Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

LA MATEMATICA DELLE ASSICURAZIONI

Relatore:
Chiar.mo Prof.
PAOLO NEGRINI

Presentata da:
DOMENICO IORIO

VI Sessione
Anno Accademico 2021-2022

Indice

Introduzione

La storia dell'essere umano è stata segnata da una continua ricerca di soluzioni per prevenire situazioni critiche. Fin dall'età della preistoria l'uomo ha sviluppato la capacità di fare scorte di cibo e di altre risorse per far fronte a periodi di carestia o inverni rigidi. Questo tipo di prevenzione sotto forma di risparmio non poteva garantire una sensazione di sicurezza alle popolazioni, perché non si aveva idea di quanto potessero durare questi periodi di disagio e costruire una grande scorta significava privarsi, in quel momento, di una grande quantità di risorse che potevano poi non essere effettivamente utili.

Con l'avvento della moneta, l'essere umano ha avuto la possibilità di acquistare beni e servizi e questa forma di prevenzione si è trasformata nel concetto di assicurazione. L'idea di trasferire il rischio da un individuo all'altro, attraverso l'associazione di più persone per fini assistenziali, risale ai tempi antichi delle civiltà Babilonesi e dell'antica Cina.

Oggi, l'assicurazione ha lo scopo di trasformare il rischio in una spesa, offrendo una forma di protezione finanziaria contro eventi imprevisti come malattie, incidenti, catastrofi naturali o più in generale situazioni che riguardano la vita dell'essere umano.

La teoria delle assicurazioni e la matematica attuariale sono campi di studio fondamentali per la comprensione e la gestione del rischio nell'ambito delle assicurazioni. In particolare, la gestione dei premi e delle prestazioni offerte dalle assicurazioni richiede un'analisi accurata delle probabilità di accadimento degli eventi, della gravità delle conseguenze, nonché dei costi e delle modalità di erogazione delle prestazioni.

Lo scopo di questa tesi di laurea è quello di andare ad introdurre i primi concetti che sono legati alla matematica delle assicurazione con particolare interesse verso le assicurazioni sulla vita. In questo modo, si cerca di fornire un contributo alla comprensione e alla gestione del rischio, che rappresenta un fattore sempre più importante nella vita di ogni individuo e della società nel suo insieme.

Capitolo 1

Richiami di Matematica Finanziaria

Prima di iniziare con la trattazione della Matematica delle Assicurazioni verranno riportati alcuni concetti base della matematica finanziaria. I concetti riportati in questo capitolo verranno ripresi nei capitoli successivi.

La Matematica Finanziaria si occupa delle operazioni finanziarie, le quali consistono nello scambio di importi di denaro tra diversi soggetti in tempi diversi.

Alla base della teoria ci sono i concetti di importo e tempo che sono strettamente legati, infatti la disponibilità di una quantità di denaro oggi può assumere un valore significativamente diverso rispetto ad un istante successivo come tra un mese, un anno o 10 anni.

Le principali motivazioni sono due:

- *Il denaro non mantiene mai intatto il suo valore*, in termini di potere d'acquisto in un qualsiasi sistema economico. Nel corso del tempo si avrà inevitabilmente una piccola o grande inflazione. Questo significa che se oggi possediamo una quantità di denaro pari a 1 000€ con cui posso comprare un bene o servizio di tale valore, con un **inflazione** dell' 1% tra un anno gli stessi 1 000€ avranno un potere di acquisto pari al potere di acquisto che oggi si ha con $1\,000 \cdot (1.01)^{-1} = 990.10$€.

- L'*investimento* di una quantità di denaro viene fatta solamente con l'intento di ottenere un guadagno monetario. Nessuno si priverebbe di una parte del proprio patrimonio per un periodo anche potenzialmente lungo senza essere rimborsato con un interesse. Infatti, in teoria, un investimento viene fatto con l'intento di aumentare il proprio patrimonio, anche se minimo. In situazioni di incertezza questi potenziali guadagni possono trasformarsi in delle potenziali perdite e l'obiettivo è quello di limitare queste perdite.

1.1 Capitalizzazione e Attualizzazione

Le operazioni finanziarie elementari possono essere classificate secondo due categorie:

- **Operazione di Prestito**: un soggetto cede ad un altro una somma di denaro, che restituirà ad un tempo futuro prestabilito con un aumento di importo pattuito detto *interesse*;

- **Operazione di Sconto**: un soggetto impegnato a pagare una quantità di denaro ad un secondo soggetto in un tempo futuro prestabilito, estingue anticipatamente il debito in cambio di una riduzione dell'importo da pagare, detto *sconto*.

Nell'operazione di *prestito* i fattori che entrano in gioco sono, l'importo C ceduto chiamato **capitale**, l'**interesse** I che viene aggiunto al capitale per ottenere il valore restituito $M = C + I$ chiamato **montante**.

Nell'operazione di sconto vediamo il **capitale**, ovvero l'importo D che andrebbe restituito ad un tempo stabilito, lo **sconto** S che viene tolto al capitale per ottenere l'importo $V = D - S$ con cui il debitore estingue anticipatamente il debito che viene chiamato **valore attuale**.

Il calcolo del montante o del valore attuale può avvenire secondo svariati criteri, per generalizzare il concetto utilizziamo quella che viene detta **funzione di montante**, una funzione continua, strettamente crescente e tale che $f(0) = 1$. A questo punto possiamo dare le seguenti definizioni:

Definizione 1.1.1. *Si dice* ***legge di capitalizzazione*** *l'equazione*

$$M = C \cdot f(t) \tag{1.1}$$

che mi permette di calcolare il montante in funzione del capitale e del tempo impiegato.

Analogamente si dice ***legge di attualizzazione*** *l'equazione*

$$V = \frac{D}{f(t)} \tag{1.2}$$

che mi permette di calcolare il valore attuale.

Si noti che lo scenario descritto semplifica di molto la realtà, infatti stiamo supponendo che gli attori finanziari possano prestare denaro a terzi con la stessa legge; e analogamente che chiunque abbia un debito nei confronti di qualcuno lo possa estinguere anticipatamente ottenendo uno sconto calcolato con una regola valida per tutti.

Si noti inoltre che il denaro circola tra gli operatori soltanto con lo scopo di produrre altro denaro, e mai appare una necessità che "obbliga" qualcuno a disporre del denaro immediatamente, non essendo quindi disposto a prestarlo a terzi.

1.2 Legge di capitalizzazione semplice e composta

Abbiamo visto nella sezione precedente come si ottengono il *montante* e il *valore atteso* tramite l'utilizzo del *fattore di montante*.

La scelta del fattore di montante determina le regole di capitalizzazione e attualizzazione.

Se utilizziamo come fattore di montante una funzione del tipo

$$f(t) = 1 + i \cdot t \tag{1.3}$$

dove i è una costante positiva, detta **tasso di interesse semplice**, allora le leggi di *capitalizzazione* e *attualizzazione* si dicono **semplici**. Dunque il montante prodotto da un capitale C in t anni è dato da

$$M = C \cdot (1 + i \cdot t) \tag{1.4}$$

e analogamente possiamo determinare il valore attuale di un importo D disponibile tra t anni

$$V = \frac{D}{1 + i \cdot t} = D \cdot (1 + i \cdot t)^{-1} \tag{1.5}$$

Se invece utilizziamo come fattore di montante una funzione del tipo

$$f(t) = (1 + i)^t \tag{1.6}$$

dove i è una costante positiva, detta **tasso di interesse composto**, allora le leggi di *capitalizzazione* e *attualizzazione* si dicono **composte**.

Come nel caso precedente il montante e il valore attuale si calcolano nel seguente modo

$$M = C \cdot (1 + i)^t \tag{1.7}$$

$$V = \frac{D}{(1 + i)^t} = D \cdot (1 + i)^{-t} \tag{1.8}$$

In seguito, se non esplicitamente specificato, utilizzeremo come fattore di montante quello composto, il motivo di ciò lo vedremo nella prossima sezione.

1.3 Equivalenza finanziaria e scindibilità

Uno degli aspetti principali della matematica finanziaria è quello di confrontare diversi investimenti che verranno incassati in tempi diversi, andando a valutare quale di questi risulti più vantaggioso.

Uno strumento che ci da un idea di quale investimento sia migliore è l'equivalenza finanziaria.

Definizione 1.3.1. *Due importi monetari A e B disponibili in tempi futuri diversi, rispettivamente t_1 e t_2, si dicono **finanziariamente equivalenti al tempo** t_0 se il valore di A e B in t_0 è lo stesso, secondo la legge di capitalizzazione o attualizzazione applicata. Per "valore" in t_0 si intende il montante o valore attuale, a seconda che t_0 sia successivo oppure antecedente al tempo in cui le somme siano naturalmente disponibili, ovvero t_1 per A e t_2 per B.*

Esempio 1.3.2. *Prendiamo in esame un regime di capitalizzazione semplice con un tasso annuo $i = 0.05$, ci chiediamo se sono finanziariamente equivalenti al tempo $t_0 = 6$, cioè tra sei anni i seguenti due importi monetari:*

- *A=500 € disponibili tra 2 anni;*
- *B=780 € disponibili tra 12 anni.*

Nei quattro anni che trascorrono dal secondo anno al sesto A produce un montante uguale a

$$A' = 500 \cdot (1 + 4 \cdot 0.05) = 500 \cdot 1.2 = 600$$

mentre B al sesto anno ha un valore attuale che si calcola scontando B per 6 anni, che vale

$$B' = \frac{780}{1 + 6 \cdot 0.05} = \frac{780}{1.3} = 600$$

$A' = B'$ quindi i due importi monetari A e B sono finanziariamente equivalenti al tempo t_0.

Si può notare dall'esempio precedente che nel caso di un fattore di montante semplice due importi A e B possano essere finanziariamente equivalenti ad un tempo t_0 ma non esserlo ad un tempo t_1 ($\neq t_0$). Infatti, nel caso appena analizzato, A e B non sono finanziariamente equivalenti al tempo $t_1 = 12$, perché il valore di B al tempo t_1 è proprio 780 €, mentre il valore di A al tempo t_1 vale

$$A' = 500 \cdot (1 + 10 \cdot 0.05) = 500 \cdot 1.5 = 750 < 780$$

Questo perché il fattore di montante semplice non è scindibile.

Definizione 1.3.3. *Una legge di capitalizzazione (o attualizzazione) si dice **scindibile** se presi due importi monetari A e B disponibili in tempi futuri finanziariamente equivalenti al tempo t_0, secondo la legge di capitalizzazione (o attualizzazione) applicata, rimangono finanziariamente equivalenti anche per tempi diversi da t_0.*

Se prendiamo in considerazione il *fattore di montante esponenziale* (1.6) notiamo che la *legge di capitalizzazione* (o *attualizzazione*) *composta* è *scindibile*. Infatti preso un capitale C e due tempi t ed s dove $t < s$, sia i il tasso annuo di interesse composto. Il montante prodotto da C in s anni è

$$M_1' = C \cdot (1+i)^s \tag{1.9}$$

mentre il montante prodotto investendo C per t anni e poi reinvestendolo immediatamente per $s - t$ anni, quindi un totale di s anni, vale

$$M_2' = C \cdot (1+i)^t \cdot (1+i)^{s-t} = C \cdot (1+i)^s = M_1' \tag{1.10}$$

Da qui deriviamo la scindibilità della legge di capitalizzazione (o attualizzazione) composta.

É proprio grazie alla proprietà di scindibilità che nel seguito, salvo diverso avviso, ci occuperemo esclusivamente della legge di capitalizzazione composta.

1.4 Rendite

La rendita è un'operazione finanziaria che in base al ruolo può essere vista come un'entrata o un'uscita, essa gioca un ruolo fondamentale nella matematica finanziaria.

Vediamo una definizione più formale:

Definizione 1.4.1. *Si dice **rendita** una successione di capitali da riscuotere, o da pagare, a scadenze determinate. I singoli capitali vengono chiamati **rate**.*

Tenendo in considerazione le regole per la capitalizzazione e l'attualizzazione, notiamo che il valore della rendita al tempo t è

$$V(t) = \sum_{k=1}^{n} R_k \cdot (1+i)^{t-t_k} \tag{1.11}$$

Dove R_k è l'importo della rata disponibile al tempo t_k.
Gli addendi $R_k \cdot (1+i)^{t-t_k}$ sono montanti quando $t > t_k$, altrimenti sono valori attuali calcolati in t di rate disponibili in un tempo successivo.

É utile conoscere il valore attuale della rendita "al tempo 0", cioè nel momento presente; questo è

$$V(0) = \sum_{k=1}^{n} R_k \cdot (1+i)^{-t_k} \tag{1.12}$$

ossia la somma dei valori attuali delle singole rate.

É utile anche conoscere il montante della rendita calcolato nel tempo dell'ultima rata che viene pagata, intendendo che sia $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$

$$V(t_n) = \sum_{k=1}^{n} R_k \cdot (1+i)^{t_n - t_k} = (1+i)^{t_n} \sum_{k=1}^{n} R_k \cdot (1+i)^{-t_k} = (1+i)^{t_n} \cdot V(0) \tag{1.13}$$

Il calcolo esposto mostra che il montante della rendita è uguale al montante generato da un unico importo di valore $V(0)$, capitalizzato per tutto il tempo di vita della rendita.

1.4.1 Tipi di rendite

Fin'ora abbiamo parlato di rendite supponendo che le rate vengano erogate in tempi non periodici, più interessanti sono le rendite periodiche:

Definizione 1.4.2. *Una rendita si dice* ***periodica*** *se le rate si rendono disponibili a intervalli costanti di tempo: ogni anno, ogni mese, . . .; Si parla in tali casi di rendita annuale, mensile, trimestrale, ecc.*

Una rendita periodica può essere:

- **Immediata posticipata**, se la prima rata viene pagata dopo un periodo dal momento presente (cioè, dopo un anno se la rendita è annuale, dopo un mese se mensile, ecc.);
- **Immediata anticipata**, se la prima rata viene pagata immediatamente, cioè nel momento attuale;
- **Differita di m periodi**, se la prima rata viene pagata dopo $m + 1$ periodi. Perciò una rendita immediata posticipata è "differita di 0 periodi".

Se invece di rate di diverso importo prendiamo in considerazione rate uguali:

Definizione 1.4.3. *Una rendita si dice* ***costante*** *se tutte le rate sono di uguale importo.*

Se prendiamo in considerazione una rendita periodica costante possiamo nuovamente calcolarci il valore attuale della rendita al tempo 0

$$V(0) = R \sum_{k=1}^{n} \cdot (1+i)^{-k} = R \cdot \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}} = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{1.14}$$

L'espressione $\frac{1-(1+i)^n}{i}$ si indica con un simbolo speciale:

$$a_{\overline{n}|i} := \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n} \tag{1.15}$$

Il simbolo $a_{\overline{n}|i}$ si legge "*a figurato n al tasso i* ".

Esempio 1.4.4. *Supponiamo di voler investire* 100 000 € *in cambio di una rendita costante di durata 10 anni, con tasso di interesse del* 2% *annuo. Vogliamo calcolare la rata annuale.*

$$V(0) = 100\,000$$

e

$$a_{\overline{10}|0.02} = \frac{1-(1.02)^{-10}}{0.02} = 8.983$$

Otteniamo che

$$R = \frac{V(0)}{a_{\overline{10}|0.02}} = 11\,132.65$$

Otteniamo così una rendita annuale costante posticipata con rata $R =$ 11 132.65€.

1.5 Funzione di Utilità

Nella teoria delle decisioni per la scelta di un investimento le principali variabili che entrano in gioco sono solitamente il guadagno atteso, o la potenziale perdita, e la probabilità che esso si concluda. L'idea è quella di andare a stabilire un criterio di preferenza per decidere quale investimento sia il più conveniente per l'individuo, oppure decidere di non investire. Una soluzione è quella del *criterio del massimo guadagno atteso* che utilizza la *speranza matematica* o *media* per stabilire la preferenza, essa rappresenta il valore di un guadagno incerto. Questo significa che un individuo giudicherà indifferenti due investimenti con la stessa speranza matematica. Tuttavia, bastano semplici esempi per rendersi conto che nella realtà non è affatto vero che un individuo razionale giudichi indifferente la scelta tra uno o più guadagni aleatori con la stessa media, oppure tra uno di questi e un guadagno certo di importo pari a tale media; ciò si osserva in misura tanto maggiore quanto più sono elevati gli importi monetari trattati.

Esempio 1.5.1. *Se prendiamo come esempio una scommessa che offre un premio di importo 3 se lanciando una moneta uscirà "testa" e impone a pagare 1 se esce "croce"; la scelta di giocare sarebbe preferita a quella di non giocare.*

Infatti la speranza matematica partecipando alla scommessa, è uguale a

$$\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot (-1) = 1$$

mentre la speranza matematica in caso di rinuncia è naturalmente uguale a 0, che in questo caso è un valore certo. Accettare la scommessa è ragionevole se gli importi sono espressi in euro, mentre sembra meno ragionevole accettare la scommessa se gli importi sono espressi in centinaia di euro.

Nonostante la speranza matematica sia ancora più vantaggiosa rispetto alla precedente,

$$\frac{1}{2} \cdot 300 + \frac{1}{2} \cdot (-100) = 100$$

molte meno persone sarebbero disposte a perdere 100€ per guadagnarne 300€.

Ci rendiamo conto che la speranza matematica da sola non considera *l'ordine di grandezza degli importi trattati* e la *propensione al rischio.*

Un altro esempio che evidenza quanto la speranza matematica non tenga conto del comportamento razionale di un individuo è il Paradosso di San Pietroburgo, che vediamo di seguito.

Esempio 1.5.2. *Nicolas Bernoulli, cugino di Daniel Bernoulli, nel 1713 ideò un problema che venne poi successivamente pubblicato dal cugino Daniel nel 1738 sulla rivista scientifica "Commentarii Academiae Scientiarum". Il problema proposto è il seguente:*

In un gioco d'azzardo, il giocatore paga una tariffa fissa A e gioca lanciando ripetutamente una moneta, fino a quando la testa appare per la prima volta. Se ciò accade al lancio n-esimo, egli riceve un premio di 2^n. Per esempio la sequenza (CCCT) dà diritto ad un premio di $2^4 = 16$. Si vuole stabilire qual'è il valore A per cui un individuo razionale giudichi indifferente partecipare o meno al gioco.

Se prendiamo come strumento di valutazione la speranza matematica, essa è una variabile aleatoria X che può assumere i seguenti valori:

Valori di X	2	2^2	2^3	2^4	$\ldots$	2^n	$\ldots$
Probabilità	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^4}$	$\ldots$	$\frac{1}{2^n}$	$\ldots$

Otteniamo quindi

$$E[X] = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$$

Ciò significa che in base al criterio del guadagno atteso, il gioco è da considerare vantaggioso rispetto all'astenersi dal farlo qualunque sia l'importo richiesto al giocatore per partecipare. Tuttavia la probabilità che la *testa appaia per la prima volta entro i primi* 5 *lanci, dando diritto a un premio inferiore a* 32 *è* $1 - \frac{1}{2^5} = 0.96875$*. Nessun individuo ragionevole accetterebbe di partecipare a questo gioco per una tariffa superiore a 10/15.*

L'aspetto "paradossale" dell'esempio appena visto ci porta a voler sviluppare una teoria che abbia una ricaduta pratica nel suggerire comportamenti razionali. Nasce l'idea di assegnare un valore al premio non più nella misura del suo importo monetario, bensì valutando l'incremento di "utilità" che ne trae colui che ne beneficia.

Per questo ci viene in contro la **funzione di utilità** che misura in modo non lineare, a differenza della speranza matematica, il beneficio che un individuo ricava dal possesso di un patrimonio, l'utilità del patrimonio, appunto.

Daniel Bernoulli fu uno dei primi ad occuparsi dell'individuazione di tale funzione.

Per la scelta della funzione furono individuate alcune proprietà:

- La funzione deve essere crescente rispetto all'importo monetario, questo sta ad indicare che, ovviamente, un guadagno maggiore è preferibile ad uno minore;

- Un pari guadagno da più beneficio ad un "povero" che non ad un "ricco". Questo significa che la derivata deve essere decrescente al crescere di x, quindi concava;

- Per evitare ogni tipo di paradosso di lotterie, che potrebbe capitare nel caso dell'esempio 1.5.2, con utilità attesa infinita del premio promesso, bisogna che la funzione utilità sia superiormente limitata, cioè incrementi notevoli rispetto ad un patrimonio grande non producono un incremento grande dell'utilità. Si noti che questa proprietà può essere omessa quando si è sicuri di non incappare in paradossi.

Una classe di funzioni che possiedono tutte queste caratteristiche sono quelle della forma

$$u(x) = 1 - e^{-\frac{x}{a}}$$

Oppure

$$u(x) = a \cdot (1 - e^{-\frac{x}{a}})$$

Dove a è un parametro positivo che indica la propensione al rischio dell'individuo, più il valore a è grande e più è grande la propensione al rischio. Il fattore a che moltiplica la seconda versione è inutile, se non nei grafici che aiuta a comprendere il significato di a stesso, vediamo un esempio nella figura 1.1.

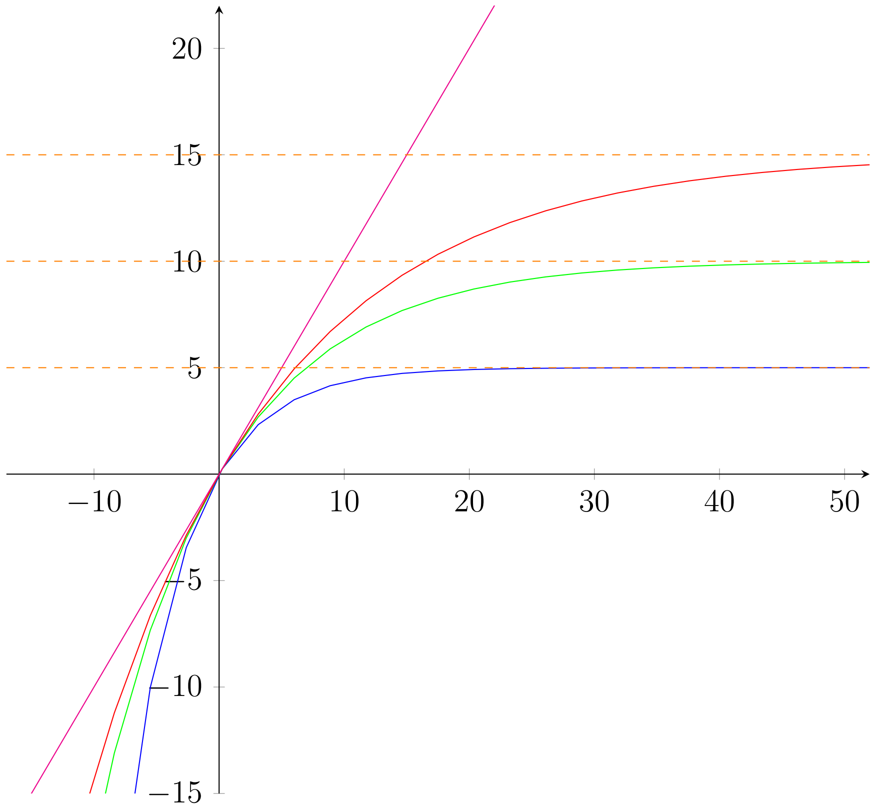

Figura 1.1: Nella figura viene mostrata la funzione utilità $a \cdot \left(1 - e^{-\frac{x}{a}}\right)$ dove a assume i valori 5, 10, 15 rispettivamente nelle funzioni di colore blu, verde e rosso.

Esempio 1.5.3. *In riferimento all'esempio 1.5.1, prendendo in considerazione la funzione utilità* $u(x) = 1 - e^{-\frac{x}{100}}$*, vogliamo vedere se la partecipazione al gioco risulta favorevole.*

Prendendo in esame il primo caso, quindi con potenziale vincita di 3€ e potenziale perdita di 1€, otteniamo

$$\frac{1}{2} \cdot u(3) + \frac{1}{2} \cdot u(-1) = 0.0097 > 0 \tag{1.16}$$

La scommessa risulta favorevole per il giocatore anche se di poco. Mentre nel secondo caso abbiamo

$$\frac{1}{2} \cdot u(300) + \frac{1}{2} \cdot u(-100) = -0.384 < 0 \tag{1.17}$$

Il risultato ci porta ad affermare che, rispetto alla funzione utilità presa in considerazione, accettare di giocare nel secondo caso risulta svantaggioso.

Se consideriamo lo sviluppo di Taylor per $u(x)$ con punto iniziale 0, il quale approssima $u(x)$ per x vicino a 0, otteniamo il polinomio

$$p(x) = x - \frac{x^2}{2a}$$

Se gli importi monetari trattati sono minori di a, il polinomio può essere adottato come funzione utilità, detta **utilità quadratica**, perché rispetta le proprietà riportate sopra. La funzione di utilità quadratica non è utilizzabile per $x > a$ perché il polinomio è decrescente nell'intervallo $[a, \infty[$. Per valori di x molto vicini a 0 l'utilità quadratica offre una buona approssimazione di quella esponenziale, e viene utilizzata perché la sua semplicità d'espressione ne rende conveniente per l'uso di alcune applicazioni.

Capitolo 2

Funzioni di sopravvivenza

In questa sezione tratteremo delle variabili che descrivono la vita di un individuo.

Consideriamo un individuo appena nato, quindi di età $x = 0$, e sia T la durata della sua vita in anni. T sarà la variabile aleatoria continua che indica l'istante della morte dell'individuo preso in considerazione (anche detto testa). Consideriamo la possibilità che T sia superiormente illimitata, anche se nel caso pratico viene fissata un'età $\omega > 0$ come età limite. Per trattare sia il caso limitato che quello illimitato supporremo che ω sia fissato, ed eventualmente $\omega = \infty$, e che $T \leq \omega$. Possiamo quindi dare la seguente definizione:

Definizione 2.0.1. *Considerando una variabile aleatoria continua di durata di vita (o alternativamente, di tempo di morte) T, e la sua funzione di ripartizione $F(t) = Prob(\{T \leq t\})$, si chiama* ***funzione di sopravvivenza*** *$S(t)$ la sua complementare:*

$$S(t) = Prob(\{T > t\}) = 1 - F(t) \tag{2.1}$$

Dalla definizione risultano alcune proprietà ovvie che comunque è bene sottolineare:

- $S(0) = 1$ perché la probabilità di sopravvivere dopo la nascita è 1;
- $F(0) = 0$ perché la probabilità di morire prima del tempo 0 è 0;
- $\lim_{t \to \omega} S(t) = 0$ perché la probabilità di sopravvivenza dopo la morte è 0;
- $\lim_{t \to \omega} F(t) = 1$ perché la probabilità di morire entro l'età massima fissata è 1.

Un esempio grafico delle due funzioni è riportato in Figura 2.1.

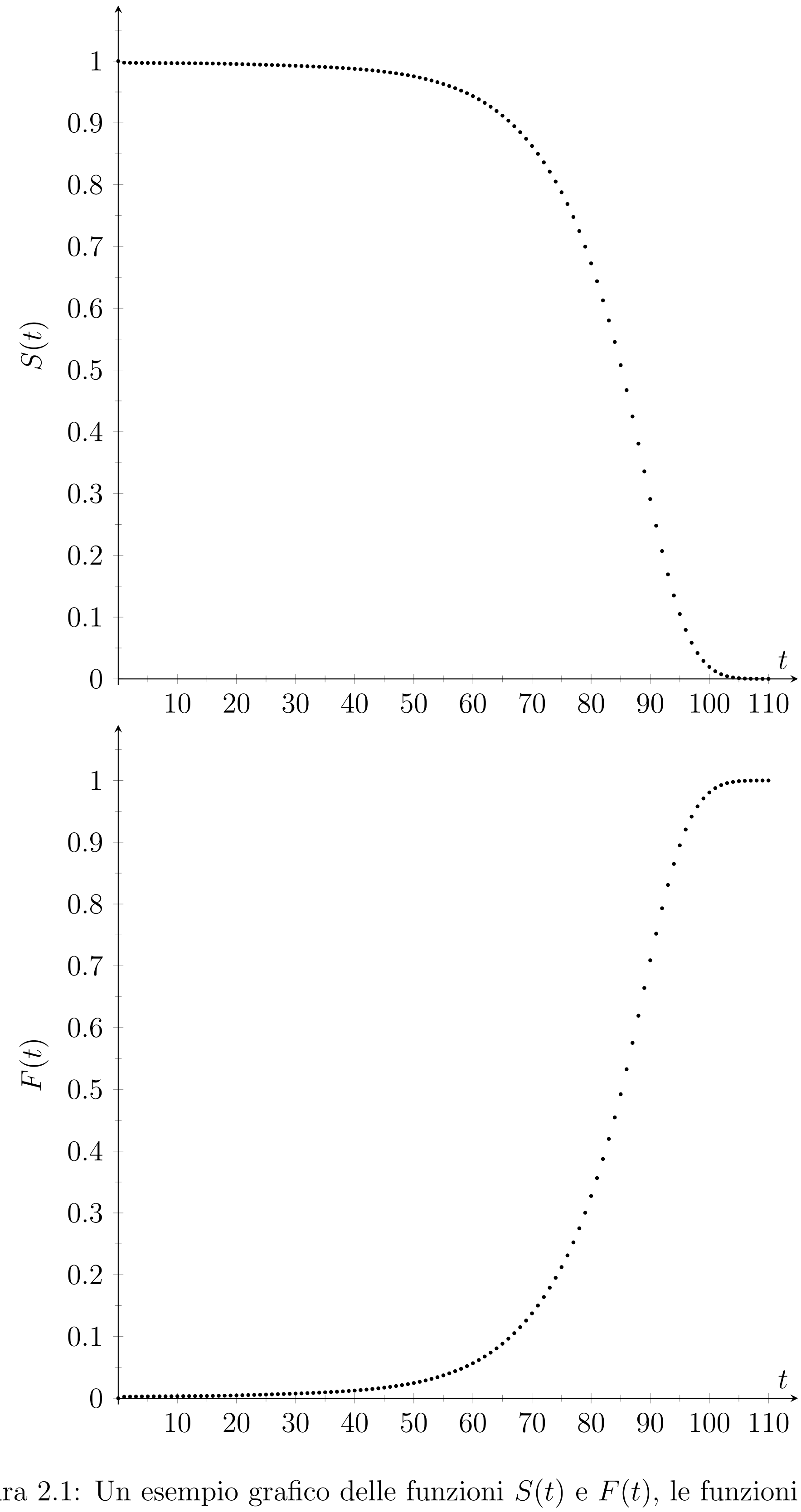

Figura 2.1: Un esempio grafico delle funzioni $S(t)$ e $F(t)$, le funzioni sono discrete e riportano i dati ISTAT 2021.

2.1 Notazioni attuariali

Prendiamo adesso in considerazione un individuo di età $x \geq 0$ e sia

$$T_x = T - x|T > x = \begin{cases} T - x & \text{se } \ T > x; \\ \text{non definita} & \text{se } \ T \leq x \end{cases} \tag{2.2}$$

la **durata residua della sua vita**, ci chiediamo qual'è la probabilità che esso viva fino all'età $x + t$. Questa è chiaramente una probabilità condizionata dove l'evento condizionante è quello di essere sopravvissuto fino a x anni. Da qui le seguenti definizioni.

Definizione 2.1.1. *La* ***probabilità di morte entro*** $x+t$ ***anni essendo sopravvissuto*** x ***anni*** *è data da:*

$$\begin{aligned} Prob(T_x \leq t) &= Prob(T \leq x + t|T > x) \\ &= \frac{Prob(\{T \leq x + t\} \cap \{T > x\})}{Prob(T > x)} \\ &= \frac{Prob(x < T \leq x + t)}{Prob(T > x)} \\ &= \frac{F(x + t) - F(x)}{1 - F(x)} \\ &= \frac{S(x) - S(x + t)}{S(x)} \\ &= 1 - \frac{S(x + t)}{S(x)} \\ &=: {}_tq_x \end{aligned} \tag{2.3}$$

Analogamente possiamo definire:

Definizione 2.1.2. *La* ***probabilità di sopravvivere dopo*** $x + t$ ***anni essendo sopravvissuto*** x ***anni:***

$$\begin{aligned} Prob(T_x > t) &= Prob(T > x + t|T > x) \\ &= \frac{Prob(\{T > x + t\} \cap \{T > x\})}{Prob(T > x)} \\ &= \frac{Prob(T > x + t)}{Prob(T > x)} \\ &= \frac{1 - F(x + t)}{1 - F(x)} \\ &= \frac{S(x + t)}{S(x)} \\ &=: {}_tp_x \end{aligned} \tag{2.4}$$

Una volta note (2.3) e (2.4) risulta facile dimostrare che le due probabilità sono l'una complementare dell'altra. Infatti:

$$ {}_tq_x + {}_tp_x = \frac{S(x) - S(x+t)}{S(x)} + \frac{S(x+t)}{S(x)} = \frac{S(x)}{S(x)} = 1. \tag{2.5} $$

Il risultato era facilmente prevedibile perché la probabilità che un individuo di età x sopravviva altri t anni sommata alla probabilità che esso muoia entro t anni è certamente 1.

Dalle definizioni precedenti derivano alcune notazioni abbreviate:

$$ q_x := {}_1q_x \tag{2.6} $$

$$ {}_tq_0 := F(t) \Longrightarrow {}_tq_x|_{x=0} = \frac{F(0+t) - F(0)}{1 - F(0)} = F(t) \tag{2.7} $$

$$ p_x := {}_1p_x \tag{2.8} $$

$$ {}_tp_0 := S(t) \Longrightarrow {}_tp_x|_{x=0} = \frac{S(0+t)}{S(0)} = S(t) \tag{2.9} $$

Si noti che la (2.6) è la probabilità che *una testa in vita al tempo x muoia entro un anno*, analogamente la (2.8) è la probabilità che *una testa in vita al tempo x sia ancora in vita dopo un anno.*

Se consideriamo due intervalli di tempo t_1 e t_2 diversi, possiamo dare la seguente definizione:

Definizione 2.1.3. *Siano t_1 e t_2 due intervalli di tempo, la* ***probabilità che un individuo di x anni muoia in t_2 anni differita di t_1 anni*** *è definita da:*

$$ \begin{aligned} Prob(t_1 < T_x \leq t_1 + t_2) &= Prob(x + t_1 < T < x + t_1 + t_2 | T > x) \\ &= Prob(T < x + t_1 + t_2 | T > x) - Prob(T < x + t_1 | T > x) \\ &= \frac{F(x + t_1 + t_2) - F(x)}{1 - F(x)} - \frac{F(x + t_1) - F(x)}{1 - F(x)} \\ &= \frac{F(x + t_1 + t_2) - F(x + t_1)}{1 - F(x)} \\ &= \frac{S(x + t_1) - S(x + t_1 + t_2)}{S(x)} \\ &=: {}_{t_1|t_2}q_x \end{aligned} \tag{2.10} $$

Se t, t_1, t_2 sono valori interi, dalle definizioni (2.3), (2.4), (2.10), possiamo derivare le seguenti proprietà di verifica diretta:

$$
\begin{aligned}
{}_{t_1+t_2}p_x &= {}_{t_1}p_x \cdot {}_{t_2}p_{x+t_1}; && (2.11)\\
{}_tp_x &= p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+t-1}; && (2.12)\\
{}_tq_x &= 1 - {}_tp_x = 1 - p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+t-1}; && (2.13)\\
{}_tq_x &= 1 - (1-q_x)(1-q_{x+1}) \cdot \ldots \cdot (1-q_{x+t-1}); && (2.14)\\
{}_{0|t}q_x &= {}_tq_x; && (2.15)\\
{}_{t_1|t_2}q_x &= {}_{t_1}p_x - {}_{t_1+t_2}p_x; && (2.16)\\
{}_{t_1|t_2}q_x &= {}_{t_1+t_2}q_x - {}_{t_1}q_x; && (2.17)\\
{}_{t_1|t_2}q_x &= {}_{t_1}p_x \cdot {}_{t_2}q_{x+t_1}; && (2.18)\\
{}_tp_x &= 1 - \sum_{k=1}^{t} {}_{k-1|1}q_x && (2.19)
\end{aligned}
$$

2.2 Durata attesa di vita e varianza

A volte è interessante considerare una funzione di ripartizione $F(t)$ continua. A partire da $F(t)$ possiamo ricavarci la rispettiva densità di probabilità, che chiameremo $f(t)$, della variabile T, ottenuta derivando $F(t)$. Intendendo che la densità di probabilità sia ugualmente nulla sul semiasse negativo dei tempi:

$$F(t) = Prob(\{T \leq t\}) = \int_0^t f(s)\, ds \tag{2.20}$$

Di conseguenza possiamo usare il calcolo integrale per determinare la probabilità che una testa viva in un periodo compreso tra due instanti di tempo diversi. Supponiamo $t_1 < t_2$ otteniamo:

$$
\begin{aligned}
Prob(t_1 < T < t_2) &= F(t_2) - F(t_1)\\
&= \int_0^{t_2} f(s)\, ds - \int_0^{t_1} f(s)\, ds\\
&= \int_{t_1}^{t_2} f(s)\, ds && (2.21)
\end{aligned}
$$

Esempio 2.2.1. *La probabilità che una testa muoia tra i 30 e i 50 anni è*

$$Prob(30 < T < 50) = F(50) - F(30) = \int_{30}^{50} f(t)\, dt \tag{2.22}$$

Poiché T è una v.a. continua con funzione di densità $f(t)$, si possono agevolmente calcolare la media, ossia durata attesa di vita, e varianza.

Averemo quindi:

- **Durata attesa di vita**:

$$E[T] = \int_0^{\omega} t \cdot f(t)\, dt; \tag{2.23}$$

- **Varianza**:

$$Var(T) = \int_0^{\omega} t^2 \cdot f(t)\, dt - \left(\int_0^{\omega} t \cdot f(t)\, dt \right)^2 \tag{2.24}$$

Il valore atteso della vita sapendo già che la testa ha vissuto fino al tempo t_1 va considerato come l'integrale della media traslato di un tempo t_1 e diviso per la probabilità di sopravvivere fino a quel tempo.

Definizione 2.2.2. *Si chiama **durata attesa di vita dal tempo** t_1 **in avanti** l'integrale:*

$$E_{t_1} = \frac{1}{S(t_1)} \int_0^{\omega} t \cdot f(t + t_1)\, dt \tag{2.25}$$

Un altro concetto molto importante è l'intensità istantanea di mortalità che, analogamente all'*intensità istantanea di interesse*, ci permette di calcolare a quale tasso sta crescendo la mortalità in un istante preciso di tempo. Se la funzione di distribuzione è continua questa probabilità è proporzionale a Δt infinitamente piccolo.

Definizione 2.2.3. *Si chiama **intensità istantanea di mortalità** il limite:*

$$\begin{aligned} \mu(t) :&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} Prob(T < t + \Delta t | T > t) \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{S(t) - S(t + \Delta t)}{S(t)} \\ &= -\frac{1}{S(t)} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} \\ &= -\frac{1}{S(t)} \frac{d}{dt} S(t) \\ &= -\frac{S'(t)}{S(t)} \end{aligned} \tag{2.26}$$

Alternativamente possiamo scrivere la (2.26) come un' equazione differenziale del tipo

$$-\frac{d}{dt} log(S(t)) \tag{2.27}$$

con condizione iniziale $log(S(0)) = 0$. La soluzione della (2.27) è $log(S(t)) = -\int_0^t \mu(s)\, ds$, ovvero:

$$S(t) = e^{-\int_0^t \mu(s)\, ds} \tag{2.28}$$

esprimendo la funzione di sopravvivenza in termini dell'intensità istantanea di mortalità.

Dalla definizione (2.1) sappiamo che $S(t) = 1-F(t)$ e che quindi $S'(t) = -f(t)$. Possiamo quindi vedere la (2.26) come

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{S(t)} \tag{2.29}$$

questo ci da un modo alternativo per ricavarci $f(t)$ cioè:

$$f(t) = \mu(t) \cdot S(t) \tag{2.30}$$

É possibile esprimere la probabilità di morte entro $x + t$ anni essendo sopravvissuto x anni in funzione dell'intensità istantanea di mortalità

$$\begin{aligned} {}_tq_x &= Prob(T \leq x + t | T > x) \\ &= \frac{S(x) - S(x+t)}{S(x)} \\ &= \frac{e^{-\int_0^x \mu(s)\, ds} - e^{-\int_0^{x+t} \mu(s)\, ds}}{e^{-\int_0^x \mu(s)\, ds}} \\ &= 1 - e^{-\int_x^{x+t} \mu(s)\, ds} \end{aligned} \tag{2.31}$$

In maniera analoga si può esprimere la probabilità di sopravvivenza dopo $x+t$ anni essendo sopravvissuto x anni in funzione dell'intensità istantanea di mortalità

$$\begin{aligned} {}_tp_x &= 1 - {}_tq_x \\ &= e^{-\int_x^{x+t} \mu(s)\, ds} \end{aligned} \tag{2.32}$$

2.3 Principali funzioni analitiche di sopravvivenza

A volte risulta interessante utilizzare le funzioni di sopravvivenza che dipendono da uno o più parametri. Queste funzioni vengono costruite in modo da rispecchiare il più possibile i dati che vengono raccolti per quanto riguarda la sopravvivenza all'interno di una società. La motivazione principale per cui vengono utilizzate queste funzioni è perché i calcoli sono più semplici se si utilizza una funzione continua.

A partire dall'intensità istantanea di mortalità possiamo individuare questo tipo di funzioni di sopravvivenza.

L'obiettivo di questa sezione è quello di andarne ad individuare le funzioni di sopravvivenza che vengono più utilizzate nell'ambito attuariale.

2.3.1 Funzione di sopravvivenza di De Moivre

É sicuramente una delle più antiche e semplici, risale al 18-esimo secolo.

L'intensità istantanea di mortalità presa in considerazione è

$$\mu(t) = \frac{1}{\omega - t} \tag{2.33}$$

dove $\omega > 0$ indica il consueto significato di età massima raggiungibile, ma non raggiunta. Quindi il dominio di $\mu(t)$ è $[0, \omega[$. Si ottiene così che la **funzione di sopravvivenza di De Moivre** vale

$$\begin{aligned} S(t) &= e^{-\int_0^t \frac{1}{\omega - s} \, ds} \\ &= 1 - \frac{t}{\omega} \end{aligned} \tag{2.34}$$

In pratica è una retta decrescente che parte dal punto (0,1) e interseca l'asse delle ascisse nel punto $(\omega, 0)$.

Vediamo un esempio della funzione di sopravvivenza di De Moivre in figura 2.2.

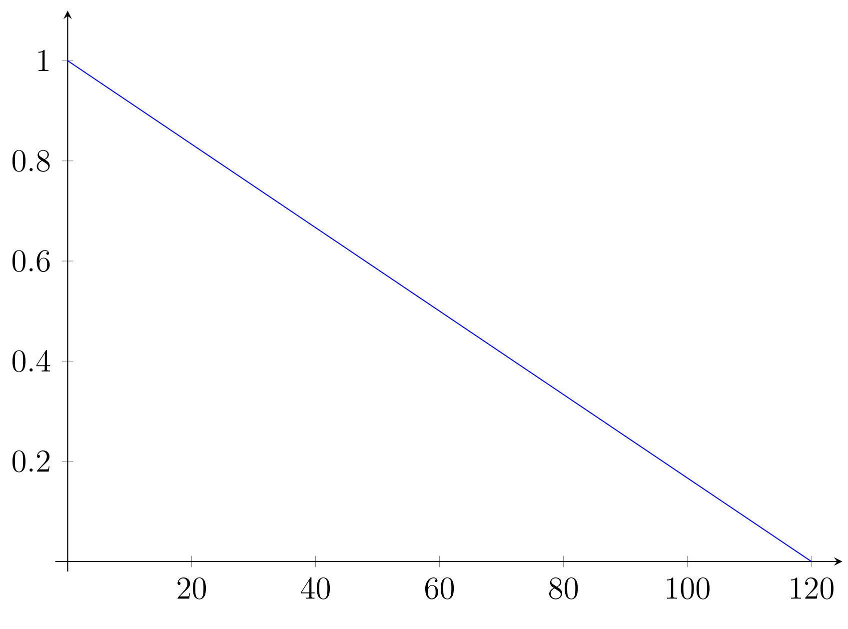

Figura 2.2: Esempio grafico della funzione di sopravvivenza di De Moivre con parametro $\omega = 120$.

2.3.2 Funzione di sopravvivenza di Poisson

Se consideriamo come intensità istantanea di mortalità la funzione costante

$$\mu(t) = \lambda \tag{2.35}$$

Otteniamo come funzione di sopravvivenza quella che viene chiamata **funzione di Poisson**, ovvero

$$\begin{aligned} S(t) &= e^{-\int_0^t \lambda \, ds} \\ &= e^{-\lambda t} \end{aligned} \tag{2.36}$$

Dove $\lambda > 0$ è un parametro che rende più restrittiva, in termini assicurativi, la funzione tanto più il parametro è grande. La funzione diventa praticamente inutilizzabile se $\lambda > 0.1$.

Vediamo un esempio della funzione di sopravvivenza di Poisson in figura 2.3.

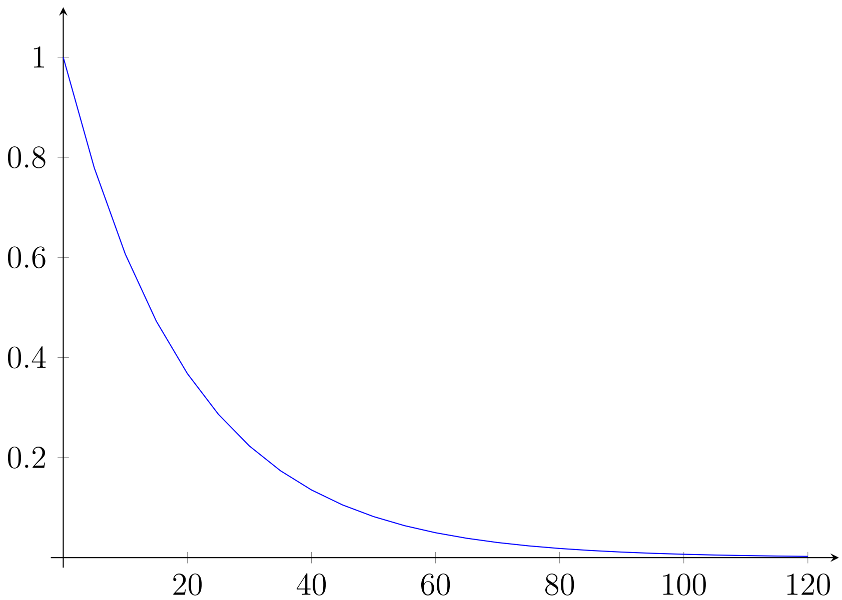

Figura 2.3: Esempio grafico della funzione di sopravvivenza di Poisson con parametro $\lambda = 0.05$.

2.3.3 Funzione di sopravvivenza di Gompertz

Consideriamo ora un'intensità istantanea di mortalità del tipo

$$\mu(t) = \beta c^t \tag{2.37}$$

dove i parametri reali sono $\beta > 0$ e $c > 1$. Otteniamo come funzione di sopravvivenza la funzione

$$\begin{aligned} S(t) &= e^{-\int_0^t \beta c^s \, ds} \\ &= e^{\frac{\beta}{\ln c}(1-c^t)} \end{aligned} \tag{2.38}$$

che viene detta **Funzione di Gompertz**.

Vediamo un esempio della funzione di sopravvivenza di Gompertz in figura 2.4.

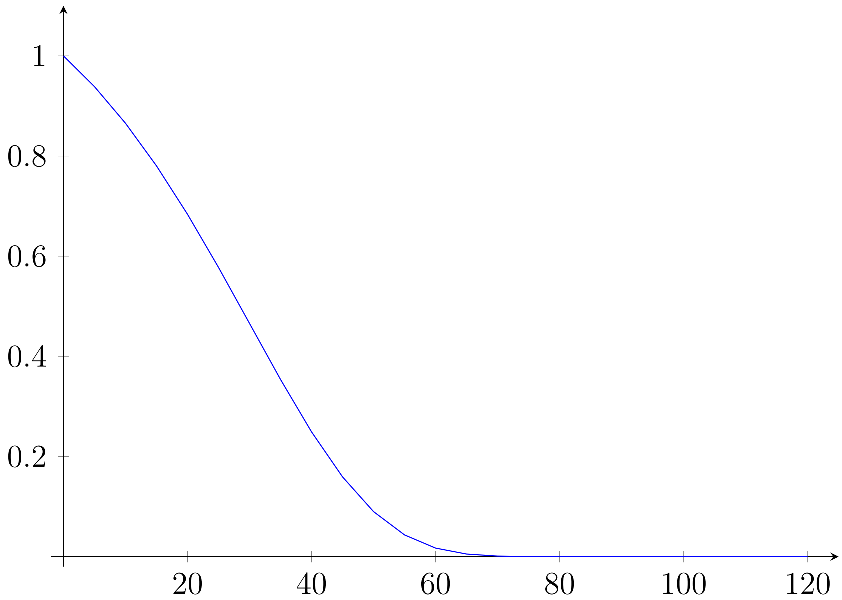

Figura 2.4: Esempio grafico della funzione di sopravvivenza di Gompertz con parametri $\beta = 0.01122$ e $c = 1.05$.

2.3.4 Funzione di sopravvivenza di Makeham

Questa volta "estendiamo" l'intensità istantanea di mortalità di Gompertz con un termine additivo costante e positivo

$$\mu(t) = \alpha + \beta c^t \tag{2.39}$$

Ricavando la **funzione di sopravvivenza di Makeham**

$$\begin{aligned} S(t) &= e^{-\int_0^t \alpha+\beta c^s\, ds} \\ &= e^{-\alpha t+\frac{\beta}{\ln c}(1-c^t)} \end{aligned} \tag{2.40}$$

Vediamo un esempio della funzione di sopravvivenza di Makeham in figura 2.5.

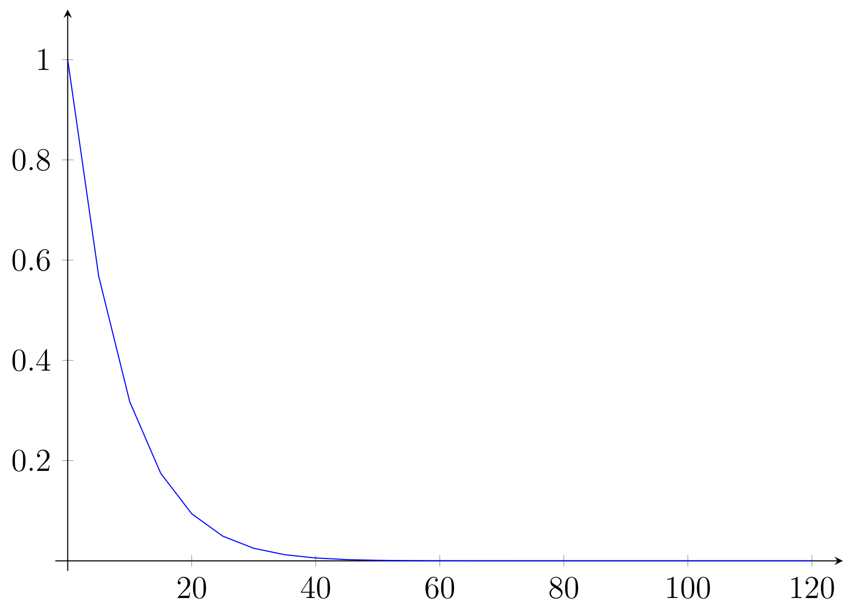

Figura 2.5: Esempio grafico della funzione di sopravvivenza di Makeham con parametri $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.02$ e $c = 1.04$.

2.4 Tavole di Mortalità

Le tavole di mortalità presentano dei coefficienti che sono utili per il calcolo di funzioni di sopravvivenza, che servono poi per calcolare i premi di assicurazione di cui parleremo più avanti.

Queste tavole in Italia sono a cura dell'ISTAT, che con periodicità annuale aggiorna i dati.

Il valore fondamentale riportato nelle tavole di mortalità è il numero dei sopravviventi, l_x. Si tratta del numero di persone che sono in vita all'età x, presi da un campione normalizzato a 100-mila persone nate vive.

Nella pratica questi dati non vengono raccolti partendo dagli stessi neonati iniziali, questo perché per compilare tutta la tavola servirebbe un tempo dell'ordine del secolo, una quantità di tempo che renderebbe i dati obsoleti. Questa difficoltà viene superata considerando quanti individui di età 0, età 1 ecc... ci sono in questo momento e, supponendo che tra un anno e l'altro il numero di nascite rimanga pressoché costante, si compila la tabella. I dati vengono poi corretti con tecniche, che non tratteremo, in modo da renderli più fedeli alla realtà.

Quello su cui ci soffermeremo è il significato degli altri dati, tutti riconducibili a l_x, vedremo quelli più significativi.

Posto che il rapporto $\frac{l_x}{100\,000} = Prob(T \geq x)$ rappresenta la probabilità di che un neonato raggiunga (almeno) l'età x, vediamo il significato dei vari dati.

2.4.1 Significato dei dati presenti nella tavola di mortalità

l_x Come spiegato precedentemente indica il numero di persone che superano l'età x a partire da un campione normalizzato a 100-mila persone;

d_x Indica il numero di individui che non raggiungono l'età $x + 1$, ovviamente anche questo dato è normalizzato alle 100-mila persone. Possiamo anche vedere $d_x = l_{x+1} - l_x$. La frazione $\frac{d_x}{100\,000} = Prob(T = x)$ indica la probabilità che un neonato muoia esattamente all'età x;

q_x É il rapporto $\frac{d_x}{l_x}$, indica la probabilità per un individuo di età x di non arrivare all'età $x+1$. Coerentemente con la definizione (2.6) data precedentemente.

Proponiamo un esempio di tavola mortalità relativa all'anno 2021 nella tabella 2.1.

Tabella 2.1: Tavola di mortalità ISTAT 2021. Si noti che la colonna q_x è moltiplicata di un fattore 1000.

Età	l_x	d_x	q_x	Età	l_x	d_x	q_x	Età	l_x	d_x	q_x
0	100000	250	2.50067	40	98752	76	0.76906	80	67259	2900	43.1098
1	99750	18	0.18488	41	98676	85	0.86178	81	64360	3095	48.09432
2	99731	14	0.13628	42	98591	95	0.95911	82	61264	3246	52.98104
3	99718	10	0.10179	43	98497	104	1.05818	83	58018	3479	59.97137
4	99708	8	0.07887	44	98392	115	1.17134	84	54539	3754	68.83955
5	99700	7	0.06834	45	98277	123	1.25535	85	50785	4043	79.60714
6	99693	7	0.0667	46	98154	134	1.3651	86	46742	4263	91.19884
7	99686	6	0.06351	47	98020	146	1.48701	87	42479	4399	103.55269
8	99680	7	0.06594	48	97874	159	1.62233	88	38080	4494	118.00616
9	99674	7	0.06566	49	97715	179	1.8348	89	33586	4478	133.32403
10	99667	7	0.07111	50	97536	200	2.05542	90	29109	4312	148.12151
11	99660	7	0.07098	51	97335	223	2.29457	91	24797	4107	165.6059
12	99653	7	0.07415	52	97112	250	2.56973	92	20690	3777	182.56118
13	99645	8	0.08409	53	96863	272	2.8067	93	16913	3410	201.60958
14	99637	10	0.10274	54	96591	298	3.08923	94	13503	3003	222.39753
15	99627	13	0.12695	55	96292	326	3.38889	95	10500	2565	244.26532
16	99614	16	0.15941	56	95966	350	3.64945	96	7935	2085	262.7028
17	99598	19	0.19427	57	95616	388	4.05334	97	5851	1660	283.67524
18	99579	22	0.22248	58	95228	426	4.47378	98	4191	1284	306.3819
19	99557	24	0.24126	59	94802	468	4.93576	99	2907	965	331.99547
20	99533	25	0.25318	60	94334	519	5.50203	100	1942	703	361.94779
21	99508	26	0.25631	61	93815	573	6.10746	101	1239	490	395.85068
22	99482	27	0.26656	62	93242	627	6.72194	102	749	320	427.25085
23	99456	27	0.27001	63	92615	690	7.4483	103	429	197	459.2326
24	99429	28	0.28536	64	91926	752	8.18537	104	232	114	491.53696
25	99400	29	0.29209	65	91173	816	8.94803	105	118	62	523.89439
26	99371	31	0.31326	66	90357	890	9.84517	106	56	31	556.03744
27	99340	32	0.32671	67	89468	974	10.89049	107	25	15	587.70418
28	99308	34	0.34017	68	88493	1070	12.09102	108	10	6	618.65376
29	99274	34	0.33746	69	87423	1159	13.26102	109	4	3	648.6704
30	99240	35	0.35524	70	86264	1274	14.76558	110	1	1	677.56579
31	99205	37	0.37622	71	84990	1378	16.21882	111	0	0	705.18694
32	99168	40	0.40059	72	83612	1506	18.01356	112	0	0	731.41719
33	99128	43	0.42947	73	82106	1603	19.51879	113	0	0	756.17134
34	99086	45	0.45855	74	80503	1736	21.55895	114	0	0	779.3966
35	99040	48	0.48541	75	78768	1895	24.05902	115	0	0	801.06945
36	98992	53	0.53106	76	76873	2102	27.34557	116	0	0	821.19173
37	98939	57	0.5756	77	74770	2279	30.48543	117	0	0	839.78297
38	98883	62	0.62869	78	72491	2523	34.81059	118	0	0	856.88511
39	98820	68	0.69005	79	69968	2708	38.70914	119	0	0	872.54908

Capitolo 3

Introduzione alle Assicurazioni

La matematica attuariale, ovvero quella branca della matematica che si occupa della gestione dell'attività assicurativa e previdenziale, per natura è incentrata sulla gestione del rischio. A differenza della matematica finanziaria, che si basa quasi sempre su fenomeni deterministici, quella attuariale si basa quasi unicamente su variabili aleatorie e processi stocastici. La matematica attuariale applica i problemi della matematica finanziaria a problemi di carattere aleatorio.

In questo capitolo introdurremo i concetti base che stanno dietro alla teoria delle assicurazioni, andando a vedere le diverse tipologie e successivamente ci concentreremo su quelle ramo vita.

3.1 Il contratto assicurativo

Con **contratto assicurativo**, o più semplicemente assicurazione, ci riferiamo ad uno specifico tipo di contratto stipulato tra due parti chiamate *assicuratore* e *assicurato*. All'interno del contratto viene esplicitato che l'assicuratore si prende carico, in modo parziale o totale, dell'eventuale *danno* che potrebbe capitare all'assicurato. A sua volta l'assicurato, nel momento della stipula del contratto, si impegna a pagare un premio.

Quindi il **premio** è il prezzo che l'assicurato, ovvero il soggetto più debole, paga nei confronti dell'assicuratore, ovvero il soggetto più forte, per l'eliminazione del rischio che il danno si verifichi.

Se vogliamo essere più precisi, l'Art.1882 del Codice Civile recita: *L'assicurazione è il contratto col quale l'assicuratore, verso pagamento di un premio, si obbliga a rivalere l'assicurato, entro i limiti convenuti, del danno ad esso prodotto da un sinistro, ovvero a pagare un capitale o una rendita al verificarsi di un evento attinente alla vita umana.*

In questa definizione viene racchiusa tutta una serie di tipologie di assicurazioni, le specificità vengono poi riportate nel contratto stesso, come per esempio: le modalità, le forme di pagamento e le tempistiche.

Bisogna specificare che non sempre il contraente sarà anche il beneficiario nel caso il danno si verifichi. Basti pensare ad un'assicurazione sulla vita, il contraente nel caso di morte non sarà lui a ricevere la prestazione bensì la sua famiglia o le persone da esso scelte.

3.1.1 Ramo Danni

Le assicurazioni **ramo danni** vanno a tutelare l'assicurato da una serie di rischi che possano danneggiare il suo patrimonio o le sue possibilità di guadagno.

Questo tipo di assicurazione si occupa principalmente dei danni contro cose, danni contro persone, rischi commerciali e i rischi finanziari.

I danni contro le cose riguardano principalmente quelli a veicoli, abitazioni o qualunque bene fisico che possa far parte di un patrimonio di un soggetto e questo possa essere danneggiato da un incendio, furto o altro.

I danni contro le persone invece riguardano infortuni o malattie che possono compromettere la capacità di generare un guadagno, come andare a lavorare, per la sopravvivenza personale.

I rischi commerciali e finanziari riguardano il settore dei crediti tutelando l'assicurato dai rischi che provengono dall'operare sui mercati finanziari e consentendo di mettere il proprio capitale al riparo dalle fluttuazioni.

Alcune di esse sono obbligatorie in Italia, come nel caso dell'assicurazione sulla circolazione della macchina. L'assicurazione **RCA** (responsabilità civile autoveicoli) stabilisce che, qualora il possessore dell'autoveicolo vada a causare un danno ad un altro mezzo o ad una persona, la compagnia assicurativa va a coprire i danni causati, entro un massimale stabilito nel contratto.

3.1.2 Ramo Vita

Il **ramo vita** si basa principalmente sulla possibilità che l'assicurato ha di vivere o di morire entro una certa data. Si tratta di una forma di risparmio che tutela l'assicurato e/o i suoi cari dall'aleatorietà della durata della vita umana.

Un esempio è l'assicurazione **caso morte**, dove la compagnia si impegna a pagare un capitale, o una rendita vitalizia, ai beneficiari scelti dal contraente se quest'ultimo dovesse venire a mancare entro una data concordata.

Analogamente l'assicurazione **caso vita** vede la compagnia ad impegnarsi nel pagare un capitale, in questo caso al contraente stesso, nel caso in cui egli sopravviva ad una certa data.

Esistono anche delle formule miste che prevedono entrambe le casistiche.

La diffusione di questo genere di polizze ha avuto un'impennata dovuta alla ristrutturazione del sistema di previdenza pubblica, che ha reso le pensioni statali meno competitive e quindi, di fatto, per molti il ricorso a questo tipo di polizze è divenuto ormai quasi necessario.

Analizzeremo i casi specifici di questo tipo di assicurazione nella sezione 6.

Capitolo 4

Il calcolo dei premi

Come abbiamo visto nel capitolo 3 il *premio* è il prezzo che l'assicurato paga nel momento della firma del contratto per sottrarsi dalla responsabilità dell'eventuale danno.

In questo capitolo vedremo come esso viene calcolato e le differenze tra i vari tipi di premi. Considereremo solo il punto di vista dell'assicuratore per il calcolo del premio.

Supponiamo che al tempo $t_0 = 0$ l'assicuratore abbia un capitale proprio certo c e che al tempo t_0 arrivi un cliente per la stipula del contratto, sia $Prob$ la distribuzione di probabilità che l'assicuratore applica all'avvenire degli eventi e sia D, variabile aleatoria, il danno. Si assuma che il danno D possa verificarsi entro il tempo $t_1 = 1$ del contratto e che l'assicurato paghi un premio P al tempo t_0. Ci chiediamo *qual'è il premio che dovrà pagare il cliente?*

La compagnia assicurativa deve sostenere spese di tasse, personale e quant'altro e sopratutto opera a scopo di lucro, adotterà dei criteri per la scelta del premio in modo da percepire vantaggiosa la stipula del contratto.

Se ipotizziamo per semplicità che al tempo t_0 l'assicuratore non abbia altri contratti in corso, dopo la stipula del contratto la sua posizione al tempo t_1 sarà

$$Z_1 = (c + P)(1 + i) - D \tag{4.1}$$

dove $i > 0$ è il rendimento dell'investimento, supponiamo privo di rischi, del capitale e del premio nell'arco di tempo $[t_0; t_1]$ e che l'aleatorietà di D sia indipendente da i.

Senza la stipula del contratto il capitale della compagnia sarà

$$z_1 = c \cdot (1 + i) \tag{4.2}$$

che, secondo la compagnia, è un investimento certo, avendo supposto che i è sempre positivo.

Osservazione 4.0.1. *Si noti che* (4.1) *è una variabile aleatoria, dove la componente aleatoria è il danno D, a differenza di* (4.2) *che invece è una costante.*

Per l'assicuratore risulta equo stipulare il contratto se vale

$$E_0[(c+P)(1+i)-D] = c\,(1+i) \tag{4.3}$$

che è equivalente a

$$P = \frac{E_0[D]}{1+i} \tag{4.4}$$

Dove E_0 è l'aspettativa di guadagno condizionata all'informazione disponibile al tempo t_0 e calcolata utilizzando la distribuzione di probabilità $Prob$ precedentemente citata.

Come abbiamo già affrontato nella sezione 1.5 la (4.3) non tiene conto dell'avversione al rischio dell'assicuratore.

Supponendo che u sia la funzione utilità della compagnia, la (4.3) diventa

$$E_0[u((c+P)(1+i)-D)] = u(c\,(1+i)) \tag{4.5}$$

In questo caso l'assicuratore valuterà *indifferente* firmare o no il contratto, considerando la sua avversione al rischio. Nel caso in cui nella (4.5) risulti la disuguaglianza "$>$" l'assicuratore percepirà vantaggiosa l'operazione di assicurazione, mentre se dovesse risultare "$<$" la percepirà svantaggiosa.

Infatti se teniamo di conto l'avversione al rischio, se vale (4.3) l'assicuratore percepirà svantaggiosa l'operazione. Si ottiene che

$$u(E_0[(c+P)(1+i)-D]) = u(c\,(1+i)) \tag{4.6}$$

che per la disuguaglianza di Jensen [1] vale

$$E_0[u((c+P)(1+i)-D)] < u(E_0[(c+P)(1+i)-D]) \tag{4.7}$$

e quindi che

$$E_0[u((c+P)(1+i)-D)] < u(c\,(1+i)) \tag{4.8}$$
$$\big(= u(E_0[(c+P)(1+i)-D]\big)$$

Esempio 4.0.2. *Si assuma che il danno D possa assumere una sola determinazione positiva* $d > 0$ *con probabilità* $p > 0$ *e che sarà quindi nullo con probabilità* $1-p$. *La* (4.5) *assume la forma*

$$p \cdot u((c+P)(1+i)-d) + (1-p) \cdot u((c+P)(1+i)) = u(c\,(1+i)) \tag{4.9}$$

[1] La disugualianza di Jensen afferma che se $f(x)$ è una funzione concava e X una variabile aleatoria, allora $E[f(X)] \leq f(E[X])$. Vale "=" se e solo se X è degenere.

4.1 Premio equo e premio puro

Note le equazioni (4.3) e (4.5) possiamo dare le seguenti definizioni

Definizione 4.1.1. *Si dice* ***equo*** *il premio* P^e *che soddisfa la seguente equazione*

$$E_0[(c + P^e)(1 + i) - D] = c\,(1 + i) \tag{4.10}$$

Definizione 4.1.2. *Si dice* ***puro*** *il premio* P^p *che soddisfa la seguente equazione*

$$E_0[u((c + P^p)(1 + i) - D)] = u(c\,(1 + i)) \tag{4.11}$$

Dall'analisi delle due equazioni nella sezione precedente abbiamo derivato che il *premio puro* dovrà essere sempre maggiore del *premio equo*.

Esempio 4.1.3. *Sia* D *la variabile aleatoria associata ad un danno di un evento, supponiamo che* D *possa assumere una sola determinazione* $d > 0$ *con probabilità* p *e nullo altrimenti. Supponiamo che la funzione utilità della compagnia sia del tipo* $u(x) = 1 - e^{-\frac{x}{a}}$ *con* $a > 0$ *e sia* P *il premio puro da ricavare. L'equazione* (4.5) *diventa*

$$\begin{aligned} p\,(1 - e^{-\frac{1}{a}((c+P^p)(1+i)-d)}) + (1-p)\,(1 - e^{-\frac{1}{a}((c+P^p)(1+i))}) &= 1 - e^{-\frac{1}{a}c(1+i)} \\ p\,(e^{-\frac{1}{a}((c+P^p)(1+i)-d)}) + (1-p)\,(e^{-\frac{1}{a}((c+P^p)(1+i))}) &= e^{-\frac{1}{a}c(1+i)} \\ p\,(e^{\frac{1}{a}d}) + (1-p) &= e^{\frac{1}{a}P^p(1+i)} \\ \ln\left[pe^{\frac{1}{a}d} + (1-p)\right] &= \frac{1}{a}\,P^p\,(1+i) \end{aligned}$$

Da qui otteniamo che

$$P^p = \frac{a}{(1+i)} \cdot \ln\left(p \cdot e^{\frac{1}{a}d} + (1-p)\right) \tag{4.12}$$

Se invece volessimo calcolarci il premio equo, dalla (4.4) *ricaviamo*

$$P^e = \frac{p \cdot d}{1+i} \tag{4.13}$$

Considerando un caso numerico con $c = 1000$, $i = 5\%$, $a = 1000$, $d = 50$ *e* $p = 5\%$ *il premio equo sarà*

$$P^e = \frac{p \cdot d}{1+i} = \frac{0.05 \cdot 50}{1.05} = 2.38 \tag{4.14}$$

mentre il premio puro sarà

$$P^p = 1000 \cdot \frac{\ln\left(0.05 \cdot e^{\frac{50}{1000}} + 0.95\right)}{1.05} = 2.44 \tag{4.15}$$

Si noti che il premio puro è maggiore del premio equo come già avevamo dedotto.

Se invece si considera un danno 10 *volte più elevato, cioè si pone* $d = 500$*, il premio equo aumenta per un fattore* 10*, perché "utilizza" una funzione utilità lineare*

$$P^e = \frac{p \cdot d}{1+i} = \frac{0.05 \cdot 500}{1.05} = 23.8 \tag{4.16}$$

mentre il premio puro diventa

$$P^p = 1000 \cdot \frac{\ln\left(0.05 \cdot e^{\frac{500}{1000}} + 0.95\right)}{1.05} = 30.4 \tag{4.17}$$

aumentando quindi di un fattore di oltre 12*.*

Esempio 4.1.4. *Se riprendiamo l'esempio 4.1.3 ma questa volta utilizziamo come funzione utilità* $u(x) = \ln x$*, che non è superiormente limitata ma come abbiamo visto nella sezione 1.5 è una proprietà utile solo per non incappare in paradossi. L'equazione* (4.5) *diventa*

$$p \,\ln\left[(c + P^p)(1+i) - d\right] + (1-p)\ln\left[(c+P)(1+i)\right] = \ln\left[c(1+i)\right]$$

In questo caso la risoluzione per via numerica è probabilmente la strada più veloce per quanto macchinosa. Mantenendo le stesse condizioni dell'esempio precedente, con un danno pari a 50 *si ottiene un premio puro* $P^p = 2.44$*. Mentre se prendiamo in considerazione un danno dieci volte maggiore otteniamo un premio puro* $P^p = 31.45$*.*

4.2 Caricamenti di sicurezza

Come abbiamo visto il *premio puro* è sempre maggiore del *premio equo* e la differenza

$$L = P^p - P^e \tag{4.18}$$

prende il nome di **caricamento di sicurezza**. Questo valore monetario ci da un'idea dell'avversione al rischio dell'assicuratore al tempo della stipula del contratto rispetto al danno prefissato.

Il caricamento di sicurezza viene anche espresso in termini percentuali del premio puro, che viene chiamato **tasso di caricamento di sicurezza**

$$l = \frac{L}{P^p} \tag{4.19}$$

É un **caricamento implicito**, che l'assicuratore non è tenuto a dichiarare dall'assicurato.

Al *premio puro* poi viene applicato un ulteriore caricamento, questa volta **esplicito**, chiamato **caricamento per spese**. L'idea è che l'assicuratore avrà diverse spese durante la vita del contratto che ovviamente metterà a carico dell'assicurato. Solitamente il *caricamento per spese* si divide in tre componenti

- **Spese di gestione**: spese che l'assicuratore subisce negli anni di contratto per la gestione amministrativa della polizza;
- **Spese di acquisizione**: spese per la provvigione che l'assicuratore versa all'agente che ha procurato il contratto;
- **Spese di incasso**: spese per l'incasso del premio.

Quindi con l'aggiunta del caricamento per spese al premio puro otteniamo quello che si chiama il **premio di tariffa** o **premio commerciale**.

Vediamo uno schema riassuntivo dei premi in figura 4.1

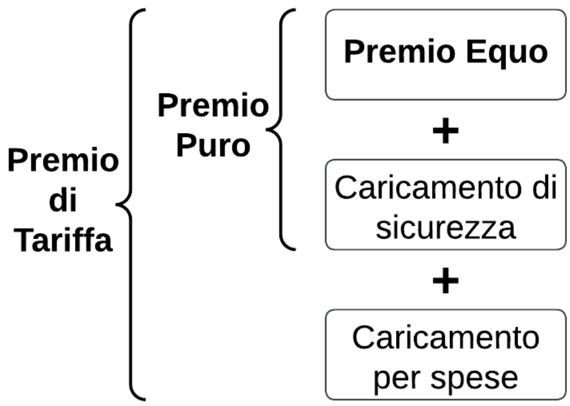

Figura 4.1: Schema riassuntivo del calcolo dei premi

4.3 Base tecnica del I ordine

Per mantenere concreta la propria avversione al rischio, l'assicuratore nel calcolare i premi deve rinunciare alla semplicità di calcolo dei premi equi. Infatti, in base alla funzione di utilità utilizzata, per il calcolo del premio puro potrebbe essere necessaria la risoluzione per via numerica. Per evitare di doversi calcolare ogni volta il premio puro per via numerica, come abbiamo visto nell'esempio 4.1.4, si ricorre alla logica della *base tecnica del I ordine*, andando a distorcere la funzione di probabilità utilizzata e/o il tasso di interesse per incorporarvi l'avversione al rischio.

Definizione 4.3.1. *Si dice* ***base tecnica del I ordine****, o* ***base tecnica prudenziale****, la coppia* $(i^I, Prob^I)$ *di tasso di interesse e misura di probabilità tali che il premio equo calcolato con* $(i^I, Prob^I)$ *risulti uguale al premio puro. Se si indica con* E^I *l'aspettativa calcolata con la misura di probabilità* $Prob^I$ *ciò significa*

$$E_0^I(D) \cdot (1 + i^I)^{-1} = P^p = E_0(D) \cdot (1 + i)^{-1} + L \tag{4.20}$$

Il tasso di interesse del primo ordine i^I *viene detto* ***tasso tecnico*** *e solitamente è minore o uguale al tasso di mercato* i*. La distribuzione di probabilità* $Prob^I$ *assegna probabilità maggiori di* $Prob$ *al verificarsi del danno* D*.*

Esempio 4.3.2. *Riprendendo l'esempio 4.1.3, nel caso* $d = 50$ *si ha un caricamento di sicurezza*

$$L = P - E_0[D](1 + i)^{-1} = 2.44 - 2.38 = 0.057$$

che quindi equivale ad un tasso di caricamento

$$l = \frac{L}{P} = \frac{0.057}{2.44} = 0.0235 = 2.35\%$$

Ogni base tecnica del I ordine deve soddisfare l'equazione

$$p^I \cdot d \cdot (1 + i^I)^{-1} = P^p$$

Se si sceglie $i^I = i$*, la probabilità del I ordine* p^I *è univocamente determinata e risulta*

$$p^I = \frac{P^p \cdot (1 + i)}{d} = \frac{2.44 \cdot 1.05}{50} = 0.0512 = 5.12\% > p$$

Se invece si pone $p^I = p$*, il tasso tecnico* i^I *è univocamente determinato da*

$$i^I = \frac{p \cdot d}{P^p} - 1 = \frac{0.05 \cdot 50}{2.44} - 1 = 0.025 = 2.5\% < i$$

Capitolo 5

Classificazione delle polizze in base alla tipologia di premio

Abbiamo visto nella sezione precedente quali sono i criteri che si prendono in considerazione per il calcolo dei premi. In questa sezione vedremo come vengono calcolati e pagati i premi.

Nell'approccio attuariale "tradizionale" si considera una legge di equivalenza intertemporale basata su

- una legge di capitalizzazione composta con tasso annuo $i \geq 0$ fissato;
- un modello probabilistico "tradizionale" basato su una funzione di sopravvivenza S fissata, analizzata nel capitolo 2.

Utilizzeremo la coppia (i, S) come base tecnica del I ordine.

Fissata quindi la base tecnica (i, S), un istante di valutazione t, un importo X_s pagabile in $s \geq t$ e legato alla durata della vita di un individuo, possiamo dare la seguente definizione

Definizione 5.0.1. *Si dice **valore attuale attuariale**, $V(t, X_s)$, il valore in t di X_s calcolato secondo la base tecnica (i, S),*

$$V(t, X_s) = E_t[X_s] \cdot v^{s-t} \tag{5.1}$$

dove $v = (1+i)^{-1}$ è il fattore di costo annuo della legge di capitalizzazione composta di tasso annuo i.

Si noti che il valore $V(t, X_s)$ calcolato secondo (i, S) è il premio puro in t del contratto che paga X_s al tempo s.

5.1 Polizze a premio unico

Una polizza si dice a **premio unico** se l'assicuratore paga un solo premio alla stipula del contratto, in cambio delle future ed eventuali prestazioni che percepirà nei tempi e nei modi previsti dalla tipologia di contratto, e nessun altro premio.

Come avevamo evidenziato nel paragrafo 4.2, il premio unico che si impegna a pagare l'assicurato, detto **premio di tariffa**, non può essere inferiore al premio puro che già prevede un *caricamento di sicurezza*.

Infatti se fissiamo al tempo zero di stipula del contratto una base tecnica (i, S), un flusso di prestazioni $\mathbf{Y}$ e l'età dell'assicurato x e si indica con U il premio unico puro e con T il premio unico di tariffa, si ha che

$$T > U = V(0, \mathbf{Y}) \tag{5.2}$$

dove il caricamento esplicito, o caricamento per spese, è

$$H = T - U > 0 \tag{5.3}$$

Solitamente si usa vedere il caricamento H sotto forma di percentuale rispetto al premio di tariffa T, ottenendo quello che viene chiamato **tasso di caricamento**

$$h = \frac{H}{T} \tag{5.4}$$

si noti che h è maggiore di zero e minore di uno.

Possiamo vedere anche il premio di tariffa in funzione del premio unico e del *tasso di caricamento*, partendo da

$$T = U + hT \tag{5.5}$$

cioè

$$T = \frac{U}{1-h} \tag{5.6}$$

5.2 Polizze a premio periodico

Il contratto di assicurazione può prevedere che il premio, anziché essere versato in un'unica soluzione alla stipula del contratto, sia versato in una serie di pagamenti prefissati, ovvero delle rate come abbiamo visto nella sezione 1.4. Questi tipi di premi vengono detti **premi periodici**. In questa sezione prenderemo in esempio delle rate annuali, ciò significa che gli stessi ragionamenti che vedremo possono essere applicati a rate mensili o ad altra frequenza.

In una **polizza a premio annuo** quindi, l'assicurato si impegna a pagare una rendita vitalizia temporanea anticipata in cambio delle prestazioni, a carico dell'assicuratore, previste nel contratto. Solitamente il premio annuo è costante e prenderemo in considerazione solo questo caso. La rendita vitalizia è solitamente temporanea, con una durata pari alla durata del contratto. Può capitare però che queste rate vengano interrotte precocemente, questo capita nel caso in cui l'assicurato dovesse venire a mancare prima della scadenza del contratto.

Fissiamo adesso una base tecnica del I ordine (i, S), un flusso $\mathbf{Y}$ di prestazioni e l'età x dell'assicurato al tempo zero della stipula. In riferimento al premio annuo costante e durata n del contratto, l'assicurato dovrà corrispondere all'assicuratore al tempo $k \geq 0$ l'importo

$$X_k = \begin{cases} P \cdot \mathbf{1}_{\{T_x > k\}} & \text{se} \quad k < n \\ 0 & \text{se} \quad k \geq n \end{cases} \tag{5.7}$$

dove P è il premio annuo costante e $\mathbf{1}_{\{T_x > k\}}$ è la funzione indicatrice dell'evento $\{T_x > k\}$.

$$\mathbf{1}_{\{A\}} := \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \{A\} \text{ è vera} \\ 0 & \text{se} \quad \{A\} \text{ è falsa} \end{cases} \tag{5.8}$$

Lo scambio del flusso $\mathbf{X} = \{X_0, X_1, ..., X_{n-1}\}$ dei premi con il flusso $\mathbf{Y}$ delle prestazioni è in **equilibrio attuariale** se e solo se

$$V(0, \mathbf{X}) = V(0, \mathbf{Y}) \tag{5.9}$$

Poiché $V(0, \mathbf{Y}) = U$ e i premi annui vanno attualizzati al tempo zero, considerando la probabilità ${}_kp_x$ che il premio al tempo k venga pagato.

Otteniamo che

$$\begin{aligned} V(0, \mathbf{X}) &= P + P \cdot {}_1p_x \cdot v + P \cdot {}_2p_x \cdot v^2 + ... + P \cdot {}_{n-1}p_x \cdot v^{n-1} \\ &= P \sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_x \cdot v^k \end{aligned} \tag{5.10}$$

La sommatoria $\sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_x \cdot v^k$ viene solitamente indicata con ${}_n\ddot{a}_x$. La condizione di equilibrio diventa

$$P = \frac{U}{{}_n\ddot{a}_x} \tag{5.11}$$

che è la formula di rateizzazione del premio unico U in n annualità vitalizie anticipate di importo P.

Il premio annuo calcolato con (5.11) è naturalmente il premio annuo puro, quindi non sarà il premio che pagherà l'assicurato perché bisogna ancora aggiungere il *caricamento per spese* (*caricamento esplicito*), per ottenere il premio annuo di tariffa Π. Tenendo di conto il tasso di caricamento totale h, possiamo calcolare il premio annuo di tariffa

$$\Pi = \frac{P}{1 - h} \tag{5.12}$$

Confrontando (5.12) con (5.6) e tenendo di conto (5.11) si ottiene che il premio annuo di tariffa Π è la rateizzazione del premio unico di tariffa T

$$\Pi = \frac{T}{{}_n\ddot{a}_x} \tag{5.13}$$

5.3 Polizze a premio unico ricorrente

Nelle polizze a premio annuo, appena analizzate, al momento della stipula del contratto viene "costruito" l'intero capitale assicurato da parte dell'assicuratore, nonostante l'assicurato versi, alla data della stipula, solo il primo premio annuale.

In una **polizza a premio unico ricorrente** il capitale viene costruito progressivamente con l'aumentare del pagamento dei premi annuali. Questo tipo di polizza espone l'assicuratore ad un rischio minore, perché nel caso di un'assicurazione caso morte se il contraente dovesse morire dopo il pagamento della prima rata, o dopo poche rate dall'inizio del contratto, l'assicuratore pagherà una prestazione molto minore rispetto al caso visto nella sezione 5.2.

Può anche essere vista come un'insieme di polizze a premio unico della stessa tipologia, dove l'assicurato versa P_0, P_1,..., P_{n-1} gli n premi unici puri previsti dal contratto che vengono pagati ai tempi $0, 1, ..., n-1$.

Fissata una base tecnica del I ordine (i, S), il capitale che viene costruito al tempo 0 sarà

$$C_0 = \frac{P_0}{v^n \cdot p_0} \tag{5.14}$$

Dove p_0 indica la probabilità che viene associata al pagamento del premio P_0 secondo la funzione S della base tecnica presa in considerazione.

Analogamente il capitale costruito al tempo k sarà

$$C_k = \frac{P_k}{v^{n-k} \cdot p_k} \tag{5.15}$$

Alla scadenza contrattuale la prestazione complessiva, se tutti i premi sono stati pagati, è la somma dei capitali costruiti

$$C = \sum_{l=0}^{n-1} C_l = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{P_l}{v^{n-l} \cdot p_l} \tag{5.16}$$

Se, per semplicità, vengono utilizzati dei premi costanti il capitale che si costruisce sarà una somma decrescente di capitali, otteniamo quindi

$$C = P \cdot \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{v^{n-l} \cdot p_l} \tag{5.17}$$

Nel caso in cui il contraente dovesse venire a mancare prima della scadenza del contratto, per esempio al tempo $k < n$, la prestazione, nel caso in cui essa debba essere erogata in base alla tipologia del contratto, che vedremo più in dettaglio nel prossimo capitolo, sarà

$$Y_k = P \cdot \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{v^{n-l} \cdot p_l} \tag{5.18}$$

Ovviamente i premi utilizzati fin'ora sono premi puri, l'assicuratore dovrà applicare un ulteriore caricamento per spese ottenendo così

$$\Pi = \frac{P}{(1-h)}$$

dove h è il tasso di caricamento totale.

Nel caso in cui i premi siano costanti la (5.17) diventa

$$C = \Pi \cdot \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{v^{n-l} \cdot p_l} \tag{5.19}$$

Capitolo 6

Classificazione delle polizze in base alla tipologia di prestazione

Le polizze assicurative ramo vita, come abbiamo visto nella sezione 3.1.2, possono essere di diversi tipi. La differenziazione dipende da come e quando vengono erogati gli importi. Lo scopo di questa sezione è quello di andare ad analizzare le diverse tipologie.

6.1 Prestazioni di capitale

Le prestazioni di capitale sono un tipo di prodotto assicurativo che prevede il pagamento di un unico importo di denaro al momento del verificarsi di un evento specifico, come ad esempio la morte di un assicurato o il raggiungimento di un'età specifica.

Questo tipo di copertura assicurativa viene spesso utilizzato per proteggere le finanze di una famiglia in caso di perdita del reddito a seguito della morte o dell'inabilità di uno dei suoi membri a lavorare. Inoltre, il momento in cui viene effettuato il pagamento può variare a seconda delle condizioni del contratto: ad esempio, il pagamento può essere effettuato al momento del verificarsi dell'evento o allo scadere del contratto stesso.

Fissiamo ora una base tecnica del I ordine (i, S), si consideri un individuo di età x anni che stipula una polizza al tempo $t = 0$.

6.1.1 Capitale differito

Una polizza di **capitale differito** (**CD**) di durata n anni, è un'assicurazione ramo vita *caso vita* cioè prevede un pagamento di un capitale assicurato C dopo n anni, a condizione che l'assicurato sia in vita allo scadere del contratto. La durata n viene chiamata **differimento**.

La prestazione aleatoria pagata dalla polizza al tempo n è quindi

$$Y_n = \begin{cases} C & \text{se l'assicurato sarà in vita al tempo } n, \text{ cioè se } T_x > n; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{6.1}$$

l'aleatorietà riguarda il pagamento o meno della prestazione che, se verrà pagata, sarà comunque C.

Possiamo riscrivere la prestazione utilizzando la funzione indicatrice (5.8), ottenendo la forma

$$Y_n = C \cdot \mathbf{1}_{\{T_x > k\}} \tag{6.2}$$

Osservazione 6.1.1. *Si noti che preso un evento A e la funzione indicatrice $\mathbf{1}_A$, risulta che $E[\mathbf{1}_A] = Prob(A)$.*

Possiamo quindi calcolare il valore attuale attuariale

$$\begin{aligned} V(0, Y_n) &= C \cdot V(0, \mathbf{1}_{\{T_x > k\}}) \\ &= C \cdot v^n \cdot E_0[\mathbf{1}_{\{T_x > k\}}] \\ &= C \cdot v^n \cdot Prob(T_x > k) \\ &= C \cdot v^n \cdot {}_n p_x \end{aligned} \tag{6.3}$$

Viene spesso utilizzata la notazione

$${}_n E_x = v^n \cdot {}_n p_x \tag{6.4}$$

per indicare il valore di una prestazione di capitale differito unitario dopo n anni riferito ad una testa di età x anni. In definitiva possiamo scrivere il valore attuale attuariale come

$$V(0, Y_n) = C \cdot {}_n E_x \tag{6.5}$$

Esempio 6.1.2. *Prendiamo in esame un contratto di assicurazione CD stipulato da una testa di età 65 anni. La compagnia si impegna a pagare alla fine del contratto di durata $n = 10$ anni, un capitale di $C = 200\,000$€ nel caso in cui il contraente sarà ancora vivo a quella data. Supponiamo che la valutazione venga effettuata ad un tasso tecnico annuo del 1.5%, e che basandoci sulla funzione di sopravvivenza di Poisson 2.3.2 con fattore $\lambda = 0.05$ possiamo ricavarci che:*

$${}_{10}p_{65} = \frac{S(75)}{S(65)} = \frac{e^{-\lambda \cdot 75}}{e^{-\lambda \cdot 65}} = \frac{e^{-0.05 \cdot 75}}{e^{-0.05 \cdot 65}} = 0.61 \tag{6.6}$$

Il calcolo del valore attuale attuariale vale

$$\begin{aligned} V(0, Y_{10}) &= C \cdot {}_{10}E_{65} \\ &= C \cdot v^{10} \cdot {}_{10}p_{65} \\ &= 200\,000 \cdot (1.015)^{-10} \cdot 0.61 \\ &= 104\,525.52 \end{aligned}$$

Come abbiamo visto nella sezione 5.1 104 525.52 € *è il premio puro che dovrà poi essere aumentato con il caricamento per spese.*

Se invece vogliamo calcolarci il premio annuo che dovrà pagare l'assicurato in dieci rate anticipate all'inizio di ogni anno, si procede come visto in 5.2.

$$
\begin{aligned}
V(0, \boldsymbol{X}) &= P \sum_{k=0}^{9} {}_k p_{65} \cdot v^k \\
&= P \cdot [1 + 0.951 \cdot (1.015)^{-1} + 0.905 \cdot (1.015)^{-2} + \ldots + 0.638 \cdot (1.015)^{-9}] \\
&= P \cdot (7.598)
\end{aligned}
$$

Dato che $V(0, \boldsymbol{X}) = V(0, Y_{10}) = 104\,525.52$ *possiamo ricavarci il premio annuale*

$$P = \frac{104\,525.52}{7.598} = 13\,756.86 \tag{6.7}$$

Quindi il premio puro annuo sarà 13 756.86 €

6.1.2 Temporanea caso morte

Una polizza **temporanea caso morte** (**TCM**) di durata n anni prevede il pagamento di un capitale assicurato C alla data del decesso dell'assicurato, qualora questo si verifichi entro n anni dalla data di stipula del contratto, non è prevista nessuna prestazione nel caso in cui l'assicurato sopravviva dopo n anni.

La prestazione assicurativa è quindi prevista alla data T_x, può essere scritta nella forma

$$Y_{T_x} = \begin{cases} C & \text{se } T_x \leq n; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{6.8}$$

Rispetto alla polizza CD l'aleatorietà non è data solo dall'erogazione pagamento ma anche quando esso verrà erogato. Infatti il pagamento può potenzialmente essere emesso in n istanti diversi. Per semplicità si supporrà che l'assicurato possa morire solo in tempi interi e che quindi T_x sia un numero intero.

La prestazione contrattuale può essere descritta come un vettore di pagamenti aleatori $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ ai tempi $t = (t_1, t_2, ..., t_n)$ dove, per ogni $k = 1, 2, ..., n$

$$
\begin{aligned}
Y_k &= \begin{cases} C & \text{se } T_x = k; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \\
&= C \cdot \mathbf{1}_{\{T_x = k\}} \\
&= C \cdot \mathbf{1}_{\{k-1 < T_x \leq k\}}
\end{aligned} \tag{6.9}
$$

Si noti che l'ultima uguaglianza ci servirà per descrivere il valore alla stipula ovvero il valore attuale attuariale.

Se prendiamo in considerazione la singola prestazione

$$\begin{aligned} V(0, Y_k) &= C \cdot V(0, \mathbf{1}_{\{k-1<T_x\leq k\}}) \\ &= C \cdot v^k \cdot Prob(k-1 < T_x \leq k) \\ &= C \cdot v^k \cdot {}_{k-1|1}q_x \end{aligned} \tag{6.10}$$

Quindi il valore complessivo delle prestazioni previste dalla polizza sarà

$$\begin{aligned} V(0, \mathbf{Y}) &= \sum_{k=1}^{n} V(0, Y_k) \\ &= C \cdot \sum_{k=1}^{n} v^k \cdot {}_{k-1|1}q_x \end{aligned} \tag{6.11}$$

Viene solitamente utilizzata la notazione

$${}_nA_x = \sum_{k=1}^{n} v^k \cdot {}_{k-1|1}q_x \tag{6.12}$$

per indicare il valore della prestazione *temporanea caso morte* con capitale assicurato unitario. Quindi in definitiva il valore attuale attuariale di una TCM sarà

$$V(0, \mathbf{Y}) = C \cdot {}_nA_x \tag{6.13}$$

Esempio 6.1.3. *Prendiamo in esame un contratto di assicurazione TCM stipulato da una testa di età* 80 *anni. La compagnia si impegna a pagare alla fine dell'anno in cui il contraente morirà, un capitale di* $C = 30\,000$€ *nel caso in cui il contraente muoia entro* 3 *anni. Supponiamo che la valutazione venga effettuata ad un tasso tecnico annuo del* 2%, *e che basandoci sulla funzione di sopravvivenza di Gompertz 2.3.3 con fattori* $\beta = 0.005$ *e* $c = 1.04$ *possiamo ricavarci che:*

- ${}_{0|1}q_{80} = q_{80} = 0.111;$
- ${}_{1|1}q_{80} = 0.102;$
- ${}_{2|1}q_{80} = 0.094.$

Il calcolo del valore attuale attuariale del flusso delle prestazioni vale

$$\begin{aligned} V(0,\, \boldsymbol{Y}) &= C \cdot \sum_{k=1}^{n} v^k \cdot {}_{k-1|1}q_x \\ &= 30\,000 \cdot [(1.02)^{-1} \cdot 0.111 + (1.02)^{-2} \cdot 0.102 + (1.02)^{-3} \cdot 0.094] \\ &= 8\,866.89 \end{aligned}$$

Il premio puro vale 5.1 $8\,866.89$ € *che dovrà poi essere aumentato con il caricamento per spese.*

Se invece vogliamo calcolarci il premio puro annuo che dovrà pagare l'assicurato in tre rate anticipate all'inizio di ogni anno, si procede come segue

$$\begin{aligned} V(0, \boldsymbol{X}) &= P \sum_{k=0}^{n-1} {}_k p_x \cdot v^k \\ &= P \cdot [1 + 0.889 \cdot (1.02)^{-1} + 0.787 \cdot (1.02)^{-2}] \\ &= P \cdot (2.628) \end{aligned}$$

Dato che $V(0, \boldsymbol{X}) = V(0, \boldsymbol{Y}) = 1\,327.26$ *possiamo ricavarci il premio annuale*

$$P = \frac{8\,866.89}{2.628} = 3\,374.11 \tag{6.14}$$

Quindi il premio puro annuo sarà $3\,374.11$ €

6.1.3 Temporanea caso morte con capitale assicurato

Una variante della TCM è la **temporanea caso morte con capitale assicurato variabile**. Nella TCM il capitale che veniva erogato era costante per tutta la durata del contratto, mentre in questo caso per ogni anno k è definito dal contratto uno specifico capitale assicurato C_k e la prestazione prevista al tempo k diventa

$$Y_k = C_k \cdot \mathbf{1}_{\{k-1 < T_x \leq k\}} \tag{6.15}$$

Di conseguenza il valore alla stipula sarà

$$V(0, \mathbf{Y}) = \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot v^k \cdot {}_{k-1|1}q_x \tag{6.16}$$

Solitamente le compagnie assicurative preferiscono questo tipo di polizza, dove il capitale assicurato diminuisce con il tempo, perché verso lo scadere del contratto la probabilità di morte dell'assicurato aumenta, in questo modo la compagnia cerca di andare a ridurre la possibile prestazione.

Un esempio tipico è quello di polizza con capitale assicurato decrescente linearmente, fissato il capitale assicurativo C_1, si ha

$$\begin{aligned} C_2 &= C_1 - \frac{1}{n} \cdot C_1 = \frac{n-1}{n} \cdot C_1 \\ C_3 &= C_2 - \frac{1}{n} \cdot C_1 = \frac{n-2}{n} \cdot C_1 \\ &\dots \\ C_n &= C_{n-1} - \frac{1}{n} \cdot C_1 = \frac{1}{n} \cdot C_1 \end{aligned}$$

Esempio 6.1.4. *Riprendendo l'esempio 6.1.3 con le stesse condizioni ma questa volta il contratto è del tipo TCM con capitale assicurato iniziale* $C_1 = 30\,000$ € *che decresce linearmente*

$$C_k = \frac{n-k+1}{n} \cdot C_1$$

Quindi i rispettivi capitali che verranno pagati in caso di morte del cliente entro il $k-$*esimo anno saranno*

- $C_1 = 30\,000$
- $C_2 = 20\,000$
- $C_3 = 10\,000$

Questa volta il calcolo del valore attuale attuariale del flusso delle prestazioni vale

$$\begin{aligned} V(0, \boldsymbol{Y}) &= \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot v^k \cdot {}_{k-1|1}q_x \\ &= 30\,000 \cdot (1.02)^{-1} \cdot 0.111 + 20\,000 \cdot (1.02)^{-2} \cdot 0.102 + 10\,000 \cdot (1.02)^{-3} \cdot 0.094 \\ &= 6\,113.34 \end{aligned}$$

Si noti che il premio unico, $6\,113.34$ €*, è minore rispetto a quello dell'esempio 6.1.3, questo perché il capitale decresce con il passare degli anni.*

Analogamente anche il premio annuale sarà inferiore rispetto a quello dell'esempio 6.1.3.

$$P = \frac{6\,113.34}{2.628} = 2\,326.30 \tag{6.17}$$

Quindi il premio annuo vale $2\,326.30$ €

6.1.4 Vita intera

Un'altra variante della TCM è la polizza **vita intera**, ovvero il caso limite della polizza TCM, con durata $n = \omega_x$. In questo caso l'aleatorietà riguarda solo il *quando* verrà erogato il pagamento perché sul pagamento di esso abbiamo la certezza. Si possono ripetere tutti i ragionamenti e le considerazioni svolte in 6.1.2.

Come notazione per indicare il valore della prestazione con capitale assicurato unitario si usa:

$$A_x = \sum_{k=1}^{\omega_x} v^k \cdot {}_{k-1|1}q_x \tag{6.18}$$

Osservazione 6.1.5. *Possiamo notare che nel caso in cui* $i = 0$ *risulta che*

$$A_x = \sum_{k=1}^{\omega_x} {}_{k-1|1}q_x = 1 \tag{6.19}$$

Questo significa che prendendo $\omega_x = +\infty$*, la sommatoria* (6.18) *è una serie numerica a termini non negativi. Dato che in generale* $v^k \cdot {}_{k-1|1}q_x \leq {}_{k-1|1}q_x$ *e dato che nel caso in cui* $i = 0$ *si ha* $A_x = 1$*, la serie converge inevitabilmente ad una somma minore o uguale ad uno.*

Infine possiamo scrivere il *valore attuale attuariale* nel seguente modo

$$V(0, \mathbf{Y}) = C \cdot A_x \tag{6.20}$$

6.1.5 Mista

Una polizza **mista** paga il capitale assicurato C sia in caso di vita a scadenza del contratto che alla data del decesso, se esso avviene entro la scadenza del contratto. Può anche essere vista come la stipula di due polizze: una *capitale differito* e una *temporanea caso morte*, con lo stesso capitale assicurato. Unendo i risultati ottenuti in 6.1.1 e 6.1.2 possiamo descrivere le prestazioni della polizza mista come un vettore $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ ai tempi $t = (t_1, t_2, ..., t_n)$, dove per ogni $k = 1, 2, ..., n$ si ha

$$Y_k = \begin{cases} C & \text{se } k-1 < T_x \leq k; \text{ (TCM)} \\ C & \text{se } k = n \text{ e } T_x > n; \text{ (CD)} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{6.21}$$

Ottenendo così

$$V(0, \mathbf{Y}) = C \cdot ({}_nE_x + {}_nA_x) \tag{6.22}$$

Come nel caso della polizza *vita intera*, anche nella polizza *mista* l'aleatorietà del contratto riguarda solo la data di pagamento della prestazione e non l'importo.

Esempio 6.1.6. *Prendiamo in esame un contratto di assicurazione mista a premio unico ricorrente di* $\Pi = 10\,000$ *€/anno stipulato da una testa di 85 anni per 5 anni. Supponiamo che la valutazione venga fatta con un tasso tecnico annuo del* 1.8%*, e basandoci sulla tavola di mortalità 2.4, vogliamo ricavarci i capitali che vengono costruiti anno per anno e il capitale finale.*

Il capitale $k-$*esimo si calcola nel seguente modo*

$$C_k = \frac{\Pi}{{}_{n-k}E_{x+k} + {}_{n-k}A_{x+k}} \tag{6.23}$$

Svolgendo i vari conti ricaviamo che:

$$C_0 = \frac{\Pi}{{}_5E_{85} + {}_5A_{85}} = 10\,768.84$$
$$C_1 = \frac{\Pi}{{}_4E_{86} + {}_4A_{86}} = 10\,631.62$$
$$C_2 = \frac{\Pi}{{}_3E_{87} + {}_3A_{87}} = 10\,490.34$$
$$C_3 = \frac{\Pi}{{}_2E_{88} + {}_2A_{88}} = 10\,341.27$$
$$C_4 = \frac{\Pi}{{}_1E_{89} + {}_1A_{89}} = 10\,180.00$$

Si noti che i capitali sono decrescenti, questo perché vengono capitalizzati per un periodo minore.

Se per esempio il contraente dovesse venire a mancare durante il secondo anno del contratto, il capitale che verrà corrisposto ai suoi successori sarà di

$$\begin{aligned} Y_3 &= \sum_{k=0}^{2} C_k \\ &= 10\,768.84 + 10\,631.62 + 10\,490.34 \\ &= 31\,890.80 \end{aligned}$$

Se invece alla fine del contratto l'assicurato sarà ancora in vita la prestazione dovuta sarà

$$\begin{aligned} Y_5 &= \sum_{k=0}^{4} C_k \\ &= 10\,768.84 + 10\,631.62 + 10\,490.34 + 10\,341.27 + 10\,180.00 \\ &= 52\,412.07 \end{aligned}$$

6.1.6 Polizza mista con capitale assicurato vita e morte differenti

Una variante della polizza mista è la polizza **mista con capitale assicurato vita e morte differenti** dove, come suggerito dal nome, si ha un capitale assicurato caso vita C^v diverso da quello caso morte C^m. Il vettore prestazioni ha come componenti

$$Y_k = \begin{cases} C^m & \text{se } k-1 < T_x \leq k; \\ C^v & \text{se } k = n \text{ e } T_x > n; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{6.24}$$

Naturalmente il valore della polizza sarà

$$V(0, \mathbf{Y}) = C^v \cdot {}_nE_x + C^m \cdot {}_nA_x \tag{6.25}$$

che è possibile vederla in due modi diversi:

$$V(0, \mathbf{Y}) = C^v \cdot ({}_nE_x + {}_nA_x) + (C^m - C^v) \cdot {}_nA_x \tag{6.26}$$

e

$$V(0, \mathbf{Y}) = C^m \cdot ({}_nE_x + {}_nA_x) + (C^v - C^m) \cdot {}_nE_x \tag{6.27}$$

Osservazione 6.1.7. *La (6.26) è significativa nel caso in cui $C^m > C^v$, così che si possa vedere la polizza come divisa in due: una mista con capitale assicurato C^v e l'altra come TCM con capitale assicurato $C^m - C^v$. Analogamente la (6.27) è significativa quando $C^v > C^m$, così che si possa vedere la polizza come divisa in due: una mista con capitale assicurato C^m e l'altra come una CD con capitale assicurato $C^v - C^m$*

6.1.7 Termine fisso

La polizza a **termine fisso** è simile alla polizza mista, la differenza sta nella prestazione caso morte, infatti essa non viene pagata alla data del decesso dell'assicurato ma allo scadere del contratto, quindi all'$n-$esimo anno.

Se riprendiamo la situazione analizzata prima e quindi, un capitale assicurato caso vita C^v diverso da quello caso morte C^m, il contratto prevede un'unica prestazione pagata al tempo n, infatti il vettore dei pagamenti può essere visto come $\mathbf{Y} = (0, 0, ..., 0, Y_n)$ dove Y_n è definita da

$$\begin{aligned} Y_n &= \begin{cases} C^m & \text{se } T_x \leq k; \\ C^v & \text{se } T_x > k. \end{cases} \\ &= C^m \cdot \mathbf{1}_{\{T_x \leq n\}} + C^v \cdot \mathbf{1}_{\{T_x > n\}} \end{aligned} \tag{6.28}$$

In questo caso l'incertezza riguarda solo l'importo, che però verrà erogato comunque allo scadere del contratto.

Dato che

$$\begin{aligned} E_0[\mathbf{1}_{\{T_x \leq n\}}] &= Prob(T_x \leq n) = {}_nq_x, \\ E_0[\mathbf{1}_{\{T_x > n\}}] &= Prob(T_x > n) = {}_np_x, \end{aligned}$$

Il *valore attuale attuariale* è

$$\begin{aligned} V(0, \mathbf{Y}) &= V(0, Y_n) \\ &= C^m \cdot v^n \cdot {}_nq_x + C^v \cdot v^n \cdot {}_np_x \end{aligned} \tag{6.29}$$

6.1.8 Capitalizzazione

Un contratto di **capitalizzazione** non è un vero e proprio contratto assicurativo, infatti vede allo scadere della durata di n anni un' erogazione di un capitale C con certezza. Quindi indipendentemente dalla vita dell'assicurato il pagamento viene erogato e rimane lo stesso.

Il valore alla data di stipula del contratto è

$$V(0, C_n) = C \cdot v^n \tag{6.30}$$

Più che un contratto assicurativo può essere visto come un investimento, dove in un futuro prefissato il beneficiario, o chi per lui, godrà del capitale.

6.2 Prestazioni di rendita vitalizia

Una rendita vitalizia è una prestazione che prevede il pagamento periodico di un importo monetario (rate), in cambio di un premio unico stabilito al momento del contratto, a patto che l'assicurato sia in vita, non è prevista alcuna prestazione in caso di morte dell'assicurato.

Le prestazioni di rendita vitalizia possono essere erogate in rate periodiche, come ad esempio mensili o annuali, e il loro importo può essere costante o variabile in base all'accordo stipulato nel contratto assicurativo. Per semplicità faremo riferimento solo a rate annuali e costanti R.

Una rendita vitalizia può essere temporanea, quando la prestazione si esaurisce dopo un periodo prefissato alla stipula del contratto.

Nel caso di rendite certe, quindi rendite che durano per tutta la durata della vita dell'assicurato, le rendite vitalizie possono essere *anticipate*, quando ogni rata è pagata all'inizio del periodo di riferimento, o *posticipata*, pagata quindi alla fine del periodo di riferimento.

6.2.1 Rendita vitalizia immediata

Una rendita vitalizia si dice **immediata** se inizia al momento della firma del contratto. Indicando con $\mathbf{Y}$ il vettore dei pagamenti e con Y_k il pagamento al tempo k, si possono identificare tre tipi di rendita vitalizia:

Rendita vitalizia immediata posticipata

Per ogni $k > 0$ vale

$$Y_k = R \cdot \mathbf{1}_{\{T_x > k\}} \tag{6.31}$$

dove con R indichiamo l'importo della rata.

Dato che

$$E_0[\mathbf{1}_{\{T_x > k\}}] = Prob(T_x > k) = {}_kp_x$$

Il valore alla stipula sarà quindi

$$\begin{aligned} V(0,\mathbf{Y}) &= \sum_{k=1}^{\omega_x} V(0,Y_k) \\ &= R \cdot \sum_{k=1}^{\omega_x} v^k \cdot {}_kp_x \end{aligned} \tag{6.32}$$

Solitamente si usa la notazione

$$a_x = \sum_{k=1}^{\omega_x} v^k \cdot {}_kp_x \tag{6.33}$$

Il valore attuale attuariale diventa

$$V(0,\mathbf{Y}) = R \cdot a_x \tag{6.34}$$

Rendita vitalizia immediata anticipata

In questo caso le rate vengono erogate all'inizio del periodo. Il valore alla stipula è simile alla (6.34) ma bisogna aggiungere la prestazione certa che quella che viene pagata alla stipula, ovvero $Y_0 = R$. Il valore attuale attuariale diventa quindi

$$\begin{aligned} V(0,\mathbf{Y}) &= \sum_{k=0}^{\omega_x} V(0,Y_k) \\ &= R \cdot \sum_{k=0}^{\omega_x} v^k \cdot {}_kp_x \end{aligned} \tag{6.35}$$

Viene solitamente utilizzata la notazione

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x &= \sum_{k=0}^{\omega_x} v^k \cdot {}_kp_x \\ &= 1 + a_x \end{aligned} \tag{6.36}$$

Otteniamo così

$$V(0,\mathbf{Y}) = R \cdot \ddot{a}_x \tag{6.37}$$

Rendite temporanee

Se n è la durata della rendita vitalizia immediata, nel caso posticipato si ha

$$Y_k = \begin{cases} R \cdot \mathbf{1}_{\{T_x > k\}} & \text{se } 0 < k \leq n; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{6.38}$$

Ottenendo così

$$V(0, \mathbf{Y}) = R \cdot {}_n a_x \tag{6.39}$$

dove

$$ {}_n a_x = \sum_{k=1}^{n} v^k \cdot {}_k p_x \tag{6.40}$$

Mentre nel caso anticipato, analogo al precedente, si ha che

$$Y_k = \begin{cases} R \cdot \mathbf{1}_{\{T_x > k\}} & \text{se } 0 \leq k < n; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{6.41}$$

$$V(0, \mathbf{Y}) = R \cdot {}_n \ddot{a}_x \tag{6.42}$$

$$ {}_n \ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot {}_k p_x = 1 + {}_n a_x - v^n {}_n p_x \tag{6.43}$$

Esempio 6.2.1. *Prendiamo in esempio un individuo di 60 anni che ha accumulato un capitale di* 500 000€ *e decide di firmare un contratto di rendita vitalizia anticipata. Ponendo l'età limite* $\omega = 110$*, vogliamo calcolare quale sarà la rata annuale che si impegna a pagare l'azienda assicurativa nei suoi confronti. Supponiamo che la valutazione venga effettuata ad un tasso tecnico annuo del* 1%*, e basata sulla funzione di sopravvivenza di Makeham 2.3.4 con fattore* $\alpha = 0.01$*,* $\beta = 0.01$ *e* $c = 1.01$*.*

Il premio unico vale $P = 500\,000$*,*

$$\begin{aligned} {}_{50}\ddot{a}_{60} &= \sum_{k=0}^{49} v^k \cdot {}_k p_{60} \\ &= 21.756 \end{aligned}$$

la rata si ottiene nel seguente modo:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\Pi}{{}_{40}\ddot{a}_{60}} \\ &= \frac{500\,000}{21.756} \\ &= 22\,981.66 \end{aligned}$$

Quindi l'assicurato all'inizio di ogni anno per per il resto della sua vita riceverà una rata del valore di 22 981.66€*.*

6.2.2 Rendite vitalizie differite

Se il contratto prevede che la rendita vitalizia sia erogata dopo un certo periodo m, si ha una prestazione di rendita vitalizia differita. Come nel caso della rendita vitalizia immediata, possiamo identificare diverse tipologie, può essere temporanea, di durata ω_x , anticipata o posticipata.

Il contratto viene visto in due fasi: il *periodo di differimento*, durante il quale non vengono erogate prestazioni, e il *periodo di pagamento della rendita*.

Ovviamente, come nel caso precedente, la prestazione verrà interrotta nel caso in cui il contraente venga a mancare prima della scadenza della rendita.

Rendita vitalizia differita posticipata

Per ogni $k > 0$

$$Y_k = \begin{cases} R \cdot \mathbf{1}_{\{T_x > k\}} & \text{se } k > m; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{6.44}$$

Ottenendo così

$$\begin{aligned} V(0, \mathbf{Y}) &= R \cdot \sum_{k=m+1}^{\omega_x} v^k \cdot {}_k p_x \\ &= R \cdot {}_{m|}a_x \end{aligned} \tag{6.45}$$

Dove

$${}_{m|}a_x = \sum_{k=m+1}^{\omega_x} v^k \cdot {}_k p_x \tag{6.46}$$

Rendita vitalizia differita anticipata

Per ogni $k > 0$

$$Y_k = \begin{cases} R \cdot \mathbf{1}_{\{T_x > k\}} & \text{se } k \geq m; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{6.47}$$

Ottenendo così

$$\begin{aligned} V(0, \mathbf{Y}) &= R \cdot \sum_{k=m}^{\omega_x} v^k \cdot {}_k p_x \\ &= R \cdot {}_{m|}\ddot{a}_x \end{aligned} \tag{6.48}$$

Dove

$${}_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{\omega_x} v^k \cdot {}_k p_x = v^m \cdot {}_m p_x + {}_{m|}a_x \tag{6.49}$$

Rendita vitalizia differita temporanea

Se la rendita ad un certo punto si esaurisce e il contratto durata n periodi, nel caso posticipato si ha: per ogni $k > 0$

$$Y_k = \begin{cases} R \cdot \mathbf{1}_{\{T_x > k\}} & \text{se } m < k \leq n; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{6.50}$$

Ottenendo così

$$\begin{aligned} V(0,\mathbf{Y}) &= R \cdot \sum_{k=m+1}^{m+n} v^k \cdot {}_kp_x \\ &= R \cdot {}_{m|n}a_x \end{aligned} \tag{6.51}$$

Dove

$${}_{m|n}a_x = \sum_{k=m+1}^{m+n} v^k \cdot {}_kp_x \tag{6.52}$$

Analogamente nel caso anticipato si ha, per ogni $k > 0$

$$Y_k = \begin{cases} R \cdot \mathbf{1}_{\{T_x > k\}} & \text{se } m \leq k < n; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{6.53}$$

Ottenendo così

$$\begin{aligned} V(0,\mathbf{Y}) &= R \cdot \sum_{k=m}^{m+n-1} v^k \cdot {}_kp_x \\ &= R \cdot {}_{m|n}\ddot{a}_x \end{aligned} \tag{6.54}$$

Dove

$$\begin{aligned} {}_{m|n}\ddot{a}_x &= \sum_{k=m}^{m+n-1} v^k \cdot {}_kp_x \\ &= v^m \cdot {}_mp_x + {}_{m|n}a_x - v^{m+n} \cdot {}_{m+n}p_x \end{aligned} \tag{6.55}$$

Esempio 6.2.2. *Riprendendo l'esempio 6.2.1 andiamo questa volta a vedere il caso in cui la rendita non è immediata ma differita di 10 anni.*

Questo significa che la persona che firma il contratto oggi di 60 anni inizierà a ricevere la rendita all'età di 70 anni per il resto della sua vita.

Utilizzando anche questa volta un premio unico $P = 500\,000$ e la funzione di sopravvivenza di Makeham 2.3.4 con fattore $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.01$ e $c = 1.01$.

Possiamo facilmente calcolarci

$$\begin{aligned} {}_{10|50}\ddot{a}_{60} &= \sum_{k=10}^{59} v^k \cdot {}_kp_{60} \\ &= 14.216 \end{aligned}$$

Ottenendo una rata di

$$\begin{aligned} R &= \frac{\Pi}{{}_{10|50}\ddot{a}_{60}} \\ &= \frac{500\,000}{14.216} \\ &= 35\,170.43 \end{aligned}$$

Quindi l'assicurato all'inizio di ogni anno, per il resto della sua vita, a partire dal suo 70-esimo anno riceverà una rata del valore di $35\,170.43$€.

Si noti che la rata in questo caso è maggiore rispetto all'esempio 6.2.1, perché il premio Π*, che viene pagato alla stipula del contratto, viene capitalizzato per 10 anni prima che inizino i pagamenti e inoltre la probabilità di morte aumenta con l'aumentare degli anni.*

Bibliografia

[1] P. Negrini, *Dispense ad uso didattico.*

[2] A. Palestrini, *Laboratorio di Economia e Finanza delle Imprese di Assicurazioni*, 2018-2019.

[3] C. Pacati, *Appunti delle lezioni di istituzioni di matematica attuariale per le assicurazioni sulla vita*, 2005-2006.

[4] M. Steffensen, *Seven Introductory Lectures on Actuarial Mathematics*, 2006.

[5] E. Pitacco, *Elementi di matematica delle assicurazioni*, Luglio Editore, 2022.