

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

**SISTEMI ACCOPPIATI
DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI
SU NETWORKS**

Presentata da:

Maria Narciso

Relatore:

**Chiar.ma Prof.ssa
Maria Carla Tesi**

Sessione unica

2021/2022

*A nonna Claudia,
sempre un passo avanti a tutti*

Indice

Introduzione	2
1 Nozioni preliminari	5
1.1 Prime definizioni sui grafi	5
1.2 Alcune proprietà dei grafi	7
1.3 Punti di equilibrio	11
1.4 Classi particolari di funzioni	13
1.5 Funzioni di Lyapunov	14
2 Sistemi accoppiati sui network	18
2.1 Definizioni iniziali	18
2.2 Esistenza di una funzione di Lyapunov globale sui sistemi accoppiati . . .	20
2.3 Un primo esempio: il modello di Lotka-Volterra	25
2.4 Un secondo esempio: oscillatori accoppiati sui network	27
3 Applicazione: il modello SIR	31
3.1 Introduzione	31
3.2 Caso unidimensionale	32
3.3 Sistemi accoppiati	37
4 Applicazione: i sistemi accoppiati impulsivi	42
4.1 Introduzione	42
4.2 Analisi della stabilità	43
4.3 Un esempio pratico	53
Conclusioni	58

Introduzione

I sistemi accoppiati di equazioni differenziali sui network sono usati per modellizzare una grande varietà di sistemi dinamici all'interno di diverse aree di studio come la medicina, la fisica e la biologia. Grazie allo studio di questo tipo di equazioni differenziali si è in grado di modellizzare con estrema precisione le reti neurali, gli oscillatori sui reticoli, gli ecosistemi complessi e anche la diffusione di malattie infettive nelle popolazioni eterogenee.

A livello matematico un network (ossia una rete) può essere definito come un grafo diretto (o digrafo) cioè una struttura che consiste in vertici connessi tra loro tramite archi diretti. Le dinamiche locali di ogni vertice, cioè quelle a esso interne, sono date da un sistema di equazioni differenziali che chiamiamo sistema del vertice. Gli archi diretti invece indicano le connessioni e le interazioni tra i vari vertici.

All'interno di ogni modello i vertici possono rappresentare un singolo neurone, un oscillatore, una comunità ecologica o un gruppo omogeneo di individui di una popolazione eterogenea che è soggetto ospitante di una malattia infettiva. Le interazioni tra i vertici invece possono essere della forma di connessioni sinaptiche tra i neuroni, connessioni fisiche tra gli oscillatori o ancora infezioni tra i diversi gruppi omogenei di popolazione.

Il sistema che risulterà dall'accoppiamento dei vari sistemi di vertici sarà proprio un sistema accoppiato di equazioni differenziali non lineari su larga scala. Un approccio generale allo studio di sistemi accoppiati consiste nel determinare gli andamenti collettivi basati sulle dinamiche all'interno dei singoli vertici e sugli accoppiamenti tra essi.

Dal punto di vista della stabilità e del controllo di sistemi dinamici complessi è rilevante indagare il problema della stabilità globale: assumiamo che, quando isolato, il sistema di ogni vertice abbia un punto di equilibrio globalmente stabile; in questo elaborato, ci poniamo il problema di determinare in quale caso anche il sistema accoppiato abbia un punto di equilibrio globalmente stabile quando i vertici sono connessi secondo un grafo diretto.

Per fare ciò utilizziamo il metodo della funzione di Lyapunov, ossia assumiamo che, quando ogni vertice è isolato, il sistema di tale vertice abbia una funzione di Lyapunov V_i definita globalmente per il vertice. Vogliamo stabilire se esiste una funzione di Lyapunov V definita globalmente sul sistema accoppiato.

A tal scopo dopo aver fornito nel Capitolo 1 della tesi alcune nozioni preliminari, si svilupperà nel Capitolo 2 un approccio generale alla costruzione di funzioni di Lyapunov globali per il sistema accoppiato che siano della forma

$$V = \sum_{i=1}^n c_i V_i$$

con $c_i \geq 0$ costanti opportune che saranno ricavate in base alle proprietà delle V_i e alla struttura del digrafo a cui si fa riferimento.

Nei capitoli 3 e 4 infine si forniranno due esempi di modelli nei quali tutta la teoria sviluppata troverà due applicazioni molto semplici: il modello SIR per la diffusione di malattie infettive e i sistemi accoppiati impulsivi.

Capitolo 1

Nozioni preliminari

1.1 Prime definizioni sui grafi

I sistemi accoppiati sui network si basano su equazioni differenziali che descrivono ciò che accade all'interno degli elementi di un grafo. Sarà quindi necessario introdurne alcune tipologie e determinarne alcune proprietà al fine della comprensione dei risultati.

Definizione 1.1.1. Un *grafo* è formato da una coppia $G = (V, E)$ dove V è un insieme di vertici ed E è l'insieme degli archi che hanno come estremi uno o più di tali vertici. Un *sottografo* $H = (U, F) \subseteq G$ è un grafo tale che $U \subseteq V$ e $F \subseteq E$.

Definizione 1.1.2. Un *grafo diretto* (o *digrafo*) $G = (V, E)$ è un grafo in cui ogni arco (i, j) è dotato di vertice iniziale che chiamiamo i e vertice finale che chiamiamo j . In un grafo diretto quindi le coppie sono ordinate e i vertici sono distinti. Dal punto di vista grafico infatti ogni arco viene disegnato con una freccia che parte dal vertice iniziale e punta verso il vertice finale.

Un sottografo H di G è detto *spanning* se H e G hanno lo stesso insieme di vertici.

Un digrafo si dice *pesato* se ad ogni arco da i a j è assegnato un *peso* $a_{ij} \geq 0$.

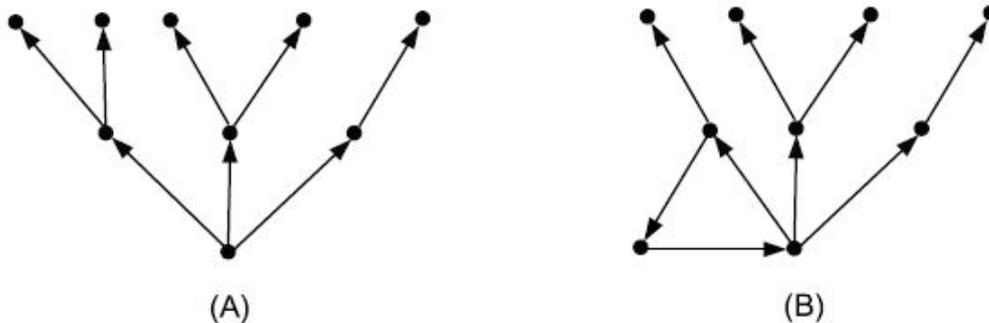


Figura 1.1: Albero radicato (A) e grafo unicyclico (B)

Osservazione 1.1.3. Per convenzione $a_{ij} > 0$ se e solo se esiste un arco che va dal vertice i al vertice j in G , altrimenti $a_{ij} = 0$. Inoltre si ha che il peso $w(G)$ di un grafo G è costituito dal prodotto dei pesi di tutti gli archi di G .

Definizione 1.1.4. Un *cammino diretto* P in G è un sottografo con vertici distinti $\{i_1, \dots, i_m\}$ tali che il suo insieme di archi è $\{(i_k, i_{k+1}), k = 1, \dots, m - 1\}$. Se $i_1 = i_m$ diciamo che P è un *ciclo diretto*.

Definizione 1.1.5. Un digrafo si dice *connesso* se per ogni coppia di vertici $v, w \in V$ esiste un arco che congiunge v e w . Un digrafo si dice *fortemente connesso* se prendendo due vertici distinti esiste un cammino diretto da uno all'altro.

Definizione 1.1.6. Un sottografo connesso T è un *albero* se non contiene cicli. Un albero T si dice *radicato* al vertice i che chiamiamo *radice* se i non è un vertice finale di un arco e se ciascuno dei vertici rimanenti è un vertice finale di esattamente un arco.

Definizione 1.1.7. Un sottografo Q si dice *uniciclico* se possiede un solo ciclo. In particolare noi intendiamo come grafi unicyclici quelli che sono costituiti dall'unione disgiunta di alberi radicati le cui radici formano un ciclo diretto.

1.2 Alcune proprietà dei grafi

Definizione 1.2.1. Una matrice A si dice *riducibile* se esiste una matrice P tale che la matrice PAP^T è triangolare inferiore a blocchi, cioè

$$PAP^T = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix}$$

altrimenti A si dice *irriducibile*.

Osservazione 1.2.2. Un digrafo pesato si può denotare anche con (G, A) dove A è la matrice dei pesi in cui ogni elemento a_{ij} è costituito dal peso dell'arco che parte da i e termina in j . Inoltre si può dimostrare che G è fortemente connesso se e solo se la matrice dei pesi è irriducibile.

Definizione 1.2.3. La matrice *Laplaciana* è definita come segue:

$$L = \begin{pmatrix} \sum_{k \neq 1} a_{1k} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \sum_{k \neq 2} a_{2k} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \sum_{k \neq n} a_{nk} \end{pmatrix}$$

Definizione 1.2.4. Chiamiamo $\lambda_{max}(A)$ l'autovalore massimo relativo alla matrice A .

Definizione 1.2.5. Un grafo si dice *bilanciato* se $w(C) = w(-C)$ per ogni ciclo C . Notiamo che $-C$ è l'inverso di C , ossia è il grafo ottenuto invertendo la direzione di tutti gli archi di C .

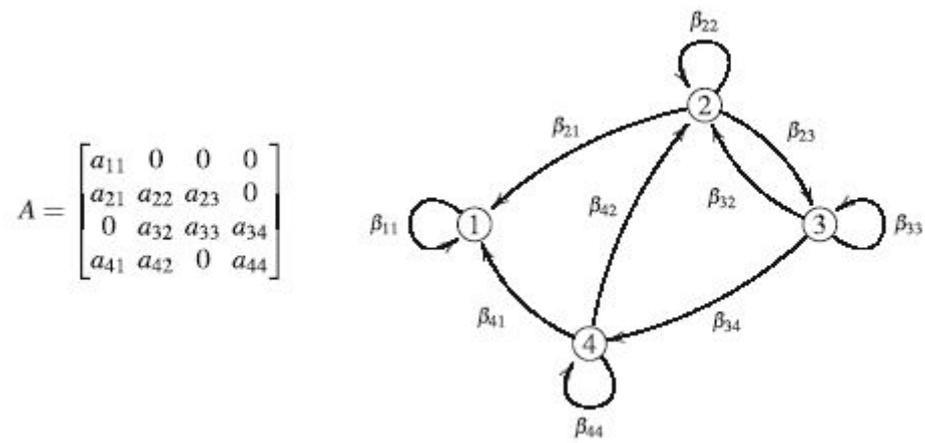


Figura 1.2: Matrice riducibile

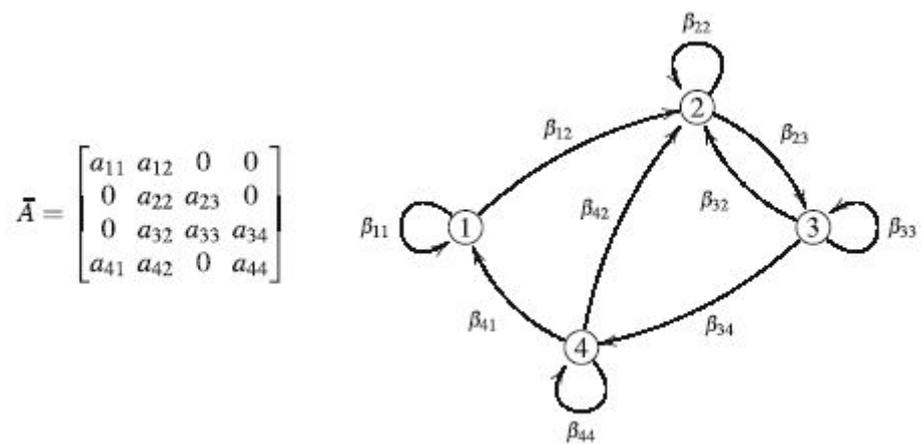


Figura 1.3: Matrice irriducibile

Proposizione 1.2.6. *Sia $n \geq 2$ e siano c_i i cofattori dell' i -esimo elemento della diagonale di L .*

Allora si ha che

$$c_i = \sum_{T \in \Pi_i} w(T) \quad \text{per } i = 1, \dots, n \quad (1.1)$$

dove Π_i è l'insieme di tutti gli spanning-tree T di (G, A) radicati al vertice i e $w(T)$ è il peso di T .

In particolare se (G, A) è fortemente connesso, allora $c_i > 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Il prossimo teorema è particolarmente importante e verrà citato spesso nel corso di questo elaborato, in quanto permette di caratterizzare le funzioni di Lyapunov nel caso di sistemi accoppiati.

Teorema 1.2.7. *Sia $n \geq 2$ e siano c_i come in (1.1) per ogni $i = 1, \dots, n$.*

Allora vale la seguente identità:

$$\sum_{i,j=1}^n c_i a_{ij} F_{ij}(x) = \sum_{q \in Q} w(q) \sum_{(r,s) \in E(C_q)} F_{rs}(x) \quad (1.2)$$

dove $\{F_{ij}\}_{i,j=1}^n$ è una famiglia di funzioni arbitrarie, Q è l'insieme di tutti i grafi unicyclici spanning di (G, A) , $w(q)$ è il peso di q e C_q denota il ciclo diretto di q .

Dimostrazione. Sia T uno spanning-tree con radice nel vertice i . Allora

$$w(T)a_{ij} = w(q)$$

dove q è il grafo unicyclico ottenuto aggiungendo un arco (j, i) che congiunge il vertice j e la radice i . Allora

$$w(T)a_{ij}F_{ij}(x) = w(q)F_{ij}(x) \quad \text{con } (j, i) \in E(C_q)$$

Iterando questo procedimento in tutti i modi su tutti gli alberi radicati del grafo otteniamo tutti i grafi unicyclici contenuti in G .

Osserviamo inoltre che ogni grafo unicyclico q è generato tante volte quanti sono gli archi nel suo ciclo C_q e da qui deriva la sommatoria su q . Se nel lato sinistro dell'uguaglianza riorganizziamo la doppia sommatoria come una somma unica su tutti i grafi unicyclici in G e sapendo che vale (1.1), allora possiamo concludere.

□

Teorema 1.2.8. *Sia $n \geq 2$ e siano c_i come in (1.1).*

Allora vale la seguente identità:

$$\sum_{i,j=1}^n c_i a_{ij} G_i(x) = \sum_{i,j=1}^n c_i a_{ij} G_j(x) \quad (1.3)$$

con G_i e G_j funzioni arbitrarie appartenenti alla famiglia $\{G_i\}_{i=1}^n$.

Dimostrazione. Basta applicare il teorema precedente e notare che entrambe le espressioni sono uguali a

$$\sum_{q \in Q} w(q) \sum_{k \in V(C_q)} G_k(x)$$

dove $V(C_q)$ è l'insieme dei vertici di C_q .

□

1.3 Punti di equilibrio

Definizione 1.3.1. Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = y \end{cases}$$

definito su Ω insieme aperto di \mathbb{R}^n , si dice che un punto $x_0 \in \Omega$ è un *punto di equilibrio* per il sistema se $f(x_0) = 0$. Denotiamo l'insieme dei punti di equilibrio come

$$C_f = \left\{ a \in \Omega \text{ tale che } f(a) = 0 \right\}$$

Definizione 1.3.2. Si definisce *curva integrale del sistema* l'applicazione $t \rightarrow \phi^t(y)$ con ϕ^t la soluzione massimale (cioè che non ammette prolungamenti propri) di $\dot{x} = f(x)$ con dato iniziale $x(0) = y$.

Definizione 1.3.3. Poniamo $D_r(a)$ come il disco aperto centrato in a di raggio $r > 0$ e sia $a \in C_f$, si dice che a è un *punto di equilibrio stabile* se

1. Esiste un $r > 0$ tale che $D_r(a) \subseteq \Omega$.
2. Per ogni $r' > 0$ tale che $0 < r' < r$ esiste un $r'' > 0$ tale che $0 < r'' < r'$ e per ogni $y \in D_{r''}(a)$, posto $\tau_+(y)$ come l'estremo superiore dell'intervallo in cui è definita la funzione ϕ^t , si ha che $\tau_+(y) = +\infty$, mentre $\phi^t(y) \in D_{r'}(a)$ per ogni $t \geq 0$.

Osservazione 1.3.4. Un punto $a \in C_f$ si dice *instabile* se non è stabile.

Definizione 1.3.5. Un punto $a \in C_f$ si dice *asintoticamente stabile* se è stabile e se inoltre per ogni $y \in D_r(a)$ si ha $\phi^t(y) \rightarrow a$.

Un punto $a \in C_f$ si dice *globalmente asintoticamente stabile* se è asintoticamente stabile e inoltre si ha che

$$\|\phi^t(y) - a\| \rightarrow 0$$

per ogni $y \in \Omega$.

Definizione 1.3.6. Un punto di equilibrio si dice *uniformemente stabile* se nella definizione di punto di equilibrio stabile si ha che la scelta di r' non dipende dal tempo.

Definizione 1.3.7. Un punto di equilibrio si dice *esponenzialmente stabile* se esistono due costanti $\lambda, k > 0$ tali che

$$\|\phi^t(y) - a\| \leq \|y - a\| e^{-\lambda(t-t_0)}$$

con t_0 dato iniziale (in questo caso $t_0 = 0$) e $y \in D_{r'}(a)$.

Definizione 1.3.8. Dato il sistema

$$\dot{x} = f(x)$$

un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto *insieme invariante* se per ogni $x_0 \in S$ l'applicazione $t \rightarrow \phi^t(x_0)$ è contenuta in S per ogni $t \in \mathbb{R}$. S è detto invece *insieme positivamente invariante* se $\phi^t(x_0)$ è contenuta in S per ogni $t \geq 0$.

Definizione 1.3.9. Si definisce l'insieme ω -limite del punto x_0 l'insieme

$$\omega(x_0) = \left\{ x \in S \text{ per cui esiste una successione } t_n \rightarrow \infty \text{ tale che } \phi^{t_n} \rightarrow x_0 \text{ per } n \rightarrow \infty \right\}$$

Osservazione 1.3.10. Gli insiemi ω -limite sono insiemi invarianti per definizione.

1.4 Classi particolari di funzioni

Le seguenti definizioni ci occorreranno nel corso del capitolo 4:

Definizione 1.4.1. Una funzione α è detta di classe \mathcal{K} se

1. $\alpha \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$
2. $\alpha(0) = 0$
3. $\alpha(x)$ è strettamente crescente in x .

Definizione 1.4.2. Una funzione β è detta di classe $\mathcal{PC}^+\mathcal{K}$ se

1. $\beta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ è una funzione continua a tratti con discontinuità del primo tipo solo a $t = t_k$ con $k = 1, 2, \dots$
2. $\beta(0) = 0$
3. $\beta(x)$ è strettamente crescente in x per ogni intervallo $(t_{k-1}, t_k]$.

1.5 Funzioni di Lyapunov

Definizione 1.5.1. Dato il sistema

$$\dot{x} = f(x)$$

dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un insieme aperto e $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e dato un punto di equilibrio $a \in C_f$, sia $U \subseteq \Omega$ un insieme aperto tale che $a \in U$. Si dice che una funzione $g \in C^1(U, \mathbb{R})$ è una *funzione di Lyapunov* per f relativamente al punto a se

1. $g(a) = 0$ e $g(x) > 0$ per ogni $x \in U \setminus \{a\}$
2. $\langle \nabla g(x), f(x) \rangle \leq 0$ per ogni $x \in U$.

Definizione 1.5.2. Sia g una funzione di Lyapunov come sopra. Essa è detta *funzione di Lyapunov forte* se in particolare

$$\langle \nabla g(x), f(x) \rangle < 0 \quad \text{per ogni } x \in U$$

Ora analizziamo un teorema che ci permette di determinare la stabilità dei punti di equilibrio grazie alla funzione di Lyapunov.

Teorema 1.5.3 (Lyapunov). *Dato il sistema*

$$\dot{x} = f(x)$$

sia $a \in C_f$ con f come nella Definizione (1.5.1). Se esiste g funzione di Lyapunov per f relativamente ad a , allora a è un punto di equilibrio stabile.

Se la funzione g è di Lyapunov forte, allora a è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema.

Dimostrazione. Sia $a \in U \subseteq \Omega$ e sia $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ funzione di Lyapunov per f . Scegliamo $r' > 0$ tale che $\overline{D_{r'}(a)} \subseteq U$ e definiamo $0 < m := \min_{\partial D_r} g$. Sia ora $0 < r'' < r'$ tale che $g(x) < m$ per ogni $x \in \overline{D_{r''}(a)}$.

Dobbiamo provare che, dato $y \in D_{r''}(a)$, si ha che

1. $\tau_+ = +\infty$
2. La soluzione $\phi^t(y) \in D_{r'}(a)$ per ogni $t \geq 0$.

Per dimostrare queste due affermazioni definiamo l'insieme

$$E := \left\{ t > 0; \phi^s(y) \in D_{r'}(a) \text{ per ogni } s \in [0, t] \right\}$$

e poniamo $T := \sup E$. L'obiettivo è provare che $T = +\infty$.

Consideriamo l'applicazione $t \mapsto g(\phi^t(y))$ e osserviamo che, per definizione di g , si ha che

$$\frac{d}{dt}g(\phi^t(y)) = \langle \nabla g(y), f(y) \rangle < 0$$

Dunque g è decrescente, quindi

$$g(\phi^t(y)) \leq g(\phi^0(y)) = g(y) < m \quad \text{per ogni } t \in [0, T)$$

A questo punto supponiamo per assurdo che $T < +\infty$, allora esiste una successione $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ tale che $0 < t_n \nearrow T$. Inoltre $\phi^{t_n} \in D_{r'}(a)$ e dunque, a meno di sottosuccessioni, si ha $\phi^{t_n}(y) \rightarrow z$ con $z \in \overline{D_{r'}(a)}$.

Ora osserviamo che, poiché $T = \sup E$, allora necessariamente $z \in \partial D_{r'}(a)$. Quindi per continuità $g(\phi^{t_n}(y)) \rightarrow g(z) \geq m$ e questo è un assurdo in quanto avevamo supposto $g(z) < m$. Dunque $T = +\infty$.

Ora dimostriamo la seconda parte dell'enunciato e poniamo g funzione di Lyapunov forte. Per il ragionamento già fatto in precedenza, osserviamo che l'applicazione $t \mapsto g(\phi^t(y))$ è strettamente decrescente.

Dobbiamo provare che $\phi^t(y) \rightarrow a$ per ogni $y \in D_{r''}(a)$. Basta quindi mostrare che $g(\phi^t(y)) \rightarrow 0$, in quanto sappiamo già che per ogni successione $t_n \in E$ tale che $\phi^{t_n}(y) \rightarrow z$ con $z \in \partial D_{r''}(a)$ si ha che $g(\phi^{t_n}(y)) \rightarrow g(z)$. Quindi se $g(\phi^t(y)) \rightarrow 0$, allora $g(z) = 0$ e di conseguenza $z = a$.

Supponiamo per assurdo che $g(\phi^t(y)) \rightarrow \gamma > 0$. Allora esiste una successione $t_\gamma > 0$ tale che per ogni $t \geq t_\gamma$ si ha che $\frac{\gamma}{2} \leq g(\phi^t(y)) \leq \frac{3}{2}\gamma$, quindi

$$\phi^t(y) \in g^{-1}\left(\left[\frac{\gamma}{2}, \frac{3}{2}\gamma\right] \cap \overline{D_{r''}(a)}\right)$$

che è un compatto che non contiene a , quindi esiste una costante $c > 0$ tale che

$$\langle \nabla g(\phi^t(y)), f(\phi^t(y)) \rangle \leq -c$$

per ogni $t \geq t_\gamma$, da cui

$$\begin{aligned} 0 < g(\phi^t(y)) &= g(\phi^{t_\gamma}(y)) + \int_{t_\gamma}^t \frac{d}{ds} g(\phi^s(y)) ds = g(\phi^{t_\gamma}(y)) + \\ &+ \int_{t_\gamma}^t \langle \nabla g(\phi^s(y)), f(\phi^s(y)) \rangle ds \leq g(\phi^{t_\gamma}(y)) - c(t - t_\gamma) < 0 \end{aligned}$$

e questa è una contraddizione, da cui necessariamente $g(\phi^t(y)) \rightarrow 0$. Dunque abbiamo concluso.

□

Teorema 1.5.4. *Dato il sistema*

$$\dot{x} = f(x)$$

con f come nella Definizione (1.5.1), sia $a \in C_f$ e sia $J_f(a)$ la matrice Jacobiana di f nel punto a . Allora valgono le seguenti affermazioni:

1. *Se a è un punto di equilibrio stabile per il sistema, allora*

$$p_{J_f(a)}^{-1}(0) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\lambda \leq 0\}$$

2. *Se*

$$p_{J_f(a)}^{-1}(0) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\lambda < 0\}$$

allora a è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema.

3. *Se esiste $\lambda \in p_{J_f(a)}^{-1}(0)$ tale che $\operatorname{Re}\lambda > 0$, allora a è un punto di equilibrio instabile per il sistema.*

Entrambi questi teoremi saranno particolarmente utili quando si dovrà studiare la stabilità dei punti di equilibrio dei sistemi descritti nei capitoli 3 e 4, nonché nell'esempio presentato nel capitolo 2.

Capitolo 2

Sistemi accoppiati sui network

2.1 Definizioni iniziali

Data una rete rappresentata dal digrafo G con n vertici (consideriamo sempre $n \geq 2$), un sistema accoppiato può essere costruito su G assegnando a ogni vertice le proprie dinamiche interne e poi accoppiandole sulla base degli archi diretti presenti su G .

Definizione 2.1.1. Assumiamo che ogni dinamica su un vertice sia descritta tramite il sistema di equazioni differenziali

$$u'_i = f_i(t, u_i) \tag{2.1}$$

dove $u_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ e $f_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m_i} \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}$.

Sia inoltre $g_{ij} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m_i} \times \mathbb{R}^{m_j} \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}$ la funzione che rappresenta l'influenza del vertice j sul vertice i tale che $g_{ij} = 0$ se non esiste un arco da j a i in G . Allora il sistema

accoppiato ottenuto è dato da

$$u_i' = f_i(t, u_i) + \sum_{j=1}^n g_{ij}(t, u_i, u_j) \quad \text{per } i = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Osservazione 2.1.2. Per tutto l'elaborato stiamo considerando f_i e g_{ij} tali che i problemi di tipo (2.1) e (2.2) con dato iniziale abbiano sempre un'unica soluzione.

Definizione 2.1.3. Supponiamo che ogni sistema di equazioni (2.1) per un dato vertice abbia un punto di equilibrio globalmente stabile e possieda una funzione di Lyapunov globale. Sia $D_i \subseteq \mathbb{R}^{m_i}$ un insieme aperto. Per una funzione lipschitziana $V_i : \mathbb{R} \times D_i \rightarrow \mathbb{R}$ chiamiamo *derivata di Lyapunov* rispetto al sistema (2.2) la funzione

$$\dot{V}_i^*(t, u_i) := \frac{\partial V_i(t, u_i)}{\partial t} + \frac{\partial V_i(t, u_i)}{\partial u_i} \left(f_i(t, u_i) + \sum_{j=1}^n g_{ij}(t, u_i, u_j) \right)$$

Definizione 2.1.4. Sia $D = D_1 \times \dots \times D_n \subseteq \mathbb{R}^m$ con $m = m_1 + \dots + m_n$ e sia $u = (u_1, \dots, u_n)$. Allo stesso modo della definizione precedente prendendo una funzione lipschitziana $V : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}$ definiamo

$$\dot{V}^*(t, u) := \frac{\partial V(t, u)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(t, u)}{\partial u_i} \left(f_i(t, u_i) + \sum_{j=1}^n g_{ij}(t, u_i, u_j) \right) \quad (2.3)$$

Osservazione 2.1.5. Nel caso in cui V non dipenda dal tempo, poiché il gradiente di V è definito come $\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial u_n} \right)$, quella che abbiamo chiamato derivata di Lyapunov si può scrivere come

$$\dot{V}^*(u) = \left\langle \nabla V(u), \left(f_i(t, u_i) + \sum_{j=1}^n g_{ij}(t, u_i, u_j) \right) \right\rangle$$

Osservazione 2.1.6. V_i è una funzione di Lyapunov per il sistema (2.2) se $\dot{V}_i \leq 0$.

In questo elaborato studieremo funzioni del tipo

$$V(t, u) = \sum_{i=1}^n c_i V_i(t, u_i) \quad (2.4)$$

con V_i funzioni di Lyapunov per ciascun sistema (2.1) e c_i come in (1.1) e mostreremo che V è una funzione di Lyapunov globale per il sistema accoppiato (2.2).

2.2 Esistenza di una funzione di Lyapunov globale sui sistemi accoppiati

Osservazione 2.2.1. Dato il sistema $\dot{x} = f(x)$, sia S un insieme aperto di \mathbb{R}^n e sia $x(t)$ una soluzione del sistema tutta contenuta in S . Se V è una funzione di Lyapunov per il sistema, allora

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \langle \nabla V(x(t)), x'(t) \rangle = \langle \nabla V(x(t)), f(x(t)) \rangle = \dot{V}(x(t)) \leq 0$$

Dunque $V(x(t))$ decresce lungo una soluzione in S e come conseguenza l'insieme ω -limite della soluzione è contenuto nell'insieme $\Gamma = \{x \in S; \dot{V}(x) = 0\}$.

Inoltre, poiché gli insiemi ω -limite sono invarianti per definizione, allora $\omega(x_0)$ deve essere contenuto nel sottoinsieme invariante più esteso che chiamiamo K dell'insieme Γ .

Il primo teorema di questa sezione fornisce un risultato essenziale che mette in relazione gli insiemi invarianti e i punti di equilibrio globalmente asintoticamente stabili, permettendo di semplificare notevolmente le dimostrazioni successive.

Teorema 2.2.2 (Principio di invarianza di LaSalle). *Sia V una funzione di Lyapunov per il sistema $\dot{x} = f(x)$. Se $\phi^t(x_0)$ è interamente contenuta in un insieme S per $t \geq 0$, allora*

$$\omega(x_0) \cap S \subseteq K$$

dove l'insieme $\omega(x_0)$ è l'insieme ω -limite di $\phi^t(x_0)$ e K è il più grande sottoinsieme invariante dell'insieme $\{x \in S \mid \dot{V}(x) = 0\}$.

Teorema 2.2.3. *Supponiamo che valgano le seguenti affermazioni:*

1. *Esistono funzioni di Lyapunov $V_i(t, u_i)$, funzioni $F_{ij}(t, u_i, u_j)$ e costanti $a_{ij} \geq 0$ tali che, dati $t > 0$ e $u_i \in D_i$, per ogni $i = 1, \dots, n$*

$$\dot{V}_i^*(t, u_i) \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} F_{ij}(t, u_i, u_j) \quad (2.5)$$

2. *Lungo ogni ciclo diretto C del digrafo pesato (G, A) con $A = (a_{ij})$, dati $t > 0$, $u_r \in D_r$ e $u_s \in D_s$, si ha che*

$$\sum_{(r,s) \in E(C)} F_{rs}(t, u_r, u_s) \leq 0 \quad (2.6)$$

3. *Le costanti c_i sono le stesse considerate in (1.1).*

Allora la funzione $V(t, u)$ definita in (2.4) soddisfa $\dot{V}^*(t, u) \leq 0$ per $t > 0$ e per $u \in D$ e dunque V è una funzione di Lyapunov per il sistema accoppiato (2.2).

Dimostrazione. Per come abbiamo definito $V(t, u)$, notiamo che per la condizione (2.5)

$$\dot{V}^*(t, u) = \sum_{i=1}^n c_i \dot{V}_i^*(t, u_i) \leq \sum_{i,j=1}^n c_i a_{ij} F_{ij}(t, u_i, u_j)$$

Ora, per il Teorema (1.2.7), otteniamo che

$$\sum_{i,j=1}^n c_i a_{ij} F_{ij}(t, u_i, u_j) = \sum_{q \in Q} w(q) \sum_{(r,s) \in E(C_q)} F_{rs}(t, u_r, u_s)$$

e dunque, dato che $w(q) > 0$ e poiché vale la condizione (2.6), lungo il ciclo C_q si ha che

$$\sum_{(r,s) \in E(C_q)} F_{rs}(t, u_r, u_s) \leq 0$$

Dunque stiamo moltiplicando qualcosa di negativo per qualcosa di positivo e quindi otteniamo infine che $\dot{V}^*(t, u) \leq 0$ e possiamo concludere. □

Proposizione 2.2.4. *Consideriamo il caso di un grafo unicyclico Q di ciclo C_q e definiamo \tilde{Q} come il grafo ottenuto sostituendo C_q con $-C_q$. Se (G, A) è un digrafo bilanciato, allora $w(Q) = w(\tilde{Q})$.*

Quindi con le ipotesi del Teorema (2.2.3) si ha che

$$\sum_{i,j=1}^n c_i a_{ij} F_{ij}(t, u_i, u_j) = \frac{1}{2} \sum_{q \in Q} w(q) \sum_{(r,s) \in E(C_q)} \left(F_{rs}(t, u_r, u_s) + F_{sr}(t, u_s, u_r) \right) \quad (2.7)$$

Grazie a questa proposizione si può enunciare il seguente teorema:

Teorema 2.2.5. *Il Teorema (2.2.3) è valido anche se al posto di (2.6) usiamo la condizione*

$$\sum_{(r,s) \in E(C_q)} F_{rs}(t, u_r, u_s) + F_{sr}(t, u_s, u_r) \leq 0 \quad (2.8)$$

per $t > 0$, $u_r \in D_r$ e $u_s \in D_s$.

Il prossimo risultato fornisce una condizione ancora meno restrittiva riguardo l'esistenza di una funzione di Lyapunov globale nel caso di grafi bilanciati.

Teorema 2.2.6. *Se (G, A) è un digrafo bilanciato i due Teoremi (2.2.3) e (2.2.5) sono ancora validi se le condizioni (2.6) e (2.8) sono sostituite dalla seguente affermazione: esistono funzioni $G_i(t, u_i)$ tali che*

$$F_{ij}(t, u_i, u_j) \leq G_i(t, u_i) - G_j(t, u_j) \quad (2.9)$$

per ogni $i, j = 1, \dots, n$.

Nell'ultimo teorema di questa sezione diamo una condizione più forte per l'esistenza di V funzione di Lyapunov globale.

Teorema 2.2.7. *Supponiamo che valgano le seguenti affermazioni:*

1. *Esistono funzioni $V_i(t, u_i)$ e $F_{ij}(t, u_i, u_j)$ e costanti $a_{ij} \geq 0$ e $b_i \geq 0$ tali che*

$$\dot{V}_i^*(t, u_i) \leq -b_i V_i(t, u_i) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} F_{ij}(t, u_i, u_j) \quad (2.10)$$

2. *Valgono le condizioni (2.6), (2.8) oppure (2.9) nel caso di un digrafo bilanciato.*

3. Le costanti c_i sono come in (1.1).

Ponendo $b = \min\{b_1, \dots, b_n\}$, allora $\dot{V}(t, u) \leq -bV(t, u)$.

Osservazione 2.2.8. La sola esistenza delle funzioni di Lyapunov V_i per ogni sistema del vertice (2.1) non è sufficiente al fine di dimostrare l'esistenza di una V globale per il sistema accoppiato. Vediamo infatti, tramite il seguente esempio, che due sistemi lineari aventi punti di equilibrio asintoticamente stabili possono essere accoppiati e formare un sistema instabile.

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

osserviamo che i suoi autovalori sono $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e che la soluzione al tempo $t = 0$ del singolo sistema del vertice

$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

è globalmente asintoticamente stabile.

Consideriamo invece il seguente sistema accoppiato

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la cui matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che A ha un autovalore positivo $\frac{\sqrt{13}-3}{2}$ e applicando il Teorema (1.5.4) possiamo affermare che la soluzione del sistema accoppiato al tempo $t = 0$ è instabile.

2.3 Un primo esempio: il modello di Lotka-Volterra

In questa sezione analizzeremo come calcolare una funzione di Lyapunov globale nel caso del sistema preda-predatore di Lotka-Volterra.

Consideriamo quindi il sistema

$$x'_i = x_i \left(e_i + \sum_{j=1}^n p_{ij} x_j \right) \quad \text{per } i = 1, \dots, n \quad (2.11)$$

dove $x_i \in \mathbb{R}^+$ rappresenta la densità di popolazione dell' i -esima specie, $e_i \in \mathbb{R}$, $p_{ii} \leq 0$ e $p_{ij}p_{ji} < 0$ se $p_{ij} \neq 0$ e $i \neq j$ (per ulteriori dettagli si veda [6]).

Supponiamo che il modello ammetta un punto di equilibrio $E^* = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ con $x_i > 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Consideriamo la funzione definita come

$$V_i(x_i) = x_i - x_i^* - x_i^* \log \frac{x_i}{x_i^*} \quad (2.12)$$

Ora, differenziando V_i rispetto al punto x_i e tenendo conto dell'equazione (2.11), otteniamo

$$\dot{V}_i^* = e_i x_i + \sum_{j=1}^n p_{ij} x_i x_j - e_i x_i^* - \sum_{j=1}^n p_{ij} x_i^* x_j = \sum_{j=1}^n p_{ij} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) \quad (2.13)$$

E quindi

$$\dot{V}_i^* = \sum_{j=1}^n a_{ij} F_{ij}(x_i, x_j)$$

dove $a_{ij} = |p_{ij}|$ e $F_{ij}(x_i, x_j) = \text{sgn}(p_{ij})(x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*)$.

Notiamo in particolare che $F_{ij}(x_i, x_j) = F_{ji}(x_j, x_i)$, dunque abbiamo soddisfatto la condizione (2.8). Considerando le costanti c_i come in (1.1), possiamo applicare il Teorema (2.2.5) e concludere che

$$V(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n c_i V_i(x_i)$$

è una funzione di Lyapunov per il modello di Lotka-Volterra (2.11).

2.4 Un secondo esempio: oscillatori accoppiati sui network

Studiamo ora il caso degli oscillatori accoppiati sui network e cerchiamo un punto di equilibrio globalmente asintoticamente stabile per il sistema accoppiato.

Dato un digrafo pesato (G, A) con n vertici $A = (a_{ij})$ con $n \geq 2$. Un sistema accoppiato di oscillatori non lineari su G può essere costruito come segue:

Ad ogni vertice i è assegnato un oscillatore non lineare descritto dall'equazione

$$\ddot{x}_i + \alpha_i \dot{x}_i + f_i(x_i) = 0 \quad (2.14)$$

dove $\alpha_i \geq 0$ è detto *coefficiente di smorzamento* e $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è detta *forza di ripristino non lineare*.

L'influenza del vertice j sul vertice i , invece, è data dall'espressione

$$a_{ij}(\dot{x}_i - \dot{x}_j)$$

dove $a_{ij} \geq 0$ sono le costanti di peso e si annullano se e solo se non esistono archi da j a i in G . Arriviamo quindi al sistema di equazioni differenziali accoppiate del secondo ordine nella forma

$$\ddot{x}_i + \alpha_i \dot{x}_i + f_i(x_i) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(\dot{x}_i - \dot{x}_j) = 0 \quad (2.15)$$

che in alternativa possiamo scrivere come un sistema lineare del primo ordine nella forma

$$\begin{cases} \dot{x}_i = y_i \\ \dot{y}_i = -\alpha_i y_i - f_i(x_i) - \sum_{j=1}^n a_{ij}(y_i - y_j) \end{cases}$$

Ora, supponiamo che esista un punto x_i^* tale che $f_i(x_i) = 0$ se e solo se $x_i = x_i^*$ e supponiamo che l'energia potenziale definita da

$$F_i(x_i) = \int f_i(s) ds$$

abbia un minimo globale proprio in $x_i = x_i^*$. Allora se $\alpha_i > 0$ definiamo l'energia totale tramite l'espressione

$$V_i(x_i, y_i) = \frac{y_i^2}{2} + F_i(x_i) \quad (2.16)$$

e notiamo che essa è una funzione globale di Lyapunov grazie alla globale asintotica stabilità dei punti $x_i = x_i^*$ per il sistema del vertice.

Definito quindi $E^* = (x_1^*, 0, x_2^*, 0, \dots, x_n^*, 0)$, esso è un punto di equilibrio per il sistema accoppiato e l'obiettivo è mostrare che esso è globalmente asintoticamente stabile. Per farlo, utilizziamo il seguente teorema.

Teorema 2.4.1. *Sia (G, A) un digrafo fortemente connesso. Supponiamo che esista un $k \in \mathbb{N}$ tale che $\alpha_k > 0$. Allora E^* è globalmente asintoticamente stabile in \mathbb{R}^{2n} .*

Dimostrazione. Vogliamo verificare che la funzione $V_i(x_i, y_i)$ definita in (2.16) soddisfi le condizioni del Teorema (2.2.3). Allora, differenziando V_i rispetto a y_i , otteniamo

$$\begin{aligned} \dot{V}_i^*(x_i, y_i) &= -\alpha_i y_i^2 - f_i(x_i) - \sum_{j=1}^n a_{ij} (y_i - y_j) y_i = -\alpha_i y_i^2 - f_i(x_i) + \\ &+ \sum_{j=1}^n a_{ij} \left(-\frac{1}{2} (y_i - y_j)^2 + \frac{1}{2} y_j^2 - \frac{1}{2} y_i^2 \right) \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\frac{1}{2} y_j^2 - \frac{1}{2} y_i^2 \right) \end{aligned}$$

A questo punto possiamo considerare $F_{ij}(y_i, y_j) = \left(\frac{1}{2}y_j^2 - \frac{1}{2}y_i^2\right)$ e quindi osservare che

$$\overset{\star}{V}_i(x_i, y_i) \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} F_{ij}(y_i, y_j)$$

Notiamo inoltre che, lungo ogni ciclo diretto C del digrafo (G, A) , si ha che

$$\sum_{(r,s) \in E(C)} F_{rs}(y_r, y_s) = \sum_{(r,s) \in E(C)} \left(\frac{1}{2}y_r^2 - \frac{1}{2}y_s^2\right) = 0$$

Dunque abbiamo soddisfatto le condizioni 1. e 2. del Teorema (2.2.3). Per quanto riguarda la condizione 3., per soddisfarla basta prendere ogni c_i come il cofattore dell' i -esimo elemento della diagonale della matrice Laplaciana di (G, A) .

A questo punto possiamo applicare il Teorema (2.2.3) e quindi ottenere

$$V(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n c_i V_i(x_i, y_i) \tag{2.17}$$

che è una funzione di Lyapunov in quanto $\overset{\star}{V} \leq 0$.

Ora bisogna mostrare che E^\star è globalmente asintoticamente stabile. Consideriamo allora un compatto K che è l'insieme invariante più esteso nel quale $\overset{\star}{V} = 0$. Poiché (G, A) è fortemente connesso, allora $c_i > 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Dunque $\overset{\star}{V}$ si annulla solo se $\alpha_i y_i^2 = 0$ e contemporaneamente $a_{ij}(y_i - y_j)^2 = 0$ per ogni $i, j = 1, \dots, n$.

Allora è fondamentale che $\alpha_i > 0$ e $a_{ij} > 0$, così necessariamente $y_i = 0$ e $y_j = y_i$ e questo è vero perché già sappiamo che esiste un $k \in \mathbb{N}$ tale che $\alpha_k > 0$ e dunque $y_k = 0$. Considerando un altro vertice qualsiasi $l \neq k$ in (G, A) , allora, poiché il digrafo è fortemente connesso per ipotesi, esiste un cammino diretto P dal vertice l al vertice k e dunque $a_{kl} > 0$ e di conseguenza $y_l = y_k$. In ultimo abbiamo ottenuto che $\overset{\star}{V} = 0$ implica che $y_i = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Per quanto riguarda la seconda equazione della versione del sistema al primo ordine, basta notare che $0 = \dot{y}_i = -f_i(x_i)$ e $x_i = x_i^\star$.

Questo implica che il compatto più esteso che sia invariante e sia sottoinsieme di

$$\left\{ (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \mid \dot{V}^* = 0 \right\}$$

non è altro che il singolo $\{E^*\}$ e dunque, per il Principio di invarianza di LaSalle, si ha che E^* è globalmente asintoticamente stabile.

□

Capitolo 3

Applicazione: il modello SIR

3.1 Introduzione

In epidemiologia negli ultimi anni si utilizzano modelli di equazioni differenziali per descrivere il diffondersi di una patologia basata sul contatto umano (per esempio influenza, morbillo, ...), come nel caso del COVID-19. Esistono modelli con vari livelli di complessità, ma anche i modelli più semplici possono essere utili a descrivere a grandi linee il comportamento della dinamica epidemica o per caratterizzarne alcune specifiche fasi.

Il modello più semplice è il modello SIR, che considera la popolazione divisa in tre gruppi: Suscettibili (S, cioè le persone sane che possono infettarsi), Infetti (I, coloro che hanno la patologia) e Recuperati (R, da “recovered”, che corrisponde ai guariti o ai deceduti che non possono più essere infettati). Il modello si basa sulle “Leggi di azione di massa” utilizzate per descrivere la cinetica delle reazioni chimiche. Nel nostro caso esse determinano le variazioni delle quantità $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$.

Nel corso di questo capitolo si studierà sia il caso unidimensionale (quindi come se si considerasse un unico vertice del digrafo), sia il caso di un digrafo fortemente connesso (quindi considerando anche le interazioni tra due o più vertici). Inoltre si studierà la

stabilità delle soluzioni applicando il Teorema di LaSalle e si fornirà inoltre un esempio di funzioni di Lyapunov diverse che però sono relative allo stesso digrafo pesato in modo da applicare tutta la teoria descritta negli scorsi capitoli.

3.2 Caso unidimensionale

Definiamo il sistema lineare

$$\begin{cases} S' = \Lambda - \beta SI - dS \\ I' = \beta SI - (d + \gamma)I \\ R' = \gamma I - dR \end{cases} \quad (3.1)$$

I cui dati iniziali sono $S(0), I(0), R(0) \geq 0$.

Λ è detta *costante di input*, $d > 0$ è il *tasso di mortalità* e infine β è il *tasso di trasmissione* della malattia da un individuo all'altro.

Osservazione 3.2.1. Poniamo $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$ e osserviamo che $N' = \Lambda - dN$ dunque necessariamente

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq \frac{\Lambda}{d}$$

Osservazione 3.2.2. Consideriamo l'insieme

$$\Gamma = \left\{ (S, I, R) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^3 \text{ tale che } S + I + R \leq \frac{\Lambda}{d} \right\}$$

e osserviamo che esso è positivamente invariante rispetto al sistema (3.1).

Questo sistema inoltre ammette sempre un punto di equilibrio che chiamiamo $P_0 = (S_0, 0, 0) \in \Gamma$, con $S_0 = \frac{\Lambda}{d}$. Tuttavia esistono delle condizioni in cui il punto di equilibrio costituito dai dati iniziali non è più stabile.

Proposizione 3.2.3. *Un punto di equilibrio $P^* = (S^*, I^*, R^*) \in \text{Int}(\Gamma)$ esiste se e solo se*

$$R_0 = \frac{\beta\Lambda}{d(d + \gamma)} > 1 \quad (3.2)$$

con R_0 detto numero di riproduzione basico, che è il numero medio di infezioni dirette a opera di un singolo infetto e

$$S^* = \frac{\Lambda}{dR_0}, \quad I^* = \frac{d(R_0 - 1)}{\beta}, \quad R^* = \frac{\gamma I^*}{d}$$

Proposizione 3.2.4 (Proprietà di soglia netta [2]). *Il modello SIR ha la proprietà di soglia netta cioè P_0 è globalmente asintoticamente stabile per $R_0 \leq 1$, invece nel caso in cui $R_0 > 1$ esiste un unico punto di equilibrio $P^* \in \text{Int}(\Gamma)$ globalmente asintoticamente stabile, mentre P_0 sarà instabile.*

Osservazione 3.2.5. La proposizione precedente può essere interpretata anche attraverso la teoria delle biforcazioni: se R_0 cresce e supera 1, allora si ha una biforcazione in cui P_0 cambia la sua stabilità da globalmente asintoticamente stabile a instabile e vi è un secondo punto di equilibrio P^* che invece è globalmente asintoticamente stabile.

A livello biologico queste osservazioni significano che se $R_0 < 1$, la malattia potrebbe estinguersi da sola, mentre nel caso in cui $R_0 > 1$ la malattia persiste.

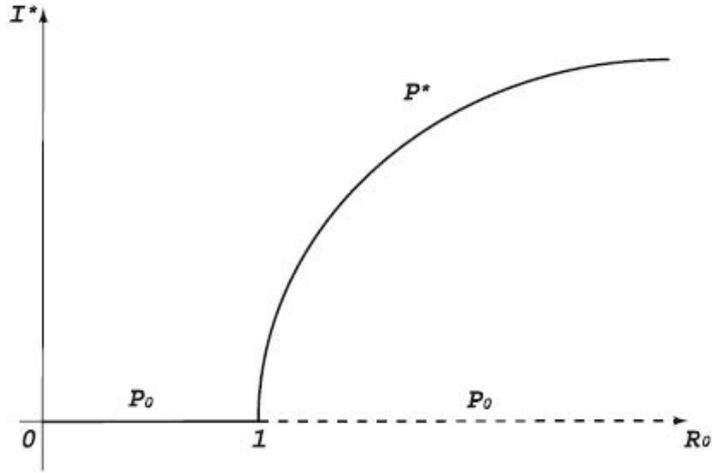


Figura 3.1: Diagramma di biforcazione

Teorema 3.2.6. *Sia R_0 come in (3.2), allora la proprietà di soglia netta vale per il modello SIR.*

Dimostrazione. Poiché stiamo lavorando in dimensione 1, osserviamo che $Q = I$ è una funzione di Lyapunov che può essere usata per dimostrare la globale stabilità del punto di equilibrio, dunque

$$Q' = I' = \beta S_0 I - (d + \gamma)I - f(S, I) = (R_0 - 1)(d + \gamma) - f(S, I)$$

con $f(S, I) = \beta(S_0 - S) \geq 0$ in Γ . Allora P_0 è globalmente asintoticamente stabile se $R_0 < 1$, in quanto $Q' < 0$.

Per quanto riguarda il caso $R_0 = 1$ invece $Q' = 0$ e dunque anche $f(S, I) = 0$; questo accade se e solo se $I = 0$ oppure $S = S_0$.

Analogamente a quanto fatto in precedenza per entrambi questi casi si può dimostrare che l'insieme invariante più esteso per il sistema (3.1) è costituito dal singolo $\{P_0\}$ e si può concludere che P_0 è globalmente asintoticamente stabile grazie al Principio di invarianza di LaSalle.

Per l'ultimo caso, in cui $R_0 > 1$, grazie alla teoria che abbiamo sviluppato nel corso dei capitoli precedenti si possono costruire varie funzioni di Lyapunov D per dimostrare la

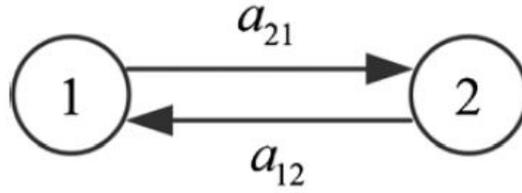


Figura 3.2: Rappresentazione del digrafo relativo al sistema

globale asintotica stabilità di P^* . Per ognuna di esse l'insieme invariante più esteso dove $D' = 0$ è sempre $\{P^*\}$ e possiamo sempre concludere grazie al teorema di LaSalle.

□

Ora forniamo un esempio di digrafo costituito da due vertici e da due archi che sono uno l'opposto dell'altro e che quindi formano un ciclo (rappresentato nella Figura 3.2). Utilizziamo due funzioni di Lyapunov che descrivono il sistema di equazioni di ciascuno dei due vertici, le accoppiamo come descritto negli scorsi capitoli e otteniamo quindi una funzione di Lyapunov globale per il sistema accoppiato.

Facendo poi un'altra costruzione attraverso altre tipologie di funzioni di Lyapunov, che però si riferiscono allo stesso digrafo pesato, osserviamo che otterremo un'altra funzione di Lyapunov globale.

Prima costruzione: Siano

$$V_1 = S - S^* - S^* \log \frac{S}{S^*} \quad \text{e} \quad V_2 = I - I^* - I^* \log \frac{I}{I^*}$$

Poiché sappiamo che $1 - x + \log x \leq 0$ quando $x > 0$ e vale l'uguaglianza se e solo se $x = 1$, allora differenziando entrambe le funzioni di Lyapunov otteniamo

$$\begin{aligned}
V_1' &= \frac{(S - S^*)}{S} S' = \frac{(S - S^*)}{S} \left(\beta S^* I^* + dS^* - \beta SI - dS \right) = \\
&= -d \frac{(S - S^*)^2}{S} + \beta S^* I^* \left(1 - \frac{S^*}{S} - \frac{SI}{S^* I^*} + \frac{I}{I^*} \right) \leq \\
&\leq \beta S^* I^* \left(-\frac{SI}{S^* I^*} + \log \frac{SI}{S^* I^*} + \frac{I}{I^*} - \log \frac{I}{I^*} \right) = a_{12} G_{12}
\end{aligned}$$

E analogamente

$$V_2' = \beta S^* I^* \left(1 - \frac{S^*}{S} + \frac{SI}{S^* I^*} - \frac{I}{I^*} \right) \leq \beta S^* I^* \left(\frac{SI}{S^* I^*} - \log \frac{SI}{S^* I^*} - \frac{I}{I^*} + \log \frac{I}{I^*} \right) = a_{21} G_{21}$$

Notiamo che $a_{12} = a_{21}$ e $G_{12} = -G_{21}$, dunque $G_{12} + G_{21} = 0$. Allora esistono costanti c_1, c_2 tali che $V = c_1 V_1 + c_2 V_2$ è una funzione di Lyapunov per il sistema (3.1) e dunque abbiamo concluso.

Seconda costruzione: Siano

$$V_1 = \frac{1}{2}(S - S^*)^2 \quad \text{e} \quad V_2 = I - I^* - I^* \log \frac{I}{I^*}$$

Differenziando analogamente alla prima costruzione otteniamo

$$V_1' = (S - S^*) \left(\beta S^* I^* + dS - \beta SI - dS \right) \leq \beta S^* (S - S^*) (I^* - I) = a_{12} G_{12}$$

Analogamente al caso precedente

$$V_2' = \frac{I - I^*}{I} (\beta SI - \beta S^* I) = \beta (S - S^*) (I - I^*) = a_{21} G_{21}$$

Ora notiamo che $a_{12} = \beta S^*$, mentre $a_{21} = \beta$. Inoltre $G_{12} = -G_{21}$, allora prendendo $c_1 = S^*c_2$ si ha che $V = V_1 + S^*V_2$ è un'altra funzione di Lyapunov che può essere usata per provare la globale asintotica stabilità di P^* e questo ricorda che la funzione di Lyapunov, anche in questo caso, non è necessariamente unica.

3.3 Sistemi accoppiati

Il caso di sistemi accoppiati può essere costruito dividendo la popolazione in n gruppi e supponendo che per ogni $k = 1, \dots, n$ ogni gruppo sia diviso in Suscettibili, Infetti e Recuperati. Inoltre chiamiamo $N_k = S_k + I_k + R_k$ il numero totale di popolazione del k -esimo gruppo.

Sia β_{jk} il coefficiente di trasmissione da I_j , cioè gli infetti del j -esimo gruppo, a S_k , cioè i suscettibili del k -esimo gruppo.

Allora il tasso di nuove infezioni del k -esimo gruppo può essere scritto come

$$\sum_{j=1}^n \beta_{jk} I_j S_k$$

Quindi nel k -esimo gruppo possiamo scrivere il modello SIR come

$$\begin{cases} S'_k = \Lambda_k - \sum_{j=1}^n \beta_{jk} I_j S_k - d_k S_k \\ I'_k = \sum_{j=1}^n \beta_{jk} I_j S_k - (\gamma_k + d_k) I_k \\ R'_k = \gamma_k I_k - d_k R_k \end{cases} \quad (3.3)$$

e questo per ogni $k = 1, \dots, n$.

Osservazione 3.3.1. La matrice di trasmissione $B = (\beta_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$ è chiaramente non negativa, ma non è detto che sia simmetrica né che sia strettamente positiva. Sicuramente però possiamo dire che è irriducibile in quanto gli infetti di un qualsiasi gruppo possono trasmettere il virus a chiunque altro in qualsiasi altro gruppo.

Invece l'influenza del vertice j del digrafo sul vertice i viene descritta tramite la funzione

$$g_{ij}(S_i, I_i, S_j, I_j) = \left(-\beta_{ij}S_iI_j, \beta_{ij}S_iI_j, 0 \right)$$

Osserviamo inoltre che, per quanto riguarda lo studio dei punti di equilibrio, è possibile considerare solo le prime due equazioni del modello in quanto R_k non dipende né da I_k né da S_k e dunque non contribuisce alla stabilità.

Consideriamo quindi il sistema

$$\begin{cases} S'_k = \Lambda_k - \sum_{j=1}^n \beta_{jk}I_jS_k - d_kS_k \\ I'_k = \sum_{j=1}^n \beta_{jk}I_jS_k - (\gamma_k + d_k)I_k \end{cases} \quad (3.4)$$

Vogliamo studiare le soluzioni del sistema e la stabilità dei punti di equilibrio nell'insieme

$$\Gamma = \left\{ (S_1, I_1, \dots, S_n, I_n) \in \mathbb{R}^{2n} \mid 0 \leq S_k + I_k \leq \frac{\Lambda_k}{d_k}, \quad k = 1, \dots, n \right\}$$

Osservazione 3.3.2. Dalle considerazioni fatte nella sezione precedente sappiamo che R_0 dipende solo dalle equazioni sulle I_k e anche nel caso di sistemi accoppiati la situazione è invariata, dunque R_0 è lo stesso di (3.2).

Quindi

$$R_0 = \frac{\beta\Lambda}{d(d+\gamma)}$$

Osservazione 3.3.3. Anche nel caso di sistemi accoppiati si può dimostrare che se $R_0 > 1$, allora $P_0 = (S_1^0, I_1^0, \dots, S_n^0, I_n^0)$ è instabile e inoltre esiste un punto di equilibrio $P^* \in \text{Int}(\Gamma_1)$ che è globalmente asintoticamente stabile per il sistema (3.4).

Teorema 3.3.4. Sia $B = (\beta_{ij})$ matrice irriducibile. Se $R_0 > 1$ allora esiste un unico punto di equilibrio globalmente asintoticamente stabile $P^* \in \text{Int}(\Gamma)$.

Dimostrazione. Usiamo la stessa funzione di Lyapunov che avevamo considerato nel modello *SIR* nella sezione precedente, cioè

$$V_i(S_i, I_i) = \left(S_i - S_i^* - S_i^* \log \frac{S_i}{S_i^*} \right) + \left(I_i - I_i^* - I_i^* \log \frac{I_i}{I_i^*} \right) \quad (3.5)$$

e consideriamo la funzione

$$V(S_1, I_1, \dots, S_n, I_n) = \sum_{i=1}^n c_i V_i(S_i, I_i) \quad (3.6)$$

L'obiettivo è mostrare che questa è una funzione di Lyapunov globale utilizzando il Teorema (2.2.3).

Allora, differenziando le funzioni V_i lungo le rispettive soluzioni e facendo le dovute semplificazioni, otteniamo

$$\dot{V}_i = -\frac{d_i}{S_i} (S_i - S_i^*)^2 + \sum_{j=1}^n \beta_{ij} S_i^* I_j^* \left(2 - \frac{S_i^*}{S_i} - \frac{I_i}{I_i^*} + \frac{I_j}{I_j^*} - \frac{S_i I_j I_i^*}{S_i^* I_j^* I_i} \right)$$

Ora, poniamo $a_{ij} = \beta_{ij} S_i^* I_j^*$ e

$$G_i(I_i) = -\frac{I_i}{I_i^*} - \log \frac{I_i}{I_i^*}$$

e chiamiamo

$$F_{ij}(S_i, I_i, I_j) = \left(2 - \frac{S_i^*}{S_i} - \frac{I_i}{I_i^*} + \frac{I_j}{I_j^*} - \frac{S_i I_j I_i^*}{S_i^* I_j^* I_i} \right)$$

Come già enunciato nella sezione precedente la funzione $1 - x + \log x \leq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^+$ e si annulla se e solo se $x = 1$, pertanto

$$F_{ij}(S_i, I_i, I_j) \leq G_i(I_i) - G_j(I_j)$$

e dunque abbiamo raggiunto tutte le condizioni necessarie per applicare il Teorema (2.2.3). Allora basta considerare c_i come in (1.1) e si ha che $\dot{V} \leq 0$ per $S_k > 0$ e $I_k > 0$ e per ogni $k = 1, \dots, n$ e quindi che la funzione V che abbiamo definito è una funzione di Lyapunov globale.

A questo punto possiamo considerare l'insieme

$$G = \left\{ (S_1, I_1, \dots, S_n, I_n) \in \text{Int}(\Gamma) \mid \dot{V} = 0 \right\}$$

e applicare il Principio di invarianza di LaSalle per affermare che l'insieme ω -limite di ogni soluzione positiva $(S_1(t), I_1(t), \dots, S_n(t), I_n(t))$ è contenuto nell'insieme invariante più esteso $K \subseteq G$.

Per caratterizzare l'insieme K osserviamo che l'irriducibilità della matrice $B = (\beta_{ij})$ implica che la matrice $A = (\beta_{ij} S_i^* I_j^*)$ è anch'essa irriducibile e che $c_i > 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Dunque $\dot{V} = 0$ implica che $F_{ij}(S_i, I_i, I_j) = 0$ per $S_i > 0$ e $I_j > 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Questo significa che $S_i = S_i^*$ e $I_i = a I_i^*$ per un certo $a > 0$ che non dipende da i . Se sostituiamo questa relazione nella prima equazione del sistema (3.4) otteniamo che

$$0 = \Lambda_k - d_k S_k^* - a \sum_{j=1}^n \beta_{kj} S_k^* I_j^* \quad (3.7)$$

che notiamo essere una funzione decrescente in a . Allora questa uguaglianza vale se e

solo se $a = 1$, dunque l'insieme $K \subseteq G$ è necessariamente costituito unicamente da $\{P^*\}$ e quindi tutti gli insiemi ω -limite delle soluzioni sono gli stessi dell'insieme $\{P^*\}$. Questo stabilisce la globale asintotica stabilità del punto P^* grazie al Principio di invarianza di LaSalle e dunque abbiamo concluso.

□

Capitolo 4

Applicazione: i sistemi accoppiati impulsivi

4.1 Introduzione

La complessità dei sistemi accoppiati sui network nelle scienze sociali, biologiche e ingegneristiche ha portato alla luce molte sfide per gli scienziati, tanto che negli ultimi anni lo sviluppo dei sistemi accoppiati di equazioni differenziali sui network ha attirato gli interessi della ricerca, riportando molti risultati anche in letteratura. I problemi di stabilità dei sistemi accoppiati non lineari sui network sono una tematica essenziale e nella pratica è necessario analizzarne la stabilità.

Nel mondo reale molti processi evolutivi hanno la caratteristica di cambiare improvvisamente stato. Di conseguenza è naturale assumere che queste perturbazioni agiscano istantaneamente, cioè in forma di impulso. Le equazioni differenziali impulsive coinvolgono effetti impulsivi e sono una naturale descrizione di molti problemi del mondo reale come la biologia di una popolazione, il battito ritmico, la radiazione delle onde elettromagnetiche e così via.

Dunque molti sistemi dinamici nel campo scientifico possono essere descritti come un sistema accoppiato impulsivo. Una descrizione matematica di un sistema accoppiato impulsivo è un grafo diretto in cui un sistema di equazioni differenziali impulsive è associato a ciascun vertice e gli archi diretti connettono un vertice all'altro.

Nel corso di questo capitolo daremo una descrizione accurata dei sistemi accoppiati impulsivi, studiandone la stabilità, fornendo anche un esempio pratico.

4.2 Analisi della stabilità

Un sistema impulsivo è descritto tramite tre componenti: un'equazione differenziale al tempo continuo che governa lo stato del sistema tra un impulso e l'altro, un'equazione di impulso che modella un salto impulsivo definito con una funzione salto all'istante in cui avviene l'impulso e un criterio di salto che definisce un insieme di eventi salto in cui l'equazione di impulso è attiva.

Consideriamo un network rappresentato da un digrafo G con n vertici e $n \geq 2$. Assumiamo che l' i -esima dinamica del vertice sia descritta con un sistema di equazioni differenziali impulsive come segue:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(t, x_i) & t \neq t_k \\ \Delta x_i(t_k) = I_k(x_i(t_k)) & t = t_k \quad k = 1, 2, \dots \\ x_i(t_0^+) = x_{i_0} \end{cases} \quad (4.1)$$

con $x_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ e $f_i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{m_i} \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}$.

$I_k : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{m_i} \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}$ rappresenta il salto dello stato dell'equazione ad ogni t_k .
 $\Delta x_i(t_k)$ è definito come $\Delta x_i(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k^-)$, t_k sono gli istanti a cui avvengono gli impulsi, mentre

$$x(t_k^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_k + h) \quad \text{e} \quad x(t_k^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} x(t_k + h)$$

sono i limiti destro e sinistro della discontinuità di salto.

Sia $g_{ij} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{m_i} \times \mathbb{R}^{m_j} \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}$ la funzione che rappresenta l'influenza del vertice j sul vertice i tale che $g_{ij} = 0$ se non esiste un arco da j a i nel digrafo G .

Allora otteniamo il seguente sistema accoppiato impulsivo relativo al digrafo G :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(t, x_i) + \sum_{j=1}^n g_{ij}(t, x_i, x_j) & t \neq t_k \\ \Delta x_i = I_k(x_i) & t = t_k \quad k = 1, 2, \dots \\ x_i(t_0^+) = x_{i_0} \end{cases} \quad (4.2)$$

per ogni $i = 1, 2, \dots, n$.

Per caratterizzare i sistemi accoppiati impulsivi facciamo ora le seguenti assunzioni:

1. Si ha che $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots$ e $t_k \rightarrow \infty$ per $k \rightarrow \infty$
2. Le funzioni f_i sono continue in $(t_{k-1}, t_k] \times \mathbb{R}^{m_i}$
3. Esiste

$$\lim_{(t, y_i) \rightarrow (t, x_i)} f_i(t, y_i) = f_i(t_k^+, x_i)$$

per ogni x_i e per ogni $k = 1, 2, \dots$

4. Esiste

$$\lim_{(t, y_i, y_j) \rightarrow (t, x_i, x_j)} g_{ij}(t, y_i, y_j) = g_{ij}(t_k^+, x_i, x_j)$$

per ogni x_i, x_j e per ogni $k = 1, 2, \dots$

5. $I_k \in C(\mathbb{R}^{m_i}, \mathbb{R}^{m_i})$.

Nel corso di questo capitolo consideriamo sempre le funzioni f_i e g_{ij} tali che soddisfino le condizioni di globale lipschitzianità in modo che il problema (4.2) abbia un'unica soluzione. Il sistema accoppiato ha inoltre la soluzione banale $(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ per $t \geq t_0$.

Diamo ora la definizione di derivata di Dini, che vedremo essere strettamente correlata alla derivata di Lyapunov.

Definizione 4.2.1. Data una funzione $V_i(t, x_i)$ definiamo la derivata di Dini rispetto al sistema accoppiato (4.2) come segue:

$$D^+V_i(t, x_i) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sup \frac{1}{h} \left(V_i(t+h, x_i) + hf_i(t, x_i) + h \sum_{j=1}^n g_{ij}(t, x_i, x_j) - V_i(t, x_i) \right) \quad (4.3)$$

Osservazione 4.2.2. Se la funzione $V_i \in C^1(\mathbb{R}_+ \times D_i, \mathbb{R})$ con D_i insieme aperto di \mathbb{R}^{m_i} allora si ha che

$$D^+V_i(t, x_i) = \dot{V}_i^*(t, x_i)$$

dove \dot{V}_i^* è la derivata di Lyapunov definita nel capitolo 2, dunque c'è una stretta correlazione tra le due derivate.

Dimostriamo ora un teorema che costituisce un caso specifico del Teorema (2.2.3).

Teorema 4.2.3. *Supponiamo che le seguenti affermazioni siano vere:*

1. *Esistono funzioni $F_{ij}(x_i, x_j)$ e $V_i(t, x_i)$ e una matrice $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ con $a_{ij} \geq 0$ tali che per $t \neq t_k$, $t \geq t_0$ e per ogni $i = 1, \dots, n$ si ha*

$$D^+V_i(t, x_i) \leq \sum_{j=1}^n a_{ij}F_{ij}(x_i, x_j) \quad (4.4)$$

2. *Lungo ogni ciclo diretto C del digrafo pesato (G, A) si ha che per $t \geq t_0$, $x_r \in D_r$ e $x_s \in D_s$*

$$\sum_{(r,s) \in E(C)} F_{rs}(x_r, x_s) \leq 0 \quad (4.5)$$

3. *Dato l'insieme $M_i(\rho) = \left\{ (t, x_i) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{m_i} ; \|x_i\| < \rho \right\}$ si ha che su $M_i(\rho)$*

$$V_i(t^+, x_i + I_k(x_i)) \leq V_i(t, x_i) \quad (4.6)$$

4. *Esiste una funzione $b_i \in \mathcal{K}$ tale che*

$$b_i(\|x_i\|) \leq V_i(t, x_i) \quad (4.7)$$

con $(t, x_i) \in M_i(\rho)$.

5. Esistono $\delta_0^{(i)} > 0$ e una funzione $d_i \in \mathcal{PC}^+\mathcal{K}$ tali che

$$V_i(t, x_i) \leq d_i(\|x_i\|) \quad (4.8)$$

con $\|x_i\| < \delta_0^{(i)}$ e per ogni $i = 1, \dots, n$.

Allora la funzione

$$V(t, x) = \sum_{i=1}^n c_i V_i(t, x_i)$$

è una funzione di Lyapunov per il sistema accoppiato (4.2) e $V(t, x)$ soddisfa la condizione

$$D^+V(t, x) \leq 0 \quad (4.9)$$

per $t \geq t_0$ e $t \neq t_k$.

Inoltre la soluzione banale del sistema è stabile.

Dimostrazione. Grazie alla condizione (4.4), quando $t \neq t_k$, otteniamo che

$$D^+V(t, x) = D^+ \sum_{i=1}^n c_i V_i(t, x_i) \leq \sum_{i=1}^n c_i D^+ V_i(t, x_i) \leq \sum_{i,j=1}^n c_i a_{ij} F_{ij}(x_i, x_j)$$

Invece applicando il Teorema (2.2.3) osserviamo che

$$\sum_{i,j=1}^n c_i a_{ij} F_{ij}(x_i, x_j) = \sum_{q \in Q} w(q) \sum_{(r,s) \in E(C_q)} F_{rs}(x_r, x_s)$$

e per la condizione (4.5) e poiché $w(q) > 0$, allora

$$D^+V(t, x) \leq \sum_{q \in Q} w(q) \sum_{(r,s) \in E(C_q)} F_{rs}(x_r, x_s) \leq 0$$

Ora poniamo $\delta_0 = \min \{ \delta_0^{(1)}, \dots, \delta_0^{(n)} \}$ e

$$b(\|x\|) = \min \{ c_1 b_1(\|x_1\|), \dots, c_n b_n(\|x_n\|) \}$$

$$d(\|x\|) = \min \{ c_1 d_1(\|x_1\|), \dots, c_n d_n(\|x_n\|) \}$$

A questo punto notiamo che, poiché $d_i \in \mathcal{PC}^+\mathcal{K}$ e $b_i \in \mathcal{K}$ per ogni $i = 1, \dots, n$, allora $d \in \mathcal{PC}^+\mathcal{K}$ e $b \in \mathcal{K}$.

Ora mostriamo che il fatto che $D^+V(t, x) \leq 0$ è sufficiente per mostrare che $V(t, x)$ è una funzione di Lyapunov, in quanto essa è sufficientemente regolare.

Allora osserviamo che, dato $\varepsilon > 0$, esiste $0 < \delta < \delta_0$ tale che se $\|x\| < \delta$ allora $d(\|x\|) < b(\varepsilon)$.

Se $\|x_0\| < \delta$, allora dalla condizione (4.6) segue che per $t \geq t_0$

$$V(t, x) \leq V(t_0^+, x) = \sum_{i=1}^n c_i V_i(t_0^+, x_{i_0}) \leq \sum_{i=1}^n c_i d_i(\|x_{i_0}\|) \leq \sum_{i=1}^n d(\|x_0\|) < nb(\varepsilon) \quad (4.10)$$

D'altra parte, grazie alla condizione (4.7), si ha che

$$V(t, x) = \sum_{i=1}^n c_i V_i(t, x_i) \geq \sum_{i=1}^n c_i b_i(x_i) \geq \sum_{i=1}^n b(\|x\|) = nb(\|x\|) \quad (4.11)$$

Combinando la (4.10) e la (4.11) si ha che

$$b(\|x\|) < b(\varepsilon)$$

per $t \leq t_0$ e per x_0 tale che $\|x_0\| < \delta$ e possiamo concludere. □

Osservazione 4.2.4. Supponiamo che la condizione (4.8) del teorema precedente venga sostituita dalla seguente affermazione:

Esiste un $\delta_0^{(i)}$ e una funzione $d_i \in \mathcal{K}$ tale che

$$V_i(t, x_i) \leq d_i(\|x_i\|) \quad (4.12)$$

con $\|x_i\| < \delta_0^{(i)}$.

Allora la soluzione banale del sistema accoppiato (4.2) è uniformemente stabile.

Dimostrazione. Poiché $d_i \in \mathcal{K}$, osserviamo che questa condizione non dipende dal tempo t . Dunque il numero δ può essere scelto indipendentemente da t_0 . Pertanto la soluzione banale è uniformemente stabile e abbiamo quindi concluso. □

Dimostriamo ora un teorema che fornisce un'altra condizione per l'asintotica stabilità della soluzione banale del sistema accoppiato.

Teorema 4.2.5. *Supponiamo che le condizioni (4.6), (4.7) e (4.8) siano valide e che inoltre siano verificate le seguenti affermazioni:*

1. *Esistono funzioni $V_i \in C^1(\mathbb{R}_+ \times D_i, \mathbb{R}_+)$, funzioni arbitrarie $F_{ij}(x_i, x_j)$ e una matrice $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ con $a_{ij} \geq 0$ per ogni $i, j = 1, \dots, n$. Esistono inoltre $p_i > 0$ tali che per ogni $i = 1, \dots, n$ si ha che*

$$D^+V_i(t, x_i) \leq -p_iV_i(t, x_i) + \sum_{j=1}^n a_{ij}F_{ij}(x_i, x_j) \quad (4.13)$$

2. Vale la proprietà (4.5).

Allora $V(t, x) = \sum_{i=1}^n c_i V_i(t, x_i)$ è una funzione di Lyapunov per il sistema accoppiato (4.2) e la soluzione banale è asintoticamente stabile.

Dimostrazione. Definiamo $p = \min\{p_1, \dots, p_n\}$ e grazie alle ipotesi osserviamo che quando $t \neq t_k$ e V lo possiamo scrivere come $V(t, x) = \sum_{i=1}^n c_i V_i(t, x_i)$ otteniamo

$$\begin{aligned} D^+V(t, x) &= D^+ \sum_{i=1}^n c_i V_i(t, x_i) \leq \sum_{i=1}^n c_i D^+ V_i(t, x_i) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n c_i \left(-p_i V_i(t, x_i) + \sum_{j=1}^n a_{ij} F_{ij}(x_i, x_j) \right) \leq - \sum_{i=1}^n c_i p_i V_i(t, x_i) \leq -pV(t, x) \end{aligned}$$

e per il criterio della stabilità di Lyapunov si ha che la soluzione banale è asintoticamente stabile.

□

Osservazione 4.2.6. Supponiamo che la condizione (4.8) all'interno del Teorema (4.2.5) sia sostituita dalla seguente affermazione:

Esiste un $\delta_0^{(i)} > 0$ e una funzione $d_i \in \mathcal{K}$ tale che

$$V_i(t, x_i) \leq d_i(\|x_i\|) \tag{4.14}$$

con $\|x_i\| < \delta_0^{(i)}$.

Allora la soluzione banale del sistema accoppiato (4.2) è uniformemente asintoticamente stabile.

Osservazione 4.2.7. Quando $I_k = 0$ nei sistemi (4.1) e (4.2) per ogni $i = 1, \dots, n$ e per ogni $k = 1, 2, \dots$, essi si possono riscrivere rispettivamente come

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(t, x_i) & t \geq 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(t, x_i) + \sum_{j=1}^n g_{ij}(t, x_i, x_j) \end{cases}$$

Teorema 4.2.8. *Supponiamo che valgano le condizioni (4.5), (4.6) e (4.13) e supponiamo che per ogni $i = 1, \dots, n$ esistano $r_i^{(1)}$ e $r_i^{(2)}$ entrambi positivi tali che*

$$r_i^{(1)} \|x_i\| \leq V_i(t, x_i) \leq r_i^{(2)} \|x_i\| \quad \text{con } t \geq t_0 \quad (4.15)$$

Allora $V(t, x) = \sum_{i=1}^n c_i V_i(t, x_i)$ è una funzione di Lyapunov per il sistema accoppiato (4.2) e la soluzione banale è esponenzialmente stabile.

Dimostrazione. Grazie alle condizioni (4.5) e (4.13) otteniamo che

$$D^+V(t, x) \leq -pV(t, x)$$

cioè

$$\frac{D^+V(t, x)}{V(t, x)} \leq -p$$

dunque integrando entrambe le espressioni da t_k^+ a $t \leq t_{k+1}$, otteniamo

$$\int_{t_k^+}^t \frac{D^+V(t, x)}{V(t, x)} = \int_{V(t_k^+, x)}^{V(t, x)} \frac{ds}{s} = \log \left(\frac{V(t, x)}{V(t_k^+, x + I_k(x))} \right) \leq - \int_{t_k^+}^t p \, ds = -p(t - t_k^+)$$

E dunque grazie a questo ragionamento abbiamo che

$$\begin{aligned}
V(t, x) &\leq e^{-p(t-t_k)} V(t_k^+, x + I_k(x)) \leq e^{-p(t-t_k)} \sum_{i=1}^n c_i V_i(t_k, x_i) \leq \\
&\leq e^{-p(t-t_k)} V(t_k, x) \leq e^{-p(t-t_k)} e^{-p(t_k-t_{k-1})} V(t_{k-1}^+, x + I_{k-1}(x)) \leq \\
&\leq e^{-p(t-t_{k-1})} V(t_{k-1}, x) \leq \dots \leq e^{-p(t-t_0)} V(t_0^+, x_0)
\end{aligned}$$

Ora siano $c^{(1)} = \min \{c_1, \dots, c_n\}$ e $c^{(2)} = \max \{c_1, \dots, c_n\}$.

Poniamo inoltre

$$r^{(1)} = \min \{r_1^{(1)}, \dots, r_n^{(1)}\} \quad \text{e} \quad r^{(2)} = \max \{r_1^{(2)}, \dots, r_n^{(2)}\}$$

e osserviamo che grazie all'ipotesi (4.15) e al ragionamento fatto in precedenza si ha che

$$\begin{aligned}
c^{(1)} r^{(1)} \|x\| &\leq \sum_{i=1}^n c_i r_i^{(1)} \leq \sum_{i=1}^n c_i V_i(t, x_i) = V(t, x) \leq e^{-p(t-t_0)} V(t_0^+, x_0) = \\
&= e^{-p(t-t_0)} \sum_{i=1}^n c_i V_i(t_0^+, x_0) \leq e^{-p(t-t_0)} \sum_{i=1}^n c_i r_i^{(2)} \|x_{i_0}\| \leq e^{-p(t-t_0)} c^{(2)} r^{(2)} \|x_0\|
\end{aligned}$$

Ora ponendo $M_0 = \max \left\{ \frac{c^{(2)} r^{(2)}}{c^{(1)} r^{(1)}}, 1 \right\}$ otteniamo come conseguenza che

$$\|x\| \leq M_0 e^{-p(t-t_0)} \|x_0\|$$

e dunque la soluzione banale è esponenzialmente stabile.

□

4.3 Un esempio pratico

Consideriamo il seguente esempio di sistema accoppiato impulsivo:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \alpha_i x_i + f_i(x_i) - f_i(y_i) - \sum_{j=1}^n \beta_{ij}(x_i - x_j) & t \neq t_k \\ \dot{y}_i = \alpha_i y_i + f_i(y_i) - f_i(x_i) - \sum_{j=1}^n \beta_{ij}(y_i - y_j) & t \neq t_k \\ \Delta x_i = I_k(x_i) = C_k x_i - x_i & t = t_k \\ \Delta y_i = I_k(y_i) = C_k y_i - y_i & t = t_k \\ x_i(t_0^+) = x_{i_0} \\ y_i(t_0^+) = y_{i_0} \end{cases} \quad (4.16)$$

con $x_i, y_i \in \mathbb{R}^n$.

$f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sono funzioni continue tali che esistono delle costanti $L_i > 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$ per cui si ha che

$$\|f_i(x_i) - f_i(y_i)\| \leq L_i \|x_i - y_i\|$$

per ogni $x_i \neq y_i$.

Inoltre $\beta_{ii} \leq 0$, $\beta_{ij} = -\beta_{ji}$ e $\beta_{ij} \neq 0$ quando $i \neq j$.

C_k è invece una matrice quadrata costante di dimensione n .

Osservazione 4.3.1. Sia G un digrafo con n vertici, allora il sistema (4.16) può essere visto come un sistema accoppiato impulsivo relativo al digrafo (G, A) , ponendo $a_{ij} = \beta_{ij}$ per ogni $i, j = 1, \dots, n$ e $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$.

Teorema 4.3.2. *Supponiamo che valgano le seguenti affermazioni:*

1. (G, A) è fortemente connesso e bilanciato.

2. Si ha per ogni $i = 1, \dots, n$

$$\gamma_i = \alpha_i - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} + 2L_i < 0 \quad (4.17)$$

con L_i costante di Lipschitz per la funzione f .

3. Per ogni $k = 1, 2, \dots$

$$\lambda_{\max}(C_k^t C_k) \leq 1 \quad (4.18)$$

Allora la soluzione banale del sistema (4.16) è uniformemente asintoticamente stabile.

Dimostrazione. Sia $X_i = (x_i, y_i)$.

Per ogni $i = 1, \dots, n$ costruiamo la funzione V_i come segue:

$$V_i(t, X_i) = \frac{1}{2}x_i^t x_i + \frac{1}{2}y_i^t y_i \quad (4.19)$$

Allora differenziando V_i otteniamo

$$\begin{aligned}
D^+V_i(t, X_i) &= \dot{V}_i^*(t, X_i) = \frac{1}{2} \left(\dot{x}_i^t x_i + x_i^t \dot{x}_i + \dot{y}_i^t y_i + y_i^t \dot{y}_i \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\alpha_i + f_i(x_i) - f_i(y_i) - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} (x_i - x_j) \right)^t x_i + \frac{1}{2} x_i^t \left(\alpha_i + f_i(x_i) - f_i(y_i) - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} (x_i - x_j) \right) + \\
&+ \frac{1}{2} \left(\alpha_i + f_i(y_i) - f_i(x_i) - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} (y_i - y_j) \right)^t y_i + \frac{1}{2} y_i^t \left(\alpha_i + f_i(y_i) - f_i(x_i) - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} (y_i - y_j) \right) = \\
&= \left(\alpha_i - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \right) x_i^t x_i + \left(f_i(x_i) - f_i(y_i) \right)^t x_i + \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_i^t x_j + \left(\alpha_i - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \right) y_i^t y_i + \\
&\quad + \left(f_i(y_i) - f_i(x_i) \right)^t y_i + \sum_{j=1}^n \beta_{ij} y_i^t y_j \leq \left(\alpha_i - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \right) (x_i^t x_i + y_i^t y_i) + \\
&+ L_i \|x_i - y_i\| \left(\|x_i\| + \|y_i\| \right) + \sum_{j=1}^n \beta_{ij} (x_i^t x_j + y_i^t y_j) \leq \left(\alpha_i - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \right) (x_i^t x_i + y_i^t y_i) + \\
&+ L_i (\|x_i\| + \|y_i\|)^2 + \sum_{j=1}^n \beta_{ij} (x_i^t x_j + y_i^t y_j) = 2 \left(\alpha_i - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} + 2L_i \right) V_i(t, x_i) + \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \beta_{ij} (x_i^t x_j + y_i^t y_j) = -p_i V_i(t, x_i) + \sum_{j=1}^n a_{ij} F_{ij}(x_i, x_j)
\end{aligned}$$

con $p_i = -2\gamma_i = -2\alpha_i + 2 \sum_{j=1}^n \beta_{ij} - 4L_i$

e $F_{ij}(x_i - x_j) = \text{sgn}(\beta_{ij})(x_i^t x_j + y_i^t y_j)$.

Notiamo che per arrivare a questo risultato abbiamo usato il fatto che le funzioni f_i sono Lipschitziane e il fatto che $\gamma_i < 0$ dall'equazione (4.17).

Osserviamo che

$$F_{ji}(x_j, x_i) = \text{sgn}(\beta_{ji})(x_j^t x_i + y_j^t y_i) = -\text{sgn}(\beta_{ij})(x_i^t x_j + y_i^t y_j) = -F_{ij}(x_i, x_j)$$

in quanto (G, A) è un digrafo bilanciato.

Inoltre lungo ogni ciclo diretto C del digrafo pesato si ha che

$$\sum_{(i,j) \in E(C_q)} \left(F_{ij}(x_i, x_j) - F_{ji}(x_j, x_i) \right) = 0$$

D'altra parte notiamo che

$$\begin{aligned} V\left(t_k^+, X_i(t_k) + I_k(X_i(t_k))\right) &= \frac{1}{2} \left((C_k x_i(t_k))^t (C_k x_i(t_k)) \right) + \frac{1}{2} \left((C_k y_i(t_k))^t (C_k y_i(t_k)) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(x_i^t(t_k) C_k^t C_k x_i(t_k) \right) + \frac{1}{2} \left(y_i^t(t_k) C_k^t C_k y_i(t_k) \right) \leq \left(\lambda_{\max}(C_k^t C_k) \right) \left(x_i^t(t_k) x_i(t_k) + y_i^t(t_k) y_i(t_k) \right) = \\ &= \left(\lambda_{\max}(C_k^t C_k) \right) V_i(t_k, X_i(t_k)) \end{aligned}$$

Allora dall'ipotesi (4.18) segue che

$$V_i\left(t_k^+, X_i(t_k) + I_k(X_i(t_k))\right) \leq V_i\left(t_k, X_i(t_k)\right) \quad (4.20)$$

Siano

$$b_i(x) = \frac{1}{3}x^2 \quad \text{e} \quad d_i(x) = x^2$$

per ogni $i = 1, \dots, n$ e osserviamo che $b_i \in \mathcal{K}$ e $d_i \in \mathcal{K}$ e inoltre

$$b_i(\|x_i\|) \leq V_i(t, x_i) \leq d_i(\|x_i\|)$$

per come abbiamo definito V_i .

Grazie al Teorema (4.2.8) possiamo concludere che la soluzione del sistema è uniformemente asintoticamente stabile.

□

Conclusione

Nel corso di questo elaborato abbiamo illustrato le proprietà dei digrafi pesati e l'importanza di associarli ai sistemi accoppiati al fine di studiarne in modo più conveniente la stabilità. Grazie a importanti teoremi, quali quello di LaSalle e quello di Lyapunov, abbiamo messo a punto strumenti che ci hanno permesso di ottenere una funzione di Lyapunov globale dalle singole funzioni di Lyapunov dei sistemi non accoppiati.

Abbiamo inoltre illustrato, anche tramite esempi concreti, varie applicazioni della teoria descritta nel corso dei primi due capitoli sia in campo fisico sia in campo medico.

Oltre a quelli ivi descritti vi sono tanti altri ambiti in cui i grafi e i sistemi accoppiati sono particolarmente utili per risolvere problemi di grande portata. Al lettore va quindi la curiosità di ulteriori approfondimenti.

Bibliografia

- [1] Michael Y. Li, Zhisheng Shuai, *Global-stability problem for coupled systems of differential equations on networks* in "Journal of Differential Equations", Elsevier, 2010, pp. 1-20
- [2] Zhisheng Shuai, P. Van dei Driessche, *Global-stability of infectious disease models using Lyapunov functions* in "SIAM Journal on Applied Mathematics", Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. 73, No. 4, 2013, pp. 1513–1532
- [3] A. Bianchi, T. Hillen, M. A. Lewis, Y. Yi, *The dynamics of biological systems*, Springer-Verlag, 2019
- [4] Hongbin Guo, Michael Y. Li, Zhisheng Shuai, *A graph-theoretic approach to the method of global Lyapunov functions* in "Proceedings of the american mathematical society", Vol. 136, No. 8, 2009, pp. 2793–2802
- [5] C. Parenti, A. Parmeggiani, *Algebra lineare ed equazioni differenziali ordinarie*, Springer-Verlag, 2019
- [6] Riccardo Sceda, *Master Equation per modelli di Lotka-Volterra*, 2018
- [7] Jinghui Suo, Jitao Sun, Yu Zhang, *Stability analysis for impulsive coupled systems on networks* in "Neurocomputing", Elsevier, 2013, pp. 272-277

- [8] A.S Abdel-Rady, I. Ameen, S. Z. Rida, A.M.A. El-Sayed, *On some impulsive differential equations* in "Mathematical Science Letters", Natural Sciences Publishing Cor., 2012, pp. 105-113
- [9] Y. Li, *Large-Scale Epidemic Models and a Graph-Theoretic Method for Constructing Lyapunov Functions* in "The dynamics of biological systems", Springer-Verlag, 2019, pp. 64-99