

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Teorema
della
curva di Jordan

Tesi di Laurea in Geometria

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Rita Fioresi

Presentata da:
Federica Sebastianelli

Sessione II
Anno Accademico 2010-2011

*A mio padre
e mia madre.*

Introduzione

In questa tesi tratteremo del teorema della curva di Jordan dal nome del matematico francese Camille Jordan che visse alla fine del diciannovesimo secolo.

Nei primi due capitoli daremo una dimostrazione rigorosa del teorema, specificando di volta in volta i mezzi di cui ci siamo serviti. Procederemo poi analizzando alcune applicazioni del teorema per arrivare infine a considerare il teorema di Schönflies attraverso alcuni elementi di teoria dei grafi.

Nel *Capitolo 1* troviamo una breve storia del teorema di Jordan e come questo fu affrontato dai matematici piú illustri, sia di quel periodo che a noi contemporanei.

Il *Capitolo 2* é articolato in diverse sezioni dove resta centrale il teorema di Jordan e la sua dimostrazione della quale specificheremo ogni dettaglio e particolare.

Proseguiremo stabilendo un criterio per determinare quale tra le curve di Jordan di determinato perimetro é quella di area massima tramite la disuguaglianza isoperimetrica.

Il *Capitolo 3* é costituito da alcuni elementi di teoria dei grafi. Vedremo poi come questi risultati possono essere utilizzati per dimostrare sia il teorema di Jordan sia una sua importante applicazione: il teorema di Schönflies.

Indice

1	Introduzione storica	9
1.1	Storia della topologia	9
1.2	Origine del problema	11
1.2.1	Disputa sulla dimostrazione	13
2	Teorema della curva di Jordan	17
2.1	Spazi topologici	17
2.2	Curve	19
2.3	Spazi metrici	21
2.4	Teorema della curva di Jordan	24
2.5	Approccio alternativo al teorema della curva di Jordan	32
2.6	Isoperimetria	36
2.6.1	Storia del problema isoperimetrico	37
2.6.2	Disuguaglianza isoperimetrica	38
3	Teoria dei grafi e teorema della curva di Jordan	45
3.1	Teoria dei grafi	45
3.2	Teorema della curva di Jordan	53
3.3	Teorema di Schönflies	56

Bibliografia

59

Elenco delle figure

1.1	Toro	10
1.2	Arco di Jordan	12
1.3	Fiocco di neve di Koch	13
2.1	Cammino	20
2.2	Curva di Jordan	22
2.3	Intorno tubolare	33
2.4	Diseguaglianza isoperimetrica	38
3.1	Grafo con 4 vertici	47
3.2	Grafo completo con 5 vertici, K_5	49
3.3	Grafo non planare, $K_{3,3}$	50

ELENCO DELLE FIGURE

ELENCO DELLE FIGURE

Capitolo 1

Introduzione storica

In questo primo capitolo ci prefiggiamo di fare una sintesi di ciò che poi affronteremo in dettaglio nei capitoli seguenti, prestando particolarmente attenzione agli aspetti storici dell'argomento in questione.

Iniziamo il nostro percorso dando l'enunciato del teorema della curva di Jordan.

Teorema 1.0.1. *Sia C una curva di Jordan nel piano \mathbb{R}^2 . Il suo complementare $\mathbb{R}^2 \setminus C$ è costituito da esattamente due componenti connesse, delle quali una è limitata e l'altra è illimitata e la curva C è il loro bordo comune.*

1.1 Storia della topologia

Iniziamo a parlare della topologia nel suo complesso e della sua evoluzione nel corso dei secoli.

Approfondiremo poi in dettaglio la storia relativa alla curva di Jordan e i problemi legati alla sua dimostrazione.

La *topologia* - o studio dei luoghi- è una delle più importanti branche della matematica moderna. Si caratterizza come lo studio delle proprietà delle

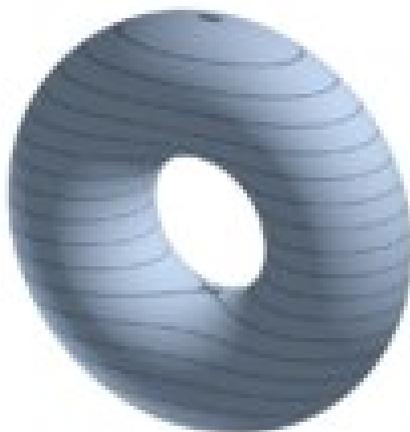


Figura 1.1: Toro

figure e delle forme a meno di deformazioni senza strappi, sovrapposizioni o incollature.

Concetti fondamentali come *convergenza*, *limite*, *continuità*, *connessione* o *compattezza* trovano nella topologia la loro migliore formalizzazione. La topologia si basa essenzialmente sui concetti di *spazio topologico*, *funzione continua* e *omeomorfismo*.

Intuitivamente un cubo e una sfera sono oggetti *topologicamente equivalenti* (cioé omeomorfi), perché possono essere deformati l'uno nell'altro senza ricorrere a nessuna incollatura, strappo o sovrapposizione; una sfera e un toro (Figura 1.1) invece non lo sono, perché il toro contiene un buco che non può essere eliminato da una deformazione.

L'articolo di *Eulero* del 1736 sui *Sette ponti di Königsberg*¹ [4], essendo uno dei primi risultati che non dipendono da nessun tipo di misura é considerato dagli storici uno dei primi risultati topologici.

¹Il *problema dei sette ponti di Königsberg* é un problema ispirato da una città reale e da una situazione concreta. Nel corso dei secoli é stata piú volte proposta la questione se sia possibile con una passeggiata seguire un percorso che attraversi ogni ponte una e una volta soltanto e tornare al punto di partenza.

Georg Cantor, l'inventore della teoria degli insiemi, iniziò a studiare la teoria degli insiemi di punti nello spazio euclideo verso la fine del XIX secolo. In seguito, nel 1895, *Henri Poincaré* introdusse nel suo *Analysis Situs* i concetti di omotopia e omologia, adesso considerati parte integrante della topologia algebrica [5].

Maurice Fréchet, unificando il lavoro sugli spazi di funzioni di *Cantor*, *Vito Volterra*, *Arzelá*, *Hadamard*, *Ascoli* e altri, nel 1906 introdusse il concetto di *spazio metrico* [5]. Nel 1914 *Felix Hausdorff*, generalizzando la nozione di spazio metrico, coniò il termine di spazio topologico e definì quello che oggi è detto *spazio di Hausdorff* (per ulteriori approfondimenti vedi Cap.8) [1, p.56]. Finalmente, nel 1922 *Kuratowsky*, con una ulteriore lieve generalizzazione fornì il concetto astratto odierno di spazio topologico [4].

1.2 Origine del problema

Il teorema della curva di Jordan ha avuto una evoluzione tortuosa nel corso dell'ultimo secolo.

Molti matematici si cimentarono nella dimostrazione del teorema e molti furono i dissensi fra loro, tuttavia il primo a darne una dimostrazione rigorosa fu *Camille Jordan* nel 1890.

Anche se molte di queste prove furono considerate non accettabili, vogliamo riportare almeno quelle che risultano essere più interessanti agli occhi di uno studioso di topologia e quelle che sono opera di matematici famosi.

Iniziamo analizzando le asserzioni seguenti:

1. **Teorema della curva di Jordan:** Il complementare di una curva chiusa semplice in \mathbb{R}^2 divide il piano in due componenti connesse.
2. Se un sottoinsieme D del piano euclideo è la frontiera di tutte le componenti del complementare $\mathbb{R}^2 - D$ e se quest'ultimo ha una componente limitata, allora D è una curva chiusa semplice.

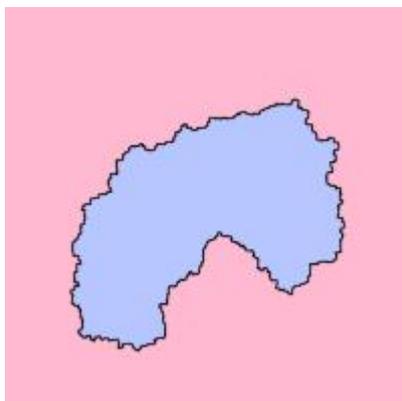


Figura 1.2: Arco di Jordan

Nonostante queste due affermazioni appaiono estremamente simili l'esempio dei *laghi di Wada* (vedi Figura 12A.1 [1, p.112])² ci dice che non sono tra loro equivalenti.

Vediamo ora come tale esempio può essere spiegato in termini matematici.

Consideriamo una regione a forma di disco con due fori che si può immaginare come un'isola circondata dal mare e con due laghi all'interno.

Scavando dei canali che partono dal mare dai due laghi otterremo tre aperti connessi. Al tempo $t = 0$ scaviamo un canale che parte dal mare in modo tale che ogni punto della terraferma abbia distanza minore o uguale di 1 dall'acqua marina. Al tempo $t = \frac{1}{2}$ scaviamo un canale che parte dal primo lago, in modo tale che ogni punto della terraferma abbia distanza minore di o uguale ad $\frac{1}{2}$ dall'acqua di quel lago.

Continuiamo in questo modo, scavando al tempo $t = 1 - (\frac{1}{2})^n$ un canale che parte dall'acqua x , in modo tale che ogni punto della terraferma abbia

²I laghi di Wada sono tre insiemi aperti e disgiunti del piano con la proprietà, tutt'altro che intuitiva, che hanno tutti la stessa frontiera. I laghi di Wada sono stati introdotti da Kunizō Yoneyama nel 1917, che ha accreditato la scoperta al suo maestro Takeo Wada [4].

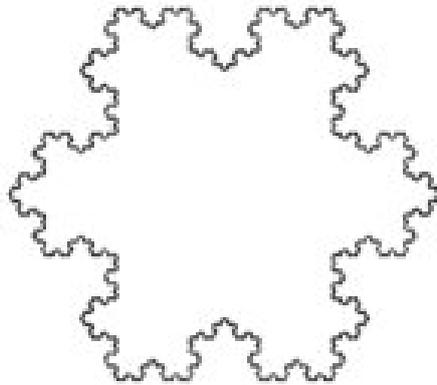


Figura 1.3: Fiocco di neve di Koch

distanza minore di o uguale a $(\frac{1}{2})^n$ dall' acqua x ; naturalmente i canali non devono intersecarsi. Il mare ed i due laghi con i rispettivi canali formano tre aperti connessi, e la rimanente terraferma D é la loro frontiera comune [1]. Quindi se la seconda asserzione fosse vera, D sarebbe una curva chiusa semplice e quindi non sarebbe valida la prima delle due asserzioni. In particolar modo le due asserzioni non possono essere entrambe vere per cui é valido il primo enunciato che é appunto il teorema della curva di Jordan.

1.2.1 Disputa sulla dimostrazione

L'enunciato del teorema della curva di Jordan puó sembrare ovvio in un primo momento, ma in realtà é un teorema piuttosto difficile da dimostrare. Bernard Bolzano é stato il primo a formulare una ipotesi precisa, osservando che non era un' evidente dichiarazione e che necessitava di una dimostrazione. Infatti la questione risulta banale se ci si limita a considerare poligonali, ma il problema si pone nel momento in cui si vuole generalizzarla a tutti i tipi di curve, anche quelle non differenziabili come ad esempio il *fiocco di neve di Koch* (Figura 1.3).

La prima dimostrazione del teorema risale a *Camille Jordan* nelle sue lezioni di analisi reale e pubblicato nel suo libro *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*.

Vi é una certa polemica sul fatto che la dimostrazione di Jordan fosse completa. La maggior parte dei matematici concorde che la prima prova completa fu data da *Oswald Veblen*, che, riguardo la dimostrazione data da Jordan, ha affermato quanto segue[1]:

La sua prova, tuttavia, é insoddisfacente per molti matematici. Si considera valido il teorema, pur non avendone date delle prove, nel caso particolare importante di un poligono semplice, e partendo da tale asserzione, non si riesce a giungere ad un teorema generale che valga per qualsiasi tipo di curva.

Tuttavia, *Thomas Hales* ha scritto[4]:

Prendendo atto di tutte le critiche dei matematici moderni nei confronti della dimostrazione data da Camille Jordan, sono rimasto sorpreso del fatto che leggendo la sua prova non vi ho trovato nulla di riprovevole. Da allora, ho contattato alcuni di colororo che avevano criticato Jordan, e nessuno di loro é riuscito a trovarmi un errore specifico nella tanto contestata dimostrazione.

Hales ha anche sottolineato che il caso particolare di poligoni semplici non é solo un facile esercizio, e tuttavia Jordan non utilizza poi in seguito questo risultato. A tal proposito *Reeken* scrisse[4]:

La dimostrazione di Jordan é essenzialmente corretta anche se i dettagli non sono spiegati in modo soddisfacente. Nonostante questo l'idea é giusta e con qualche rifinitura la prova sarebbe stata impeccabile.

La prova di Jordan e un'altra prova data successivamente da *Vallée-Poussin*, sono state analizzate in modo critico da *Schönflies* nel 1924 [2].

Data l'importanza del teorema curva di Jordan, se ne sono interessati eminenti matematici della prima metà del XX secolo. Infatti varie prove del teorema ed alcune sue generalizzazioni sono state date da *J. Alexander*, *A. Antoine*, *Bieberbach*, *L.J. Brouwer*, *A. Denjoy*, *F.M. Hartogs*, *Schönflies* [4]. Inoltre si stanno ancora cercando altre dimostrazioni di tale teorema.

Citiamo ora alcune dimostrazioni del teorema di Jordan:

- la prova data da *Maehara* (1984) [4] utilizzando il teorema del punto fisso di Brouwer;
- la prova di *Gordon O. Berg, W. Giuliano e R. Miniere* (1975);
- *Thomassen* (1992) ne diede una prova usando la non planarità del grafo $K_{3,3}$ (come vedremo nel Cap.3 riguardante la teoria dei grafi);
- *Helge Tverberg* [1] che poi é quella alla quale faremo riferimento nel prossimo capitolo.

La prima prova formale del teorema della curva di Jordan é stata creata da *Hales* nel gennaio 2005 e comprendeva circa 60.000 linee.

Un' altra rigorosa dimostrazione formale di 6500 righe é stata prodotta nel 2005 da un team internazionale di matematici utilizzando il sistema Mizar [2].

Capitolo 2

Teorema della curva di Jordan

Questo é il capitolo centrale della tesi nel quale, dopo un breve introduzione alla teoria delle curve e agli spazi metrici, daremo la dimostrazione del nostro teorema.

Iniziamo fornendo delle nozioni basilari sugli spazi topologici.

2.1 Spazi topologici

Definizione 2.1. Sia X un insieme e sia \mathcal{U} una famiglia di sottoinsiemi di X che soddisfa le seguenti condizioni:

1. $\emptyset \in \mathcal{U}$, $X \in \mathcal{U}$;
2. l'intersezione di due elementi di \mathcal{U} appartiene ad \mathcal{U} ;
3. l'unione di una qualsiasi famiglia di elementi di \mathcal{U} appartiene a \mathcal{U} .

Una famiglia \mathcal{U} con queste proprietà si dice *topologia* su X che a sua volta si dice *spazio topologico*.

Gli elementi $u \in \mathcal{U}$ sono chiamati *insiemi aperti* o semplicemente *aperti* di X e gli elementi di X sono chiamati *punti* di X .

Per definire uno spazio topologico si può usare, in alternativa a quella di insieme aperto, la nozione di insieme chiuso. Diamo pertanto la seguente definizione:

Definizione 2.2. Un sottoinsieme C di uno spazio topologico X si dice *chiuso* se e solo se $X \setminus C$ è aperto.

Proprietá analoghe a quelle che abbiamo visto per gli insiemi aperti valgono anche per gli insiemi chiusi come si può vedere nel teorema successivo.

Teorema 2.1.1. *Valgono le seguenti condizioni:*

- \emptyset e X sono chiusi;
- l'unione di due chiusi é chiusa;
- l'intersezione di una qualsiasi famiglia di chiusi é chiusa.

Diamo ora la nozione di funzione continua tra spazi topologici in termini di insiemi aperti :

Definizione 2.3. Una funzione $f : X \longrightarrow Y$ fra due spazi topologici si dice *continua* se per ogni aperto U di Y la controimmagine $f^{-1}(U)$ é aperta in X .

Definizione 2.4. Siano X e Y due spazi topologici; si dice che X e Y sono *omeomorfi* se esistono due funzioni continue $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow X$ che siano l'una l'inversa dell'altra. In tal caso scriveremo $X \simeq Y$ e diremo che f e g sono *omeomorfismi* fra X e Y .

Equivalentemente un omeomorfismo é una funzione biettiva e continua la cui inversa é anch'essa continua.

La nozione di omeomorfismo fra spazi topologici é una relazione di equivalenza, e la topologia non é altro che lo studio delle classi di equivalenza di tale relazione.

Ci sono delle proprietà che valgono a meno di omeomorfismi e la connessione e la compattezza ne costituiscono i due esempi più rilevanti.

Per tale motivo riportiamo ora la definizione di spazio compatto e connesso.

Definizione 2.5. Un *ricoprimento* di un sottoinsieme S di un insieme X è una famiglia di sottoinsiemi $\{U_j | j \in J\}$ di X tale che $S \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$.

Il ricoprimento viene detto *finito* se l'insieme di indici J è finito.

Invece il ricoprimento si dice *aperto* se U_j è un sottoinsieme aperto di X per ogni $j \in J$.

Definizione 2.6. Un sottoinsieme S di uno spazio topologico X si dice *compatto* se ogni ricoprimento aperto di S ammette un sottoricoprimento finito.

Definizione 2.7. Altrimenti X si dice *connesso* se i suoi soli sottoinsiemi simultaneamente aperti e chiusi sono \emptyset e X stesso.

Un sottoinsieme di X si dice connesso se è connesso come spazio topologico con la topologia indotta.

Invece una *componente connessa* di X è un suo sottospazio connesso massimale; cioè è un sottospazio che non è propriamente contenuto in un altro sottospazio connesso.

2.2 Curve

In questa sezione daremo la definizione di curva e ne enunceremo alcune proprietà soffermandoci per di più sulle curve piane che sono quelle che maggiormente ci interessano.



Figura 2.1: Cammino

Definizione 2.8. Un *arco* (o *cammino*) in uno spazio X é un'applicazione continua $f : [0, 1] \rightarrow X$; $f(0)$ é detto punto iniziale e $f(1)$ punto finale dell'arco.

Si noti che l'arco é definito come l'applicazione f e non come l'immagine $f([0, 1])$ che é invece chiamata una *curva* in X . L'immagine insiemistica di f , in altre parole $f([0, 1])$, é detto *sostegno della curva*.

Definizione 2.9. Una *curva di Jordan* (vedi Figura 1.2) é una curva piana semplice. In altre parole é una funzione continua $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ a valori nel piano cartesiano \mathbb{R}^2 tale che:

- la curva sia chiusa, ovvero tale che abbia estremi coincidenti $f(0) = f(1)$
- la curva sia semplice, cioè senza punti di intersezione; in formule $f(x) \neq f(y)$ per tutti gli $x \neq y$ eccetto gli estremi (in altri termini la funzione f é iniettiva).

Inoltre chiameremo *esterno* di una curva di Jordan $C \subset \mathbb{R}^2$ l'unica componente connessa illimitata di $\mathbb{R}^2 \setminus C$ e la indicheremo con $est(C)$. Mentre

con *interno* di C ($\text{int}(C)$) indicheremo la componente connessa limitata del complementare della curva C nel piano.

Proposizione 2.2.1. *Una curva $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua semplice non chiusa é un omeomorfismo con la sua immagine. Quindi in particolare una curva di Jordan C é un sottospazio di \mathbb{R}^2 omeomorfo ad $\mathbf{S}^1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$. Se $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é una funzione continua ed iniettiva con $f(S^1) = C$ diremo che la curva di Jordan é data dalla funzione f .*

Per il topologo, spazi omeomorfi sono indistinguibili. Ad esempio, come ci spiega il Manetti[3, p.8], egli non fa alcuna differenza fra i seguenti intervalli:

$$]0, 1[,]0, 2[,]0, +\infty[,]-\infty, +\infty[.$$

Sono infatti omeomorfismi le applicazioni $f :]-\infty, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ data da $f(x) = e^x$, $g :]0, +\infty[\rightarrow]0, 1[$ data da $g(x) = e^{-x}$ e $h :]0, 1[\rightarrow]0, 2[$ data da $h(x) = 2x$.

Quindi senza perdere generalitá possiamo considerare la circonferenza S^1 al posto della curva di Jordan C e per facilitarne la dimostrazione useremo tale risultato nel Teorema 2.3.4.

Ci tornerá utile nel corso della dimostrazione del teorema di Jordan anche la seguente definizione:

Definizione 2.10. Una curva di Jordan é chiamata *poligono di Jordan* se consiste di un numero finito di segmenti di retta.

2.3 Spazi metrici

Richiamiamo ora le definizioni di continuitá e di continuitá uniforme per gli spazi metrici che ci porteranno ad analizzare due risultati che utilizzeremo per raggiungere il nostro obiettivo: la dimostrazione del teorema di Jordan. Per comprendere meglio quanto segue iniziamo definendo uno spazio metrico:

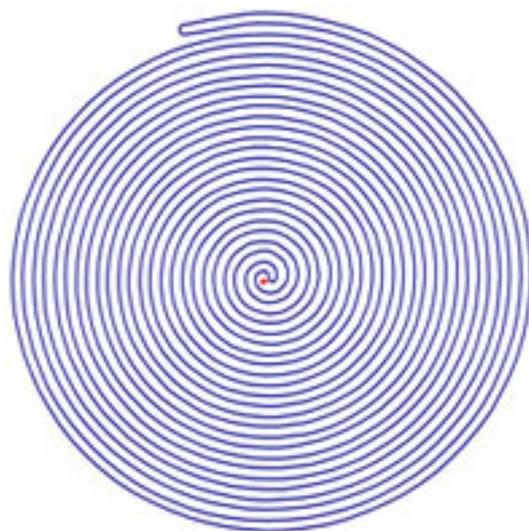


Figura 2.2: Curva di Jordan

Definizione 2.11. Sia A un insieme. Si dice *metrica* su A una funzione $d : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa le condizioni seguenti:

1. $d(a, b) \geq 0$ e $d(a, b) = 0$ se e solo se $a = b$;
2. $d(a, b) = d(b, a)$ (*proprietá simmetrica*);
3. $d(a, b) + d(a, c) \geq d(b, c)$ per ogni $a, b, c \in A$.

Tale proprietá é nota con il nome di *diseguaglianza triangolare*.

La coppia (A, d) é detto uno *spazio metrico*.

Vediamo ora quando una funzione fra spazi metrici si puó considerare continua o uniformemente continua e come queste due proprietá differiscono tra loro.

Definizione 2.12. Siano (A, d_A) e (B, d_B) due spazi metrici. Diremo che una funzione $f : A \rightarrow B$ é *continua* nel punto $x \in A$ se e solo se per ogni

$\epsilon_x > 0$ esiste un $\delta_x > 0$ tale che $d_B(f(y), f(x)) < \epsilon_x$ se $d_A(y, x) < \delta_x$.

Diremo che f é *continua* se é continua in ogni punto di A .

Invece f si dice *uniformemente continua* se, per ogni $\epsilon > 0$, $\exists \sigma > 0$ tale che per ogni coppia x, y di punti di A con $d_A(x, y) < \sigma$ si ha $d_B(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Si vede quindi come le due definizioni, pur essendo molto simili, non sono equivalenti tra loro; possono tuttavia coincidere sotto opportune condizioni come ci mostra il prossimo teorema.

Teorema 2.3.1. *Siano M_1 e M_2 due spazi metrici con metriche rispettivamente d_1 e d_2 e sia $f : M_1 \rightarrow M_2$ una funzione continua. Se M_1 é compatto allora f é uniformemente continua.*

Dimostrazione. Fissato $\epsilon > 0$, per ogni $x \in M_1$ esisterá un $\sigma(x) > 0$ tale che $d_2(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2}$ per ogni $y \in M_1$ con $d_1(x, y) < 2\sigma(x)$. Poiché M_1 é compatto, il ricoprimento $\{B_{\sigma(x)} | x \in M_1\}$ ammette un sottoricoprimento finito:

$$\{B_{\sigma(x_1)}(x_1), B_{\sigma(x_2)}(x_2), \dots, B_{\sigma(x_n)}(x_n)\}.$$

Sia $\sigma = \min\{\sigma(x_1), \sigma(x_2), \dots, \sigma(x_n)\}$; dati allora $x, y \in M_1$ con $d_1(x, y) < \sigma$, si avrá $x \in B_{\sigma(x_i)}(x_i)$ per qualche $i \in \{1, \dots, n\}$ e quindi, essendo $\sigma \leq \sigma(x_i)$,

$$d_2(f(x), f(x_i)) < \frac{\epsilon}{2}$$

Inoltre:

$$d_1(y, x_i) \leq d_1(y, x) + d_1(x, x_i) < \sigma + \sigma(x_i) \leq 2\sigma(x_i)$$

e quindi:

$$d_2(f(x), f(y)) \leq d_2(f(x), f(x_i)) + d_2(f(x_i), f(y)) < \epsilon$$

pertanto f é uniformemente continua. □

Corollario 2.3.2. *Ogni funzione continua $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uniformemente continua.*

Corollario 2.3.3. *Siano M_1 e M_2 due spazi metrici con metriche rispettivamente d_1 e d_2 , e sia $f : M_1 \rightarrow M_2$ una funzione continua. Se M_1 é compatto e $f : M_1 \rightarrow f(M_1)$ é un omeomorfismo, allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\sigma > 0$ tale che $d_1(x, y) < \epsilon$ se $d_2(f(x), f(y)) < \sigma$.*

2.4 Teorema della curva di Jordan

Siamo quindi in grado di dare una dimostrazione rigorosa del Teorema della curva di Jordan. Infatti in quest'ultima sezione del capitolo ne riporteremo nuovamente l'enunciato e ne daremo una dimostrazione rigorosa approfondendo ogni sua parte.

Teorema 2.4.1. *Il Teorema della curva di Jordan afferma che se C é una curva chiusa semplice nel piano euclideo, il complementare $\mathbb{R}^2 \setminus C$ é sconnesso e consiste di due componenti, l'una limitata e l'altra no, che hanno entrambe C come frontiera.*

Si dimostra che il teorema della curva di Jordan vale per un poligono di Jordan e poi si generalizza questo risultato al caso in cui la curva in questione sia una curva di Jordan qualsiasi.

Teorema 2.4.2. *Se C é un poligono di Jordan, $\mathbb{R}^2 \setminus C$ consiste di due componenti, aventi entrambe C come frontiera, una delle quali é limitata e l'altra no.*

Dimostrazione. La dimostrazione, qui omessa, si puó trovare nel Kosniowski[1, p.113]. □

I due teoremi che seguono descrivono delle proprietà delle curve di Jordan e derivano dalla continuità uniforme che abbiamo precedentemente discusso nella sezione 2.3 e, più precisamente, nel Teorema 2.3.1.

Teorema 2.4.3. *Sia C una curva di Jordan data da $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste un poligono di Jordan C' dato da $f' : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tale che $|f(x) - f'(x)| < \epsilon$ per ogni $x \in S^1$.*

Dimostrazione. Per la continuità uniforme di f , esisterà un $\epsilon_1 > 0$ tale che:

$$|x - y| < \epsilon_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Per il Corollario 2.3.3 esisterà inoltre un $\epsilon_2 > 0$ per il quale vale:

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon_2 \Rightarrow |x - y| < \min\{\epsilon_1, \sqrt{3}\}.$$

La ragione per cui appare $\sqrt{3}$ è che per ogni sottoinsieme A di S^1 di diametro minore di $\sqrt{3}$ è univocamente individuato l'arco più piccolo che contiene A . Sia $\sigma = \min\{\frac{\epsilon}{2}, \epsilon_2\}$ e ricopriamo C con delle regioni quadrate Q_1, Q_2, \dots, Q_n di diametro δ che si intersecano solo nei lati. Poiché $\delta \leq \epsilon_2$, rimane univocamente determinato l'arco minore $A_1 \neq S^1$ che contiene $f^{-1}(Q_1)$; raddrizzando $f(A_1)$ si ottiene un'altra curva di Jordan C_1 : in altri termini, ponendo $e(t) = \exp(2\pi it)$ e $A_1 = \{e(t) | a \leq t \leq b\}$, definiamo $f_1 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mediante:

- $f_1(e(t)) = f(e(t))$ se $e(t) \notin A_1$
- $f_1(e(t)) = (1 - \frac{t-a}{b-a})f(e(a)) + \frac{t-a}{b-a}f(e(b))$ se $e(t) \in A_1$.

Indichiamo allora con C_1 la curva di Jordan data da f_1 . Si noti che $f(A_1)$ non è necessariamente contenuto in Q_1 e che $f_1^{-1}(Q_i) \subseteq f^{-1}(Q_i)$ per $i = 2, 3, \dots, n$. Sia ora C_2 la curva data da $f_2 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ottenuta raddrizzando $f_1(A_2)$, dove A_2 è il più piccolo arco contenente $f_1^{-1}(Q_2)$. Avremo di nuovo $f_2^{-1}(Q_i) \subseteq f^{-1}(Q_i)$ per $i = 3, 4, \dots, n$. Procediamo in questo modo fino ad ottenere un poligono di Jordan C_n dato da $f_n : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Dimostriamo ora che C_n è il poligono richiesto. Sia $x \in S^1$ e supponiamo

$f_n(x) \neq f(x)$; si avrà allora $f_n(x) = f_j(x) \neq f_{j-1}(x)$ per qualche $j \geq 1$. Per costruzione, x apparterrá ad un arco A_j , di cui indicheremo con y e z gli estremi. Dalla definizione di f_j segue che $f_j(y) = f(y)$ e $f_j(z) = f(z)$; quindi:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f(y) + f_j(y) - f_j(x)| \leq \\ |f(x) - f(y)| + |f_j(y) - f_j(x)| &\leq |f(x) - f(y)| + \delta \leq |f(x) - f(y)| + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Si noti ora che $|x-y| < |z-y|$ e che $|z-y| < \epsilon_1$ perché $|f(z) - f(y)| \leq \delta \leq \epsilon_2$; ne segue che $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$. Avremo perciò:

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

A differenza del precedente il prossimo teorema é riferito in particolar modo ai poligoni di Jordan.

Teorema 2.4.4. *Se C é un poligono di Jordan dato da $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, esiste nella componente limitata di $\mathbb{R}^2 \setminus C$ un disco aperto il cui bordo contiene due punti $f(a), f(b)$ di C con $|a - b| \geq \sqrt{3}$.*

Dimostrazione. Denotiamo con X la componente limitata di $\mathbb{R}^2 \setminus C$ e sia r il massimo numero reale per il quale esiste un disco aperto D contenuto in X il cui bordo contenga due punti $f(a), f(b)$ con $|a - b| = r$. Dobbiamo dimostrare che $r \geq \sqrt{3}$.

Supponiamo per assurdo che $|a-b| = r < \sqrt{3}$; allora a e b non sono diametralmente opposti. Denotiamo con A il piú lungo dei due archi di estremi a e b ; A ha lunghezza $\geq \frac{4\pi}{3}$ e quindi per ogni $c \in A$, $\max\{|a-c|, |b-c|\} > |a-b| = r$; per la massimalitá di r , se il bordo di un disco D' contenuto in X contiene $f(a)$ e $f(b)$, tale bordo interseca $f(A)$ solo nei punti $f(a)$ e $f(b)$.

Siano $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ i vertici di C appartenenti a $f(A)$ riportati nell'ordine in cui si incontrano percorrendo C da $f(a)$ a $f(b)$.

Vi sono quattro possibilitá:

1. $v_1 \neq a, v_n \neq b$
2. $v_1 \neq a, v_n = b$
3. $v_1 = a, v_n \neq b$
4. $v_1 = a, v_n = b$

Nel primo caso la circonferenza ∂D é tangente al segmento l_1 di estremi $f(a), f(v_1)$ e al segmento l_n di estremi $f(v_n), f(b)$; esiste allora un disco $D' \subseteq X$ vicino a D il cui bordo $\partial D'$ contiene due punti $f(a'), f(b')$, vicini a $f(a)$ e $f(b)$, e appartenenti rispettivamente ad l_1 e l_n . Ma in tal caso si avrà $|a' - b'| > |a - b| = r$, il che contraddice la massimalità di r .

Nel secondo caso, e similmente nel terzo, la circonferenza ∂D é tangente al segmento l_1 di estremi $f(a), f(v_1)$; potremmo allora trovare un disco $D' \subseteq X$ il cui bordo $\partial D'$ contenga un punto di l_1 vicino ad $f(a)$ e un punto del segmento $f(b)f(v_{n-1})$ vicino ad $f(b)$; anche in questo caso viene meno la massimalità di r .

Per il caso (4), consideriamo un punto x che si muove sull' asse del segmento di estremi $f(a), f(b)$ allontanandosi dal centro z di D e mantenendosi nella regione di piano limitata da $f(A)$ e dai due segmenti di estremi $z, f(a)$ e $z, f(b)$; denotiamo con D_x il disco aperto centrato in x di estremi $f(a)$ e $f(b)$. Poiché $D_z \subseteq X$, esisterá un ultimo punto y tale che $D_y \subseteq X$. Si hanno per ∂D_y due possibilità:

- o ∂D_y interseca $f(A)$ in un punto diverso da $f(a)$ e $f(b)$, il che é da escludere per quanto osservato precedentemente;
- oppure ∂D_y é tangente ad uno dei due segmenti di estremi $f(a), f(v_1)$ e $f(v_{n-1}), f(b)$ rispettivamente. Analogamente al secondo caso, anche quast'ultima possibilità implica una contraddizione.

Abbiamo cosí escluso tutti e quattro i casi e quindi la dimostrazione é completa. □

Passiamo ora ad esaminare la dimostrazione del teorema nel caso generale che si divide in due parti: nella prima si dimostra che il complementare della curva stessa nel piano euclideo é sconnesso e nell'altra si prova che una curva di Jordan C ha al piú due componenti connesse. Iniziamo con il dimostrare che il complementare di una curva di Jordan non é connesso in \mathbb{R}^2 .

Teorema 2.4.5. *Se C é una curva di Jordan, $\mathbb{R}^2 \setminus C$ non é connesso.*

Dimostrazione. Sia C_1, C_2, \dots una successione di poligoni di Jordan che convergono a C (piú precisamente sia $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$ una successione di numeri reali positivi che converge a zero e sia C_i un poligono di Jordan, a distanza ϵ_i da C , la cui esistenza é garantita dal Teorema 2.4.3). Siano f_1, f_2, \dots le applicazioni che definiscono C_1, C_2, \dots ; quindi $f_n \rightarrow f$ quando $n \rightarrow \infty$. Per il Teorema 2.4.4, per ogni C_n esiste una circonferenza S_n (che borda un disco contenuto nella componente limitata di $\mathbb{R}^2 \setminus C_n$) passante per due punti $f_n(a_n)$ e $f_n(b_n)$, con $|a_n - b_n| \geq \sqrt{3}$. Poiché le curve C_n sono tutte vicine, esiste un disco D_0 che le contiene tutte; tale disco contiene allora la componente limitata di $\mathbb{R}^2 \setminus C_n$ per ogni n . In particolare, D_0 contiene il centro z_n di S_n per ogni n ; ne segue che la successione z_1, z_2, \dots é limitata e quindi ammette una sottosuccessione convergente. Possiamo quindi supporre che la successione (z_n) converga ad un punto z .

Dimostriamo ora che se n é sufficientemente grande, la componente limitata di $\mathbb{R}^2 \setminus C_n$ contiene il punto z . Sia $\delta > 0$ un numero reale tale che $|f(x) - f(y)| \geq \delta$ se $|x - y| \geq \sqrt{3}$; allora $|f(a_n) - f(b_n)| \geq \delta$ per ogni n ; ma per n sufficientemente grande, cioè $n \geq N$ si ha $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\delta}{4}$, e quindi $|f_n(a_n) - f_n(b_n)| > \frac{\delta}{2}$; ne segue che per $n \geq N$, S_n ha diametro maggiore di $\frac{\delta}{2}$, pertanto $d(z_n, C_n) > \frac{\delta}{4}$. Ma, se n é sufficientemente grande, $|z - z_n| < \frac{\delta}{2}$ e quindi z e z_n giacciono sulla stessa componente di $\mathbb{R}^2 \setminus C_n$. Poiché per costruzione z_n giace in quella limitata, z appartiene alla componente limitata di $\mathbb{R}^2 \setminus C_n$.

Inoltre $z \notin C$: infatti, se $z \in C$, $z = f(a)$ per qualche $a \in S^1$ e quindi:

$$|z_n - f_n(a)| \leq |z_n - z| + |f(a) - f_n(a)|,$$

il che implica che il raggio di S_n converge a zero mentre abbiamo appena visto che (per n sufficientemente grande) esso é maggiore di 2δ per qualche $\delta > 0$.

Supponiamo ora per assurdo che $\mathbb{R}^2 \setminus C$ sia connesso; essendo un aperto di \mathbb{R}^2 , esso sará connesso per archi¹. Avremo allora un arco g in $\mathbb{R}^2 \setminus C$ che unisce z ad un punto y fuori di D_0 , e sia $\delta = d(g(I), C)$. Se n é grande a sufficienza si avrá $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\delta}{2}$ e quindi $d(g(I), C_n) > \frac{\delta}{2} > 0$. Quindi g é un arco in $\mathbb{R}^2 \setminus C_n$; poiché y appartiene alla componente illimitata di $\mathbb{R}^2 - C_n$, anche z appartiene a tale componente illimitata, il che contraddice quanto abbiamo dimostrato prima.

□

Per dimostrare la seconda parte del teorema di Jordan abbiamo bisogno di una definizione e di un lemma:

Definizione 2.13. Una *corda* Γ di una curva di Jordan C é un segmento di retta che interseca C solo nei due estremi del segmento. Quindi, eccezione fatta per i due estremi, Γ giace in $\mathbb{R}^2 - C$.

Bisogna inoltre aggiungere che se C é un poligono di Jordan e Γ é una corda di C , $\Gamma \subseteq X \cup C$, dove X é una delle componenti di $\mathbb{R}^2 - C$, ed inoltre $X - \Gamma$ consiste di due componenti.

Lemma 2.4.6. *Siano C un poligono di Jordan, X una componente di $\mathbb{R}^2 - C$, a e b due punti di X e δ un numero reale positivo tale che $\delta \leq d(\{a, b\}, C)$. Supponiamo che per ogni corda Γ di C in $X \cup C$ di lunghezza minore o uguale a 2δ , a e b appartengono alla stessa componente di $X - \Gamma$; allora esiste un arco g in X da a a b tale che $d(g(I), C) \geq \delta$.*

¹Esiste un *Teorema* che mi dice che ogni sottoinsieme E di \mathbb{R}^n aperto, connesso e non vuoto é connesso per archi[1, p.107]

Dimostrazione. La dimostrazione é alquanto intuitiva e noi riportiamo quella fatta dal Kosniowski[1, p.120].

Immaginiamo di centrare in a un disco aperto di raggio δ e poi spingerlo verso b mantenendolo entro X ; se ciò é possibile, il centro del disco descrive un arco g con la proprietá richiesta. L'unica ostruzione a questo movimento sarebbe l'esistenza di una strozzatura che impedisce il passaggio del disco, ossia l'esistenza di una corda di lunghezza minore di 2δ (che é il diametro del disco) in $X \cup C$. Ma le ipotesi che abbiamo sulle corde ci assicurano che ciò non accade. \square

Facendo tesoro di tutto ciò di cui abbiamo fino ad ora parlato, siamo in grado di dimostrare la seconda ed ultima parte del teorema.

Teorema 2.4.7. *Se C é una curva di Jordan, $\mathbb{R}^2 - C$ ha al piú due componenti.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esistano tre punti di $\mathbb{R}^2 - C$ appartenenti a tre sue componenti distinte. Siano $\epsilon = d(\{p, q, r\}, C)$ e C_1, C_2, \dots una successione di poligoni di Jordan (dati da f_1, f_2, \dots rispettivamente) che converge a C . Se n é sufficientemente grande, $d(C_n, C) < \frac{\epsilon}{2}$ e quindi $d(\{p, q, r\}, C_n) > \frac{\epsilon}{2}$. Poiché $\mathbb{R}^2 - C_n$ ha due sole componenti (*Teorema 2.4.2*), due dei tre punti p, q, r appartengono alla stessa componente X_n di $\mathbb{R}^2 - C_n$; passando ad una sottosuccessione se necessario, possiamo quindi supporre che p e q appartengano a X_n per ogni n .

Fissiamo un numero δ con $0 < \delta \leq \frac{\epsilon}{2}$. Per ogni dato $n \in \mathbf{N}$ si ha $\delta \leq d(\{p, q\}, C)$ e quindi, per il lemma visto sulle corde di una curva di Jordan, almeno una delle asserzioni seguenti é vera:

1. esiste un arco g_n in X_n da p a q con $d(g_n(I), C_n) \geq \delta$;
2. esiste una corda Γ_n in X_n di lunghezza minore di 2δ tale che p e q appartengono a componenti diverse di $X_n - \Gamma_n$.

Sia A_δ l'insieme degli $n \in \mathbf{N}$ per cui vale la condizione (1): dimostriamo che A_δ é finito. Sia infatti $N \in \mathbf{N}$ un intero tale che $d(C_n, C) < \frac{\delta}{2}$ per $n \geq N$;

se A_δ fosse infinito, conterrebbe almeno un $n \geq N$ e per tale n si avrebbe $d(g_n(I), C) > \frac{\delta}{2} > 0$; ma allora g_n sarebbe un arco in $\mathbb{R}^2 - C$ congiungente p con q , e quindi p e q apparterebbero alla stessa componente di $\mathbb{R}^2 - C$ contro l'ipotesi.

Fissiamo una successione $\delta'_1, \delta'_2, \dots$ convergente a zero, con $0 \leq \delta'_i \leq \frac{\epsilon}{2}$, e costruiamo una sottosuccessione $n_1 < n_2 < \dots$ nel modo seguente: partiamo da $n_1 \notin A(\delta'_1)$; poiché $A(\delta'_2)$ é finito, esisterá un $n_2 \notin A(\delta'_2)$ con $n_2 > n_1$; analogamente esisterá un $n_3 \notin A(\delta'_3)$ con $n_3 > n_2$ e cosí via. Poiché ogni $n \in \mathbf{N}$ non appartenente a $A(\delta_i)$ soddisfa la seconda condizione, la sottosuccessione $B = \{n_1, n_2, \dots\}$ é tale che ogni $n \in B$ soddisfa la (2), dove se $n = n_i$ abbiamo posto $\delta_n = \delta'_{ni}$, e quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ con $n \in B$. Allora per ogni $n \in B$ esiste una corda Γ_n in X_n di lunghezza minore di $2\delta_n$, tale che p e q appartengono a componenti diverse di $X_n - \Gamma_n$. Siano $f_n(a_n)$ e $f_n(b_n)$ gli estremi di tale corda. Poiché δ_n converge a zero, si avrá:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(a_n) - f_n(b_n)) = 0, \quad n \in B$$

e quindi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(a_n) - f(b_n)) = 0, \quad n \in B,$$

il che implica che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0, \quad n \in B$$

Poiché p e q appartengono a componenti diverse di $X_n - \Gamma_n$ ($n \in B$), passando ad una sottosuccessione se necessario, possiamo supporre che uno dei due punti, diciamo p , appartenga alla componente di $X_n - \Gamma_n$ limitata da Γ_n e da $f_n(A_n)$, dove A_n é l'arco piú corto di S^1 di estremi a_n e b_n . Poiché $a_n - b_n$ converge a zero, se $n \in B$ é sufficientemente grande il diametro di questa componente sará minore di ϵ . In particolare $|p - f(a_n)| < \epsilon$, il che contraddice l'ipotesi che $d(p, C) \geq \epsilon$. \square

Abbiamo quindi dimostrato che se C é una curva di Jordan, $\mathbb{R}^2 - C$ consiste di due componenti connesse, l'una limitata e l'altra no. Ci manca

solo da verificare che C é la frontiera di entrambe le componenti di $\mathbb{R}^2 - C$ e questo é ciò che andremo a fare tra un po' quando vedremo, nella sezione che segue, come l'intorno tubolare può essere applicato al teorema di Jordan.

Osservazione 1. Il teorema della curva di Jordan vale per curve continue qualsiasi, anche non necessariamente differenziabili. Inoltre, la chiusura della componente connessa limitata del complementare del sostegno di una curva di Jordan (continua) é omeomorfa ad un disco chiuso *teorema di Schönflies* (vedi Teorema 3.3.1) che vedremo poi nel terzo capitolo.

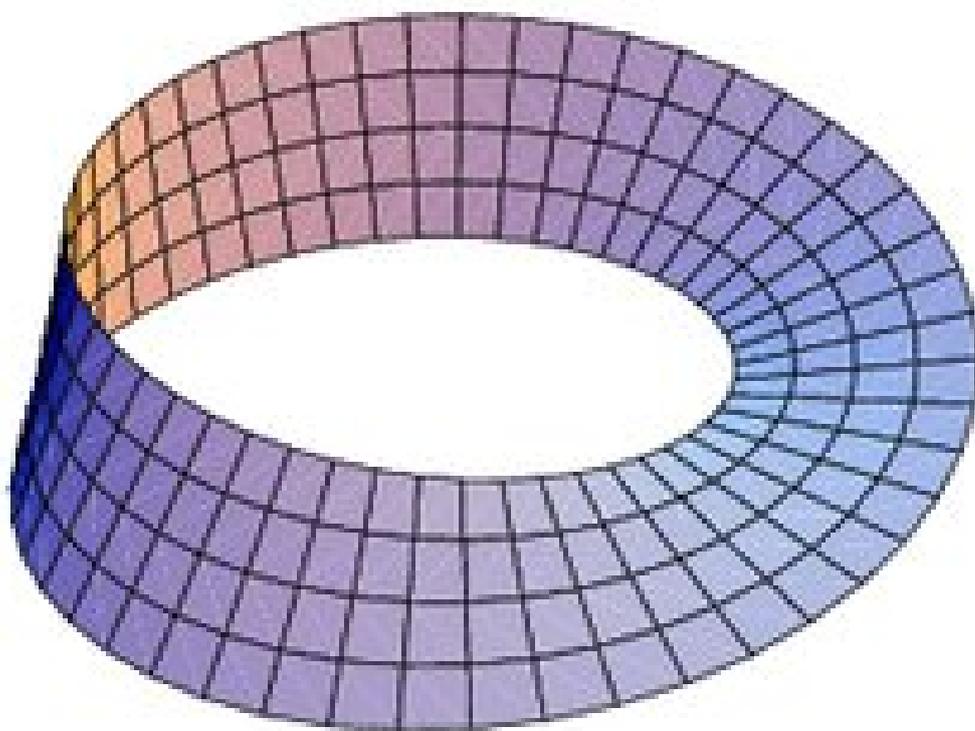
2.5 Approccio alternativo al teorema della curva di Jordan

Procediamo ora dando una dimostrazione alternativa della prima parte del teorema di Jordan che, a differenza di quella riportata nella sezione precedente, sfrutta le proprietà dell'intorno tubolare che andiamo ora a definire.

Definizione 2.14. Intorno tubolare Sia $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regolare semplice nel piano di sostegno $C = \sigma([a, b])$. Dato $\epsilon > 0$ e $p = \sigma(t) \in C$, indichiamo con $I_\sigma(p, \epsilon)$ il segmento $\sigma(t) + (-\epsilon, \epsilon)\tilde{n}(t)$ di lunghezza 2ϵ centrato in p e ortogonale a $\sigma'(t)$, dove $\tilde{n}(t)$ é il versore normale orientato di σ in $\sigma(t)$. Indichiamo inoltre con $N_\sigma(\epsilon)$ l'unione dei segmenti $I_\sigma(p, \epsilon)$, al variare di $p \in C$. L'insieme $N_\sigma(\epsilon)$ si chiama *intorno tubolare di σ* se ϵ é tale che $I_\sigma(p_1, \epsilon) \cap I_\sigma(p_2, \epsilon) = \emptyset$ per ogni $p_1 \neq p_2 \in C$.

Teorema 2.5.1. Esistenza dell'intorno tubolare.

Sia $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regolare semplice di classe C^2 . Allora esiste



tubolare.jpg

Figura 2.3: Intorno tubolare

$\epsilon_0 > 0$ tale che $N_\sigma(\epsilon)$ é un intorno tubolare di σ per ogni $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$. In particolare, $N_\sigma(\epsilon)$ é un intorno aperto del sostegno di σ (esclusi gli estremi se la curva non é chiusa).

Dimostrazione. Prima di tutto ricordiamo che dire che la curva σ é di classe C^2 in $[a, b]$ vuol dire che si estende a un'applicazione di classe C^2 in un intorno aperto I di $[a, b]$. In particolare, se σ é chiusa la possiamo estendere a un'applicazione periodica di classe C^2 definita su tutto \mathbb{R} .

Cominciamo col dimostrare l'esistenza locale dell'intorno tubolare. Definiamo un'applicazione $F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ponendo:

$$F(t, x) = \sigma(t) + x\tilde{n}(t),$$

in modo che $N_\sigma(\epsilon) = F([a, b] \times (-\epsilon, \epsilon))$. Trattandosi di una curva nel piano la regolaritá del versore normale $\tilde{n} = (\tilde{n}_1, \tilde{n}_2)$ coincide con la regolaritá del versore tangente \mathbf{t} , che é di classe C^1 ; quindi l'applicazione F é di classe C^1 . Ora il determinante jacobiano di F in $(t, 0)$ é:

$$\mathbf{det} = \begin{pmatrix} \sigma'_1(t) & \sigma'_2(t) \\ \tilde{n}_1(t) & \tilde{n}_2(t) \end{pmatrix} \neq 0 ;$$

quindi per ogni $t_0 \in [a, b]$ il *Teorema della funzione inversa* (vedi [2, paragrafo 2.2 p.75]) ci assicura che esistono $\delta_{t_0}, \epsilon_{t_0} > 0$ tali che F ristretta a $(t_0 - \delta_{t_0}, t_0 + \delta_{t_0}) \times (-\epsilon_{t_0}, \epsilon_{t_0})$ sia invertibile; e questo vuol dire esattamente che $I_\sigma(p_1, \epsilon_{t_0}) \cap I_\sigma(p_2, \epsilon_{t_0}) = \emptyset$ per ogni $p_1 = \sigma(t_1) \neq \sigma(t_2) = p_2$ con $t_1, t_2 \in (t_0 - \delta_{t_0}, t_0 + \delta_{t_0}) = U_{t_0}$. Inoltre, siccome F ristretta a $U_{t_0} \times (-\epsilon_{t_0}, \epsilon_{t_0})$ é iniettiva e ha immagine aperta otteniamo che $\sigma(U_{t_0}) = F(U_{t_0} \times (-\epsilon_{t_0}, \epsilon_{t_0})) \cap C$ é un aperto di C . Abbiamo quindi un ricoprimento aperto $\{U_t\}_{t \in [a, b]}$ di $[a, b]$ che é un insieme compatto; estraiamo un sottoricoprimento finito $\{U_{t_1}, \dots, U_{t_r}\}$. Allora $\mathfrak{S} = \{\sigma(U_{t_1}), \dots, \sigma(U_{t_r})\}$ é un ricoprimento aperto del sostegno C di σ , che é compatto, sia $\delta > 0$ il *numero di Lebesgue* [1, Cap.7 p.55] di \mathfrak{S} . Vogliamo dimostrare che $\epsilon_0 = \min\{\epsilon_{t_1}, \dots, \epsilon_{t_r}, \frac{\delta}{2}\}$ é come voluto. Infatti, prendiamo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ e due punti $p, q \in C$ distinti, e supponiamo che esista

$$p_0 \in I_\sigma(p, \epsilon) \cap I_\sigma(q, \epsilon).$$

La disuguaglianza triangolare ci dice allora che:

$$\|p - q\| \leq \|p - p_0\| + \|p_0 - q\| < 2\epsilon \leq \delta$$

per cui p e q devono appartenere ad uno stesso $\sigma(U_{t_j})$. Ma siccome F é iniettiva su $U_{t_j} \times (-\epsilon, \epsilon)$, la condizione $N_\sigma(p, \epsilon) \cap N_\sigma(q, \epsilon) \neq \emptyset$ implica $p = q$, contraddizione, e ci siamo.

Infine, F é globalmente iniettiva su $[a, b] \times (-\epsilon, \epsilon)$ e su $(a, b) \times (-\epsilon, \epsilon)$, e $F(I_0 \times (-\epsilon, \epsilon))$ é un intorno aperto di C , dove $I_0 = U_{t_1} \cup \dots \cup U_{t_r} \supset [a, b]$. Da questo segue subito che $N_\sigma(\epsilon)$ é un intorno aperto del sostegno di σ , esclusi gli estremi se σ non é chiusa. \square

Teorema 2.5.2. *Sia $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva piana, regolare, chiusa, semplice di classe C^2 , e indichiamo con $C = \sigma([a, b])$ il suo sostegno. Allora $\mathbb{R}^2 \setminus C$ ha al massimo due componenti connesse, e C é il bordo di entrambe.*

Dimostrazione. Scegliamo $\epsilon > 0$ in modo che $N_\sigma(\epsilon)$ sia un intorno tubolare di σ . Indichiamo con T_+ (rispettivamente con T_-) l'insieme dei punti di $N_\sigma(\epsilon)$ della forma $\sigma(t) + \sigma\tilde{n}(t)$ con $\delta > 0$ (rispettivamente con $\delta < 0$), dove \tilde{n} é come al solito il versore orientato di σ . É chiaro che $N_\sigma(\epsilon) \setminus C = T_+ \cup T_-$. Inoltre sia T_+ che T_- sono connessi. Infatti dati $\sigma(t_1) + \sigma_1\tilde{n}(t_1), \sigma(t_2) + \sigma_2\tilde{n}(t_2) \in T_+$, il cammino che partendo da $\sigma(t_1) + \sigma_1\tilde{n}(t_1)$ si muove prima parallelamente a σ fino a raggiungere $\sigma(t_2) + \sigma_1\tilde{n}(t_2)$ e poi parallelamente a $\tilde{n}(t_2)$ fino a raggiungere $\sigma(t_2) + \sigma_2\tilde{n}(t_2)$ é tutto contenuto in T_+ ; ed in modo analogo si dimostra che T_- é connesso per archi.

Sia ora K una componente connessa di $\mathbb{R}^2 \setminus C$; chiaramente $\emptyset \neq \partial K \subseteq C$. D'altra parte, se $p \in C$ esiste un intorno di p contenente solo punti di C , di T_+ e di T_- . Quindi o T_+ o T_- (o entrambi) intersecano K ; essendo connessi abbiamo che $K \supset T_+$ oppure $K \supset T_-$, e in particolar modo $\partial K \supseteq C$. Siccome due componenti connesse distinte sono necessariamente disgiunte, ne segue che il complementare del sostegno di σ ha al massimo due componenti connesse, e il bordo di entrambe coincide con C . \square

Osservazione 2. Il teorema di Jordan descrive una proprietà esclusiva della topologia del piano e non vale in generale su una qualunque superficie. Una curva regolare, semplice e chiusa contenuta in una superficie S che non sia un piano potrebbe non dividere S in esattamente due parti. Da un lato si può adattare il concetto di intorno tubolare al caso considerato, per cui il complementare del sostegno della curva ha sempre al massimo due componenti connesse.

Possono tuttavia presentarsi due nuovi fenomeni:

1. Potrebbe essere impossibile definire in maniera coerente il versore normale alla curva, per cui T_+ e T_- risultano coincidere, ed è quello che accade in superfici non orientabili quali il *nastro di Möbius*.
2. Oppure T_+ e T_- potrebbero essere contenuti nella stessa componente connessa, che è quanto può accadere nel *toro* (vedi Figura 1.1) definito da $S = S^1 \times S^1$.

In entrambi i casi, il complementare del sostegno della curva ha un'unica componente connessa.

2.6 Isoperimetria

Vogliamo ora determinare quale curva regolare chiusa semplice del piano di lunghezza fissata L è il bordo della regione di area maggiore.

Questo, in geometria, rappresenta un classico problema detto di *isoperimetria*. In realtà otterremo un risultato più generale che collega l'area e il perimetro di qualsiasi dominio il cui bordo sia una curva di classe C^2 a tratti regolare semplice chiusa.

2.6.1 Storia del problema isoperimetrico

Il classico *problema isoperimetrico* risale all'antichità e il noto *problema di Didone* ne è un esempio:

Secondo la leggenda, Didone, regina di Tiro costretta all'esilio dal fratello Pigmalione si rifugiò presso re Iarba nel Nordafrica per chiedere asilo. Iarba le promise che le avrebbe dato tanto terreno quanto poteva abbracciarne una pelle di toro. Didone non si scoraggiò ma tagliò la pelle in striscioline sottili e le unì in modo da formare una corda. Con essa recintò lo spazio nel quale sarebbe dovuta poi nascere Cartagine. Il problema riguarda la forma che Didone avrebbe dovuto dare alla sua corda per abbracciare la massima area possibile.

Oggi per problema di Didone intendiamo quello che si prefigge di determinare, tra determinate figure geometriche di dato perimetro, quella di area maggiore.

Invece il problema isoperimetrico ambisce a rispondere alla seguente domanda:

Fra tutte le curve chiuse nel piano di fissato perimetro, quale curva (se esiste) massimizza l'area della regione inclusa?

Tale problema fu affrontato da filosofi e scienziati fin dall'antichità. Ad esempio l'astronomo ed astrologo tedesco *Keplero* utilizzò il principio isoperimetrico nel discutere la morfologia del sistema solare nel *Mysterium Cosmographicum* (Il mistero cosmografico, 1596)[5].

Il cerchio appare essere un'ovvia soluzione del problema; tuttavia la dimostrazione di questo fatto, come vedremo in seguito, è piuttosto difficile.

Il primo passo verso la soluzione fu fatto dallo studioso di geometria *Jakob Steiner* nel 1838 usando un metodo geometrico chiamato *simmetrizzazione di Steiner* [4] e mostrò che se la soluzione esiste allora deve essere un cerchio; la sua dimostrazione venne completata in seguito da altri matematici.

Steiner iniziò con alcune costruzioni geometriche facilmente comprensibili:

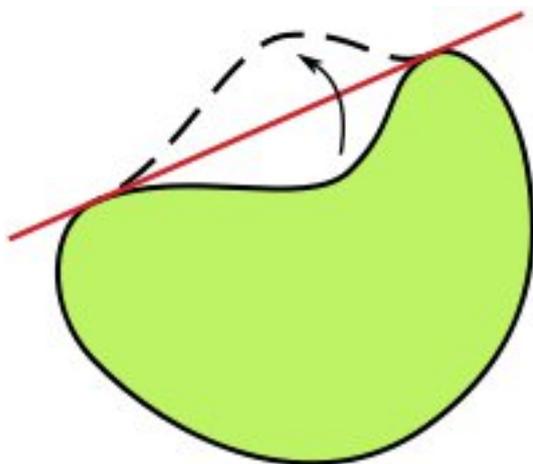


Figura 2.4: Diseguaglianza isoperimetrica

per esempio, si può mostrare che qualsiasi curva chiusa che includa una regione non completamente convessa può essere modificata includendo un'area maggiore, ruotando le aree concave per farle diventare convesse. Si può inoltre mostrare che ogni curva chiusa che non sia simmetrica può essere deformata così da includere un'area maggiore. Dai suoi studi dedusse che la forma che è perfettamente convessa e simmetrica è il cerchio che dunque risolve il problema isoperimetrico. Quella che abbiamo illustrato non è la dimostrazione rigorosa ma soltanto una spiegazione intuitiva.

2.6.2 Disuguaglianza isoperimetrica

Il teorema isoperimetrico viene usualmente formulato nella forma di una disuguaglianza, detta infatti *disuguaglianza isoperimetrica*, che mette in relazione il perimetro e l'area di una curva chiusa nel piano.

Facciamo ora una breve premessa per definire la lunghezza di una curva.

Definizione 2.15. Sia $I = [a, b]$ un intervallo. Una *partizione* \mathcal{P} di I è una $(k + 1)$ -upla $(t_0, \dots, t_k) \in [a, b]^{k+1}$ con $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$. Se \mathcal{P} è una partizione di I poniamo:

$$\|\mathcal{P}\| = \max_{1 \leq j \leq k} |t_j - t_{j-1}|.$$

Definizione 2.16. Data una curva $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e una partizione \mathcal{P} di $[a, b]$, indichiamo con

$$L(\sigma, \mathcal{P}) = \sum_{j=1}^k \|\sigma(t_j) - \sigma(t_{j-1})\|$$

la *lunghezza* della poligonale di estremi $\sigma(t_0), \dots, \sigma(t_k)$.

Diremo che σ è *rettificabile* se il limite

$$L(\sigma) = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} L(\sigma, \mathcal{P})$$

esiste finito. Tale limite verrà chiamato *lunghezza* di σ .

Prima di tutto ci serve ricavare una formula per calcolare l'area dell'interno di una curva di Jordan di classe C^2 a tratti regolare; a tal proposito ci rifacciamo al teorema, preso in prestito dall'analisi Matematica, di Gauss-Green del quale tuttavia ometteremo la dimostrazione perché non attinente agli scopi di questa tesi (per approfondimenti vedi [2, p.103]).

Teorema 2.6.1. (Gauss-Green). Sia $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva di Jordan di classe C^2 a tratti regolare orientata positivamente, e indichiamo con $D \subset \mathbb{R}^2$ l'interno di σ . Allora per ogni coppia di funzioni $f_1, f_2 \in C^1(\overline{D})$ definite in un intorno di D si ha:

$$\int_a^b [f_1(\sigma(t))\sigma_1'(t) + f_2(\sigma(t))\sigma_2'(t)] dt = \int_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$$

Abbiamo quindi il seguente Lemma:

Lemma 2.6.2. Sia $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva di Jordan di classe C^2 a tratti regolare, e indichiamo con $D \subset \mathbb{R}^2$ l'interno di σ . Allora:

$$\text{Area}(D) = \int_a^b \sigma_1 \sigma_2' dt = - \int_a^b \sigma_1' \sigma_2 dt.$$

Dimostrazione. Siano $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ date da $f_1(x) = -x_2$ e $f_2(x) = x_1$. Allora il *Teorema dei quattro vertici* (vedi tutti i dettagli del teorema nel Capitolo 2.6 del libro di M.Abate[2, p.98]) ci assicura che é valida l'ultima delle seguenti uguaglianze:

$$\text{Area}(D) = \int_D dx_1 dx_2 = \frac{1}{2} \int_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \frac{1}{2} \int_a^b (\sigma_1 \sigma_2' - \sigma_1' \sigma_2) dt .$$

Ora applichiamo le regole di integrazione e abbiamo che:

$$\int_a^b (\sigma_1 \sigma_2' + \sigma_1' \sigma_2) dt = \int_a^b (\sigma_1 \sigma_2)' dt = \sigma_1(b) \sigma_2(b) - \sigma_1(a) \sigma_2(a) = 0 ;$$

quindi:

$$\int_a^b \sigma_1 \sigma_2' dt = - \int_a^b \sigma_1' \sigma_2 dt ,$$

e la dimostrazione é completa. □

Possiamo quindi dimostrare il risultato principale di questa sezione, la *disuguaglianza isoperimetrica* :

Teorema 2.6.3. Sia $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva di Jordan di classe C^2 a tratti regolare con lunghezza $L > 0$, e indichiamo con $D \subset \mathbb{R}^2$ il suo interno. Allora:

$$4\pi \text{Area}(D) \leq L^2.$$

Inoltre vale l'uguaglianza se e solo se il sostegno di σ é una circonferenza.

Dimostrazione. Dato $r > 0$, la lunghezza della curva $\sigma^r = r\sigma$, che é la curva ottenuta applicando a σ un'omotetia² di ragione $r \in \mathbb{R}$, é rL mentre l'area dell'interno di σ^r é $r^2 \text{Area}(D)$. Quindi a meno di sostituire σ con $\sigma^{\frac{2\pi}{L}}$ possiamo supporre $L = 2\pi$, e ci basta dimostrare che

$$\text{Area}(D) \leq \pi ,$$

con uguaglianza se e solo se il sostegno di σ é una circonferenza.

Possiamo supporre σ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco³, per cui $a = 0, b = 2\pi$, e con punto di partenza scelto in modo che $\sigma(0)$ e $\sigma(\pi)$ non siano vertici di σ (dove per *vertice* di una curva piana regolare intendiamo uno zero della sua curvatura[2, p.98]). Quindi tale condizione mi assicura che σ é di classe C^2 in un intorno di 0 e di π . Inoltre, a meno di un movimento rigido del piano, possiamo anche supporre che $\sigma_1(0) = \sigma_1(\pi) = 0$.

Il Lemma 2.6.2 ci dice che:

$$\text{Area}(D) = \int_0^{2\pi} \sigma_1 \sigma_2' ds ;$$

ci basterá allora dimostrare che sia l'integrale da 0 a π che l'integrale da π a 2π di $\sigma_1 \sigma_2'$ valgono al massimo $\frac{\pi}{2}$, con uguaglianza se e solo se il sostegno di σ é una circonferenza.

Prima di tutto abbiamo:

$$\int_0^\pi \sigma_1 \sigma_2' \leq \frac{1}{2} \int_0^\pi (\sigma_1^2 + \sigma_2'^2) ds = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \sigma_1^2 - \sigma_1'^2) ds,$$

²Una *omotetia* é una particolare trasformazione geometrica del piano o dello spazio, che dilata o contrae gli oggetti, mantenendo invariati gli angoli ossia la forma nel senso intuitivo del termine.

³Se $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é una curva di classe C^k , fissato $t_0 \in I$, la *lunghezza d'arco* di σ é la funzione $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^k data da:

$\int_{t_0}^t \|\sigma'(\tau)\| d\tau$. Si dice che σ é parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco se $\|\sigma'\| \equiv 1$ [2, p.12].

dove l'ultima uguaglianza vale perché σ è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco (una spiegazione dettagliata si trova nel Capitolo 2.7 di M. Abate). Ora siccome $\sigma_1(0) = \sigma_1(\pi) = 0$, esiste una funzione $u : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 a tratti tale che:

$$\sigma_1(s) = u(s) \sin s.$$

In particolare $\sigma_1' = u' \sin s + u \cos s$, per cui l'ultima disuguaglianza che abbiamo incontrato ci dá:

$$\int_0^\pi \sigma_1 \sigma_2' ds \leq \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - u'^2 \sin^2 s + u^2(\sin^2 s - \cos^2 s) - 2uu' \sin s \cos s) ds.$$

Ma, sfruttando la proprietà di derivazione del prodotto, abbiamo che:

$$\int_0^\pi (u^2(\sin^2 s - \cos^2 s) - 2uu' \sin s \cos s) ds = - \int_0^\pi \frac{d}{ds} [u^2 \sin s \cos s] ds = 0;$$

quindi:

$$\int_0^\pi \sigma_1 \sigma_2' ds \leq \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - u'^2 \sin^2 s) ds \leq \frac{\pi}{2},$$

come voluto. Un ragionamento del tutto analogo si applica all'integrale da π a 2π e quindi la disuguaglianza isoperimetrica è dimostrata.

Se il sostegno di σ è una circonferenza la disuguaglianza isoperimetrica è ben nota. Viceversa, se vale tale uguaglianza, le ultime due disuguaglianze della dimostrazione implicano che $u' \equiv 0$ per cui si ha $\sigma_1(s) = c \sin s$ per un opportuno $c \in \mathbb{R}$. Ma vale pure che $\sigma_1 \equiv \sigma_2'$ la quale implica che $\sigma_2(s) = -c \cos s + d$, con $d \in \mathbb{R}$, e quindi il sostegno di σ è una circonferenza. \square

Corollario 2.6.4. *La circonferenza è fra le curve di Jordan di classe C^2 a tratti regolari con lunghezza fissata quella che ha l'interno⁴ di area massima. Viceversa, il cerchio è fra i domini di area fissata con bordo una curva di Jordan di classe C^2 a tratti regolare quello di perimetro minimo.*

⁴Vedi Definizione 2.9.

Dimostrazione. Se la lunghezza é fissata uguale ad L , allora il Teorema 2.6.3 dice che l'area puó valere al massimo $L^2 / 4\pi$ e questo valore é raggiunto solo dalla circonferenza. Viceversa, se l'area é fissata uguale ad A , allora, sempre per il Teorema 2.6.3, il perimetro é almeno uguale a $\sqrt{4\pi A}$, e questo valore é raggiunto solo dal cerchio. \square

Capitolo 3

Teoria dei grafi e teorema della curva di Jordan

In questo capitolo vogliamo esaminare qualche nozione elementare di teoria dei grafi collegata a molteplici settori di topologia algebrica. Infatti ci consente sia di dare una dimostrazione alternativa del teorema di Jordan, sia di dimostrare il *teorema di Schönflies* che descrive un'interessante proprietà delle curve di Jordan. Di questo teorema abbiamo una dimostrazione elementare, che noi d'altronde ometteremo perché non di nostra competenza, dovuta a *C.Thomassen* (vedi 3.3).

3.1 Teoria dei grafi

I *grafi* sono strutture matematiche discrete che rivestono interesse sia per la matematica che per un'ampia gamma di campi applicativi. In ambito matematico il loro studio, *la teoria dei grafi*, costituisce un'importante parte della combinatoria; i grafi inoltre sono utilizzati in aree come *topologia*, *funzioni speciali*, *geometria dei poliedri* e *algebre di Lie* (per ulteriori approfondimenti sulla Teoria dei Grafi vedi Cap.II degli Appunti di Teoria dei grafi[6]).

Iniziamo dando alcune definizioni di teoria dei grafi.

Definizione 3.1. Grafo e sue componenti

Un *grafo* G é dato da un insieme finito di punti $V(G)$, detti *vertici* del grafo, e da un insieme $L(G)$ di coppie (non ordinate) di punti di $V(G)$, detti *lati* del grafo. Se $l = \{v, w\} \in L(G)$ é un lato del grafo G , diremo che l *collega* i vertici v e w , o che é incidente a v e w .

Il numero di archi incidenti in un vertice $v \in V$ prende nome *grado* di v . Si considerano il *grado massimo* e il *grado minimo* di G come, rispettivamente, il grado del vertice di G con il maggior numero di archi incidenti e il grado del vertice di G che ha meno archi incidenti.

Un *sottografo* H di un grafo G é dato da sottoinsiemi $V(H) \subseteq V(G)$ e $L(H) \subseteq L(G)$ tali che i lati in $L(H)$ colleghino vertici in $V(H)$.

Un *isomorfismo* di grafi é una biezione degli insiemi di vertici che induce una biezione sugli insiemi dei lati.

Un *cammino* L in un grafo G é una successione finita ordinata $v_1, \dots, v_k \in V(G)$ di vertici, con $v_1 \dots v_{k-1}$ distinti, e tali che $\{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{k-1}, v_k\}$ siano lati di G (e diremo che L collega v_1 e v_k). Se $v_k = v_1$ diremo che L é un *ciclo*.

Se $A \subseteq V(G) \cup L(G)$, indicheremo con $G - A$ il grafo ottenuto rimuovendo tutti i vertici di A e tutti i lati che sono in A o sono incidenti a vertici in A .

Osservazione 3. In questa definizione ogni coppia di vertici di un grafo puó essere collegata da al piú un lato; i grafi trattati in questa sezione non ammettono lati multipli.

Definizione 3.2. Una *realizzazione*, o equivalentemente una *rappresentazione* di un grafo G é uno spazio topologico X equipaggiato con un sottoinsieme finito di punti $V_X(G)$ in corrispondenza biunivoca con i vertici di G , e con un insieme finito $L_X(G)$ di archi di Jordan in X in corrispondenza biunivoca

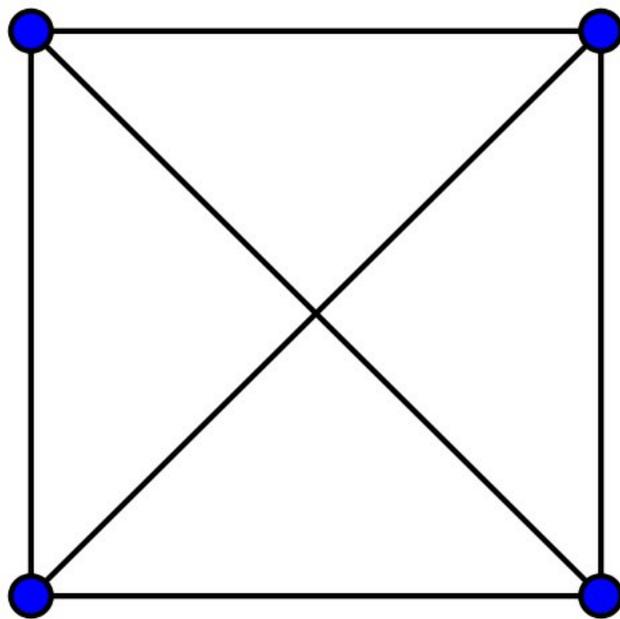


Figura 3.1: Grafo con 4 vertici

con i lati di G . Inoltre $V_X(G)$ e $L_X(G)$ godono delle seguenti proprietà:

1. se $l \in L_X(G)$ corrisponde a $\{v, w\} \in L(G)$, allora l è un arco di Jordan che collega il punto $p_v \in V_X(G)$ che corrisponde a v col punto $p_w \in V_X(G)$ che corrisponde a w e in tal caso scriveremo $l = p_v p_w$;
2. due elementi distinti di $L_X(G)$ si intersecano al più negli estremi.

Inoltre due realizzazioni di un grafo si dicono *topologicamente equivalenti* se sono omeomorfi (vedi Def. 2.4 e Paragrafo 1.1) ossia se si possono trasformare l'una nell'altra mediante una "deformazione" continua. Osserviamo che con una tale deformazione non si può far attraversare una curva-spigolo da un punto-nodo.

Definizione 3.3. Diremo che un grafo G è *planare* se è realizzabile come sottoinsieme del piano \mathbb{R}^2 . In tal caso, con un lieve abuso di linguaggio, identificheremo spesso un grafo planare con la sua realizzazione piana.

Esempio 3.1. Un grafo che sarà fondamentale nel seguito è il *grafo* $K_{3,3}$ (vedi Figura 3.3) che ha sei vertici divisi in due gruppi di tre e come lati solo quelli che collegano i vertici del primo gruppo ai vertici del secondo gruppo. Si noti però che il disegno della Figura 3.3 *non* è una realizzazione di $K_{3,3}$ nel piano in quanto i lati si intersecano in punti che non sono vertici.

Ogni grafo planare può essere realizzato con archi poligonali e il Lemma seguente ce ne dá una prova.

Lemma 3.1.1. *Ogni grafo planare G ha una realizzazione $X_0 \in \mathbb{R}^2$ tale che gli elementi di $L_X(G)$ siano archi poligonali.*

Dimostrazione. Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ una realizzazione di G , e per ogni $p \in V_X(G)$ scegliamo un disco $D_p \subset \mathbb{R}^2$ centrato in p che interseca X solo nei lati contenenti p . Essendo $V_X(G)$ finito, possiamo supporre che $D_q \cap D_p = \emptyset$ se $p \neq q$.

Per ogni lato $pq \in L_X(G)$, sia $C_{pq} \subset pq$ un arco di Jordan che collega p

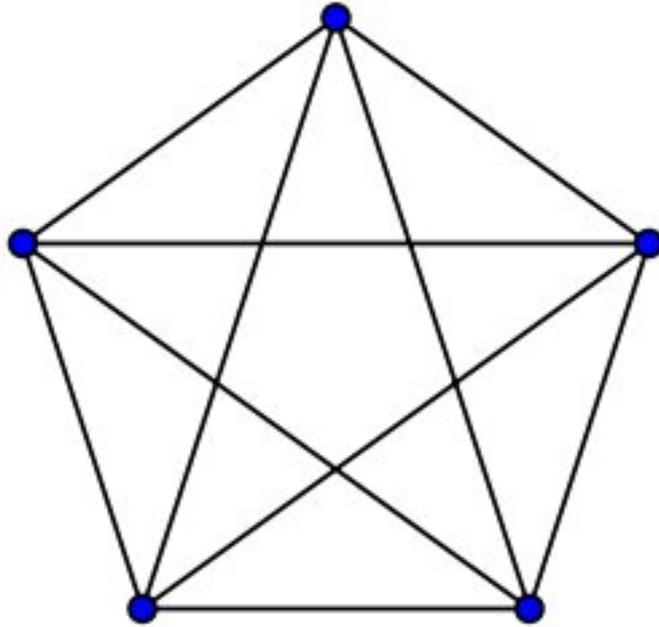


Figura 3.2: Grafo completo con 5 vertici, K_5

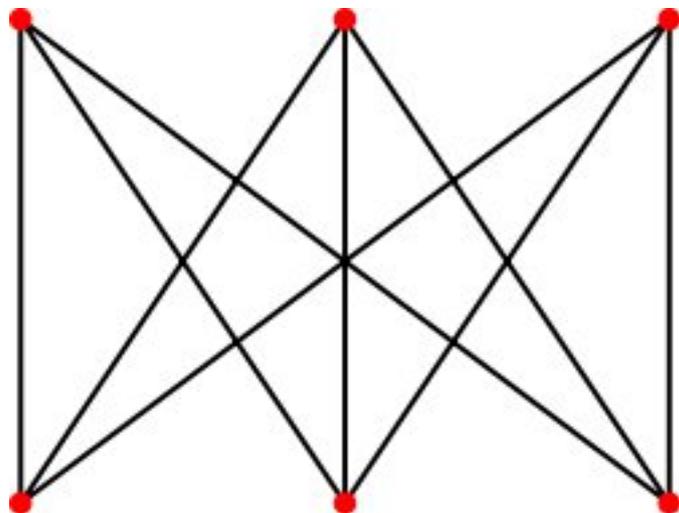
con $C_{pq} \cap \partial D_p$, e l'altro che collega q con $C_{pq} \cap \partial D_q$. Poi la distanza fra due archi distinti del tipo C_{pq} é strettamente positiva; quindi possiamo sostituirli con archi poligonali disgiunti contenuti in $\mathbb{R}^2 \setminus \cup_{p \in V_X(G)} D_p$, e abbiamo la realizzazione X_0 voluta. \square

Tuttavia esistono grafi che non possiedono realizzazioni piane planari. Si tratta del grafo completo con 5 nodi K_5 (Figura 3.2) e del grafo bipartito completo con 6 nodi $K_{3,3}$ (Figura 3.3); questi due grafi sono chiamati anche *grafi di Kuratowski*, in onore del matematico polacco *Kazimierz Kuratowski*[6, C.II].

Abbiamo quindi la Proposizione seguente.

Proposizione 3.1.2. $K_{3,3}$ é non planare.

Dimostrazione. I lati di $K_{3,3}$ si ottengono prendendo quelli contenuti nel ciclo $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_1$ e aggiungendo $\{x_1, x_4\}$, $\{x_2, x_5\}$ e $\{x_3, x_6\}$.

Figura 3.3: Grafo non planare, $K_{3,3}$

Supponiamo che esista una realizzazione piana $X \in \mathbb{R}^2$ di $K_{3,3}$; per il Lemma 3.1.1 possiamo supporre che i lati di X siano archi poligonali. Allora i lati del ciclo formerebbero una poligonale semplice C e non c'è modo di disporre i tre lati aggiuntivi senza arrivare ad una contraddizione (per una spiegazione rigorosa vedi il Cap. 2.8 di *Curve e superfici*[2]). \square

Definizione 3.4. Diremo che un grafo G è *connesso* se ogni coppia di vertici in G può essere collegata da un cammino in G .

Diremo che è *2-connesso* se $G - \{v\}$ è connesso per ogni $v \in V(G)$.

Osservazione 4. Chiaramente un grafo è connesso se e solo se ogni sua realizzazione è connessa per archi.

Vedremo ora alcuni risultati più o meno immediati e altre proprietà che si possono attribuire ai grafi mettendo in rilievo quelle che risultano essere interessanti ai nostri fini.

Lemma 3.1.3. *Sia H un sottografo (con almeno due vertici) 2-connesso di un grafo 2-connesso G . Allora possiamo costruire una successione finita*

$H = G_0, G_1, \dots, G_k = G$ di sottografi di G tali che G_j si ottiene da G_{j-1} aggiungendo un cammino che unisce due vertici distinti di G_{j-1} , ma con tutti gli altri vertici non appartenenti a G_{j-1} .

Dimostrazione. Procediamo per induzione sul numero di lati in $L(G) \setminus L(H)$. Se questo numero é zero, $G = H$ e non c'è nulla da dimostrare.

Supponiamo quindi che $G \neq H$, e di avere dimostrato il lemma per ogni coppia (G', H') per cui $L(G') \setminus L(H')$ ha strettamente meno elementi di $L(G) \setminus L(H)$.

Sia H' un sottografo proprio di G 2-connesso massimale contenente H . Se $H' \neq H$, possiamo applicare l'ipotesi induttiva a (H', H) e a (G, H') ; quindi possiamo supporre che $H' = H$. Siccome G é connesso, esiste un lato $v_1v_2 \in L(G) \setminus L(H)$ tale che $v_1 \in V(H)$. Ma anche $G - \{v_1\}$ é connesso, quindi deve esistere un cammino $v_2 \dots v_k$ in $G - \{v_1\}$ tale che v_k appartenga a $V(H)$ mentre i v_j non vi appartengono per $2 \leq j < k$ (e $k = 2$ é ammesso). Siccome il grafo G_1 ottenuto unendo il cammino $v_1v_2 \dots v_k$ ad H é ancora 2-connesso, per massimalitá abbiamo $G = G_1$, ed é fatta. \square

Lemma 3.1.4. *Sia G un grafo 2-connesso planare, e indichiamo con $l(G)$ e $v(G)$ il numero dei lati e dei vertici di G . Se $X \subset \mathbb{R}^2$ é una realizzazione di G i cui lati sono archi poligonali, allora $\mathbb{R}^2 \setminus X$ ha esattamente $l(G) - v(G) + 2$ componenti connesse, ciascuna delle quali ha come bordo una poligonale semplice in X .*

Dimostrazione. Sia C una poligonale semplice in X . Siccome sappiamo che se $C \subset \mathbb{R}^2$ é una poligonale semplice allora $\mathbb{R}^2 \setminus C$ ha esattamente due componenti connesse (Teorema 2.4.2) abbiamo che $X = C$. Altrimenti possiamo ottenere X da C aggiungendo cammini come indicato nel Lemma 3.1.3. Ogni cammino aumenta di 1 la differenza fra il numero dei lati e il numero dei vertici e suddivide ([2, p.105]) una componente connessa già esistente in due componenti connesse in modo tale che il bordo di ciascuna sia ancora una poligonale semplice in X . Quindi per induzione otteniamo la tesi. \square

Definizione 3.5. Se $X \subset \mathbb{R}^2$ é la realizzazione di un grafo planare, le componenti connesse di $\mathbb{R}^2 \setminus X$ sono dette *facce* di X . In particolare, la faccia illimitata é detta *faccia esterna* e, se X é 2-connesso, il suo bordo é chiamato *ciclo esterno*.

Osservazione 5. Se X_1 e X_2 sono grafi planari con lati costituiti da archi poligonali, allora é facile vedere che $X_1 \cup X_2$ é la realizzazione piana di un terzo grafo planare, con vertici le intersezioni dei lati X_1 e X_2 (oltre ai vertici di X_1 e X_2), ed é a questo grafo che ci riferiremo in seguito quando faremo l'unione dei grafi planari. Inoltre, se X_1 e X_2 sono 2-connessi e hanno almeno due punti in comune, allora anche $X_1 \cup X_2$ é 2-connesso (vedi Def. 3.4).

Lemma 3.1.5. Siano $X_1, \dots, X_k \subset \mathbb{R}^2$ grafi planari 2-connessi con lati costituiti da archi poligonali. Supponiamo che, per $j = 2, \dots, k-1$, ciascun X_j intersechi in almeno due punti sia X_{j-1} sia X_j , e sia disgiunto dagli altri X_i . Supponiamo inoltre che $X_1 \cap X_k = \emptyset$. Allora l'intersezione delle facce esterne di $X_1 \cup X_2, X_2 \cup X_3, \dots, X_{k-1} \cup X_k$ é contenuta nella faccia esterna di $X_1 \cup \dots \cup X_k$.

Dimostrazione. Sia p un punto in una faccia limitata di $X = X_1 \cup \dots \cup X_k$. Siccome X é 2-connesso, il Lemma 3.1.4 ci dice che esiste una poligonale semplice C in X tale che $p \in \text{int}(C)$. Scegliamo C in modo che sia contenuta in un'unione $X_i \cup X_{i+1} \cup \dots \cup X_j$ con $j-i$ minimo e dimostriamo che $j-i \leq 1$. Supponiamo per assurdo che $j-i \geq 2$; possiamo supporre che tra tutte le poligonali semplici in $X_i \cup X_{i+1} \cup \dots \cup X_j$ con p al loro interno C sia tale che il numero di lati in C e non in X_{j-1} sia minimo. Siccome C interseca sia X_j sia X_{j-2} (che sono disgiunti), C deve avere almeno due cammini disgiunti massimali in X_{j-1} . Sia L uno di questi, e sia L' il cammino piú breve in X_{j-1} da L a $C \setminus V(L)$. Gli estremi di L' suddividono C in due archi poligonali C_1 e C_2 , ognuno dei quali contiene segmenti non in X_{j-1} . Ma una delle due poligonali $L' \cup C_1$ e $L' \cup C_2$ contiene p nel suo interno, e ha meno lati in X_{j-1} di quanti ne abbia C ; abbiamo pertanto una contraddizione.

Quindi C dev'essere contenuta in un'unione della forma $X_j \cup X_{j+1}$, e quindi p è in una faccia limitata di un $X_j \cup X_{j+1}$. \square

Definizione 3.6. Sia $C \subset \mathbb{R}^2$ chiuso e Ω una componente connessa di $\mathbb{R}^2 \setminus C$. Diremo che un punto $p \in C$ è *accessibile* da Ω se esiste un arco poligonale semplice da un punto $q \in \Omega$ a p contenuto in Ω (estremi esclusi).

Procediamo ora dando le ultime due definizioni che si renderanno poi utili nel resto del capitolo:

Definizione 3.7. Diremo che due grafi planari 2-connessi $X, X' \subset \mathbb{R}^2$ sono \mathbb{R}^2 -*isomorfi* se esiste un isomorfismo g di grafi fra X e X' , che manda cicli bordo di facce in cicli bordo di facce, e il ciclo esterno nel ciclo esterno. L'isomorfismo g è detto \mathbb{R}^2 -*isomorfismo*.

Osservazione 6. Un \mathbb{R}^2 -isomorfismo di grafi planari 2-connessi X e X' può essere chiaramente esteso a un omeomorfismo di X con X' come spazi topologici ma, a meno di avviso contrario, lo considereremo solo come applicazione al livello dei grafi, dai vertici ai vertici.

Definizione 3.8. Una *suddivisione* di un grafo G è un grafo G' ottenuto sostituendo alcuni (o tutti) i lati di G con dei cammini che abbiano gli stessi estremi.

3.2 Teorema della curva di Jordan

In questa parte daremo una dimostrazione del teorema della curva di Jordan diversa da quella vista nel capitolo precedente utilizzando alcuni elementi di teoria dei grafi.

Inizieremo tale paragrafo enunciando, e quindi dimostrando il teorema di Jordan[3].

Teorema 3.2.1. (di Jordan) Se $L \subset \mathbb{R}^2$ é un arco¹ di Jordan, allora $\mathbb{R}^2 \setminus L$ é connesso. Piú precisamente: ogni coppia di punti $p, q \in \mathbb{R}^2 \setminus L$ puó essere collegata da un arco poligonale semplice in $\mathbb{R}^2 \setminus L$.

Dimostrazione. Siano $p, q \in \mathbb{R}^2 \setminus L$, e sia $0 < 3\delta < \min\{d(p, L), d(q, L)\}$, dove d indica la *distanza euclidea*². Essendo L il sostegno di una curva *uniformemente continua* (vedi Def. 2.12), possiamo suddividere L in un insieme di sottoarchi L_1, \dots, L_k di diametro minore di δ ; e per $j = 1, \dots, k-1$ indichiamo con p_j e p_{j+1} gli estremi di L_j .

Sia δ' la distanza minima fra L_i e L_j per $|i-j| \geq 2$; chiaramente, $0 < \delta' \leq \delta$. Suddividiamo ciascun L_i in sottoarchi L_{i1}, \dots, L_{ik} di diametro minore di $\delta'/4$, e indichiamo con $p_{i,j}$ e $p_{i,j+1}$ gli estremi di L_{ij} . Sia X_i il grafo planare costituito dall'unione del bordo dei quadrati di centro $p_{i,j}$ e con i lati di lunghezza $\delta'/2$. Allora i grafi X_1, \dots, X_k soddisfano le ipotesi del Lemma 3.1.5. Inoltre $X_i \cup X_{i+1}$ é all'interno del disco di centro p_i e raggio $5\delta'/2$, mentre sia p sia q sono esterni al disco di centro p_i e raggio 3δ ; quindi il Lemma 3.1.5 ci assicura che p e q appartengono alla faccia esterna di $X_1 \cup \dots \cup X_k$, e dunque possono essere connessi da un arco poligonale semplice che non interseca L . \square

Procediamo ora dimostrando che le curve di Jordan sconnettono il piano dove utilizzeremo il fatto che un grafo $K_{3,3}$ é non planare.

Proposizione 3.2.2. Se $C \subset \mathbb{R}^2$ é una curva di Jordan, allora $\mathbb{R}^2 \setminus C$ é sconnesso.

Dimostrazione. Indichiamo con l_1 (rispettivamente l_2) una retta intersecante C e tale che C sia contenuta nel semipiano chiuso destro (rispettivamente sinistro) di bordo l_1 (rispettivamente l_2). Sia $p_j \in C \cap l_j$ il punto di ordinata massima, e indichiamo con C_1 e C_2 i due archi in cui C é suddivisa da p_1 e

¹Vedi Def. 2.8.

Con un lieve abuso di linguaggio noi precedentemente abbiamo sostituito il termine arco con quello piú generico di *curva*.

²Per la definizione e proprietà si veda il Cap.2 del Kosniowski[2, p.8]

p_2 . Sia ora l_3 una retta fra l_1 e l_2 . Siccome $C_1 \cap l_3$ e $C_2 \cap l_3$ sono compatti e disgiunti, possiamo trovare dentro l_3 un segmento l_4 che collega C_1 con C_2 e interseca C solo negli estremi. Sia poi l_5 un arco poligonale semplice che collega p_1 a p_2 salendo lungo l_1 fino a intersecare $est(C)$ a un'ordinata sopra C , raggiungendo l_2 con un segmento orizzontale, e poi scendendo lungo l_2 fino a p_2 . Per connessione, l_5 é contenuto (a parte gli estremi) in $est(C)$. Se anche l_4 (estremi esclusi) fosse contenuto in $est(C)$, potremmo trovare un arco poligonale semplice l_6 da l_4 a l_5 in $est(C)$. Ma allora $C \cup l_4 \cup l_5 \cup l_6$ sarebbe una realizzazione di $K_{3,3}$ nel piano e questo é impossibile. Quindi i punti interni di l_4 devono appartenere a $int(C)$ che dunque non é vuoto. \square

Abbiamo quindi il seguente lemma.

Lemma 3.2.3. *Sia $C \subset \mathbb{R}^2$ chiuso e Ω una componente connessa di $\mathbb{R}^2 \setminus C$. Allora l'insieme dei punti di C accessibili³ da Ω é denso⁴ in C .*

Dimostrazione. Scegliamo un punto $q \in \Omega$, e sia $C_1 \subset C$ un sottoarco aperto di C . Il *Teorema dell'arco di Jordan* (Teorema 3.2.1) ci assicura che $\mathbb{R}^2 \setminus (C \setminus C_1)$ é connesso; quindi deve esistere un arco poligonale semplice in $\mathbb{R}^2 \setminus (C \setminus C_1)$ da q a un punto appartenente a una componente connessa di $\mathbb{R}^2 \setminus C$ distinta da Ω . Quindi ogni sottoarco aperto di C contiene punti accessibili e il Lemma é provato[2, p.112]. \square

Siamo quindi giunti al risultato piú importante di questo paragrafo.

Teorema 3.2.4. (della curva di Jordan) *Sia $C \subset \mathbb{R}^2$ una curva di Jordan. Allora $\mathbb{R}^2 \setminus C$ ha esattamente due componenti connesse, e C é il loro bordo comune.*

³Per la definizione di *punto accessibile* vai alla Definizione 3.6

⁴In Topologia la nozione di *sottoinsieme denso* é estesa a qualsiasi spazio topologico C . Un sottoinsieme A di C é denso (in C) se l'unico sottoinsieme chiuso di C contenente A é C stesso[3].

Dimostrazione. (La dimostrazione completa si trova nel Cap. 2.8 dell'Abate[2, p.112]) Supponiamo per assurdo che $\mathbb{R}^2 \setminus C$ abbia almeno tre componenti connesse, $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, e scegliamo $p_j \in \Omega_j$ per $j = 1, 2, 3$. Siano poi C_1, C_2, C_3 tre archi a due a due disgiunti di C . Il Lemma 3.2.3 ci assicura che per $i, j = 1, 2, 3$ possiamo trovare un arco poligonale semplice L_{ij} da p_i a C_j . Inoltre possiamo anche supporre che $L_{ij} \cap L_{ij'} = \{q_i\}$ se $j \neq j'$. Infatti, se seguendo P_{i2} partendo da C_2 intersechiamo L_{i1} in un punto $p_i \neq p'_i$, possiamo modificare $L_{i,2}$ in modo che il suo segmento finale sia vicino al segmento da p_i a p'_i e che il nuovo $L_{i,2}$ intersechi $L_{i,1}$ solo in p_i . In maniera analoga modifichiamo $L_{i,3}$ se necessario.

Chiaramente $L_{ij} \cap L_{i'j} = \emptyset$ se $i \neq i'$. Ma allora il grafo planare ottenuto unendo agli L_{ij} degli opportuni sottoarchi dei C_j è una realizzazione piana di $K_{3,3}$ e siamo giunti ad una contraddizione. \square

Corollario 3.2.5. *Sia G un grafo 2-connesso planare e indichiamo con $l(G)$ e $v(G)$ il numero dei lati e dei vertici di G .*

Se $X \subset \mathbb{R}^2$ è una realizzazione di G i cui lati sono archi poligonali, tranne eventualmente il ciclo esterno che è una curva di Jordan, allora X ha esattamente $l(G) - v(G) + 2$ facce, ciascuna delle quali ha come bordo un ciclo in X .

3.3 Teorema di Schönflies

In quest'ultima parte abbiamo il teorema di Schönflies, che come già anticipato nell'Osservazione 1 del 2.4, risulta essere un'applicazione del teorema della curva di Jordan.

La dimostrazione che possediamo, e che noi ometteremo, è dovuta a *Carsten Thomassen*⁵ che la pubblicò nel suo articolo *Il teorema di Jordan-Schönflies*

⁵*C.Thomassen* è un matematico danese nato nel 1948 a Grindsted. Fece importanti studi di Teoria dei grafi e di Combinatoria.

e la classificazione delle superfici nel 1992. Per la sua realizzazione sono necessari tutti i risultati di questo capitolo e un ulteriore Lemma che andiamo ora ad enunciare riguardante sempre la relazione tra teoria dei grafi e curve di Jordan.

Come abbiamo fatto finora, chiameremo *interno* di C la componente connessa limitata di $\mathbb{R}^2 \setminus C$ (vai alla Definizione 2.9).

Lemma 3.3.1. *Sia $C \subset \mathbb{R}^2$ una curva di Jordan e $P \subset \overline{\text{int}(C)}$ un arco poligonale semplice che collega due punti $p_1, p_2 \in C$ e che interseca C solo negli estremi. Indichiamo con $C_1, C_2 \subset C$ i due archi poligonali in C da p_1 a p_2 . Allora $\mathbb{R}^2 \setminus (C \cup P)$ ha esattamente tre componenti connesse, di bordo rispettivamente C , $C_1 \cup P$, $C_2 \cup P$.*

In particolare, ogni curva in $\overline{\text{int}(C)}$ che collega un punto di $C_1 \setminus \{p_1, p_2\}$ con un punto di $C_2 \setminus \{p_1, p_2\}$ deve intersecare P .

Dimostrazione. L'unica cosa non banale di questo Lemma é dimostrare che $\text{int}(C) \setminus P$ ha almeno due componenti connesse[2, p.112].

Sia $l \in \text{int}(C)$ un segmento che interseca P in un solo punto p , che non sia un vertice di P . Se gli estremi di l appartengono alla stessa componente connessa Ω di $\mathbb{R}^2 \setminus (C \cup P)$ allora in Ω troveremmo un arco poligonale semplice L tale che $L \cup l$ sia una poligonale semplice. Ma allora gli estremi del segmento di P contenente p dovrebbero appartenere a componenti connesse diverse di $\mathbb{R}^2 \setminus (L \cup l)$. Ma d'altra parte sono collegati da una poligonale semplice (contenuta in $P \cup C$) che non interseca $L \cup l$ e questa é una contraddizione. \square

Riportiamo ora l'enunciato del teorema.

Teorema 3.3.2. (Schönflies) *Sia $C \subset \mathbb{R}^2$ una curva di Jordan.*

Allora $\text{int}(C)$ é omeomorfo ad un disco chiuso.

Dimostrazione. La dimostrazione dettagliata del Teorema si trova nelle pagine 113-115 del libro di M.Abate[2]. \square

Osservazione 7. Di fatto abbiamo dimostrato che possiamo estendere qualsiasi omeomorfismo f fra C e S^1 a un omeomorfismo fra le chiusure degli interni.

Analogamente si può dimostrare che è possibile estenderlo anche a un omeomorfismo di tutto \mathbb{R}^2 con se stesso.

Bibliografia

- [1] Czes Kosniowski. *Introduzione alla topologia algebrica*. Zanichelli, 2010.
- [2] M. Abate e E. Tivena. *Curve e superfici*. Springer, 2006.
- [3] Marco Manetti. *Topologia*. Springer, 2008.
- [4] Wikipedia inglese. *History of Jordan curve*.
- [5] E.T. Bell. *I grandi matematici*. Sansoni editrice, 1990.
- [6] Desmatron. *Teoria dei grafi*. 2004.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

Ringraziamenti

Desidero innanzitutto ringraziare la relatrice di questa tesi, la **prof.ssa Rita Fioresi** per le numerose dedicatemi e per i preziosi insegnamenti e consigli durante la stesura.

Ringrazio poi i miei **compagni di corso** e i **compagni di studio** soprattutto Giuseppe, Simone e Francesca, per essermi stati vicini in questi quattro anni e per avermi aiutato e sostenuto nei momenti difficili. Grazie alla vostra compagnia anche le giornate di studio piú intense sono diventate, tutto sommato, piacevoli e, piú che compagni di corso, vi siete rivelati veri e propri amici e per questo io vi considero la mia seconda famiglia. Un ringraziamento di cuore alla **Giada** e **Tommy**, i miei primi amici bolognesi. Vi ringrazio perché avete condiviso con me tutti i momenti sia belli che brutti e non avete esitato a darmi una seconda possibilitá nonostante ad un certo punto io mi comportassi male (sapete a cosa mi riferisco no?!). Senza di voi non sarei arrivata alla fine, di questo ne sono certa e, nonostante ci conosciamo da pochi anni, posso dire che siete degli amici veri e io vi voglio tanto bene. Inoltre ringrazio **Carlo** perché....beh qui non lo dico perché.

Un ringraziamento speciale va poi alle mie **conquiline** per avermi sopportato in questi ultimi mesi, tutt'altro che facili, e per la vostra piacevole compagnia.

Ringrazio poi tutti i miei **amici di Ostra** per l'affetto dimostratomi e per tutte le serate di puro divertimento.

Un caldo ringraziamento inoltre a tutta la mia **famiglia** per il sostegno e per gli aiuti morali che mi avete dato in questi anni.

Un ringraziamento particolare a **Luca** per avermi dato il coraggio di prendere questa strada e per avermi sostenuto durante questa avventura. Perché sei la persona che se da un lato riesci a farmi arrabbiare con una facilitá spaventosa, dall'altro riesci a farmi star bene come nessun'altro sa fare. Perché mi hai fatto sentire amata e perché fai quelle passeggiate eterne con me anche dopo il lavoro; tu non mi dici niente ma io lo so che non ne hai voglia. Perché con te ho capito il senso della parola complicitá e perché, nel bene e nel male, ci sei sempre stato. Per il nostro rapporto che solo io e te comprendiamo e che di certo non scriveró qui.... Insomma *miiiiiiii*.

Ringrazio **Barbara** per essere stata la sorella maggiore che non ho avuto; per tutte le ore di chiacchiere insieme e per tutte le volte che piú che una zia sei stata un'amica eccezionale. E io ti voglio tanto bene.

Poi ringrazio **Nadia** e **Tonino** per avermi sempre considerato una figlia e per avermi dato tutto quell'affetto che va al di lá del legame di parentela, e che infatti non c'è. Io infatti vi ho sempre considerato parte della mia famiglia ed é stato un piacere condividere con voi i giorni piú importanti della mia vita.

Ultimi, ma di certo non per ordine di importanza, i ringraziamenti a **mamma, babbo, Elisa e Benedetta**. A **Elisa** e **Benedetta**, la cosa piú bella che abbia avuto nella vita. Grazie per tutto l'affetto che mi dimostrate, anche se in modi completamente diversi, e per tutte le volte che mi fate ritornare bambina. Ogni volta che parto per Bologna mi viene da piangere (e spesso lo faccio) perché mi manca vedere i vostri musetti in giro per casa e perché il tempo trascorso con voi non é mai abbastanza. Mi piace vedervi

crescere e adoro osservarvi mentre dormite perché lí sul letto mi sembrate ancora piccoline e, forse, per me voi lo sarete sempre . Insomma siete i miei cicci dell'amore preferiti.

A babbo e mamma.

Grazie a **mamma** perché sei la mia migliore amica e perché riesci a comprendermi piú di qualsiasi altra persona. Grazie per tutte le volte che fai quelle telefonate stupide che io proprio non sopporto ma che in realtà mi fanno piacere perché ho bisogno di sentire la tua voce e per tutte le volte che ti lasci trattare male da me perché sai che ho bisogno di sfogarmi. Poi non sopporto che capisci sempre quello che mi passa per la testa solo guardandomi e poi mi dici quello che penso anche se a volte io preferisco non saperlo (e tu sai a cosa mi riferisco). Grazie per il tuo modo di essere mamma e per aver rinunciato un pò ad esser donna per proteggerci (anche qui sai a cosa mi riferisco). E ti ringrazio di non farmi mai le coccoline come babbo perché mi fai ridere quando cerchi di nascondere quei sentimenti che dai tuoi occhi si capiscono benissimo.

Grazie a **babbo** perché sei la persona che piú di tutto ringrazierei. Perché sei la prima persona che voglio accanto nei momenti di bisogno e sei anche il primo a cui comunico i miei successi perché renderti felice e sapere che sei orgoglioso di me é la cosa a cui tengo di piú a questo mondo. Per tutte le volte che mi vuoi portare a casa da Bologna e non posso quindi poi piango. Per tutte le volte che ti osservo e cerco di fare il meglio possibile per imitarti. Per tutte le volte che vuoi avere ragione anche se sai di non averla perché, dopotutto, sei testardo ed orgoglioso come me e sono fiera del fatto che ci assomigliamo cosí tanto.

Questi 4 anni non stati i piú belli per noi tre; la casetta del mulino bianco ha rischiato di crollare. Però dopo tanti pianti, urla e sbattimenti di sedia abbiamo superato anche questa fase e, a nostro modo, siamo piú felici di prima. Di certo la gente stenta a crederlo e molti non capiscono perché, nonostante tutto, riusciamo ad essere tanto sereni; d'altronde il nostro piccolo mondo idilliaco ce lo siamo sempre tenuto stretto e non abbiamo permesso a niente

e nessuno di entrarci. Il legame speciale che c'è tra voi due e nel quale mi avete coinvolto mi ha dato la possibilità di scoprire cosa vuol dire realmente essere una famiglia che va al di là dei canoni standard; ed è di voi quattro che io proprio non posso fare a meno.

Quindi grazie perché senza di voi di certo non sarei arrivata fino qui e più che altre perché ora non avrebbe senso festeggiare senza voi. Infatti questo non è un mio traguardo ma è il NOSTRO traguardo.