

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

Espansione in serie di Fourier coseno

Tesi di Laurea in Finanza Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Pascucci

Presentata da:
Elisa Diamantini

II Sessione
Anno Accademico 2010/2011

*Alla presenza
della tua assenza*

Introduzione

Presentiamo un metodo di valutazione del prezzo dell'opzioni Europee basato sull'espansione in serie di Fourier coseno.

Nel primo capitolo si enuncia il teorema di Jordan inerente la teoria sulle serie di Fourier, nonché si richiamano tutti i risultati atti a dimostrarlo, con particolare riferimento al teorema di localizzazione di Riemann e alla definizione di nucleo di Dirichlet di grado n .

Nel capitolo successivo viene esplicitata l'implementazione del metodo, giungendo all'espressione esplicita del prezzo di un'opzione Call con funzione payoff f , ottenuta applicando l'approssimazione in serie di Fourier coseno. Viene inoltre riportata l'applicazione del metodo ai modelli Black&Scholes e Variance-Gamma.

Nelle appendici si produce una breve trattazione su due temi prettamenti finanziari.

Il primo riguarda la formula di Black&Scholes attraverso la quale é possibile dare un'espressione in forma chiusa dei prezzi delle opzioni Put e Call Europee.

Il secondo riguarda le Greche. Nel modello Black& Scholes il valore di una strategia é funzione di diversi fattori: il prezzo del sottostante, il tempo, la volatilità e il tasso di interesse. I coeficienti che esprimono in modo sintetico la variazione del valore dell'opzione quando uno dei fattori varia di una unità, detta anche sensibilità del valore dell'opzione, si definiscono Greche.

Indice

Introduzione	i
1 Serie di Fourier	1
1.1 Teorema di Jordan	2
2 Espansione in serie di Fourier coseno	9
2.1 Implementazione	14
A Formula di Black&Scholes	21
B Greche	23
Bibliografia	29

Capitolo 1

Serie di Fourier

Un interessante metodo di valutazione basato sull'espansione in serie di Fourier é stato recentemente proposto da Fang e Oosterlee[3]. Prima di presentare questo approccio alternativo, si richiamano alcuni risultati classici riguardo alle serie di Fourier. Sia

$$f : [-\pi, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}$$

una funzione sommabile: la serie di Fourier di f é definita da

$$S_n(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

dove

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \cos(k\xi) d\xi, \quad k \geq 0, \quad (1.2)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \sin(k\xi) d\xi, \quad k \geq 1, \quad (1.3)$$

Notare che se f é una funzione pari, allora $b_k = 0$ per ogni $k \geq 1$. Possiamo prolungare per periodicitá su tutto \mathbb{R} e considerare $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Un classico risultato sulla convergenza delle serie di Fourier, il quale comprende tutte le situazioni standard per la valutazione delle opzioni, é il seguente:

1.1 Teorema di Jordan

Teorema 1.1.1 (Jordan).

Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é una funzione 2π -periodica e a variazione totale limitata in $[-\pi, \pi]$ allora la sua serie di Fourier converge in ogni punto $t \in \mathbb{R}$ con somma uguale a

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2}.$$

Nota. Ricordiamo che ogni funzione a variazione limitata é differenza di due funzioni monotone crescenti. Pertanto il limite

$$f(t+)$$

esiste in ogni punto $t \in [-\pi, \pi[$. Analogamente, il limite $f(t-)$ esiste in ogni punto $t \in]-\pi, \pi]$. La 2π -periodicitá di f assicura poi l'esistenza di $f(t+)$ e di $f(t-)$ in ogni punto $t \in \mathbb{R}$.

Ricordando poi che le funzioni monotone sono integrabili secondo Riemann e che ogni funzione Riemann integrabile su un intervallo compatto é sommabile nel senso di Lebesgue la funzione f dell'enunciato é sommabile su $[-\pi, \pi]$.

Prima di procedere alla dimostrazione di questo profondo risultato anteponiamo i seguenti risultati.

Definizione 1.1. (Nucleo di Dirichlet di grado n)

Si chiama *nucleo di Dirichlet di grado n* , $n \in \mathbb{N}$ il seguente polinomio trigonometrico

$$D_n(t) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

D_n é una funzione 2π -periodica. Inoltre poiché

$$\int_0^\pi \cos kt \, dt = 0 \quad \forall k \geq 1,$$

risulta

$$\int_0^\pi D_n(t) dt = \int_0^\pi \frac{1}{2} dt = \frac{\pi}{2} \quad (1.5)$$

Sull'intervallo $]0, \pi[$ il nucleo D_n si può scrivere in forma chiusa nel modo seguente:

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2 \sin \frac{t}{2}} \quad \text{per } 0 < t < \pi \quad (1.6)$$

Infatti, moltiplicando per $\sin \frac{t}{2}$ entrambi i membri di (1.4) e utilizzando l'identità

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\beta - \alpha))$$

valida per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ottiene

$$\begin{aligned} \sin \frac{t}{2} D_n(t) &= \frac{1}{2} \left(\sin \frac{t}{2} + \left(\sin \frac{3}{2}t - \sin \frac{t}{2} \right) \right. \\ &+ \left(\sin \frac{5}{2}t - \sin \frac{3}{2}t \right) + \cdots + \left(\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) - \sin\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)t\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right). \end{aligned}$$

Questo dimostra (1.6).

Teorema 1.1.2.

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica sommabile nell'intervallo $[-\pi, \pi[$.

Allora

$$S_n(f)(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} D_n(s) ds \quad (1.7)$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. . Sostituendo (1.2) e (1.3) in (1.1) si ottiene

$$\begin{aligned}
S_n(f)(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos ks \cos kt + \sin ks \sin kt) \right) ds \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) D_n(t-s) ds \\
&= (\text{ponendo } s-t = \sigma \text{ e osservando che } D_n(-\sigma) = D_n(\sigma)) \\
&\quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(t+\sigma) D_n(\sigma) d\sigma
\end{aligned}$$

= (Applicando $\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
alla funzione 2π -periodica $\sigma \mapsto f(t+\sigma)D_n(\sigma)$) si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+\sigma) D_n(\sigma) d\sigma &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 + \int_0^{\pi} \right) f(t+\sigma) D_n(\sigma) d\sigma \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(t+s) D_n(-s) + f(t+s) D_n(s)) ds \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(t-s) + f(t+s)}{2} D_n(s) ds
\end{aligned}$$

Questo dimostra la (1.7). □

Proposizione 1.1.3.

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodica e sommabile su $[-\pi, \pi[$. Per ogni fissato $t \in \mathbb{R}$ le affermazioni seguenti sono equivalenti.

(i) esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(t) = \lambda; \quad (1.8)$$

(ii) esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) \frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) s \right)}{\sin \frac{s}{2}} ds = 0. \quad (1.9)$$

Dimostrazione. Per (1.5) e (1.6) risulta

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right)}{2 \sin \frac{s}{2}} ds = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Allora per la (1.7), qualunque sia $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$S_n(f(t)) - \lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right)}{2 \sin \frac{s}{2}} ds.$$

Da questa identità segue immediatamente l'equivalenza delle affermazioni (i) e (ii). \square

Per lo studio del limite (1.9) risulta cruciale il seguente Lemma

Lemma 1.1.4. *Per ogni funzione sommabile*

$$g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}, \quad -\infty \leq a < b \leq +\infty,$$

risulta

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow +\infty} \int_a^b g(s) \sin(\alpha s) ds = 0 \quad (1.10)$$

e, analogamente,

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow +\infty} \int_a^b g(s) \cos(\alpha s) ds = 0. \quad (1.11)$$

Teorema 1.1.5 (Teorema di localizzazione di Riemann).

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, sommabile su $[-\pi, \pi[$. Siano poi $t, \lambda \in \mathbb{R}$. Le affermazioni seguenti sono allora equivalenti:

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(t) = \lambda;$

(ii) *esiste $c > 0$ tale che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right)}{s} ds = 0. \quad (1.12)$$

Dimostrazione. Per la Proposizione 1.1.3 basta dimostrare che sono equivalenti (1.9) e (1.12). Nel seguito per ragioni di brevità, poniamo

$$m_f(t, s) := \frac{f(t+s) - f(t-s)}{2} \quad (1.13)$$

Poiché la funzione

$$s \mapsto (m_f(t, s) - \lambda) \frac{1}{\sin \frac{s}{2}}$$

é sommabile su $[c, \pi]$ qualunque sia $c \in]0, \pi[$, per il lemma 1.1.4 la (1.9) é equivalente alla seguente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c (m_f(t, s) - \lambda) \frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) s \right)}{\sin \frac{s}{2}} ds \quad (1.14)$$

D'altra parte, poiché

$$s \mapsto \left(\frac{1}{\sin \frac{s}{2}} - \frac{2}{s} \right)$$

é continua e limitata su $]0, c[$, la funzione

$$s \mapsto (m_f(t, s) - \lambda) \left(\frac{1}{\sin \frac{s}{2}} - \frac{2}{s} \right)$$

é sommabile sullo stesso intervallo, e quindi per il lemma 1.1.4,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c (m_f(t, s) - \lambda) \left(\frac{1}{\sin \frac{s}{2}} - \frac{2}{s} \right) \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) s \right) ds = 0$$

Ne viene che (1.14) é equivalente a (1.12). Questo prova il Teorema poiché (1.14), come già osservato, é equivalente a (1.9).

□

Dal teorema di localizzazione di Riemann e alla luce dei risultati sopra esposti, dimostriamo ora il teorema di Jordan.

Dimostrazione. Fissiamo $t \in \mathbb{R}$ ad arbitrio. Per quanto richiamato nella nota precedente basta dimostrare il Teorema supponendo la f monotona crescente in un opportuno intorno $[t-c, t+c]$ del punto t .

Definiamo

$$\varphi : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(s) = f(t+s) - f(t)$$

e

$$\psi : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(s) = f(t-s) - f(t)$$

Dimostreremo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c \varphi(s) \frac{\sin((n + \frac{1}{2})s)}{s} ds = 0, \quad (1.15)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c \psi(s) \frac{\sin((n + \frac{1}{2})s)}{s} ds = 0, \quad (1.16)$$

Da queste e dal Teorema di localizzazione di Riemann seguirá l'asserto.

Per dimostrare (1.15) e (1.16) utilizzeremo il seguente Teorema della media integrale, che qui riportiamo senza dimostrazione.

Teorema 1.1.6.

Date due funzioni $h, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, con h monotona e g continua esiste un punto $\alpha \in [a, b]$ tale che

$$\int_a^b hg \, ds = h(a) \int_a^\alpha g \, ds + h(b) \int_\alpha^b g \, ds.$$

Dimostriamo ora (1.15). Poiché

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \sigma}{\sigma} d\sigma$$

é convergente nel senso di Riemann generalizzato per ogni fissato $\epsilon > 0$ esiste $m > 0$ tale che

$$\left| \int_\alpha^\beta \frac{\sin \sigma}{\sigma} d\sigma \right| < \epsilon \quad \forall \alpha, \beta \geq m. \quad (1.17)$$

Ora

$$\begin{aligned}
\int_0^c \varphi(s) \frac{\sin((n + \frac{1}{2})s)}{s} ds &= (\text{ponendo } (n + \frac{1}{2})s = \sigma) \\
&\int_0^{(n+\frac{1}{2})c} \varphi\left(\frac{\sigma}{n+\frac{1}{2}}\right) \frac{\sin \sigma}{\sigma} d\sigma \\
&= \int_0^m \varphi\left(\frac{\sigma}{n+\frac{1}{2}}\right) \frac{\sin \sigma}{\sigma} d\sigma + \int_m^{(n+\frac{1}{2})c} \varphi\left(\frac{\sigma}{n+\frac{1}{2}}\right) \frac{\sin \sigma}{\sigma} d\sigma \\
&=: I(n) + J(n)
\end{aligned}
\tag{1.18}$$

Poiché φ é monotona crescente e $|\sin \sigma / \sigma| \leq 1$ per ogni $\sigma > 0$, risulta

$$|I(n)| \leq m\varphi\left(\frac{m}{n+\frac{1}{2}}\right)$$

Quindi $I(n) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ in quanto $\varphi(s) \rightarrow 0$ per $s \rightarrow 0+$. Di conseguenza, esiste $\bar{n} = \bar{n}(m, \varepsilon)$ tale che

$$|I(n)| < \varepsilon \quad \forall n > \bar{n}. \tag{1.19}$$

Per valutare $J(n)$ applichiamo il Teorema 1.1.6, richiamato qui sopra, alle funzioni $h(s) = \varphi(s)$ e $g(s) = \frac{\sin s}{s}$. Allora, se $(n + \frac{1}{2})c > m$, esiste $\alpha \in]m, (n + \frac{1}{2})c]$ tale che

$$J(n) = \varphi\left(\frac{m}{n+\frac{1}{2}}\right) \int_m^\alpha \frac{\sin \sigma}{\sigma} d\sigma + \varphi(c) \int_\alpha^{(n+\frac{1}{2})c} \frac{\sin \sigma}{\sigma} d\sigma$$

e quindi, per la (1.17) e per la monotonia di φ ,

$$|J(n)| \leq 2\varphi(c)\varepsilon$$

Da questa, dalla 1.19 e dalla 1.18 segue la 1.15. La 1.16 si dimostra allo stesso modo. Cosí la dimostrazione del Teorema é completa. \square

Capitolo 2

Espansione in serie di Fourier coseno

In riferimento a quanto enunciato nel capitolo precedente, se f é una funzione a variazione limitata ed é continua in x_0 , allora $S_f(x_0) = f(x_0)$: per semplicitá, in seguito assumeremo che la serie di Fourier di f converga e la sua somma valga f .

Mediante un semplice cambio di variabili, possiamo considerare funzioni supportate in qualsiasi altro intervallo finito. Infatti sia

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

e consideriamo il cambiamento di variabile $\theta = k\pi \frac{x-a}{b-a}$:piú precisamente,

$$g(\theta) = f\left(\frac{b-a}{\pi}\theta + a\right), \quad \theta \in [0, \pi],$$

e per simmetria estendiamo g a $[-\pi, \pi]$ in modo che sia funzione pari. Allora otteniamo la seguente *espansione in serie di Fourier coseno* di f :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos\left(k\pi \frac{x-a}{b-a}\right) \quad (2.2)$$

dove

$$a_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(\xi) \cos\left(k\pi \frac{\xi-a}{b-a}\right) d\xi, \quad k \geq 0.$$

É noto che l'espansione in serie di Fourier coseno di f in x é uguale all'espansione in serie di Chebychev di $f(\cos^{-1}(t))$ in t .

Dividiamo ora il problema dell'approssimazione secondo Fourier del prezzo dell'opzione in due passi:

I. Consideriamo $f \in L^1(\mathbb{R})$ e assumiamo di conoscere esplicitamente la sua trasformata di Fourier \hat{f} . Scegliamo un intervallo $[a, b]$ e approssimiamo i coefficienti dell'espansione in serie di Fourier coseno di f come segue:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(\xi) \operatorname{Re} \left(e^{ik\pi \frac{\xi-a}{b-a}} \right) d\xi \\ &= \frac{2}{b-a} \operatorname{Re} \left(e^{-ik\pi \frac{a}{b-a}} \int_a^b f(\xi) e^{ik\pi \frac{\xi}{b-a}} d\xi \right) \\ &\approx \frac{2}{b-a} \operatorname{Re} \left(e^{-ik\pi \frac{a}{b-a}} \hat{f} \left(\frac{k\pi}{b-a} \right) \right) =: A_k, \end{aligned} \quad (2.3)$$

dove abbiamo utilizzato l'approssimazione

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} f(x) dx \approx \int_a^b e^{ix\xi} f(x) dx.$$

Troncando la serie (2.2) con un indice N opportuno, otteniamo la seguente approssimazione di Fourier coseno:

$$f(x) \approx \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^N A_k \cos \left(k\pi \frac{x-a}{b-a} \right), \quad x \in [a, b]. \quad (2.4)$$

con A_k come in (2.3).

II. Consideriamo un modello di prezzo supponendo che esista un solo sottostante S e sia Q la misura martingala scelta; dove S assume la seguente forma

$$S_T = e^{X_T + x_0}.$$

dove $x_0 = \log S_0$, $S_0 > 0$, e X_T é una variabile casuale la cui funzione caratteristica φ_{X_T} é

$$\varphi_{X_T}(\xi) = E^Q[e^{i\xi X_T}] = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} Q^{X_T}(dx) \quad (2.5)$$

Denotiamo con $H(S_0, T)$ il prezzo di un'opzione Europea con maturità T e funzione payoff f : per esempio, $f(x) = (e^x - K)^+$ per un'opzione Call con strike K .

Assumiamo che X_T abbia funzione di densità ϕ_{X_T} e abbiamo

$$\begin{aligned} H(S_0, T) &= e^{-rT} E^Q[f(X_T + x_0)] \\ &= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} f(x + x_0) \phi_{X_T}(x) dx \approx \\ &\approx e^{-rT} \int_a^b f(x + x_0) \phi_{X_T}(x) dx \approx \end{aligned}$$

(usiamo l'approssimazione di Fourier coseno (2.4) di ϕ_{X_T})

$$\approx e^{-rT} \frac{A_0}{2} \int_a^b f(x + x_0) dx + e^{-rT} \sum_{k=1}^N A_k \int_a^b f(x + x_0) \cos\left(k\pi \frac{x-a}{b-a}\right) dx.$$

Quindi abbiamo la seguente approssimazione del prezzo dell'opzione

$$H(S_0, T) \approx e^{-rT} \left(\frac{A_0 B_0(S_0)}{2} + \sum_{k=1}^N A_k B_k(S_0) \right), \quad (2.6)$$

dove

$$A_k = \frac{2}{b-a} \operatorname{Re} \left(e^{-ik\pi \frac{a}{b-a}} \varphi_{X_T} \left(\frac{k\pi}{b-a} \right) \right), \quad (2.7)$$

$$B_k(S_0) = \int_a^b f(x + \log(S_0)) \cos\left(k\pi \frac{x-a}{b-a}\right) dx. \quad (2.8)$$

Notare che il fattore B_k é il coefficiente dell'espansione in serie di Fourier coseno di f che in alcuni casi interessanti può essere calcolato esplicitamente. Ciò che distingue i vari modelli di prezzo, sono certamente gli A -coefficienti che dipendono dalla funzione caratteristica di X_T , ma non da S_0 e dalla funzione payoff f . É possibile computare contemporaneamente opzioni con differenti funzioni di payoff. Illustriamo ora il metodo sopra descritto tramite alcuni esempi; verranno quindi computati i coefficienti dell'espansione in serie di Fourier coseno del prezzo e delle Greche di un'opzione Call, nonché il

prezzo e la Delta di una Put.

Esempio 2.1 (Call price and Delta). Per un'opzione Call abbiamo

$$B_0^{\text{Call}}(S_0) = \int_a^b (e^{x+\log(S_0)} - K)^+ dx = \quad (2.9)$$

(assumiamo $a < -\log(\frac{S_0}{K})$)

$$= \int_{-\log(\frac{S_0}{K})}^b (e^{x+\log S_0} - K) dx = e^b S_0 - K \left(1 + b + \frac{S_0}{K}\right),$$

e, per $k \geq 1$,

$$B_k^{\text{Call}}(S_0) = \int_a^b (e^{x+\log S_0} - K)^+ \cos\left(k\pi \frac{x-a}{b-a}\right) dx =$$

(assumiamo $a < -\log(\frac{S_0}{K})$)

$$\begin{aligned} &= \int_{-\log(\frac{S_0}{K})}^b (e^{x+\log S_0} - K) \cos\left(k\pi \frac{x-a}{b-a}\right) dx \\ &= \frac{(b-a)^2 ((-1)^k e^b k\pi S_0 - kK\pi \cos\gamma + (b-a)K \sin\gamma)}{(b-a)^2 k\pi + k^3 \pi^3}, \end{aligned}$$

con

$$\gamma = \frac{k\pi(a + \log(\frac{S_0}{K}))}{a-b}. \quad (2.10)$$

Qui di seguito riportiamo i coefficienti delle Greche (vedi Appendice B) di un'opzione Call:

$$B_0^{\text{Delta}}(S_0) = \frac{d}{dS_0} B_0^{\text{Call}}(S_0) = e^b - \frac{K}{S_0},$$

e per $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} B_k^{\text{Delta}}(S_0) &= \frac{d}{dS_0} B_k^{\text{Call}}(S_0) \\ &= \frac{(a-b)((-1)^k (a-b)e^b S_0 + (b-a)K \cos\gamma + kK\pi \sin\gamma)}{((b-a)^2 + k^2 \pi^2) S_0} \end{aligned}$$

con γ come in (2.10).

$$B_0^{Gamma}(S_0) = \frac{d}{dS_0} B_0^{Delta}(S_0) = \frac{K}{S_0^2}$$

$$B_k^{Gamma}(S_0) = \frac{d}{dS_0} B_k^{Delta}(S_0) = \frac{K \cos\left(\frac{k\pi(\pi + \log(\frac{S_0}{K}))}{\pi - b}\right)}{S_0^2}$$

Poiché i coefficienti B_k e B_0 dell'opzione Call non dipendono da σ, r, T per Vega, Theta e Rho abbiamo calcolato i coefficienti A_k (2.7), qui di seguito riportati:

$$A_k^{Vega} = \frac{d}{d\sigma} A_k = \frac{2}{b-a} \operatorname{Re} \left(e^{-ik\pi \frac{a}{b-a}} e^{\frac{ik\pi x}{-a+b} - \frac{k^2 \pi^2 T \sigma^2}{2(-a+b)^2} \cdot \frac{ik\pi T(r - \frac{\sigma^2}{2})}{-a+b}} \right. \\ \left. \left(-\frac{ik\pi T \sigma}{-a+b} - \frac{k^2 \pi^2 T \sigma}{(-a+b)^2} \right) \right)$$

$$A_k^{Theta} = \frac{d}{dt} A_k = \frac{2}{b-a} \operatorname{Re} \left(e^{-ik\pi \frac{a}{b-a}} e^{\frac{ik\pi x}{-a+b} - \frac{k^2 \pi^2 T \sigma^2}{2(-a+b)^2} + \frac{ik\pi T(r - \frac{\sigma^2}{2})}{-a+b}} \right. \\ \left. \left(\frac{k^2 \pi^2 \sigma^2}{2(-a+b)^2} + \frac{ik\pi(r - \frac{\sigma^2}{2})}{-a+b} \right) \right)$$

$$A_k^{Rho} = \frac{d}{dr} A_k = \frac{2}{b-a} \operatorname{Re} \left(e^{-ik\pi \frac{a}{b-a}} i e^{\frac{ik\pi x}{-a+b} - \frac{k^2 \pi^2 T \sigma^2}{2(-a+b)^2} + \frac{ik\pi T(r - \frac{\sigma^2}{2})}{-a+b}} k\pi T \right)$$

Esempio 2.2 (Opzione Put e Delta). Per un'opzione Put abbiamo

$$B_0^{\text{Put}}(S_0) = e^a S_0 - K \left(1 + a + \log\left(\frac{S_0}{K}\right) \right)$$

e per $k \geq 1$,

$$B_k^{\text{Put}}(S_0) = \frac{(b-a)^2 (e^a S_0 k\pi - kK\pi \cos\gamma + (b-a)K \sin\gamma)}{(b-a)^2 k\pi + k^3 \pi^3},$$

con γ come in (2.10). I coefficienti della Delta di un'opzione Put sono i seguenti

$$B_0^{\text{Delta-Put}}(S_0) = e^a - \frac{K}{S_0}, \quad (2.11)$$

e per $k \geq 1$,

$$B_k^{\text{Delta-Put}}(S_0) = \frac{(a-b)K((a-b)e^a S_0 + (b-a)K \cos \gamma + kK\pi \sin \gamma)}{K((b-a)^2 + k^2\pi^2)S_0}$$

2.1 Implementazione

L'implementazione del metodo di Fourier-coseno é lineare, tuttavia sono necessarie ulteriori indicazioni per quanto riguarda la scelta dell'intervallo $[a, b]$. Una prima scelta per $[a, b]$ puó essere dedotta dal fatto che la funzione di densitá puó essere stimata usando gli n -cumulanti c_n di X_T cosí definiti

$$c_n = \frac{1}{i^n} \frac{d^n}{d\xi^n} g(\xi)|_{\xi=0}, \quad g(\xi) = \log \varphi_{X_T}(\xi) = \log E^Q[e^{i\xi X_T}].$$

Per esempio nel modello Black-Scholes dove

$$\varphi_{X_T}(\xi) = e^{i(r - \frac{\sigma^2}{2})T\xi - \frac{\sigma^2 \xi^2}{2}T},$$

abbiamo

$$c_1 = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \quad c_2 = \sigma^2 T, \quad c_4 = 0 \quad (2.12)$$

rispettivamente media e varianza di X_T . L'espressione dei cumulanti puó essere calcolata esplicitamente anche nei casi piú complessi tramite software. Ritornando alla scelta di a e b , Fang e Oosterlee [3] propongono la seguente:

$$a = c_1 - L\sqrt{c_2 + \sqrt{c_4}}, \quad b = c_1 + L\sqrt{c_2 + \sqrt{c_4}} \quad (2.13)$$

con $L = 10$. La scelta $L = 10$ risulta appropriata per vari modelli, tuttavia tale parametro puó essere modificato al fine di incrementare la precisione computazionale del modello: in generale, quando si incrementa L , si sceglierá un

N abbastanza grande per mantenere costante l'accuratezza. In alcuni casi possiamo semplicemente porre

$$a = c_1 - L\sqrt{c_2}, \quad b = c_1 + L\sqrt{c_2} \quad (2.14)$$

raggiungendo con tale scelta buoni risultati. Nel primo test consideriamo il modello Black-Scholes e calcoliamo gli errori relativi definiti come:

$$\begin{aligned} \text{RelErr}^{\text{Call}} &= \frac{\text{Call}(S_0, K, T) - \text{CallBS}(S_0, K, T)}{\text{CallBS}(S_0, K, T)} \\ \text{RelErr}^{\text{Delta}} &= \frac{\text{Delta}(S_0, K, T) - \text{DeltaBS}(S_0, K, T)}{\text{DeltaBS}(S_0, K, T)} \end{aligned} \quad (2.15)$$

dove Call e Delta sono i prezzi calcolati mediante l'approssimazione in serie di Fourier coseno con a e b come in (2.14) e $N = 50$. CallBS e DeltaBS rappresentano i valori esatti ottenuti mediante la formula di Black-Scholes. I parametri sono $r = 5\%$, $\sigma = 30\%$, $K = 100$ e consideriamo $S_0 \in [50, 150]$ e maturità da una settimana, $T = \frac{1}{52}$ a dieci anni, $T = 10$. Analogamente sono stati calcolati gli errori relativi inerenti le altre Greche. In questo caso l'implementazione del metodo fondata su l'espansione in serie di Fourier coseno riduce significativamente l'impiego di CPU. Un'analisi dettagliata e diversi tests hanno valutato l'efficienza dell'espansione in serie di Fourier, evidenziando la validità del metodo anche sotto condizioni estreme. Ricordiamo che il metodo è stato proposto a livello teorico per problemi ad una dimensione (un solo sottostante); tuttavia l'estensione a problemi con elevate dimensioni sembra possibile. Introduciamo ora il modello VG.

Esempio 2.3 (Variance-Gamma). Consideriamo il modello VG con funzione caratteristica

$$\varphi_{X_T}(\xi) = e^{imT\xi} \left(\frac{1}{1 - i\xi\mu\nu + \frac{1}{2}\nu\xi^2\sigma^2} \right)^{\frac{T}{\nu}} \quad (2.16)$$

dove

$$m = r + \frac{1}{\nu} \log \left(1 - \mu\nu - \frac{\sigma^2\nu}{2} \right) \quad (2.17)$$

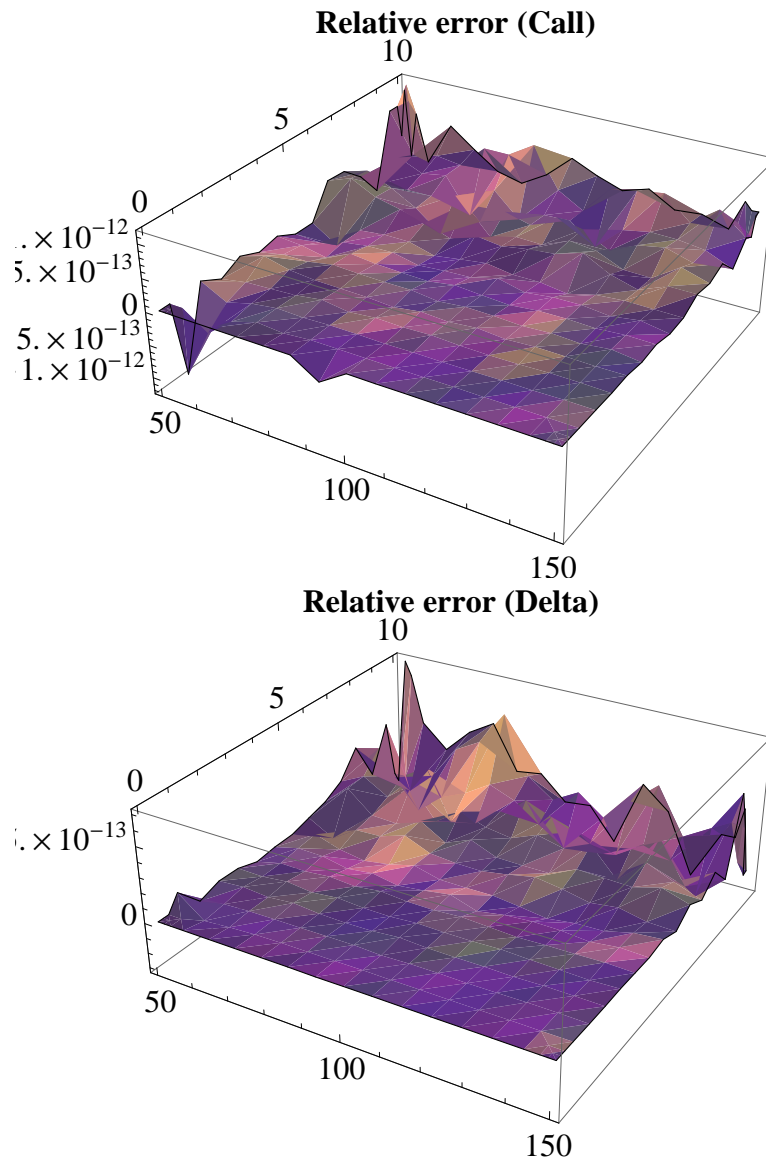


Figura 2.1: Errore relativo del prezzo di un'opzione Call e Delta nel modello Black&Scholes con parametri $K = 100$, $S_0 \in [50, 150]$, $r = 5\%$ e $\sigma = 30\%$

e stabiliamo i seguenti parametri

$$r = 0.1 \quad \sigma = 0.12 \quad \mu = -0.14 \quad \nu = 0.2. \quad (2.18)$$

con a e b come in (2.13) e $L = 10$: i cumulanti sono dati da

$$\begin{aligned} c_1 &= T \left(r + \mu + \frac{\log(1 - \frac{1}{2}\nu(2\mu + \sigma^2))}{\nu} \right). \\ c_2 &= T(\mu^2\nu + \sigma^2) \\ c_4 &= 3T\nu(2\mu^4\nu^2 + 4\mu^2\nu\sigma^2 + \sigma^4). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ciò che distingue un modello da qualsiasi altro è la funzione caratteristica, per cui applicando il metodo dell'espansione in serie di Fourier-coseno al modello VG, si modificano solo i coefficienti A che dipendono dalla funzione caratteristica, mentre rimangono invariati i coefficienti B che mantengono la medesima espressione vista per il modello Black&Scholes. Riportiamo qui di seguito il grafico del prezzo di un'opzione call nel modello VG, in funzione del sottostante $S \in [70, 130]$ e del tempo $T \in [\frac{1}{50}, 1]$. Il prezzo è stato calcolato mediante l'approssimazione in serie di Fourier coseno.

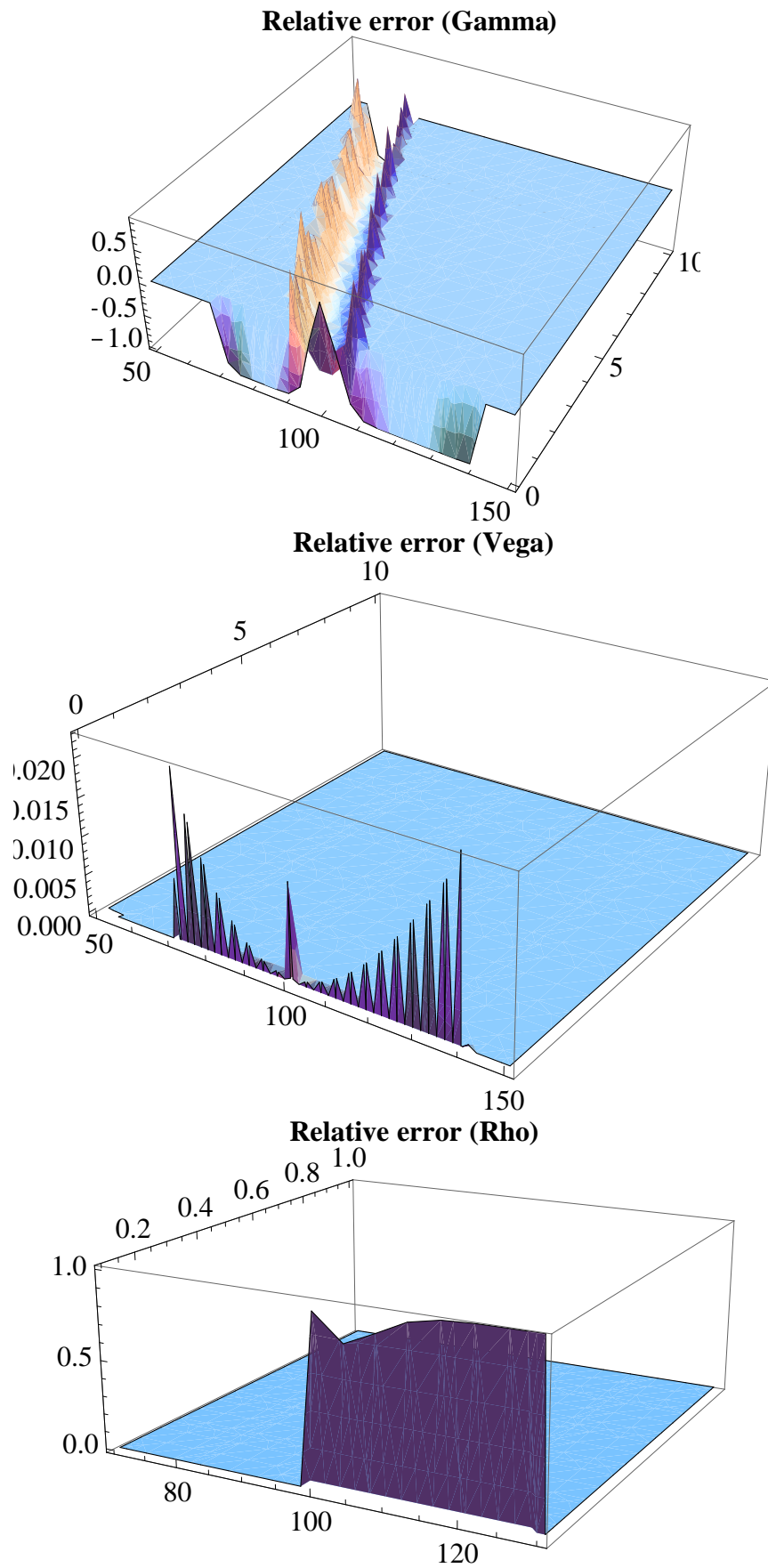


Figura 2.2: Errore relativo della Gamma, Vega e Rho di un'opzione call nel modello Black&Scholes

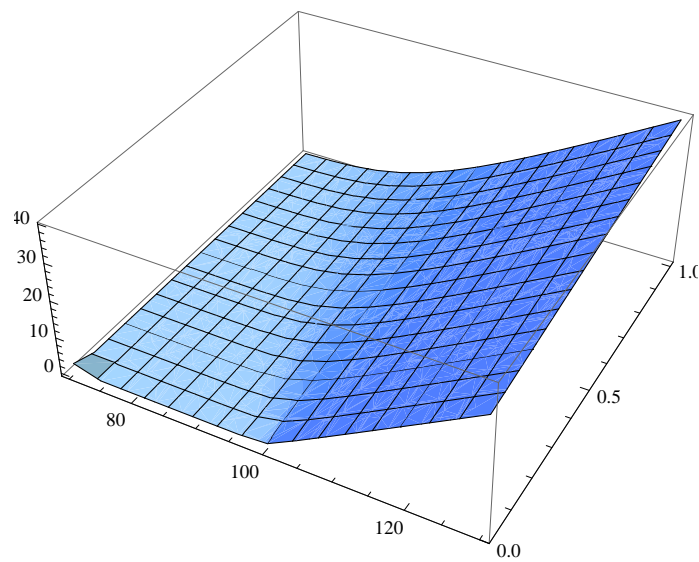


Figura 2.3: Grafico del prezzo di un'opzione Call nel modello VG

Appendice A

Formula di Black&Scholes

Una delle ragioni per cui il modello di Black&Scholes é famoso deriva dal fatto che i prezzi delle opzioni Put e Call Europee hanno un'espressione in forma chiusa.

Corollario A.0.1. (*Formula di Black&Scholes*). Vale la seguente formula

$$P_0 = Ke^{-rT} \phi(-d_2) - S_0 \phi(-d_1), \quad (\text{A.1})$$

dove ϕ indica la funzione di distribuzione normale standard

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad (\text{A.2})$$

e

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\log\left(\frac{S_0}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T} = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)}{\sigma\sqrt{T}} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

infine P_0 indica il prezzo di un'opzione Put Europea con strike K e scadenza T .

Osservazione 1. (Formula di Black&Scholes) In base alla formula di Put-Call parity

$$C_t = P_t + S_t - Ke^{-r(T-t)}, \quad t \in [0, T]$$

definiamo il prezzo di Black&Scholes C_0 di un'opzione Call Europea con strike K e scadenza T nel modo seguente:

$$C_0 := P_0 + S_0 - Ke^{-rT} \quad (\text{A.4})$$

e vale la seguente formula di Black&Scholes:

$$C_0 = S_0\phi(d_1) - Ke^{-rT}\phi(d_2), \quad (\text{A.5})$$

dove d_1, d_2 sono definiti in (A.2) e ϕ indica la funzione di distribuzione normale standard.

Appendice B

Greche

Nel modello Black&Scholes il valore di una strategia é funzione di diversi fattori: il prezzo del sottostante, il tempo e i parametri di modello, la volatilitá σ e il tasso di interesse r . Dal punto di vista pratico é utile poter valutare la sensibilitá del portafoglio rispetto alla variazione di questi fattori: ciò significa poter stimare, per esempio, l'effetto sul valore del portafoglio dell'avvicinarsi alla scadenza o della variazione del tasso privo di rischio o della volatilitá. Ad ogni derivata si associa comunemente una lettera greca e per tale motivo queste misure di sensitivitá sono usualmente chiamate *le greche*.

Notazione. Indichiamo con $f(t, S, \sigma, r)$ il valore di una strategia autofinanziante e Markoviana nel modello Black&Scholes in funzione del tempo t , del prezzo del sottostante S , della volatilitá σ e del tasso a breve r . Poniamo:

$$\Delta = \partial_S(f) \quad (\text{delta})$$

$$\Gamma = \partial_{SS} \quad (\text{gamma})$$

$$v = \partial_\sigma(f) \quad (\text{vega})$$

$$\varrho = \partial_r(f) \quad (\text{rho})$$

$$\Theta = \partial_t(f) \quad (\text{theta})$$

Diciamo che una strategia é *neutrale* rispetto a uno dei fattori di rischio se la corrispondente greca é nulla, ossia se il valore del portafoglio é insensibile rispetto alle variazioni di tale fattore. Per le greche di una call e put Europee é disponibile l'espressione esplicita che si ricava direttamente derivando la formula di Black&Scholes. Nel seguito trattiamo solo il caso della call. Riportiamo l'espressione del prezzo al tempo t di una call Europea con strike K e scadenza T :

$$c_t = g(d_1) \quad (\text{B.1})$$

dove g é la funzione definita da

$$g(d) = S_t \phi(d) - K e^{-r(T-t)} \phi(d - \sigma \sqrt{T-t}), \quad d \in \mathbb{R} \quad (\text{B.2})$$

e

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \quad (\text{B.3})$$

A volte sará utile anche la notazione

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T-t} = \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \quad (\text{B.4})$$

Esaminiamo ora le singole greche dell'opzione call.

Delta:

$$\Delta = \phi(d_1)$$

Gamma:

$$\Gamma = \partial_S \Delta = \phi'(d_1) \partial_S d_1$$

Vega:

$$v = S_t \sqrt{T-t} \phi'(d_1)$$

Theta:

$$\Theta = -r K e^{-r(T-t)} \phi(d_2) - \frac{\sigma S_t}{2\sqrt{T-t}} \phi'(d_1) \quad (\text{B.5})$$

Rho:

$$\rho = K(T-t) e^{-r(T-t)} \phi(d_2)$$

Figura B.1: Grafici delle greche di un'opzione call Europea nel modello di Black&Scholes in funzione del prezzo del sottostante e del tempo alla scadenza

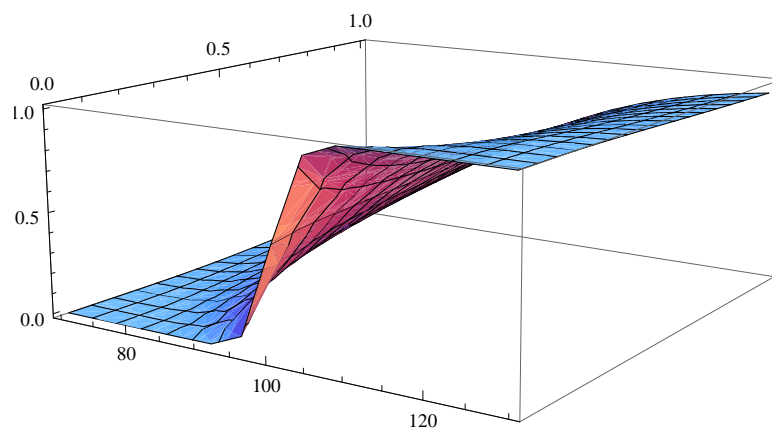


Figura B.2: Delta

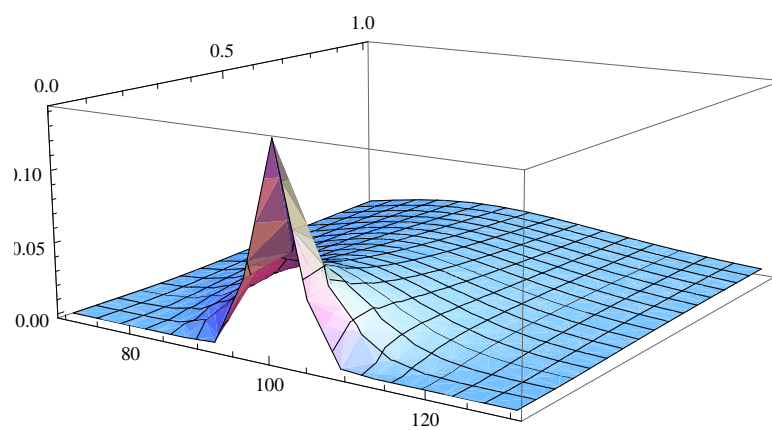


Figura B.3: Gamma

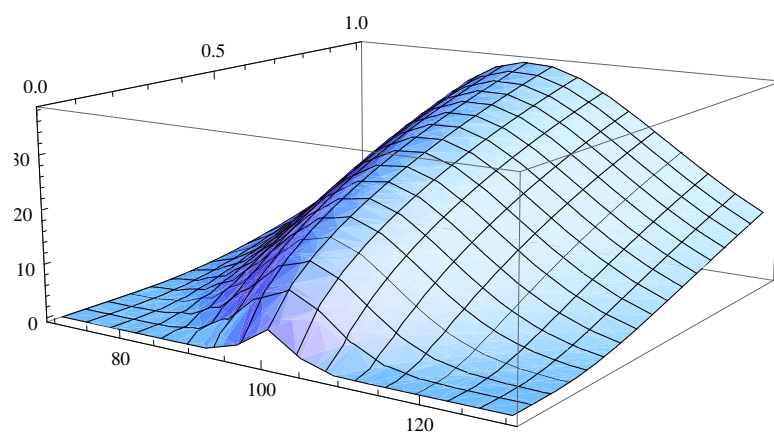


Figura B.4: Vega

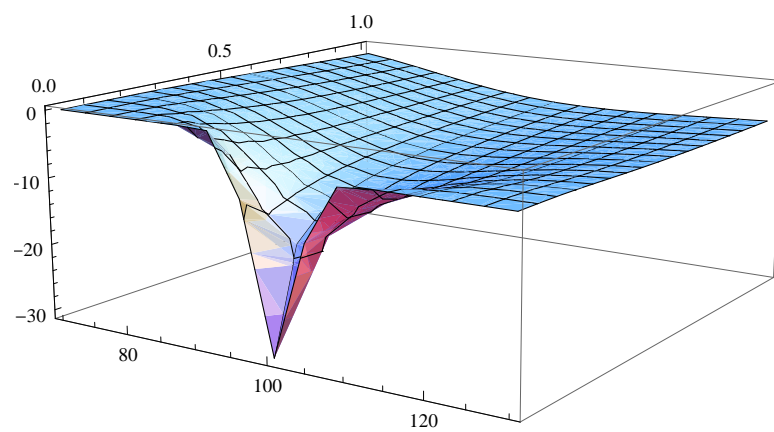


Figura B.5: Theta

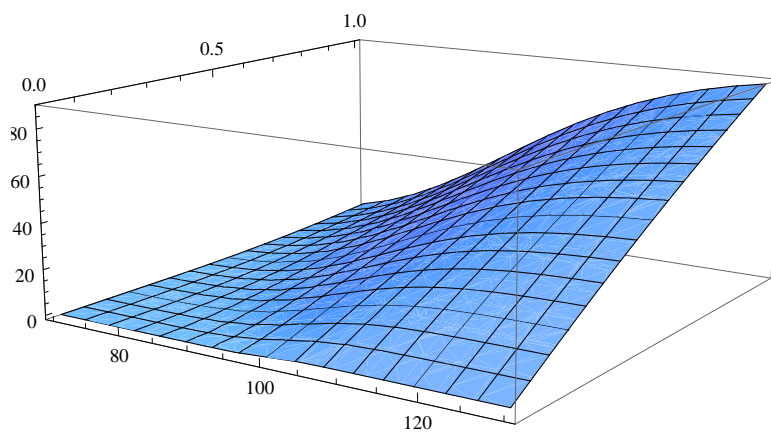


Figura B.6: Rho

Bibliografia

- [1] A.Pascucci, PDE and Martingale Methods in Option Pricing.
- [2] A.Pascucci, Calcolo stocastico per la finanza.
- [3] F.Fang and C.W.Oosterlee, Pricing Early-Exercise and Discrete Barrier Options by Fourier-Cosine Series Expansions.
- [4] E.Lanconelli, Lezioni di analisi matematica 2(seconda parte).

