceo classico, per esempio, si fondi su un interesse, una predisposizione o la visione di un possibile scenario futuro per il quale si è stati condotti alla scelta di quel particolare liceo piuttosto che altro.

Tralasciando queste differenze e tornando al paragone tra discipline scientifiche e discipline umanistiche, Giovanni Vailati (1863-1909), matematico, filosofo e storico italiano, aveva riconosciuto diverse analogie tra questi ambiti del sapere e di conseguenza ne promuoveva la collaborazione per migliorare il processo di insegnamento-apprendimento. Egli si occupò di idealizzare un progetto di riforma e rinnovamento della scuola ed in particolare dei metodi di insegnamento della matematica. Le sue idee, pur essendo elaborate in relazione al contesto scolastico del secolo precedente, sembrano incarnare piuttosto fedelmente anche le problematiche e le necessità attuali [26].

Benché coltivasse in prevalenza studi scientifici, Vailati era un ottimo conoscitore delle lingue classiche e pur ritenendo dannoso lo studio letterario-umanistico avulso dalla considerazione naturale e storica del mondo umano sosteneva che lo studio delle lingue (italiano, lingue antiche o moderne) potesse avere un alto valore formativo [9]. Questo valore formativo, però, poteva essere raggiunto esclusivamente se l'insegnamento di queste discipline avesse mantenuto un'impostazione scientifica e storica che mettesse in evidenza:

«la vita intima delle lingue, la ricerca, cioè, delle cause e dei motivi che determinano i successivi adattamenti di queste alla loro funzione di mezzi di espressione e di comunicazione dei sentimenti, dei pensieri, delle cognizioni, delle credenze, dei gusti, delle abitudini della gente che le ha parlate e le parla.» [26, p. 9]

Lo stesso processo, secondo Vailati, deve essere operato per la matematica, inserendo la storia di questa disciplina nel suo insegnamento.

Vailati promuoveva infatti un approccio storico-euristico anche per le discipline scientifiche nel quale:

«l'allievo o lettore, arriva ad impossessarsi delle cognizioni che costituiscono un dato ramo delle scienze, passando attraverso alle considerazioni che hanno guidato quelli che sono giunti ad esso per la prima volta.» [9, p. 10]

In particolare, per la matematica, egli promuoveva un approccio umanistico che si rifacesse alla concretezza storica dell'evoluzione delle civiltà umane e che facesse emergere l'importanza della conoscenza dei concetti e dunque la necessità dello studio della disciplina [9].

Vailati ripropose in diverse occasioni le considerazioni sulla necessità di imprimere ed adottare un approccio di carattere storico al metodo di insegnamento delle varie discipline, sia scientifiche che letterarie poiché secondo lo studioso, questo approccio, si adatta perfettamente alla descrizione dello sviluppo delle varie scienze ed alla psicologia in evoluzione dei ragazzi.

In particolare, però, la prospettiva storica dello sviluppo del sapere umano deve soprattutto convincere che ogni nuovo balzo in avanti è stato una conquista degli uomini e che il sapere, dentro

e fuori dalla scuola, è sempre una conquista ed una riconquista personale ed individuale [9].

La convinzione che la cultura sia un tutto organico portò Vailati a lamentare la scarsa interazione fra cultura umanistica e scientifica nella scuola. Questa malaugurata distinzione che si è portati a compiere tra discipline scientifiche e discipline umanistiche, viste come due fazioni opposte, quasi in lotta tra loro, risulta essere una forzatura se si riflette sul fatto che la conoscenza scientifica e la conoscenza umanistica sono due grandi campi dell'attività umana ed è quindi praticamente impossibile scinderli quando si parla di cultura [26].

Il termine cultura nell'Enciclopedia Italiana Treccani viene esposto come:

«L'insieme delle cognizioni intellettuali che una persona ha acquisito attraverso lo studio e l'esperienza, rielaborandole peraltro con un personale e profondo ripensamento così da convertire le nozioni da semplice erudizione in elemento costitutivo della sua personalità morale, della sua spiritualità e del suo gusto estetico, e, in breve, nella consapevolezza di sé e del proprio mondo.»

Di fronte a questa definizione le domande degli studenti riguardo il perché sia necessario studiare alcune discipline scolastiche diventano innaturali. Eppure, il *justification problem* esiste e, come è già stato detto, non solo per la matematica.

Secondo Giorgio Tomaso Bagni, matematico e ricercatore italiano, è emblematico che il processo di insegnamento-apprendimento delle materie, sia scientifiche che umanistiche, si giochi all'interno della scuola. Il termine scuola, deriva dal greco antico "skholé" ed etimologicamente significa «libero e piacevole uso delle proprie forze, soprattutto spirituali, indipendentemente da ogni bisogno o scopo pratico» come indicato dall'Enciclopedia Italiana Treccani. Lo stesso termine, al giorno d'oggi, ha assunto un significato molto più arido che la definisce come un'istituzione a carattere sociale regolata da norme specifiche all'interno di un percorso di istruzione.

Nel primo caso, spiega il matematico, la scuola e le pratiche prefigurate in essa erano quelle di coltivare il proprio intelletto verso attività fini a sé stesse; nel secondo, la scuola diventa una comunità regolata da norme che sanciscono le attività, i tempi, le modalità, gli scopi ed i traguardi di chi la frequenta [12].

«Nel primo caso non ci sono ostacoli; nel secondo, se ne creano anche dove non ce ne sarebbero.» [12, p. 17]

La causa di questa perdita di valore e mancanza di motivazione rispetto all'educazione scolastica, percepita come ingabbiata in un'istituzione che ne regola severamente tutti gli aspetti e ne limita le libertà, secondo Nicola Gardini, scrittore e professore di Letteratura Italiana e comparata, è da ricercare anche nei programmi scolastici. Egli, nel suo libro *Viva il latino*, muove una forte critica verso questi:

«I programmi scolastici, con tutte le loro glorie, sono strani. Sembra che dissimulino o addirittura cancellino il più accanitamente possibile un elemento fondamentale dell'istruzione: lo scopo per il quale si viene istruiti.» [25, p. 36]

Entrare nella complessità della matematica, esattamente come in quella del latino o del greco, districarne le strutture e goderne delle bellezze è un modo per conoscerci meglio in quanto esseri

umani e per trovare rimedi prima ancora che sorgano problemi. Allo stesso tempo l'indagine e la scoperta permettono di far pratica di una felicità tutta speciale che, per dirla con Aristotele, nasce dal desiderio di interpretare, di andare un po' più in là dell'evidenza [25].

«Perché, infatti, ridurre il sapere a informazione immediata o all'utilitarismo delle risposte meccaniche? Perché rinunciare alla riflessione e all'avventura intellettuale?» [25, p. 26]

1.2 Umanizzare la matematica attraverso la sua storia

L'utilizzo della storia come strumento nell'insegnamento della matematica è una pratica verso la quale molti ricercatori in Didattica della Matematica si stanno concentrando negli ultimi decenni. Come risultato del crescente interesse sono emersi diversi gruppi di studio specializzati, due di questi sono: la Commissione Inter-IREM su epistemologia e storia della matematica in Francia e Il gruppo internazionale di studi tra la Storia e la Pedagogia della Matematica che è correlata alla *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) [24].

Vengono inoltre organizzate regolari conferenze come la *European Summer Universities on the History and the Epistemology in Mathematics Education* e pubblicati numerosi libri per aiutare gli insegnanti nell'inserimento della storia per quanto riguarda l'insegnamento della matematica [24].

Secondo diversi ricercatori parlare di esseri umani, di idee e di strumenti risulta essere efficace per aumentare interesse e simpatia nei confronti della disciplina e sembra essere un ottimo alleato per combattere i pregiudizi precedentemente descritti (si veda Sezione 1.1).

A favore di questa tesi, si riportano di seguito le parole di Vailati che, come discusso nella sezione precedente, già nel secolo scorso aveva intuito e riconosciuto l'importanza dell'approccio storico nella pratica d'insegnamento-apprendimento della matematica:

«A nessuno che abbia avuto occasione di trattare in iscuola, davanti a dei giovani, qualunque soggetto che si riferisca alle parti astratte e teoriche della matematica, può essere sfuggito il rapido cambiamento di tono che subisce l'attenzione e l'interessamento degli studenti ogni qualvolta l'esposizione . . . lascia luogo a delle considerazioni d'indole storica. . . Di questo appetito sano e caratteristico delle menti giovani . . . è certamente desiderabile trarre il maggior partito possibile. Utilizzarlo intelligentemente vuol dire rendere l'insegnamento più proficuo e nello stesso tempo più gradevole, più efficace e insieme più attraente. Appare dunque importante, forse fondamentale, che un insegnante di matematica, in ogni livello scolastico, si confronti con la storia e l'epistemologia della propria disciplina per provare ad utilizzare i riferimenti storici in maniera consapevole e coerente durante le ore in aula.» [45, p. 53]

In Italia l'associazione della storia all'insegnamento della matematica ha una lunga tradizione, legata all'influenza esercitata in passato da importanti studiosi di storia della matematica e di epistemologia, che si sono occupati sia dei problemi dell'insegnamento di questa disciplina sia della formazione degli insegnanti.

La prova di questa tradizione storica nell'insegnamento è data dalla pubblicazione del volume *Pagine di storia della scienza* pubblicato da Gino Loria nel 1925 dopo la Riforma Gentile (1923). Questo volume, rivolto agli studenti di scuola secondaria, si occupava di approfondire l'aspetto storico degli argomenti matematici previsti dai programmi delle scuole secondarie dando spazio anche alle biografie dei matematici. Per quanto riguarda gli aspetti tecnici, questi risultavano assenti e la storia della matematica veniva inserita insieme alla storia della fisica, della chimica, dell'astronomia, della biologia, e delle scienze naturali. Questo tipo di orientamento relativo allo studio della matematica si indirizza verso una prospettiva storica dell'insegnamento che è presente anche nei nuovi programmi scolastici italiani in vigore oggi.

1.2.1 Le Indicazioni Nazionali per i Licei

L'idea di questo lavoro di tesi si allinea ad una parte che viene spesso trascurata nella traduzione alla pratica d'aula delle Indicazioni Nazionali per i Licei del 2010 [29], documento che ha sostituito i programmi ministeriali a vantaggio di un percorso basato sulla didattica per competenze. Questa riforma riguardante i curricula scolastici che portò anche alla stesura dell'innovativo documento del 2010 prende forma proprio sulla scia dello studio del KOM Project, descritto nella Sezione 1.1.1.

Nelle Indicazioni Nazionali, in apertura della sezione relativa all'insegnamento della Matematica di tutte le tipologie di licei si legge:

«Al termine del percorso del liceo lo studente [...] saprà inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e ne comprenderà il significato concettuale.

Lo studente avrà acquisito una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico. In particolare, avrà acquisito il senso e la portata dei tre principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico: la matematica nella civiltà greca, il calcolo infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento e che porta alla matematizzazione del mondo fisico, la svolta che prende le mosse dal razionalismo illuministico e che conduce alla formazione della matematica moderna e a un nuovo processo di matematizzazione che investe nuovi campi (tecnologia, scienze sociali, economiche, biologiche) e che ha cambiato il volto della conoscenza scientifica.» [29, p. 337]

Nella parte riguardante il secondo biennio del liceo scientifico, target del percorso didattico che sarà descritto nel Capitolo 3, si legge:

«Lo studio della circonferenza e del cerchio, del numero π , e di contesti in cui compaiono crescite esponenziali con il numero e , permetteranno di approfondire la conoscenza dei numeri reali, con riguardo alla tematica dei numeri trascendenti. In questa occasione lo studente studierà la formalizzazione dei numeri reali anche come introduzione

alla problematica dell'infinito matematico (e alle sue connessioni con il pensiero filosofico). Sarà anche affrontato il tema del calcolo approssimato, sia dal punto di vista teorico sia mediante l'uso di strumenti di calcolo.» [29, p. 340]

1.2.2 Umanizzare la matematica

Come già discusso in precedenza, la matematica viene spesso considerata come un insieme di assiomi, teoremi e dimostrazioni. Di conseguenza si sviluppa l'idea che imparare la matematica significhi esclusivamente acquisire familiarità e competenza nel maneggiare i simboli e la sintassi logica delle teorie accumulando la conoscenza dei risultati che vengono presentati come prodotti, cioè nozioni, impacchettati e pubblicati sui libri di testo privi di contestualizzazione e di evoluzione storica [18].

Questa visione a-storica e a-temporale della matematica esclude dal processo di apprendimento quelle che sono le motivazioni, i problemi, le domande, le azioni ed i processi riflessivi che hanno condotto gli studiosi, matematici e non, alla costruzione delle teorie e delle nozioni, contribuendo a delineare il profilo di una disciplina che può essere definita in questi termini come "inumana" [18].

Richard Skemp (1919-1995), matematico inglese e pioniere della ricerca in didattica della matematica, nell'introduzione al suo libro *Psychology of learning mathematics* del 1987, scrive che un approccio puramente logico all'insegnamento della matematica conferisce esclusivamente:

«il prodotto finale della scoperta matematica [...] e non riesce a generare nel discente quei processi con cui sono fatte le scoperte matematiche. Insegna il pensiero, non il pensare matematico.» [41, p. 7]

In generale, i libri di testo utilizzati oggi a livello di scuola secondaria non includono elementi di storia della matematica. Alcuni inseriscono qualche tratto biografico o qualche curiosità su i grandi matematici ma, nel complesso la loro struttura risulta essere piuttosto rigida sia poiché gli autori prediligono come tipologia la forma della lezione tradizionale sia perché questa disciplina, organizzata e presentata con una struttura formale deduttiva, lascia assumere che la chiarezza logica di una tale esposizione possa essere sufficiente per la comprensione della stessa [18].

Tuttavia, lo sviluppo storico della matematica mostra che l'organizzazione deduttiva o assiomatica di una disciplina matematica arriva solo dopo che questa disciplina ha raggiunto la sua maturità, per cui diventa necessario fornire una presentazione a posteriori della sua struttura logica e della sua completezza.

Freudenthal (1983) descrive questo concetto sottolineando che:

«Nessuna idea matematica è mai stata pubblicata nel modo in cui è stata scoperta. Sono state sviluppate delle tecniche che vengono utilizzate, se un problema è stato risolto, per capovolgere la procedura di soluzione ... [e trasformano] la calda invenzione in una gelida bellezza.» [18, p. 204]

In questo modo la matematica viene solitamente riorganizzata in modo globale per evitare possibili racconti tortuosi e prolissi.

D'altra parte, le domande e i problemi di un'idea, così come i dubbi lungo il percorso, rimangono nascosti sotto un elenco rigido di conoscenze organizzato in modo lineare e deduttivo, in cui i nuovi risultati sembrano essere semplicemente aggiunti in modo cumulativo ai precedenti [18].

A questo proposito, lo stesso Freudenthal sosteneva che la corretta integrazione della storia nell'educazione matematica può svolgere un ruolo importante, aiutando a scoprire come

«i nostri concetti matematici, le nostre strutture, le nostre idee sono state inventate come strumenti per organizzare i fenomeni del mondo fisico, sociale e mentale.» [21, p. 39]

Secondo Luis Radford, professore alla *School of Education Sciences* della Laurentian University di Sudbury, Canada, nell'apprendimento della matematica ciò che si conosce e il modo con cui si raggiunge questa conoscenza al giorno d'oggi sono da inquadrare attraverso un approccio storico-culturale da ritrovare nelle pratiche sociali, nelle istituzioni, nel linguaggio, negli artefatti, nei libri, nei monumenti e in tutto ciò che ha contribuito alla costruzione di una disciplina, in questo caso della matematica.

Questo tipo di affermazione riflette una posizione umanistica che Radford invita a mantenere per contrastare l'agonia di un mondo postindustriale che porta alla spersonalizzazione e per rendere consapevoli del fatto che la storia della matematica (concepita o meno come una semplice sequenza di eventi, con nomi e date) è un mezzo per comprendere noi stessi come esseri storici [12].

La necessità di ritrovare nella conoscenza matematica e nel suo insegnamento il carattere umano del suo sviluppo attraverso la storia viene sostenuta anche da Bruno D'Amore, matematico, ricercatore e professore in Didattica della Matematica che parlando dell'arduo lavoro di un insegnante di matematica afferma:

«Non credo che un insegnante debba necessariamente trasformarsi in uno storico della matematica. A me pare fondamentale che l'insegnante avverta la forte presenza della trasformazione storica delle teorie che insegna, che non le senta come immanenti, immutabili, definitive. [...] A mio parere è essenziale che l'insegnante conosca a fondo storia ed epistemologia di quel che insegna, non fosse altro che per due ragioni professionali: l'accrescimento culturale, e la presa di contatto con le ragioni obiettive dell'esistenza di ostacoli epistemologici. Tra i grandi benefici didattici concreti che io avverto si ritrovano: una diversa valutazione dell'azione dell'allievo (errori, misconcezioni, per esempio), una diversa valutazione dell'idea di rigore, un diverso atteggiamento nei confronti della comunicazione matematica.

Mi pare poi fondamentale un approccio sociale a questi aspetti epistemologico-concettuali, che restituiscano alla nostra disciplina quel suo essere emergente da attività umane, quel suo essere condivisa, discussa, comunicata, tramandata, usata in contesti culturali diversi, in situazioni diacroniche e sincroniche.» [12, p. 6]

Le parole di D'Amore mettono in luce un aspetto molto interessante riguardante l'utilizzo della storia nell'insegnamento della matematica. L'approccio storico permette una diversa considerazione dell'errore sia dal punto di vista della valutazione da parte dell'insegnante sia per quanto

riguarda l'approccio dello studente. Infatti, una visione più accurata della matematica e dell'attività matematica costruita attraverso le domande, i problemi e le risposte che hanno avuto una importanza storica, permette agli studenti di comprendere che gli errori, le argomentazioni euristiche, le incertezze, i dubbi, le argomentazioni intuitive, i vicoli ciechi, le controversie e gli approcci alternativi ai problemi, non solo sono legittimi, ma sono anche parte integrante della matematica in evoluzione.

Attraverso quelle che sono difficoltà, gli studenti possono comprendere perché le congetture e le dimostrazioni, che sono state proposte in passato, forniscano o meno risposte soddisfacenti a problemi già esistenti, e possono venire indirettamente incoraggiati a formulare le proprie domande, a formulare le proprie congetture e cercare di validarle.

In una conferenza inaugurale tenuta al Corso di Perfezionamento in Matematica e Fisica (1950), Attilio Frajese, storico della matematica italiano, sosteneva:

«Come l'umanità, si dice, ha dovuto percorrere numerose tappe per giungere al possesso di una dottrina scientifica, attraverso errori, deviazioni, scoperte, così nella mente del discente tali tappe devono essere ripercorse, con analoghi errori, analoghe deviazioni, analoghe scoperte.» [20, p. 338]

L'apprendimento di un concetto, di una struttura o di un'idea matematica può trarre vantaggio dalla conoscenza delle motivazioni e dei fenomeni per cui è stata creata ma è importante sottolineare che ciò non implica che esista una presentazione univoca di un argomento che segua esattamente lo sviluppo storico, né che l'apprendimento della matematica debba essere necessariamente guidato dalla famosa frase «l'ontogenesi ricapitola la filogenesi» che rappresenta l'emblema della Teoria della Ricapitolazione.

Questa teoria nasce nell'ambito della biologia e prevede che un embrione, sia esso di uomo o di qualsiasi altra specie, durante il suo sviluppo attraversi una fase che lo rende indistinguibile dalle altre specie. La discussione sulla crescita biologica degli esseri umani fu trasferita al dominio psicologico da Ernst Haeckel (1834-1919) biologo, zoologo, filosofo e artista tedesco.

Dopo aver compiuto alcuni studi sul sistema nervoso egli sostenne che (rielaborazione del 1993):

«Lo sviluppo psichico del bambino non è che una breve ripetizione dell'evoluzione filogenetica.» [24, p. 634]

Questa teoria, all'interno dell'insegnamento della matematica assume un significato preciso secondo il quale lo sviluppo culturale del singolo (ontogenesi) seguirebbe un cammino analogo a quello della storia della conoscenza così come vissuta dai suoi predecessori (filogenesi). Sebbene questo approccio teorico si sia rivelato fallace sia dal punto di vista biologico sia psicologico, è rientrato più volte nel discorso dell'educazione matematica [24].

Gli studiosi di epistemologia Piaget e Garcia, interessati a comprendere il processo di formazione della conoscenza, in reazione alla versione psicologica semplicistica della Teoria della Ricapitolazione, proposero la Teoria dell'Epistemologia genetica. Questa teoria si pone di fronte al problema della conoscenza in termini di strumenti e meccanismi. Tra gli strumenti, il primo che fu individuato è un processo generale che spiega come l'assimilazione individuale di ciò che è nuovo (da apprendere) avvenga sulla base delle pregresse conoscenze dell'individuo attraverso un processo

di integrazione [24].

Il loro punto di vista li portò a rivisitare il parallelismo che era stato proposto dai sostenitori della Teoria della Ricapitolazione. Piaget sosteneva che:

«Non dobbiamo esagerare con il parallelo tra storia e sviluppo individuale, ma a grandi linee ci sono certamente delle fasi che sono le stesse.» [24, p. 636]

La storia dunque sembra un mezzo naturale per esporre ed insegnare la matematica. Questa può essere presentata come un insieme di dettagli curiosi utili per suscitare l'interesse degli studenti, ma soprattutto deve essere utilizzata per creare un contesto dove introdurre i concetti matematici, in modo da incoraggiare gli studenti a pensare e riflettere, permettendogli di sviluppare in modo individuale il concetto e riducendo al minimo le lacune logiche.

Attraverso la storia è possibile presentare i diversi punti di vista nei contesti storici dando agli studenti l'opportunità di sviluppare l'arte di discutere, di giustificare le proprie opinioni, di presentare i propri ragionamenti ad altre persone poiché il significato della conoscenza matematica è determinato non solo dalla nozione, ma anche dal procedimento che l'ha originariamente generata e che diventa indispensabile per la sua comprensione.

Il pensiero di Freudenthal (1973) riguardo l'inserimento della storia nella matematica ci mette in guardia da un uso inconsapevole poiché:

«Esortare un insegnamento in prospettiva genetica non significa che le idee debbano essere presentate nell'ordine in cui sono emerse e neanche con vicoli ciechi e tutte le deviazioni che sono state tagliate fuori. Chi ha la vista di ciò che viene a posteriori, può dire come sarebbe stato ciò che il cieco ha inventato e scoperto se ci fossero stati insegnanti che sapevano ciò che adesso sappiamo... Non è l'impronta storica dell'inventore che dovremmo seguire, ma un corso della storia migliorato e guidato.» [22, pp. 100-101]

L'obiettivo di questo lavoro di tesi di umanizzare la matematica si identifica dunque nell'utilizzare la storia e la biografia dei personaggi nel tentativo di permettere a questa disciplina di riappropriarsi della sua natura più concreta ed umana sciogliendo ogni timore e pregiudizio su quella disciplina che sta alla base di tutte le scienze ma che assume un'aura di mistero ed un carattere ermetico principalmente a causa del suo linguaggio simbolico [6].

Eric T. Bell (1883-1960), scrittore e matematico scozzese, nel suo libro *I grandi matematici* utilizza proprio le biografie e la vita dei più importanti matematici della storia per scrivere un libro che parla di matematica. Nell'introduzione viene esplicitata proprio questa intenzione:

«il nostro scopo è quello di condurre il lettore fino a certe idee direttrici che dominano presentemente i vasti campi della matematica, e di giungervi attraverso le esistenze degli uomini che ne hanno avuta l'iniziativa.» [6, p. 4]

In questo libro, accanto all'attività creativa dei personaggi trattati, vengono analizzate anche le "esistenze" dei grandi matematici: il carattere, la personalità, le emozioni, gli affanni e le difficoltà che rappresentano il corollario delle grandi conquiste scientifiche che vengono presentate.

In questo progetto di tesi si è pensato di perseguire lo stesso obiettivo utilizzando le biografie, le scoperte e le curiosità sulla vita di quattro personaggi chiave nello sviluppo delle conoscenze su Pi Greco e sulla quadratura del cerchio.

1.2.3 Integrare la storia della matematica

La storia della matematica fornisce un vasto serbatoio di domande, problemi ed esposizioni rilevanti che possono essere molto utili sia in termini di contenuto sia per motivare, interessare e coinvolgere il discente.

«Come ogni progetto educativo, quello di intendere la storia della matematica come componente dell'insegnamento della matematica implica un'aspettativa più o meno esplicita in termini di un migliore apprendimento.» [18, p. 8]

Diventa quindi fondamentale compiere una selezione mirata delle modalità di inserimento della storia nella matematica affinché questa non risulti dispersiva e fine a sé stessa. Quindi la possibilità di presentare la matematica ai discenti mediante riferimenti alla storia di questa scienza, va inquadrata in questo tipo di impostazione della didattica e sono numerose, in questi termini, le ricerche in campo didattico. I risultati di queste ricerche consistono in brillanti suggerimenti che mirano ad indicare agli insegnanti concrete possibilità di migliorare l'insegnamento attraverso sussidi innovativi, accorgimenti ed attività.

Fauvel e van Maanen, in *History in mathematics education: the ICMI Study* nel Capitolo 7, illustrano un'ampia gamma di possibili modi per implementare la storia durante le ore di matematica, fornendo anche degli esempi concreti per ciascuna delle proposte.

Si riportano di seguito alcuni di questi suggerimenti ed in particolare quelli che saranno utilizzati nella progettazione delle unità didattiche che costituiscono il fulcro di questa tesi. Questi sono [18, pp. 213-238]:

- l'inserimento di **frammenti di storia** che consistono in problemi da risolvere, notazioni da decifrare o attività e progetti ma anche in informazioni biografiche o aneddoti riguardo al matematico o studioso in esame. Questi *snippet* (ritagli), molto spesso, vengono proposti anche dai libri di testo che li inseriscono o alla fine o accanto alla trattazione matematica alla quale si riferiscono. Solitamente hanno carattere informale, utilizzano colori, sfondi e font più particolari rispetto al testo matematico didattico e questo contribuisce ad attribuirgli un ruolo differente rispetto al resto
- la realizzazione di **progetti di ricerca degli studenti basati su testi di storia** che vengono svolti in piccoli gruppi e si basano su alcune domande guida rispetto alla ricerca da compiere. Lo scopo di questi progetti e delle domande di indagine è che ogni studente di matematica, indipendentemente dalla sua futura carriera, abbia almeno un'idea della matematica come disciplina situata nella cultura e nella società umana, con una storia ed in relazione con le altre discipline.
- l'utilizzo di **fonti primarie e documenti storici**. Le fonti originali costituiscono validi esempi di sistemi di rappresentazione utilizzati nel passato. La somministrazione diretta di

questi può portare gli studenti a cambiare prospettiva ed apprezzare il ruolo cruciale che le rappresentazioni svolgono nella nascita e nell'evoluzione delle idee matematiche. La storia attraverso i documenti permette di sperimentare la natura evolutiva delle idee mostrando che l'attività matematica è in divenire e la loro lettura può legittimare e umanizzare i concetti ("se ci sono passati i matematici famosi, perché non io?"). L'analisi del linguaggio diventa fondamentale poiché ci si scontra con un'esposizione dei concetti diversa rispetto alle pratiche abituali.

Tra le varie attività possibili lo studio di una fonte originale è sicuramente tra le più impegnative poiché richiede una conoscenza dettagliata e profonda dell'epoca in cui è stata scritta e del contesto generale

- l'utilizzo di **fogli di lavoro** destinati al lavoro individuale o di gruppo. Si dividono in due categorie: raccolta di esercizi per padroneggiare una procedura o consolidare un argomento oppure schede di lavoro concepite come un insieme strutturato e guidato di domande per introdurre un nuovo argomento, una serie di problemi o questioni da discutere. Questi progetti tengono conto delle conoscenze pregresse dello studente e, attraverso domande graduali portano a sviluppare le basi di un argomento precedentemente sconosciuto. Le schede di lavoro sono strutturate attorno a brevi estratti storici accompagnati da informazioni storiche che servono per descriverne il contesto e sono poi seguiti da domande volte a supportare la comprensione dei contenuti attraverso il confronto tra le trattazioni matematiche dell'epoca e odierne oppure la risoluzione di problemi presenti negli estratti. Se gli estratti contengono notazioni antiche o estranee agli studenti, le domande supportano la traduzione in notazione moderna (verificare un calcolo, discutere un'argomentazione o semplicemente completare una frase matematica alla quale sono stati deliberatamente omessi piccoli pezzi). A volte le schede fanno emergere argomenti sulla matematica e sulla sua natura e le domande inerenti chiedono agli studenti di elaborare argomentazioni per sostenere o contrastare ciò che viene presentato
- preparazione di **pacchetti storici** cioè una raccolta di materiali strettamente incentrati su un piccolo argomento, con forti legami con il curriculum, adatti a due o tre periodi di lezione, pronti per essere utilizzati dagli insegnanti nelle loro classi. Questi pacchetti sono molto più di un semplice approfondimento storico, ma meno di un approccio storico completo a un argomento di ampio respiro. Vengono costruiti attorno a brevi frammenti di fonti primarie e, anche se sono pensati per essere guidati dall'insegnante, si basano soprattutto sulla partecipazione attiva degli studenti. Il ruolo dell'insegnante consiste nel presentare il contesto storico necessario, proporre le domande e i problemi e guidare la discussione
- introduzione di **problemi storici** che possono essere stimolanti e produttivi sia per gli studenti che per gli insegnanti. Sono di vario tipo: problemi senza soluzione, problemi ancora irrisolti o risolti con difficoltà, problemi con soluzioni alternative o esemplari, problemi che hanno motivato o anticipato lo sviluppo di un dominio matematico oppure più semplicemente problemi presentati a scopo ricreativo

L'introduzione storica di un concetto può essere organizzata secondo diverse modalità. Per esempio si potrebbe procedere attraverso una diretta illustrazione cronologica dei riferimenti storici collegati al concetto in questione, realizzando una vera e propria «storia dell'argomento» [2]. In questo caso gli elementi storici servirebbero per introdurre l'argomento ai quali si riferiscono e dovrebbero essere quindi inseriti all'inizio della trattazione: potrebbero essere proposti, in ordine cronologico, tutti i riferimenti storici disponibili e compatibili con il livello del discente.

Tale modo di operare, che possiamo indicare come «uso a priori» [2] della storia nella trasmissione del sapere matematico, pone l'accento sulla supposta valenza introduttiva degli elementi storici. Tale supposizione si basa su di una posizione epistemologica tutt'altro che trascurabile, ma non è l'unica possibile per interpretare e caratterizzare il ruolo della storia nella trasmissione della conoscenza matematica.

L'uso a priori della storia si collega con una questione didatticamente non banale e cioè se l'introduzione di un concetto debba sempre seguire l'evoluzione storica o possa anche allontanarsi da questo tipo di trattazione.

Percorsi storici ordinati non cronologicamente sono spesso adottati nella pratica tradizionale: ad esempio, l'analisi matematica viene in generale presentata secondo una sequenza che non riflette l'evoluzione storica, anzi, per molti versi, l'analisi viene proposta storicamente «a ritroso» [2].

Il problema epistemologico non riguarda solo l'ordine degli elementi storici, ma la loro interpretazione: si tratta cioè di stabilire se l'accostamento alla storia debba anticipare o seguire la presentazione di un concetto nella sistemazione moderna. Un «uso a posteriori» della storia nella trasmissione del sapere matematico può prevedere che il ruolo degli elementi storici si colleghi anche all'approfondimento e al chiarimento degli argomenti trattati [2]. Riguardo a questo tema, Giorgio T. Bagni mette in guardia il lettore riguardo l'indispensabile necessità di mantenere un rigoroso atteggiamento su alcune questioni metodologiche, qualsiasi siano le modalità dell'impiego della storia. In particolare, come in parte anticipato, ogni richiamo storico deve essere adeguatamente contestualizzato, cioè presentato con riferimento al periodo in esame poiché usi acritici o strumentali della storia della matematica sarebbero sostanzialmente scorretti [2].

Dopo aver presentato diversi suggerimenti su come inserire dal punto di vista pratico la storia nelle ore di matematica in aula, nel Capitolo 9 del libro già citato di Fauvel e van Maanen, vengono descritti tre effetti che alcuni ricercatori in storia e didattica hanno individuato in seguito all'inserimento della storia nelle ore di matematica [18, p. 292]:

- **spaesamento:** l'integrazione della storia nella matematica sostituisce l'usuale con qualcosa di diverso cioè permette di vedere la matematica come un'attività intellettuale, piuttosto che come un corpus di conoscenze o un insieme di tecniche.
- **riposizionamento:** l'integrazione della storia nella matematica stimola le nostre percezioni rendendo ciò che percepiamo familiare come sconosciuto. L'approccio storico può provocare un riorientamento dei punti di vista poiché spesso nell'insegnamento succede che alcuni concetti appaiano come già esistenti. Per esempio il concetto di insieme, di triangolo o di funzione. Questi concetti vengono spesso manipolati dagli studenti senza pensare alla loro

costruzione e in questo caso la storia permette di ricordare che tutti questi concetti sono stati inventati da qualcuno.

- **immersione culturale:** l'integrazione della storia della matematica permette di collocare lo sviluppo della matematica all'interno del contesto scientifico e tecnologico di una particolare epoca e nella storia delle idee e delle società. Inoltre la storia nell'insegnamento della matematica permette di osservare questa scienza da prospettive che esulano dai confini disciplinari stabiliti.

In particolare quindi, l'introduzione della storia della matematica nel corso del regolare insegnamento del programma scolastico, permette di sostituire le abitudini e gli argomenti abituali con qualcosa di nuovo, e quindi determina la messa in discussione delle percezioni degli studenti, ma anche dell'insegnante, causando una sensazione di spaesamento.

Attraverso questa percezione iniziale, l'attenzione e i meccanismi messi in atto per ovviare al disorientamento e quindi volti a riposizionarsi ed orientarsi in qualcosa di non familiare, favoriscono la nascita dell'opportunità di ripensare, forse anche con una maggiore consapevolezza, alle proprie idee sulla natura degli oggetti matematici e sui processi per la loro costruzione. Per lo studente, la necessità di riposizionarsi, può diventare un'occasione per aumentare la propria attenzione, e l'introduzione di un elemento di novità potrà aiutarlo a chiedersi qualche cosa di più su quegli oggetti matematici che spesso vengono assunti in modo passivo [18].

L'azione di spaesamento potrebbe risultare rilevante anche per migliorare la professionalità e l'efficacia dell'insegnante. Come esperto di concetti acquisiti già da lungo tempo, un insegnante potrebbe perdere la flessibilità e l'abitudine di tornare indietro dal prodotto finale che egli ha già acquisito e fatto proprio. Grazie all'inserimento della storia nell'insegnamento di un particolare concetto, l'insegnante può ritornare al processo costruttivo che lo ha generato, passando dall'ambito formale sistemato a quello informale delle idee ancora ad uno stato grezzo. L'introduzione di un ragionamento matematico che si trova dietro ad un passaggio storico può diventare un mezzo per analizzare le difficoltà degli studenti da un punto di vista diverso da quello tradizionale, ma soprattutto può ricordare all'insegnante che quei concetti che dal suo punto di vista sono semplici, potrebbero non esserlo stati all'inizio del processo storico, e quindi molto probabilmente non lo saranno per i discenti [23].

L'aspetto dell'immersione culturale riguarda una visione più generale della matematica e si ricollega al tema di "umanizzare" la matematica. Come già detto, la matematica non è un sistema di risultati rigidamente strutturato, ma un processo intellettuale umano in continua evoluzione, strettamente legato alle altre scienze, alla cultura e alla società [18]. Attraverso lo studio dettagliato di esempi storici, gli studenti hanno l'opportunità di apprezzare che la matematica non è guidata solo da ragioni utilitaristiche, ma anche sviluppata per il suo stesso interesse, motivata da criteri estetici, curiosità intellettuale, sfida e piacere, scopi ricreativi [18].

Inoltre, la matematica nella sua forma moderna è per lo più vista come un prodotto di una particolare cultura e cioè quella occidentale. Attraverso lo studio della storia della matematica, gli insegnanti e gli studenti hanno l'opportunità di conoscere altri approcci meno noti alla matematica che sono apparsi in altre culture ed in particolare il ruolo che hanno avuto in esse. In alcuni casi, questi aspetti culturali, possono aiutare gli insegnanti nel loro lavoro quotidiano con

classi multietniche, al fine di rivalutare il patrimonio culturale locale come mezzo per sviluppare la tolleranza ed il rispetto tra gli studenti [18].

Gli insegnanti potrebbero utilizzare i dubbi e le incertezze per farli diventare argomenti di discussione col fine di arricchire la conoscenza formale ed informale di un argomento e la capacità degli studenti di parlare di matematica. Questo è diverso dalla presentazione abituale dell'attività matematica e secondo Cathy Kessel, ricercatrice americana in didattica della matematica:

«Questo stile distaccato di parlare e scrivere di matematica suggerisce agli ascoltatori e ai lettori che la matematica è indipendente dal tempo e dal luogo [...] idee che non sono legate a persone, tempi e luoghi specifici, ma che sono astratte e senza tempo ... e che evita di menzionare chi fa concretamente.» [18, p. 297]

Recenti esperienze di ricerca hanno iniziato a proporre l'inclusione e la condivisione di intuizioni, congetture, lo sviluppo euristico e l'incoraggiamento alla riflessione e alla comunicazione in risposta alla percezione, diffusa in molte classi di tutto il mondo, secondo la quale l'attività matematica si traduce con produzione di risposte pulite e corrette ai problemi. Tutti questi elementi legittimano il sollevare esplicitamente dubbi, il commettere errori, l'entrare in vicoli ciechi e il discutere di contraddizioni apparentemente non risolvibili e questi temi, queste problematiche apparenti, diventano argomenti di discussione che possono arricchire la conoscenza formale e informale di un argomento e la capacità degli studenti di "parlare di matematica" [18].

Ad esempio, si potrebbero mettere gli insegnanti di fronte ai dubbi che i matematici del XVI e XVII secolo avevano sulla natura dei numeri irrazionali. Nella discussione della fonte, gli insegnanti possono osare esprimere il proprio disagio e/o le proprie incertezze sulla rappresentazione decimale "infinita" dei numeri irrazionali. Possono anche condividere la lotta tra l'utilità del concetto di irrazionale quando i razionali falliscono (ad esempio nelle misure geometriche) e la loro natura incerta di numeri.

Per coloro che sono meno preoccupati da questi problemi, la discussione serve a sviluppare la consapevolezza che le cifre infinite nell'espansione decimale di un irrazionale sono state considerate problematiche al punto da mettere in discussione il loro essere dei numeri. Di conseguenza, le difficoltà riscontrate nel passato dagli studiosi, portano sia l'insegnante, che lo studente a riconoscere che questo può essere un problema anche per gli studenti stessi e di conseguenza a riflettere sull'importanza cruciale del ruolo delle rappresentazioni di un concetto, sulla loro influenza sul modo in cui l'idea viene concettualizzata, messa in discussione e infine accettata o rifiutata [18].

1.2.4 Controindicazioni

Da quanto riportato nei paragrafi precedenti, sembra che la storia sia la chiave di volta che la matematica necessitava nel suo processo di insegnamento-apprendimento. Seppur siano stati condotti numerosi studi di carattere didattico ed anche l'esperienza diretta degli insegnanti dimostri e testimoni l'efficacia dell'utilizzo della storia nell'insegnamento della matematica, esistono delle perplessità e delle problematiche. Queste possono essere di carattere sia pratico che filosofico e devono essere prese in considerazione quando si decide di utilizzare la storia nella pratica d'aula, poiché un utilizzo troppo spinto, o non perfettamente integrato e consapevole della storia, può

arrivare a creare un vero e proprio danno all'insegnamento [18].

Affinché la storia della matematica abbia risvolti positivi è essenziale che essa si trovi ad essere integrata nel corso dell'insegnamento, e non semplicemente aggiunta, altrimenti sortirebbe come unico effetto un appesantimento del programma curricolare. In questo caso la storia non può fornire alcun valore aggiunto al processo di insegnamento-apprendimento, né dal punto di vista dell'insegnante né tanto meno da quello dello studente e per far sì che questo non accada è necessario che la storia faccia parte della cultura dell'insegnante. L'insegnante deve essere ben formato relativamente alla genesi di una nozione o di una teoria, in modo tale che possa scegliere le modalità e le tempistiche di inserimento della storia affinché questa possa realmente migliorare e facilitare l'apprendimento e la comprensione, ed eventualmente sviluppare le capacità critiche dei discenti.

Se la conoscenza della storia non è radicata profondamente nella cultura dell'insegnante, il suo utilizzo non porterà gli effetti positivi desiderati, anzi rischierà di peggiorare l'apprendimento andando a creare nuovi ostacoli, sia di natura epistemologica, sia di difficoltà di lettura qualora si decida di utilizzare fonti non appropriate o non guidate in modo opportuno.

Considerare un concetto matematico attraverso la sua evoluzione storica richiede l'assunzione di posizioni epistemologiche impegnative da parte dell'insegnante: la stessa selezione dei dati storici non è neutra poiché l'insegnante conferisce un'interpretazione personale che viene inevitabilmente condotta alla luce degli attuali paradigmi culturali [23].

Inserendo la storia della matematica all'interno della didattica, un altro aspetto negativo che può affacciarsi è quello di presentare un'eccessiva quantità di eventi storici e aneddoti rischiando di far perdere allo studente il senso della storia della matematica, ovvero come questa possa servire per migliorare e approfondire la comprensione della matematica stessa. Inserire parti di storia perdendo la prospettiva sulla storia stessa, senza un'attenzione esplicita alle ragioni per cui si vuole studiare i suoi contenuti o senza mostrare i benefici che se ne possono trarre, svuota completamente la storia del ruolo che potrebbe avere e cioè quello di creare un'istruzione matematica che enfatizzi l'abilità del capire e la consapevolezza della conoscenza. Inoltre, la storia, può essere tortuosa e confusa piuttosto che illuminante e dunque potrebbe andare a costituire un ostacolo piuttosto che un aiuto ed ancora, è anche molto importante considerare che, esistono diversi studenti che non amano la storia come disciplina e di conseguenza difficilmente riusciranno ad amare la storia della matematica, piuttosto, la troveranno noiosa al pari della matematica [18].

La mancanza di risorse e materiali adeguati all'integrazione delle informazioni storiche è un altro grande problema con il quale si devono scontrare gli insegnanti che vogliono inserire la storia nell'insegnamento della matematica poiché molto spesso le fonti e i documenti originali non sono facili da reperire e soprattutto da verificare [18].

Un altro aspetto da tenere in considerazione è che l'insegnamento della matematica ha e deve avere come oggetto la matematica: l'inserimento della storia deve essere rivolto essenzialmente all'insegnamento dell'oggetto matematico. Secondo Freudenthal, le cose sarebbero «sotto-sopra» se si iniziasse ad insegnare partendo dal risultato dell'attività piuttosto che insegnare l'attività

stessa ed il suo sviluppo [27].

Questo significa che è necessario evitare che gli studenti spostino l'attenzione dall'oggetto di studio al mezzo attraverso il quale si vuole ottenere l'apprendimento. «La storia non è matematica. Per insegnare la storia, è necessario insegnare prima la matematica stessa.» [18, p. 203]. Infatti, la storia, deve portare ad una conoscenza migliore e facilitata del concetto matematico, non della storia del concetto. Il rischio è di andare a creare confusione nei discenti relativamente all'oggetto del loro studio. Questa confusione potrebbe accrescere o addirittura creare nuove difficoltà nell'apprendimento della disciplina.

Ad esempio, mostrare l'evoluzione di un concetto matematico nel corso dei secoli, anziché favorirne la comprensione, potrebbe portare gli studenti a crearsi più idee diverse, magari contrastanti fra loro, sullo stesso concetto, perché non riescono a percepirne bene la profonda ed intrinseca evoluzione [23]. Le convinzioni storiche legate ad un concetto potrebbero portare lo studente ad appropriarsi solo di un aspetto dell'evoluzione, lasciando la conoscenza dell'argomento incompleta e parziale. Oppure gli studenti potrebbero percepire la richiesta di imparare la matematica nella sua evoluzione storica come un'ulteriore questione inutile; come accennato nel Paragrafo 1.1.2, la stessa sensazione si può ritrovare nello studio della storia in senso stretto, quindi se non si riesce a sottolineare e a trasmetterne l'utilità epistemologica e culturale di questa collaborazione, si rischia di creare ancora più malcontento e demotivazione rispetto allo studio di questi argomenti.

Esistono anche alcune obiezioni di tipo prettamente pratico riguardo l'inserimento della storia nell'insegnamento della matematica e queste sono: la mancanza di tempo e la mancanza di una valutazione. La mancanza di tempo è dovuta alle norme specifiche che regolano il percorso di istruzione, poiché la scuola è un'istituzione ed è soggetta a norme che ne sanciscono le attività, i tempi, le modalità, gli scopi ed i traguardi di chi la frequenta (si veda Sezione 1.1.2).

Per quanto riguarda i programmi scolastici, la sensazione è che non ci sia abbastanza tempo nemmeno per l'apprendimento della matematica stessa e dunque ancora meno quando si propone di insegnare anche la storia di questa disciplina.

Anche la mancanza di un modo chiaro e coerente per la valutazione degli studenti riguardo l'integrazione della componente storica nell'insegnamento della matematica può costituire una problematica. La mancanza di una valutazione sembra distogliere l'attenzione degli studenti che non inserendola tra le discipline soggette a giudizio, sono portati a essere demotivati e non comprenderne l'utilità [18].

Capitolo 2

La storia di Pi Greco attraverso quattro personaggi

Come è stato abbondantemente discusso nel capitolo precedente la storia può essere molto utile nell'insegnamento della matematica se inserita con i giusti accorgimenti. In particolare, in questa tesi che ha come obiettivo quello di umanizzare la matematica, si è deciso di raccontare l'evoluzione di Pi Greco attraverso la storia di alcune personalità che hanno avuto un ruolo chiave nello sviluppo delle conoscenze riguardanti questa costante.

In questo capitolo, verranno descritte le biografie delle quattro figure scelte: Archimede da Siracusa, il cardinale Niccolò Cusano, François Viète e Isaac Newton, ma prima di concentrarsi sulla biografia e le opere di questi quattro personaggi, si riassumeranno i momenti salienti riguardo le scoperte e la storia più antica di Pi Greco che servono da premessa al lavoro che caratterizza il progetto di tesi.

Da questa ricostruzione emergerà come la ricerca su Pi Greco abbia avuto sin da subito una duplice natura che fece emergere due filoni di indagine:

1. **l'approssimazione del suo valore:** sin dall'antichità vi era la necessità di utilizzare questa costante in modo pratico in tutte le attività che implicavano l'utilizzo della figura geometrica del cerchio (costruzione di oggetti, di infrastrutture, ecc.) e dunque era necessario avere una buona approssimazione di questa costante
2. **lo studio della sua natura di numero:** ricerca di carattere più teorico che si sviluppò a partire dal problema classico della quadratura del cerchio (III sec. a.C.) fino alla dimostrazione della sua irrazionalità (1794) e trascendenza (1882).

2.1 La storia antica di Pi Greco

2.1.1 I Babilonesi

La storia di Pi Greco inizia tra il 1900 ed il 1600 a.C con la civiltà Babilonese. Durante questo periodo Babilonia si era affermata come il più grande centro economico e culturale tra le civiltà Mesopotamiche grazie all'apporto del grande sovrano Hammurabi, legislatore e politico che riunì sotto l'impero Babilonese tutta la valle tra il Tigri e l'Eufrate garantendo unità culturale, linguistica e politica anche attraverso il famoso Codice di Hammurabi (il primo sistema legale che diede inizio ad una forma di società dove vigeva il principio di legge come lo conosciamo ancora oggi).

In questo clima di benessere economico e sociale erano molto sviluppate l'urbanistica, l'arte e l'architettura e si raggiunsero anche sorprendenti risultati in aritmetica, algebra e geometria, prova del fatto che si erano sviluppate nuove esigenze sociali e culturali: l'accrescimento degli affari sacri, governativi e privati.

I primi tentativi di stimare la costante Pi Greco tale risalgono proprio ai Babilonesi che oltre ad aver calcolato un valore piuttosto preciso di Pi Greco $\pi = 3.125$, hanno tramandato ai posteri anche una regola per calcolarlo che è possibile ritrovare nella tavoletta 7302 della Yale Babylonian Collection rinvenuta a Susa e risalente al 1750 a.C..

Il loro metodo si basava nell'inscrivere in un cerchio un esagono i cui lati avevano come lunghezza la metà esatta del diametro del cerchio cioè la lunghezza del raggio r : $l = \frac{d}{2} = r$.

I Babilonesi erano a conoscenza del fatto che il rapporto tra la circonferenza e la lunghezza del suo diametro è uguale ad una costante, quella che oggi chiamiamo π , e che verrà indicata per semplicità con tale simbolo:

$$\frac{C}{d} = \frac{C}{2r} = \pi$$

Dunque, calcolando il rapporto tra la circonferenza ed il perimetro dell'esagono dato dalla formula $P = 6r$ trovarono che

$$\frac{P}{C} = \frac{6r}{2 \cdot \pi \cdot r} = \frac{3}{\pi}.$$

I Babilonesi avevano anche approssimato il rapporto tra il lato dell'esagono e la corda che quel lato definisce sul cerchio (si riportano i calcoli espressi in base sessagesimale secondo il sistema di numerazione dell'epoca):

$$\frac{P}{C} = \frac{57}{60} + \frac{36}{(60)^2} = 0.96.$$

Di conseguenza si poteva ricavare facilmente il valore approssimato della costante che oggi

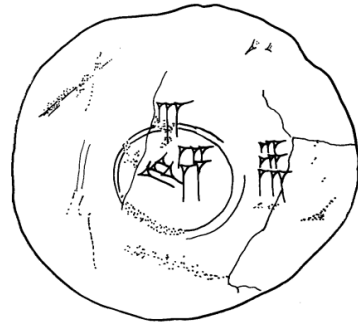


Figura 2.1: Riproduzione della tavoletta YBC 7302.

chiamiamo Pi Greco:

$$\frac{P}{C} = 0.96 = \frac{3}{\pi}$$

$$\pi \approx \frac{3}{0.96} = 3.125.$$

Dunque è possibile affermare che i Babilonesi avessero approssimato Pi Greco come $\pi = 3.125$. In realtà, presso questo popolo, questa costante veniva utilizzata con diverse approssimazioni, in base alle necessità di tipo pratico richieste dalla situazione. L'approssimazione più diffusa era $\pi = 3$ probabilmente perché facile da utilizzare, ricordare e tramandare. In ogni caso, l'approssimazione raggiunta di $\pi = 3.125$ rimase una delle migliori approssimazioni fino al III sec. a.C., momento in cui fu possibile trovare nuove approssimazioni grazie al metodo di esaustione di Archimede che verrà approfondito, insieme alla sua biografia, nella Sezione 2.3 a lui dedicata.

2.1.2 Gli Egizi

Un altro popolo che si occupò dell'approssimazione di π fu quello degli Egizi.

La civiltà egizia, si sviluppò lungo le rive del fiume Nilo, nell'attuale Egitto e, nonostante l'alternarsi di periodi di crisi politica, invasioni di popoli stranieri, carestie e decadenza avvenuti nel corso degli oltre tre mila anni di storia, questo popolo si contraddistinse sin da subito per la sua raffinatezza nell'arte e per la ricchezza di conoscenze tecnico-pratiche.

Per quanto riguarda gli studi di carattere scientifico questa popolazione era ancora guidata da esigenze di tipo pratico. Alcune di queste esigenze erano legate alle piene regolari del Nilo che impiegavano uomini e sforzi nel contenerle. Le piene rendevano il terreno estremamente fertile e resero questa civiltà, a differenza di quelle mesopotamiche, fiduciosa e molto devota alla natura tanto che il fiume veniva considerato come una vera e propria divinità.

Malgrado la frammentazione dei regni che segnò l'ultimo periodo della lunga storia di questo popolo, la civiltà egizia fu caratterizzata da una grande unità culturale e grazie ai papiri giunti fino ad oggi si hanno alcune testimonianze dello sviluppo della matematica presso il popolo egizio anche se, il facile deterioramento del papiro e la sua difficile conservazione, ne ha limitato il numero. La più importante testimonianza di carattere scientifico è il Papiro di Rhind, tramandato da uno scriba egiziano di nome Ahmes, risalente al 1650 a.C. circa.

Questo papiro è di carattere matematico e contiene 84 problemi riguardanti la vita quotidiana di stampo geometrico, algebrico e aritmetico.

Nel Problema 50 e nel Problema 49 di questo papiro si hanno dei riferimenti a Pi Greco poiché viene spiegato come effettuare il calcolo dell'area di un pezzo di terra circolare di diametro *9 khet* (unità di misura egizia). Ahmes scrisse la procedura:

Devi sottrarre la nona parte di esso, cioè 1 resto 8. Devi moltiplicare 8 volte otto, diventa 64. Questa è la sua area di terra, 64 setat.

Il testo di Ahmes, in termini moderni può essere tradotto come:



Figura 2.2: Un frammento del papiro di Rhind.

Togli $\frac{1}{9}$ a un diametro e costruisci un quadrato sulla parte che ne rimane; questo quadrato ha la stessa area del cerchio.

Questo implica quindi che l'area di un cerchio con diametro di 9 unità è pari a quella di un quadrato con un lato di 8 unità.

Indicando con d la lunghezza del diametro del cerchio e con l il lato del quadrato si trova:

$$Area_{\text{cerchio}} = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = l^2 = Area_{\text{quadrato}}$$

Da cui si ottiene che (essendo $d = 9$):

$$Area_{\text{cerchio}} = \frac{\pi \cdot 81}{4} = 64$$

Attraverso semplici passaggi è possibile ritrovare l'approssimazione di Pi Greco che utilizzavano gli Egizi:

$$\pi = 4 \cdot \frac{64}{81} \approx 3.16049$$

In questo problema, lo scriba non nomina mai la costante Pi Greco ma ci fornisce un procedimento per calcolarla attraverso il confronto tra l'area del cerchio e l'area del quadrato. Questa modalità di operare può essere considerata come il primo tentativo di quadratura del cerchio.

2.1.3 Gli Ebrei

Anche nella Bibbia sono presenti dei riferimenti al rapporto tra la circonferenza e il diametro: vengono fornite delle informazioni molto chiare per quanto riguarda l'approssimazione della costante Pi Greco presso gli antichi Ebrei.

Nell'Antico Testamento, I Re, 7:23 in un riferimento all'altare costruito nel tempio di Salomone si legge:

«Poi fece il mare di metallo fuso: dieci cubiti da una sponda all'altra cioè completamente rotondo; la sua altezza era di cinque cubiti e una corda di trenta cubiti lo circondava all'intorno.»

Questo passo fu scritto probabilmente intorno al VI secolo a.C., ma fa riferimento ad un tempio che sembra essere stato costruito nel X secolo a.C.

Quando si costruì il tempio, definito come un «mare di metallo fuso», si sostituì il bacino di rame trasportabile usato in precedenza nel tabernacolo. Opera di Hiram, un ebreo fenicio, era evidentemente chiamato "mare" per la gran quantità d'acqua che poteva contenere. Questo recipiente, anch'esso di rame, misurava dieci cubiti cioè circa 4.5 metri da un suo orlo all'altro ed era di forma circolare. La sua altezza era di cinque cubiti cioè circa 2.2 metri e per circondarlo tutt'intorno si necessitava di una corda lunga trenta cubiti cioè 13.4 metri.

La lunghezza della corda di trenta cubiti rappresenta la misura della circonferenza ed è stata evidentemente utilizzata come approssimazione ad una cifra tonda. A questo proposito è stata fatta un'interessante osservazione:

«Fino all'epoca di Archimede, la circonferenza veniva sempre misurata in linea retta in base al raggio; ed era naturale che Hiram dicesse che il mare misurava all'incirca trenta cubiti, misurandolo, secondo la consuetudine, in base al raggio, o semidiametro, di cinque cubiti, che applicato sei volte tutt'attorno al perimetro, o "orlo", avrebbe dato i trenta cubiti dichiarati. Nel brano non c'era evidentemente altra intenzione se non quella di indicare le dimensioni del Mare, nel linguaggio usuale che chiunque avrebbe capito, misurando la circonferenza nel modo in cui tutti gli esperti artigiani, come Hiram, in quel tempo misuravano il cerchio. Egli, naturalmente, conosceva con esattezza che se il perimetro dell'esagono inscritto avente per lato il raggio era di trenta cubiti, l'effettiva circonferenza sarebbe stata un po' maggiore.» [48]

Sembra dunque che la proporzione di tre a uno, cioè che la circonferenza misuri tre volte il diametro, fosse il modo abituale di stabilire il valore, solo approssimativo, di Pi Greco come $\pi = 3$.

2.1.4 I Greci

L'approssimazione di Pi Greco non migliorò per circa un millennio poiché per l'utilizzo nella costruzione di edifici e nell'agricoltura erano ritenuti sufficienti i valori calcolati dai Babilonesi e dagli Egizi. L'interesse verso questa costante riprese con il popolo dei Greci che assorbirono molte conoscenze delle culture mesopotamica ed egizia grazie agli intensi scambi commerciali che avvenivano con queste popolazioni.

I Greci furono il primo popolo a sviluppare un forte interesse verso la ragione e l'esplorazione delle idee, di conseguenza anche lo studio della matematica non era più limitato ad un uso esclusivamente di tipo pratico. L'uomo greco era caratterizzato da un forte sentimento di fiducia nelle proprie capacità, grazie al quale riuscì a sviluppare la conoscenza, che da questo momento in avanti progredì a dismisura.

La matematica, così come tutte le branche del pensiero, interessò molte delle più brillanti menti dell'epoca e intorno al IV secolo a.C. venne ripreso lo studio della misura del cerchio.

In particolare, lo studio della matematica era operato nelle scuole in cui si riunivano i pensatori che costituivano dei veri e propri focolari intellettuali in cui si sviluppava la conoscenza. Tra queste vi erano la scuola di Elea ed, in particolare, l'accademia platonica di Atene da cui provennero brillanti menti che contribuirono a rendere Atene il più grande centro culturale del Mediterraneo dell'epoca.

Fu proprio in questo periodo che si costituirono i tre famosi problemi matematici dell'antichità vincolati dall'utilizzo esclusivo di riga e compasso non graduati:

1. la quadratura del cerchio
2. la duplicazione del cubo
3. la trisezione dell'angolo.

Questi problemi attrassero un gran numero di intellettuali che si dedicarono alla loro risoluzione. Uno tra questi fu Ippocrate da Chio, che dimostrò per la prima volta nella storia della matematica che era possibile quadrare una figura curvilinea: la lunola, figura costituita dai punti del piano compresi tra due archi di cerchio.

Questa dimostrazione riportò l'attenzione sul problema della quadratura del cerchio che dopo questo risultato tornò ad essere creduta possibile.

Il primo pensatore greco a tentare di trovare un rapporto definitivo fra cerchio e quadrato fu Anassagora di Clazomene ma, poco tempo dopo, se ne interessarono Antifonte e Brisone di Eraclea. Questi personaggi erano contemporanei di Socrate (469-399 a.C.) e tentarono di trovare l'area di un cerchio sviluppando una brillante nuova idea che sarà poi perfezionata dallo stesso Archimede due secoli dopo: il principio di esaustione.

Antifonte sosteneva che era possibile ottenere un poligono con il perimetro coincidente alla circonferenza inscrivendo nel cerchio dei poligoni regolari ottenuti raddoppiando il numero dei lati finché "il cerchio non è esausto", cioè all'infinito. Brisone invece calcolò le aree di due poligoni, uno inscritto e uno circoscritto, ipotizzando che l'area del cerchio dovesse essere compresa tra le aree dei due poligoni e fu la prima volta che si determinò un risultato attraverso l'utilizzo di limiti inferiori e superiori.

Un altro importante risultato sul rapporto tra il cerchio ed il suo diametro proviene dagli *Elementi* di Euclide, opera sulla quale si fonda tutta la geometria moderna ed introduce il metodo assiomatico-deduttivo che tuttora caratterizza la matematica.

Negli *Elementi* non vengono effettuate approssimazioni o calcoli di Pi Greco ma nella Proposizione (XII,2) Euclide afferma che:

I cerchi stanno tra loro come i quadrati dei diametri.

Attraverso questa proposizione Euclide dimostrò che vi era un rapporto costante tra l'area del cerchio ed il quadrato del suo diametro e seppur i Greci conoscessero che vi era un rapporto costante anche tra la lunghezza della circonferenza ed il suo diametro, sembra che non riuscirono a stabilire alcuna connessione tra queste due costanti.

Un paio di secoli dopo, la sfida della quadratura del cerchio fu ripresa da Archimede, uno fra i massimi pensatori della storia, straordinario matematico, fisico ed inventore.

Quando Archimede rivolse la sua attenzione al cerchio, utilizzò nei suoi calcoli le innovazioni ed i metodi di esaustione che avevano introdotto Antifonte e Brisone. A differenza dei suoi predecessori si concentrò sui perimetri dei poligoni inscritti e circoscritti piuttosto che sulle loro aree trovando quindi un'approssimazione della lunghezza della circonferenza. Il metodo di esaustione di Archimede viene inserito nell'opera *Misura del cerchio* che verrà trattata insieme alla biografia dello studioso nella successiva Sezione 2.3.

Durante lo stesso periodo storico si incominciò anche ad indagare la natura di Pi Greco. Questa ricerca era dovuta sia al grande desiderio di conoscenza di questo popolo, il cui interesse si spingeva

verso tutti i campi del sapere, sia allo sviluppo di un'idea di impossibilità di quadrare il cerchio dovuta all'accumularsi di tentativi falliti di risolvere questo problema.

Un'ulteriore spinta che alimentò questo dubbio arrivò dalla dimostrazione di Ippaso da Metaponto (V sec. a.C.) che, al contrario di quello che sosteneva il suo contemporaneo Pitagora, mostrò che in natura non tutto può essere espresso in termini di numeri interi o di rapporti tra essi, come accade, ad esempio, per il rapporto tra la diagonale ed il lato di un quadrato che risultano essere due grandezze incommensurabili. In seguito a questa stravolgente scoperta, si iniziò a sospettare che anche il diametro fosse, con la circonferenza, in rapporto incommensurabile.

2.1.5 I Cinesi

Per procedere nella storia delle approssimazioni di Pi Greco è necessario spostarsi in Cina. La Cina fu sede di una fra le più antiche civiltà scientifiche e matematiche della storia. Il loro sistema numerico era molto più avanzato rispetto a quelli contemporanei e benché già nel XII secolo a.C. la matematica cinese avesse raggiunto ottimi livelli, i Cinesi continuavano ad usare nei loro calcoli il valore di Pi Greco approssimato come $\pi = 3$.

I progressi della Cina nello studio della costante si ebbero solamente nel 139 d.C. quando Ch'ang Hong, ministro e astrologo dell'imperatore An-ti, promosse l'idea che tutta l'arte dei numeri proveniva dal cerchio e dal quadrato.

Nel testo che contiene questa affermazione, troviamo testimonianza che in Cina, come avvenne anche in Egitto e in Mesopotamia, la geometria nacque dalla misurazione e che era essenzialmente un esercizio di aritmetica o di algebra.

Ch'ang Hong, in relazione all'approssimazione di Pi Greco, affermò che il quadrato della circonferenza di un cerchio sta al quadrato del perimetro del quadrato circoscritto come 5 sta a 8. Questo si traduce in:

$$(\pi d)^2 : (4d)^2 = 5 : 8$$

e dunque

$$\pi^2 d^2 : 16d^2 = 5 : 8.$$

Da cui si ricava molto facilmente che:

$$\begin{aligned}\pi^2 &= \frac{16d^2 5}{8d^2} = 16 \cdot \frac{5}{8} = 10 \\ \Rightarrow \pi &= \sqrt{10} \approx 3.162\end{aligned}$$

Questo valore rimase per molti anni l'approssimazione più popolare ed utilizzata di Pi Greco in tutta l'Asia fino a quando nel 263 d.C. Liu Hui, usando il metodo di esaustione con un poligono di 3072 lati, trovò una migliore approssimazione di Pi Greco.

Liu Hui fu un matematico Cinese nonché il primo commentatore del più importante trattato di carattere matematico cinese: *Chiu Chang Suan Shu* che si traduce come *Nove capitoli sulle arti matematiche* e rappresenta l'analogo degli *Elementi* di Euclide per la matematica orientale.

A questo periodo risale anche l'invenzione della carta, una delle più grandi invenzioni tecnologiche dell'umanità, grazie alla quale numerosi manuali di medicina, di storia, di scienza militare, di

filosofia, di astronomia prodotti dagli specialisti riuscirono a giungere fino ai giorni nostri. All'interno dei *Nove capitoli* si trovano diversi problemi con il relativo risultato numerico, a cui seguono, per alcuni, delle regole generali utilizzate nella risoluzione del problema.

Nei problemi del primo capitolo dal calcolo dell'area del cerchio si ottiene un'approssimazione di Pi Greco data da $\frac{A}{r^2} = \pi = 3$.

Liu Hui si rese conto che questa approssimazione non era valida e propose nei commenti a quest'opera una sua approssimazione operando attraverso un metodo di esaustione molto simile a quello utilizzato da Archimede. Le differenze consistevano nel fatto che Liu Hui utilizzò soltanto i poligoni inscritti per l'approssimazione dell'area del cerchio e arrivò al risultato applicando due volte il Teorema di Pitagora.

Un'approssimazione migliore di Pi Greco si ebbe però ad opera dell'astronomo Tsu Ch'ung-chih, vissuto nel V secolo, che usando poligoni inscritti di almeno 24576 lati ottenne approssimativamente un valore di Pi Greco corretto fino alla quinta cifra decimale:

$$\pi = \frac{355}{113} \approx 3.1415929$$



Figura 2.3: Tsu Ch'ung-chih.

2.2 La storia di Pi Greco continua

Il problema di trovare valori sempre più precisi da questo momento in avanti divenne un'ossessione per molti matematici e non. La matematica veniva praticata anche da studiosi ed intellettuali che se ne occupavano senza avere troppe competenze.

Attorno al 530 il grande matematico indiano Aryabatha trovò un'equazione per calcolare il perimetro di un poligono di 384 lati e ne ricavò un rapporto fra circonferenza e diametro di $\sqrt{9.8684} \approx 3.1414$.

Il più grande matematico indiano del VII secolo, Brahmagupta calcolò i perimetri dei poligoni inscritti di 12, 24, 48 e 96 lati, ottenendo, rispettivamente, i valori delle radici quadrate di 9.65, di 9.81, di 9.86 e di 9.87. Poi fece una grossolana ipotesi prevedendo che all'approssimarsi dei poligoni al cerchio, i perimetri, e quindi il Pi Greco, si sarebbero approssimati alla radice quadrata di 10. La radice quadrata di 10 fu il valore che si diffuse dall'India all'Europa e che venne utilizzato per tutto il Medioevo dai matematici di tutto il mondo, probabilmente anche grazie al fatto che un'approssimazione di tipo $\pi = \sqrt{10}$ risulta molto facile sia da trasmettere che da ricordare.

Per avere delle nuove approssimazioni di questa costante è necessario aspettare il Medioevo quando anche il continente europeo incominciò ad indagare sul suo valore, grazie anche alla traduzione in latino di testi greci di matematica come, per esempio, gli *Elementi* di Euclide. Il primo europeo ad occuparsi di questo rapporto fu Leonardo Fibonacci che con il suo *Liber abaci*

del 1202 contribuì alla diffusione in Europa dei numerali arabi e nel *Practica Geometriae* del 1220 utilizzò come valore di Pi Greco l'approssimazione $\pi \approx 3.141818$.

Il metodo di calcolo di Fibonacci si fondava sull'approssimazione del perimetro di un poligono regolare di 96 lati inscritto e circoscritto ad un cerchio, simile al metodo di esaustione utilizzato da Archimede, con la differenza che egli poteva servirsi dei numeri decimali sconosciuti all'epoca dello studioso greco.



Figura 2.4: L. Fibonacci.

Nella metà del Quattrocento il cardinale Niccolò Cusano affermò di avere quadrato esattamente il cerchio, trovando che il rapporto della circonferenza al diametro era di 3.1423. Il suo metodo fu dimostrato falso da Regiomontano (Johannes Muller, 1436-1476) ma il suo ragionamento fu considerato dai successori un nuovo modo di utilizzare la matematica per spingersi oltre ai limiti della conoscenza sensibile. La biografia di Niccolò Cusano, la sua dimostrazione relativa alla quadratura del cerchio e le critiche mosse da Regiomontano, verranno approfondite nella Sezione 2.4, a lui dedicata.

Nel 1500 si tornò a discutere sulla natura del rapporto tra circonferenza e diametro.

Michael Stifel affrontò il tema, teorico, della realtà dei numeri irrazionali: un tema che coinvolse anche il Pi Greco, da tempo sospettato di essere irrazionale.

Per Stifel Pi Greco è un «non numero che vive sulle nuvole inafferrabili dell'infinito» e questo rappresentava il sentimento diffuso a quell'epoca sulla natura di questa costante che, dopo i numerosi tentativi vani di calcolarla, sembrava essere inafferrabile all'uomo.



Figura 2.5: M. Stifel.

Verso la fine del 1500 emersero anche nuove possibilità di calcolare con sempre maggior precisione il valore della costante, grazie anche alla scoperta di nuovi strumenti tra cui le tavole trigonometriche, l'invenzione delle frazioni decimali e dei logaritmi.

Inoltre in questo periodo iniziò l'era dei cacciatori di cifre, interessati a scoprire sempre più cifre decimali del π .

Nel 1579, François Viète, un avvocato francese, riprese lo studio del metodo di esaustione con i poligoni inscritti e circoscritti già utilizzato da Archimede oltre 1800 anni prima. Egli stabilì che Pi Greco era maggiore di 3.1415926535 e minore di 3.1415926537. Per ottenere tale stima, egli raddoppiò i lati di due esagoni sedici volte, trovando il perimetro dei poligoni, inscritto e circoscritto, di 393.216 lati ciascuno.

Oltre allo sviluppo dell'approssimazione di Pi Greco, Viète fu anche il primo a introdurre nel 1593 un metodo nuovo ed alternativo a quello di Archimede per il calcolo di π che prevedeva l'utilizzo della trigonometria. Attraverso l'utilizzo informale della nozione di limite, che sarebbe stata formalizzata solo nei secoli successivi, riuscì a scrivere per primo Pi Greco attraverso un prodotto infinito. Questo modo di approssimare Pi Greco conferiva alla costante una caratterizzazione del tutto nuova. La sua vita ed il suo lavoro verranno approfonditi nella Sezione 2.5 a lui dedicata.

Nel tardo cinquecento altri tre matematici olandesi utilizzarono il metodo di Archimede dei poligoni inscritti e circoscritti per calcolare Pi Greco.

Nel 1585 Adriaan Anthonisz trovò che

$$\frac{333}{106} < \pi < \frac{377}{120}.$$

In notazione decimale, ciò significava approssimare Pi Greco attraverso la stima:

$$3.14151 < \pi < 3.14167.$$

Pochi anni dopo Adriaan van Roomen determinò Pi Greco fino al quindicesimo decimale, usando un poligono inscritto che contava più di cento milioni di lati.

Infine, Ludolph van Ceulen impiegò molti anni della sua vita a calcolare π (arrivando fino alla ventesima cifra decimale) usando lo stesso metodo di Archimede ma con la differenza che i suoi poligoni avevano più di trentadue miliardi di lati ciascuno. Quando Van Ceulen morì egli aveva calcolato trentacinque cifre decimali e volle che questi decimali fossero impressi sulla sua lapide. Il suo lavoro si diffuse ampiamente, tanto che Pi Greco venne chiamato per un lungo periodo "Numero Ludolphino".



Figura 2.6: L. Van Ceulen.

La ricerca dei cacciatori di cifre di Pi Greco non terminò ma visto che il metodo di esaurimento iniziava a risultare scomodo ed obsoleto rispetto questa ricerca di approssimazione, nel 1621 il matematico olandese Willebrord Snell inventò un metodo alternativo per procedere. Mentre i suoi predecessori avevano raddoppiato ad ogni iterazione il numero di lati di un poligono, Snell trovò un'approssimazione migliore utilizzando lo stesso numero di lati. Egli pensò di inscrivere e circoscrivere un esagono ad un cerchio e, in questo modo, riuscì a determinare il valore di Pi Greco fino alla sesta cifra decimale, verificando anche le trentacinque cifre decimali proposte da Van Ceulen.

Il matematico inglese John Wallis (1616-1703) affrontò in modo innovativo il problema di trovare l'area di un cerchio. Wallis ottenne un'equazione costituita da un prodotto infinito, come aveva già fatto Viète, ma che differiva da quest'ultima per il fatto che implicava esclusivamente l'utilizzo di operazioni con i razionali, senza ricorrere alle radici quadrate che invece erano presenti nella formula trovata da Viète.



Figura 2.7: J. Wallis.

La formula era:

$$\pi = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1}.$$

Un enorme passo avanti nella storia dell'approssimazione di Pi Greco si ebbe quando James Gregory trovò una soluzione estremamente elegante del calcolo delle arcotangenti, che condusse poi ad un metodo completamente nuovo di calcolare il Pi Greco: le serie di arcotangenti. La formula proposta da Gregory era:

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Dopo che Gregory ebbe trovato questa nuova soluzione, il tedesco Leibniz (1646-1716), padre del calcolo infinitesimale insieme a Newton, scoprì in modo indipendente le serie di arcotangenti che utilizzò per stimare π .

L'altro padre del calcolo infinitesimale fu Isaac Newton (1642-1727), egli utilizzò diversi metodi per la stima di Pi Greco tra cui le serie di arcotangenti ma anche un innovativo metodo conosciuto come il Metodo delle Flussioni. Per un approfondimento della sua produzione scientifica, del suo lavoro rispetto a Pi Greco e della sua biografia si veda la Sezione 2.6.

A questo punto della storia di Pi Greco, per determinare il rapporto tra la circonferenza ed il diametro, non bastavano più i calcoli elementari: il calcolo infinitesimale e le serie di arcotangenti permisero ai matematici di compiere calcoli molto più rapidi rispetto alla misurazione di poligoni del metodo di esaustione.

Ben presto, dunque, il vero problema si spostò dalla determinazione del metodo di calcolo di Pi Greco, verso la valutazione dell'efficienza del metodo utilizzato cioè, avendo già a disposizione molti metodi e formule per l'approssimazione, si studiava per trovare l'equazione che convergesse a Pi Greco con la massima rapidità: la ricerca dell'approssimazione di Pi Greco cessò di essere un problema pratico e divenne un problema matematico puro.

Alla fine del seicento, disponendo di questi nuovi strumenti, la ricerca delle cifre decimali di Pi Greco fece un enorme salto in avanti: nel 1699 Sharp trovò 72 cifre decimali, nel 1706 Machin cento decimali e settantacinque anni dopo, nel 1781, Vega calcolò 140 cifre decimali.

In questo periodo, precisamente nel 1706, venne utilizzato per la prima volta da William Jones nel suo libro *A new introduction to Mathematics* il simbolo di Pi Greco: π , benché lo stesso simbolo fosse stato già utilizzato in precedenza per indicare la circonferenza del cerchio ma in entrambi i casi π è la prima lettera della parola greca " $\pi\epsilon\rho\iota\mu\epsilon\tau\rho\omicron\varsigma$ ", "perimetros", che significa proprio "misura attorno".

La notazione π come la conosciamo oggi prese piede solamente quando durante la metà del settecento, rivolse la sua attenzione al calcolo di π uno fra i massimi e più prolifici matematici della storia, Leonhard Euler (1707-1783), noto come Eulero.

Egli trovò diverse formule per il calcolo di Pi Greco che implicavano



Figura 2.8: L. Euler.

l'utilizzo delle arcotangenti e delle serie e riuscì ad ottenere un metodo di calcolo che in una sola ora poteva fornire venti cifre decimali.

La più interessante delle serie trovate da Eulero è:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Nello stesso periodo Eulero riportò all'attualità il tema sulla natura numerica di π . Egli si domandò se questo fosse un numero razionale o irrazionale ed iniziò a sorgere la necessità di definire una caratterizzazione di questa costante che fosse definitiva.

Il problema della quadratura del cerchio rimase privo di una soluzione convalidata ben oltre il Rinascimento e questa circostanza contribuì notevolmente ad accrescere il fascino di questo problema. In particolare, fu proprio il tema della quadratura a diventare, dopo il Rinascimento, un'ossessione sia per studiosi che per dilettanti.

Basti pensare che nel 1775 l'*Académie Française* di Parigi fu costretta ad adottare una misura restrittiva per la quale non si sarebbero più esaminate le dimostrazioni dei tre problemi geometrici dell'antichità a causa della quantità eccessiva di richieste di verifica che venivano ricevute ogni anno.

Nel 1794 Johann Heinrich Lambert dimostrò quindi in maniera definitiva che π è un numero irrazionale e più tardi, sempre nel 1794, Adrien-Marie Legendre provò in modo più rigoroso non solo che π è un numero irrazionale ma anche che il suo quadrato π^2 è irrazionale. Questa nuova scoperta portò il francese Joseph Liouville, nel 1844, a dimostrare l'esistenza dei numeri trascendenti. Le ricerche sulla natura di π si conclusero solamente nel 1882 quando Ferdinand Von Lindemann dimostrò che π è un numero irrazionale trascendente ciò significa che non esistono polinomi con coefficienti razionali di cui π è radice, dunque risulta impossibile esprimerlo attraverso un numero finito di valori interi, di frazioni e di loro radici.

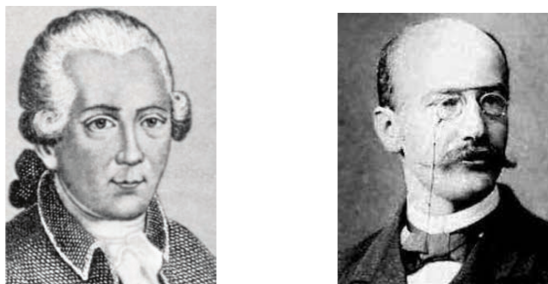


Figura 2.9: J. Lambert e F. Von Lindemann.

Questa serie di risultati, che conferivano a Pi Greco la caratterizzazione di numero trascendente, mise fine anche ai problemi relativi alla quadratura del cerchio e alla rettificazione della circonferenza che, dopo 2500 anni di tentativi falliti, furono finalmente dichiarati impossibili da risolvere.

Dopo i brillanti passi avanti di Eulero, nell'Ottocento non vi furono miglioramenti dal punto di vista del calcolo delle cifre decimali di Pi Greco.

I cacciatori di cifre continuarono tuttavia a trovare approssimazioni con un numero di cifre sempre maggiore: Callet 152 (1837), Rutherford 208 (1841), Clausen 248 (1847), Rutherford 440 (1853), Shanks 607 (1853) e 707 (1873).

Nel 1945 D.F. Ferguson calcolò 530 cifre di π con una formula che utilizzava arcotangenti e questo risultato fu il frutto di un intero anno di lavoro attraverso carta e penna, al ritmo medio di poco più di una cifra al giorno.

Nel 1947 Ferguson, con l'aiuto di una delle prime calcolatrici da tavolo, trovò 808 cifre di π . Nel 1948 Smith e Wrench trovarono la millesima cifra decimale. Nel 1949 G. Reitwiesner, J. von Neumann e N.C. Metropolis usarono il computer Eniac, con 19.000 valvole e centinaia di migliaia di resistori e capacitori, per calcolare 2037 cifre. Questo calcolo richiese solo settanta ore con una media di una cifra ogni due minuti.

Con l'avvento dei computer elettronici, nel 1954, si poterono calcolare 3089 cifre in soli tredici minuti (circa 4 cifre al secondo). Nel 1958 vennero calcolate le prime 704 cifre in soli 40 secondi, le prime 10.000 cifre in un'ora e quaranta minuti e nel 1961, con un *Ibm 7090*, furono trovate 100265 cifre con un tempo medio di 3 cifre al secondo.

Nel 1973 J. Guilloud e M. Bouyer trovarono la milionesima cifra e nel 1982 si trovò il valore di π fino all'8388608-esimo decimale in poco meno di sette ore.

La combinazione di computer sempre più potenti e dell'algoritmo di Gauss-Brent-Salamin¹ lanciarono i calcoli di π verso altezze stratosferiche e, in alcuni casi, le nuove tecniche di calcolo presero una differente direzione rispetto a quelle descritte precedentemente poiché si concentrarono sulla natura computazionale e probabilistica di Pi Greco. In realtà, la correlazione tra questa costante e la probabilità era stata già scoperta alla fine del 1700 dal matematico francese Georges-Louis Leclerc, conte di Buffon (1707-1788), ma le sue considerazioni furono riprese diversi anni più tardi da un altro matematico francese: Pierre-Simon Laplace (1749-1827) ed il metodo statistico di Buffon e Laplace fu sviluppato solamente nel 1900. Questo metodo, si basa su un algoritmo che genera una serie di numeri non correlati tra loro e che seguono la distribuzione di probabilità che, il fenomeno che si sta indagando, si suppone abbia. Questo metodo divenne noto come *Metodo Montecarlo*, ma con questo appellativo si individua, in realtà, un'intera classe di metodi computazionali basati sul campionamento casuale per ottenere risultati numerici.

Nel 1997 Kanada e Takahashi calcolarono e verificarono più di 51 miliardi di cifre decimali di π e, nel 2003, lo stesso Kanasa ha calcolato 1.241.100.000.000 cifre, utilizzando 64 computer Hitachi SR8000/MPP, in più di 600 ore.

¹L'algoritmo Gauss-Brent-Salamin, è una versione scoperta in modo indipendente dell'algoritmo di Gauss-Legendre; è un algoritmo che converge molto rapidamente (25 iterazioni producono 45 milioni di cifre decimali corrette) per il calcolo di Pi Greco. Il metodo è basato sui lavori di Gauss e Legendre e si basa sulla continua sostituzione di due numeri con la loro media aritmetica e geometrica per approssimare la loro media aritmetica-geometrica.

Dopo questo escursus sulla storia di pi greco, nelle sezioni successive, si approfondirà la biografia di alcuni personaggi che hanno avuto un ruolo significativo nella storia di Pi Greco, analizzando, accanto alla loro produzione matematica, anche la personalità ed il carattere, per riscoprire l'aspetto più umano di questi studiosi.

2.3 Archimede da Siracusa

Archimede da Siracusa fu uno tra i più brillanti matematici, fisici ed inventori della storia tanto che molti storici pensano che Newton facesse riferimento anche ad Archimede quando disse:

«Se ho visto più lontano degli altri, è perché sono salito sulle spalle di giganti.» [5, p. 62]

Eric T. Bell nel libro *I grandi matematici* [6] scrisse di lui che sembra abbia goduto presso i Greci e gli Arabi del Medioevo, la stessa considerazione e lo stesso rispetto di cui hanno goduto Gauss e Newton presso i loro contemporanei e successori rispettivamente nel XVIII e nel XIX secolo.

La biografia del personaggio di Archimede che viene tramandata e risulta familiare all'opinione comune è costruita a partire dalle opere di autori come Vitruvio e Plutarco, vissuti secoli dopo la sua morte, che trasmettono un'immagine dello scienziato molto spesso deformata dalla leggenda. La sua vita viene infatti ricordata attraverso numerosi aneddoti, talvolta di origine incerta, che hanno contribuito a costruire la figura di Archimede scienziato nell'immaginario collettivo odierno.

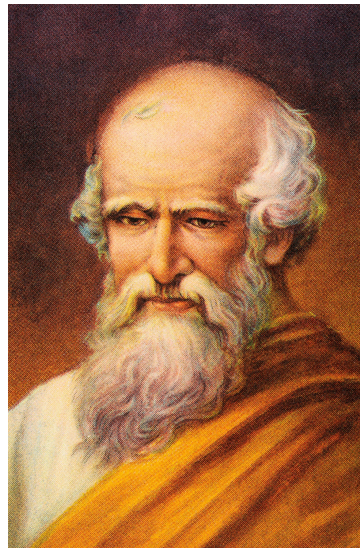


Figura 2.10: Archimede.

I dati biografici certi sono pochi come per tutte le biografie dei matematici greci ma, il caso di Archimede costituisce una parziale eccezione, poiché la sua vicenda personale si intreccia con un momento particolarmente drammatico della seconda guerra punica tra Roma e Cartagine, ovvero la caduta di Siracusa del 212 a.C.

Archimede nacque a Siracusa e morì proprio nel 212 a.C. durante il saccheggio romano.

Queste informazioni ci giungono principalmente grazie a Plutarco (45-125 d.C.), biografo, scrittore, filosofo e sacerdote. Nella sua opera *Vite degli uomini illustri*, lo storico racconta della vita di Archimede, considerato da molti come «il più brillante matematico, fisico ed ingegnere dell'antichità» [5, p. 62] ma soffermandosi principalmente sulla sua morte, avvenuta per mano di un soldato romano e narrata in ben tre versioni differenti. Bell nel libro citato, critica questo modus operandi:

«Plutarco, biografo tipico, ha pensato evidentemente che il re dei matematici era, storicamente, un personaggio di minore importanza del soldato romano di Marcello, e nelle sue "Vite di uomini illustri" ha insinuato la storia di Archimede come una sottile fetta di prosciutto in un enorme sandwich. Tuttavia, oggi, il ricordo glorioso di Archimede vince la memoria esecrata di Marcello².» [6, p. 28]

La leggenda della morte di Archimede è, in effetti, la più diffusa nell'iconografia: lo scienziato, talmente assorto in un problema geometrico da non accorgersi di quanto stava accadendo attorno a lui, venne ucciso da un soldato romano che gli aveva ordinato di seguirlo da Marcello, e che si era infuriato quando Archimede gli aveva chiesto di attendere fino a quando non avesse trovato una soluzione al suo quesito geometrico.



Figura 2.11: Guillaume Courtois, La morte di Archimede, XVII secolo, Olio su tela, Ariccia, Museo del Barocco.

Secondo la narrazione dei fatti di Plutarco, il comandante dei Romani, Marcello, era contrariato dal gesto compiuto dal soldato tanto che, alla notizia dell'uccisione di Archimede, avrebbe distolto lo sguardo dal soldato in senso di disprezzo e avrebbe voluto onorare i parenti dello scienziato per il torto subito. Questa idea che Marcello si fosse rammaricato per la morte dello scienziato apparve per la prima volta nel secolo successivo in uno scritto di Cicerone e sembra che allontanandosi temporalmente dai fatti, le narrazioni sulla morte di Archimede vedano le responsabilità dei Romani stemperarsi e il comportamento di Marcello risultare sempre più encomiabile [40].

²Marco Claudio Marcello (268 a.C.-208 a.C.) è stato un politico e militare romano, console per cinque volte, vincitore dei Galli Insubri. Egli militò durante la seconda guerra punica, dirigendo la ripresa di Roma dopo la disfatta di Canne. Soprannominato la "spada di Roma", fu il conquistatore di Siracusa iniziata nel 212 a.C., guadagnando ai Romani il possesso della Sicilia. Venne ucciso nel 208 a.C. durante uno scontro con reparti di cavalleria cartaginese di Annibale nei pressi di Venosa.

L'attendibilità di questa storia è stata messa in discussione e la narrazione edificante per cui il console Marcello avrebbe voluto mostrare la sua clemenza salvando la vita del matematico sembra in realtà un travestimento di una verità molto più bieca.

Secondo Eric T. Bell dalla narrazione di questa vicenda si delinea una civiltà di stampo utilitaristico che si abbatté contro qualche cosa di superiore, Roma era un «uragano di vittorie e di porra imperiale, [che] dopo aver presso a poco distrutto Cartagine, si abbatteva sulla Grecia per spezzare la sua magnifica fragilità.» [6, p.28]

La nascita di Archimede viene fatta risalire al 287 a.C. poiché secondo l'erudito bizantino Joannes Tzetzes (XII sec.) Archimede sarebbe morto a 75 anni, età probabilmente stimata avendo cercato di quantificare il dato, riportato da più autori, che lo scienziato fosse morto vecchio [40].

Quasi certamente Archimede era figlio dell'astronomo Fidia e questa informazione viene riportata da un passo di Archimede stesso, incomprensibile nei manoscritti, che il filologo Friedrich Blass nel 1883 ha interpretato attraverso le parole «mio padre Fidia». Plutarco, inoltre, afferma che oltre che amico, Archimede fosse un parente del tiranno di Siracusa Gerone, anche se questa informazione viene considerata da alcuni in contraddizione con un passo di Cicerone nel *Tusculanae disputationes* [40].

Archimede era dunque un aristocratico ed il suo temperamento rispecchiava la sua estrazione sociale e ciò era possibile riscontrarlo nel suo atteggiamento riguardo alle scienze che oggi prendono il nome di applicate poiché, nonostante fosse uno tra i più grandi inventori dell'epoca e di tutti i tempi, egli nutriva un certo disprezzo verso le sue invenzioni pratiche considerandole sordidamente commerciali.

All'epoca, infatti, l'opinione diffusa nei riguardi della meccanica applicata e di ogni arte utilitaria era che queste fossero ignobili e volgari di fronte all'eleganza e alla sottigliezza delle arti che non erano dettate dalle necessità pratiche della vita [40].

Questo snobismo intellettuale venne promosso anche da Plutarco che nei suoi testi elogiava il pensiero e l'intelletto di Aristotele e Platone e, come loro, considerava che la sperimentazione fosse adatta solo agli schiavi.

Un'altra informazione certa riguardo la vita di Archimede è che egli soggiornò ad Alessandria d'Egitto. Diodoro Siculo riferisce che Archimede aveva inventato la coclea (vite idraulica di Archimede) quando si trovava in Egitto.

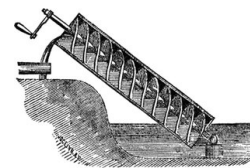


Figura 2.12: La vite di Archimede.

Alessandria d'Egitto in quel periodo era il più grande centro di vita politica, commerciale e culturale e attraeva un gran numero di intellettuali grazie anche alla costruzione della biblioteca pubblica più grande dell'epoca, fatta costruire dai Tolomei con l'obiettivo di raccogliere la conoscenza di tutto il mondo antico.

Il primo direttore del Museo fu un filosofo e letterato: Zenodoto da Efeso. A lui susseguirono altri letterati, finché con l'arrivo di Eratostene, amico e collega di Archimede, la Biblioteca di

Alessandria si aprì alle scienze, facendo diventare questa città un vero e proprio centro scientifico.

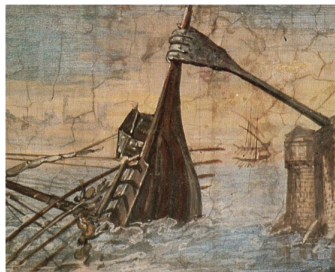
La cultura ellenistica rifletteva il profondo mutamento storico e il nuovo ruolo dell'intellettuale: si frantumò il senso dell'unità della cultura, per cui da grandi sistemi filosofici onnicomprensivi si passò allo sviluppo specialistico e autonomo di ogni singola scienza. Il progresso scientifico beneficiò notevolmente dello specialismo e della moltiplicazione degli strumenti e delle attrezzature (musei, orti botanici, laboratori, osservatori), che consentirono la fioritura di scoperte, classificazioni e sistemazioni in ogni campo, dalla filologia all'astronomia, dalla matematica (Euclide, Archimede) alla geografia (Eratostene).

Archimede contribuì ad avanzare la conoscenza in settori che spaziano dalla geometria all'idrostatica, dall'ottica alla meccanica.

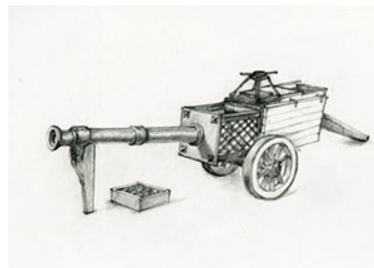
Scoprì e sfruttò i principi di funzionamento delle leve e il suo stesso nome è associato a numerose macchine belliche e dispositivi (si veda Figura 2.13).

Polibio sottolinea l'importanza del contributo di Archimede alla difesa della città di Siracusa assediata dai romani, scrivendo nella sua opera *Historiae*, VIII, 7 che:

«L'intelligenza di un solo uomo, convenientemente rivolta a determinati fini, mostra così di essere qualcosa di grande e meraviglioso. I Romani, che disponevano di tante forze per terra e per mare, pensavano di potersi impadronire subito della città se qualcuno avesse tolto di mezzo un solo vecchio siracusano; presente lui, non osavano attaccarla con sistemi dai quali Archimede potesse difenderla.»



Artiglio di Archimede



Architrone

Figura 2.13: Macchine belliche

Secondo la tradizione

«Archimede, è il perfetto modello da museo popolare di un grande matematico.» [6, p. 28]

Come Newton e Hamilton non mangiava quando era immerso nei suoi calcoli ed era negligente riguardo l'abbigliamento [6] e prova ne è una delle più famose leggende sul suo conto rimasta celebre nei secoli che riguarda la scoperta del primo principio dell'idrostatica.

La leggenda narra che Gerone avesse chiesto ad Archimede di stabilire se la corona che gli era stata data da un orefice fosse d'oro o d'argento. Archimede si trovava nella vasca da bagno e osservava il suo corpo galleggiare quando scoprì che un corpo immerso in un liquido perde in peso tanto quanto è il peso del volume di liquido spostato. Si tramanda che si slanciò fuori dal bagno correndo nudo per le strade urlando «Eureka! Eureka!» (Ho trovato!) per comunicare a Gerone la scoperta del Primo Principio dell'Idrostatica che ancora oggi porta il suo nome [6, p. 28].

Da questo suggestivo racconto possiamo dedurre che, Archimede, viene presentato come uno scienziato disinteressato al mondo concreto e spesso assorto in considerazioni astratte e teoriche tanto da perdere completamente il contatto con la realtà.

Questo stereotipo è piuttosto diffuso nell'opinione comune e la caratterizzazione attribuita ad Archimede viene spesso indirizzata anche a scienziati a lui molto successivi tra cui, per esempio, Weierstrass. Plutarco narra in diverse occasioni che non era possibile dare ad Archimede una matita ed un pezzo di carta poiché egli iniziava a disegnare senza tregua, tanto che i servi erano spesso costretti con la forza a trascinare Archimede a lavarsi, mentre lui continuava a tracciare figure geometriche dove poteva, in mancanza d'altro anche sul proprio corpo. Plutarco insiste anche sul disinteresse di Archimede verso le sue stesse invenzioni, che avrebbe considerato solo un «sottoprodotto volgare della scienza pura, che sola lo interessava veramente» [40].

Tralasciando gli importanti contributi apportati da Archimede alla meccanica, Archimede scoprì dei metodi generali per trovare le aree delle figure piane curvilinee e i volumi dei corpi limitati da superfici curve, enunciò in meccanica i postulati fondamentali scoprendo le leggi della leva e applicando questi principi al calcolo delle aree e dei centri di gravità. Egli, attraverso le sue scoperte creò tutta la scienza dell'idrostatica e fissò anche il valore di π fra $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}$ grazie ad un metodo che venne utilizzato, da lui in poi, per oltre 1600 anni per l'approssimazione Pi Greco. Il metodo di calcolo di Pi Greco verrà approfondito nella Sezione 2.3.1

Non si è a conoscenza del numero di opere di Archimede siano andate perdute, una tra le più importanti, *Il metodo*, fu ritrovata solamente nel 1906 da J. H. Heiberg un erudito storico della matematica greca. Ne *Il metodo* Archimede spiega al suo amico Eratostene come, paragonando col pensiero una figura o un solido di cui non si conosce l'area o il volume ad un altro conosciuto, si può venire condotti alla conoscenza dell'elemento cercato.

I suoi libri esistenti: *Sulle spirali*, *Sulla misura del cerchio*, *La quadratura della parabola*, *Dei conoidi e degli sferoidi*, *Della sfera e del cilindro*, *Libro dei lemmi* e altri, non hanno eguali in nessun altro libro prodotto nell'antichità [5].

Il metodo di Archimede precedette di quasi 2000 anni le teorie di Newton e Leibniz. Egli fu un precursore del calcolo integrale e anticipò in uno dei suoi problemi anche l'invenzione del calcolo differenziale dei due matematici citati.

Questi due tipi di calcolo riuniti costituiscono il calcolo infinitesimale, definito come lo strumento più potente concepito dall'uomo per l'esplorazione matematica dell'universo [5].

Il problema per il quale impiegò il calcolo differenziale era quello della costruzione di una tangente in un punto dato della sua celebre spirale.

Secondo quanto spiegato da Archimede, se si conosce l'angolo che forma la tangente con una retta data, si può facilmente trattare la tangente, perché si tratta allora di condurre da un punto dato una parallela a una direzione data. Il problema consiste nel trovare l'angolo in questione ed, espresso in linguaggio geometrico, questo costituisce il problema principale del calcolo differenziale moderno.

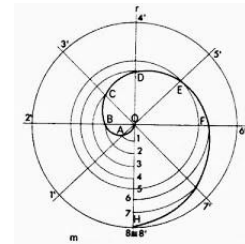


Figura 2.14: La spirale di Archimede.

2.3.1 Archimede e Pi Greco

*«Qual è 'l geometra che tutto s'affigge
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond'elli indige,
tal era io a quella vista nova:
veder volea come si convenne
l'imago al cerchio e come vi s'indova.»*

Dante, Paradiso, XXXIII, 133 – 138

Archimede fu anche il primo a fornire un metodo per l'approssimazione di π che potesse raggiungere qualsiasi grado di precisione. Questo metodo di approssimazione si basa sul metodo di esaustione che già i Greci avevano sviluppato per il calcolo delle aree e dei volumi. La novità del procedimento seguito da Archimede, rispetto alle diverse approssimazioni di Pi Greco fatte dai suoi predecessori babilonesi, egiziani o cinesi, è che il suo è un procedimento iterativo, grazie al quale si possono ottenere approssimazioni sempre migliori ripetendo sempre lo stesso processo. Tanto più grande è il numero dei lati dei poligoni considerati, tanto migliori saranno le approssimazioni ottenute.

L'approssimazione di π si ritrova nell'opera di Archimede *La misura del cerchio*. Alcuni studiosi ritengono che l'opera non sia autentica poiché nel linguaggio usato nel trattato non sono presenti accenni di dialetto siculo-dorico, lingua parlata dallo scrittore e le argomentazioni che vengono presentate non sembrano essere tanto accurate in confronto alle altre opere del matematico [28]. Sembra, inoltre, ci sia giunta solamente una piccola parte che costituiva un'opera più grande citata da Pappo e chiamata *Sulla circonferenza del cerchio* e i teoremi sembrano essere riportati in un ordine non corretto poiché, per capire il secondo, è necessario spiegare prima il terzo ma, grazie a queste proposizioni, Archimede viene ricordato per essere riuscito a trovare un valore di Pi Greco molto vicino a quello moderno [28].

La misura del cerchio

L'opera *La misura del cerchio* presenta tre proposizioni con le rispettive dimostrazioni. La Proposizione 1 utilizza il metodo di esaustione per l'approssimazione dell'area del cerchio.

Proposizione 1

L'area di un cerchio è uguale all'area di un triangolo rettangolo la cui altezza è uguale al raggio del cerchio e la base è uguale alla lunghezza della circonferenza.

[19, p. 225]

Il testo della Proposizione 2 non può essere soddisfacente, ed Archimede non può averlo posto prima della Proposizione 3, in quanto l'approssimazione data dipende dal risultato della terza proposizione.

Proposizione 2

Il cerchio ha rispetto al quadrato del diametro il rapporto che 11 ha rispetto a 14.

[19, p. 227]

Archimede determina due approssimazioni, una per eccesso e una per difetto, per la lunghezza di una circonferenza, considerando rispettivamente i poligoni regolari circoscritti e quelli inscritti alla circonferenza stessa.

Egli parte dall'esagono regolare e raddoppia successivamente il numero dei lati fino a giungere ai poligoni regolari, circoscritti e inscritti, di 96 lati e calcola con essi le approssimazioni cercate.

Nella dimostrazione Archimede utilizza spesso la Proposizione 3 contenuta nel Libro VI degli *Elementi* di Euclide (che noi conosciamo come il Teorema della bisettrice di un angolo interno ad un triangolo), anche se poi sviluppa una procedura sostanzialmente algebrica per calcolare i perimetri dei poligoni inscritti e circoscritti. Nelle sue spiegazioni Archimede non sempre è molto chiaro e talvolta salta diversi passaggi.

Proposizione 3

La circonferenza di ogni cerchio è tripla del diametro e lo supera ancora di meno di $\frac{1}{7}$ del diametro, e di più di $\frac{10}{71}$.

[19, p. 228]

Come già richiamato, Archimede riprendendo le idee di Antifonte e Brisone, per approssimare il rapporto tra circonferenza e diametro, creò una successione di valori inscrivendo e circoscrivendo ad un cerchio dei poligoni regolari di n lati.

Il processo iterativo di Archimede comincia con l'inscrivere e circoscrivere un esagono regolare ad una circonferenza di raggio unitario (si veda Figura 2.15).

L'esagono inscritto è formato da sei triangoli equilateri: per costruzione gli angoli devono essere di 60° ed i lati di questi triangoli sono uguali al raggio della circonferenza. Dunque, il perimetro dell'esagono inscritto risulta essere $P_{\text{inscritto}} = 6r$.

L'esagono circoscritto ha tutti i lati tangenti alla circonferenza, dunque il triangolo segnato come $\widehat{AOB}$ in Figura 2.15 risulta essere un triangolo rettangolo poiché il raggio del cerchio è perpendicolare al lato dell'esagono in questione.

Per costruzione dunque si ha che l'angolo $O\hat{A}B$ è retto (90°) e l'angolo in $B\hat{O}A$ misura 30° .

Utilizzando la trigonometria della tangente si trova che:

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{OA}} = \tan(B\hat{O}A) = \tan(30^\circ)$$

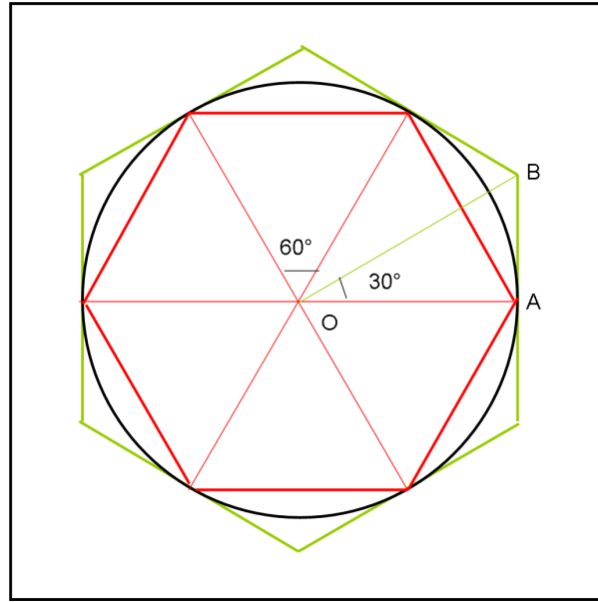


Figura 2.15: Circonferenza con esagono inscritto e circoscritto.

Da cui, sapendo che $\overline{OA} = r$ si ricava:

$$\overline{BA} = \overline{OA} \cdot \tan(30^\circ) = r \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Si osservi dalla Figura 2.15 che il perimetro dell'esagono circoscritto misura 12 volte $\overline{BA}$ (metà del lato) e cioè

$$P_{\text{circoscritto}} = 12 \cdot \overline{BA} = 12 \cdot r \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 4 \cdot r\sqrt{3} = 6.9282r$$

La lunghezza della circonferenza deve essere compresa tra il perimetro dei due esagoni $P_{\text{inscritto}} < C < P_{\text{circoscritto}}$, ossia:

$$6r < C < 6.9282r$$

E dunque se si definisce π come il rapporto tra circonferenza e diametro si trova che $C = \pi \cdot 2r$ e quindi

$$6r < \pi \cdot 2r < 6.9282r$$

Da cui dividendo tutto per $2r$ si ottiene un'approssimazione di π come:

$$3 < \pi < 3.4641$$

Questa approssimazione, rispetto alle conoscenze di oggi non è molto precisa ma si intuisce che aumentando il numero n di lati di entrambi i poligoni, i perimetri dei due poligoni diventano sempre più prossimi alla circonferenza che si trova tra di loro. Archimede raddoppiò successivamente il numero dei lati fino a giungere a poligoni regolari, circoscritti e inscritti, di 96 lati e con essi calcolò le approssimazioni cercate.

L'approssimazione di π migliora utilizzando il metodo di esaustione con il dodecagono, inscritto e circoscritto, e diventa:

$$3.106 < \pi < 3.215$$

e proseguendo nel processo iterativo, Archimede arrivò all'approssimazione $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$ indicata nella Proposizione 3 e cioè una stima di Pi Greco data dai valori:

$$3.140845 < \pi < 3.142857$$

Questa approssimazione risulta essere corretta alla seconda cifra decimale e seppur questo risultato sembri ai nostri occhi piuttosto scarso, è in realtà strabiliante se si considera di quali strumenti disponeva Archimede all'epoca.

Il nome "metodo di esaustione" illustra la base del procedimento: esso consiste nel riempire, con figure note sempre più piccole, lo spazio a disposizione fino a che questo venga "esaurito". In tal modo la somma delle aree delle figure note approssima l'area cercata. Ci rendiamo subito conto che manca ancora un qualcosa a questo procedimento per renderlo praticamente perfetto: il passaggio al limite. La tesi finale si dimostrava con un procedimento "per assurdo". Se oggi ripercorressimo la stessa dimostrazione con gli strumenti moderni di analisi, sostituiremmo il "riempire" e la "dimostrazione per assurdo" con due successioni convergenti e con il calcolo del loro limite comune. George Gheverghese Joseph nel libro *C'era una volta un numero*, rispetto al metodo di Archimede afferma:

«Archimede basò il suo metodo sulla semplice osservazione che, quando un cerchio è racchiuso tra 2 poligoni di n lati, se si aumenta n , la differenza tra la circonferenza del cerchio e i perimetri dei poligoni inscritti e circoscritti diminuisce di conseguenza, così che, in ultima istanza, aumentando a dismisura il numero dei lati, i perimetri dei poligoni e del cerchio finirebbero con il diventare identici. In altre parole, aumentando n , la differenza di area tra i poligoni e il cerchio dovrebbe gradualmente esaurirsi...»

2.4 Il cardinale Niccolò Cusano

Niccolò Cusano nacque a Kues, nel 1401, da una ricca famiglia di battellieri, mercanti e armatori. Il primo dato certo su Cusano è la sua frequenza della Facoltà delle Arti liberali dell'Università di Heidelberg, infatti il primo documento in cui compare il suo nome è proprio quello di immatricolazione datato 22 Giugno 1416 [8], ma non si hanno informazioni per quanto riguarda il completamento degli studi poiché nella sua autobiografia Cusano non riporta alcun cenno a questo periodo [13].

Dopo un anno e mezzo di studi ad Heidelberg, Cusano si trasferì a Padova dove iniziò gli studi di diritto laureandosi nel 1423. Questi sono anni fondamentali per la formazione di Cusano perché a Padova la facoltà giuridica godeva di grande fama e nello stesso periodo, la facoltà delle arti vantava la presenza di professori di grande spessore che Cusano ebbe modo di ascoltare. Sempre a Padova, inoltre, gli studi medici, verso cui Cusano mostrerà sempre grande interesse, erano

particolarmente intensi.

Per quanto riguarda la cultura scientifica, Padova spiccava anche per questioni matematiche ed astronomiche con dibattiti molto animati che echeggiavano a livello europeo, grazie agli scambi (da sempre) attivi tra i maestri di Padova e quelli di Oxford e Parigi. E fu proprio in questo fervido clima culturale, che faceva di Padova uno dei centri più importanti in Europa, che il giovane Cusano iniziò la sua formazione intellettuale ed ebbe occasione di stringere rapporti con alcuni umanisti, diventando un attivo promotore della cultura umanistica.

A Padova conobbe Paolo dal Pozzo Toscanelli (1397-1482) matematico, astronomo e cartografo fiorentino al quale sarà legato da profonda amicizia per tutta la vita e al quale, nel 1445, dedicherà il *De geometricis transmutationibus*. Toscanelli fu anche il corrispondente con il quale Cusano dialogò per tutta la vita sulle questioni di ordine matematico; Toscanelli è ricordato anche tra i più severi critici dei lavori di Cusano, ma la loro profonda amicizia non si sciolse mai tanto che, Toscanelli, lo assistette personalmente nella malattia e sul letto di morte.



Figura 2.16: Niccolò Cusano.

Nel 1424, dopo una presenza piuttosto breve a Roma, Cusano tornò in Germania ed iniziò a lavorare come legale ed esperto di diritto canonico presso la curia di Treviri. Nel 1425 si iscrisse all'università di Colonia, il più grande centro intellettuale tra le province tedesche, e qui trascorse un periodo fondamentale per la formazione filosofica e teologica. In questo periodo conobbe anche il catalano Raimondo Lullo (1232-ca. 1315), un pensatore che eserciterà un influsso notevole su molti aspetti della sua speculazione, per esempio l'uso di simboli geometrici per la rappresentazione di concetti metafisici.

Questi furono gli anni in cui Cusano si avvicinò allo studio di testi greci e latini, compiendo diverse ricerche nei monasteri tedeschi scoprendo tra le tante opere anche un codice contenente 12 commedie sconosciute di Plauto che consegnò alla Biblioteca Vaticana.

Il Concilio di Basilea del 1431, fu uno degli eventi storici significativi per la vita di Cusano: gli permise di entrare in contatto con alcuni importanti umanisti italiani tra cui Tommaso Parentucelli, futuro papa Niccolò V, al quale Cusano dedicherà l'opera matematica *De mathematicis complementis* del 1453, inoltre, in questo concilio, si trattava la risoluzione dello scisma della Chiesa latina da quella ortodossa e si discuteva di una necessaria e possibile riforma della chiesa, riforma alla quale Cusano ambiva e a cui si dedicò per tutta la vita.

Negli anni seguenti, Cusano fu sempre impegnato in intense attività politiche ed ecclesiastiche, specialmente in Germania, ma continuò a occuparsi della cura delle anime e della salvaguardia dei suoi benefici ecclesiastici, impegnandosi anche nell'attività legale e di negoziazione, senza però interrompere la costante applicazione allo studio e alla scrittura. Nel frattempo iniziò anche il suo interesse verso l'astronomia dedicandosi alla riforma del calendario con la scrittura del *De reparatione calendarii* [13].

A partire dal 1445 per circa un quindicennio, Cusano si cimentò in vari scritti che trattano questioni e problemi di carattere strettamente geometrico-matematico: al 1445 risalgono il *De geometricis transmutationibus* e il *De arithmetice complementibus*.

Nel 1450, l'anno del Giubileo, Cusano si recò a Roma dove ricevette dall'amico Tommaso Perentucelli, salito al soglio pontificio col nome di Niccolò V, il cappello cardinalizio, e venne nominato cardinale del titolo di S. Pietro in Vincoli [8] per poi essere nominato vescovo della sede vacante a Bressanone.

Nel 1453, sconvolto dalla notizia della conquista di Costantinopoli da parte dei musulmani guidati da Muhammad II (1432-1481), Cusano scrisse il *De pace fidei*, un'opera nella quale immaginava, sotto forma di una visione, un concilio celeste di tutti i rappresentanti delle diverse tradizioni religiose poiché riteneva che l'unico modo per salvare la cristianità dall'avanzata dei mussulmani fosse quello dell'incontro tra religioni diverse: proponeva il tema dell'unità nella molteplicità [8] considerata come l'unica possibilità di porre fine alle guerre e di assicurare una pace perpetua della fede [13].

Nella diocesi di Bressanone egli cercò di introdurre provvedimenti di riforma che crearono un contrasto con il duca d'Austria Sigismondo. Questi contrasti si inasprirono quando Cusano ottenne dal papa la disponibilità piena delle entrate per il riscatto delle locazioni di terreni e castelli ed ebbe riconosciuta dall'imperatore la proprietà delle risorse minerarie. Ciò lo pose in conflitto non solo col duca ma anche con la nobiltà locale.

Nonostante gli anni agitati del suo episcopato a Bressanone, riuscì a non interrompere le sue attività di studio e tra il 1453 e il 1454 compose il *De mathematicis complementis* (la prima edizione, che consiste di un solo libro, venne compiuta a Bressanone nel settembre del 1453, la seconda edizione, che include due libri, fu ultimata nel novembre 1454) [13]. Nel 1457 si interessò sempre più ai problemi matematici e scrisse il *Dialogus de circuli quadratura*.

Nello stesso anno, dopo il lungo conflitto tra il cardinale e il duca del Tirolo Sigismondo e dopo aver subito alcuni tentativi di agguato, diverse minacce di morte e tentativi di avvelenamento, Cusano si convinse della necessità di rifugiarsi nel castello di Andraz Buchenstein.

Nel 1459, in assenza del papa, tentò senza grandi risultati di realizzare una *reformatio generalis* della Chiesa, ma quest'ennesimo fallimento gettò il cardinale nel più triste sconforto e a questo periodo di profonda delusione risale l'ultimo scritto matematico di Cusano, l'*Aurea propositio in*

mathematicis.

Durante il viaggio da Roma ad Ancona, dove egli cercava di raccogliere truppe per la crociata lanciata dal papa Pio II per contrastare la minaccia turca, Cusano morì a Todi. Il suo corpo fu sepolto a Roma, nella chiesa di San Pietro in Vincoli, dove si trova ancora oggi il suo monumento funerario (si veda Figura 2.17).



Figura 2.17: Monumento funebre del cardinale Niccolò Cusano presso la chiesa di S. Pietro in Vincoli, Roma.

Il suo cuore, invece, così come aveva disposto, fu sepolto a Kues nella cappella del Cusanusstift che egli aveva fondato (come parte di un lascito) nel 1458. Si trattava di un ospedale di carità, per 33 persone (in memoria degli anni di Cristo), di cui facevano parte 6 nobili, 6 sacerdoti e 21 persone comuni [13].

Nel Cusanusstift vi è tutt'oggi una delle più ricche biblioteche europee, la Biblioteca dell'Ospedale di San Nicola a Bernkastel-Kues, punto di riferimento degli studi cusani, dove sono custodite tutte le opere di Cusano e altri 1841 manoscritti, divisi in argomenti, che spaziano dalla teologia pastorale alla psicologia, dalla letteratura mistica alla cosmologia.

Da questa biografia riassunta nelle linee più interessanti e generali emerge lo spessore intellettuale ed umano della figura di Niccolò Cusano, celebrata anche da alcuni versi di Bernardino Baldi (1533-1617), matematico e poeta italiano:

«[Niccolò Cusano] fu acutissimo disputante ne la filosofia aristotelica, [...] non fu genere alcuno di scienza nel quale egli non fosse meraviglioso e sopra il credere di tutti eruditissimo. Di bontà di costumi, dice Schedelio, fu mentre visse, tale che pochi in quei tempi furono migliori di lui; fu acerbissimo nemico dei vitij, avversario de le ambitioni, d'integrità d'animo imutabile, patientissimo fino all'estrema vecchiezza di tutte l'honeste fatiche, benefico e grato a meraviglia, eloquente poi di maniera e copioso, che postosi a l'improvviso a discorrere di qual si voglia cosa, pareva che a quella solamente e non ad altra egli havesse atteso.» [4, p. 257]

2.4.1 Filosofia e matematica

Cusano risulta un personaggio chiave della cultura occidentale grazie ai molti ed importanti contributi che egli diede in ambito filosofico, giuridico, religioso e politico [13]. L'interesse di Cusano per la matematica percorse tutto il suo iter speculativo e risulta molto evidente la forte impronta matematizzante del suo pensiero: utilizzò nozioni, figure, definizioni geometrico-matematiche in chiave simbolica, al fine di cogliere le verità che trascendono il piano razionale.

Il *De docta ignorantia*, trattato di carattere prettamente filosofico, costituisce la sua maggiore opera. Sull'idea della "dotta ignoranza", di origine neoplatonica e agostiniana, si basa una vera e propria dottrina della conoscenza. Questa dottrina pone al centro la finitezza del conoscere umano e quindi la sua inadeguatezza a conoscere un qualsiasi concetto adeguato, sia dell'infinità del divino, sia della verità delle cose finite [11]:

«nessun'altra dottrina più perfetta può sopraggiungere all'uomo (anche più diligente) oltre quella di scoprire di essere dottissimo nella sua propria ignoranza: e tanto più uno sarà dotto, quanto più si saprà ignorante.» [De docta ignorantia I, 1]

Il punto di partenza della riflessione filosofica di Cusano sul massimo assoluto è che

«ogni ricerca è comparativa, in quanto impiega come mezzo la proporzione [e] perciò l'infinito come infinito, sfuggendo a ogni proporzione, è ignoto.» [De docta ignorantia I, 1]

Ciò significa che, secondo Cusano, la mente umana generalmente arriva alla conoscenza delle cose rapportando il noto all'ignoto, ma questo vale solo per gli elementi finiti e terreni poiché per quanto riguarda Dio, considerato infinito e quindi inafferrabile, non esistono termini di confronto e quindi non è possibile usare la ragione per conoscerlo ma soltanto l'approssimazione. Questo significa che l'uomo potrà parlare di Dio solamente attraverso qualcosa che si avvicina ma che non lo raggiungerà mai.

Per esemplificare questa posizione, Cusano, si vale del

«grandissimo aiuto della matematica nell'apprendimento delle cose divine» [De docta ignorantia I, 9]

riconnettendosi così alla tradizione pitagorica [11].

Egli infatti utilizzava come termine di paragone tra la conoscenza umana e la verità (possibile solo in Dio) il rapporto che c'è tra un poligono ed il cerchio.

Il cerchio al pari dell'infinito non è misurabile ma è esso stesso la misura, dunque, la nostra conoscenza (poligono) per avvicinarsi alla verità (cerchio) deve aumentare infinitamente i suoi lati utilizzando l'intelletto e può arrivare molto vicino ad essa ma non potrà mai arrivare ad essere identica, così come il poligono non sarà mai uguale alla circonferenza, poiché per la ragione umana la coincidenza dei contraddittori (*coincidentia oppositorum*) risulta impossibile.

Lo spazio di scarto tra verità e conoscenza sarà colmato dalla congettura e, pertanto, il sapere umano deve essere impiegato nell'inesauribile sforzo di avvicinarsi sempre più alla verità, analogamente al procedimento dell'approssimazione poligonale al cerchio [11].

La mente umana è una forza essenzialmente creativa che produce "da sé" i contenuti, sempre congetturali, del suo sapere. Tali contenuti, ossia le nozioni, i concetti e le operazioni con i quali la mente cerca di quadrare il cerchio, vengono tratti, dispiegati e sviluppati a partire dalla mente stessa. La mente, attraverso il potere che ha di tentare di far coincidere gli opposti, ossia di farli tendere all'*aequalitas*, assomiglia a Dio. Questa somiglianza però non appartiene ai prodotti della mente che sono inevitabilmente destinati alla *propinquitas* (approssimazione) e alla *impraecisio* (imprecisione).

Il problema matematico della quadratura del cerchio ha una natura paradossale perché illumina la mente della sua costitutiva opacità e la matematica, mostrando (alla ragione che la utilizza) l'impossibilità di pervenire alla precisione assoluta costituisce, per così dire, la condizione della possibilità di questa impossibilità e le ingegnose *transmutationes geometricae* attraverso le quali Cusano cerca instancabilmente di giungere alla perfezione matematica, cioè alla quadratura del cerchio, dimostrano l'impossibilità di dimostrare la quadratura del cerchio perché l'*aequalitas*, nella quale gli opposti coincidono, è visibile solo trascendendo qualsiasi comparativa proporzione.

A questo esercizio di pensiero dell'infinito geometrico vengono dedicati molti scritti di carattere strettamente matematico, in particolare questi si concentrano proprio sul tema della quadratura del cerchio che Cusano cerca di risolvere con interessanti argomentazioni e procedure logico-matematiche e che, dunque, costituiscono un tassello importante, ma alquanto trascurato, della storia della matematica moderna. Alla sua dimostrazione della quadratura del cerchio verrà dedicata la sezione successiva e una delle attività proposte nell'unità didattica (si veda Appendice A).

2.4.2 Cusano e la quadratura del cerchio

Della quadratura del cerchio Cusano si occupò nell'arco di un quindicennio, tra il 1445 e il 1459, nel quale riuscì a dedicarsi allo studio, seppur in quel periodo la sua vita fosse tormentata da bufere politiche, conflitti territoriali, progetti di riforma e delusioni personali.

Tutti gli scritti matematici di Cusano gravitano intorno alla questione della quadratura del cerchio, problema di origine classica a cui nessuno, come sostiene Cusano ha saputo approssimarsi più di quanto abbia fatto Archimede (ca. 287 a.C.–212 a.C.).

In più passi il cardinale afferma che il motivo per cui gli antichi non sono riusciti a quadrare il cerchio è dovuto al fatto che essi si sono impegnati invano a cercare la quadratura del cerchio partendo dal cerchio (ignoto), anziché dal quadrato (noto).

«Gli antichi hanno cercato l'arte di rendere il cerchio uguale al quadrato [...]; nell'uguaglianza hanno presupposto la coincidenza del cerchio e del quadrato [...], ma hanno fallito poiché la ragione non ammette la coincidenza degli opposti. La coincidenza infatti doveva essere cercata intellettualmente.»

Per pervenire alla conoscenza di ciò che è ignoto occorre muovere da ciò che è noto e dunque il primo grande errore commesso dagli antichi, secondo Cusano, fu quello di voler raggiungere la quadratura del cerchio partendo proprio dal cerchio (si veda il metodo di esaurimento di Archimede,

Sezione 2.3.1) che al pari dell'infinito, non è misurabile, ma è esso stesso la misura. Per questo Cusano cercò di mettere in atto un metodo diverso che si distinguesse da quello di esaustione. Oltre a questo errore di prospettiva, Cusano individuò un'altra motivazione per giustificare il fallimento di coloro che lo precedettero: per far sì che il quadrato sia uguale al cerchio è necessario che il quadrato si identifichi con il cerchio. Tale identità, però, non può essere raggiunta tramite la ragione, la quale giudica impossibile la coincidenza dei contraddittori, ma solo intellettualmente, ossia mediante una superiore visione mentale che scorga tale coincidenza all'infinito, attraverso la serie illimitata di determinazioni finite. L'intuizione intellettuale è così in grado di cogliere ciò che non esiste come limite concreto [13].

Il ragionamento di Cusano riguardo la quadratura del cerchio è esposto in maniera completa nel *De mathematicis complementis* (si veda l'Appendice A in cui è riportata la traduzione di Federica de Felice delle prime pagine dell'opera [13, pp. 225-229]).

L'opera è dedicata all'amico Tommaso Parentuncelli, papa Niccolò V, che viene elogiato nell'introduzione. Dopodiché il discorso di Cusano continua attraverso la spiegazione del perché gli antichi non siano mai riusciti a risolvere il problema ed in particolare parla della figura di Archimede e dei suoi due metodi: quello di esaustione e quello della spirale.

La dimostrazione vera e propria comincia con la definizione di alcuni elementi dei poligoni (il cerchio è un poligono con infiniti lati) fondamentali per lo sviluppo del suo ragionamento:

- il centro cioè il punto equidistante dalla metà e dall'estremità dei lati
- la prima linea, cioè il semidiametro del cerchio inscritto al poligono, è la linea condotta dal centro al punto medio dei lati
- la seconda linea, è il semidiametro del cerchio circoscritto al poligono, cioè la linea condotta dallo stesso centro fino all'estremità di un lato, cioè ad un angolo qualsiasi.

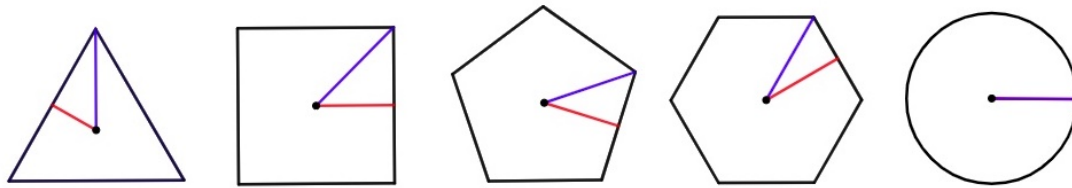


Figura 2.18: Prima linea in rosso e seconda linea in viola nei poligoni regolari con 3, 4, 5, 6, ∞ lati.

Il ragionamento poi procede nel modo seguente: si indica con p_n la prima linea del poligono con n lati e con s_n la seconda linea. Si osserva che in ogni poligono la prima linea è più lunga della seconda linea, poiché per il teorema di Pitagora sappiamo che il quadrato della prima linea contiene il quadrato della seconda e che la differenza $s_n - p_n$ diminuisce al crescere del numero dei lati.

Cusano considera i poligoni regolari isoperimetrici in una successione crescente rispetto al numero

dei lati, dunque il triangolo equilatero è il primo delle figure ed in esso la prima e la seconda linea hanno la differenza massima rispetto tutti gli altri poligoni: $s_3 - p_3 = \max\{s_n - p_n : n = 3, \dots, \infty\}$. Questo perché il triangolo equilatero ha la prima linea che è più corta rispetto a tutti gli altri poligoni isoperimetrici mentre la seconda linea del triangolo è la più lunga. Nel cerchio, invece, la prima e la seconda linea coincidono tra loro e con il raggio del cerchio ($p_\infty = s_\infty = \text{raggio}$) come si vede nella Figura 2.18 e questo perché «il centro si trova a uguale distanza dalla circonferenza; e infatti, la metà e l'estremità del lato coincidono, e c'è un angolo ovunque» [13, pp. 227]. Inoltre, la prima linea del quadrato isoperimetrico è la più corta dopo quella del triangolo e la seconda linea del quadrato è la più lunga dopo quella del triangolo e così via per tutti gli altri poligoni.

In questo modo Cusano costruisce due successioni: quella delle prime linee strettamente crescente poiché

$$p_3 < p_4 < p_5 < p_6 < \dots < p_\infty$$

e quella delle seconde linee strettamente decrescente poiché

$$s_3 > s_4 > s_5 > s_6 > \dots > s_\infty.$$

Adesso, Cusano considera che moltiplicando la prima linea del quadrato per la metà del perimetro e la prima linea del triangolo per la stessa metà del perimetro, si ottengono due superfici diverse tra loro che corrispondono alle aree dei poligoni:

$$A_4 = \frac{1}{2}P \cdot p_4$$

$$A_3 = \frac{1}{2}P \cdot p_3$$

dove P indica proprio la lunghezza del perimetro uguale in tutti i poligoni e A_n le aree dei poligoni rispettivamente con n lati. Ora calcola la differenza tra A_4 e A_3 :

$$A_4 - A_3 = \frac{1}{2}P \cdot p_4 - \frac{1}{2}P \cdot p_3 = \frac{1}{2}P \cdot (p_4 - p_3)$$

ed assume che questo possa essere fatto per tutti i poligoni. Da ciò consegue che conoscendo la differenza tra la prima linea di un poligono e quella del triangolo isoperimetrico ($p_n - p_3$) è possibile trovare la differenza tra l'area del poligono e quella del triangolo ($A_n - A_3$).

Di conseguenza è possibile calcolare anche la differenza tra l'area del cerchio e quella del triangolo come:

$$A_\infty - A_3 = \frac{1}{2}P \cdot (p_\infty - p_3)$$

Fino a qui, il procedimento di Cusano appare ineccepibile, ma da questo momento in poi le cose cambiano poiché la proporzionalità tra le aree dei poligoni isoperimetrici e le rispettive prime linee che Cusano utilizza, non sono in realtà in grado di arrivare alla determinazione della differenza che c'è tra p_∞ e p_n cioè fra il raggio del cerchio e la prima linea di un qualsiasi poligono ad esso isoperimetrico. Ed allora Cusano ricorre alla *sagitta* cioè alla differenza tra $s_n - p_n$ che descrive come quella "grandezza" in grado di rendere possibile la determinazione di quella differenza [7].

Cusano allora procede osservando che il massimo valore di $p_n - p_3$ si raggiunge con $n = \infty$ cioè nella differenza tra il raggio del cerchio e la prima linea del triangolo ad esso isoperimetrico. Inoltre, per $n = \infty$ e cioè nel cerchio, $s_n = p_n$ cioè $s_\infty = p_\infty$ e quindi $p_\infty - p_3 = s_\infty - p_3$.

Ricapitolando:

- la differenza $s_n - p_n$ è massima per il triangolo cioè per $n = 3$
- la differenza $p_n - p_3$ è massima per $n = \infty$
- $s_\infty = p_\infty$ quindi $p_\infty - p_3 = s_\infty - p_3$

Da cui Cusano deduce che $s_3 > s_\infty$ e ottiene:

$$p_\infty - p_3 < s_3 - p_3.$$

Questo significa che la quantità $p_\infty - p_3$ è una frazione ("portio") di $s_3 - p_3$ cioè della *sagitta* del triangolo. Per quanto presuppone Cusano, basta conoscere quale frazione di $s_3 - p_3$ corrisponda alla differenza $p_\infty - p_3$, per sapere a quanto corrisponda in un poligono qualsiasi con n lati la differenza $p_\infty - p_n$.

L'equazione che il cardinale propone a questo punto, cioè:

$$p_\infty = p_n + \frac{2}{3}(s_n - p_n),$$

è il risultato di un singolare ragionamento del quale Cusano non dà alcuna dimostrazione, quanto piuttosto egli fornisce una "figurazione" geometrico-pratica nel modo seguente riportato in [7].

Come rappresentato in figura 2.19, si traccia un segmento $\overline{AB} = s_3$ e lo si divida in due parti uguali attraverso il punto C , dopodiché si costruiscono i due quadrati adiacenti $ACEF$ e $CBDE$, aventi in comune il lato $\overline{CE}$ e che insieme costituiscono il rettangolo $ABDF$.

Se si pone $\overline{AC} = p_3$, allora p_∞ sarà maggiore di $\overline{FE} = \overline{AC}$.

Si ponga allora che $p_\infty = \overline{FH}$, dove $\overline{EH} = \frac{2}{3}\overline{CB}$ e si tracci da H il segmento $\overline{HI}$ parallelo a $\overline{BD}$ e si congiunga il punto C col punto H .

Secondo Cusano, è chiaro che se $\overline{FH} = p_\infty$ allora tutte le seconde linee dei poligoni isoperimetrici compresi fra il triangolo e il cerchio dovranno essere comprese tra $\overline{AC}$ e $\overline{FH}$. Più è grande la superficie del poligono, più la sua prima linea dovrà avvicinarsi alla lunghezza $\overline{FH}$.

Poiché $\overline{AI} + \overline{IH} = p_3 + (s_3 - p_3) + \frac{2}{3}(s_3 - p_3)$, allo stesso modo per gli altri poligoni è possibile riportare la *sagitta* $(s_n - p_n)$ a partire da H .

Per esempio, $(s_n - p_n) = \overline{HK}$, si traccia da K la parallela ad $\overline{AI}$ e sia $\overline{KL}$, questa risulterà secata dalla $\overline{CH}$ in un punto M tale che: $\overline{LM} = p_n$ e $\overline{MK} = \frac{2}{3}(s_n - p_n)$.

Tutto questo procedimento si basa sulla *sagitta*, che è l'elemento geometrico chiave, ma il criterio empirico-pratico della sua determinazione avviene per "sovrapposizione" di due grandezze incommensurabili (raggio s_n e prima linea p_n di un poligono), cioè per "comparazione metrica" diretta di tali grandezze che viene idealmente reiterato per tutti i termini corrispondenti delle due successioni scritte precedentemente.

Dunque secondo Cusano «basta verificare con la misura concreta» a quale frazione di BC corrisponda la grandezza IC per sapere a quale frazione della *sagitta* $s_n - p_n$ corrisponda in un poligono di n lati, la differenza $p_\infty - p_3$ [7].

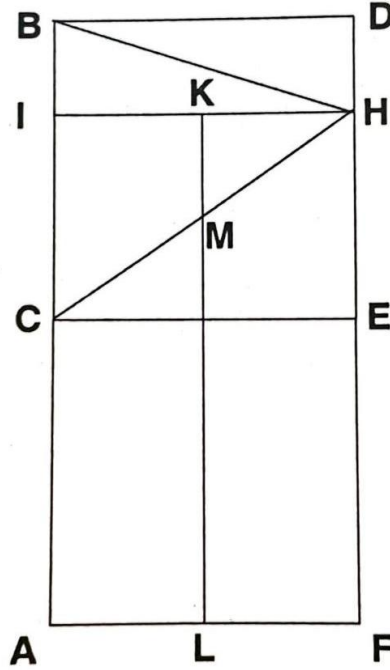


Figura 2.19: Figurazione geometrico-pratica.

2.4.3 Le critiche alla dimostrazione di Cusano

Il procedimento riportato è stato tratto dalla rielaborazione di Luciana de Bernart del suo libro *Cusano e i matematici* [7] ed il tentativo di Cusano di dimostrare la quadratura del cerchio sarà oggetto di una delle attività laboratoriali prevista dal progetto e può essere visionata nell'Appendice A.

Luciana de Bernart, come lei stessa suggerisce, si rifà all'esposizione di Cantor poiché, secondo la scrittrice, è importante non limitarsi a tradurre in linguaggio algebrico moderno i risultati dell'argomentazione di Cusano per verificarne i limiti dell'attendibilità, ma cercare di seguire le varie fasi del suo ragionamento cercando di rispettarne il decorso logico che, per la natura filosofica e per l'inadeguatezza delle tecniche di calcolo storicamente disponibili, si presenta «irriducibile ai presupposti formali su cui si fonda la possibilità di applicare l'algebra alla geometria.» [7, p. 21]

La scrittrice e matematica de Bernart sottolinea come, in alcuni passaggi, sia stato necessario utilizzare una notazione di tipo algebrico elementare, per mettere in luce lo scheletro matematico delle argomentazioni portate da Cusano che altrimenti sarebbero rimaste delle mere circonvoluzioni linguistiche impercorribili [7].

Il ragionamento di Cusano, proprio per la sua natura filosofica, apparve subito "oscuro" agli specialisti e come precedentemente accennato, i matematici presero posizione su un metodo che consisteva in una «forzatura filosofica» di alcune determinazioni geometriche. Sul piano del contenuto, tutti gli scritti di Cusano relativi alla quadratura del cerchio, «spingevano il pensiero matematico ben al di là dei limiti consentiti dalle attrezzature strumentali di cui esso poteva storicamente disporre.» [7, p. 8]

Il lavoro di Cusano fu dunque soggetto alle critiche dei matematici dell'epoca, in particolare a quelle dell'amico e corrispondente Toscanelli e del maestro Peurbach ma il suo metodo fu analizzato e «ridicolizzato» [7] principalmente da Regiomontano, il maggior matematico italiano del XVI secolo.

La matematica di Cusano che veniva considerata afflitta da «un'oscurità logico-procedurale» [7, p. 8], dal 1533, si trovò ad acquisire fra i matematici di tutta Europa una importante fama e a causa delle critiche mosse alle sue opere, Cusano sembrò diventare l'esempio di un'attitudine di pensiero che andava bandita dal sapere scientifico proprio perché presupponeva di affrontare problematiche di tipo matematico con strumenti metodologici e linguistici incongrui [7, p. 9].

Questo accadde poiché, proprio nel 1533 avvenne la pubblicazione dell'opera di Regiomontano, da parte di Johannes Schöner, che segnò l'inizio della trigonometria moderna: il *De triangulis omnimodis*. Schöner, decise di pubblicare nell'appendice di quest'opera alcuni degli scritti cusani che riguardavano la quadratura del cerchio e la rettificazione delle curve insieme ai lavori di Regiomontano che si occupavano di metterli in esame e confutarli.

Il metodo del cardinale divenne quindi famoso affianco alle confutazioni di Regiomontano e, da quel momento, per tutti i seguaci del matematico, le ricerche di Cusano si configurarono come delle speculazioni che andavano ad invadere un terreno non di loro competenza, avvalendosi, inoltre, di strumenti operativi incongrui.

In quegli anni, proprio in seguito a questa circostanza, andò a costituirsi una vera e propria separazione, se non opposizione, che divideva i competenti (cioè gli specialisti della matematica) dagli incompetenti (cioè i filosofi e i dilettanti della matematica), coloro che si proclamavano gli autentici eredi dell'opera di Archimede (i primi), da coloro (i secondi) che ispirati da «presuntuosa ignoranza» ritenevano di poter superare i limiti di Archimede affidandosi a procedimenti meramente intuitivi, lontani da qualsiasi rigore e che potevano giungere a conclusioni nient'altro che ridicole ("nulla atque ridicula") [7, p. 10].

Le critiche che Toscanelli mosse al suo amico, riguardano in particolare il metodo geometrico-pratico esposto nella sezione precedente, in particolare l'undicesima proposizione del *De mathematicis complementis* da cui, secondo Toscanelli, dipende tutta la dimostrazione della quadratura del cerchio. Il corrispondente di Cusano suggerisce che se le linee CH e BH (cfr. Figura 2.19) fossero



Figura 2.20: Regiomontano.

curve, queste non si intersecherebbero nel punto H e dunque le due serie opposte e convergenti delle prime e delle seconde linee non avrebbero nel segmento $\overline{FH}$ il loro limite comune [7, p. 42]. Quindi, nonostante Toscanelli si dimostri accogliente verso le implicazioni del metodo delle coincidenze che utilizza Cusano e cerchi comunque di misurarsi con la sua logica, egli viene mosso da un'intelligenza analitica e cerca di indurre l'amico a mettere in discussione le sue conclusioni.

L'operazione che Regiomontano compì su Cusano si muoveva su un terreno piuttosto simile a quello di Toscanelli. Il *De quadratura circuli secundum Nicolaus Cusensem, Dialogus Ionnasi de Montereio* è uno scritto redatto in forma di dialogo ad opera di Regiomontano. La proposizione cusaniana che viene messa in discussione è la stessa che aveva suscitato anche l'obiezione di Toscanelli circa la dimostrazione della possibile inesistenza del punto di coincidenza (o "limite comune") tra due classi di segmenti tali che tutti i termini dell'una siano minori di tutti i termini dell'altra e costituisce l'assunto del *Dialogus de circuli quadratura. Dialogus inter cardinalem sancti Petri, episcopum Brixinensem, et Paulum physicum Florentinum, de circuli quadratura* di Cusano:

Proposizione

Dato un cerchio, la somma del raggio e della corda dell'arco quadrante tale cerchio dà luogo a un segmento tale che nel cerchio avente per diametro tale segmento è inscrittibile un triangolo equilatero isoperimetrico al cerchio dato. [7, p. 51]

Il dialogo avviene tra un allievo, Aristofilo, ammiratore degli scritti di Cusano ed il suo maestro, Crizia, matematico di professione che impersona lo stesso Regiomontano.

Dopo aver presentato la dimostrazione di Cusano riguardo questa proposizione senza lasciar emergere giudizi riguardo la fondatezza o meno della sua conclusione, Regiomontano, attraverso il personaggio di Aristofilo, chiede al maestro Crizia di pronunciarsi in merito.

Egli si sofferma ad osservare che l'autorità del personaggio che ha prodotto tale dimostrazione (Cusano) è grande e la sua fama è illustre poiché è innegabile che sia un grande pensatore che si è misurato in ogni campo dello scibile e si è occupato di profondi problemi teologici percorrendo con estrema sottigliezza ogni genere di filosofia, e dunque Crizia non si sente all'altezza di esprimere un giudizio.

Il maestro chiede allo stesso Aristofilo di pronunciarsi in merito alla fondatezza della conclusione di Cusano, ma egli non sa come dimostrare questa conclusione e anzi, non ricorda bene i passaggi dell'argomentazione di Cusano e tutto ciò che riesce a dire a riguardo è che il più delle volte si è sentito «preso in giro» [7, p. 55] da questa poiché «proprio nel momento in cui sembra ti si squaderni davanti la certezza assoluta, ti comincia a serpeggiare nell'animo una perplessità che non so come spiegare: è come quando si afferra un'anguilla e quanto più forte la si stringe nelle mani tanto più facilmente essa ti sfugge» [7, p. 53].

A questo punto Crizia chiede ad Aristofilo di ricordare almeno se questa dimostrazione fosse di carattere matematico o «di qualche altro tipo» [7, p. 53]. Aristofilo risponde che non gli sembrava una dimostrazione matematica, ma questo suscita la rabbia di Crizia che accusa Aristofilo di fargli

perdere tempo «proponendogli una conclusione senza dimostrazione» che lo costringe a «correre di qua e di là per cercare se vi sia un modo per darle una qualche certezza.» [7, p. 53]

Da queste prime battute di dialogo emerge in modo esplicito la volontà di Regiomontano di voler sancire inequivocabilmente una frattura all'interno stesso dei procedimenti della razionalità umana che separa campi estranei ed irriducibili: la logica "filosofica" dei concetti sintetici e mai integralmente risolubili sul piano analitico ("anguilliformi" secondo il paragone di Aristofilo) dalla logica matematica, essenzialmente analitica e proprio per questo incapace di ricondurre a nozioni comuni ed universali i propri criteri operativi [7].

Dal dialogo che Regiomontano costruisce si evincono delle differenze sostanziali tra la logica matematica e la logica filosofica, sia in termini di certezza delle conclusioni, sia in termini di strumenti che vengono utilizzati: per Cusano questi erano geometrici e facevano uso dell'intuizione-immaginazione spaziale legata alla geometria mentre quelli di Regiomontano sono puramente geometrici e si avvalgono esclusivamente del calcolo numerico, senza alcun ricorso all'intuizione spaziale.

Vediamo la prova, utilizzata da Crizia (Regiomontano) e rivolta ad Aristofilo, che dimostra senza altre possibilità la fallacia del procedimento di Cusano basato sulla seguente figura:

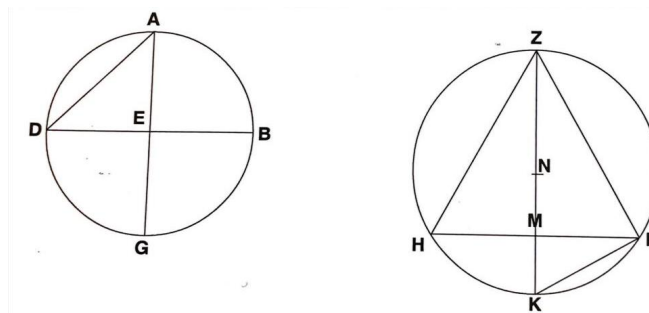


Figura 2.21

«C'è un modo, che, se non m'inganno, potrà consentirci di mettere il cuore in pace... Fai attenzione allora. Il nostro Archimede nello scritto su *La misura del cerchio* dimostrò coll'aiuto dei numeri che il contorno del cerchio o circonferenza eccede il triplo del suo diametro meno $\frac{1}{7}$ e più di $\frac{10}{71}$ del diametro stesso... Ora, segui il mio ragionamento passo per passo: se tu avrai diviso mentalmente il raggio ED del cerchio minore $[ABGD]$ della Figura 2.21] in 497 particelle uguali, una qualsiasi di quelle particelle sarà la misura comune di tutte le linee che serviranno per la soluzione del nostro problema, una volta che si decida di ammettere nel nostro ragionamento solo le linee razionali: così come, dunque, in una di queste particelle riconoscerai il carattere dell'unità per quanto riguarda le linee [grandezze lineari] supponi che il quadratino costruito su di essa abbia lo stesso carattere per quanto riguarda i quadrati [grandezze di superficie]. Non c'è dunque da meravigliarsi da questo momento in poi se, nella soluzione di questo problema, io abbia attribuito numeri alle linee, visto che ciò è legittimato a sufficienza dall'esempio sopra ricordato di Archimede. E in ultimo, nel quinto teorema del decimo

libro [degli *Elementi*] Euclide ha insegnato che la proporzione fra linee commensurabili in lunghezza o in quadrato è come la proporzione fra numeri; anzi siffatte linee sono realmente numeri, poiché l'intelletto le discerne secondo l'unità della misura comune.» [7, p. 55]

Questo significa che se per risolvere un problema geometrico consistente nel trovare un segmento (grandezza lineare) avente date relazioni con altri segmenti noti, facciamo corrispondere ad uno di questi segmenti noti la sua misura in base ad una sua parte aliquota cioè un numero e, assumendo quella parte come unità di misura comune fra tale segmento e quelli ad essa commensurabili, consideriamo come grandezze note solo i segmenti traducibili in altrettanti numeri in base a quella prescelta unità di misura, cioè quelle che Regiomontano chiama *lineae rationales*, precisando però che la stessa cosa può essere fatta anche per le grandezze di superficie, assumendo come misura comune un quadratino unitario.

Sostituendo alle grandezze i loro numeri e riformulando il concetto di grandezza nota, Regiomontano va a costituire il primo sistematico tentativo di usare un metodo algebrico per la risoluzione di un problema geometrico. Crizia infatti prosegue in questo modo:

« $\frac{\text{diametro}}{\text{circonferenza}} = \frac{\text{raggio}}{\text{semicirconferenza}}$ quindi in base ai limiti stabiliti da Archimede, per tale rapporto (cioè π), si ha che $3 + \frac{10}{71} < \frac{\text{raggio}}{\text{semicirconferenza}} < 3 + \frac{1}{7}$.

Se $\text{raggio} = 497$, come si è supposto, allora $3 \cdot 497 = 1491$ e $\frac{497 \cdot 10}{71} = 70$, quindi $1491 + 70 = 1561$ ci dà il limite inferiore del rapporto raggio/semicirconferenza così come $1561 \cdot 2 = 3122$ ci dà il limite inferiore del rapporto diametro/circonferenza.

Torniamo al triangolo ZHL [cfr. Figura 2.21] per conoscere la misura del suo perimetro. Se il diametro del cerchio ad esso circoscritto, cioè ZK , è uguale per costruzione a ED (raggio del primo cerchio), e se a ED si è convenuto di attribuire il numero-misura 497, sarà $AD = \sqrt{2(497)^2} = \sqrt{494018}$.

Il numero 494018 non è, però, quadrato: prendiamo allora tra i numeri maggiori di 494018 il numero quadrato ad esso più vicino [tale numero è 494209] la cui radice quadrata è 703, ne dobbiamo dedurre che la corda $AD < 703$ e che, di conseguenza, $(497 + 703) < (ED + AD)$. Ma $ED + AD = ZK$ per costruzione, quindi $497 + 703 = 1200 > ZK$, così come $1200^2 = 1440000 > ZK^2$.

Ora, poiché, per l'argomentazione svolta all'inizio, $ZK^2 - \frac{1}{4} = ZL^2$ sarà anche $1440000 - \frac{1}{4} = 1080000 > ZL^2$. Poiché infatti $ZK^2 : ZL^2 = 1440000 : 1080000$, sarà, permutando, $ZK^2 < 1440000 = ZL^2 < 1080000$.

Ora il numero 1080000, ancora una volta non è quadrato: bisogna dunque ricorrere al numero quadrato più vicino fra i numeri maggiori di 1080000 [tale numero è 1081600], la cui radice quadrata è 1040, per cui $ZL < 1040$ ancora di più di quanto $ZL < 1080000$. È altresì evidente che $3 \cdot 1040 = 3120 < 3ZL$.

Ma allora, se, in base a questi calcoli, il perimetro del triangolo ZHL risulta essere minore, e anche di parecchio, di 3120 e se, d'altro canto, la circonferenza del cerchio $ABGD$ è, secondo i calcoli fatti all'inizio, maggiore di 3122, ciò vuol dire che il perimetro del triangolo ZHL è molto minore della circonferenza del cerchio $ABGD$, e con ciò è dimostrato che il perimetro del triangolo ZHL , non è uguale alla circonferenza

del cerchio $ABGD$.» [7, pp. 57-58]

Da questa conclusione, Aristofilo rimane esterrefatto, ma Crizia ribatte che pur non osando contraddire Cusano, si è trovato costretto a farlo. Aristofilo comunque non riesce a credere alla dimostrazione di Crizia, pur rimanendone molto scosso, Crizia allora gli fa osservare che:

«Guarda che non si tratta affatto di ragionamenti mie personali, io sono solo il moderno portavoce di tutti i geometri e aritmetici antichi che concordemente intesero negare la proponibilità di una simile conclusione. È a loro non a me che devi attribuire tanto l'esame critico, che tu dici severo, di un'asserzione che viene da un'altra impostazione di pensiero, quanto il piacere della ricerca della verità, qualsiasi questa sia.» [7, pp. 9]

Nonostante la fallacia della dimostrazione, il ragionamento che utilizzò Cusano era comunque caratterizzato da un'importante pregnanza concettuale che non poteva lasciare indifferenti i matematici dell'epoca.

George von Peurbach, nel suo *Tractatus super poropositiones Ptolomei de sinibus et chordis* pubblicato nel 1541 affermava che retto e curvo non fossero commensurabili perché non appartengono alla stessa specie ma riconobbe l'esistenza di una relazione reciproca ("mutua relatio") tra queste [7, p. 36]. In quanto matematico, però, Peurbach non si spingerà mai ad andare oltre la possibilità procedurale offerta proprio da questa "mutua relatio" per provare a sondarne le implicazioni sul piano della messa in discussione del concetto tradizionale di spazio.

La matematica dell'epoca infatti si caratterizzava come separata in due dimensioni: una eminentemente simbolica, finalizzata all'espressione di significati filosofico-teologici e l'altra pragmatica e calcolatoria collegata all'arte della misura, cioè una matematica applicata di natura essenzialmente approssimativa, ma feconda di impostazioni e punti di vista originali [7, p. 34].

Regiomontano, allievo di Peurbach, come è stato riportato, riprese la strada del suo maestro, riesaminando il lavoro di Cusano anche attraverso il suo personale metodo di attribuire numeri alle grandezze per poi verificarne il rapporto sul piano del calcolo aritmetico.

Anche attraverso questo procedimento, giunse alla conclusione che Cusano aveva raggiunto un risultato approssimato e non esatto come lui stesso riteneva.

Tuttavia, lo stesso Regiomontano affermerà che non si può che restare ammirati da quanto Cusano, definito come un inventore, si sia avvicinato a dimostrare l'uguaglianza di due grandezze fra cui esiste una «piccolissima differenza». Secondo Regiomontano, nessuno poteva ancora dire esattamente quanta verità e quanta invenzione vi fosse nel suo metodo perché fino a quel momento, nessuno, aveva ancora «infranto la tanto inspiegabile differenza che vi è fra il retto e il curvo». [7, p. 37]

2.5 François Viète, il matematico dilettante

François Viète nacque nel 1540 in Francia, in una provincia che oggi si chiama Vandea. Il padre Étienne, era un avvocato ed un notaio e, così come le sue origini, i suoi studi non furono di carattere scientifico, infatti egli entrò all'Università di Poitiers per studiare legge e conseguì la laurea

in giurisprudenza nel 1560.

Quattro anni dopo, però, abbandonò la professione di avvocato per entrare al servizio di Antonietta d'Aubeterre, un'aristocratica dell'epoca, che lo scelse per sovrintendere l'educazione della figlia Caterina e al quale rimase amico e fedele consigliere per tutta la vita. Quando Antonietta rimase vedova, Viète la seguì a La Rochelle, città costiera nel sud-ovest della Francia.

Questo fu un periodo di grandi disordini politici e religiosi per la Francia: Carlo IX era diventato re nel 1560 e poco dopo, nel 1562, iniziarono le guerre di religione francesi. Affermare che in queste guerre si scontrarono protestanti e cattolici è una grossolana semplificazione della realtà dei fatti, ma, ciò che è certo, è i combattimenti tra le varie fazioni continuarono a fasi alterne fino quasi alla fine del secolo [47].

Nel 1570 Viète lasciò La Rochelle e si trasferì a Parigi. Sebbene non fosse mai stato impiegato come scienziato professionista, Viète si impegnò da sempre su argomenti di matematica ed astronomia. La sua prima opera matematica pubblicata, il *Canon mathematicus, seu ad triangula cum appendicibus*, apparve a Parigi nel 1571.

In realtà, i suoi primi lavori scientifici, furono proprio le lezioni private a Caterina di Parthenay ma di questi, è rimasta soltanto una testimonianza, sopravvissuta in una traduzione francese che conteneva saggi sulla sfera, sugli elementi di geografia e sull'astronomia.

Questo primo lavoro di Viète ha poco in comune con l'*Ad harmonicon coeleste*, un famoso testo in cinque libri che non fu mai pubblicato ma che è ancora disponibile come manoscritto (una copia autografa si trova nella Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze e un'altra copia di G. Borelli nella Biblioteca Nazionale Centrale Vittorio Emanuele II di Roma) [47].

Tutte le indagini matematiche di Viète furono strettamente connesse con il suo lavoro cosmologico ed astronomico. Il *Canon mathematicus, seu ad triangula cum appendicibus* doveva costituire la parte preparatoria di carattere trigonometrico dell'*Harmonicon coeleste*. Il contenuto di entrambi gli scritti verrà approfondito maggiormente nella Sezione 2.5.1.

Mentre Viète era a Parigi, nella notte tra il 23 e il 24 agosto del 1572, Carlo IX autorizzò il massacro degli ugonotti. L'episodio, conosciuto come il massacro di San Bartolomeo, avvenne in occasione delle nozze tra Margherita de' Medici e il re di Navarra Enrico Borbone. I cattolici compirono un massacro, casa per casa, di migliaia di ugonotti presenti in città per assistere al matrimonio e, questo evento, fu un episodio che segnò lungamente la storia della Francia, divenendo uno dei momenti più esemplificativi del livello di violenza raggiunto dalle guerre di religione in



Figura 2.22: François Viète.

questo paese.

Questo fu un periodo estremamente difficile per Viète poiché, sebbene non fosse attivo nella causa protestante, apparteneva al gruppo degli ugonotti. Carlo IX non visse molto a lungo dopo questo evento, tuttavia, il 24 ottobre del 1573 nominò Viète al governo della Bretagna che aveva sede a Rennes, nel nord-ovest della Francia. Egli vi si trasferì per assumere la posizione di consigliere offertagli e vi rimase fino al marzo del 1580, dopodiché rientrò a Parigi. Carlo IX era morto nel maggio del 1574 e gli era succeduto il fratello Enrico III.

Enrico, nel 1576, fece delle importanti concessioni agli ugonotti protestanti e i cattolici romani si sentirono costretti a formare la Lega Santa, un'alleanza militare che serviva per curare i propri interessi con azioni belliche e che aveva al comando il cattolico Enrico di Guisa. In questa atmosfera tesa Viète fu nominato da Enrico III consigliere privato reale e gli venne assegnato un ruolo al parlamento di Parigi.

Enrico III non aveva figli e quando, nel 1584, anche il fratello di Enrico III morì, divenne erede al trono Enrico di Navarra, nobile di Borbone e sostenitore della protesta degli ugonotti. La corte reale e la nobiltà contenevano una grande spaccatura poiché all'interno erano presenti fazioni con obiettivi politici differenti e nel 1584 la posizione di Viète, come noto ugonotto, divenne insostenibile e per questo fu bandito dalla corte di Parigi da alcuni nemici politici [47].

Lasciando Parigi, Viète si trasferì a Beauvoir-sur-Mer, città costiera situata a circa 130 km a nord-ovest della sua città natale di Fontenay-le-Comte e durante i cinque anni trascorsi qui, Viète poté dedicarsi interamente al suo interesse per gli studi matematici. Egli non fu un matematico di professione, ma in questi termini, i nemici di Viète, fecero un enorme favore a questa disciplina, poiché fu proprio durante questo periodo, senza doveri formali e politici, che Viète poté dedicarsi allo sviluppo di quelli che diventeranno i contenuti più importanti di tutta la sua produzione matematica [47]. In effetti, è sorprendente che un avvocato così impegnato politicamente in una situazione così complicata, sia riuscito a raggiungere dei risultati così importanti nella matematica ma egli stesso si descriveva così:

«Io, che non mi professo matematico, ma che, ogni volta che c'è tempo libero, mi diletto negli studi matematici...» [16]

Viète, infatti, era un grande amante dello studio e della contemplazione. Secondo uno storico a lui contemporaneo, egli rispecchiava fedelmente lo stereotipo dello studioso matematico: «le sue meditazioni erano così profonde che spesso lo si vedeva fisso in cogitazione per tre giorni di seguito, seduto al suo tavolo da pranzo, senza cibo né sonno, tranne quello che poteva ottenere appoggiandosi al gomito, e né si muoveva né cercava ristoro a intervalli naturali.» [37]

La lotta per la successione al trono di Francia continuò. Questi violenti e sanguinosi scontri vengono ricordati ancora oggi come dei "tre Enrichi" poiché vedevano come protagonisti Enrico III, Enrico di Borbone ed Enrico di Guisa. Nel 1587 Enrico di Borbone sconfisse l'esercito di Enrico III ed una rivolta del popolo di Parigi, roccaforte della Lega Santa, il 12 maggio 1588, fece fuggire il re a Chartres.

A questo punto Enrico III fece richiamare Viète e, nell'aprile 1589, lo riportò al parlamento che era ora allestito a Tours.

Nel 1588 Enrico III ordinò l'assassinio di Enrico di Guisa e si riconciliò con Enrico di Borbone per tentare, nel 1589, di riconquistare Parigi. Enrico III, però, fu a sua volta ucciso in seguito all'attentato di un frate domenicano, desideroso di vendicare l'uccisione di Enrico di Guisa, l'uomo che in quegli anni aveva più di altri rappresentato la lotta dei cattolici in Francia. Dunque rimase in vita solamente Enrico di Borbone, di religione protestante, che salì al trono e fu nominato Enrico IV.

La presenza di un re di religione protestante sul trono di Francia aveva intanto scatenato la reazione della Spagna che, fedele sostenitrice della causa cattolica, aveva organizzato un intervento militare ed economico che mirava a rafforzare la Lega Santa in Francia. Al tempo stesso, il papato si rifiutò di riconoscere come re un ugonotto e temendo che i protestanti potessero ottenere il controllo in Francia, la Lega Santa combatté più vigorosamente per la causa cattolica. Dopo l'assassinio di Enrico III, Viète continuò a lavorare per Enrico IV, ottenendo anche una posizione più solida poiché lavorava come sostenitore protestante di un re protestante.

Una lettera indirizzata dal fronte francese a Filippo, re di Spagna e datata 28 ottobre 1589 scritta in codice cadde nelle mani di Enrico.

Viète era certamente ben noto per le sue capacità matematiche a quel tempo e il re, come per tutte le altre questioni di carattere matematico, gli si rivolse per decodificare i messaggi inviati dal suo nemico. Il codice consisteva nel solito alfabeto con sostituzioni omofone a cui si aggiungeva una lista di codici di 413 termini rappresentati da gruppi di due o tre lettere o di due numeri che potevano essere sottolineati o punteggiati [16].

Viète tentò a lungo di decifrare questo codice e soltanto nel marzo del 1590 riuscì ad inviare ad Enrico la soluzione completa, sebbene avesse precedentemente inviato alcune parti decifrate di essa. Quando Filippo II di Spagna, scoprì che i francesi erano a conoscenza dei suoi piani militari, presupponendo che il suo codice non potesse essere decifrato, si lamentò con il papa che «la magia nera venisse impiegata contro il suo paese» contrariamente alla buon morale cristiana e dunque Viète fu accusato di essere in combutta con il diavolo [15].

Quando nel 1593, Enrico IV non controllava più la città di Parigi ed era ancora osteggiato dalla Lega Santa, sostenuta dalla Spagna, egli si convertì al cattolicesimo mosso da motivi politici piuttosto che religiosi. Anche Viète, seguendo l'esempio del suo re, si convertì al cattolicesimo. La conversione di Enrico fu certamente efficace, poiché in questo modo diminuì la resistenza contro di lui e nel 1594 riuscì a riprendere sotto il suo controllo la città Parigi. Dopodiché nel 1595 Enrico dichiarò guerra a Filippo II di Spagna e continuò la battaglia per sconfiggere la resistenza della Lega e degli alleati spagnoli.

Durante il periodo di forte tensione tra Enrico IV e Filippo II di Spagna, Viète mostrò le sue grandi doti di matematico andando nuovamente in soccorso del re. Il matematico belga A. van Roomen aveva proposto una sfida a tutti i matematici contemporanei, per risolvere una certa

equazione di 45° grado. L'ambasciatore olandese presentò il quesito di van Roomen al re Enrico IV provocandolo sul fatto che non esistessero matematici validi in Francia e dichiarando che nessun francese avrebbe mai potuto risolvere questo problema. Il re convocò Viète che trovò immediatamente una soluzione all'equazione scoprendo che alla base di questa vi era una relazione trigonometrica ed il giorno successivo Viète presentò altre 22 soluzioni. In risposta Viète sfidò van Roomen a risolvere il problema di Apollonio, cioè a costruire un cerchio tangente a tre cerchi dati ed in seguito al brillante scambio intellettuale che avvenne tra i due, Viète e van Roomen, strinsero un'intima amicizia [47].

Viète continuò a servire Enrico IV a Parigi fino al 1597 quando tornò nella sua città natale. Due anni dopo tornò a Parigi, sempre al servizio di Enrico IV fino a quando fu congedato da Enrico il 14 dicembre 1602. Viète morì quasi esattamente un anno dopo.

2.5.1 Viète e la matematica

La prima grande opera di Viète, l'*Ad harmonicon coeleste*, come precedentemente accennato, non fu mai pubblicata. Questo scritto di astronomia si occupava di fornire una visione del cosmo che avesse un'impronta sia tolemaica che copernicana perché Viète era interessato esclusivamente alla geometria delle teorie planetarie e non alla questione se le teorie rappresentassero l'effettiva realtà fisica. Forse, piuttosto sorprendentemente, Viète giunse alla conclusione che la teoria di Copernico non fosse valida per alcune motivazioni di carattere geometrico.

La prima opera di carattere prettamente matematico è il *Canon mathematicus, seu ad triangula cum appendicibus*, pubblicata nel 1579 dallo stesso Viète. Questo lavoro, costituiva la premessa trigonometrica all'*Ad harmonicon coeleste* e conteneva una tavola piuttosto sofisticata delle sei funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente, cotangente, secante e cosecante) per ogni minuto del quadrante e con un raggio di 100000. Spesso a queste tavole erano aggiunte anche delle figure [36].

Alla fine del XVI secolo la matematica si trovava sotto la duplice egida dei Greci, dai quali questa disciplina aveva ereditato gli strumenti della geometria, e degli Arabi, che fornirono le procedure per la risoluzione dei problemi.

Al tempo di Viète, l'algebra oscillava, dunque, tra l'aritmetica, che dava l'apparenza di un elenco di regole operative, e la geometria che sembrava più rigorosa. Nel frattempo, in Italia, i matematici Luca Pacioli, Scipione del Ferro, Niccolò Tartaglia, Ludovico Ferrari e soprattutto Raffaello Bombelli stavano sviluppando delle nuove e brillanti tecniche per risolvere le equazioni di terzo grado, che preannunciavano l'inizio di una nuova era dell'algebra.

D'altra parte, la scuola tedesca dei Coss, il matematico gallese Robert Recorde e l'olandese Simon Stevin avevano già introdotto una prima notazione algebrica attraverso l'inserimento dei numeri decimali e degli esponenti. Tuttavia, i numeri complessi erano ancora, nella migliore delle ipotesi, un modo filosofico di pensare. Soltanto Cartesio, un secolo dopo la loro invenzione, iniziò ad utilizzarli come numeri immaginari: fino ad allora solo le soluzioni positive delle equazioni

erano considerate soluzioni [37].

Il compito dei matematici di questo periodo era duplice: era necessario produrre l'algebra in modo più geometrico, cioè darle un fondamento rigoroso e, d'altra parte, occorreva dare alla geometria un senso più algebrico, permettendo il calcolo analitico nel piano. Viète e Cartesio risolsero questo arduo compito attraverso una doppia rivoluzione.

Viète diede all'algebra un fondamento solido come quello che regolava la geometria e lo fece istituendo la prima algebra simbolica. In tal modo dichiarò che «nullum non problema solvere» e cioè che attraverso questo linguaggio potevano essere risolti tutti i problemi [37].

Viète introdusse la prima notazione algebrica sistematica nel suo libro *In artem analyticam isagoge* pubblicato a Tours nel 1591. Il titolo dell'opera può sembrare fuorviante, perché letteralmente significa "Introduzione all'arte analitica", il che difficilmente lo fa sembrare un libro di algebra. Tuttavia, Viète, non trovò di suo gradimento la matematica araba e basò il suo lavoro sui matematici italiani, tra cui Cardano, e sul lavoro degli antichi matematici greci, tra cui Pappo e Diofanto [15].

Viète, in questa opera, inizia facendo riferimento al classico metodo di analisi e sintesi. L'analisi, inventata da Platone, è il metodo in cui si assume come dato "ciò che si domanda" ossia la tesi, giungendo, passo dopo passo, ad una verità incontestabile; con il processo di sintesi si procede in modo inverso partendo da "ciò che è assegnato" ossia dalle ipotesi per ritornare alla tesi.

Secondo Viète ci sono tre tipi di analisi: zetetica, poristica e retica o esegetica. I primi due erano noti a Pappo, che ne parla nel VII libro delle Collezioni matematiche: vi sono evidenziati due tipi di analisi, teoretica e problematica, che si possono assimilare rispettivamente alla zetetica e alla poristica.

Di seguito si propone lo schema metodologico vietiano per la risoluzione di un problema che si basa proprio su tre tipi di analisi (*ars analytica*).

Si enuncia il problema da risolvere.

Zetetica: partendo dai dati del problema si giunge ad una prima uguaglianza o proporzione.

Poristica: dalla precedente uguaglianza o proporzione, mediante l'impiego di regole algebriche, si giunge ad un'altra uguaglianza o proporzione da cui scaturisce la soluzione del problema.

Retica o esegetica: consiste nel dare un significato geometrico o aritmetico al risultato della Poristica. La retica o esegetica geometrica interpreta le formule in ambito geometrico, la retica o esegetica numerica riguarda le applicazioni numeriche che seguono lo svolgimento del problema [36].

Nel suo trattato Viète spiegò il valore dei simboli e per la prima volta introdusse, oltre alla definizione del termine coefficiente, anche l'uso delle lettere per la rappresentazione di questi valori: suggerì di utilizzare le lettere come simboli per quantità sia note che sconosciute ed in particolare, usò le vocali per le incognite e le consonanti per le quantità note.

L'algebra precedente a Viète viene chiamata algebra retorica in quanto i problemi e le loro soluzioni venivano esposti mediante parole o frasi della lingua corrente, senza l'impiego di alcun simbolismo. In questa fase dell'algebra non esistevano segni particolari per denotare le operazioni algebriche e non esistevano simboli letterali per indicare le incognite e le costanti.

A François Viète viene riconosciuto anche di aver reso popolare l'uso del simbolo "+" come per l'addizione e "-" per la sottrazione. Questi erano già stati usati da Johannes Widmann nel 1489, ma divennero popolari solamente quando Viète li utilizzò nei suoi lavori. In precedenza, questi venivano indicati con le parole "plus" e "minus" nelle operazioni aritmetiche. Egli introdusse anche la linea di frazione come simbolo per indicare l'operazione di divisione ed iniziò ad utilizzare la parola "in" come abbreviazione fissa per indicare l'operazione di moltiplicazione [36].

Inoltre, Viète esprime l'uguaglianza di due termini con la parola "aequabitur" ed istituì in questo modo quello che indicava il primo segno di "uguale". Egli trovò anche un modo per indicare termini correlati scrivendoli l'uno sotto l'altro e collegandoli attraverso le parentesi graffe.

Viète apportò anche molti miglioramenti alla teoria delle equazioni. Il suo contributo alla teoria delle equazioni si può ritrovare in *De aequationum recognitione et emendatione* del 1615, in cui presentò un metodo di risoluzione per le equazioni di secondo, terzo e quarto grado. Egli conosceva la connessione tra le radici positive di un'equazione (a quei tempi erano considerate le uniche radici possibili) e i coefficienti delle diverse potenze dell'incognita.

Tuttavia, era vincolato da una condizione di omogeneità dimensionale. Il problema sollevato da Viète era che, per esempio, cercando una soluzione dell'equazione $x^3 + x = 1$ si sta cercando la soluzione di un problema che non ha geometricamente senso poiché x^3 è un cubo mentre x è una retta e chiaramente, dal punto di vista geometrico, aggiungere un oggetto tridimensionale a un oggetto unidimensionale non è un'operazione consentita [16].

Lo studio di tali somme, trovato nelle opere di Diofanto, potrebbe aver spinto Viète a stabilire il principio che le quantità che si verificano in un'equazione debbano essere omogenee: o tutte linee, o superfici, o solidi, o supersolidi, ma un'equazione tra meri numeri risultava del tutto inammissibile. Viète dunque non riuscì ad andare oltre alla rigidità della geometria, ma attraverso l'introduzione del suo principio di omogeneità e dei suoi simboli suggerì inconsapevolmente l'idea che le somme tra queste entità non omogenee fossero in realtà possibili. Viète, infatti, risolse questo problema concettuale cercando soluzioni di equazioni come $A^3 + B^2A = B^2Z$ dove, usando la sua convenzione, A era un valore incognito e B e Z erano noti. In questo caso le dimensioni risultano "corrette" poiché ogni termine dell'equazione ha dimensione 3 e dunque non si pone il problema dell'omogeneità [15].

L'opera *Recensio canonica effectuum geometricarum* nel quale sono contenuti questi ragionamenti, ha un'impronta del tutto moderna tanto che fu chiamata successivamente "geometria algebrica". Questa constava in una raccolta di precetti su come costruire espressioni algebriche con l'uso della sola riga e compasso, secondo la tradizione classica. Mentre questi scritti erano generalmente comprensibili e di facile lettura, e quindi della massima importanza didattica, il

principio di omogeneità, enunciato per primo da Viète, era così in anticipo sui tempi che la maggior parte dei lettori sembrò averlo ignorato. Tale principio era stato utilizzato dagli autori greci dell'età classica, ma, nelle epoche successive, pochissimi matematici si avventurarono nel considerare le linee e le superfici come numeri che potevano essere uniti per dare un nuovo numero: la loro somma. La nuova algebra simbolica di Viète aprì le porte ad ulteriori sviluppi matematici, consentendo ai suoi successori di esprimere i loro pensieri e le loro teorie matematiche con un più alto grado di dettaglio e precisione.

Viète era molto esperto riguardo l'uso degli artifici algebrici moderni, egli, con le sue notazioni, mirava alla semplificazione delle equazioni mediante la sostituzione di nuove quantità che hanno una certa connessione con le primitive quantità che erano sconosciute.

Soprattutto, Viète fu il primo matematico ad introdurre le notazioni per il problema (e non solo per le incognite) e di conseguenza, la sua algebra non si limitava più all'enunciazione di regole, ma si basava su un'efficiente algebra computazionale, in cui le operazioni agiscono sulle lettere, ed i risultati si ottengono alla fine dei calcoli per semplice sostituzione. Questo approccio, che è il cuore del metodo algebrico contemporaneo, fu un passo fondamentale nello sviluppo della matematica. Grazie a questo straordinario miglioramento, Viète segnò la fine dell'algebra medievale (da Al-Khwarizmi a Stevin) e aprì il periodo moderno. L'algebra di Viète era ancora un'algebra sincopata, cioè comparivano le prime abbreviazioni e venivano utilizzate le parole, ma durante i ragionamenti e i calcoli erano utilizzate delle abbreviazioni, tuttavia, secondo molti storici della matematica, François Viète può essere considerato il padre dell'algebra simbolica, cioè l'algebra moderna come viene utilizzata oggi.

2.5.2 La formula di Viète per il calcolo di Pi Greco

Un nuovo cambiamento del metodo di ricerca sulla costante che costituisce il rapporto fra una circonferenza ed il suo diametro fu apportato proprio da Viète che riprese e modificò la trattazione del metodo di esaustione di Archimede. Egli utilizzò sempre un poligono regolare (un quadrato) inscritto ad un cerchio e, raddoppiando via via il numero dei lati, arrivò ad approssimare l'area del cerchio con quella del poligono. Il suo contributo fu fondamentale nella storia di Pi Greco poiché propose una nuova caratterizzazione della costante.

Il suo procedimento di approssimazione di Pi Greco verrà utilizzato anche nell'attività svolta in aula con gli studenti che può essere visionata nell'Appendice B. Questo procedimento viene descritto nell'opera *Variorum de rebus Mathematicis responsorum* [46] del 1593 e viene ricostruito in seguito.

Il procedimento inizia con la costruzione di un cerchio di diametro AB , centro O e raggio unitario. Dopodiché, sia AP il lato del poligono regolare di n lati inscritto in esso. Condotta per O il raggio OQ perpendicolare ad AP , il segmento AQ è chiaramente il lato del poligono regolare di $2n$ lati inscritto nel cerchio medesimo, che nel nostro caso è un ottagono poiché $n = 4$. Posto $A\hat{O}P = 2\alpha$, risulta evidentemente: $A\hat{O}Q = Q\hat{O}P = \alpha$. La costruzione geometrica che fa da supporto a tutto il procedimento di Viète è riportata in Figura 2.23.

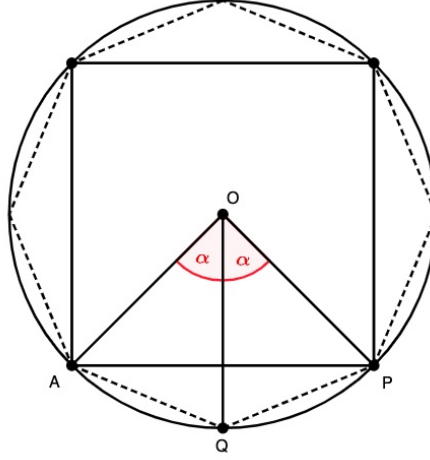


Figura 2.23: Costruzione geometrica utilizzata da Viète.

L'area A_n del poligono regolare di lato AP è pertanto uguale ad n volte l'area del triangolo $O\hat{A}P$. Utilizzando la formula di duplicazione del seno $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ e la formula per il calcolo dell'area di un triangolo qualsiasi che utilizza il seno dell'angolo compreso tra due lati si trova:

$$A_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OP} \cdot \sin(\hat{AOP}) = \frac{n}{2} \cdot \sin(2\alpha) = \frac{n}{2} \cdot 2 \cdot \sin(\alpha) \cos(\alpha) = n \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha).$$

L'area dell'ottagono regolare di lato AQ è invece uguale a $2n$ volte quella del triangolo $O\hat{A}Q$, ossia:

$$A_{2n} = 2n \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OQ} \cdot \sin(\hat{AOQ}) = n \cdot \sin(\alpha).$$

Facendo il rapporto tra le due aree si ottiene:

$$\frac{A_n}{A_{2n}} = \frac{n \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{n \cdot \sin(\alpha)} = \cos(\alpha).$$

Da cui si ricava la relazione tra l'area del poligono di $2n$ lati e quello con n lati:

$$A_{2n} = A_n \cdot \frac{1}{\cos(\alpha)}.$$

Supponendo di iterare il procedimento descritto sopra costruendo un poligono di 2^2n e poi calcolare l'area utilizzando il triangolo, si trova:

$$A_{2^2n} = 2^2n \cdot \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2n \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Facendo il rapporto tra le aree A_{2n} e A_{2^2n} si ottiene:

$$\frac{A_{2n}}{A_{2^2n}} = \frac{n \cdot \sin(\alpha)}{2n \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2n \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2n \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Per quanto appena scritto è possibile ricavare la relazione tra l'area del poligono di $2^2 n$ lati e quello di n lati:

$$A_{2^2 n} = A_{2n} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = A_n \cdot \frac{1}{\cos(\alpha)} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Quindi il rapporto tra queste aree sarà:

$$\frac{A_n}{A_{2n}} = \frac{A_n}{A_{2n}} \frac{A_{2n}}{A_{2^2 n}} = \cos(\alpha) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Iterando il procedimento k volte si trova che il rapporto tra l'area di un poligono di n lati e un poligono di $2^k n$ lati è

$$\frac{A_n}{A_{2^k n}} = \frac{A_n}{A_{2n}} \frac{A_{2n}}{A_{2^2 n}} \dots \frac{A_{2^{k-1} n}}{A_{2^k n}} = \cos(\alpha) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \dots \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2^{k-1}}\right)$$

e quindi

$$A_{2^k n} = A_n \cdot \frac{1}{\cos(\alpha)} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha}{2^{k-1}}\right)}.$$

Facendo tendere k ad infinito ($k \rightarrow +\infty$) si ottiene un poligono di area indistinguibile da quella del cerchio e, pur non avendo ancora a disposizione la teoria ed il concetto di limite, Viète andò molto vicino a definirlo.

Egli, era partito da un cerchio di raggio $r = 1$ la cui area è $\pi r^2 = \pi$ e seppur inconsciamente arrivò a definire che:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} A_{2^k n} = \pi r^2 = \pi.$$

Sostituendo il valore di $A_{2^k n}$ trovato precedentemente si trova:

$$\pi = A_n \cdot \frac{1}{\cos(\alpha)} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha}{4}\right)} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha}{2^{k-1}}\right)} \cdot \dots$$

A questo punto è possibile calcolare tutte le aree dei poligoni a partire da A_n che indica l'area del quadrato di partenza inscritto alla circonferenza di raggio $r = 1$.

Tenendo conto che $n = 4$ e $\alpha = 45^\circ$ si deduce che $\cos(\alpha) = \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e secondo quanto scritto in precedenza l'area $A_n = 2$.

Inoltre, grazie alla formula di bisezione, tutti i coseni dell'ultima formula scritta possono essere riscritti. Per esempio:

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\alpha)} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\alpha}{2^2}\right) &= \cos\left(\frac{\alpha}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \end{aligned}$$

E così via per $k = 3, 4, 5, 6, \dots$

A questo punto, mettendo in relazioni tutti i risultati ottenuti, è possibile dedurre la formula di Viète per l'approssimazione di Pi Greco:

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \cdot \dots$$

La formula di Viète è una formula molto importante dal punto di vista dello sviluppo dell'algebra e della caratterizzazione di π . Questo perché, tale formula, è costituita da una serie di prodotti infiniti e ciò conferisce alla costante Pi Greco una caratterizzazione del tutto nuova: essendo espresso attraverso un numero infinito di termini, sarà impossibile descriverlo esattamente ma si potrà solamente approssimarlo. Nasce così l'idea che Pi Greco sia un irrazionale.

2.6 Il padre del calcolo infinitesimale Isaac Newton

«Ignoro come il mondo mi consideri; in quanto a me, io mi faccio l'effetto di un ragazzo intento a giocare sulla riva del mare che si diverte a trovare ogni tanto una pietra o una conchiglia più graziosa delle altre, mentre il grande oceano delle verità si stende davanti a lui senza che egli lo conosca.» [6, p. 90]

Queste sono le parole con cui Isaac Newton, considerato il più grande scienziato dell'umanità, si descriveva al termine della sua lunga vita.

Secondo il calendario in uso a quell'epoca, egli nacque il giorno di Natale del 1642 in una famiglia di piccoli proprietari terrieri indipendenti che vivevano al castello del borgo di Woolsthorpe, a pochi chilometri a sud di Grantham, nella contea di Lincoln, in Inghilterra. Allineando la data della sua nascita al calendario gregoriano attuale (adottato in Inghilterra solamente nel 1752), in realtà la data "corretta" della sua nascita, risulta essere il 4 Gennaio del 1643 [30]. Suo padre, anch'egli di nome Isaac, morì all'età di trent'anni, tre mesi prima della nascita del figlio.

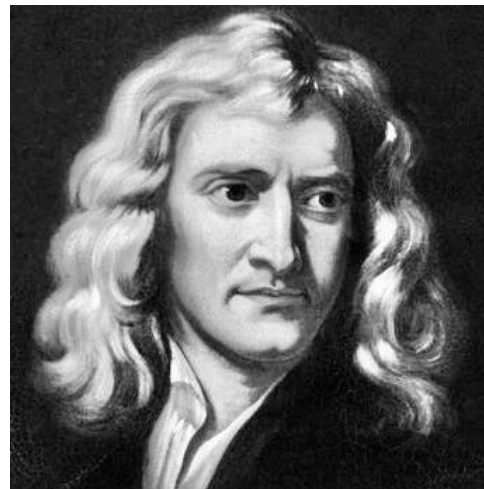


Figura 2.24: Isaac Newton.

Newton nacque prematuro e al momento della nascita era così «debole e delicato» che due donne che lo videro nascere, accorsero da un vicino per recuperare un tonico da somministrargli e al loro ritorno temettero di ritrovarlo morto [6].

Per quanto riguarda la famiglia di provenienza di Newton, non si hanno molte informazioni. Il padre veniva descritto dai compaesani come un uomo «debole, stravagante e violento» [6] e sebbene possedesse proprietà e animali che lo rendevano un uomo piuttosto ricco, era completamente ignorante tanto da non essere in grado di firmare con il proprio nome [30]. La madre, Hannah

Ayscough, era una donna molto autonoma, industriosa e un'abile massaia. Dopo la morte del marito, sposò il reverendo della parrocchia di North Witham, un uomo ormai anziano e celibe. Il piccolo Newton, di soli tre anni, venne affidato alle cure della nonna.

Dal secondo matrimonio, la mamma di Newton, ebbe altri tre figli. Il piccolo Newton non ebbe un'infanzia molto felice: non ricevette l'amore materno e venne trattato come se fosse orfano.

A causa della nascita prematura, Newton viene descritto come un bambino costretto a rimanere in disparte: non poteva partecipare ai giochi turbolenti dei bambini della sua età ed, invece di divertirsi come gli altri, egli passava il tempo ad inventare distrazioni nelle quali, nonostante la tenera età, si manifestava il suo genio.

I racconti che riguardano l'infanzia di Newton, lo raffigurano come un bambino non precoce, ma, in realtà, il genio sperimentale che Newton manifestò nelle sue investigazioni riguardo i misteri della luce, si rivelò già nei suoi passatempi di bambino. Egli costruiva completamente da solo i suoi giocattoli tra cui anche dei cervi volanti contenenti delle lanterne con i quali si divertiva a spaventare i contadini durante la notte, ma anche delle ruote idrauliche, un mulino che macinava veramente il grano attraverso l'utilizzo di un topo vorace come mugnaio e forza motrice. E ancora, delle scatole da lavoro, dei disegni, dei quadranti solari, un orologio in legno e dei giocattoli per i suoi compagni di scuola con i quali cercava di catturare l'attenzione e stringere amicizia [6].

Alla morte del suo patrigno nel 1653, Newton tornò a Wollsthorpe con la madre e visse in una famiglia allargata composta da sua madre, sua nonna, un fratellastro e due sorellastre. Newton, dietro il consiglio di suo zio materno, William Ayscough, che aveva riconosciuto delle straordinarie qualità in lui, fu mandato al collegio di Grantham, ma, nel penultimo anno dei suoi studi, venne preso di mira dai compagni ed era vittima di bullismo [6].

Incoraggiato da un maestro, un giorno Newton decise di vendicarsi del compagno che lo aveva malmenato e questo evento segnò una svolta nella sua carriera scolastica. Fino a quel momento egli non aveva mostrato grande interesse per le lezioni: veniva descritto come "inattivo" e "distratto" e la madre pensava che fosse meglio tenerlo a casa a gestire gli affari ed il patrimonio della fattoria. Isaac fu portato via dalla scuola, ma dimostrò di non avere talento o interesse nella gestione della tenuta. Quando gli fu permesso di tornare alla Free Grammar School di Grantham nel 1660 per completare la sua formazione scolastica, Isaac, volendosi dimostrare intelligente come i compagni, iniziò ad impegnarsi nello studio, e passò rapidamente ad essere il primo della classe. Questo cambiamento suscitò interesse nel direttore della scuola e nello zio che lo incoraggiarono ad iniziare una preparazione per iscriversi all'Università di Cambridge [30].

Non sappiamo nulla di ciò che Isaac imparò in preparazione per l'università, ma il preside della sua scuola era un uomo capace e quasi certamente diede delle lezioni private a Newton, garantendogli una buona preparazione di base [30]. Non ci sono prove che abbia imparato la matematica e gli aneddoti abbondano sulle qualità che egli mostrò a scuola. Le storie sulla sua abilità nel realizzare macchine e strumenti sono da contestualizzare poiché, quando i biografi cercano informazioni su personaggi famosi, vi è sempre la tendenza da parte delle persone a riferire ciò che pensano ci si aspetti da loro, e tutti questi aneddoti potrebbero essere semplicemente inventati

in seguito da coloro che ritenevano che lo scienziato più famoso del mondo avrebbe dovuto avere queste capacità a scuola [30].

Prima che Newton entrasse a Cambridge, in Inghilterra, gli Stuart di Scozia si erano proposti di governare, pensando di essere investiti dal diritto divino. Il popolo era contrario e si ribellò contro il governo stesso che veniva considerato inetto [6].

Newton crebbe in un'atmosfera di guerra civile, politica e religiosa, nel corso della quale Puritani e Realisti si abbandonavano al saccheggio per impadronirsi di tutto ciò che serviva ai loro soldati. Carlo I (1600-1649) combatteva con ogni sua forza contro il parlamento, ma nonostante le spietate repressioni e l'appoggio della Camera Stellata, egli non riuscì a tener testa ai Puritani di Oliver Cromwell che a sua volta, giustificava le sue carneficine e l'assalto al Parlamento con un appello alla giustizia divina che ispirava la sua santa causa.

Tutta questa brutalità e questa santa ipocrisia ebbero la più salutare influenza sul carattere del giovane Newton che diventò adulto nell'odio verso la tirannia, la perfidia e l'oppressione. Quando il re Giacomo, più tardi, cercò di farlo intervenire autorevolmente negli affari dell'università, il matematico non ebbe bisogno d'imparare che un contegno energetico e la formazione di fronte unico da parte di coloro la cui minaccia è minacciata, è la difesa più efficace contro una coalizione di politicanti senza scrupoli. Egli lo sapeva già per istinto e per averlo osservato [6].

All'età di diciannove anni, Newton, da grande credente, scrisse una lista di 48 peccati dei quali si sentiva colpevole. Questi erano principalmente dei pensieri e delle trasgressioni. In particolare molti di questi pensieri erano rivolti alla madre ed al patrigno verso i quali Newton provava molto rancore. Uno di questi peccati che scrisse era:

«Ho minacciato mia madre e mio padre Smith di bruciare loro e la loro casa.» [30]

Egli infatti ricevette dalla sua epoca due importanti doni: la passione per la teologia ed una sete ardente per i misteri dell'alchimia.

A quell'epoca, l'alchimia, rappresentava una pratica non scientifica il cui corrispettivo moderno è la chimica. Newton, si dedicò allo studio di questa materia e col suo spirito scientifico innato, si propose di trovare con l'esperienza a che cosa esattamente si riducevano le rivendicazioni degli alchimisti dell'epoca. Per quanto riguarda la teologia, invece, egli era credeva fermamente nella saggezza del Creatore dell'Universo e nella propria incapacità di scandagliare l'immenso oceano di verità nel suo profondo. Era persuaso dall'idea che sul cielo e sulla terra vi fossero una grande quantità di elementi che superavano la sua filosofia e si preoccupava di comprendere, per interesse personale, ciò che la maggior parte degli uomini intelligenti del suo tempo accettava senza discussione, trovandola naturale: la spiegazione tradizionale della creazione.

All'epoca di Newton, la teologia era ancora la regina delle scienze e a volte governava i suoi soggetti. Tuttavia, Newton permise al proprio razionalismo d'influenzare le credenze, comunque presenti nel suo spirito, fino al punto di diventare quello che ai nostri giorni si chiamerebbe

"Unitariano"³.

Nel mese di giugno del 1661, Newton entrò nel Collegio della Trinità di Cambridge come studente "alla pari", ciò significa che egli compiva dei lavori piuttosto umili per coprire le sue spese di istruzione e di mantenimento. Probabilmente servì in una tavola calda [6].

La guerra civile, la restaurazione della Monarchia, nel 1661, e la compiacenza cieca dell'università di Cambridge nei confronti della Corona avevano fatto scendere Cambridge ad uno dei livelli più bassi della sua storia quando Newton vi entrò, ma, viste le sue grandi capacità, egli divenne molto presto il più brillante tra gli studenti.

L'obiettivo di Newton a Cambridge era una laurea in giurisprudenza. L'istruzione a Cambridge era dominata dalla filosofia di Aristotele, ma al terzo anno di corso era concessa una certa libertà di studio. Newton studiò la filosofia di Cartesio, Gassendi, Hobbes, e in particolare di Boyle. Lo attrasse la meccanica dell'astronomia copernicana di Galileo e studiò anche l'Ottica di Keplero. Egli registrò i suoi pensieri ed i suoi ragionamenti in un libro intitolato *Quaestiones Quaedam Philosophicae*. Questo scritto, è un resoconto affascinante di come le idee di Newton si stessero già formando intorno al 1664. Il testo si apriva con un'affermazione latina che significa «Platone è mio amico, Aristotele è mio amico, ma il mio migliore amico è la verità» che mostra come Newton fosse un libero pensatore fin dall'inizio [30].

Il professore di matematica di Newton era il dottor Isacco Barrow (1630-1677), teologo e matematico, brillante ed originale. Egli riconobbe quasi immediatamente la bravura di Newton che lo superava in ogni campo di studi. Nel 1669 quando Barrow fu costretto a lasciare la cattedra di matematica decise di cederla al giovane Newton. Il corso di Barrow di geometria trattava del metodo per trovare le aree e per tracciare le tangenti alle curve, che sono i problemi-chiave del calcolo integrale e differenziale rispettivamente. Questo fu il primo approccio che Newton ebbe alla questione [6].

Di questo periodo della vita di Newton si hanno pochissime informazioni. Sembra non avesse fatto una buona impressione ai compagni di corso e le sue lettere alla famiglia risultano piuttosto brevi e superficiali e non contengono informazioni interessanti.

I primi due anni di studio di Newton furono dedicati alla matematica elementare. Egli dal 1663 aveva letto gli *Elementi* di Euclide, *Clavis Mathematica* di Oughtred e *La Géométrie* di Cartesio. La nuova algebra e geometria analitica di Viète fu letta da Newton dall'edizione di Frans van Schooten delle opere raccolte di Viète pubblicate nel 1646. Lesse anche *L'algebra* di Wallis che si occupava di trovare un quadrato di area uguale a una parabola e un'iperbole usando gli indivisibili e dal quale Newton prese appunti rispetto al trattamento delle serie [30].

³L'unitarianismo è un movimento religioso nato all'interno del cristianesimo protestante che rifiuta l'idea di Trinità e quindi pone in dubbio la divinità di Cristo e dello Spirito Santo in favore dell'unicità di Dio come solo Essere generatore.

Dall'età di ventuno anni fino ai ventitré, egli gettò le basi dei suoi ulteriori lavori in scienze e matematica ai quali dedicava ostinatamente, ogni giorno un numero impressionante di ore, tanto che spesso si ammalava, ma dal lato puramente umano, Newton conduceva una vita normale da studente. Nel suo taccuino si ritrovano le tracce di parecchie sedute all'osteria e di alcune partite da gioco perse. Ottenne il diploma di "baccelliere" nel 1664 [6].

Nonostante alcune prove che i suoi progressi non fossero stati particolarmente buoni, Newton conseguì la laurea nell'aprile del 1665. Sembrerebbe che il suo genio scientifico non fosse ancora emerso, ma in un periodo di meno di due anni, quando Newton aveva ancora meno di 25 anni, iniziò progressi rivoluzionari in matematica, ottica, fisica ed astronomia. A cavallo tra il 1664 e il 1665 scoppiò nel paese un'epidemia di peste bubbonica che fece chiudere l'Università e portò Newton a dedicarsi ancora più accanitamente allo studio. Egli trascorse questi due anni principalmente nella sua città natale di Woolsthorpe dove poté dedicarsi allo studio ed alla meditazione; fino a quel momento non si hanno tracce di grandi scoperte ma, a causa del suo smisurato desiderio di conoscenza e sperimentazione, è noto che si ammalò per aver guardato troppo a lungo una cometa e gli aloni della luna [6].

Nel corso dei due anni di peste, ancor prima di aver compiuto venticinque anni, egli inventò il famoso Metodo delle flussioni (cioè il moderno calcolo integrale e differenziale), scoprì la legge di gravitazione universale e dimostrò con l'esperienza che la luce bianca è il risultato della combinazione di tutti i colori.

Un manoscritto, risalente al 20 maggio del 1665, rivela che Newton, a ventitré anni aveva sufficientemente sviluppato i principi del calcolo infinitesimale tanto da poter trovare la tangente e la curvatura in un punto di una curva continua. Egli dette al suo metodo il nome utilizzando il termine di "flussione" (dalla parola latina "fluere", scorrere), per indicare che si trattava di quantità variabili e della loro velocità di "flusso" o di "crescita" [6].

La seconda grande ispirazione che ebbe Newton, durante il suo ventitreesimo anno di vita, nel 1666 a Woolsthorpe, fu la legge di gravitazione universale.

Al suo ritorno da Cambridge, nel 1667, Newton fu eletto membro del Collegio della Trinità e nel 1669, all'età di ventisei anni, succedette a Barrow come professore di matematica. Le sue prime lezioni trattavano l'ottica: egli espose le sue scoperte e tracciò la sua teoria corpuscolare della luce. Questa teoria prevede che la luce è un'emissione di corpuscoli e non un fenomeno ondulatorio come Huygens ed Hooke affermavano. Le due teorie, in prima analisi contraddittorie, vengono combinate oggi per spiegare il fenomeno della luce. Esse si sono conciliate, dal punto di vista puramente matematico nella teoria moderna dei quanti [6].

Durante i due anni della peste, egli era giunto alla conclusione che la luce bianca non fosse un'entità semplice. Tutti gli scienziati dai tempi di Aristotele avevano creduto che la luce bianca fosse una singola entità di base, ma quando fece passare un sottile raggio di luce solare attraverso un prisma di vetro, Newton notò lo spettro di colori che si era formato e così sostenne che la luce bianca è in realtà una miscela di molti diversi tipi di raggi che vengono rifratti ad angoli leggermente diversi. Ogni tipo di raggio produce un diverso colore spettrale. Newton fu portato da questo ragionamento alla conclusione errata che i telescopi che utilizzavano lenti rifrangenti avrebbero sempre

sofferto di aberrazione cromatica. Nel 1668, Newton propose dunque la costruzione un telescopio a riflessione e se ne servì per osservare i satelliti di Giove con l'obbiettivo anche di verificare su di essi la sua teoria di gravitazione universale [30].

Il 1668 fu anche un anno importante per quanto riguarda la teoria del calcolo infinitesimale. Iniziarono infatti a circolare i lavori di un certo Marcatore, che attraverso un procedimento che impiegava una serie infinita di aree congiunte ad un'iperbole otteneva un metodo molto simile a quello di Newton. Quest'ultimo, volendo rivendicare la paternità, decise così di pubblicare i suoi lavori e diede l'incarico al dottor Barrow di far sì che la sua teoria entrasse in circolazione.

Al momento della sua elezione nella Royal Society, nel 1672, Newton comunicò il suo lavoro sui telescopi e sulla teoria corpuscolare della luce. Una commissione di tre membri, fra cui Hooke, approfittò dell'occasione per fare propaganda della teoria ondulatoria, a spese di quella corpuscolare di Newton. All'inizio egli reagì alla critica con una freddezza scientifica, ma era sempre combattuto tra due atteggiamenti: nella sua natura egli desiderava fama e riconoscimento, ma un altro lato di lui temeva le critiche ed il modo più semplice per evitare di essere criticato era non pubblicare nulla [30].

La diatriba con Hooke durò per molti anni e la suscettibilità che Newton dimostrò in questo evento ci viene confermata anche dalla sua lettera ad Oldenburg del 1673 nella quale dava le dimissioni da membro della Royal Society. Le ragioni di Newton riguardo le sue dimissioni erano di carattere finanziario e quando Oldenburg gli disse che il regolamento prevedeva che egli potesse essere membro senza pagare, Newton le ritirò.

Newton, infatti, quando si trattava di denaro, era molto accorto e quando morì, aveva messo da parte una bella fortuna, almeno per quell'epoca. Ma se era economo e prudente, era anche generosissimo e sempre disposto ad aiutare un amico nel bisogno mantenendo tutta la discrezione possibile [6].

Il periodo dal 1684 al 1686 fu una delle più grandi epoche della storia del pensiero umano. Abilmente persuaso da Halley, Newton finì per consentire a scrivere le sue scoperte astronomiche e dinamiche perché fossero pubblicate. Probabilmente nessun mortale si immerse mai in riflessioni profonde ed assidue come fece Newton per redigere i suoi *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.

Senza preoccuparsi della salute, Newton aveva dimenticato che è necessario all'uomo mangiare e dormire, mentre era sprofondato nella composizione del suo lavoro. Egli trascurava e dimenticava i pasti, svegliandosi da un sonno di qualche momento, restava seduto semi-vestito sulla sponda del letto per delle ore, percorrendo le tortuosità del suo labirinto matematico.

Nel 1686, i *Principia* furono presentati alla Royal Society e furono stampati nel 1687 a spese di Halley.

Qualche anno più tardi, il sistema newtoniano fu insegnato Cambridge (1699) e ad Oxford (1704). In Francia vi fu un ritardo di mezzo secolo, ma il misticismo finì per cedere il posto alla ragione e fu proprio in Francia che Newton trovò il suo più grande successore, Laplace, il quale si impose di continuare e completare i *Principia*.

Nel mese di gennaio del 1689, egli fu eletto per rappresentare l'Università alla "Convenzione"⁴ e presiedette il Parlamento fino al suo scioglimento nel febbraio del 1690. Egli non pronunciò mai discorsi, ma era assiduo alle sedute e non si mostrava nemico della politica. Nonostante fosse all'apice della sua carriera, visto come un leader dell'università e uno dei matematici più eminenti del mondo, la sua elezione al Parlamento potrebbe essere stata l'evento che gli fece capire che a Londra vi era qualcosa che avrebbe potuto attrarlo più del mondo accademico di Cambridge [30] ed il gusto che prese Newton alla "vita reale" di Londra ebbe come conseguenza la sua inattività scientifica [6].

Dopo aver subito un secondo esaurimento nervoso nel 1693, Newton si ritirò dalla ricerca. Le ragioni di questo crollo sono state discusse e i biografi hanno proposto molte teorie: avvelenamento chimico a seguito dei suoi esperimenti di alchimia; frustrazione per le sue ricerche; la fine di un'amicizia personale con Fatio de Duillier, un matematico di origine svizzera residente a Londra; e problemi derivanti dalle sue convinzioni religiose. Lo stesso Newton ha accusato la mancanza di sonno, ma questo era quasi certamente un sintomo della malattia piuttosto che la causa. Sembra che ci siano pochi motivi per supporre che la malattia fosse qualcosa di diverso dalla depressione, una malattia mentale di cui deve aver sofferto per gran parte della sua vita, forse aggravata da alcuni degli eventi che sono stati elencati [30].

Newton decise di lasciare Cambridge per assumere una posizione governativa a Londra diventando Warden of the Royal Mint nel 1696 e Master nel 1699. Tuttavia, non si dimise dalle sue posizioni a Cambridge fino al 1701. Come Master of the Mint, sommando le entrate delle sue proprietà, Newton divenne un uomo molto ricco, ma secondo l'opinione di alcuni, la posizione di Master sarebbe stata proposta a Newton semplicemente come una ricompensa per i suoi risultati scientifici e non per le sue doti di contabile. Newton però non la considerava come tale e diede un forte contributo al lavoro della Zecca guidandola nel difficile periodo della riconiazione. Egli fu particolarmente attivo anche nelle misure per prevenire la contraffazione della monetazione.

La notizia della grave malattia di Newton si sparse nel continente, dove naturalmente venne esagerata e l'anno stesso della sua guarigione (1693) Newton apprese per la prima volta che il calcolo integrale e differenziale erano conosciuti nel continente e che la paternità era attribuita a Liebniz.

Egli nei dieci anni che seguirono la pubblicazione dei *Principia*, divise il suo tempo fra lo studio dell'alchimia e della teologia, occupandosi più o meno involontariamente anche della teoria della Luna.

Newton e Liebniz erano ancora in termini cordiali, ma alcuni amici in comune decisero di metterli l'uno contro l'altro attraverso delle accuse di plagio nell'invenzione del calcolo integrale e

⁴La *Convention* è un'assemblea del Parlamento d'Inghilterra che si riunì tra il 22 gennaio e il 12 febbraio 1689, durante la quale venne approvato il *Bill of Rights*. L'adozione di questo documento pose le premesse per il successivo sviluppo del costituzionalismo liberale garantendo maggior potere decisionale al Parlamento che rappresentava i cittadini.

differenziale. Newton riconosceva ancora i meriti di Leibniz e anche Leibniz quelli di Newton e il clima tra i due rimase amichevole fino al 1712 quando, nacque il desiderio di conoscere chi dei due avesse inventato il calcolo differenziale ed integrale. La questione divenne affare di stato e tutta l'Inghilterra si schierò dalla parte di Newton, attribuendo al suo rivale il ruolo di mentitore e di ladro. Nacque una vera e propria disputa tra le due fazioni sostenitrici.

Il risultato di questo fu che la matematica, in Inghilterra, rimase completamente stagnante per un secolo dopo la morte di Newton mentre in Svizzera ed in Francia, camminando nel solco di Leibniz e migliorando il suo metodo, molto più avanzato dal punto di vista della notazione, fecero del calcolo infinitesimale uno strumento di ricerca semplice e maneggevole [6].

Nel 1701 e nel 1702, Newton rappresentò nuovamente l'Università di Cambridge al parlamento e nel 1703 fu eletto presidente della *Royal Society* e vi rimase per tutta la vita. Nel 1705, la regina Anna lo nominò Cavaliere per dargli riconoscenza dei suoi servizi di funzionario.

Il genio matematico di Newton non era ancora spento e come tutti i matematici in generale, ebbe una lunga carriera intellettuale.

Nel 1696, Bernoulli e Leibniz inventarono due diaboliche sfide da sottoporre ai matematici d'Europa. Tra questi vi era il problema della brachistocrona:

Prendendo a caso due punti sul piano verticale, qual è la forma della curva che deve seguire una particella (senza attrito) sotto l'influenza del peso per passar e dal punto più alto al punto più in basso nel tempo minimo?

Quando questo problema ebbe fatto disperare i matematici per sei mesi, fu riproposto e Newton ne sentì parlare per la prima volta il 26 gennaio del 1696, di ritorno da una stancante giornata di lavoro alla Zecca. Dopo pranzo risolvette il problema ed il giorno seguente comunicò le sue soluzioni alla *Royal Society* sotto il velo dell'anonimo. Ma nonostante questa precauzione, non poté dissimulare la sua identità perché, alla Zecca, egli costituiva la preda dei matematici e degli scienziati che volevano sempre trascinarlo in discussioni d'interesse scientifico. Vedendo la soluzione, Bernoulli gridò:

«Ah! Riconosco il leone dalla zampa.» [6, p. 95]

Newton dette ancora prova della sua validità intellettuale nel 1716, all'età di settant'anni. Leibniz aveva temerariamente proposto come sfida ai matematici d'Europa, mirando a Newton in particolare, un problema che gli sembrava piuttosto complicato. Questo problema consisteva nel trovare le traiettorie ortogonali di una famiglia di curve ad un parametro. Newton lo ricevette alle 5 di pomeriggio, tornando stanco dalla Zecca e scoprì la soluzione la sera stessa.

Alla fine dei suoi giorni, Newton ebbe tutti gli onori e la fama che un uomo possa mai desiderare. La sua salute si mantenne eccellente fino agli ultimi anni: non portava occhiali e in tutta la vita non perse che un dente, i suoi capelli imbiancarono presto, fin dalla trentina, ma restarono folti e soffici fino alla morte [6].

I suoi ultimi giorni furono profondamente umani e commoventi. Gli atroci dolori della "pietra"⁵ non gli facevano mai perdere la calma ed egli aveva sempre delle parole di simpatia per le persone che lo curavano. Verso la fine, una tosse persistente lo indebolì molto e infine si spense in pace, il 20 marzo 1727 (secondo il calendario gregoriano il 31 marzo), nel suo ottantacinquesimo anno di età. Fu sepolto nell'Abbazia di Westminster [6].

2.6.1 La produzione scientifica di Newton

Come già detto nella Sezione 2.3, relativa ad Archimede, a Newton si attribuisce la frase:

«Se ho potuto vedere più lontano degli altri è perché sono salito su spalle di giganti.»

Oltre ad Archimede, tra i giganti di cui Newton parlava vi erano sicuramente Cartesio, Keplero e Galileo. Tutti questi matematici lasciarono in eredità a Newton grandi scoperte ed invenzioni: Cartesio la geometria analitica, Keplero le tre leggi fondamentali del movimento dei pianeti e Galileo le prime tre leggi della dinamica [6].

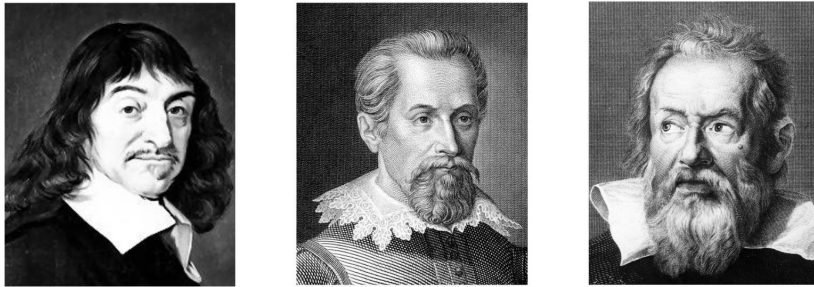


Figura 2.25: R. Cartesio, G. Keplero, G. Galilei.

Negli anni tra il 1664 e il 1666 Newton pose le basi di quelle che furono scoperte grandiose nei settori della matematica, dell'ottica e della meccanica e che lo resero il più grande matematico d'Europa e uno dei fisici più importanti di quel periodo.

Le sue prime scoperte, che risalgono ai primi mesi del 1665, furono il risultato della sua abilità di esprimere funzioni in termini di serie infinite. Nel 1665 Newton cominciò anche a riflettere sulla *flussione*, cioè sulla velocità con cui variano grandezze capaci di variare con continuità, o "fluenti", come lunghezze, aree, volumi, distanze, temperature. Da allora in poi, Newton collegò il problema degli sviluppi in serie a quello della velocità di variazione.

Il primo scritto sulla sua analisi infinita fu il *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, composto nel 1669 ma pubblicato solo nel 1711. In esso Newton scriveva:

«E qualsiasi cosa l'analisi comune [ossia l'algebra] esegua per mezzo di equazioni con un numero finito di termini (purché lo si possa fare), questo metodo può sempre eseguire la

⁵Con il termine "malattia della pietra" si indica il disturbo delle coliche renali. La colica renale è un dolore acuto dell'uretere provocato dal passaggio di calcoli (pietre) e che comporta prima dilatazione ed in seguito spasmi. Newton soffrì di questo disturbo negli ultimi anni della sua vita e morì nel dolore mentre era in atto una di queste coliche renali.

stessa cosa per mezzo di equazioni infinite. Così non ho esitato a dare ad esso lo stesso nome di "analisi". Infatti i ragionamenti usati in questa analisi non sono meno certi di quelli usati nell'altra, e le sue equazioni non sono meno esatte; sebbene noi mortali, con le nostre capacità di ragionamento molto limitate, non possiamo né esprimere né concepire tutti i termini di queste equazioni in modo da sapere esattamente in base ad essi le quantità che desideriamo ... Per concludere, possiamo giustamente ritenere che ciò spetti all'Arte analitica, con l'aiuto della quale è possibile determinare esattamente e geometricamente le aree e le lunghezze delle curve.»

Incoraggiati dall'esempio di Newton, i matematici successivi non cercarono più di evitare processi infiniti, come avevano fatto i Greci, perché ora erano considerati legittimi nel campo della matematica. Il *De analysi* conteneva, oltre alla ricerca sulle serie infinite, la prima esposizione sistematica della principale scoperta matematica di Newton: il calcolo infinitesimale.

Nella esposizione più conosciuta che Newton fece dei suoi metodi infinitesimali, egli considerava x e y come quantità "fluenti", di cui le quantità p e q rappresentavano le "flussioni" o velocità di variazione. Quando redasse questa esposizione del calcolo infinitesimale verso il 1671, sostituì p e q con le lettere puntate $\dot{x}$ e $\dot{y}$. Indicò le fluenti, di cui x e y erano le flussioni, con x' e y' . Raddoppiando i punti e le linee riuscì a rappresentare flussioni di flussioni o fluenti di fluenti. Si osservi che il titolo del lavoro, quando venne pubblicato molto tempo dopo nel 1742 (sebbene ne fosse apparsa una traduzione inglese nel 1736), non era semplicemente il metodo delle flussioni, ma *Methodus fluxionum et serierum infinitorum*. Nel 1676 Newton redasse una terza esposizione del suo calcolo infinitesimale, con il titolo *De quadratura curvarum*, cercando questa volta di evitare sia le quantità infinitamente piccole sia le quantità fluenti, sostituendole con quello che egli chiamava "metodo delle prime e ultime ragioni".

Qui Newton era effettivamente molto vicino al concetto di limite.

Il *De analysi* fu fatto circolare fra gli amici, tra cui John Collins e Isaac Barrow, e lo sviluppo della serie infinita binomiale fu comunicato per lettera a Oldenburg e a Leibniz; ma Newton non fece nulla per pubblicare i suoi risultati. La prima esposizione del calcolo infinitesimale che Newton abbia pubblicato apparve nei *Philosophiae naturalis principia mathematica*, il più ammirato trattato scientifico di tutti i tempi. La pubblicazione, avvenuta nel 1687, è considerata sia come data di nascita della meccanica classica, sia come atto conclusivo della rivoluzione scientifica.

Questo libro viene descritto generalmente come quello che presenta i fondamenti della fisica e dell'astronomia nel linguaggio della geometria pura ed effettivamente esso segue l'impostazione degli *Elementi* di Euclide: sono presenti assiomi, postulati e corollari tra cui i tre assiomi della Meccanica Classica cioè quelle che oggi vengono chiamate "Leggi di Newton".

L'opera è divisa in tre libri: i primi due riguardano la matematica, applicata ai moti dei corpi nel vuoto e nei mezzi resistenti come l'aria o l'acqua. Nel terzo libro, *De Mundi Systemate* (Sul sistema del mondo), Newton presentò la sua cosmologia, basata sull'idea che i pianeti si muovono nello spazio vuoto, attratti verso il Sole da una forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Mentre l'effetto di tale forza viene illustrato nei dettagli, la sua causa rimane misteriosa.

Nel primo e nel secondo volume Newton dà alcune importanti definizioni:

- la massa viene definita come "quantità di materia", prodotto della densità per il volume;
- la quantità di moto è data dal prodotto tra massa e velocità

e continua esponendo le tre fondamentali leggi del moto valide, seppur con qualche piccola modifica, anche oggi [31]:

Primo principio (di inerzia): Ogni corpo persevera nello stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, a meno che non sia costretto a cambiare da forze impresse a mutare questo stato

Secondo principio (variazione del moto): Il cambiamento di moto è proporzionale alla forza motrice impressa e avviene secondo la linea retta lungo la quale la forza è stata impressa (ossia $F = m \cdot a$, che Newton tuttavia non scrisse mai in tale forma)

Terzo principio (di azione e reazione) A ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria.

Nessuno prima di Newton aveva esposto questi principi in modo così chiaro e conciso. A queste leggi seguono alcuni corollari come per esempio la regola del parallelogramma per le forze, secondo cui due forze oblique si sommano con una risultante che è pari alla diagonale del parallelogramma che ha per lati le due forze.

Nel terzo libro dei *Principia*, chiamato *Sul sistema del mondo* Newton espose la legge di gravitazione universale. Secondo Newton, questa forza che agisce su un corpo di massa m , generata dal campo gravitazionale di un corpo di massa M , è data da:

$$\vec{F}_G = -G \frac{m \cdot M}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

dove $\vec{r}$ è il vettore che congiunge i centri di massa (da M a m), e G è la costante di gravitazione universale che fu determinata sperimentalmente solo da Henry Cavendish nel 1798.

Si noti che Newton non pubblicò nel terzo libro la legge di gravitazione nella formulazione algebrica riportata, ma la illustrò attraverso una serie di teoremi e proposizioni relativi al moto dei pianeti [31].

Tale formula, così come viene ancora oggi utilizzata, sarà espressa nei trattati successivi, in particolare quelli compilati dal matematico svizzero-tedesco Leonhard Euler.

La forma della legge di gravitazione universale non era nuova, ma Newton per primo dimostrò come, attraverso la legge di gravitazione universale, si possano calcolare le orbite dei pianeti (o di qualsiasi altro corpo), scoprendo così che esse possono essere anche paraboliche e iperboliche e che dall'ipotesi della gravitazione possono essere derivate le leggi di Keplero.

Grazie a questa teoria, descritta compiutamente nei *Philosophiae naturalis principia mathematica*, il mondo veniva presentato come una sorta di enorme macchina, il cui comportamento poteva essere spiegato e in buona parte previsto in base a pochi principi teorici. La nozione di gravitazione universale, ossia di azione istantanea a distanza, incontrò comunque una fortissima

opposizione da parte di Leibniz, che vedeva in essa un elemento di forte sapore metafisico, essendo convinto che l'unico modo di un corpo per influire su un altro fosse quello del contatto diretto.

Newton compì l'unificazione tra la fisica galileiana e l'astronomia di Keplero. Infatti lo scienziato inglese ricondusse ad un'unica causa la legge di gravitazione universale, le leggi di Keplero e quelle della caduta dei gravi. Questo risultato ebbe un'importanza cruciale in quanto Newton unificò i moti del cielo e della terra aprendo così la via a una moltitudine di applicazioni.

Nella concezione newtoniana dell'universo, resta difficile separare le sue idee religiose da quelle scientifiche. Newton sosteneva la semplicità, uniformità e infinitezza dell'universo, creato da un Dio trascendente, onnipotente ed eterno. Accortosi del fatto che, a causa dell'influenza degli altri pianeti, le orbite di ciascun pianeta non sono perfettamente ellittiche e non si richiudono su se stesse dopo una rivoluzione, Newton sostenne che Dio manda periodicamente i propri angeli a spostare i pianeti quanto basta per rimetterli su un'orbita perfettamente ellittica.

Newton si occupò anche di ottica, studiando la dispersione di un raggio di luce bianca che attraversa un prisma di vetro e si scompone nei vari colori. Egli si accorse per primo che se viene modificata la direzione dei raggi colorati attraverso l'utilizzo di una lente, in modo che questi convergano in un secondo prisma, si riottiene la luce bianca mentre, isolando un raggio colorato, e facendolo passare per un prisma esso rimaneva invariato. Da questa esperienza, Newton concluse che la luce bianca era formata dalla combinazione di vari colori.

Gli studi sulla natura della luce capovolsero la teoria di Hooke, secondo la quale i colori derivavano dalla rifrazione sui diversi materiali. Newton, al contrario, arrivò ad affermare che il colore non è una qualità della luce stessa e non dei corpi. Newton divenne, inoltre, un convinto sostenitore della teoria corpuscolare della luce: la luce è costituita da microscopiche particelle che vengono lanciate dalla sorgente in tutte le direzioni ad una velocità molto elevata. Le ricerche di Newton sulla luce, pubblicate nel 1704, furono inserite nell'*Opticks*.

Nell'opera, costituita da tre libri, vengono descritte le leggi dell'ottica geometrica ed i fenomeni della riflessione e della rifrazione. Newton attribuisce ad ogni colore un diverso indice di rifrazione e dichiara che la luce bianca del Sole può essere scomposta nei sette colori dello spettro che la compongono attraverso l'utilizzo di prismi.

Newton riuscì ad analizzare quelli che oggi sono detti anelli di Newton grazie all'utilizzo del telescopio riflettore da lui costruito. Secondo la sua deduzione egli concluse che gli aloni colorati che si vedevano nei telescopi del tempo fossero dovuti alla rifrazione della luce bianca (fenomeno chiamato "aberrazione cromatica"). Per ovviare a questo problema Newton costruì un telescopio riflettore che utilizzava uno specchio concavo per far convergere i raggi luminosi in un altro specchio di dimensioni inferiori ed inclinato di 45° che li dirigesse nell'oculare. La concavità dello specchio garantiva un'immagine ingrandita dell'oggetto ma una minima aberrazione cromatica.

Egli azzardò alcune teorie che tentavano di dare una spiegazione ai fenomeni luminosi. Queste teorie prevedevano l'esistenza di una sostanza finissima chiamata etere e diffusa nello spazio. La luce, secondo Newton, avrebbe riscaldato l'etere facendolo vibrare mentre questa sostanza avrebbe

rifratto la luce. Inoltre, la luce, avrebbe subito accelerazioni e decelerazioni per via delle variazioni di densità di questo mezzo.

In questa teoria la luce appariva come formata da corpuscoli ma, dopo che gli esperimenti ne accertarono la natura ondulatoria, le sue ipotesi furono abbandonate e si preferirono quelle di Hooke e Huygens. Oggi tuttavia la meccanica quantistica parla di dualismo onda-particella, anche se il modello di fotone accettato dalla scienza moderna si discosta notevolmente dal modello corpuscolare di Newton.

2.6.2 Il nuovo metodo per calcolare Pi Greco

Newton utilizzò il metodo delle flussioni ed il Teorema del Binomio per calcolare le aree sottese da certe curve. Il procedimento, ripreso dal libro *Viaggio attraverso il genio* di William Dunham [14], viene riportato di seguito e sarà oggetto di una delle tre attività laboratoriali che costituiscono il progetto di tesi. Questa attività è consultabile nell'Allegato C.

Newton cominciò considerando una circonferenza di centro $C = (\frac{1}{2}, 0)$ e raggio $r = \frac{1}{2}$. Newton conosceva l'equazione dell'intera circonferenza che è:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Dunque sviluppò i quadrati di binomi ed esplicitò y rispetto ad x , trovando l'equazione della semicirconferenza:

$$\begin{aligned} x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 &= \frac{1}{4} \\ y^2 &= x - x^2 \\ y &= \sqrt{x - x^2} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 - x} = x^{\frac{1}{2}}(1 - x)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Dopodiché egli utilizzò lo sviluppo del binomio. Questo può essere riassunto con la formula:

$$(1 + Q)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n}Q + \frac{(\frac{m}{n})(\frac{m}{n} - 1)}{2}Q^2 + \frac{(\frac{m}{n})(\frac{m}{n} - 1)(\frac{m}{n} - 2)}{2 \cdot 3}Q^3 + \dots$$

Nel nostro caso $Q = -x$ e $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ quindi

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - x} &= (1 - x)^{\frac{1}{2}} = \\ &= 1 + \frac{1}{2}(-x) + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{2}(-x)^2 + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2 \cdot 3}(-x)^3 + \dots = \\ &= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \frac{7}{256}x^5 - \dots \end{aligned}$$

L'equazione della semicirconferenza diventa quindi:

$$\begin{aligned} y &= x^{\frac{1}{2}}(1 - x)^{\frac{1}{2}} = \\ &= x^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \frac{7}{256}x^5 - \dots\right) = \\ &= x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}} - \frac{5}{128}x^{\frac{9}{2}} - \frac{7}{256}x^{\frac{11}{2}} - \dots \end{aligned}$$

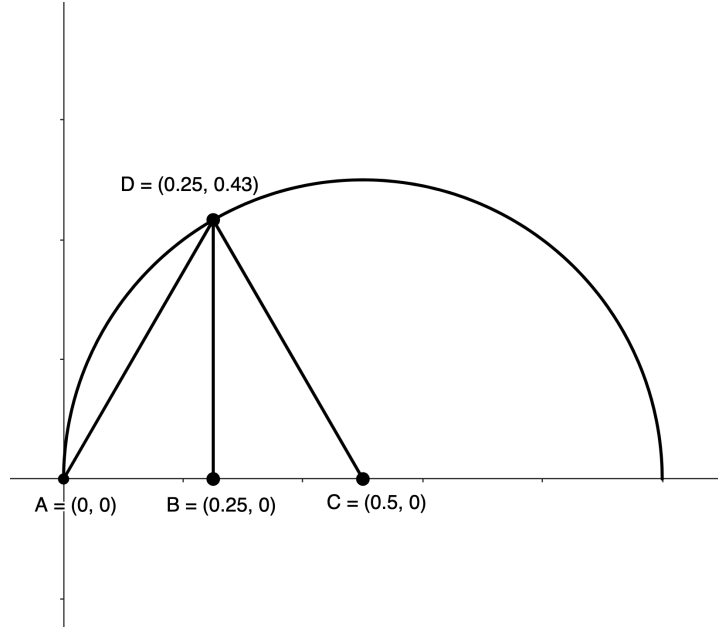


Figura 2.26: La costruzione geometrica del metodo di Newton.

Ora, preso il punto $B = (\frac{1}{4}, 0)$ sul diametro (cioè sull'asse x), Newton tracciò la perpendicolare $\overline{BD}$ al diametro $\overline{AE}$ (si confronti la Figura 2.26) e calcolò l'area ABD in 2 modi differenti:

1. Calcolo dell'area ABD con il metodo delle flussioni

Newton aveva scoperto un metodo per calcolare un'area delimitata da una curva fra il punto $O = (0,0)$ ed un punto qualsiasi dell'asse x . Si riportano le regole 1 e 2 del *De Analysi*.

Sia $\overline{AB}$ la base di una qualsiasi curva AD e BD la sua ordinata perpendicolare, chiamiamo $\overline{AB} = x$ e $\overline{BD} = y$ e siano $a, b, c, \dots$ quantità date e m, n due numeri interi.

1. Se $ax^{\frac{m}{n}} = y$ sarà $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}} = \text{Area}_{ABD}$.
2. Se il valore di y è composto di diversi termini di questo tipo, anche l'area sarà data dalle somme delle aree relative ai singoli termini calcolate nello stesso modo.

Nell'Appendice C si possono ritrovare gli estratti dell'opera originale di Newton in cui sono esplicitate queste due regole.

Le regole 1 e 2 del *De Analysi* forniscono un'approssimazione dell'area ABD cercata:

$$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\right) - \frac{1}{16}\left(\frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}}\right) - \dots = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{704}x^{\frac{11}{2}} - \dots$$

Per valutare l'area basta porre $x = \frac{1}{4}$ e i calcoli si semplificano

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{5}{2}} = \left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}.$$

E così via.

L'approssimazione dell'area ABD (ai primi nove termini) è perciò:

$$\frac{1}{12} - \frac{1}{60} + \frac{1}{3584} - \frac{1}{36864} + \frac{5}{1441792} - \dots - \frac{429}{163208757248} \approx 0.07677310678.$$

2. Calcolo dell'area ABD con metodo geometrico

Newton considera adesso l'area ABD dal classico punto di vista geometrico. Per prima cosa calcola l'area del triangolo $D\widehat{BC}$. Sapendo che $\overline{BC} = \frac{1}{4}$ e $\overline{CD} = \frac{1}{2}$ (raggio) e utilizzando Pitagora trova che:

$$\overline{BD} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Da cui si ricava l'area del triangolo $D\widehat{BC}$:

$$\text{Area}_{D\widehat{BC}} = \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{32}.$$

Newton cerca adesso l'area del settore circolare ACD . Siccome $\overline{BC}$ è lungo $\frac{1}{4}$ cioè esattamente metà dell'ipotenusa $\overline{CD}$, allora Newton riconosce di trovarsi di fronte ad un triangolo rettangolo con angoli di 30° , 60° , 90° ed in particolare l'angolo $B\hat{C}D$ misura 60° . Qui si capisce perché Newton abbia scelto esattamente quella semicirconferenza e la particolare posizione di $B = (\frac{1}{4}, 0)$: infatti solo scegliendo il punto $B = (\frac{1}{4}, 0)$ si ottiene un settore circolare con un angolo di 60° che è esattamente un terzo di un angolo piatto (180°) della semicirconferenza.

$$\text{Area}_{ACD} = \frac{1}{3} \text{Area}_{AED} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \pi r^2 \right) = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \pi \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] = \frac{1}{3} \frac{1}{2} \pi \frac{1}{4} = \frac{\pi}{24}.$$

L'area di ABD è quindi data dalla differenza tra il settore circolare ACD e l'area del triangolo $B\widehat{CD}$:

$$\text{Area}_{ABD} = \text{Area}_{ACD} - \text{Area}_{B\widehat{CD}} = \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32}.$$

Se ora si eguaglia questo risultato all'approssimazione ottenuta con il metodo delle flussioni e del binomio si trova che:

$$0.07677310678 = \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32}.$$

Da cui si ottiene che:

$$\pi = 24 \left(0.07677310678 + \frac{\sqrt{3}}{32} \right) \approx 3.141592668...$$

Capitolo 3

Continua il viaggio attraverso Pi Greco

In questo capitolo si illustra dettagliatamente la progettazione delle quattro unità didattiche che costituiscono l'intero progetto di tesi *Umanizzare la matematica. Continua il viaggio attraverso Pi Greco*. Il progetto, distribuito su cinque lezioni, viene descritto in maniera specifica rispetto agli obiettivi, ai materiali, alle metodologie e alle tempistiche previste per ogni lezione ed attività.

L'argomento trattato, come suggerisce il titolo, riguarda l'evoluzione e la storia delle scoperte riguardo Pi Greco che costituisce il nucleo centrale di questa tesi in cui si cerca di utilizzare la storia della matematica, in particolare le biografie e la vita dei personaggi, per umanizzare la matematica, contribuire a dare una possibile risposta al *justification problem* e motivare gli studenti nello studio di questa disciplina (si veda Capitolo 1, Sezione 1.1).

3.1 Struttura, target e obiettivi del progetto

3.1.1 Target

Le attività di questo progetto, sono rivolte alla scuola secondaria di secondo grado ed, in particolare, sono state pensate per il secondo biennio di un liceo scientifico.

In realtà, avendo come punto di partenza il *justification problem*, questo progetto potrebbe essere indirizzato verso target in cui la matematica non risulta essere una disciplina caratterizzante e dove si rende ancora più importante e complicato il compito di motivare gli studenti allo studio di questa materia.

Come spiegato nel Paragrafo 1.1.1, la necessità di motivare gli studenti e giustificare lo studio della matematica è, in realtà, una problematica presente in tutti gli indirizzi scolastici e l'inserimento della storia nella pratica d'aula, come è emerso dall'intero Capitolo 1, è una tipologia di lavoro che può giovare ed essere d'aiuto anche agli studenti già motivati nello studio della disciplina.

La scelta di questo particolare indirizzo e target rispecchia, non solo la suddivisione per ambiti e periodi presente nelle Indicazioni Nazionali come indicato nel Paragrafo 1.2.1, ma permette di procedere parallelamente al programma che gli alunni affrontano durante il secondo biennio in storia. In questo modo la biografia dei matematici, che si inserisce in ogni unità didattica, è coerente con quanto i ragazzi affrontano in storia, permettendo loro di fare collegamenti interdisciplinari e favorendo la costruzione di una visione unitaria della conoscenza matematica nel contesto storico in cui si è sviluppata.

3.1.2 Prerequisiti

I prerequisiti necessari per il corretto svolgimento del progetto sono:

- Le nozioni di trigonometria del primo biennio del liceo scientifico. Di seguito si riporta un estratto delle Indicazioni Nazionali [29] per i Licei relativi al primo biennio:

«Al teorema di Pitagora sarà dedicata una particolare attenzione affinché ne siano compresi sia gli aspetti geometrici che le implicazioni nella teoria dei numeri (introduzione dei numeri irrazionali) insistendo soprattutto sugli aspetti concettuali. [...] Saranno inoltre studiate le funzioni circolari e le loro proprietà e relazioni elementari, i teoremi che permettono la risoluzione dei triangoli e il loro uso nell'ambito di altre discipline, in particolare nella fisica.» [29, p. 339]

- Le nozioni di trigonometria del secondo biennio del liceo scientifico, in particolare: teorema per il calcolo dell'area di un triangolo qualsiasi, formule di duplicazione del seno e del coseno, formule di bisezione del seno e del coseno
- La conoscenza delle nozioni base riguardo i numeri reali e i numeri irrazionali.

3.1.3 Obiettivi e metodologia

Gli obiettivi generali del progetto sono in particolare due:

1. Umanizzare la matematica e contribuire ad eliminare i pregiudizi relativi al matematico e gli stereotipi connessi a questa professione
2. Motivare e incuriosire gli studenti attraverso un progetto che utilizza metodologie e strumenti differenti dalla tradizionale pratica d'aula.

Per quanto riguarda il primo obiettivo, che costituisce anche il titolo della tesi, si cerca di raggiungerlo attraverso l'introduzione delle biografie dei personaggi. La presentazione della vita dei personaggi mira a far emergere la natura umana della scienza matematica e dei matematici e, affianco all'evoluzione storica del concetto, lo studente, può ripercorrere le tappe umane della scoperta e della ricerca attorno ad esso, riscoprendone la bellezza e l'utilità. Inoltre, la storia, mostrando l'evoluzione e lo sviluppo dei concetti matematici, ne può favorire l'apprendimento; l'immersione nel contesto socio-culturale serve a contestualizzare l'argomento, facendo emergere quali siano state le esigenze pratiche o ricreative che hanno portato a determinate scoperte.

Per motivare gli studenti, oltre all'utilizzo della storia, si è pensato di far eseguire le schede di lavoro a gruppi, in un contesto laboratoriale. Questa metodologia di lavoro, meno utilizzata nella pratica d'aula tradizionale per questioni di tempo e di valutazione, risulta gratificante e motivante per gli studenti poiché consente di vedere concretamente il risultato del proprio lavoro e degli sforzi compiuti. Nell'ambito della didattica laboratoriale, l'utilizzo di strumenti e tecnologie promuove un insegnamento non più esclusivamente recettivo, ma che stimola le capacità di ragionamento e creative, che mette al centro l'apprendimento per scoperta e valorizza l'importanza delle scienze e del sapere nel suo complesso.

3.1.4 Struttura

Il progetto *Continua il viaggio attraverso Pi Greco* è stato costruito attorno a quattro personaggi e ad ognuno di questi è stata dedicata un'unità didattica:

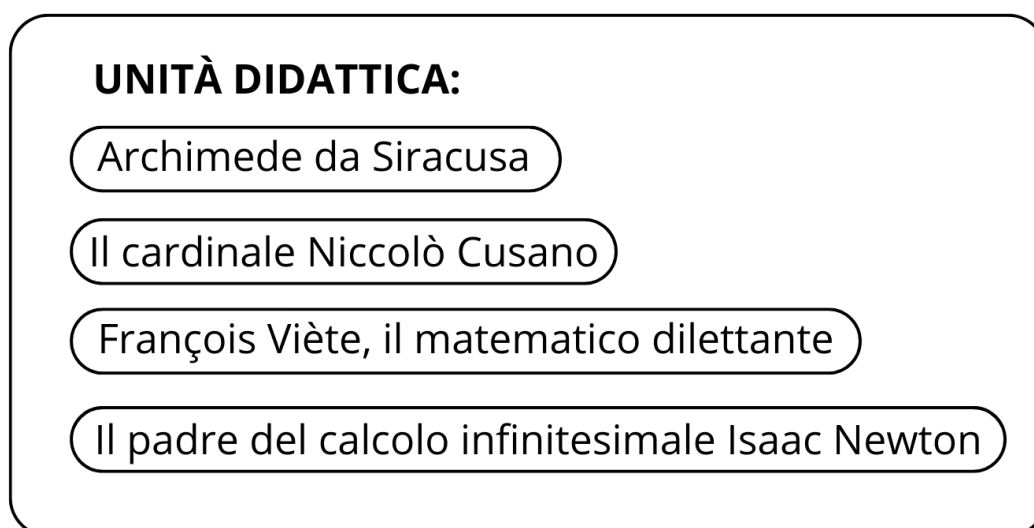


Figura 3.1: Progetto "Continua il viaggio attraverso Pi Greco"

Le quattro unità verranno sviluppate in 10 ore curriculari di matematica suddivise in cinque lezioni e saranno svolte in aula con la partecipazione del professore di Matematica e Fisica della classe.

All'interno di queste cinque lezioni, tra l'unità didattica dedicata a Cusano e quella dedicata a Viète, è stato pensato di inserire una breve lezione di spiegazione sull'approssimazione di numeri tramite prodotti infiniti. L'obiettivo di questa lezione è problematizzare l'uso ed il significato dei "puntini" che compaiono in alcune formule che descrivono i numeri decimali infiniti (per esempio π , $\sqrt{2}$, ecc.) o processi infiniti. Si vuole costruire un discorso che non preveda la formalizzazione di questi concetti, ma che miri all'introduzione di questi per permettere la presentazione delle formule infinite che saranno poi utilizzate nelle attività su Viète e Newton e getteranno le basi

per la conseguente classificazione della costante Pi Greco tra i numeri reali trascendenti.

Le quattro unità didattiche costituiscono il continuo, dal punto di vista cronologico, del lavoro della Dott.ssa Solmi [43]. Quest'ultimo, avente lo stesso punto di partenza, ma obiettivi leggermente differenti, si concentra sulla storia più antica di Pi Greco e sull'evoluzione storica della costante. Le attività sperimentate sono cinque: Tra il Tigri e l'Eufrate, L'antico Egitto, Euclide d'Alessandria, Archimede di Siracusa e L'antica Cina.

Il personaggio di Archimede, condiviso con il progetto della Dott.ssa Solmi, viene ripreso ed analizzato dando più spazio alla vita ed alla biografia di questo scienziato. La lezione elaborata sulla sua figura non prevede schede di attività e verrà utilizzata come introduzione al progetto: in questa lezione, dopo un breve riassunto della storia antica di Pi Greco e la presentazione di Archimede e del suo metodo di approssimazione di Pi Greco, si chiariranno le modalità di svolgimento, gli obiettivi e le attività del progetto e si definiranno i gruppi di lavoro che saranno mantenuti per l'intero progetto.

Nella lezione che conclude questo progetto, oltre alla figura del padre del calcolo infinitesimale, Isaac Newton, e del suo lavoro riguardo Pi Greco, si trarranno le conclusioni sulla storia di Pi Greco e sulla quadratura del cerchio aprendo la trattazione del concetto di limite che verrà introdotto in maniera informale e discorsiva per preparare gli studenti alla successiva formalizzazione che avverrà soltanto nell'anno scolastico successivo.

Tutte le lezioni che prevedono la sperimentazione di un'unità didattica saranno caratterizzate dall'introduzione di una linea del tempo nel quale verranno inseriti, accanto ai protagonisti delle quattro unità, i personaggi e le scoperte inerenti Pi Greco.

Attività "Identikit"

Con l'obiettivo di aumentare l'interesse ed enfatizzare le qualità e le capacità del gruppo, si è pensato di proporre ai ragazzi una ricerca guidata sulla vita dei personaggi. La classe sarà divisa in piccoli gruppi e ad ognuno di essi verrà assegnato un personaggio sul quale compiere la ricerca. Questo lavoro si concluderà con una presentazione espositiva della durata di 10-15 minuti che ogni gruppo dovrà compiere sul personaggio assegnatogli. L'esposizione avverrà all'inizio della lezione che vede come protagonista il personaggio dell'unità didattica relativo ad ogni gruppo.

Le domande di ricerca sulle quali si basa l'attività assegnata ai ragazzi sono:

1. Come si interseca la vita del personaggio con la matematica?
2. Che mestiere fa e di cosa si occupa?
3. Scrivere tre curiosità relative alla vita o al carattere del personaggio.
4. È un personaggio famoso? Se sì, per cosa?
5. Scrivere due o tre eventi storici significativi avvenuti durante la vita del personaggio.

6. Inserire una foto, una caricatura, un disegno o un'immagine del personaggio.

Ognuna di queste domande è stata elaborata sulla base degli obiettivi generali del progetto precedentemente descritti.

In particolare, le Domande 1, 2 e 4 mirano a far emergere che un individuo che si occupa di matematica non sempre è un matematico di professione. A tal proposito è stato richiesto anche di indicare se il personaggio è famoso o meno per mettere in luce come, molto spesso nel corso della storia della matematica, alcuni personaggi fondamentali per lo sviluppo di questa disciplina siano rimasti sconosciuti o siano stati conosciuti per questioni non scientifiche.

La Domanda 3 è stata pensata per far emergere la personalità ed il carattere di questi individui. La ricerca delle curiosità ha come obiettivo specifico quello di valorizzare ed identificare il personaggio all'esterno della sua carriera scientifica e matematica, oltre che stimolare l'interesse degli studenti verso la persona. In particolare, questa domanda, si caratterizza come fondamentale per l'attività, poiché è proprio attraverso le curiosità sul personaggio che gli studenti possono apprezzare che dietro lo scienziato o lo studioso c'è un essere umano, con pregi, difetti, antipatie, amicizie, manie e caratteristiche che lo identificano, abbattendo i pregiudizi e gli stereotipi su questa professione.

La Richiesta 5 è stata proposta ai ragazzi per far emergere alcune caratteristiche del contesto nel quale si inserisce il personaggio. Un'analisi, seppur parziale, della prospettiva socio-economica dell'epoca in cui ha vissuto il personaggio, oltre ad inserirsi negli obiettivi che uno studente del liceo deve raggiungere al termine del percorso (si veda la Sezione 1.2.1), risulta necessaria per far emergere il lato umano e le difficoltà che i protagonisti delle unità didattiche hanno affrontato: la presenza di guerre, la presenza di malattie, un clima politico instabile, ecc.

La Richiesta 6, di inserire nella presentazione un'immagine o una caricatura del personaggio, è stata pensata per dare un volto al personaggio. Molto spesso i matematici o gli scienziati che vengono studiati in ambito scolastico rimangono, nella migliore delle ipotesi, solamente dei nomi. Si è pensato che la ricerca diretta e la figurazione del volto del personaggio, potesse aiutare gli studenti a collegare i concetti matematici al personaggio che li ha scoperti o studiati. Questa particolare richiesta si inserisce anche tra quelle che hanno come obiettivo quello di abbattere i pregiudizi riguardo alla figura e alle caratteristiche fisiche e sociali del matematico che saranno indagati anche nei questionari descritti nella sezione successiva e visionabili nell'Appendice D.

3.1.5 Questionari ed interviste

All'interno delle cinque lezioni saranno inseriti anche due questionari realizzati con *Google Moduli*. I due questionari possono essere visionati nell'Appendice D.

Il primo questionario *Cosa sai di Pi Greco?* (Allegato D.1), di carattere preliminare, sarà inserito nella lezione iniziale relativa ad Archimede. In questo Modulo, le domande hanno la finalità di indagare la conoscenza pregressa degli studenti riguardo Pi Greco e la quadratura del cerchio.

Inoltre, sono state inserite alcune domande per far emergere eventuali pregiudizi inerenti alla matematica ed al matematico di professione.

Il secondo questionario *La conclusione del percorso* (Allegato D.3) è stato ideato per essere la conclusione effettiva del progetto dunque ha l'obiettivo di indagare le conoscenze degli studenti su Pi Greco e la quadratura del cerchio, ma anche di raccogliere le opinioni degli studenti riguardo il loro gradimento sul percorso svolto.

Al termine del percorso, è stato pensato di proporre al professore e a due studenti campione, un maschio ed una femmina, una intervista conclusiva. Per quanto riguarda gli studenti, l'obiettivo dell'intervista è quello di approfondire le risposte relative al questionario finale e raccogliere un'opinione più approfondita rispetto al progetto.

Le domande che verranno proposte ai due ragazzi selezionati per l'intervista sono:

1. Nel quiz preliminare era richiesto di scrivere 5 aggettivi con i quali tu descriveresti un matematico. Ti ricordi quale fosse la tua risposta? Alla luce del progetto svolto, modifichereesti la tua risposta? Come? Perché?
2. Quale matematico hai approfondito durante il percorso? Ti è piaciuto scoprire alcuni aspetti della sua vita? Perché? C'è qualcosa che ti ha incuriosito o colpito particolarmente del matematico che hai approfondito o degli altri che hai visto durante il percorso? Pensi che l'aver scoperto alcuni aspetti biografici dei matematici abbia aiutato o ostacolato il tuo apprendimento relativamente ai concetti incontrati durante il percorso? Pensi che l'aver scoperto alcuni aspetti biografici dei matematici abbia favorito o limitato il tuo interesse durante il percorso?
3. Come ti sei sentito/a a lavorare sui documenti storici? Ti è piaciuto oppure no? Perché? C'è un documento che ti è piaciuto di più? Perché? Pensi che l'aver usato documenti storici abbia aiutato o ostacolato il tuo apprendimento relativamente ai concetti incontrati durante il percorso? Pensi che l'aver usato documenti storici abbia favorito o limitato il tuo interesse durante il percorso?
4. Qual è l'aspetto che ti è piaciuto di più in questo percorso? Che cosa invece ti è piaciuto di meno?

Per quanto riguarda l'intervista al professore, le domande d'indagine sono:

1. La presentazione della biografia dei personaggi che hanno caratterizzato la storia di Pi Greco aveva come obiettivo principale quello di "umanizzare la matematica" cioè distruggere quell'aura mistica e negativa che circonda questa disciplina per restituirle il calore e la bellezza della creatività umana. Pensa che nel complesso l'attività abbia raggiunto lo scopo per il quale è stata ideata?
2. Che cosa ha funzionato nell'attività e cosa no? Cosa cambierebbe per migliorare il progetto?

3. Il coinvolgimento degli alunni, rispetto alla lezione tradizionale, è stato maggiore o minore? Gli alunni sono stati più o meno attivi e coinvolti? Le metodologie usate sono state adeguate e hanno favorito il coinvolgimento?
4. L'utilizzo di un approccio storico affiancato ad una attività di tipo laboratoriale pensa possa essere d'aiuto ai ragazzi nell'apprendimento? Quali sono secondo lei i punti di forza e gli svantaggi di questo tipo di lavoro? Cosa ne pensa dell'utilizzo di fonti storiche?

Queste domande mirano ad indagare l'opinione del professore riguardo la partecipazione degli studenti, qualità e riuscita del progetto e l'utilizzo di un approccio storico/biografico per l'insegnamento della matematica.

3.2 Archimede da Siracusa

L'unità didattica relativa ad Archimede, come accennato precedentemente, costituisce la lezione introduttiva dell'intero percorso. Questa lezione, della durata indicativa di due ore, verrà svolta con un anticipo di qualche settimana rispetto alle altre, per permettere agli studenti di svolgere il compito che gli verrà assegnato. La lezione sarà presentata tramite l'utilizzo di Canva, una piattaforma con la quale è possibile produrre in maniera pratica ed accattivante alcune presentazioni tipo *PowerPoint*.

Materiali: Presentazione Canva fornita dall'insegnante, telefono cellulare per rispondere al questionario, QR-code questionario, bigliettini per l'assegnazione casuale dei personaggi ai gruppi.

Durata: 2 ore.

Obiettivi: Introdurre il progetto, presentare il personaggio di Archimede e riassumere la storia antica di Pi Greco per fornire un quadro generale e completo dell'evoluzione di questa costante.

Descrizione delle attività: La lezione può essere divisa in quattro fasi:

Fase 1: Presentazione del progetto, definizione degli obiettivi, somministrazione del questionario "Cosa sai di Pi Greco?", spiegazione dell'attività "Identikit" e attribuzione del compito di ricerca per la lezione successiva. Divisione della classe in gruppi.

Fase 2: Presentazione del personaggio di Archimede tramite modalità "Identikit" e spiegazione del metodo di esaurimento utilizzato per l'approssimazione di Pi Greco.

L'attività "Identikit" su Archimede, è stata realizzata attraverso due modalità differenti: la prima attraverso Canva, e la seconda "a mano" tramite cartellone, per mostrare ai ragazzi più possibilità di espressione. Di seguito si riportano le due presentazioni:



Figura 3.2: Attività "Identikit" Archimede tramite cartellone

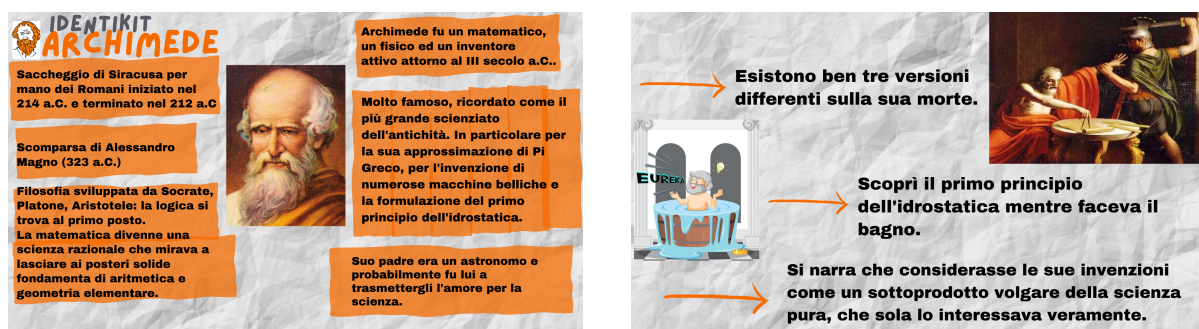


Figura 3.3: Attività "Identikit" Archimede tramite Canva

Fase 3: Riassunto breve della storia di Pi Greco tramite le civiltà dei Babilonesi, Egizi, Greci, Cinesi, Indiani.

Fase 4: Introduzione della duplice natura della ricerca su Pi Greco: la ricerca di una buona approssimazione per un uso pratico e la caratterizzazione di Pi Greco come numero. Questa presentazione sarà necessaria per il collegamento alla lezione successiva.

3.3 Il cardinale Niccolò Cusano

L'unità didattica che vede come protagonista la figura di Niccolò Cusano, sarà svolta qualche settimana dopo la lezione su Archimede per permettere ai ragazzi di svolgere la ricerca sulla biografia dei personaggi, come descritto nel paragrafo precedente.

La lezione, della durata indicativa di 2 ore, sarà introdotta proprio dalla presentazione dei gruppi a cui è stata assegnata la ricerca riguardo Niccolò Cusano. Ogni gruppo avrà a disposizione 10/15 minuti per esporre il proprio lavoro.

La lezione continuerà con un'integrazione da parte della sottoscritta rispetto alle informazioni esposte dagli studenti. Questa integrazione risulta necessario al fine di far emergere in modo chiaro il contributo filosofico e matematico di Cusano.

Al contrario dell'unità didattica su Archimede, quella sul cardinale Niccolò Cusano prevede lo svolgimento di un'attività di tipo laboratoriale, le cui schede sono disponibili nell'Allegato A, e che verrà descritta più dettagliatamente in seguito.

Agli studenti, divisi in gruppi, è stato chiesto di fotografare e pubblicare tramite la piattaforma Padlet ogni scheda dell'attività una volta terminata, indicando il nome del gruppo di appartenenza. La piattaforma permette la condivisione di foto, documenti e file in tempo reale, tramite un QR-code. Questo modo di consegnare è stato pensato per avere un feedback riguardo l'avanzamento di ogni gruppo rispetto l'attività, per avere a disposizione su schermo tutte le attività dei ragazzi e dunque la possibilità di discutere insieme a loro lo svolgimento dell'attività e le eventuali difficoltà.

Al termine della lezione è prevista una spiegazione da parte della sottoscritta riguardo la dimostrazione della quadratura di Niccolò Cusano al fine di mettere in luce le criticità e guidare all'errore. Verranno anche proposte le critiche mosse al cardinale da parte dei matematici dell'epoca Toscanelli e Regiomontano.

3.3.1 Il cardinale Niccolò Cusano e la quadratura del cerchio

Materiali: Scheda *Cusano e la quadratura del cerchio* (Allegato A) fornita dall'insegnante, telefono cellulare per la condivisione delle risposte tramite la piattaforma Padlet.

Durata: 60-70 minuti.

Obiettivi: Attraverso la somministrazione del documento originale della dimostrazione di Cusano (tradotto in italiano da Federica de Felice [13]) si vuole mostrare un modo di fare matematica che risulta inusuale rispetto alla tradizionale pratica d'aula e far comprendere agli studenti l'importanza e l'utilità del linguaggio simbolico moderno.

Descrizione dell'attività: L'attività può essere scandita in 3 fasi

Fase 1: L'attività propone una lettura di alcuni estratti del testo originale della dimostrazione di Cusano ai quali si alternano 8 domande di carattere sia teorico che pratico per la comprensione del testo. Le domande di carattere pratico (1, 3, 5, 7) richiedono di rappresentare alcuni elementi definiti da Cusano per la sua dimostrazione attraverso l'utilizzo di colori differenti, oppure richiedono di esplicitare il calcolo di alcune formule che il cardinale svolge attraverso il linguaggio discorsivo tradizionale. Le domande di carattere teorico (2, 4, 6) richiedono invece di ragionare sul rapporto che esiste tra gli elementi o di dare un'interpretazione personale del ragionamento di Cusano, e hanno l'obiettivo di guidare alla comprensione.

Fase 2: L'attività su Cusano continua con una ricapitolazione del ragionamento di Cusano che mette in evidenza, attraverso un linguaggio algebrico moderno, le sue conclusioni ed

i suoi ragionamenti logici. Questa parte dell'attività prevede esclusivamente la lettura e la comprensione del ragionamento da parte dei gruppi e non sono previste domande o rielaborazioni.

Fase 3: Le ultime domande, la numero 8 e la numero 9, si differenziano dalle altre richieste sia per l'attività che propongono, sia per gli obiettivi. Nella 8, infatti, viene richiesta la lettura della traduzione del testo integrale della dimostrazione di Cusano e si richiede di individuare e riscrivere un enunciato tra le proposizioni utilizzate da Cusano nel suo ragionamento attraverso la struttura canonica di ipotesi e tesi. L'obiettivo è quello di mostrare agli studenti un differente modo di fare matematica rispetto al rigido schema proposto dalla pratica d'aula tradizionale e far emergere l'utilità e la semplicità della matematica moderna in termini di linguaggio e procedimento. L'ultima domanda, invece, richiede agli studenti di individuare le possibili criticità del ragionamento di Cusano e di riportarle secondo una propria interpretazione.

3.4 François Viète, il matematico dilettante

L'unità didattica dedicata alla figura di François Viète è prevista dopo ad una lezione di un'ora riguardo l'approssimazione tramite prodotti infiniti. Questa lezione si è resa necessaria per preparare i ragazzi ai risultati ottenuti su Pi Greco da Viète e successivamente da Newton (si vedano Sezione 2.5.2 e Sezione 2.6.2 rispettivamente).

La lezione relativa a François Viète inizierà con l'esposizione della ricerca dei gruppi a cui era stato assegnato questo personaggio. Anche per questa attività sono previsti 10-15 minuti per gruppo.

La lezione continuerà con un breve riassunto della vita di François Viète nel quale verranno espresse le sue brillanti doti di matematico, seppur dilettante, attraverso le sue scoperte in algebra (per l'approfondimento della sua biografia e della sua produzione matematica si veda Capitolo 2, Sezione 2.5). Anche questa unità didattica prevede un'attività laboratoriale tramite delle schede di lavoro che possono essere visionate nell'Allegato B.

L'unità didattica terminerà con un'ulteriore spiegazione, tramite l'utilizzo di una presentazione Canva, da parte dell'insegnante riguardo agli sviluppi sulla costante Pi Greco successivi a Viète che serviranno per introdurre l'ultima unità didattica del progetto: quella relativa a Isaac Newton.

3.4.1 Viète e la prima espressione numerica di Pi Greco

Materiali: Scheda *Viète e la prima espressione numerica di Pi Greco* (Allegato B) fornita dall'insegnante.

Durata: 45 minuti.

Obiettivi: Attraverso la somministrazione del documento originale dove è descritta la formula di Viète tratto dall'opera *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber* [46] si desidera mostrare agli studenti un linguaggio ancora differente rispetto a quello moderno ma in

evoluzione: il linguaggio dell'algebra sincopata. Nell'attività è richiesto ai ragazzi di dedurre dal testo originale in latino la formula di Viète per l'approssimazione di Pi Greco. L'obiettivo di questa proposta è soprattutto quello di mettere in evidenza le complicità di un linguaggio non ancora maturo e definito in confronto a quello moderno.

Descrizione dell'attività: L'attività prevede un totale di 9 richieste e può essere scandita in 3 fasi:

Fase 1: La prima richiesta è quella di tradurre dal testo originale la formula di Viète in termini moderni e costituisce un'attività differente rispetto alle altre per obiettivi e modalità

Fase 2: Le domande dalla 2 alla 8 mirano alla ricostruzione del procedimento utilizzato da Viète per raggiungere la sua formula. In particolare, la domanda 2 richiede una costruzione geometrico-pratica che verrà presa come riferimento per l'intera attività. Le domande dalla 3 alla 8 richiedono di sviluppare ed esplicitare alcuni calcoli per il poligono di partenza di $2n$ lati e poi generalizzare il procedimento per poligoni di $2^k n$ lati procedendo passo passo con la scrittura dei rapporti tra i poligoni che ad ogni iterazione raddoppiano il numero dei lati. L'ultima domanda, la numero 8, chiede di dedurre da tutto il ragionamento compiuto la formula di Viète. Per svolgere quest'ultima richiesta è stato inserito un suggerimento finale che invita a valutare Pi Greco come un irrazionale la cui rappresentazione sarà infinita e a riprendere in considerazione il documento originale per avere un ulteriore riscontro.

Fase 3: Riconsegna delle schede da parte dei gruppi e breve discussione riguardo lo svolgimento del progetto: condivisione dei procedimenti e delle difficoltà riscontrate

3.5 Il padre del calcolo infinitesimale Isaac Newton

L'ultima unità didattica del progetto riguarda la figura del padre del calcolo infinitesimale Isaac Newton. La struttura della lezione è la stessa delle precedenti: l'introduzione all'attività è costituita dall'esposizione dei gruppi a cui è stato assegnato questo personaggio e avrà una durata di 10-15 minuti per gruppo. Dopodiché, attraverso presentazione Canva, si compirà un breve riassunto della biografia di Newton mettendo in risalto le principali scoperte di questo personaggio (per l'approfondimento della sua biografia e della sua produzione matematica si veda Capitolo 2, Sezione 2.6). In particolare, gli argomenti presentati saranno il Teorema del Binomio e il Metodo delle flussioni che verranno utilizzati, sempre in modo guidato, dagli studenti nell'attività relativa a questo personaggio: *Newton e il nuovo metodo per calcolare Pi Greco* che è possibile visionare nell'Allegato C.

Questa unità costituisce la fine del progetto e, al termine dell'attività laboratoriale, verrà lasciato spazio per trarre le conclusioni sull'intero progetto e sull'evoluzione di Pi Greco. La linea del tempo verrà aggiornata e saranno inserite le date in cui furono dimostrate l'irrazionalità (1781) e la trascendenza (1882) di Pi Greco.

Al termine di tutto il discorso, mettendo a confronto il metodo di esaustione antico e il nuovo calcolo infinitesimale, il personaggio di Archimede e quello di Newton, si sposterà l'attenzione sul fatto che, dopo il calcolo infinitesimale e l'utilizzo delle serie matematiche, con l'invenzione e l'utilizzo di computer sempre più efficienti, la ricerca di una buona approssimazione di Pi Greco si è spostata dalla ricerca di un metodo che approssimi Pi Greco per un uso di tipo prettamente pratico, alla valutazione di un metodo rispetto all'efficienza dell'equazione che converge a Pi Greco con la massima rapidità.

Inoltre, tra le conclusioni, si cercherà di far emergere come, sulle orme dei personaggi approfonditi in questo progetto, gli studenti abbiano affrontato teorie che ancora non avevano studiato e, proprio come i protagonisti del progetto, queste teorie verranno formalizzate solamente in seguito al loro utilizzo. In particolare, la nozione ed il concetto di limite, usati nella convergenza delle serie di approssimazione di Viète e Newton, gli studenti lo formalizzeranno nell'anno scolastico successivo, ma ne hanno già fatto esperienza in queste attività.

3.5.1 Newton e il nuovo metodo per calcolare Pi Greco

Materiali: Scheda *Newton e il nuovo metodo per calcolare Pi Greco* (Allegato C) fornita dall'insegnante.

Durata: 45 minuti.

Obiettivi: Anche in questa attività viene riportato un estratto del documento originale del *De analysi* di Newton [34], ma a differenza delle altre attività, in questa scheda viene proposta già la traduzione moderna delle Regole utilizzate da Newton all'interno del suo ragionamento. Questa scelta è stata compiuta prima di tutto perché la lettura del documento originale ed il conseguente utilizzo nella risoluzione dell'attività sarebbe risultato troppo complicato. Si è ritenuto che anche solo confrontare il linguaggio simbolico-algebrico dell'epoca, ancora in sviluppo, con quello moderno e tradizionale dei libri di testo, potesse essere un'attività interessante ed efficace per fare apprezzare agli studenti l'evoluzione del linguaggio matematico.

Descrizione dell'attività: L'attività, similmente alle altre, è costituita da 6 domande e può essere divisa in 3 fasi:

Fase 1: Le domande 1, 2 e 3 richiedono di produrre una costruzione geometrico-pratica della trattazione di Newton e la scrittura dell'equazione della semicirconferenza utilizzata nel ragionamento. Di seguito a queste richieste viene proposto lo sviluppo del binomio utilizzato da Newton fornito agli studenti in maniera esplicita. Questo sviluppo verrà utilizzato nell'equazione della semicirconferenza trovata precedentemente

Fase 2: L'approssimazione di Pi Greco raggiunta da Newton si basa sul confronto di due metodi differenti: il metodo delle flussioni ed un metodo geometrico più tradizionale; entrambi vengono utilizzati per approssimare l'area di una regione ABD con un lato curvo (si veda la Figura 2.26). Il Metodo delle flussioni applicato a questa area è

stato riportato in modo esplicito, senza effettuare richieste, perché la comprensione e l'utilizzo esplicito di questo metodo in maniera autonoma da parte degli studenti avrebbe richiesto molto più tempo.

Il secondo metodo, quello geometrico, è stato invece proposto agli studenti, seppur in maniera guidata dalle domande numero 4 e 5.

Nella domanda numero 6 viene richiesto di mettere a confronto i due calcoli dell'area ABD per ottenere l'approssimazione di Pi Greco di Newton.

Fase 3: Riconsegna delle schede da parte dei gruppi e breve discussione riguardo lo svolgimento del progetto: condivisione dei procedimenti e delle difficoltà riscontrate durante il laboratorio.

Capitolo 4

Lo svolgimento in aula

In questo capitolo, dopo aver descritto le attività del progetto specificando le modalità, gli obiettivi ed i materiali per ogni unità didattica (si veda Capitolo 3), si analizza lo svolgimento in aula .

L'intero progetto è stato ideato per essere svolto in una classe quarta di un liceo scientifico. Grazie alla disponibilità del professor Fabio Filippi, professore di matematica e fisica, sin da subito, è stata individuata la classe in cui si sarebbe effettuata la sperimentazione: una classe quarta ad indirizzo musicale del Liceo Scientifico Albert Einstein di Rimini.

Il gruppo classe, secondo le informazioni fornite dal professore, si distingue per vivacità, impegno e partecipazione ed è composto da ventidue alunni: dieci studentesse e dodici studenti.

Le lezioni si sono svolte nell'aula in cui la classe svolge regolarmente lezione che, come ogni aula del liceo, è dotata di proiettore e computer con connessione internet. Le dimensioni dell'aula e la collaborazione degli studenti hanno permesso di svolgere le attività laboratoriali in gruppi nella stessa aula, senza la necessità di recarsi in laboratorio.

L'intero progetto, come previsto, è stato suddiviso in cinque lezioni che si sono svolte nelle seguenti date:

LEZIONE	ARGOMENTO	DATA
1	ARCHIMEDE DA SIRACUSA	22/12/22
2	APPROSSIMAZIONE E SIGNIFICATO DEI "..."	12/01/23
3	IL CARDINALE NICCOLÒ CUSANO	13/01/23
4	FRANÇOIS VIÈTE, IL MATEMATICO DILETTANTE	14/01/23
5	IL PADRE DEL CALCOLO INFINITESIMALE ISAAC NEWTON	19/01/23

Figura 4.1: Suddivisione delle lezioni, argomenti e date

La divisione dei gruppi è avvenuta durante la Lezione 1 su Archimede ed è stata affidata agli

alunni stessi. I ventidue alunni sono stati divisi in sei gruppi: quattro composti da quattro alunni e due da tre alunni. A posteriori, la scelta di lasciare agli studenti il compito di organizzare i gruppi, si è rivelata non sempre funzionale poiché si sono venuti a formare gruppi eterogenei per quanto riguarda le competenze rispetto alla materia ed alcuni hanno avuto più difficoltà di altri in certe attività. La scelta dei compagni è avvenuta secondo un criterio di rapporto interpersonale che non ha favorito la creazione di nuovi rapporti, anche se ha sicuramente consolidato quelli già presenti (come verrà poi dichiarato anche nella prima intervista descritta nel capitolo successivo alla Sezione 5.3).

Ad ogni gruppo è stato assegnato uno dei tre personaggi in maniera casuale attraverso un'estrazione. Ogni personaggio è stato assegnato a due gruppi differenti. La consegna del compito di ricerca è stata prevista per il 05/01/2023 e si sono lasciati gli studenti liberi di scegliere le modalità di lavoro ed esposizione. Molti studenti, dopo aver assistito alla Lezione 1 su Archimede, svolta dalla sottoscritta tramite una presentazione Canva, hanno apprezzato questo strumento di lavoro ed essendo rimasti positivamente sorpresi dalle potenzialità di questo, hanno scelto di utilizzarlo anche per la loro esposizione.

Le lezioni sono sempre state guidate dalla sottoscritta, con il docente della classe presente in aula. Di seguito si descrive il lavoro svolto dai ragazzi durante le lezioni facendo emergere i pregi ed i difetti della progettazione.

4.1 Lezione 1: Archimede da Siracusa

La Lezione 1 dedicata ad Archimede, non prevedeva attività di tipo laboratoriale. La presentazione è stata svolta tramite Canva e, dopo una breve introduzione al progetto e agli obiettivi, si è lasciato spazio alle domande degli studenti.

Alcuni dei quesiti emersi in questa fase del progetto erano incentrati su argomenti non inerenti poiché la presenza di una laureanda in Matematica suscitava parecchio interesse rispetto alle tematiche dell'università, della vita post liceo e a curiosità inerenti.

La lezione è continuata con la somministrazione del Questionario Preliminare (Allegato D) ed in seguito si è provveduto ad assegnare il compito di ricerca sulla biografia dei personaggi (Attività "Identikit", si veda la Sezione 3.1.4) e la relativa suddivisione nei gruppi. Questa attività è durata all'incirca 20 minuti.

La lezione è continuata con l'introduzione della figura di Archimede e della sua vita tramite l'Attività "Identikit" che ha suscitato parecchio interesse negli studenti. Sono state poste molte domande da parte degli studenti inerenti a questo personaggio ed al suo lavoro riguardo Pi Greco, definito «geniale» da alcuni degli studenti. Terminata la presentazione di Archimede, si è conclusa la lezione con un breve riassunto della storia di Pi Greco dai Babilonesi fino alle civiltà arabe, mostrando agli studenti il lavoro di ognuna di queste civiltà rispetto Pi Greco e l'approssimazione raggiunta.

L'intera lezione si è svolta senza particolari complicazioni e ha avuto durata di due ore complessive, come previsto nella progettazione.

4.2 Lezione 2: il cardinale Niccolò Cusano

La seconda lezione dedicata al personaggio di Niccolò Cusano si è svolta due settimane dopo la precedente poiché si è voluto lasciare del tempo ai ragazzi per incontrarsi e svolgere l'attività di ricerca sui personaggi.

Questa lezione, è stata introdotta dalla presentazione dei due gruppi a cui era stato assegnato il personaggio di Cusano: Gruppo 3 e Gruppo 5. Il Gruppo 3 ha preparato una presentazione tramite la piattaforma Canva in cui si rispondeva a tutte le richieste dell'Attività "Identikit". La presentazione è durata circa 12 minuti.

Il Gruppo 5 non aveva provveduto alla consegna del lavoro entro la data prevista per questioni di mancata organizzazione. I componenti del gruppo avevano comunque compiuto delle ricerche sulla figura di Cusano e hanno provveduto a svolgere una presentazione "improvvisata" ai compagni rispetto alle informazioni che ricordavano. La presentazione del Gruppo 5 è durata all'incirca 13 minuti.

Dal lavoro di entrambi i gruppi è emerso un particolare interesse verso l'attività filosofica ed intellettuale di questo personaggio. Il cardinale Niccolò Cusano, infatti, era un matematico dilettante che si occupò di questa disciplina tra i vari impegni di tipo politico, religioso e filosofico (si veda Sezione 2.4 per l'approfondimento sulla sua biografia).

4.2.1 Niccolò Cusano e la quadratura del cerchio

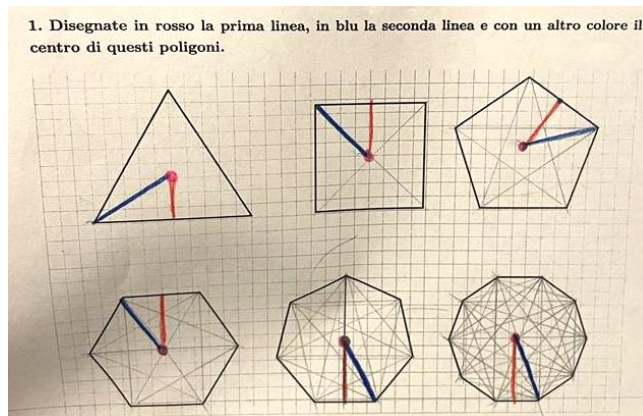
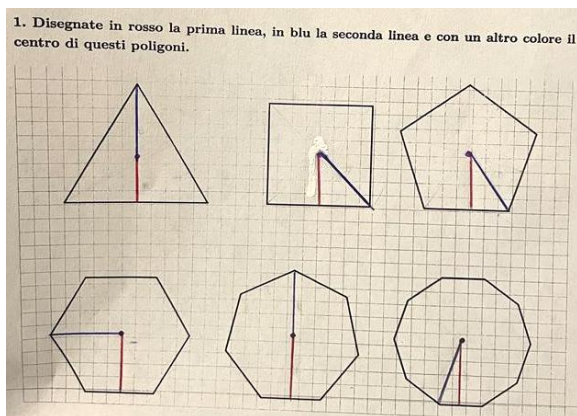
L'attività laboratoriale relativa a Cusano e alla sua dimostrazione della quadratura del cerchio è stata svolta in aula ed i gruppi si sono divisi spostando i banchi e le sedie per favorire l'interazione. A causa di un impegno scolastico di alcuni elementi della classe, per il Gruppo 1 ed il Gruppo 4 erano presenti solamente due componenti. Gli studenti hanno ricevuto le fotocopie (Allegato A) relative all'attività ed è stato richiesto loro di inviare una foto di ogni scheda sulla piattaforma Padlet una volta completata. Questa metodologia di riconsegna era stata pensata per valutare lo stato di avanzamento del lavoro di ogni gruppo e permettere una discussione finale che potesse fruire delle schede di ogni gruppo proiettate. Questa modalità si è rivelata controproducente poiché gli studenti avevano accesso dal proprio cellulare alle schede dei compagni e si è osservato che i gruppi che avevano difficoltà su alcune domande hanno copiato le risposte dagli altri gruppi. Si è dunque pensato di non riproporre la stessa modalità di consegna per le altre attività onde evitare la mancanza di impegno di alcuni.

I quesiti presenti nell'attività, come descritto nella Sezione 3.3 del capitolo precedente, erano sia di carattere teorico che pratico. I quesiti di carattere pratico sono stati svolti in maniera indipendente da tutti i gruppi e, in generale, lo svolgimento presenta particolari differenze dal punto di vista delle costruzioni geometriche e dello sviluppo delle formule. Al contrario i quesiti che richiedevano una rielaborazione della dimostrazione di Cusano, hanno creato qualche difficoltà, probabilmente a causa della complessità del linguaggio del testo e dell'inusuale formulazione dei concetti matematici, spingendo alcuni gruppi a richiedere l'intervento della sottoscritta per avere

dei chiarimenti e procedere nella compilazione delle schede.

Di seguito si riportano alcune risposte dei gruppi alle domande.

Il Quesito 1 non presenta particolari differenze di costruzione tra i vari gruppi:



Come si evince dal confronto tra le varie costruzioni, i gruppi hanno tutti interpretato correttamente il discorso di Cusano e sono riusciti a disegnare la prima linea, la seconda linea e il centro dei poligoni.

Alcune differenze si riscontrano invece nel Quesito 2, in cui si richiedeva di osservare e descrivere il comportamento della prima e della seconda linea al crescere del numero dei lati del poligono. In generale, quasi tutti i gruppi hanno correttamente riconosciuto la tendenza della prima e della seconda linea a sovrapporsi con l'aumento del numero dei lati ma nessun gruppo ha riconosciuto le due serie (la serie delle prime linee e quella delle seconde) come enti separati, una crescente ed una decrescente.

2. Supponendo di aver eseguito in maniera precisa la costruzione precedente, che cosa si può osservare di queste linee in relazione al crescere del numero di lati del poligono?

Con l'aumento del numero degli angoli si può osservare che le due linee, la prima e la seconda, tendono ad essere di una lunghezza sempre più simile ma mai uguale.

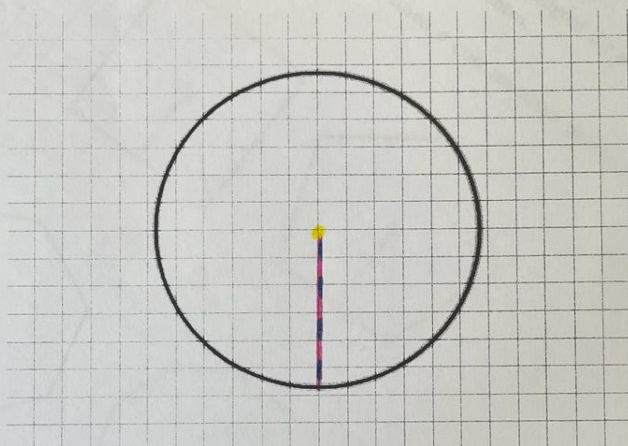
Il Gruppo 1 ed il Gruppo 2 hanno dato risposte differenti dagli altri ma simili tra loro, osservando che l'angolo tra la prima e la seconda linea diminuisce al crescere del numero dei lati e dunque è ragionevole dedurre che si fossero avvicinati molto all'idea delle due serie che convergono allo stesso elemento.

2. Supponendo di aver eseguito in maniera precisa la costruzione precedente, che cosa si può osservare di queste linee in relazione al crescere del numero di lati del poligono?

Al crescere del numero di lati del poligono la prima e la seconda linea si avvicinano con una conseguente diminuzione dell'angolo al centro

Il Quesito 3 ed il Quesito 4, richiedevano rispettivamente di tracciare la prima e la seconda linea del cerchio e di scrivere quale fosse la relazione tra questi due elementi nel cerchio. Non sono state riscontrate particolari difficoltà e differenze tra i gruppi che hanno riconosciuto correttamente che la prima e la seconda linea nel cerchio coincidono.

3. Disegna il centro, la prima e la seconda linea del cerchio.



4. In che rapporto sono la prima e la seconda linea? Provate a spiegare il perché della vostra risposta facendo riferimento a come veniva considerato il cerchio.

Il cerchio veniva considerato come poligono con infiniti lati: ogni punto appartenente alla circonferenza è quindi come un angolo e centro del lato
 ⇒ prima linea e seconda linea coincidono

Anche la risposta al Quesito 5, in cui si chiedeva di ricavare dal testo la formula per calcolare l'area dei poligoni utilizzata da Cusano, non ha presentato particolari difficoltà ed è stata riportata correttamente da tutti i gruppi.

5. Che formula ci fornisce Cusano per il calcolo dell'area dei poligoni? (Utilizza A per indicare l'area del poligono, U per il perimetro, p per la misura della prima linea ed s per quella della seconda linea, mettendo al pedice il numero dei lati del poligono.)

$$A = p \cdot \frac{U}{2}$$

Nel Quesito 6 era richiesto di interpretare un passaggio del testo di Cusano. Vista la complessità del testo dal punto di vista del linguaggio, alcuni gruppi hanno richiesto l'intervento dell'insegnante per avere alcuni suggerimenti. Alla fine tutti i gruppi sono riusciti a dare una corretta interpretazione del testo. Si riportano di seguito due risposte: la prima è prototipica della risposta che è stata più o meno elaborata da tutti i gruppi, la seconda è una interpretazione più originale ma nasconde lo stesso ragionamento.

6. Spiegate cosa significa questo passaggio secondo voi.

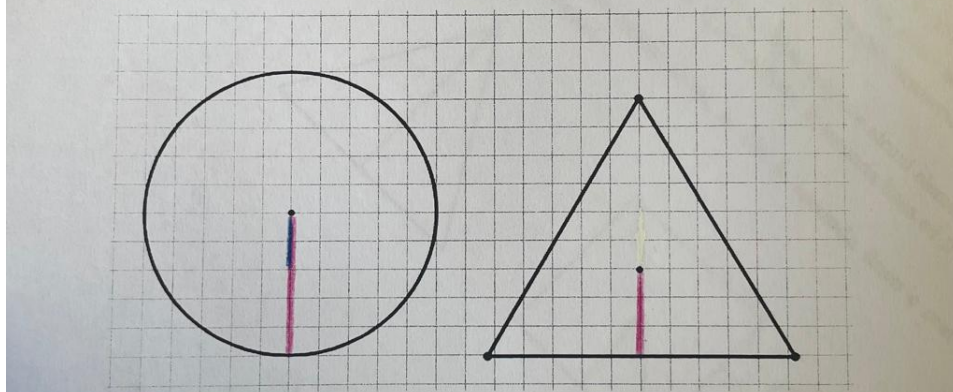
Più piccola è la differenza tra la prima e la 2^a linea del poligono, maggiore sarà la 1^a linea rispetto al triangolo. Siccome nel cerchio $r \approx 2^a$ linea, la differenza è la più piccola possibile, cioè 0, e dunque in proporzione A_{cerchio} è massima rispetto ad $A_{\text{triangolo}}$.

6. Spiegate cosa significa questo passaggio secondo voi.

DIFFERENZA DI AREA: DIFFERENZA DI PRECISIONE
TRIANGOLO AREA MINORE, CERCCHIO AREA MAGGIORE
↓
MAGIORE POSSIBILE LA DIFFERENZA

Il Quesito 7, come in generale tutte le richieste di carattere geometrico-pratico, non ha causato particolari complicazioni e le risposte possono essere rappresentate da un solo protocollo riportato di seguito.

7. Disegna la prima linea del cerchio e del triangolo poi evidenzia con un colore la differenza $p_{\infty} - p_3$ nel cerchio.



Il Quesito 8, richiedeva la lettura del testo integrale della dimostrazione di Cusano e di individuare una proposizione utilizzata dal cardinale per poi riscriverla secondo la canonica struttura di ipotesi e tesi. Questa attività, indipendente dalle altre, avrebbe richiesto sicuramente molto più tempo del previsto, quindi si è concordato con gli studenti di lasciarla come ultima, in modo da poter rispondere al quesito successivo e terminare l'attività.

Il Quesito 9, che termina l'attività, richiedeva ai gruppi di esprimere la loro opinione sulla dimostrazione di Cusano in merito alle critiche mosse alla sua dimostrazione dai matematici contemporanei. In questa domanda si sono potuti apprezzare diversi tipi di giudizio e di ragionamento riguardo la dimostrazione proposta da Cusano. La maggior parte dei gruppi si è concentrata sul fatto che questa dimostrazione è di tipo filosofico e non matematico. Questa risposta è stata condivisa da molti probabilmente influenzati dalle premesse fatte dall'insegnante all'inizio della lezione a riguardo, ma anche per le modalità di consegna tramite piattaforma Padlet, che, come discusso in precedenza, li ha indotti a influenzarsi l'un l'altro.

9. Secondo voi, quali sono state le critiche mosse alla dimostrazione di Cusano da parte dei matematici dell'epoca?

Cusano, secondo noi, non riuscì a convincere i matematici dell'epoca perché oltre a essere un matematico era un filosofo che nelle sue dimostrazioni inseriva una parte di ragionamento non scientifico ma in relazione alla realtà umana.

9. Secondo voi, quali sono state le critiche mosse alla dimostrazione di Cusano da parte dei matematici dell'epoca?

Una delle critiche che avrebbe potuto ricevere è che questa dimostrazione non è basata solo su studi scientifici e matematici, ma soprattutto filosofici. In quanto la filosofia si occupa di pensieri astratti e la matematica pensieri logici e concreti.

I Gruppi 5 e 6 si sono distinti dagli altri poiché hanno cercato l'errore matematico della dimostrazione all'interno del ragionamento di Cusano. Il Gruppo 5 ha individuato l'errore nella mancata dimostrazione della formula che Cusano propone per il calcolo della prima linea del cerchio come porzione della differenza tra la seconda e la prima linea di un poligono qualsiasi:

9. Secondo voi, quali sono state le critiche mosse alla dimostrazione di Cusano da parte dei matematici dell'epoca?

La mancata dimostrazione della formula $P_{\infty} = P_n + \frac{2}{3}(S_n - P_n)$

Il Gruppo 6 ha elaborato un pensiero più articolato rispetto alle criticità della dimostrazione di Cusano. Secondo questo gruppo, l'errore della dimostrazione, è molto difficile da individuare poiché il ragionamento di Cusano risulta, a loro detta, «veritiero», ma uno dei motivi della fallacia della dimostrazione è da ricercare nel fatto che il cardinale non utilizzò nella sua dimostrazione alcuni «elementi chiave» da lui stesso definiti, come la seconda linea. Di seguito viene proposta anche una seconda e differente critica, proposta da un altro membro del gruppo, verso l'approccio filosofico di Cusano alla dimostrazione.

9. Secondo voi, quali sono state le critiche mosse alla dimostrazione di Cusano da parte dei matematici dell'epoca?

È MOLTO COMPLESSO TROVARE DIMOSTRAZIONE DI CIÒ, PERCHÉ ANCHE SE NEI FATTI RISO RISULTARE VERITIERO, CUSANO PRENDA COME FATTORE CHIAVE ALCUNI CHE NON COMPRENDE PERÒ NELLE FORMULE MESSE IN ATTO, COME NEL CASO DI "S" LA SECONDA LINEA IN FATTI È CONSIDERATA FONDAMENTALE, ANCHE SE NON RISULTA PARTE NO DELL'AREA NO DEL PERIMETRO, CIO' CHE È STUDIATO.

(EVA) LA MATEMATICA È MATEMATICA E NON FILOSOFIA.

La lezione è terminata senza che gli studenti avessero il tempo per leggere l'intero testo e rispondere al Quesito 8. Si è pensato di non riproporre l'attività nella lezione successiva per non compromettere lo svolgimento delle altre lezioni.

4.3 Lezione 3: Approssimazione e il significato dei "..."

La lezione dedicata all'approssimazione ed al significato dei tre puntini in matematica, è stata inserita tra l'attività di Cusano e quella di Viète poiché, come spiegato precedentemente, le approssimazioni ottenute da Viète e da Newton, utilizzano le serie infinite che gli studenti di quarta liceo non hanno ancora affrontato.

La lezione, della durata di un'ora, si è svolta frontalmente con l'ausilio di una presentazione Canva.

L'obiettivo, come già accennato, era quello di fornire un'introduzione a questi argomenti e far riflettere gli studenti riguardo alla potenza ed alla complessità di questi concetti dal punto di vista matematico, e non di formalizzarli.

Per far comprendere agli studenti il significato e la portata di questi concetti si sono presentati diversi esempi in cui vengono utilizzate le serie.

La lezione è cominciata attraverso una domanda rivolta agli studenti per iniziare a costruire un dibattito riguardo a questi temi: *Avete già incontrato i puntini di sospensione nell'ambito matematico?*. Dopo uno scambio di opinioni, si sono mostrati alcuni esempi dell'utilizzo dei puntini che gli studenti avrebbero già dovuto conoscere: rappresentazione decimale di numeri irrazionali, elenchi di insiemi infiniti, elenchi finiti di operazioni in cui si desidera abbreviare la scrittura, rappresentazione decimale di razionali periodici e quiz di logica in cui viene richiesto di completare delle successioni di figure, numeri o altro.

La lezione è continuata richiedendo agli studenti di ragionare riguardo ad alcune serie di somme infinite in cui banalmente, si presentano i tre puntini:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= 0.\overline{3} = 3 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4} + \dots \\ 1 &+ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \\ 1 &- 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \\ \sqrt{2} &= 1.414213\dots = 1 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-4} + \dots \\ 1 &- 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots \\ 1 &+ 2 + 3 + 4 + 5 + \dots \\ 1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots\end{aligned}$$

Grazie a queste serie si è potuto far emergere come una somma illimitata di termini finiti non sempre ha risultato infinito. In seguito si è dato accenno della caratterizzazione delle serie in convergenti, divergenti e serie che non sono né convergenti né divergenti.

A questo punto della lezione, l'interesse degli studenti era molto elevato poiché erano stati posti di fronte ad argomenti a loro sconosciuti. Si è pensato dunque di porre un ulteriore domanda riguardo alle somme infinite portando come esempio la misurazione della parete di una stanza: ipoteticamente, avendo a disposizione strumenti sempre più precisi, la misurazione della parete si sarebbe potuta approssimare anche a valori inferiori alla dimensione di un atomo. Si è posta l'attenzione sul fatto che dal punto di vista fisico questa misurazione non ha particolare interesse, ma dal punto di vista matematico, risulta di una potenza strabiliante. Si è fatto emergere come i puntini, in queste situazioni, rappresentino la potenzialità di reiterare all'infinito il procedimento e sostituiscano quelle quantità che si potrebbero aggiungere per aumentare il grado dell'approssimazione da effettuare. Gli studenti non sono rimasti così sorpresi dalla trattazione ma l'attenzione dell'intera classe è rimasta alta per tutta la durata della lezione, facendo emergere

una certa curiosità verso questi argomenti non ancora approfonditi e conosciuti.

La lezione è terminata con una domanda *E per Pi Greco?* che lasciava aperto il discorso sulle serie infinite, riportava l'intera trattazione verso l'argomento centrale della discussione e serviva da collegamento per introdurre l'attività della lezione successiva su Viète.

4.4 Lezione 4: François Viète, il matematico dilettante

La lezione dedicata a François Viète è stata introdotta dalla presentazione dei Gruppi 1 e 2. Entrambi hanno impiegato all'incirca 17 minuti per la loro presentazione ed hanno preferito esporre in piedi ponendosi di fronte ai compagni.

La vivacità della classe si è manifestata anche in questa occasione: entrambi i gruppi sono riusciti a condurre una presentazione della biografia di Viète molto simpatica ed accattivante, servendosi anche della piattaforma Canva.

Dalle esposizioni è venuto a delinearsi il personaggio di Viète: un avvocato, proveniente da una famiglia di avvocati, che grazie al suo amore per lo studio e soprattutto per la matematica, contribuì a rivoluzionare l'algebra introducendo un linguaggio nuovo, funzionale e moderno.

La lezione è continuata con alcune integrazioni proposte dalla sottoscritta, che facevano emergere la qualità dei risultati ottenuti da Viète, nonostante la sua natura di matematico dilettante.

Nell'attività laboratoriale relativa a questo personaggio si è deciso di non utilizzare come modalità di riconsegna dei lavori la piattaforma Padlet, onde evitare lo scambio di risposte tra i gruppi.

4.4.1 Viète e la prima espressione numerica di Pi Greco

L'attività laboratoriale dedicata a Viète consultabile nell'Allegato B, è suddivisa in quattro schede e, con la guida di otto quesiti, mira alla ricostruzione del procedimento che egli utilizzò per giungere alla sua famosa formula di approssimazione di Pi Greco. Le schede sono state consegnate ai gruppi una per volta, poiché nel corso della costruzione guidata venivano spiegate o descritte formule che costituivano la risposta ai quesiti precedenti.

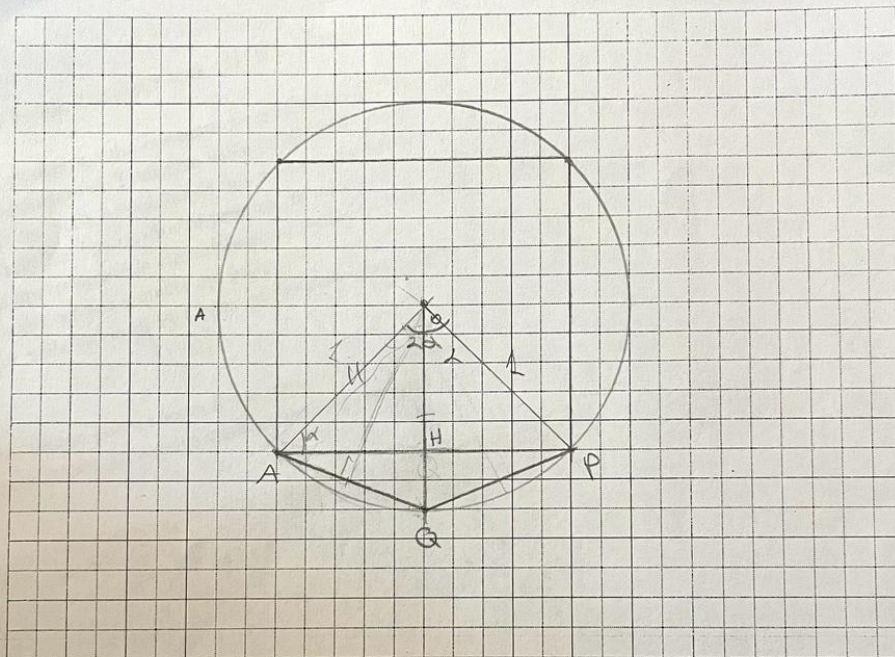
Nella prima facciata delle schede è stata proposta agli studenti un'immagine del testo originale dell'opera di Viète in latino, il *Variorum de rebus Mathematicis responsorum* [46]. Il Quesito 1, chiedeva ai gruppi di provare a dedurre dall'immagine (per confronto si veda Allegato B) la formula di approssimazione per Pi Greco trovata da Viète.

Quasi tutti i gruppi hanno dato una propria interpretazione alla formula, avvicinandosi o meno, in maniera differente, al risultato dello studioso.

$$\sqrt{x+2} + e\sqrt{x+2} + e\sqrt{2} \quad \left| \quad \sqrt{\frac{x^2}{x^2}} \sqrt{\frac{x^2}{x^2}} \right| \quad \left| \quad \sqrt{x+2} + \sqrt{x+2} + \sqrt{2} \right|$$
$$\frac{1}{2} \text{ od } 1N = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \dots$$
$$x_2 = (x-1)2$$
$$\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \dots$$

2. Costruzione:

- disegnare un cerchio di centro O e raggio $OA = 1$
- inscrivere al suo interno un quadrato di lato AP
- tracciare il raggio OQ del cerchio perpendicolare al lato AP del quadrato e unire A con Q e P con Q



3. Provate a ragionare sulla figura: che cosa rappresentano il segmento AQ ed il segmento PQ ?

Sono i lati di un ottagono

Dal Quesito 4 in poi, si sono riscontrate delle difficoltà per quanto riguarda la comprensione delle richieste poiché da questo fino al Quesito 6, si richiedeva di esplicitare i rapporti tra le aree dei poligoni senza calcolarli esplicitamente, per ottenere un procedimento che fosse generale. Tutti i gruppi, in un primo momento, hanno calcolato numericamente le aree del quadrato e dell'ottagono, ma dopo il chiarimento dell'insegnante sull'effettiva richiesta di queste domande, sono riusciti a comprendere il ragionamento di Viète e a rispondere in maniera corretta alle domande.

In particolare, il Gruppo 6, nonostante i suggerimenti della sottoscritta, ha preferito portare a termine il proprio ragionamento per il calcolo delle aree, costruendo un procedimento complesso e raggiungendo alcuni risultati piuttosto originali (si veda la seconda immagine della pagina successiva). Nonostante il mancato completamento dell'attività questo gruppo ha dichiarato di essersi divertito molto a elaborare il ragionamento, soprattutto per l'intenso dibattito e la collaborazione che si sono creati per produrlo.

2. Costruzione:

- disegnare un cerchio di centro O e raggio $OA = 1$
- inscrivere al suo interno un quadrato di lato AP
- tracciare il raggio OQ del cerchio perpendicolare al lato AP del quadrato e unire A con Q e P con Q

$OA = 1$
 A_4
 $PH = PO \sin \alpha = 1 \sin 45^\circ$
 $PA = 2r \sin 45^\circ = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$
 $A = (\sqrt{2})^2 = 2$
 $OQ = r$ $OH = \frac{r}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $HQ = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$
 $\frac{PH \cdot HQ}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2} - 2}{4} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{4}$

5. Utilizzando la formula di duplicazione del seno esplicitate il rapporto tra A_4 e A_8 per poi esprimere l'area A_8 in funzione di A_4 . Dopodiché secondo lo stesso procedimento, esprimete l'area $A_{16} = A_{2^4}$ in funzione di A_8 e di conseguenza di A_4 .

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ $PH = r \sin \alpha$ $PA = 2r \sin \alpha$
 $A_4 = 2r^2 \sin^2 \alpha$
 $A_8 =$ $OH = r \sin \alpha$ $HQ = r - r \sin \alpha = r(1 - \sin \alpha)$
 $\frac{PH \cdot HQ}{2} = \frac{r \sin \alpha (r - r \sin \alpha)}{2} = \frac{r^2 (\sin \alpha - \sin^2 \alpha)}{2}$
 $\frac{\sin \alpha r^2 (1 - \sin \alpha)}{2} = A_{PHQ}$ $A_{PHQ} \cdot 8 + A_4$

6. Riscrivete le formule generali per il calcolo delle aree dei poligoni ed il rapporto tra queste utilizzando A_n per il poligono di n lati, A_{2n} per quello con $2n$ lati, $A_{2^2 n}$ per quello di $2^2 n$ lati e $A_{2^k n}$ per quello di $2^k n$ lati.

$4(4r^2 \sin^2 \alpha)(\sin^2 \alpha (1 - \sin \alpha))$
 $4(4r^2 \sin^2 \alpha)(\sin^2 \alpha - \sin^3 \alpha)$
 $4(4r^4 \sin^3 \alpha - 4r^4 \sin^4 \alpha)$
 $16r^4 \sin^3 \alpha - 16r^4 \sin^4 \alpha$

In generale, nessun gruppo è riuscito a completare l'attività laboratoriale a causa dell'interpretazione iniziale delle domande, quindi il Quesito 7 ed 8 sono rimasti senza risposta. Nonostante ciò, l'attività relativa a Viète sembra aver divertito gli studenti che sono stati stimolati a trovare una soluzione personale al problema. Dopo essere riusciti a comprendere il ragionamento di Viète, un componente del Gruppo 3, ha esclamato «Wow, sono proprio come Viète!» mostrando particolare soddisfazione nel cimentarsi in calcoli ed esercizi più elaborati rispetto a quelli tradizionali.

4.5 Lezione 5: Il padre del calcolo infinitesimale Isaac Newton

La lezione relativa a Newton costituisce anche la lezione conclusiva dell'intero progetto. L'introduzione è stata compiuta dal Gruppo 4 e dal Gruppo 6 che hanno presentato la biografia di Newton in circa 15 minuti ciascuno. La vita impegnata di questo personaggio e la sua personalità così controversa hanno fornito a questi gruppi l'occasione di apprezzare e far apprezzare ai compagni, oltre alla sua immensa produzione scientifica, anche l'umanità dello scienziato in questione.

Un componente del Gruppo 6 ha dichiarato di essersi appassionato alla figura di Newton ed alla sua personalità proprio grazie alla ricerca compiuta su questo personaggio, tanto da aver compiuto ulteriori indagini e aver iniziato l'ascolto di alcuni podcast sulla sua vita e le sue scoperte. Questo studente è stato selezionato per compiere un'intervista relativa al progetto e le sue dichiarazioni possono essere consultate nella seconda intervista, nel capitolo successivo, alla Sezione 5.3.

Anche questa lezione prevedeva un'attività laboratoriale che con la guida di cinque quesiti aveva come obiettivo la ricostruzione del lavoro di Newton riguardo l'approssimazione di π Greco.

Al termine della lezione, dopo la riconsegna delle schede da parte di tutti i gruppi, è stato portato a termine il racconto dell'evoluzione di π Greco nella storia. Si è cercato di porre l'attenzione sul fatto che, dopo la comparsa delle prime calcolatrici e successivamente dei computer, è aumentato a dismisura il numero di cifre decimali di π Greco determinate. Dunque, la ricerca di una migliore approssimazione di questa costante si è indirizzata principalmente verso la determinazione della formula maggiormente efficiente in termini di velocità di convergenza a π Greco. Si è inoltre messo in evidenza come nel corso della storia della matematica, la maggior parte delle teorie, prima di essere formalizzate, sono state utilizzate in modo non consapevole per poi essere elaborate successivamente fino ad assumere l'aspetto teorico che oggi conosciamo. Lo stesso processo è stato svolto dagli studenti durante questo progetto: senza conoscere la nozione di limite e di serie infinita, hanno utilizzato questi concetti in modo inconsapevole e la loro formalizzazione avverrà solamente nell'anno scolastico successivo.

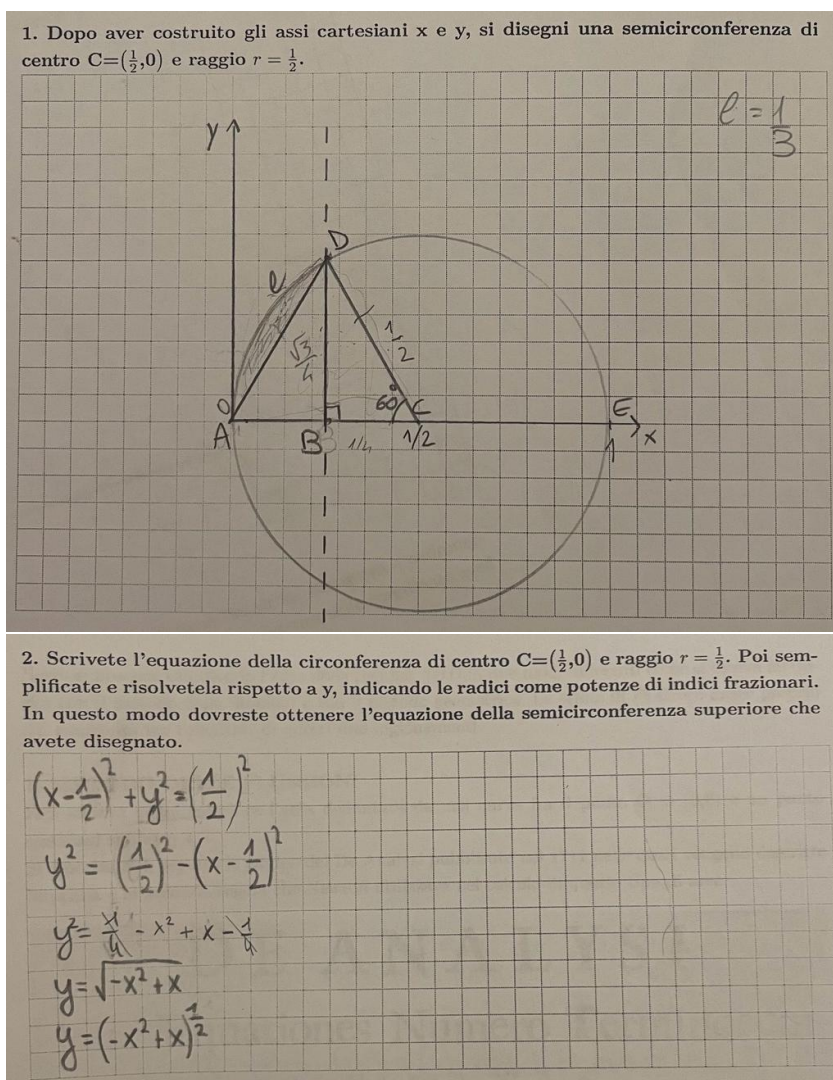
La lezione si è conclusa con il Questionario finale (Allegato D) nel quale si sono indagate le opinioni degli studenti riguardo al gradimento del progetto, alla storia di π Greco affrontata attraverso la biografia dei personaggi.

4.5.1 Newton e il nuovo metodo per calcolare π Greco

L'approssimazione di π Greco calcolata da Newton prevede il confronto tra due metodi differenti per il calcolo di un'area delimitata da una curva: il metodo delle flussioni ed un metodo geometrico classico.

Il Quesito 1 dell'attività laboratoriale richiedeva una costruzione geometrica che tutti i gruppi hanno eseguito correttamente, senza riscontrare particolari difficoltà.

Anche il Quesito 2, dove si richiedeva di esplicitare la formula della circonferenza disponendo del centro e del raggio, è stata eseguita correttamente da tutti i gruppi. Si riporta di seguito un esempio dello svolgimento che risulta prototipico rispetto al lavoro di tutti i gruppi.



L'attività continuava con il calcolo dell'area ABD , seguendo il procedimento di Newton, attraverso due metodi differenti. Il primo metodo, quello delle flussioni, è stato spiegato e riportato integralmente senza fare richieste agli studenti. Questa scelta è stata compiuta sia perché il metodo delle flussioni di Newton richiedeva un calcolo piuttosto complicato che implicava la necessità di una spiegazione, sia perché, in seguito all'esperienza delle attività precedenti, si è voluto snellire il lavoro degli studenti per permettere a tutti i gruppi di concludere l'attività entro la fine della lezione, prevista di due ore.

Da questo metodo si ricava che l'approssimazione dell'area ABD è 0.07677310678.

Nel riportare questo metodo utilizzato da Newton, sono state inserite anche due immagini tratte dall'opera di Newton *De analysi per æquationes numero terminorum infinitas* [34] in cui sono state estrapolate la Regola 1 e 2 (disponibili nell'Allegato C) con il quale Newton era riuscito a calcolare l'area delimitata da una qualsiasi curva fra il punto $O = (0,0)$ ed un punto qualsiasi sull'asse x . Questo documento, come accennato precedentemente, è stato inserito per la sola consultazione, ma alcuni gruppi hanno trovato interessante l'opera originale e hanno cercato di interpretare da questi estratti le formule utilizzate da Newton.

L'attività continuava con il secondo metodo utilizzato dallo scienziato: un metodo di tipo geometrico che si è pensato di far ricostruire interamente agli studenti.

Il Quesito 3, richiedeva il calcolo della lunghezza del segmento $\overline{BD}$ e poi quello dell'area del triangolo $\widehat{DBC}$. Tutti i gruppi sono riusciti a ottenere i risultati corretti senza particolari difficoltà.

3. Calcolate la lunghezza del segmento BD utilizzando il Teorema di Pitagora e ricavate poi l'area del triangolo DBC .

$$BC = \frac{1}{4}$$

$$CO = r = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow BD = \sqrt{(CO)^2 - (BC)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4} = 0,43$$

$$A_{DBC} = \frac{BC \cdot BD}{2} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{32}$$

Il Quesito 4 richiedeva invece il calcolo dell'area ABD come differenza tra l'area del settore circolare ACD e del triangolo $\widehat{DBC}$ calcolato precedentemente, tenendo conto del fatto che l'angolo $\widehat{BCD}$ è di 60° . Tutti i gruppi sono riusciti a svolgere correttamente il calcolo attraverso le indicazioni fornite e rispondere alla domanda.

4. Essendo l'angolo $BCD=60^\circ$, quanto vale l'area del settore circolare ACD ? Adesso calcolate l'area ABD dalla differenza tra l'area del settore circolare ACD e quella del triangolo BCD . (Lasciate la formula espressa come differenza senza calcolarla)

$$A = \pi r^2 = 3,14 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3,14 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3,14}{4}$$

$$A_{ACD} = \frac{A}{6} = \frac{0,785}{6} = \frac{3,14}{24}$$

$$A_{ABD} = A_{ACD} - A_{BCD} \Rightarrow \frac{3,14}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32} = \frac{417 - 32\sqrt{3}}{96}$$

$$A_{BCD} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{32}$$

$$\frac{12,58 - 5,18}{96} = 0,0767$$

L'ultima domanda, il Quesito 5, richiedeva di esplicitare l'approssimazione di Pi Greco effettuata da Newton, confrontando i risultati ottenuto attraverso i due metodi. Tutti i gruppi sono riusciti ad ottenere l'approssimazione raggiunta da Newton.

5. Esplicitate l'approssimazione di π calcolata da Newton.

$$\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{p_6} = 0,07677\dots$$

$$\frac{4\pi}{p_6} - \frac{3\sqrt{3}}{p_6} = 0,07677\dots \cdot p_6 \quad \text{pongo } 0,07677\dots = k$$

$$\pi \approx 24k + \frac{3\sqrt{3}}{4} \rightarrow \pi \approx 3,141592\dots$$

L'attività si è conclusa in circa 40 minuti e ha permesso di portare a termine il racconto della storia di Pi Greco e di trarre le conclusioni del progetto. Per concludere l'intero progetto si è somministrato il Questionario Finale.

Capitolo 5

Questionari, interviste e conclusioni

In questo capitolo si analizzano le risposte degli studenti ai questionari preliminare e finale del progetto che sono stati descritti nel Capitolo 3, Sottosezione 3.1.5. Si riportano inoltre le risposte alle interviste compiute a due studenti campione ed al professore della classe in cui è stato sperimentato il progetto, le cui domande di indagine sono state inserite e contestualizzate sempre nel Capitolo 3, Sottosezione 3.1.5.

Il questionario preliminare *Cosa sai di Pi Greco?* (Allegato D), è stato somministrato nella prima lezione del percorso, quella relativa alla figura di Archimede e, come accennato già accennato, ha l'obiettivo di indagare riguardo la conoscenza pregressa degli studenti su Pi Greco e la quadratura del cerchio e sull'eventuale presenza di pregiudizi inerenti alla matematica ed al matematico di professione. Il questionario finale *La conclusione del percorso* (Allegato D), è stato somministrato al termine dell'ultima lezione svolta in classe e relativa alla figura di Newton. Le domande di questo secondo questionario mirano a rilevare eventuali cambiamenti avvenuti al termine del progetto negli studenti rispetto al questionario iniziale e sono state inserite anche domande per conoscere il gradimento personale rispetto all'intero percorso.

Entrambi i questionari sono stati somministrati tramite un QR-code che rimandava alla piattaforma Google Moduli.

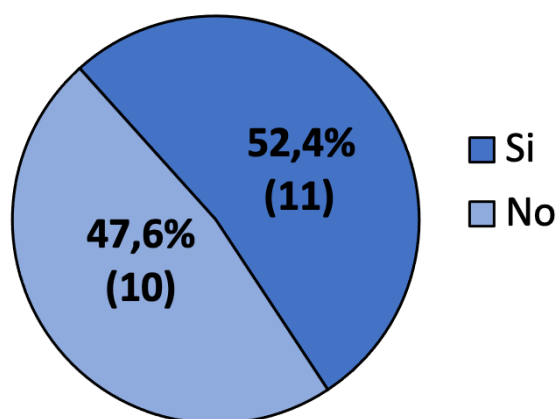
L'analisi delle risposte dei questionari assume un importante significato tramite il confronto tra le risposte iniziali e finali, al fine di valutare l'evoluzione ed i cambiamenti che possono essere avvenuti negli studenti durante il progetto.

5.1 Questionario iniziale

In questa sezione si analizzano le risposte date dagli studenti alle diverse domande presenti nel questionario iniziale, descritto nel Capitolo 3 e disponibile nell'Allegato D. I questionari compilati ed inviati tramite Google Moduli sono ventuno su ventidue poiché uno studente risultava assente.

Domande 1 e 2: Conosci il problema della quadratura del cerchio? Spiega che cosa è la quadratura del cerchio secondo te.

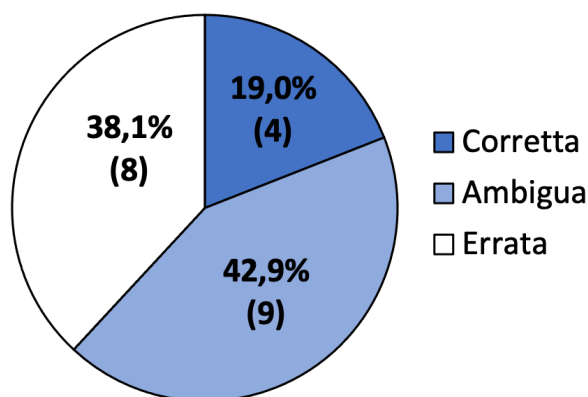
Queste due domande sono state inserite per indagare le conoscenze pregresse degli studenti rispetto al problema della quadratura del cerchio che sarebbe stato proposto in maniera frequente durante l'intero progetto. La prima domanda è a risposta multipla e prevede solamente due opzioni di risposta: "sì" e "no". Di seguito si riporta l'areogramma con le relative percentuali di risposta. Poco meno della metà (47,6% cioè 10/21) degli studenti non conosceva il problema della quadratura del cerchio.



La seconda domanda, a risposta aperta, richiedeva agli studenti di provare a spiegare, anche non conoscendo questo problema, che cosa fosse la quadratura del cerchio. Le risposte possono essere suddivise in tre categorie descritte di seguito: corretta, ambigua ed errata.

1. **Corretta:** in questa categoria rientrano le risposte in cui gli studenti hanno fornito una descrizione del problema della quadratura del cerchio corretta. Soltanto quattro risposte rientrano in questa categoria poiché, molti, pur avendo sostenuto di conoscere questo problema nella domanda precedente, ne hanno dato una descrizione errata o ambigua, dimostrando, in realtà, di non conoscerlo in maniera approfondita. La risposta corretta più precisa, è stata: *«Il problema del costruire un quadrato che abbia la stessa area di un cerchio dato»*. È stata inserita in questa categoria anche la risposta *«Un cerchio può essere equiesteso di un quadrato?»*.
2. **Ambigua:** in questa categoria sono state inserite nove risposte. Alcune di queste dimostrano un tentativo di spiegare il problema tramite la sua formulazione come per esempio *«Suppongo sia un problema che vede come inserire la figura del cerchio all'interno di quella di un quadrato»* oppure *«Un cerchio su un quadrato con qualcosa che li lega»*. Altre mostrano una qualche conoscenza relativa al problema, ma ne danno una definizione imprecisa o ambigua: *«È il processo per riuscire a trasformare un cerchio cioè una figura che si basa su un numero infinito, in una figura ben definita»* e *«Cercare di ricondurre un cerchio a un quadrato di uguali dimensioni»*.

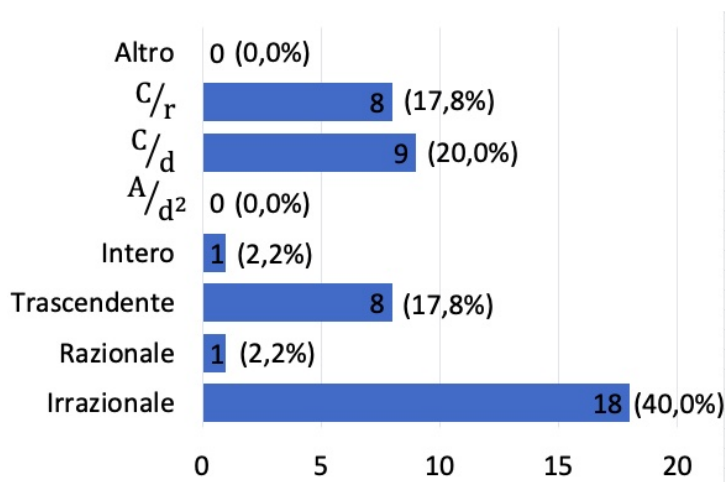
3. Errata: in questa categoria rientrano otto risposte che comprendono le risposte errate, le risposte non consone e le risposte del tipo «Non lo so».



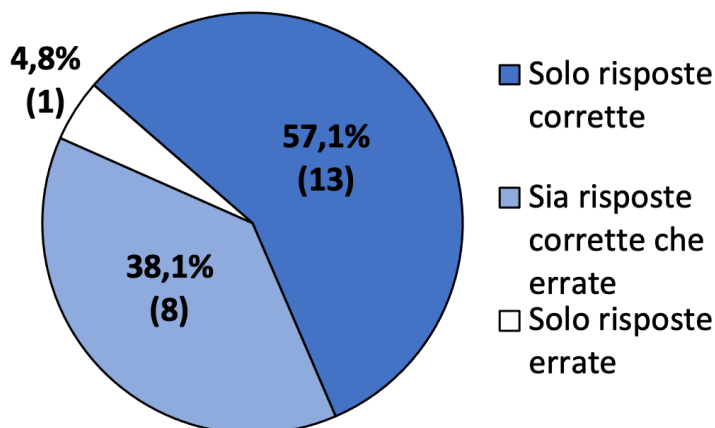
Dal confronto tra le risposte alle domande 1 e 2 si evince che la maggioranza della classe, pur avendo dichiarato di conoscere il problema della quadratura del cerchio, non era in grado di spiegare in che cosa consistesse.

Domanda 3: Pi Greco è un numero: (puoi selezionare più di una risposta)

Questa domanda è stata inserita per indagare le conoscenze riguardanti Pi Greco prima dell'inizio del percorso. Tra le opzioni di risposta sono state inserite tre risposte corrette (irrazionale, trascendente, rapporto tra circonferenza e diametro) e quattro risposte errate (intero, razionale, rapporto tra circonferenza e raggio, rapporto tra circonferenza e quadrato del diametro). Di seguito si inserisce il grafico che mostra quante volte ciascuna opzione è stata selezionata nelle risposte date dagli studenti. Tra le opzioni di risposta è stata inserita anche la voce "Altro" per dare la possibilità agli studenti di inserire una definizione personale, ma nessuno ha aggiunto nulla rispetto alle opzioni già presenti.

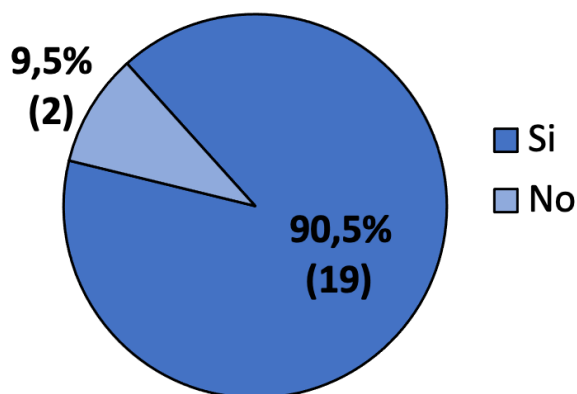


Dall'analisi delle risposte si osserva che solamente tre studenti su ventuno hanno selezionato tutte e tre le risposte esatte, ma più della metà degli alunni (13/21) ha selezionato solo opzioni corrette, dimostrando semplicemente di non conoscere il significato di "numero trascendente". Altri hanno selezionato sia opzioni corrette che errate mentre soltanto uno studente ha selezionato esclusivamente risposte errate indicando le opzioni *Razionale* ed *Intero*.



Domande 4 e 5: La matematica si è evoluta nella storia? Giustifica la tua risposta.

Queste due domande sono state inserite per indagare la concezione degli studenti rispetto alla storia della matematica ed alla sua evoluzione ed è stato richiesto di motivare la risposta per avere un quadro più completo.



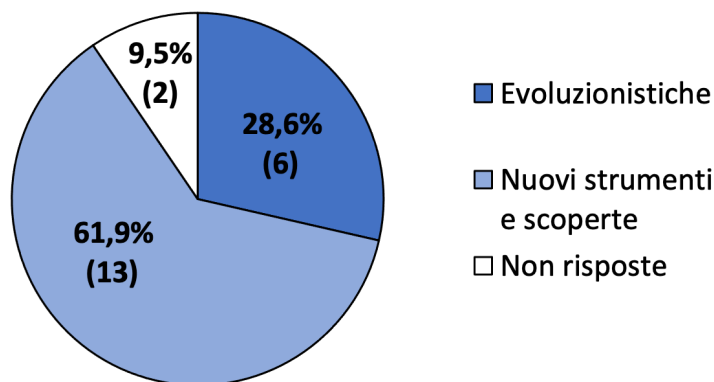
Dall'analisi delle risposte si deduce che quasi la totalità degli studenti (19/21) ritiene che la matematica si sia evoluta nel corso della storia.

Soltanto due studenti hanno risposto negativamente a questa domanda. Il primo ha giustificato la sua risposta in maniera ambigua: «*Si è solo ampliata e chi pensava in grande è stato messo da parte*». Il fatto che la matematica si sia "ampliata" ma senza che via sia stata un'evoluzione di questa disciplina risulta essere un pensiero di natura contraddittoria. Probabilmente questo studente

aveva in mente un personaggio le cui teorie sono state così rivoluzionarie da essere inizialmente rifiutate dall'opinione pubblica. Il secondo studente che ha risposto negativamente ha giustificato scrivendo: *«Io penso di no perché sebbene nel tempo siano evolute le tecniche e sia stato introdotto l'utilizzo della tecnologia, penso che l'approccio dei matematici alla scienza non sia cambiato nel tempo, sempre con uno sguardo al futuro e voglia di ampliare gli orizzonti delle proprie certezze.»*. In questa risposta si riconosce comunque la presenza di un'idea di evoluzione anche se non è chiaro cosa intenda lo studente con il termine "tecniche": se al modo di fare matematica o agli strumenti utilizzati.

Le giustificazioni di chi sostiene che la matematica si sia evoluta nel tempo possono essere invece divise in tre categorie:

1. di carattere evolucionistico: sono state inserite in questa categoria tutte quelle risposte che fanno riferimento al processo evolutivo della storia dell'umanità e di tutte le discipline. Per esempio: *«Tutto si evolve»*, *«Qualsiasi argomento di studio è sempre in evoluzione»*, *«Come studiamo in filosofia»*.
2. con riferimento a nuovi strumenti e nuove scoperte: in questa categoria sono state inserite le risposte che si riferiscono all'evoluzione in termini di nuovi strumenti e nuove scoperte. Per esempio: *«Si sono fatte molte ipotesi nella storia che sono state poi negate o confermate nel tempo, come ad esempio non si credeva dell'esistenza dello zero.»* oppure *«Dalle conoscenze primitive che si avevano si è evoluto nel corso del tempo con tecniche innovative comprendenti nuovi metodi di calcolo che tendono a riuscire a risolvere problemi complessi ma anche quelli riguardanti la quotidianità»* ed ancora *«Lo sviluppo tecnologico ha migliorato i metodi di calcolo per esempio»*.
3. non risposte: sono state inserite in questa categoria le risposte del tipo «.».



Domanda 6: Secondo te, chi tra questi personaggi ha sviluppato un sistema di guida a distanza per siluri?

Questa domanda è stata inserita per indagare i pregiudizi riguardo l'aspetto estetico dello scienziato/matematico di professione. Le tre opzioni di risposta sono state fornite esclusivamente come

immagini, senza riferimenti al nome del personaggio per evitare che gli studenti potessero compiere delle ricerche sul web. Le tre opzioni di risposta fornite sono:



Opzione 1



Opzione 2

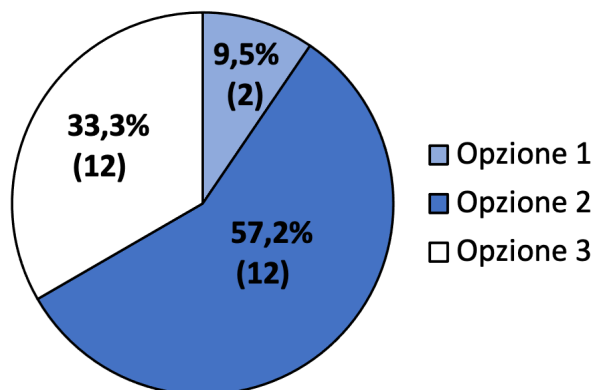


Opzione 3

L'Opzione 1, raffigura Hedy Lamar (1914-2000) ed è la risposta corretta alla domanda. Lamar fu un'attrice di Hollywood che abbandonò gli studi di ingegneria per la carriera cinematografica. Durante lo scoppio della Seconda Guerra Mondiale, Lamar offrì informazioni riservate al governo degli Stati Uniti sull'esercito tedesco. Quando fu collocata nel dipartimento di tecnologia militare riuscì ad elaborare un sistema di rilevamento per siluri che ancora oggi viene utilizzato per la localizzazione via satellite.

L'Opzione 2 raffigura Ian Graham, un giovane laureato in fisica, che riveste il ruolo di direttore della ricerca della squadra calcistica di Liverpool. Il suo ruolo, in particolare, è quello di dirigere il team di *Data Science* presso L.F.C. sviluppando strumenti statistici per la previsione delle partite di calcio e l'analisi delle prestazioni dei calciatori.

L'Opzione 3 raffigura Maryam Mirzakhani (1977-2017), professoressa di Matematica presso l'Università di Stanford. Viene ricordata per essere stata la prima donna nella storia ad aver vinto la Medaglia Fields nel 2014 (nonché la prima cittadina iraniana). Nonostante i suoi brillanti risultati ed i riconoscimenti ottenuti, Mirzakhani fu aspramente criticata sui social network per via del suo aspetto fisico, giudicato da alcuni troppo mascolino.



Soltanto due studenti hanno risposto correttamente a questa domanda, mentre la maggioranza

assoluta ha selezionato l'unico uomo presente. Seppur non sia possibile sapere quali siano le caratteristiche che hanno portato gli studenti a rispondere a questa domanda, è ragionevole supporre che la maggior parte di loro non conoscesse i tre personaggi proposti e quindi, da queste risposte, dedurre che siano presenti pregiudizi in merito all'aspetto fisico dello scienziato di professione.

Domanda 7: Descrivi con 5 aggettivi un matematico.

Questa domanda, similmente alla precedente, mira ad indagare il giudizio degli studenti rispetto a chi si occupa di Matematica per professione.

In generale sono state fornite risposte originali ed in alcuni casi anche contrarie tra loro ma alcuni aggettivi ricorrono nelle risposte degli studenti. Gli aggettivi sono stati raggruppati in sei macro categorie che definiscono le caratteristiche di un matematico secondo gli studenti:

Gruppo 1: preciso, rigido, schematico, organizzato, rigoroso.

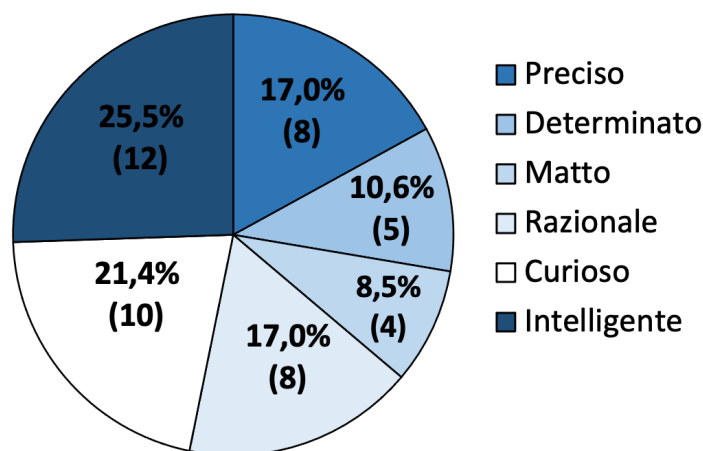
Gruppo 2: determinato, testardo.

Gruppo 3: razionale, logico.

Gruppo 4: curioso, creativo, flessibile, eccentrico, "fuori dagli schemi".

Gruppo 5: intelligente, genio, intuitivo.

Gruppo 6: matto, nerd, frustrato, pazzoide.

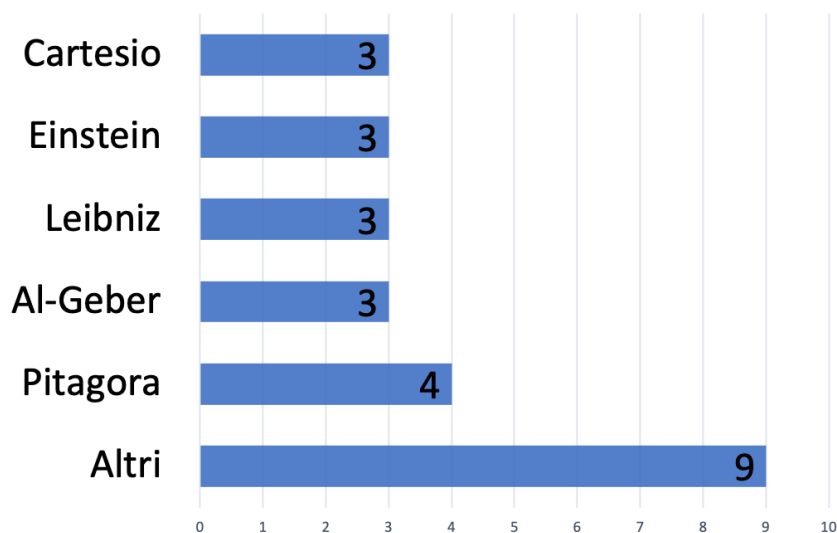


Domande 8, 9 e 10: Scrivi il nome di un matematico che conosci. È ancora in vita? Se la risposta alla precedente domanda è no, scrivi in che periodo è vissuto.

Queste tre domande sono state inserite per indagare le conoscenze degli studenti rispetto alla vita dei matematici ed al loro collocamento nella storia.

Alcuni studenti hanno inserito più di un nome ed in totale sono stati forniti venticinque nomi di matematici. Alcuni di questi erano scritti in modo non corretto, ma vista la univoca interpretazione, sono stati comunque inseriti nel conteggio. Nel grafico sono riportati i nomi dei matematici

che sono stati nominati più di una volta (frequenza assoluta maggiore di uno). Nella categoria altri, invece, sono stati inseriti tutti gli altri matematici proposti dagli studenti: *Mandelbrot*, *Gödel*, *Al-Geber*, *Leonardo Sasso*, *Bertrand Russel*, *Archimede*. In questa categoria sono stati inseriti anche *Fabio Filippi*, il professore di Matematica e Fisica della classe in cui è stato somministrato il progetto, nominato due volte, e due professori di Matematica dell'Università di Bologna, citati da una studentessa che, per motivi personali, aveva seguito alcune lezioni di questi professori.



Le Domande 9 e 10 richiedevano agli studenti di indicare se il matematico inserito precedentemente fosse ancora in vita e nel caso di risposta negativa indicare il periodo in cui questo personaggio è vissuto.

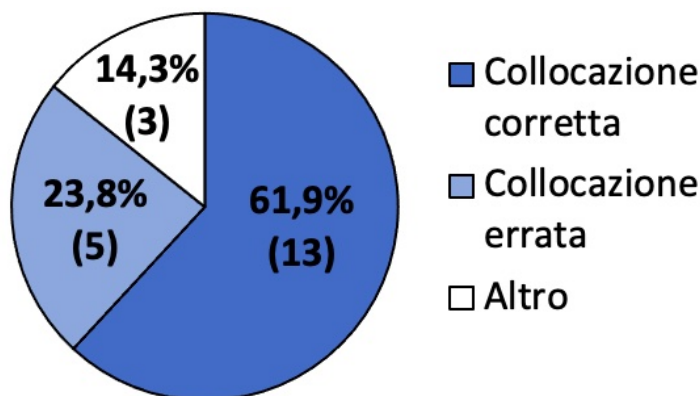
1. Cartesio (1596-1650): tre studenti su tre hanno correttamente risposto che non è in vita, due studenti hanno correttamente indicato il periodo in cui è vissuto «1500 circa.», «Diciassettesimo secolo.» mentre uno ha risposto «Non lo so.».
2. Einstein (1879-1955): tre studenti su tre hanno correttamente risposto che non è in vita, due di questi hanno inserito anche le date di nascita e morte corrette, il terzo ha risposto «Non lo so.».
3. Leibniz (1646-1716): tre studenti su tre hanno correttamente risposto che non è in vita. Solo uno studente è riuscito ad inquadrare correttamente il periodo «1600-1700.», gli altri sono comunque riusciti ad avvicinarsi indicando «1800.».
4. Al-Geber (721-822): tutti gli studenti hanno indicato correttamente che questo personaggio non è in vita ma nessuno dei tre è riuscito a fornire il periodo esatto in cui è vissuto: uno si è avvicinato indicando «1000/1100, bho.» ma gli altri due hanno fornito un arco temporale troppo ampio «Tra lo 0 e il 1400» o una risposta troppo generica «Tanto tempo fa.»
5. Pitagora (570 a.C.-495 a.C.): quattro studenti su quattro hanno correttamente risposto che non è ancora in vita. Due studenti hanno inserito correttamente anche il periodo in cui

è vissuto indicando «500 a.C.», «Nell'antica Grecia.». Uno studente ha risposto «Tanto tempo fa.» ed un altro ha risposto erroneamente «Diciassettesimo secolo.».

6. Altri:

- Gödel (1906-1978): lo studente che ha inserito questo matematico ha risposto erroneamente indicando che è ancora in vita e ha risposto che è vissuto nel periodo «Moderno.».
- Bertrand Russel (1872-1970): lo studente che ha inserito questo matematico ha risposto correttamente indicando che non è in vita ed è vissuto nel «1900.».
- Archimede (III sec. a.C.): lo studente ha risposto correttamente indicando che non è ancora in vita e collocando il matematico nel «III sec. a.C.».
- Mandelbrot (1924-2010): lo studente ha riconosciuto che questo matematico non è in vita, indicando il periodo corretto «2000.»
- Le altre risposte, tra cui «Fabio Filippi.», «Leonardo Sasso.», «Luca Migliorini.», «Nicolella Cantarini.», sono state tutte corrette rispetto al periodo ed al fatto che questi matematici siano ancora in vita.

In generale, dalla raccolta delle risposte a queste tre domande, è emerso che tutti gli studenti conoscono il nome di almeno un matematico, o contemporaneo o precedente, ed in generale sanno correttamente collocare il personaggio nel periodo in cui è vissuto.



5.2 Questionario finale

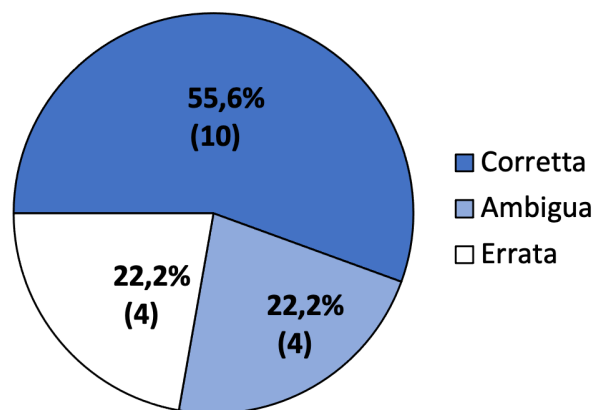
Il questionario finale *La conclusione del percorso...* (Allegato D) è stato somministrato agli studenti negli ultimi dieci minuti della Lezione 5 (si veda Capitolo 3, Sezione 3.5 per la descrizione dell'intera lezione) che concludeva il progetto quando il professore Fabio Filippi non era presente in aula. Sono stati ricevuti solamente diciotto questionari compilati su ventidue studenti presenti in aula probabilmente perché l'attenzione degli studenti era scesa ed alcuni, vista l'assenza del professore, non hanno provveduto alla compilazione.

Nel Questionario finale sono state riproposte alcune domande del Questionario iniziale con l'obiettivo di far emergere eventuali evoluzioni e modificazioni del pensiero degli studenti rispetto alle tematiche indagate. Per le domande condivise dai due questionari verrà proposto, in questa sezione, un confronto che mostri, anche attraverso il supporto di grafici, le eventuali differenze tra le risposte dei questionari.

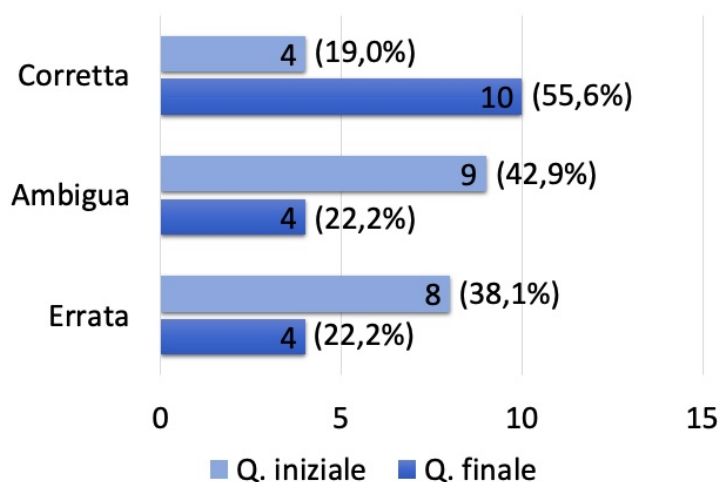
Domanda 1: Spiega che cosa è la quadratura del cerchio.

Questa domanda era presente anche nel Questionario iniziale e come nella sezione precedente, si è pensato di suddividere le risposte degli studenti in tre categorie:

1. Corretta: in questa categoria rientrano le risposte che rispondono correttamente alla spiegazione del problema della quadratura del cerchio. Tra queste sono state inserite: *«È il problema che nasce quando si vuole costruire un cerchio e un quadrato con la stessa area avendo solo riga e compasso come strumenti»*, *«Trovare un quadrato con la stessa area del cerchio»* e simili.
2. Ambigua: in questa categoria sono state inserite le risposte che pur non rispondendo in maniera corretta alla domanda, presentano delle spiegazioni non errate o che risultano ambigue. Queste sono: *«Un problema che si è posto da vari matematici riguardo alle misure che se ne potevano ricavare»*, *«Il metodo cercato per ricondurre il cerchio (lati infiniti) a un quadrato (lati definiti)»*, *«Il processo per cui si cerca di trasformare una figura dai lati definiti in un'altra che invece ne ha infiniti»* e *«Il tentativo di far avere a un cerchio lo stesso perimetro e la stessa area di un quadrato»*.
3. Errata: in questa categoria sono state inserite le risposte errate e le risposte del tipo *«Non ho capito»* e *«.»*.



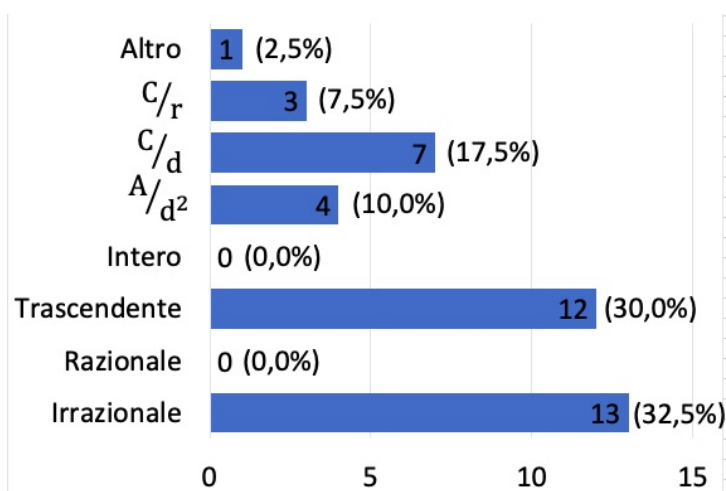
Di seguito si riporta un grafico in cui si mettono a confronto le tre categorie di risposta nei due questionari:



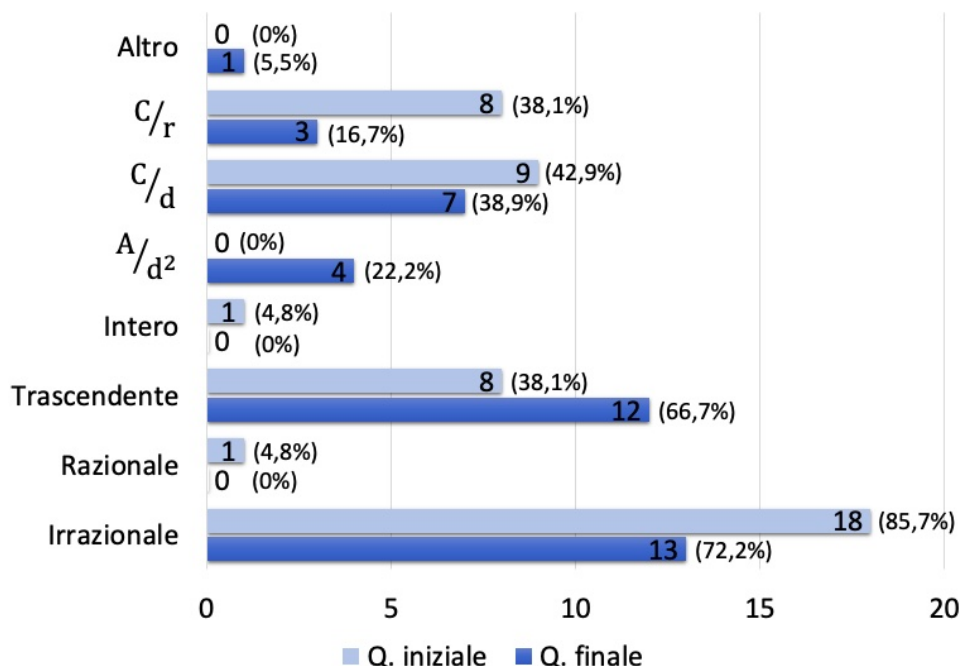
Da questo grafico si evince che la maggior parte degli studenti, alla fine del percorso, ha compreso la definizione del problema della quadratura del cerchio e dunque si nota un aumento delle risposte corrette ed una diminuzione delle risposte ambigue ed errate. Nella categoria delle risposte errate sono presenti tre risposte "." che possono essere interpretate come un tentativo da parte degli studenti che hanno compilato il questionario, di svolgerlo più velocemente possibile, fornendo delle risposte approssimative.

Domanda 2: Pi Greco è un numero: (puoi selezionare più di una risposta)

Anche questa domanda era presente nel Questionario iniziale e sono state inserite le stesse opzioni di risposta: irrazionale, trascendente, rapporto tra circonferenza e diametro (corrette) e intero, razionale, rapporto tra circonferenza e raggio, rapporto tra circonferenza e quadrato del diametro (errate). Anche per questa domanda vi era la possibilità di scegliere come risposta "Altro" ed uno studente ha utilizzato questa opzione per aggiungere «*Reale*». Di seguito si riporta il grafico che mostra quante volte ciascuna opzione di risposta è stata selezionata dagli studenti:



Essendo questa domanda in comune con il primo questionario somministrato agli studenti risulta interessante ai fini dell'analisi dei dati mostrare come si siano modificate le frequenze assolute, ma soprattutto percentuali, delle risposte degli studenti alla fine del percorso rispetto a quelle del Questionario iniziale.

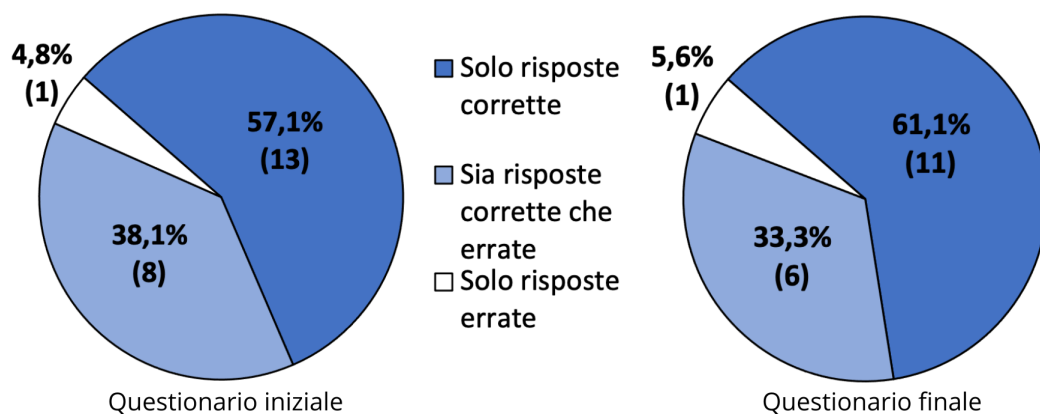


In generale gli studenti, al termine del percorso, hanno compreso le caratteristiche della costante Pi Greco, ma dal confronto tra le risposte dei due questionari si raggiungono delle conclusioni piuttosto inattese rispetto alle opzioni di risposta:

1. irrazionale e trascendente: nel questionario finale sono diminuite le risposte relative all'opzione "irrazionale" a favore di un aumento dell'opzione "trascendente"; le cause di questa variazione sono da ricercare probabilmente nella spiegazione da parte dell'insegnante del significato di "numero trascendente" che comprende la definizione di irrazionale e che molti studenti ancora non conoscevano
2. razionale ed intero: al contrario del questionario iniziale, nel questionario finale non sono state selezionate queste opzioni sbagliate
3. $\frac{C}{r}$, $\frac{C}{d}$ e $\frac{A}{d^2}$: il questionario finale mostra una diminuzione della scelta dell'opzione $\frac{C}{r}$ (scorretta) rispetto al questionario iniziale; questa variazione presuppone che gli studenti, alla fine del percorso, abbiano compreso la corretta caratterizzazione di Pi Greco ma analizzando la frequenza assoluta delle $\frac{C}{d}$ e $\frac{A}{d^2}$ si nota che in realtà, la maggior parte degli studenti, non ha compreso la caratterizzazione di Pi Greco poiché risulta diminuita la frequenza della risposta corretta $\frac{C}{d}$ mentre si riscontra un aumento della frequenza della risposta errata $\frac{A}{d^2}$.

Solamente tre studenti hanno individuato tutte le risposte esatte. Undici studenti hanno indicato solamente opzioni corrette mentre sei studenti hanno indicato sia opzioni corrette che sbagliate. Soltanto uno studente ha inserito solo opzioni errate, selezionando esclusivamente $\frac{A}{d^2}$ ed anche in questo caso sembra ragionevole concludere che la risposta sia stata data in modo superficiale con l'obiettivo di terminare il questionario in fretta e non di rispondere correttamente alla domanda.

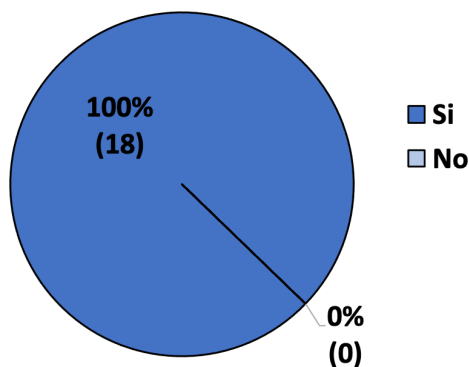
Di seguito si riportano i due areogrammi che mettono in confronto le percentuali di risposta a questa domanda tra il Questionario iniziale e quello finale.



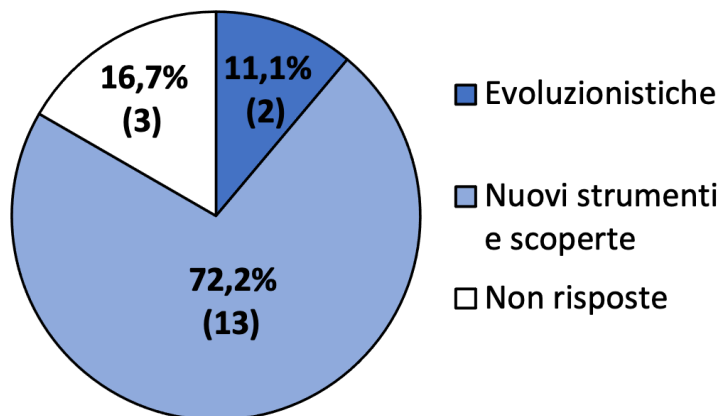
In generale, non si riscontrano particolari differenze tra le percentuali di risposte dei due questionari.

Domanda 3 e 4: La matematica si è evoluta nella storia? Giustifica la tua risposta.

La domanda numero tre era presente anche nel questionario iniziale alla quale già diciannove studenti su ventuno avevano risposto positivamente. Nel questionario finale, compilato solamente da diciotto studenti, la totalità degli studenti ha sostenuto la tesi secondo cui la matematica si è evoluta nel tempo.



Per l'analisi delle motivazioni sono state utilizzate le due categorie individuate nel questionario iniziale (si veda il Paragrafo 5.1).



Rispetto ai risultati del Questionario iniziale, le risposte di carattere evoluzionistico sono diminuite. Il numero di risposte che fa riferimento a nuovi strumenti e scoperte è rimasto invariato ma la percentuale è aumentata a causa del numero di questionari compilati inferiore. Anche il numero di "Non risposte" è leggermente aumentato, dimostrando nuovamente, forse una certa tendenza a rispondere frettolosamente e con superficialità nel Questionario finale.

Quasi la totalità degli studenti che hanno fornito una risposta esaustiva e inerente alla domanda, hanno fatto riferimento al progetto svolto e in alcuni casi si è esplicitato il richiamo all'evoluzione della costante Pi Greco osservata nel progetto. Per esempio:

«Il progresso effettuato nella scoperta del numero di pi greco dall'antica Grecia ad oggi è senz'altro significativa.»

Ma anche:

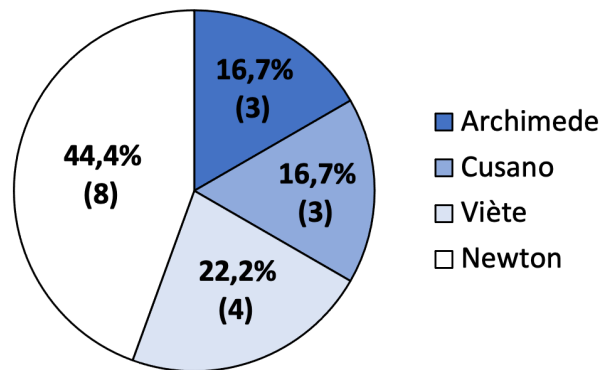
«Come abbiamo visto nella storia più si andava avanti più la scienza migliorava e quindi per esempio sono state scoperte sempre più cifre decimali.»

Quest'ultima risposta dimostra come il progetto, abbia trasmesso a questo studente una visione positivistica della storia di questa disciplina cioè, la matematica è stata percepita come un qualcosa che migliora in modo lineare senza subire variazioni o deviazioni lungo il suo percorso di sviluppo. In realtà, questa è una visione errata della storia della matematica, poiché, come si è cercato di trasmettere durante l'intero progetto e come sottolineano le parole di D'Amore riportate nel Capitolo 1, Sezione 1.2.2, una visione più accurata della storia della matematica e del fare matematica, mostra come questa disciplina sia stata costruita attraverso delle domande nate dalla necessità di spiegare la realtà. Le risposte a queste domande che hanno avuto importanza storica comprendono anche gli errori, i vicoli ciechi, le involuzioni, le controversie e gli approcci alternativi al problema che fanno parte integrante della storia della matematica in evoluzione.

Domanda 5 e 6: Quale personaggio ti ha incuriosito di più? Giustifica la tua risposta.

Questa domanda è stata inserita per indagare il coinvolgimento degli studenti rispetto alle quattro personalità presentate nel progetto.

Si riporta di seguito il grafico in cui sono indicate le frequenze assolute e le percentuali relative ad ogni risposta.



Ai fini degli obiettivi del progetto, descritti nel Capitolo 3, Sezione 3.1.3, la giustificazione di questa risposta risulta fondamentale poiché dalle risposte degli studenti è possibile indagare la riuscita o meno del tentativo di "umanizzare la matematica" attraverso le biografie dei quattro personaggi.

1. Archimede: i tre studenti che hanno indicato Archimede hanno giustificato la loro risposta in questo modo:

«Curiosità che non sapevo.»

«Con pochissimi strumenti è riuscito ad arrivare a risultati eccezionali.»

«Non avrei mai immaginato che già 2500 anni fa si potesse pensare al pi greco.»

Il personaggio di Archimede non era stato assegnato a nessun gruppo e la sua introduzione è stata svolta nella prima lezione del progetto. Da queste risposte si evince come lo studio della biografia di questo personaggio abbia affascinato e colpito gli studenti per la sua brillantezza e modernità, sia nelle scoperte relative a Pi Greco ma anche alle altre branche della scienza in cui si è cimentato.

2. Cusano: dei tre studenti che hanno indicato Cusano soltanto uno ha fornito una giustificazione:

«Nel ragionare della quadratura del cerchio.»

Seppur questa sia una risposta piuttosto breve, si deduce che lo studente in questione sia rimasto coinvolto nell'attività in cui si presentava la dimostrazione di Cusano relativa alla quadratura del cerchio.

3. Viète: dei quattro studenti che hanno indicato questo personaggio soltanto tre hanno fornito anche una giustificazione:

«È stato interessante scoprire attività svolte da un personaggio che non conosco.»

«Nonostante si occupasse di matematica e scienza solo nel tempo libero è riuscito a fare grandi scoperte.»

«Ho lavorato su questo personaggio facendo la presentazione di gruppo e ricercare sue informazioni mi ha molto incuriosito.»

Da queste tre risposte si possono trarre alcune conclusioni rispetto alla riuscita degli obiettivi del progetto. La prima giustificazione mostra come questo studente sia rimasto interessato dalla scoperta di un nuovo personaggio, molto importante nella storia della matematica, ma non esplicitamente presente nei programmi scolastici e dunque non conosciuto. La seconda risposta fa riferimento al fatto che questo personaggio non fosse un matematico di professione e dunque questo studente è rimasto incuriosito dalle grandi innovazioni introdotte. La terza risposta, invece, mostra come l'Attività "Identikit" e dunque la ricerca svolta personalmente sulla vita dei personaggi, abbia, in questo caso rispetto a Viète, incuriosito lo studente.

4. Newton: questo personaggio ha ricevuto la maggior parte dei voti della classe (8 voti, 44,4% della classe) e tutti hanno fornito una motivazione:

«Le voci sulla sua personalità, veritiere o meno, erano curiose.»

«Personalità insolita e curiosa, argomenti trattati affascinanti.»

«Pur non avendo i mezzi che abbiamo oggi si è avvicinato molto ai risultati del pigreco di oggi.»

«Era una persona particolare e anche il più recente rispetto a noi.»

«Nonostante sia il più famoso e recente, i suoi traguardi sono così rivoluzionari che non può che essere in cima alla lista.»

«È stato interessante il procedimento che Newton fece per arrivare a una buona approssimazione di π greco.»

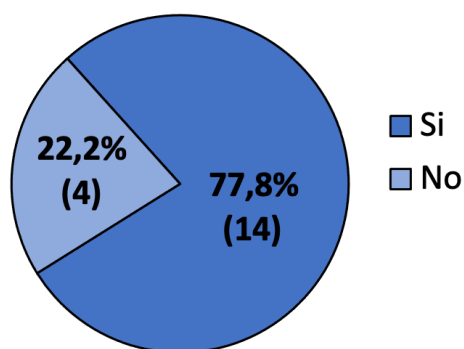
«Le sue scoperte sono quelle che mi hanno incuriosita maggiormente.»

«Perché sono stato coinvolto a presentarlo alla classe.»

Da queste risposte è possibile trarre alcune conclusioni rispetto al personaggio di Newton ed anche alla riuscita del progetto. Infatti, dalle prime due risposte riportate, emerge come la personalità controversa di Newton (si confronti il Capitolo 2, Sezione 2.6 relativa alla sua biografia) abbia incuriosito e coinvolto gli studenti. Dalla terza alla settima risposta emerge, invece, come siano state le attività svolte relativamente a Newton e l'approssimazione di Pi Greco a coinvolgere gli studenti. E ancora, dall'ultima risposta, è possibile dedurre che sia stata in particolare l'Attività "Identikit" (descritta nel Capitolo 3, Sezione 3.1.4) a far nascere l'interesse per la figura dello scienziato.

Domanda 7: Dopo questo percorso riscriveresti gli stessi 5 aggettivi riferiti al matematico?

Da questa domanda è emerso come la maggior parte degli studenti riconfermerebbe gli stessi cinque aggettivi con cui descrivere un matematico.



Domanda 8 e 9: In generale, che cosa ti è piaciuto di questo percorso? Giustifica la tua risposta.

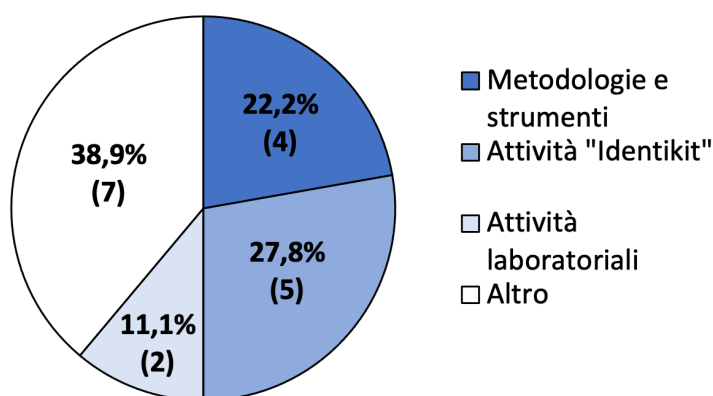
Per l'analisi delle risposte alla Domanda 8, sono state selezionate quattro macro categorie di risposta:

1. Metodologie e strumenti: in questa categoria sono state inserite tutte le risposte che fanno riferimento alle metodologie ed agli strumenti utilizzati durante il percorso: Per esempio: «Le presentazioni sul computer erano fatte molto bene e hanno permesso di seguire bene tutto il progetto.», «Momenti di spiegazione con curiosità alternati a momenti didattici a gruppi.», «Mi è piaciuto l'argomentazione e i punti trattati durante il percorso riassumendo bene e le parti importanti delle vite e delle opere di questi matematici.» e «La nostra partecipazione.»
2. Attività "Identikit": in questa categoria rientrano tutte le risposte che fanno riferimento, in particolare, all'Attività "Identikit" e alla scoperta delle vite dei matematici protagonisti del progetto. Per esempio: «Il fatto di aver approfondito l'aspetto umano del matematico e non soffermandoci solo sulle formule.», «Il nostro lavoro attivo di ricerca e la semplicità con cui sono stati trattati gli argomenti.», «Il fatto che anche gli studenti sono stati coinvolti e ho scoperto aspetti dei matematici che non avrei mai analizzato», «La parte in cui ci

siamo cimentati nel scoprire un personaggio.» e «Scoprire particolari della matematica e dei matematici stessi.»

3. Attività laboratoriali su Pi Greco: in questa categoria rientrano le risposte che fanno riferimento alle attività svolte in gruppi e che possono essere visionate negli Allegati A, B, C. Per esempio: *«Le attività sottoposte alla classe.»*.
4. Altro: in questa categoria rientrano tutte le altre risposte. Per esempio: *«La capacità di sottoporre problemi complessi in maniera semplice, chiara ed efficace.»*, *«Le curiosità che ho scoperto riguardo la matematica.»*, *«L'approccio semplice ma conciso della referente.»*, *«Il metodo espositivo.»*, *«L'originalità.»*, *«Tutto.»*, *«Perdere ore di lezione.»*

Di seguito si riporta il grafico in cui vengono indicate le frequenze assolute e percentuali delle risposte degli studenti rispetto queste quattro categorie.



Per quanto riguarda la giustificazione, le risposte sono state divise nuovamente in tre categorie:

1. Tipologia di progetto/originalità: in questa categoria sono state inserite le risposte che fanno riferimento alla struttura del progetto, alle modalità di svolgimento e alla scelta degli argomenti trattati. Per esempio:

«È stato più originale dei soliti corsi o delle solite lezioni, come il metodo col quale abbiamo fatto le nostre ricerche, o con il fatto che le spiegazioni in classe erano sempre intervallate da attività pratiche.»

«Perché essendo poco il tempo per riassumere bene i tratti fondamentali di queste persone poteva risultare difficile o inefficace invece sono stati trattati tutti i punti ed in modo veloce.»

«Il percorso è stato posto a un livello comprensibile a degli studenti di quarta nonostante trattasse elementi più avanzati.»

«In una normale lezione scolastica vengono analizzati solo aspetti noiosi e parla solo il professore.»

«Se non fosse stato per questo progetto, quasi sicuramente non avrei imparato queste cose.»

«La proprietà di linguaggio e di indirizzamento del discorso.»

«È più bello rispetto a seguire semplicemente la lezione.»

«Ci rendevano molto partecipi alle scoperte trovate.»

«Molto piacevole e ben organizzato ed esposto.»

«Esperienza completa.»

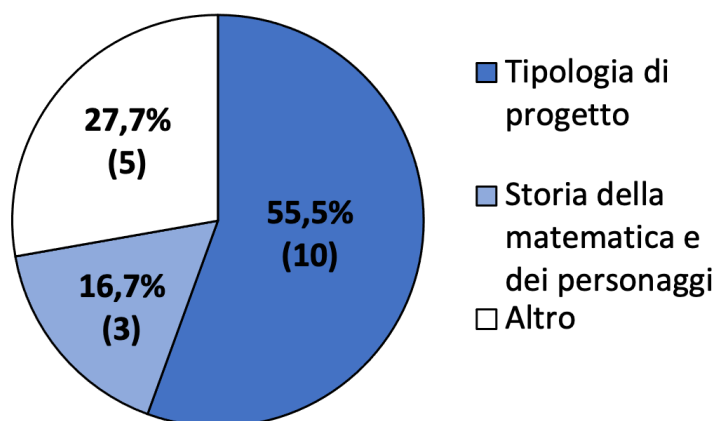
2. Storia della matematica/dei personaggi: in questa categoria sono state inserite tutte le risposte che fanno riferimento alla storia della matematica e dei personaggi. Per esempio:

«È stato bello vedere come nel corso del tempo siano stati svolti alcuni calcoli e come i vari procedimenti siano cambiati nel corso del tempo.»

«Ho trovato interessante provare a ripercorrere le dimostrazioni dei matematici trattati tramite le attività guidate.»

«Per esempio mi sono talmente incuriosito su newton che ho sentito pure un podcast.»

3. Altro: in questa categoria sono state inserite tutte le risposte che non rientrano nelle categorie e le risposte del tipo «.». Per esempio: *«Una preoccupazione in meno.»*



Domanda 10: Che cosa cambieresti di questo percorso?

Questa domanda è stata inserita per conoscere le opinioni degli studenti rispetto a come migliorare il progetto per un eventuale revisione.

La maggior parte degli studenti ha risposto «Nulla.» (13/18, 72,2%) mentre vengono riportate integralmente tutte le altre risposte che, in generale, suggeriscono di semplificare le attività laboratoriali:

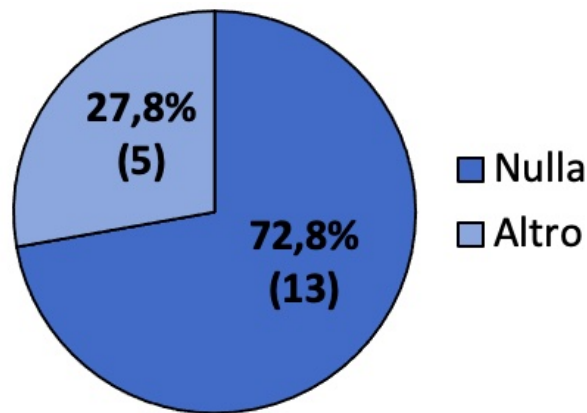
«Meno attività pratiche di esercizio.»

«Farei fare ai ragazzi delle attività più brevi.»

«Magari i gruppi non dovrebbero fare gli approfondimenti sugli stessi argomenti.»

«Forse le attività erano un pochino complicate e potevano risultare anche poco coinvolgenti.»

«Spiegherei meglio i ragionamenti con meno numeri, perché vedevo delle gran formule senza capire niente.»



5.3 Interviste

In questa sezione si riportano le risposte all'intervista svolta ai due studenti campione ed al professore Fabio Filippi (si veda Capitolo 3, Sezione 3.1.5 in cui sono riportate le domande).

Le interviste si sono svolte da remoto, in una videocall della durata di circa venti minuti ciascuna.

5.3.1 Intervista alunno 1

Questa studentessa è stata scelta poiché, secondo l'indicazione del professore, è una studentessa con qualche difficoltà in questa materia, ma durante lo svolgimento dell'intero progetto ha mostrato grande interesse ed un particolare impegno nello svolgimento delle attività proposte, dunque si è pensato potesse essere un soggetto interessante per svolgere l'intervista.

1. Nel quiz preliminare era richiesto di scrivere 5 aggettivi con il quale tu descriveresti un matematico. Ti ricordi quale fosse la tua risposta?

Sì, ho scritto solo tre aggettivi perché non me ne venivano in mente altri e sono: intelligente, curioso e intraprendente.

Alla luce del progetto svolto, modificheresti la tua risposta? Come? Perché?

Sì, modificherei la mia risposta e direi: razionale, preciso e logico. Razionale perché, in base alla mia esperienza scolastica mi sono resa conto che (per esempio ora stiamo facendo trigonometria) quando siamo alla lavagna e ci fanno una domanda, magari noi prendiamo la prima strada che ci viene in mente e procediamo con quel ragionamento fino a quando magari ci accorgiamo che è sbagliato e forse non ci pensiamo neanche molto. Un matematico invece segue un ragionamento che ha sempre senso perché lo motiva di passo in passo. Preciso perché in generale i matematici che abbiamo studiato a scuola son sempre stati precisi, sicuramente più di un fisico. Questo perché, sempre in base alla mia esperienza personale, mi rendo conto che quando il prof. Filippi ci spiega qualcosa di fisica fa molti disegni, molti giri di parole mentre quando ci spiega matematica lui segue un ragionamento che è molto più lineare e preciso. Logico perché, in base anche a quanto detto per razionale, il ragionamento di un matematico deve essere sempre giustificato e questo l'ho capito soprattutto dall'attività su Cusano, perché lui non ha sempre utilizzato la matematica per giustificare le sue affermazioni.

2. Quale matematico hai approfondito durante il percorso? Ti è piaciuto scoprire alcuni aspetti della sua vita? Perché? C'è qualcosa che ti ha incuriosito o colpito particolarmente del matematico che hai approfondito o degli altri che hai visto durante il percorso?

Ho approfondito il personaggio di Cusano. Sì, mi è piaciuto molto perché a noi a scuola ci vengono presentate le cose così come sono, i teoremi o le formule ma non ci viene mai raccontata la storia del matematico, forse per mancanza di tempo. Comunque, secondo me, capire perché e come un matematico arriva ad un risultato è stato molto interessante e può essere anche utile a comprendere meglio l'argomento. In particolare di Cusano mi ha colpito che lui non è stato solo un matematico, ma si è occupato di tante cose: dall'astronomia, alla fisica, all'ottica (prime lenti per miopi) e alla filosofia. Comunque è strano che un matematico sia anche un filosofo.

Pensi che l'aver scoperto alcuni aspetti biografici dei matematici abbia aiutato o ostacolato il tuo apprendimento relativamente ai concetti incontrati durante il percorso?

Penso che mi abbia aiutato scoprire alcuni aspetti biografici perché le teorie del matematico in questione erano più contestualizzate e non sembravano scese dal cielo, avevano più senso.

Pensi che l'aver scoperto alcuni aspetti biografici dei matematici abbia favorito o limitato il tuo interesse durante il percorso?

Ha certamente favorito il mio interesse proprio perché non avevamo mai fatto una cosa simile e mi sono resa conto che un matematico non è un genio, è una persona che studia matematica. Di solito tra noi ragazzi c'è questa idea che un matematico sia uno che non ha niente da fare nella vita e quindi si mette a studiare in maniera pazza per inventare alcune teorie e quindi i personaggi mi sono sembrati più vicini, più delle persone normali. Comunque, questa attività che ci ha fatto fare, ha suscitato grande interesse anche in tutti i miei compagni. Pensi che il professor Filippi, nella lezione successiva alla conclusione del suo progetto, ci ha chiesto se ci era piaciuto e siccome le risposte erano tutte positive, ha deciso di farci fare la stessa attività di ricerca, con le stesse domande che ci aveva dato lei, per quattro fisici che stiamo studiando in questo periodo. Eravamo tutti entusiasti.

3. Come ti sei sentita a lavorare sui documenti storici? Ti è piaciuto oppure no? Perché?

Non avevamo mai lavorato direttamente sui documenti storici per studiare un teorema o una qualsiasi formula quindi mi ha interessato ed incuriosito molto. Soprattutto perché, vedere come queste persone siano arrivate a formularli, che strada hanno percorso, quale ragionamento, attraverso le testimonianze dirette è stato molto più interessante rispetto a quando ci comunicano e basta in aula la nozione che dobbiamo sapere.

Ce ne è una che ti è piaciuta di più? Perché?

Sì, quella di Cusano. Sia perché era più operativa, dovevamo tracciare le linee, mi ha divertito, sia perché avevo studiato la sua biografia e quindi mi faceva piacere vedere come applicava la sua conoscenza in pratica, ero curiosa perché è un filosofo ed era diverso da solito modo che abbiamo di parlare di matematica.

Pensi che l'aver usato documenti storici abbia aiutato o ostacolato il tuo apprendimento relativamente ai concetti incontrati durante il percorso? Pensi che l'aver usato documenti storici abbia favorito o limitato il tuo interesse durante il percorso?

Non saprei, forse favorito no, dipende in che senso si intende apprendimento perché magari, pensando all'attività su Viète, se mi fosse stata data la formula tratta dal documento originale, non ci avrei capito niente, però comunque il fatto di averci sfidato a tradurre quella formula, mi ha fatto venire voglia di conoscerla, quindi sì, non so.

4. Qual è l'aspetto che ti è piaciuto di più in questo percorso? Che cosa invece ti è piaciuto di meno?

L'aspetto che mi è piaciuto di più del progetto è stato lavorare in gruppo perché è una modalità che non usiamo mai, forse anche per mancanza di tempo. Forse l'avremmo fatto due volte in quattro anni ed è sempre accaduto online, mentre questa volta per fare questa presentazione, ci siamo incontrate a casa, mi sono divertita. Inoltre in aula, non abbiamo fatto solo una ricerca, abbiamo anche fatto un lavoro di ragionamento e abbiamo potuto vedere le altre persone come ragionano e come risolvono i problemi e mi ha fatto strano, non l'avevamo mai fatto. Mi è piaciuto perché di solito non si fa, ognuno lavora per se e tu non

sai gli altri come ragionano, invece così ho potuto vederlo. Ci ha unito molto perché alcuni gruppi erano già amici da tempo, ma altre persone che hanno lavorato insieme in questa attività non lo erano. Per quanto riguarda ciò che mi è piaciuto meno, non saprei... Forse l'attività su Viète perché l'ho trovata più complicata delle altre e se lei non ci avesse dato qualche consiglio non credo che saremmo riuscite ad arrivare alla fine. Però, le devo dire la verità, quando abbiamo capito cosa dovevamo fare, proprio perché ci sembrava difficile, ci siamo sentite geniali, tutto sommato è stata una bella sensazione.

5.3.2 Intervista alunno 2

Questo studente, sempre secondo l'indicazione del professore, non è uno studente sempre molto interessato alla matematica, ma in generale si impegna. In particolare, è stato scelto perché, in una delle cinque lezioni del progetto, ha confessato di aver apprezzato molto il lavoro di ricerca sulla biografia dei personaggi e di essersi interessato alla biografia di Newton a tal punto da voler approfondire le conoscenze relative a questo personaggio.

1. Nel quiz preliminare era richiesto di scrivere 5 aggettivi con il quale tu descriveresti un matematico. Ti ricordi quale fosse la tua risposta?

Si, ho scritto tre aggettivi e li ho scritti pensando al professor Filippi e sono: sapiente, razionale, capelli bianchi.

Alla luce del progetto svolto, modifichereesti la tua risposta? Come? Perché?

Si, assolutamente. Perché con questa cosa che ci ha fatto fare di indagare le biografie profondamente, sono apparse tante cose diverse ed in più rispetto quello che noi conosciamo o immaginiamo riguardo al matematico. Cioè, ci sono delle cose nascoste, ci sono delle cose in più. È diverso dallo stereotipo che noi intendiamo solitamente. Non è un genio come tutti possiamo pensare ma è una persona che ha fatto un percorso, ha studiato. In generale questo. Non saprei che aggettivi dare, non so, bisognerebbe valutare persona per persona. Razionale ora non lo scriverei, perché bisogna vedere, alcuni erano molto razionali, altri matiti. Nemmeno sapiente scriverei perché non è come si pensa normalmente che un matematico nasce genio o ha delle doti particolari, è una persona normale che si dedica alla matematica e studia.

2. Quale matematico hai approfondito durante il percorso? Ti è piaciuto scoprire alcuni aspetti della sua vita? Perché? C'è qualcosa che ti ha incuriosito o colpito particolarmente del matematico che hai approfondito o degli altri che hai visto durante il percorso?

Ho approfondito Newton. Si, mi è piaciuto molto, come le avevo detto anche in aula, io grazie a questa attività mi sono appassionato alla figura di Newton, lui era una persona interessantissima, ma in generale mi son reso conto che mi sarebbe piaciuto fare la ricerca anche su tutti gli altri personaggi del lavoro che ci ha fatto fare. Mi è piaciuto ascoltare i miei compagni. Il lavoro di ricerca è stato bello, la sua vita è molto interessante. Inoltre Newton solitamente si fa a scuola per le leggi della dinamica e basta, quindi vedere la sua biografia e la sua vita è stato scoprire qualcosa di nuovo. Mi ha colpito tutto della sua vita. Ho iniziato anche ad ascoltare dei podcast sulla sua vita. Una cosa in realtà mi ha fatto

più impressione di altre e cioè che lui ebbe una difficile situazione familiare che gli lasciò un segno indelebile. Se non sbaglio, a diciannove anni stilò una lista dei suoi peccati fino a quel momento, tra cui in uno diceva: «ho pensato di bruciare il mio patrigno con mia madre insieme alla loro casa». Incredibile.

Pensi che l'aver scoperto alcuni aspetti biografici dei matematici abbia aiutato o ostacolato il tuo apprendimento relativamente ai concetti incontrati durante il percorso?

Absolutamente aiutato, ostacolato proprio no! Questo perché mi sentivo più vicino ai personaggi e soprattutto che gli argomenti trattati non saltavano fuori a caso ed erano contestualizzate.

Pensi che l'aver scoperto alcuni aspetti biografici dei matematici abbia favorito o limitato il tuo interesse durante il percorso?

Absolutamente favorito, come le dicevo prima, Newton mi ha coinvolto particolarmente ma mi avrebbe fatto piacere ricercare le biografie anche di tutti gli altri perché secondo me poi uno capisce meglio anche le sue opere matematiche. Infatti, non so se il prof. Filippi glielo ha detto ma visto che siamo rimasti tutti molto contenti e incuriositi delle attività che ci ha fatto fare, abbiamo deciso di fare la stessa ricerca sui personaggi per fisica. Sempre negli stessi gruppi, il prof. ci ha assegnato un personaggio a gruppo e con le stesse domande abbiamo fatto la ricerca ed esposto in classe prima di presentare le loro teorie fisiche.

3. Come ti sei sentito a lavorare sui documenti storici? Ti è piaciuto oppure no? Perché?

Mi è piaciuto lavorare direttamente sui documenti storici perché anche questo tipo di lavoro è molto diverso dal classico lavoro che facciamo in aula e poi da quei documenti si entra in contatto con quello che sono veramente: ciò che hanno pensato, ciò che hanno fatto, ciò che hanno scritto. È sicuramente più interessante rispetto a quando ci spiegano una formula o un teorema e basta poiché dal libro di testo si leggono delle parole che hanno un senso, però non si capisce cosa c'è dietro, che pensieri, che persona.

Ce ne è una che ti è piaciuta di più? Perché?

In generale mi sono piaciute tutte, ma quella che mi ha divertito di più è stata quella di Viète. Io facevo parte del Gruppo 6 e in quell'attività abbiamo ragionato un sacco, siamo andati anche fuori tema rispetto alle richieste, abbiamo raggiunto calcoli assurdi però il fatto di aver ragionato così tanto ed essere comunque arrivati a qualcosa di sensato mi ha fatto sentire davvero intelligente. Ho apprezzato molto anche il fatto di collaborare coi miei compagni, ognuno diceva la sua, ognuno provava a trovare una soluzione ed anche se non siamo riusciti ad arrivare alla conclusione, è stato davvero molto divertente.

Pensi che l'aver usato documenti storici abbia aiutato o ostacolato il tuo apprendimento relativamente ai concetti incontrati durante il percorso? Pensi che l'aver usato documenti storici abbia favorito o limitato il tuo interesse durante il percorso?

Non saprei, forse favorito no, dipende in che senso si intende apprendimento. Non penso di aver imparato di più o meglio, però per quanto riguarda l'interesse, sicuramente ha favorito. Secondo me si devono integrare le due cose in una lezione di matematica, cioè anche far

vedere il documento originale oltre al libro di testo classico, non credo si perda molto tempo ed è più interessante.

4. Qual è l'aspetto che ti è piaciuto di più in questo percorso? Che cosa invece ti è piaciuto di meno?

L'aspetto che mi è piaciuto di più è stato quello di approfondire la vita dei personaggi in prima persona, ma anche sentirla spiegata, anche le attività mi sono piaciute molto. Ma in generale non saprei dire cosa mi è piaciuto di meno... Forse alcune cose avrei preferito che fossero andate ancora di più nel dettaglio sia dal punto di vista matematico, che della biografia.

Dalle due interviste agli studenti è emerso che l'Attività "Identikit" elaborata per questo progetto ha suscitato grande interesse ed è stata utilizzata anche per le lezioni di fisica, dunque è ragionevole concludere che sia stata un'attività che ha raggiunto gli obiettivi desiderati di coinvolgere gli studenti ed umanizzare la matematica attraverso le biografie dei personaggi. Inoltre, anche le metodologie utilizzate (l'alternarsi della spiegazione ad attività pratiche, il lavoro di gruppo,...) sono state apprezzate ed hanno favorito l'interesse degli studenti.

5.3.3 Intervista al professore

L'intervista al professor Fabio Filippi, come spiegato nel Capitolo 3, Sezione 3.1.5, mira ad indagare la partecipazione degli studenti, la qualità e riuscita del progetto e l'utilizzo di un approccio storico/biografico per l'insegnamento della matematica.

1. La presentazione della biografia dei personaggi che hanno caratterizzato la storia di Pi Greco aveva come obiettivo principale quello di "umanizzare la matematica" cioè distruggere quell'aura mistica e negativa che circonda questa disciplina e restituirle il calore e la bellezza della creatività umana. Pensa che nel complesso l'attività abbia raggiunto lo scopo per il quale è stata ideata?

Trovo estremamente interessante l'approfondimento relativo alla biografia dei singoli personaggi, grazie alla quale abbiamo scoperto di più sulla storia degli eventi che hanno portato alle conquiste intellettuali che conosciamo. A quanto mi risulta confrontandomi con gli studenti, l'obiettivo è stato raggiunto appieno e in molti di loro sono venuti a galla nuovi interessi che fino ad ora non erano emersi. Lo studio della vita di questi matematici ha permesso ai ragazzi di confrontarsi con la dimensione umana, perfino quotidiana talvolta, di chi, alle prese con un'idea, si è trovato immerso in un contesto che, al contrario di quello che a volte potremmo pensare, non sempre gli era favorevole.

2. Che cosa ha funzionato nell'attività e cosa no? Cosa cambierebbe per migliorare il progetto?

L'attività ha suscitato forte interesse negli studenti che si sono sentiti partecipi di un progetto importante che li ha fatti sentire coinvolti, e che gli ha anche permesso di affacciarsi, seppur indirettamente, per la prima volta al mondo dell'università. Al momento non ho idee per possibili miglioramenti.

3. Il coinvolgimento degli alunni, rispetto alla lezione tradizionale, è stato maggiore o minore? Gli alunni sono stati più o meno attivi e coinvolti? Le metodologie usate sono state adeguate e hanno favorito il coinvolgimento?

È evidente che i ragazzi si siano sentiti coinvolti maggiormente. Un'attività limitata nel tempo e basata sul loro coinvolgimento ha permesso alla classe di uscire dalla loro routine. Grazie ad una buona preparazione ed empatia della proponente, i ragazzi hanno sviluppato un livello di ansia minore rispetto a quella che è solita scaturirsi dai tradizionali percorsi scolastici, che spesso portano allo svolgimento di esercizi finalizzati alla classica valutazione.

4. L'utilizzo di un approccio storico affiancato ad una attività di tipo laboratoriale pensa possa essere d'aiuto ai ragazzi nell'apprendimento? Quali sono secondo lei i punti di forza e gli svantaggi di questo tipo di lavoro? Cosa ne pensa dell'utilizzo di fonti storiche?

L'approccio laboratoriale, soprattutto se sviluppato a gruppi ed affiancato all'approfondimento storico risulta efficace e produttivo. Svantaggi non ce ne sono. Il lavoro a monte è comunque considerevole, soprattutto in un Liceo Scientifico, dove rimane imprescindibile la necessità di concentrarsi sull'obiettivo dell'esame di stato. Un lavoro approfondito sulle fonti risulta prezioso e molto formativo per i discenti nell'approcciare una ricerca storica sulla disciplina.

5.4 Conclusioni

L'obiettivo principale del progetto era quello di avvicinare gli studenti alla matematica, eliminando i pregiudizi che portano a considerarla una disciplina per geni o eletti e dunque, come suggerisce anche il titolo dell'elaborato, umanizzare la Matematica (si veda Capitolo 3 per una descrizione più approfondita). L'evoluzione di Pi Greco e della quadratura del cerchio, argomento centrale dell'elaborato, è stata dunque accompagnata dalla biografia dei personaggi poiché emergessero, accanto alla produzione scientifica di questi, tutte le caratteristiche e le peculiarità che fanno di uno studioso, un essere umano: il carattere, le simpatie, le paure, gli interessi, le sofferenze.

Il progetto *Continua il viaggio attraverso Pi Greco*, esposto in questa tesi, è stato sperimentato in una sola classe, ma si ritiene sia comunque possibile trarre alcune conclusioni di carattere qualitativo rispetto agli aspetti positivi e negativi dell'intera progettazione e riguardo al raggiungimento degli obiettivi.

L'introduzione della storia, nello specifico la storia dei personaggi, ha sortito grande entusiasmo negli studenti sia poiché sono stati in prima persona coinvolti nella ricerca rispetto alla biografia del personaggio (attraverso l'Attività "Identikit" descritta nel Capitolo 3, Sezione 3.1.4), sia poiché, come emerge dalle interviste riportate al capitolo precedente, gli studenti hanno potuto apprezzare la natura umana della disciplina e sono riusciti a sentirsi "più vicini" ai grandi matematici e studiosi che hanno segnato l'evoluzione di Pi Greco. In particolare, l'Attività "Identikit" che ha particolarmente incuriosito gli studenti, è stata riproposta su richiesta della classe per quattro protagonisti della fisica: gli studenti, divisi negli stessi gruppi e seguendo le stesse domande, hanno ricercato le biografie di questi personaggi per poi esporre alla classe la loro presentazione.

Le metodologie di svolgimento utilizzate sia nell'esposizione che nell'effettiva sperimentazione (divisione in gruppi, ricerca autonoma, alternanza di spiegazioni e attività laboratoriali) sono state anch'esse apprezzate dagli studenti, come è possibile riscontrare dalle risposte del Questionario finale *La conclusione del percorso...* i cui risultati sono analizzati nella Sezione 5.2 di questo capitolo. Dalla prima intervista (si veda Sezione 5.3), in particolare, emerge come, siano ancora presenti le conseguenze del lungo periodo di didattica a distanza che questi studenti hanno vissuto a causa del Covid-19. La studentessa intervistata ha espressamente dichiarato che prima di questa attività, non si era mai ritrovata con i compagni durante l'orario extrascolastico per compiere un'attività di gruppo (prima si ritrovavano da remoto) ed è dunque riuscita ad apprezzare maggiormente il lavoro di gruppo e la collaborazione.

L'inserimento della storia nell'insegnamento della matematica, ed in particolare dei documenti storici originali, come ampiamente sostenuto dalle teorie presentate nel Capitolo 1, può contribuire a sviluppare la capacità di valutazione delle informazioni ed accrescere il pensiero critico. Questa particolare tipologia di lavoro ha suscitato negli studenti un forte interesse poiché, come dichiarato nelle interviste (Sezione 5.3), si distacca dalla tradizionale pratica d'aula e spinge gli studenti alla riflessione, permettendo, inoltre, di apprezzare la grande potenza del linguaggio simbolico moderno, spesso temuto e criticato dagli studenti.

Per quanto riguarda le problematiche della sperimentazione, si sono riscontrate delle difficoltà nel rispetto delle tempistiche che sono risultate dilatate rispetto alla progettazione. In particolare, si è riscontrata una valutazione errata delle tempistiche richieste dall'attività laboratoriale: divisione in gruppi e confronto paritetico. Per un eventuale revisione del progetto, si rende dunque necessario snellire le schede delle attività (Allegato A, B, C) o dedicare alle attività una quantità di tempo maggiore.

Ed ancora, dalle risposte al Questionario finale, si evince come alcuni studenti abbiano assimilato dal progetto una visione totalmente positivista dell'evoluzione matematica. Questa espressione caratterizza l'atteggiamento che consiste nel considerare la storia di questa disciplina come lineare, in continua evoluzione e progresso, senza vicoli ciechi, senza involuzioni. In realtà, questo progetto, tra gli altri obiettivi, si poneva anche quello di far emergere come, nello sviluppo di questa scienza, le teorie, le formule, i teoremi ed in generale le scoperte, abbiano subito delle battute di arresto, delle riformulazioni, degli errori e dei ripensamenti per arrivare alla formulazione che conosciamo oggi. L'attività relativa a Cusano (si veda Allegato 2.4 per le schede e Capitolo 3 per la progettazione) e le critiche mosse alla sua dimostrazione fallace di quadratura del cerchio avevano come obiettivo quello di far emergere proprio questo aspetto non lineare dello sviluppo della matematica, mostrando come, anche l'errore, possa in realtà suggerire degli spunti di ragionamento e dunque favorire l'evoluzione della disciplina e del pensiero, esattamente come accade nel processo di apprendimento.

La sperimentazione è stata svolta durante le due settimane di rallentamento della didattica che dividono il trimestre dal pentamestre scolastico (tranne la lezione su Archimede svoltasi prima delle vacanze natalizie) ed è necessario sottolineare che, il recupero delle insufficienze e il ripasso

generale previsti in queste due settimane, erano stati svolti in itinere dal professor Filippi proprio per permettere lo svolgimento del progetto. Senza questo accorgimento probabilmente non sarebbe stato possibile effettuare la sperimentazione poiché, come sottolineato anche nell'intervista all'insegnante, soprattutto in un Liceo Scientifico, rimane imprescindibile la necessità di concentrarsi sull'obiettivo dell'esame di stato. Non è semplice inserire un progetto di questa portata in una programmazione tradizionale per questioni legate alla gestione del tempo ma, sarebbe auspicabile, che venisse inserito almeno un progetto in cui la matematica risultasse presentata attraverso la sua storia con utilizzo di metodologie e strumenti differenti rispetto alla lezione tradizionale. In questo modo, gli studenti potrebbero apprezzare maggiormente questa disciplina, riscoprendone il calore e la bellezza della natura umana.

Più di duemila e trecento anni di dimostrazioni, scoperte, teoremi, esercizi, costruzioni, equazioni, figure non sono riassumibili in pochi anni di scuola. In questo senso, ogni studente di oggi, nel suo percorso scolastico, non può far altro che scorgere soltanto una piccolissima parte dell'intero ed entusiasmante universo matematico. E a partire da tale scorcio, con l'aiuto dell'insegnante, egli dovrà cercare di scoprire e di conoscere ciò che rimane nell'oscurità per «elevarsi al di sopra di se stesso e padroneggiare il mondo» (Archimede).

Appendice A

Cusano e la quadratura del cerchio

Il cardinale Niccolò Cusano era convinto di aver quadrato il cerchio attraverso un ingegnoso procedimento consistente nel fare la media dei poligoni inscritti e circoscritti da cui trovò che il rapporto tra la lunghezza della circonferenza ed il diametro era 3,1423.

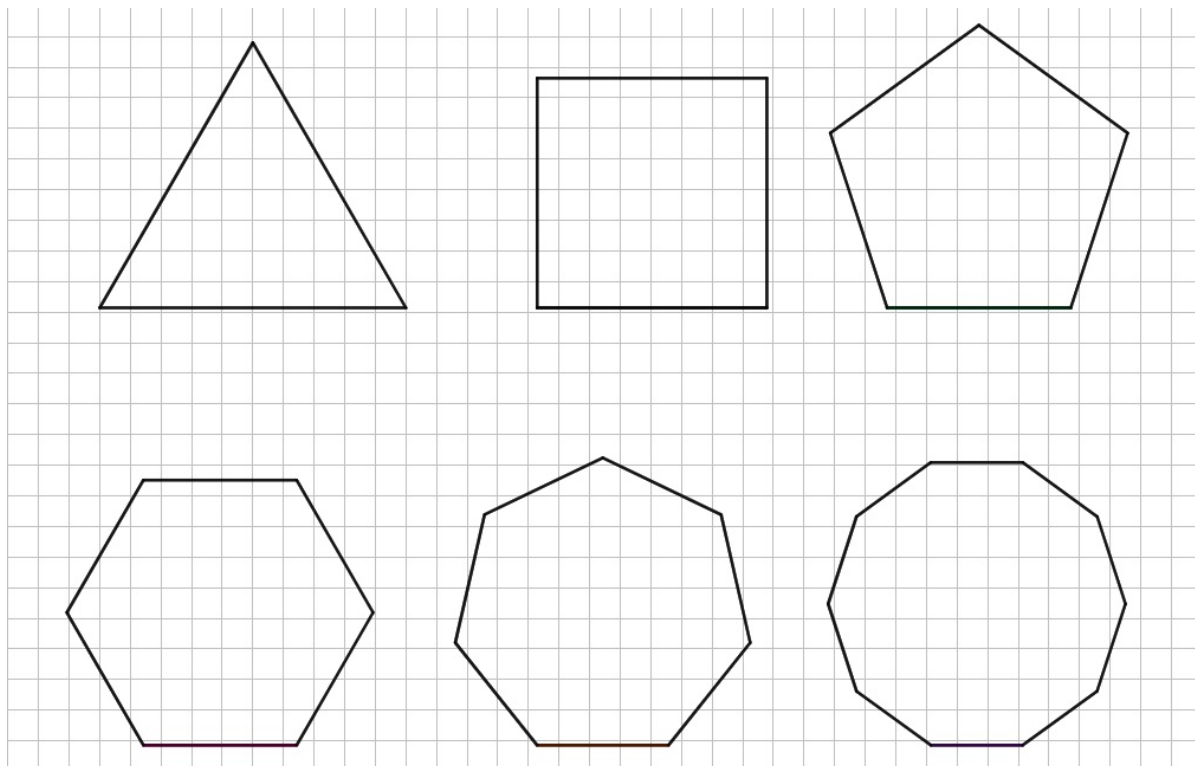
Ricostruiamo il procedimento utilizzato da Niccolò Cusano nella sua dimostrazione seguendo alcuni passaggi tratti dalla traduzione di Federica de Felice del *De mathematicis complementis*, opera composta tra il 1453 e il 1454 ed indirizzata al "santissimo Papa Niccolò V", un umanista e amante delle scienze che stipendiò numerosi traduttori per realizzare la versione latina di opere greche.

[LIBRO PRIMO]

... Innanzitutto bisogna dire che, in una figura avente più angoli, cioè in un poligono che ha lati uguali, il punto equidistante dalla metà e dall'estremità dei lati si chiama centro, e la linea condotta da questo centro al punto medio del lato è il semidiametro del cerchio ad esso inscritto, ed è detta prima linea. E l'altra linea condotta dallo stesso centro fino all'estremità di un lato, cioè, a un angolo qualsiasi, è il semidiametro del cerchio circoscritto in essa ed è detta seconda linea.

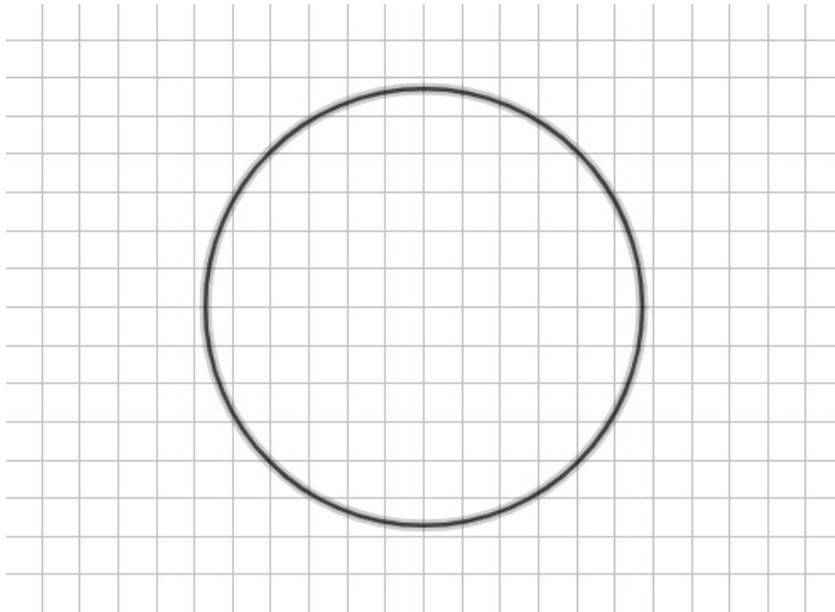
In questa parte estratta dal testo, Cusano definisce alcuni elementi dei poligoni che andranno a costituire la sua dimostrazione: la prima linea, la seconda linea ed il centro.

1. Disegnate in rosso la prima linea, in blu la seconda linea e con un altro colore il centro di questi poligoni.



2. Supponendo di aver eseguito in maniera precisa la costruzione precedente, che cosa si può osservare di queste linee in relazione al crescere del numero di lati del poligono?

3. Disegna il centro, la prima e la seconda linea del cerchio.

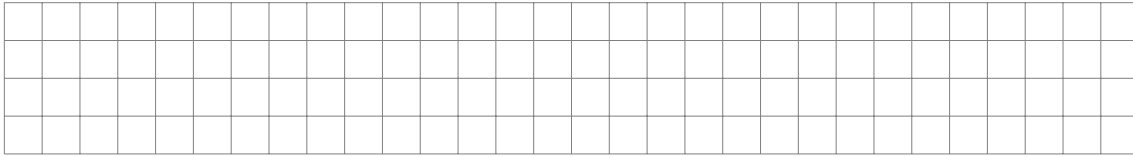


4. In che rapporto sono la prima e la seconda linea? Provate a spiegare il perché della vostra risposta facendo riferimento a come veniva considerato il cerchio.

La dimostrazione di Cusano continua con alcune considerazioni sulla prima e la seconda linea dei poligoni regolari per proseguire con il calcolo delle aree.

E poiché la prima delle figure rettilinee è il triangolo, in esso la prima e la seconda linea hanno lunghezze massimamente diverse. Tuttavia nel cerchio coincidono, poiché qui il centro si trova a uguale distanza dalla circonferenza; e infatti, la metà e l'estremità del lato coincidono, e c'è un angolo ovunque. Tuttavia, nel triangolo la prima linea è la più corta, la seconda la più lunga. Nel quadrato avente lo stesso perimetro, la prima linea è la più corta dopo la prima del triangolo e la seconda è la più lunga dopo la seconda del triangolo e così via. E poiché in tale quadrato la prima è più lunga della prima nel triangolo, se si moltiplica la prima nel quadrato per la metà del perimetro e, similmente, la prima nel triangolo per la stessa metà [del perimetro], è evidente che si ottengono diverse superfici che sono uguali ai poligoni.

5. Che formula ci fornisce Cusano per il calcolo dell'area dei poligoni? (Utilizza A per indicare l'area del poligono, U per il perimetro, p per la misura della prima linea ed s per quella della seconda linea, mettendo al pedice il numero dei lati del poligono.)



Perciò l'eccesso di quella superficie, che risulta dal prodotto della prima del quadrato per la metà del perimetro, sulla superficie che risulta dal prodotto della prima del triangolo per la stessa metà del perimetro, è [uguale] all'eccesso dell'ampiezza del quadrato sull'ampiezza del triangolo, e così, in tutti i poligoni, dall'eccesso della prima linea di un qualsiasi poligono sulla prima del triangolo isoperimetrico si trova l'eccesso dell'ampiezza di questo stesso poligono sull'ampiezza del triangolo.

Ne consegue che conoscendo la differenza tra la prima linea di un poligono e quella del triangolo isoperimetrico ($p_n - p_3$), è possibile trovare la differenza (l'eccesso) tra l'area del poligono e quella del triangolo ($A_n - A_3$).

Inoltre quanto minore è la differenza tra la prima e la seconda linea, tanto maggiore sarà l'eccesso della prima linea del poligono sulla prima del triangolo. E poiché nel cerchio la prima e la seconda linea coincidono, l'eccesso del semidiametro del cerchio isoperimetrico sulla prima del triangolo è massimo, e perciò l'ampiezza del cerchio è massima rispetto all'ampiezza del triangolo.

6. Spiegate cosa significa questo passaggio secondo voi.

Perciò, la stessa linea retta, che nel triangolo è estesa lungo i tre lati per formare il perimetro di questa superficie, nel quadrato si estende lungo i quattro lati, formando il perimetro del quadrato, e si estende ancora di più nel pentagono. Se tuttavia si estende al massimo tanto da non potersi estendere ulteriormente, allora sarà la circonferenza del cerchio.

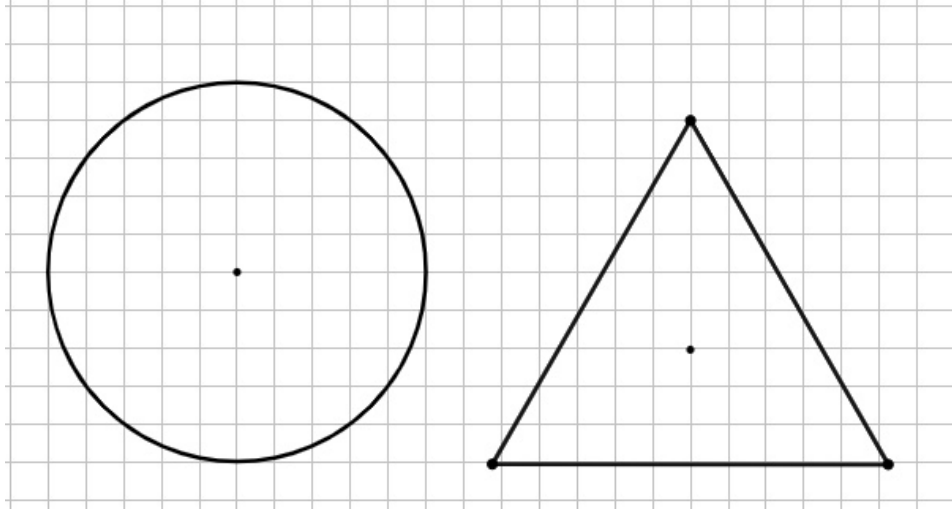
Questo significa che tutti i poligoni sono isoperimetrici compreso il cerchio che viene considerato come un poligono con infiniti lati.

Da quanto detto è chiaro che se il triangolo ha l'ampiezza minima, la prima linea si differenzia al massimo dalla seconda, e se il cerchio ha l'ampiezza massima, la prima e la seconda linea coincidono, e così sarà con le debite proporzioni, nei poligoni intermedi.

Di conseguenza, se si pone che l'eccesso dell'ampiezza del cerchio sul triangolo è uguale alla differenza tra la prima e la seconda linea nel triangolo, l'eccesso dell'ampiezza del cerchio sul quadrato sarà uguale alla differenza tra la prima e la seconda linea del quadrato e così via di conseguenza: a un maggior eccesso della prima linea dell'uno sulla prima linea dell'altro consegue nel [poligono]

maggiore una differenza tra la prima e la seconda [che è] minore rispetto alla differenza tra la prima e la seconda nel [poligono] minore.

7. Disegna la prima linea del cerchio e del triangolo poi evidenzia con un colore la differenza $p_\infty - p_3$ nel cerchio.



Ricapitolando:

- la differenza $s_n - p_n$ è massima per il triangolo cioè per $n = 3$
- la differenza $p_n - p_3$ è massima per $n = \infty$ cioè nella differenza tra il raggio del cerchio e l'apotema del triangolo ad esso isoperimetrico
- $s_\infty = p_\infty$ quindi $p_\infty - p_3 = s_\infty - p_3$.

Da queste tre osservazioni, Cusano deduce che $s_3 > s_\infty$. Da cui si ottiene :

$$p_\infty - p_3 < s_3 - p_3$$

In conclusione, Cusano deduce che la quantità $p_\infty - p_3$ è una frazione ("portio") di $s_3 - p_3$ cioè la differenza tra la seconda e la prima linea del triangolo.

Dunque, secondo quanto presuppone il cardinale, basta conoscere quale frazione di questa differenza corrisponda alla differenza $p_\infty - p_3$ per sapere a quanto corrisponda in un poligono qualsiasi con n lati la differenza $p_\infty - p_n$.

Cusano propone la formula:

$$p_\infty = p_n + \frac{2}{3}(s_n - p_n)$$

risultato di un singolare ragionamento del quale non ci viene proposta alcuna dimostrazione ma piuttosto una figurazione geometrico-pratica.

I complementi matematici.

Al santissimo Papa Niccolò V. Niccolò Cusano, cardinale di San Pietro in Vincoli

1. È talmente grande la potenza del Tuo pontificato, Niccolò V, beatissimo padre, che coloro che hanno considerato attentamente la sua forza l'hanno paragonata al potere di rendere quadrato ciò che è tondo e di rendere circolare ciò che è quadrato, quasi che non si potesse dare una [forza] più grande. E poiché tu non solo possiedi la chiave e la potenza del sapere e della suprema gerarchia ecclesiastica, ma, grazie alla tua acutissima intelligenza, sei un eccellente maestro di impareggiabile fama in tutti i campi del sapere, sarai tu a giudicare tra tutti. Grazie alla tua straordinaria diligenza hai fatto moltissimo affinché gli scritti di tutti gli autori che possono essere reperiti, sia latini sia greci, pervenissero a noi tutti con la massima cura, così come non hai trascurato le opere di geometria, che erano state considerate dai nostri antenati degne di ogni onore.

2. E, infatti, nei giorni scorsi mi hai dato gli scritti di geometria del grande Archimede, presentati a te in greco e tradotti, grazie al tuo sostegno, in latino; ho ritenuto che fossero così degni di stima che soltanto applicandomi molto avrei potuto dedicarmi ad essi con lo stesso impegno [che tu hai profuso]. È così che, studiando e impegnandomi, ho aggiunto ad essi qualche complemento che mi sono permesso di presentare alla Tua santità. Ritengo, infatti, che soltanto Tu sia degno di rendere note a tutti ciò che da tantissimo tempo è rimasto sconosciuto. E credo che da ciò si possa ricavare perfettamente non soltanto ciò che si può sapere e che sempre è stato detto intorno al problema della quadratura del cerchio, ma anche ciò che dà completezza a ogni perfezione matematica.

[LIBRO PRIMO]

3. Secondo tutti coloro che si sono dedicati allo studio della geometria, nessuno più di Archimede si è avvicinato alla quadratura del cerchio. Questi, vedendo che ciò non poteva essere realizzato se non risolvendo una linea curva circolare in una retta, cercò di dimostrare il procedimento mediante la spirale. Ma, poiché il rapporto tra il moto di un punto dal centro lungo il semidiametro e il moto di un altro punto che, nello stesso tempo, si muove lungo la circonferenza -rapporto senza cui non potrebbe essere descritta la spirale è uguale al rapporto tra il semidiametro -e la

circonferenza, [rapporto] che non è noto, ma che anzi è proprio ciò che si vuole trovare, da ciò si capisce perché [Archimede] non sia riuscito a conseguire tale risultato. Infatti, sarà più facile quadrare un cerchio che descrivere una spirale e tracciarne la tangente alla fine della rotazione. Resta dunque il fatto che, dagli scritti che ci ha lasciato Archimede, questa procedura rimane, ad oggi, ancora completamente oscura. Io, d'altra parte, nonostante abbia letto che molti si sono prodigati invano in questa ricerca, ho iniziato a fare dei tentativi per vedere se per caso questa difficoltà potesse essere superata per mezzo delle coincidenze, di cui ho scoperto la massima potenza in altri campi del sapere. E mi è sembrato che, data la sua possibilità [d'applicazione], che ovunque tutti riconoscono, si potesse conseguire facilmente questa conoscenza nello stesso modo, facendo praticamente ciò che segue.

4. Innanzitutto bisogna dire che, in una figura avente più angoli, cioè in un poligono che ha lati uguali, il punto equidistante dalla metà e dall'estremità dei lati si chiama centro, e la linea condotta da questo centro al punto medio del lato è il semidiametro del cerchio ad esso inscritto, ed è detta prima linea. E l'altra linea condotta dallo stesso centro fino all'estremità di un lato, cioè, a un angolo qualsiasi, è il semidiametro del cerchio circoscritto in essa ed è detta seconda linea. In ogni poligono queste due linee sono di diversa lunghezza e lo sono tanto più quanto più lungo è il lato. Infatti, il quadrato della seconda linea include il quadrato della prima e con ciò il quadrato della metà del secondo lato, e questo perché il lato del triangolo rettangolo è opposto all'angolo retto, come dimostra Euclide.

5. E poiché la prima delle figure rettilinee è il triangolo, in esso la prima e la seconda linea hanno lunghezze massimamente diverse. Tuttavia nel cerchio coincidono, poiché qui il centro si trova a uguale distanza dalla circonferenza; e infatti, la metà e l'estremità del lato coincidono, e c'è un angolo ovunque. Tuttavia, nel triangolo la prima linea è la più corta, la seconda la più lunga. Nel quadrato avente lo stesso perimetro, la prima linea è la più corta dopo la prima del triangolo e la seconda è la più lunga dopo la seconda del triangolo e così via. E poiché in tale quadrato la prima è più lunga della prima nel triangolo, se si moltiplica la prima nel quadrato per la metà del perimetro e, similmente, la prima nel triangolo per la stessa metà [del perimetro], è evidente che si ottengono diverse superfici che sono uguali ai poligoni.

6. Perciò l'eccesso di quella superficie, che risulta dal prodotto della prima del quadrato per la metà del perimetro, sulla superficie che risulta dal prodotto della prima del triangolo per la stessa metà del perimetro, è [uguale] all'eccesso dell'ampiezza del quadrato sull'ampiezza del triangolo, e così, in tutti i poligoni, dall'eccesso della prima linea di un qualsiasi poligono sulla prima del triangolo isoperimetrico si trova l'eccesso dell'ampiezza di questo stesso poligono sull'ampiezza del triangolo.

Inoltre, quanto minore è la differenza tra la prima e la seconda linea, tanto maggiore sarà l'eccesso della prima linea del poligono sulla prima del triangolo. E poiché nel cerchio la prima e la seconda coincidono, l'eccesso del semidiametro del cerchio isoperimetrico sulla prima del triangolo è massimo, e perciò l'ampiezza del cerchio è massima rispetto all'ampiezza del triangolo.

Perciò, la stessa linea retta, che nel triangolo è estesa lungo i tre lati per formare il perimetro di questa superficie, nel quadrato si estende lungo i quattro lati, formando il perimetro del quadrato, e [si estende] ancora di più nel pentagono. Se tuttavia si estende al massimo, tanto da non potersi estendersi ulteriormente, allora sarà la circonferenza del cerchio.

7. Da quanto detto è chiaro che se il triangolo ha l'ampiezza minima, la prima linea si differenzia al massimo dalla seconda, e se il cerchio ha l'ampiezza massima, la prima e la seconda linea coincidono, e così sarà, con le debite proporzioni, nei poligoni intermedi. Di conseguenza, se si pone che l'eccesso dell'ampiezza del cerchio sul triangolo è uguale alla differenza tra la prima e la seconda linea nel triangolo, l'eccesso dell'ampiezza del cerchio sul quadrato sarà uguale alla differenza tra la prima e la seconda linea nel quadrato e così via di conseguenza: a un maggiore eccesso della prima linea dell'uno sulla prima linea dell'altro consegue infatti nel [poligono] maggiore una differenza tra la prima e la seconda [che è] minore rispetto alla differenza tra la prima e la seconda nel [poligono] minore. Da ciò, dati l'eccesso della prima di un qualsiasi [poligono] sulla prima del triangolo e la differenza tra la differenza della prima e la seconda del [poligono] più ampio e quella della prima e la seconda del triangolo, si può facilmente ottenere il semidiametro del cerchio isoperimetrico, la cui circonferenza cioè è uguale alla somma dei tre lati del triangolo o a quella dei quattro lati del quadrato.

8. Compreso ciò, la quadratura del cerchio risulta evidente. Infatti, se si moltiplica il semidiametro di questo cerchio isoperimetrico per la metà della circonferenza risulta un rettangolo che non può essere né maggiore né minore della superficie del cerchio come Archimede dimostra facilmente. Si trasforma il rettangolo in quadrato, il cui lato sarà il medio proporzionale tra il semidiametro del cerchio e la semicirconferenza, come si legge in Euclide, VI, 9.

Sebbene tutte queste nozioni siano palesi, voglio tuttavia renderle perfettamente chiare anche a coloro che non sono esperti di matematica. Invece le figure aventi lati simili e perimetri uguali, di cui parlerò, da alcuni sono definite poligoni equiangoli e isoperimetrici, conformemente alla terminologia greca.

Appendice B

Viète e la prima espressione numerica di Pi Greco

Un nuovo cambiamento del metodo di ricerca sulla costante che costituisce il rapporto fra una circonferenza ed il suo diametro fu apportato da François Viète (1550-1603) che riprese e modificò la trattazione di Archimede (III sec. a.C), arrivando ad una nuova formulazione di Pi Greco.

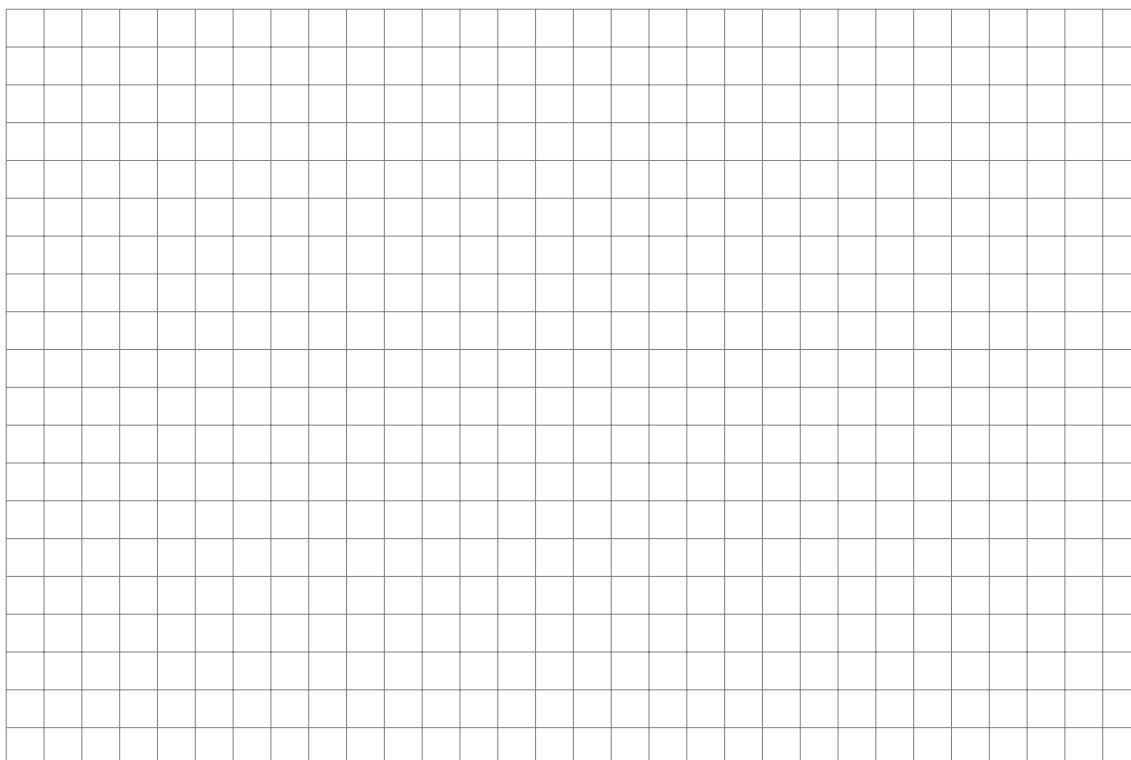
Viète utilizzò sempre un poligono regolare (un quadrato) inscritto in un cerchio e raddoppiò via via il numero dei lati ma invece di approssimare la circonferenza al perimetro del poligono, come fece Archimede, approssimò l'area del cerchio a quella del poligono.

Il suo contributo fu fondamentale nella storia di Pi Greco poiché proponeva una nuova caratterizzazione della costante.

La formula che rese famoso Viète e che porta ancora il suo nome si trova nell'opera *Variorum de rebus Mathematicis responsorum* (1593). Di seguito viene proposto un estratto del testo originale:

2. Costruzione:

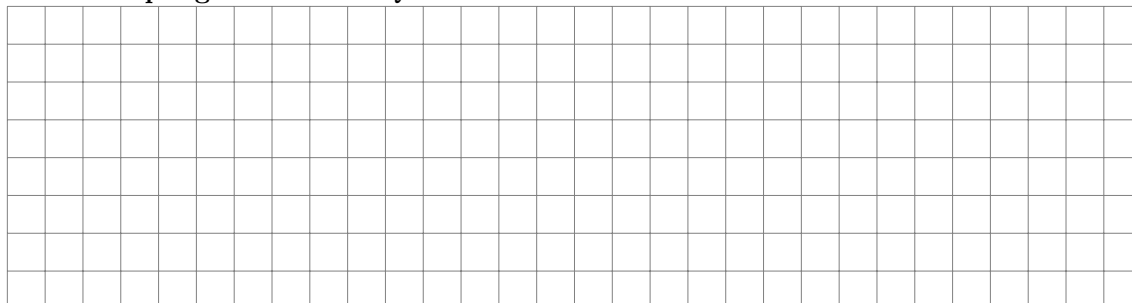
- disegnare un cerchio di centro O e raggio $OA = 1$
- inscrivere al suo interno un quadrato di lato AP
- tracciare il raggio OQ del cerchio perpendicolare al lato AP del quadrato e unire A con Q e P con Q



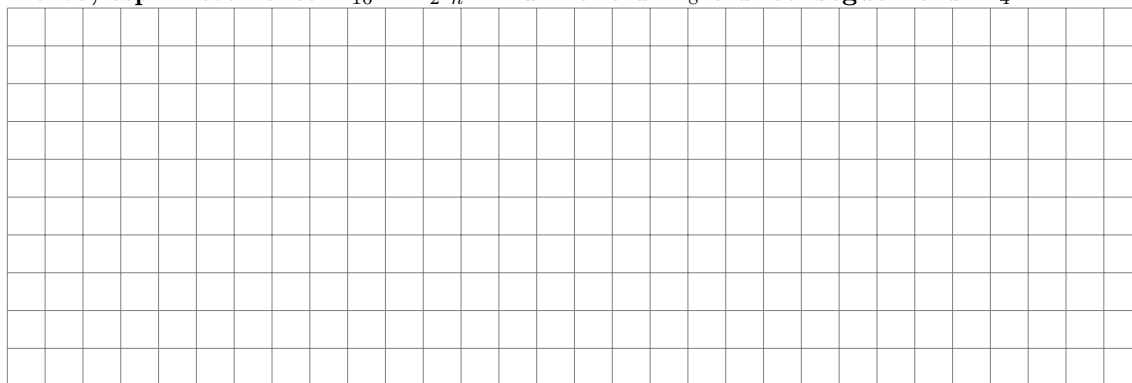
3. Provate a ragionare sulla figura: che cosa rappresentano il segmento AQ ed il segmento PQ ?

Suggerimento: se non riuscite a rispondere a questa domanda provate a ripetere il terzo punto dell'esercizio 2 per tutti i lati del quadrato inscritto.

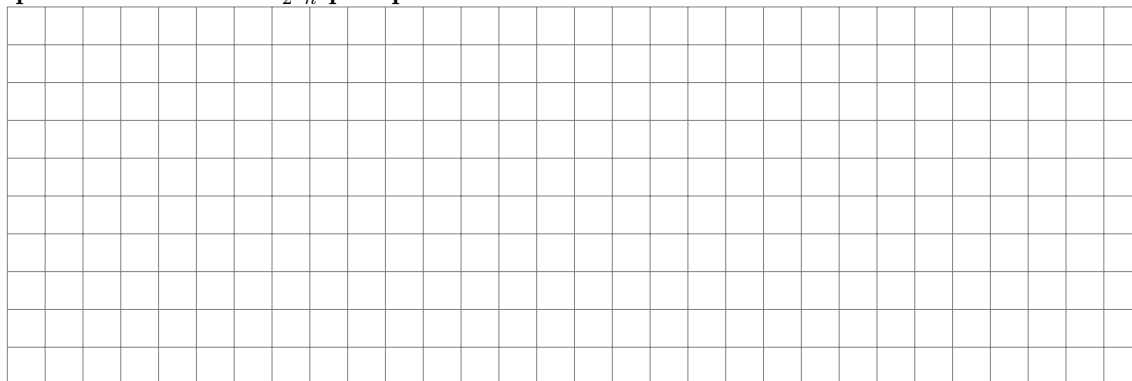
4. Supponiamo ora che l'angolo $\widehat{AOP}$ sia 2α , utilizzate le vostre conoscenze di trigonometria per il calcolo dell'area $A_4 = A_n$ del quadrato di partenza e l'area $A_8 = A_{2n}$ del nuovo poligono di lato AQ .



5. Utilizzando la formula di duplicazione del seno esplicitate il rapporto tra A_4 e A_8 per poi esprimere l'area A_8 in funzione di A_4 . Dopodiché secondo lo stesso procedimento, esprimete l'area $A_{16} = A_{2^{2n}}$ in funzione di A_8 e di conseguenza di A_4 .



6. Riscrivete le formule generali per il calcolo delle aree dei poligoni ed il rapporto tra queste utilizzando A_n per il poligono di n lati, A_{2n} per quello con $2n$ lati, $A_{2^{2n}}$ per quello di 2^{2n} lati e $A_{2^k n}$ per quello di $2^k n$ lati.



Come abbiamo già visto sia nel metodo di approssimazione di Pi Greco di Archimede, sia in quello di Cusano, la circonferenza viene considerata come un poligono con infiniti lati. Con lo stesso tipo di ragionamento, Viète immagina di far crescere l'intero k all'infinito, così che anche il numero dei lati del poligono inscritto $2^k n$ si duplichi fino all'infinito arrivando ad approssimare

$$A_{2^k n} = A_n \cdot \frac{1}{\cos(\alpha)} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdots \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha}{2^{k-1}}\right)}$$

Questo gli permise di arrivare all'approssimazione di π che cercava.

[illegible][illegible]

155

Appendice C

Newton e il nuovo metodo per calcolare Pi Greco

Isaac Newton nel 1666 trovò un'approssimazione di Pi Greco utilizzando il confronto tra due metodi: uno di tipo geometrico ed uno che utilizzava il suo nuovo metodo delle flussioni, antenato del calcolo differenziale, insieme al Teorema binomiale, già noto e risolto prima della nascita di Newton, ma del quale egli fornì una nuova ed innovativa formula che permetteva di non dover più passare attraverso la costruzione del triangolo di Tartaglia e che ammetteva, inoltre, la possibilità di calcolare i coefficienti di potenze con esponente frazionario o negativo e non solo con interi positivi.

Proviamo a ricostruire il suo ragionamento.

1. Dopo aver costruito gli assi cartesiani x e y, si disegni una semicirconferenza di centro $C=(\frac{1}{2},0)$ e raggio $r = \frac{1}{2}$.



Newton, grazie anche allo studio minuzioso dell'opera di R. Descartes, conosceva e padroneggiava la geometria analitica e dunque anche l'equazione della circonferenza nelle coordinate x ed y .

2. Scrivete l'equazione della circonferenza di centro $C=(\frac{1}{2},0)$ e raggio $r = \frac{1}{2}$. Poi semplificate e risolvetela rispetto a y , indicando le radici come potenze di indici frazionari. In questo modo dovreste ottenere l'equazione della semicirconferenza superiore che avete disegnato.



Ora Newton utilizza i risultati ottenuti dal teorema binomiale da cui ricava lo sviluppo della semicirconferenza di partenza.

Lo sviluppo del binomio è possibile riassumerlo attraverso la formula:

$$(1 + Q)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n}Q + \frac{(\frac{m}{n})(\frac{m}{n} - 1)}{2}Q^2 + \frac{(\frac{m}{n})(\frac{m}{n} - 1)(\frac{m}{n} - 2)}{2 \cdot 3}Q^3 + \dots$$

Nel nostro caso $Q=-x$ e $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ quindi secondo la formula binomiale di Newton, lo sviluppo approssimato fino ai primi 6 termini della serie cioè fino ad x^5 , è:

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x} &= (1-x)^{\frac{1}{2}} = \\ &= 1 + \frac{1}{2}(-x) + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{2}(-x)^2 + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2 \cdot 3}(-x)^3 + \dots = \\ &= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \frac{7}{256}x^5 - \dots\end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione della semicirconferenza troviamo quindi:

$$\begin{aligned}y &= x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} = \\ &= x^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \frac{7}{256}x^5 - \dots\right) = \\ &= x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}} - \frac{5}{128}x^{\frac{9}{2}} - \frac{7}{256}x^{\frac{11}{2}} - \dots\end{aligned}$$

Adesso si rivela il genio di Newton: nei prossimi passaggi comprendiamo perché egli abbia scelto proprio questa semicirconferenza per il suo ragionamento.

3. Nella figura precedente, dal punto $B = (\frac{1}{4}, 0)$ sul diametro, ossia sull'asse x , tracciate la perpendicolare BD al diametro AE .

Newton procede calcolando l'area della regione ABD in due modi differenti come si diceva all'inizio: con il metodo delle flussioni e con il metodo geometrico. La stima di Pi Greco nasce proprio dal confronto tra i risultati di questi due ragionamenti.

1. METODO DELLE FLUSSIONI

Egli sapeva come calcolare l'area delimitata da una curva fra il punto $O = (0,0)$ e un punto qualsiasi sull'asse x .

Si riportano di seguito le pagine del De Analysis pubblicato nel 1711 nelle quali vengono descritte la prima e la seconda regola che Newton utilizzava nel calcolo di questo tipo di aree.

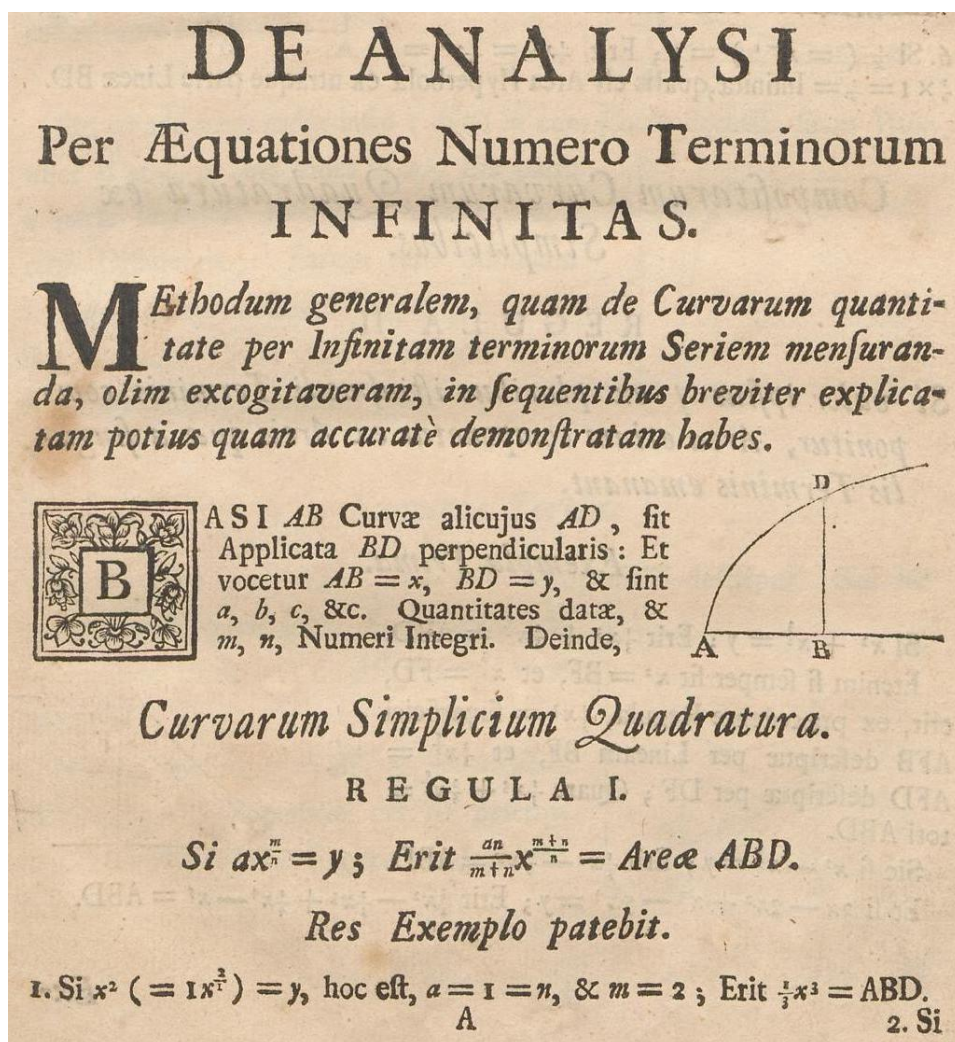


Figura C.1: Regola 1

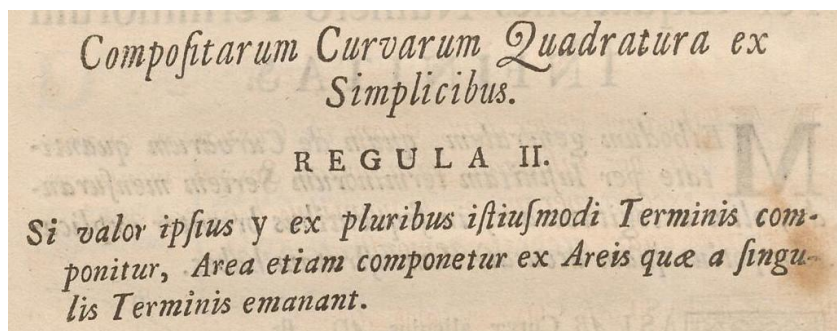


Figura C.2: Regola 2

Le regole 1 e 2 gli permisero di trovare l'area ABD cercata:

$$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\right) - \frac{1}{16}\left(\frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}}\right) - \dots = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{704}x^{\frac{11}{2}} - \dots$$

Per valutare l'area basta porre $x = \frac{1}{4}$. In questo modo i calcoli si semplificano: $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{5}{2}} = \left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$; ecc..

Sostituendo questi valori nello sviluppo dell'area ABD si trova che l'approssimazione di ABD (ai primi nove termini) è:

$$\frac{1}{12} - \frac{1}{60} - \frac{1}{3584} - \frac{1}{36864} - \frac{5}{1441792} - \dots - \frac{429}{163208757248} \approx 0.07677310678$$

2. METODO GEOMETRICO

Newton considera adesso l'area ABD dal classico punto di vista geometrico e per prima cosa egli calcola l'area del triangolo DBC .

4. Calcolate la lunghezza del segmento BD utilizzando il Teorema di Pitagora e ricavate poi l'area del triangolo DBC .



Appendice D

Questionari

Cosa sai di Pi Greco?

Questo è un breve test in forma anonima per scoprire quanto conosci riguardo Pi Greco e la quadratura del cerchio e cosa pensi della matematica e di chi se ne occupa per mestiere.

 munarianna@gmail.com (non condiviso) [Cambia account](#) 

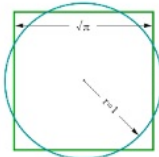
***Campo obbligatorio**

Conosci il problema della quadratura del cerchio? *

☐ si

☐ no

Spiega che cosa è la quadratura del cerchio secondo te. *



La tua risposta

Pi Greco è un numero: (puoi selezionare più di una risposta) *

☐ irrazionale

☐ intero

☒ razionale

☐ trascendente

☐ che descrive il rapporto tra l'area del cerchio ed il quadrato del suo diametro

☒ che descrive il rapporto tra circonferenza e raggio

☐ che descrive il rapporto tra circonferenza e diametro

☒ Altro: _____

Figura D.1: Questionario preliminare parte 1.

La matematica si è evoluta nella storia? *

☐ sì

☐ no

Giustifica la tua risposta. *

La tua risposta

Secondo te, chi tra questi personaggi ha sviluppato un sistema di guida a distanza per siluri? *



☐ Opzione 1



☐ Opzione 2



☐ Opzione 3

Descrivi con 5 aggettivi un matematico. *

La tua risposta

Scrivi il nome di un matematico che conosci *

La tua risposta

È ancora in vita? *

☐ sì

☐ no

Se la risposta alla precedente domanda è no, scrivi in che periodo è vissuto. *

La tua risposta

[Invia](#) [Cancella modulo](#)

Non inviare mai le password tramite Moduli Google.

Questi contenuti non sono creati né avallati da Google. [Segnala abuso](#) - [Termini di servizio](#) - [Norme sulla privacy](#)

Google Moduli

Figura D.2: Questionario preliminare parte 2.

La conclusione del percorso...

 munarianna@gmail.com (non condiviso) [Cambia account](#) 

*Campo obbligatorio

Spiega che cosa è la quadratura del cerchio. *

La tua risposta

Pi Greco è un numero: (puoi selezionare più di una risposta) *

☐ irrazionale

☐ intero

☐ razionale

☐ trascendente

☐ che descrive il rapporto tra l'area del cerchio ed il quadrato del suo diametro

☐ che descrive il rapporto tra circonferenza e raggio

☐ che descrive il rapporto tra circonferenza e diametro

☐ Altro: _____

La matematica si è evoluta nella storia? *

☐ sì

☐ no

Giustifica la tua risposta. *

La tua risposta

Figura D.3: Questionario finale parte 1.

Quale personaggio ti ha incuriosito di più? *

☐ Archimede

☐ Cusano

☐ Viète

☐ Newton

Giustifica la tua risposta. *

La tua risposta

Dopo questo percorso riscriveresti gli stessi 5 aggettivi riferiti al matematico? *

☐ sì

☐ no

In generale, che cosa ti è piaciuto di questo percorso? *

La tua risposta

Giustifica la tua risposta. *

La tua risposta

Che cosa cambieresti di questo percorso? *

La tua risposta

Invia [Cancella modulo](#)

Non inviare mai le password tramite Moduli Google.

Questi contenuti non sono creati né avallati da Google. [Segnala abuso](#) - [Termini di servizio](#) - [Norme sulla privacy](#)

Google Moduli

Figura D.4: Questionario finale parte 2.

Bibliografia

- [1] A. Baccaglini-Frank et al. *Didattica della matematica*. Manuali (Mondadori). Mondadori Università, 2017. ISBN: 9788861845503.
- [2] Giorgio T Bagni. «Storia della matematica in classe: scelte epistemologiche e didattiche». In: *La matematica e la sua didattica* 18.3 (2004), pp. 51–70.
- [3] Giorgio T. Bagni. «Limite e visualizzazione: una ricerca sperimentale». In: *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* 22 (1999), p. 4.
- [4] Bernardino Baldi. «Le Vite de'matematici, ed». In: *Elio Nenci. Milan: Francoangeli* (1998).
- [5] Petr Beckmann. *A history of pi*. St. Martin's Griffin, 2015.
- [6] Eric T. Bell. *I grandi matematici*. Sansoni, Traduzione a cura di D. Aduni, 1997.
- [7] Luciana de Bernart. *Cusano e i matematici*. Scuola Normale Superiore di Pisa, 1999.
- [8] Dino Buzzetti. «Niccolò da Cusa». In: *Dizionario Biografico degli Italiani, Treccani* 78 (2013).
- [9] Francesco Cafaro. «Le idee pedagogiche di Giovanni Vailati». In: *Rivista critica di storia della filosofia* 18.3 (1963), pp. 454–463.
- [10] Francesco Cocorullo. *Apologia delle materie inutili. Viaggio semiserio attraverso alcune discipline «che non servono a niente»*. PSEditore, 2020. ISBN: 9788855462785. URL: <https://books.google.it/books?id=d2DczQEACAAJ>.
- [11] Matteo D'Alfonso. «Cusano, dotta ignoranza e filosofia dell'infinito». In: *Storia della civiltà europea a cura di Umberto Eco, Treccani* (2014).
- [12] Bruno D'Amore, Luis Radford e Giorgio T Bagni. «Ostacoli epistemologici e prospettiva socio-culturale». In: *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* 29.1 (2006), pp. 12–39.
- [13] Federica De Felice et al. «Niccolò Cusano. Scritti matematici. Introduzione, traduzione e note». In: (2020).
- [14] W. Dunham e A. Caronia. *Viaggio attraverso il genio. I grandi teoremi della matematica*. Le Ellissi. Zanichelli, 1992. ISBN: 9788808161406. URL: <https://books.google.it/books?id=3op2PQAACAAJ>.
- [15] «François Viète, seigneur de la Bigoutiere». In: a cura di Editors of Encyclopaedia. Encyclopaedia Britannica, 2023.

- [16] «Viète François». In: a cura di Encyclopedia.com. Complete Dictionary of Scientific Biography, 2023.
- [17] Unione Europea. «Raccomandazione del Consiglio del 22 maggio 2018 relativa alle competenze chiave per l'apprendimento permanente». In: *Gabriella Aleandri-Emanuele Consoli* (2018).
- [18] John Fauvel e Johannes Arnoldus van Maanen. *History in mathematics education: The ICMI study*. Vol. 6. Kluwer Academic, 2002.
- [19] Attilio Frajese. *Opere di Archimede*. 1974.
- [20] Attilio Frajese. «Storia della matematica ed insegnamento medio». In: *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana* III (1950), pp. 337–342.
- [21] Elena Franchini, Alice Lemmo e Silvia Sbaragli. «Il ruolo della comprensione del testo nel processo di matematizzazione e modellizzazione». In: *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula* (2017).
- [22] Hans Freudenthal. *Mathematics as an educational task*. Springer Science & Business Media, 1973.
- [23] Fulvia Furinghetti. «Storia della matematica per insegnanti e studenti». In: *Investigación en educación matemática: séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Universidad de Granada. 2003, pp. 87–96.
- [24] Fulvia Furinghetti e Luis Radford. «Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from phylogenesis and ontogenesis theory to classroom practice». In: *Handbook of international research in mathematics education*. Routledge, 2002, pp. 643–666.
- [25] Nicola Gardini. *Viva il latino: storie e bellezza di una lingua inutile*. Garzanti Milan, 2016.
- [26] Livia Maria Giacardi et al. «Matematica e humanitas scientifica Il progetto di rinnovamento della scuola di Giovanni Vailati». In: *Bollettino della Unione Matematica Italiana* 3 (1999), pp. 317–352.
- [27] Koeno Gravemeijer e Jan Terwel. «Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory». In: *Journal of curriculum studies* 32.6 (2000), pp. 777–796.
- [28] Thomas Little Heath et al. *The works of Archimedes*. University Press, 1897.
- [29] «Indicazioni Nazionali per i Licei». In: Ministero dell'istruzione, dell'università e della ricerca. 2010.
- [30] «Isaac Newton». In: MacTutor History of Mathematics Archive.
- [31] Pala A. (cur.) Isaac Newton. *Opere. Vol. 1: Principi matematici della filosofia naturale*. A cura di UTET. 2°. Vol. 1. 1997.
- [32] George Gheverghese Joseph e Barbara Mussini. *C'era una volta un numero*. Il saggiatore, 2000.
- [33] Attilio Frajese–Lamberto Maccioni. «Gli elementi di Euclide». In: *Torino, UTET* (1970).
- [34] Isaac Newton. *Analysis per quantitarum series, fluxiones ac differentias: cum enumeratione linearum tertii ordinis*. sumptibus Societatis, 1723.

- [35] Mogens Niss. «Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project». In: *3rd Mediterranean conference on mathematical education*. Citeseer. 2003, pp. 115–124.
- [36] Jeffrey A. Oaks. «François Viète’s revolution in algebra». In: *Archive for History of Exact Sciences* 3 (2018), pp. 245–302.
- [37] Athanasios Paraskevopoulos. «François Viète and his contribution to mathematics». In: *arXiv preprint arXiv:2210.12545* (2022).
- [38] Fausto Pellacchia. «Dell’uso dell’inutile». In: *MicroMega* (2022).
- [39] Alfio Quarteroni. *Pregiudizi sulla matematica*. Programma #maestri di Rai Cultura realizzato in collaborazione con il Ministero dell’Istruzione. 2021.
- [40] Lucio Russo. «Archimede tra leggenda e realtà». In: *Lettera Matematica Pristem* 86.1 (2013), pp. 4–8. DOI: [10.1007/BF03356614](https://doi.org/10.1007/BF03356614). URL: <https://doi.org/10.1007/BF03356614>.
- [41] R.R. Skemp. *The Psychology of Learning Mathematics*. Pelican books. L. Erlbaum Associates, 1987. ISBN: 9780805800586. URL: <https://books.google.it/books?id=8WTZk8cCCNUC>.
- [42] C.P. Snow e L. Geymonat. *Le due culture*. SC/10. Feltrinelli, 1970.
- [43] Maria Laura Solmi. «Alla scoperta di Pi Greco: introdurre la storia della matematica nella pratica d’aula». Tesi magistrale in Matematica, Università di Bologna, 2021.
- [44] N. Tartaglia e V. Ruffinelli. *Quesiti et inventioni diverse*. per Venturino Ruffinelli ad instantia et requisitione, & à proprie spese de Nicolo Tartalea Brisciano autore, 1546.
- [45] Giovanni Vailati. *Il Metodo della filosofia: saggi*. 520. Laterza, 1957.
- [46] François Viète. *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII*. 1970.
- [47] «Viète Françoise». In: MacTutor History of Mathematics Archive, 2000.
- [48] Christopher Wordsworth. *Notes on the King James Version*. Londra, 1887.

Ringraziamenti

Prima di tutto ci tengo a ringraziare la professoressa Cattabriga per la disponibilità e la premura con cui mi ha seguita durante la stesura di questo lungo lavoro. I suoi insegnamenti, i suoi consigli, le sue idee, le sue indicazioni, le sue correzioni, la sua guida e la sua presenza sono stati per me fondamentali durante la scrittura e la sperimentazione. Vorrei però ringraziarla soprattutto per la passione e la serietà con cui svolge il mestiere di professoressa, è stata per me fonte di grande ispirazione. Poi vorrei ringraziare il professor Filippi, diventato ormai un collega presso il Liceo Einstein, per aver creduto in me e perché soltanto grazie alla sua disponibilità ed alla sua lungimiranza il progetto sperimentale si è concluso nel migliore dei modi.

Ci tenevo a ringraziare anche la 4° A, la classe in cui è stata svolta la sperimentazione. Ognuno di voi, nel suo piccolo, ha contribuito a questo progetto e nonostante questo lavoro non fosse soggetto di valutazione, avete mostrato grande interesse e vi siete applicati con impegno, rispettando e valorizzando il mio lavoro. Vi ringrazio per come mi avete accolto, mi auguro di trovare sul mio percorso altre classi che vi somiglino e a voi auguro il meglio per il vostro brillante futuro.

Gli ultimi 2 anni sono stati davvero intensi tanto che non basterebbero tutte le pagine di questa tesi per raccontare tutto ciò che mi è successo e chi c'era affianco a me lo sa. Gli ultimi mesi poi, sono stati... folli e non trovo altre parole per descriverli. Più e più volte ho pensato di non farcela e ancora più volte ho pianto fino a finire le lacrime perché l'ansia e la paura prendevano il sopravvento. Se non ho mollato, se non mi sono lasciata andare e ho continuato a lottare, è solo grazie a voi, voi che siete qui oggi.

Ognuno di voi, chi con una parola, chi con un abbraccio, chi con intere giornate di sedute di conforto, chi con un brindisi, mi ha dato la forza di non mollare, ognuno di voi mi ha ricordato quanto valgo e soprattutto quanto è bello studiare, lavorare ed impegnarsi se poi puoi goderti il tempo libero con le persone che ami e per questo vi ringrazio.

Grazie a mamma Gilberta per essere uno tra i pochi punti fermi nella mia vita, grazie perché sapere che ci sei, sapere che posso affidarmi a te mi fa sentire al sicuro e mi lascia credere che forse sarò per sempre un po' bambina. Scusa se non sono la figlia ordinata, precisa e obbediente che volevi ma il bene che provo per te è direttamente proporzionale a quanto ti faccio arrabbiare. Grazie a papà Roberto, per essere orgoglioso di me dal giorno zero, per aver voluto festeggiare i miei successi anche quando forse avrei potuto fare meglio e questi avevano più il sapore di una sconfitta. Grazie a Gian Marco, mio fratello e mio complice, in ogni situazione, contro tutto e tutti. Grazie perché «il più grande protegge sempre il più piccolo» e senza di te questo mondo

sarebbe crudele il doppio. Spero un giorno di poter essere io a proteggere te. Grazie anche a Serena per la sua grande disponibilità e la premura con il quale si è sempre presa cura di me: ad ogni richiesta d'aiuto hai sempre risposto "presente" e sei diventata per me come una sorella maggiore. Grazie al piccolo Rio, perché con la sua dolcezza ha saputo migliorare anche le giornate più buie. Grazie a Fabrizio per essere stato al mio fianco quando più ne avevo bisogno, quando nemmeno io mi sopportavo. Grazie perché «Ari ci guardiamo insieme, ti aiuto io» è per me la certezza che non serve avere più paura di niente.

Le ultime tre righe di questo lungo lavoro, in fondo, dopo aver ringraziato ogni singolo pezzettino del mio cuore (che sareste voi), le dedico per ringraziare anche me. Non credo di averlo mai detto né mai pensato però questa volta sento il dovere di farlo: grazie Arianna, sono fiera di te.