

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITA' DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

**BUCHI NERI:
DA CURIOSITA' MATEMATICA
ALLA PRIMA
EVIDENZA DIRETTA**

RELATORE:
CHIAR.MA PROF.SSA
MARCELLA BRUSA

PRESENTATA DA:
LIWEI HU

V SESSIONE
ANNO ACCADEMICO 2019/2020

*fatti non foste a viver come bruti,
ma per seguir virtute e canoscenza.*

- D. Alighieri -

-Abstract-

I buchi neri sono una predizione della Relatività Generale, la più importante probabilmente. In genere vengono presentati come corpi celesti aventi un campo gravitazionale così forte da non permettere di sfuggire neppure alla luce. In realtà sono oggetti ancora più curiosi. Infatti dopo che avremo richiamato, nel Capitolo 1, alcuni concetti di teoria della gravitazione classica vedremo nel Capitolo 2 che i buchi neri sono delle entità così compatte da modificare anche il Tempo. D'altra parte una predizione teorica che non trova nessun riscontro nella realtà rimarrebbe una pura curiosità matematica. Per questo motivo nel Capitolo 3 verranno elencate alcune evidenze astrofisiche dell'esistenza dei buchi neri: a partire dalla scoperta degli oggetti estremamente compatti e dei nuclei galattici attivi fino alla prima osservazione diretta avvenuta nel 2017.

Indice

1	Stelle oscure	7
1.1	Richiami di gravitazione Newtoniana	7
1.2	Velocità di fuga	9
1.3	Stelle oscure di John Michell	11
2	Buchi neri di Schwarzschild	15
2.1	Varietà differenziabili	15
2.2	Varietà metriche	19
2.3	Geodetiche	23
2.4	Gravitazione secondo Einstein	26
2.5	Campo di metriche di Schwarzschild	32
2.6	Buchi neri di Schwarzschild	37
3	La prima immagine	39
3.1	Oggetti compatti	39
3.1.1	Nane bianche	39
3.1.2	Stelle di neutroni	40
3.2	Il teorema della singolarità	41
3.3	Buchi neri supermassicci	43
3.4	L' Ombra di un buco nero	44
3.5	Il buco nero supermassiccio al centro di M87 (M87*)	49
3.5.1	Stima della massa a priori	50
3.5.2	Foto del secolo	51
	Bibliografia	59

Capitolo 1

Stelle oscure



Figura 1.1: Targa commemorativa dedicata all'ideatore delle stelle oscure: John Michell

Il prototipo dei buchi neri sono le così chiamate stelle oscure di J. Michell (1724-1793), un particolare corpo celeste previsto dalla teoria della gravitazione Newtoniana. Cominciamo quindi a richiamare alcuni concetti fondamentali che ci serviranno anche nel secondo capitolo per un confronto con la teoria di Einstein.

1.1 Richiami di gravitazione Newtoniana

Legge 1 (di attrazione gravitazionale universale). *Fissato un sistema di riferimento inerziale, dati due punti materiali di massa rispettivamente M e m distanti r , allora*

M esercita una forza su m lungo la retta congiungente e diretta verso M con intensità pari a

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

dove

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \quad \left[\frac{Nm^2}{Kg^2} \right]$$

è chiamata la costante gravitazionale; m, M sono espressi in kilogrammi $[Kg]$ e r in metri $[m]$.

Osservazione 1. In termini di vettori: siano \vec{r}_1 e \vec{r}_2 la posizione di M e m espresse in metri $[m]$ e sia

$$\vec{r} := \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

il vettore spostamento da M a m , allora M esercita su m una forza attrattiva \vec{F} tale che

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Notazione 1. Le grandezze vettoriali senza la freccia in alto indicano il modulo di tali vettori.

Osservazione 2. L'arbitrarietà della scelta di m e M implica che anche su M si applica una tale forza rivolta a m . Oppure equivalentemente lo stesso fatto può essere visto come conseguenza del Terzo principio della Dinamica.

Definizione 1 (Lavoro di una forza). Data una forza \vec{F} , espressa in Newton $[N]$, applicata su un corpo se tale forza sposta tale corpo da un punto iniziale P_i ad un punto finale P_f , si definisce il lavoro compiuto essere la grandezza scalare:

$$L := \int_{P_i}^{P_f} \vec{F} \cdot d\vec{P} \quad [J]$$

dove $d\vec{P}$ è lo spostamento infinitesimo espresso in metri $[m]$.

Definizione 2 (Forza conservativa). Una forza si dice conservativa se e soltanto se il lavoro che compie su un corpo dipende solamente dalla posizione finale e iniziale.

Teorema 1.1.1. La forza gravitazionale è conservativa.

Dimostrazione. Infatti sotto le ipotesi dell' Osservazione 1 se la forza esercitata da M sposta m da un punto iniziale P_i a un punto finale P_f allora per definizione di

lavoro

$$L = \int_{P_i}^{P_f} \vec{F} \cdot d\vec{P} \quad [J] = \int_{P_i}^{P_f} -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{P} \quad [J]$$

notando che

$$\frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{P}$$

non è altro che la proiezione dello spostamento infinitesimo di m lungo la retta congiungente si ha che il lavoro della forza gravitazionale

$$L = \int_{r_i}^{r_f} -G \frac{Mm}{r^2} dr \quad [J]$$

è in realtà una nota integrale 1-dimensionale. Dunque

$$L = -GMm \int_{r_i}^{r_f} \frac{1}{r^2} dr \quad [J] = -GMm \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_i}^{r_f} \quad [J]$$

□

Osservazione 3. Ricordando che la variazione di energia potenziale ΔU è definita essere

$$\Delta U := -L$$

si ottiene che l'energia potenziale gravitazionale di m è:

$$U = -G \frac{Mm}{r}$$

avendo posto per convenzione il valore di U nullo quando i 2 corpi sono infinitamente distanti.

1.2 Velocità di fuga

L'esperienza di tutti i giorni ci dice che un oggetto lanciato in aria con una certa velocità iniziale torna sempre a terra, ma da semplici deduzioni della teoria di Newton richiamati sino ad ora si può mostrare che

Definizione 3. Esiste una soglia di velocità minima di lancio oltre la quale il corpo si allontanerà definitivamente da un pianeta (in genere da un generico corpo celeste). Tale soglia si chiama velocità di fuga del pianeta.

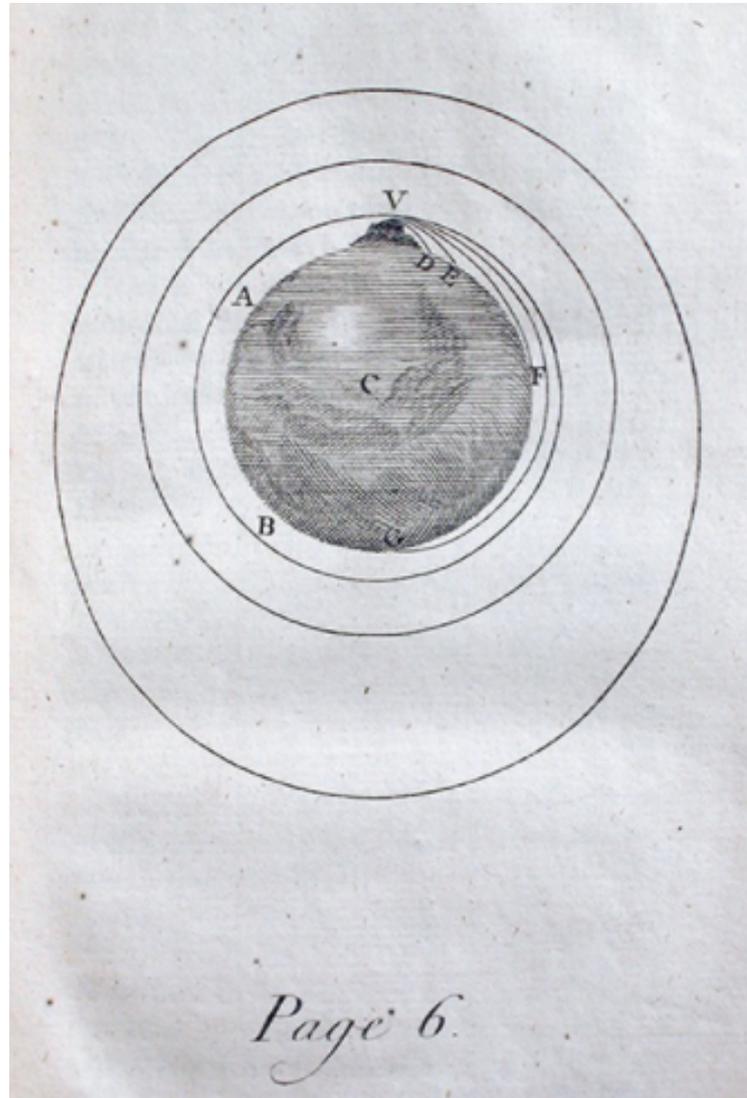


Figura 1.2: La traiettoria di alcuni oggetti lanciati dalla Terra tratta dai "Principia" di Newton: le ellissi esterne possono interpretate oggi come le orbite dei satelliti della Terra, mentre D,E,F,G sono traiettorie di proiettili lanciati con una velocità iniziale sempre maggiore

Teorema 1.2.1. *La velocità di fuga v di un qualsiasi oggetto da un pianeta di massa M e di raggio r espressi rispettivamente in $[Kg]$ e $[m]$ è :*

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Dimostrazione. Per semplicità supponiamo che il pianeta abbia simmetria sferica, il teorema dei gusci sferici allora ci garantisce che possiamo considerare tutta la massa del pianeta M concentrata in un solo punto. Sia ora un oggetto di massa m che si trova sulla superficie del pianeta, dopo aver impresso una velocità iniziale v espressa in $[\frac{m}{s}]$ a tale corpo, dire che questo riesce ad allontanarsi definitivamente dal pianeta equivale a dire che la sua energia cinetica iniziale K deve maggiorare il modello dell'energia potenziale U :

$$U < K \quad \Rightarrow \quad \frac{GMm}{r} < \frac{1}{2}mv^2$$

esplicitando la velocità di ottiene la tesi.

Notiamo che la velocità di fuga non dipende dalla massa dell' oggetto. □

1.3 Stelle oscure di John Michell



Figura 1.3: Come si presenterebbe una stella oscura

Già nel 1600 si sapeva che la luce si propaga nello spazio ad una velocità seppure elevatissima, ma finita. Ma il primo a sospettare che ci possa esistere un "pianeta" con densità tale da non permettere neppure alla luce di sfuggirne il campo gravitazionale fu l' inglese J. Michell.

Teorema 1.3.1. *Indicando con c la velocità di luce nel vuoto, dove*

$$c = 299\,792\,458 \quad \left[\frac{m}{s}\right]$$

se un corpo celeste di massa M possiede il raggio r espressi in kilogrammi [Kg] e in metri [m]

$$r < \frac{2GM}{c^2}$$

allora tale corpo celeste possiede una velocità di fuga superiore a c .

Dimostrazione. Quando la velocità di fuga è esattamente c , il raggio r risulta dal teorema precedente

$$r = \frac{2GM}{c^2}$$

□

Osservazione 4. *Si osservi che nella dimostrazione abbiamo trovato una quantità coincidente, fortuitamente, al famoso raggio di Schwarzschild R_S che vedremo alla fine del prossimo capitolo.*

Per questo spesso si definisce buco nero un corpo con velocità di fuga superiore a c , ma come nota S. Carrol in [II] questa è solo una condizione necessaria. Infatti anche se un corpo celeste avesse velocità di fuga pari a c , teoricamente potremmo allontanare una particella imprimendo un' accelerazione tale da mantenere la velocità costante.

Esempio 1. *Una ipotetica stella con la stessa massa del Sole cioè con massa*

$$M = 1,9885 \cdot 10^{30} \quad Kg$$

e un raggio

$$r < 2,9 \quad Km$$

avrebbe velocità di fuga superiore a c .

Dimostrazione. Infatti sostituendo la massa M nel risultato del teorema precedente si ottiene

$$\frac{2GM}{c^2} = 2,947 \quad Km$$

□

Come si possono allora "osservare" le stelle oscure?

Un modo è stato suggerito dallo stesso Michell: "se ci fosse un altro corpo luminoso che girasse attorno ad esse potremmo constatarne l' esistenza dal moto di questo corpo luminoso".

Questa è stata proprio la tecnica utilizzata da A. Ghez e R. Genzel per misurare la massa di un "oggetto compatto supermassiccio al centro della nostra galassia", scoperta che ha valso loro il premio Nobel per la fisica dell'anno 2020.

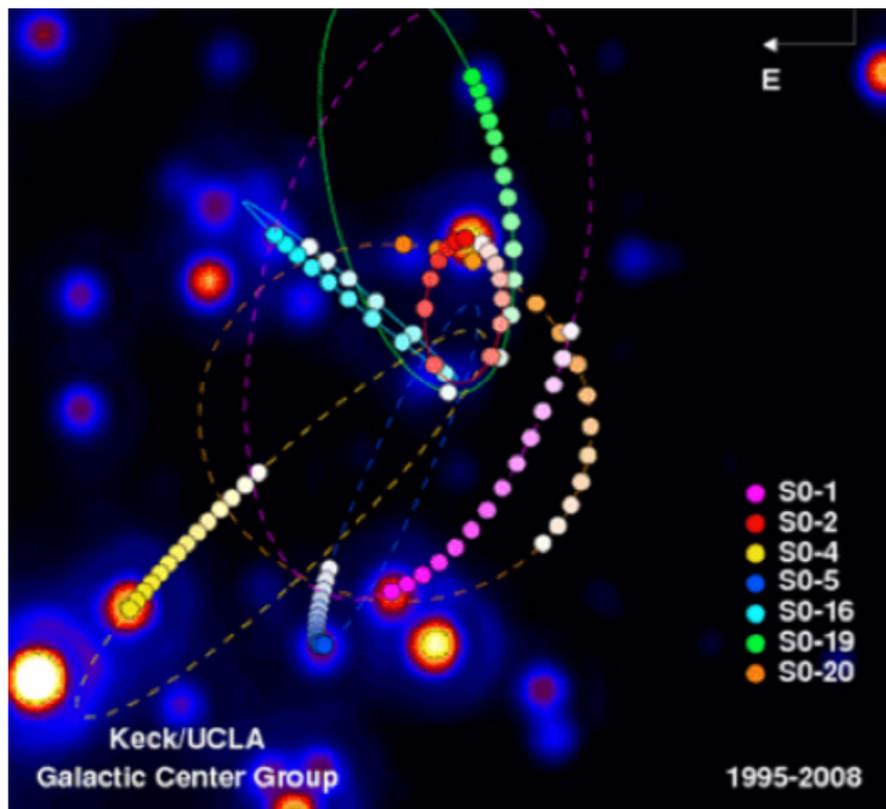


Figura 1.4: Le posizioni delle stelle luminose attorno al buco nero al centro della nostra galassia osservate dal 1995 al 2008

Capitolo 2

Buchi neri di Schwarzschild



Figura 2.1: Una simulazione dell'immagine di un buco nero dal film: Interstellar

Per poter comprendere in maniera basilare alcune notazioni della teoria della Relatività Generale è necessario introdurre alcune definizioni di Geometria Differenziale, strumento senza la quale la suddetta teoria sarebbe rimasta solamente una mera speculazione filosofica.

2.1 Varietà differenziabili

Definizione 4 (Varietà differenziabile). *Dato uno spazio topologico M , sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di M tale che:*

- (i) *per ogni U_i esiste un omeomorfismo ϕ_i tra U_i e un aperto di \mathbb{R}^n V_i*
- (ii) *per ogni coppia di aperti U_i, U_j non disgiunti la mappa di transizione $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$*

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_j \cap U_i) \rightarrow \phi_i(U_j \cap U_i)$$

è un omeomorfismo tra aperti di \mathbb{R}^n

allora M si dice varietà differenziabile di dimensione n se e soltanto se $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ è liscia ($\in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$).

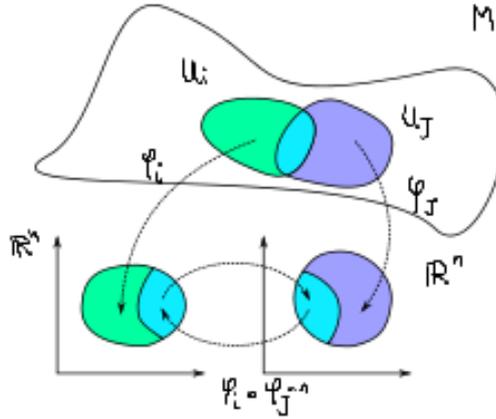


Figura 2.2: Rappresentazione della mappa di transizione per una 2-varietà

Notazione 2. Per tutto il testo quando scriveremo varietà si sottintende per una varietà che sia differenziabile. Chiamiamo inoltre l'insieme delle coppie $\{(U_i, \phi_i)\}$ un'atlante della varietà e una singola coppia una sua carta locale.

Esempio 2 (Spazio ordinario). \mathbb{R}^n con l'atlante costituita dall'unica carta $(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})$ è una varietà. In particolare lo spazio Euclideo in cui è costruita la teoria gravitazionale Newtoniana \mathbb{R}^3 è una varietà.

Esempio 3 (Spazio di Minkowski). Per la stessa ragione lo spazio Euclideo considerato nella sua evoluzione temporale chiamato anche lo spazio di Minkowski

$$\mathbb{R}_{ct} \times \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^{1+3} \cong \mathbb{R}^4$$

dove ogni istante è stata moltiplicata per la velocità della luce c è una varietà. Notiamo che una carta locale di quest'ultima varietà fisicamente identifica una porzione di spazio e un intervallo di tempo di osservazione.

La definizione della varietà può sembrare un po' macchinosa, ma detto in modo poco formale una n -varietà può essere pensata come uno spazio topologico tale che avvicinando sempre più a un suo qualsiasi punto ci si ritrova sempre dopo un certo istante in una regione di \mathbb{R}^n .

Praticamente qualsiasi superficie della realtà, anche quelle meno aspettate, sono delle varietà; basta ingrandire sufficientemente. Per esempio la superficie di uno spillo sembra presentare una così chiamata singolarità nella punta, ma al microscopio

è evidente che in un intorno sufficientemente piccolo ritroviamo una regione del piano.



Figura 2.3: Un globulo rosso sulla punta di uno spillo

Definizione 5 (Mappa differenziabile). *Una mappa reale f a variabili in una varietà M*

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

si dice differenziabile se e soltanto se per ogni carta locale si ha che la mappa reale multivariata

$$f \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i) \rightarrow \mathbb{R}$$

è liscia. Denotiamo con $C^\infty(M)$ l'insieme delle mappe differenziabili a variabili in M .

Definizione 6 (Vettore tangente in un punto). *Data una varietà M e un suo punto p , sia \vec{v} un funzionale lineare su $C^\infty(M)$*

$$\vec{v} : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

\vec{v} si dice vettore tangente a M in p se e soltanto se

$$\forall f, g \in C^\infty(M) \quad \vec{v}(fg) = \vec{v}(f)g(p) + f(p)\vec{v}(g).$$

Chiamiamo spazio tangente di M in p e lo indichiamo con $T_p M$ l'insieme dei vettori tangenti nel punto. Si dimostra che tale spazio forma un \mathbb{R} -spazio vettoriale.

Teorema 2.1.1. *Fissato un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ allora ogni vettore \vec{v} tangente può essere identificato col funzionale derivata direzionale lungo un vettore $\xi \in \mathbb{R}^n$ calcolato in tale punto*

$$\vec{v} = \frac{\partial}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{x_0}$$

La dimostrazione del teorema, così come di tanti altri risultati qui di seguito presentati, esula dallo scopo di questa tesi.

Corollario 2.1.2. *L'insieme costituito dagli $\vec{e}_i^0 := \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{x_0}$ costituisce una base di $T_{x_0}\mathbb{R}^n$ quindi possiamo identificare*

$$T_{x_0}\mathbb{R}^n \leftrightarrow \mathbb{R}^n$$

Per questa ragione i vettori tangenti all'origine di \mathbb{R}^3 vengono spesso rappresentati come delle frecce applicate in tale punto.

Bisogna però tenere conto che vivono in due spazi diversi.

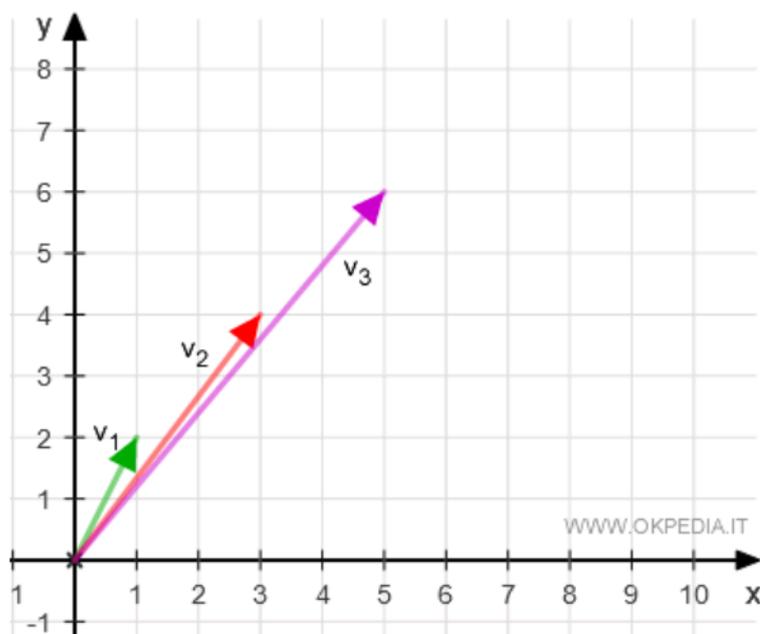


Figura 2.4: La classica rappresentazione di 3 vettori di $T_0\mathbb{R}^2$

Esempio 4. *Fissato un osservatore fisico e associatogli il sistema di riferimento spaziale \mathbb{R}^3 di cui occupa l'origine O , un vettore tangente in O può identificare la posizione di un qualsiasi altro punto dello spazio circostante.*

Esempio 5. *Se teniamo in conto anche dell'evoluzione temporale, cioè consideriamo lo Spazio-tempo di Minkowski \mathbb{R}^{1+3} per tale osservatore, un vettore tangente in O che ora identifica l'osservatore nell'istante in cui fa partire il suo cronometro può essere pensata come la "posizione" di un qualsiasi altro evento rispetto ad O .*

Teorema 2.1.3 (della Base canonica). *Data una varietà M , un suo punto p e una carta locale di tale punto (U, ϕ) tale che*

$$\phi(p) = x_0$$

si può mostrare che lo spazio tangente $T_p M$ ha dimensione finita, in particolare una base è data da $\{\vec{e}_i^0\}_{i=1..n}$, dove:

$$\vec{e}_i^0 : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} \quad \vec{e}_i^0(f) = \left. \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial x_i} \right|_{x_0}$$

ovvero

$$\vec{e}_i^0 := \left. \frac{\partial(\bullet \circ \phi^{-1})}{\partial x_i} \right|_{x_0}$$

e l'indice 0 in alto serve a ricordare che è un vettore tangente in p .

Definizione 7 (1-forma). *Data una varietà M e un suo punto p , indicando con $T_p^* M$ lo spazio duale dello spazio tangente allora un generico vettore duale*

$$\omega : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

viene chiamato forma differenziale di grado 1 oppure per comodità 1-forma.

2.2 Varietà metriche

Definizione 8. *Data una varietà M e un suo punto p , un tensore T di rango (n, m) è un generico funzionale lineare*

$$T : \underbrace{T_p^* M \times \dots \times T_p^* M}_{n\text{-volte}} \times \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_{m\text{-volte}} \rightarrow \mathbb{R}$$

Definizione 9 (Metrica). *Data una varietà M e un suo punto p , un tensore di rango $(0, 2)$ g si dice tensore metrico in p , abbreviato con "metrica", se e soltanto*

(i) *g è simmetrica cioè*

$$\forall \vec{v}, \vec{u} \in T_p M \quad g(\vec{v}, \vec{u}) = g(\vec{u}, \vec{v})$$

(ii) g è non degenere:

$$\forall \vec{u} \in T_p M \quad g(\vec{v}, \vec{u}) = 0 \iff \vec{v} = 0$$

Osservazione 5. Poichè g è di fatto una forma bilineare, in una carta locale del punto denotando con

$$g_{ij} := g(\vec{e}_i^0, \vec{e}_j^0)$$

le condizioni i, e ii equivalgono a

(i) la matrice quadrata associata a g rispetto alla base canonica (g_{ij}) è simmetrica

(ii) il suo determinante è non nullo \iff è una matrice invertibile

in altre parole g deve essere una forma bilineare simmetrica e non degenere.

Teorema 2.2.1. Per l'osservazione appena mostrata ogni metrica è diagonalizzabile come conseguenza del teorema spettrale.

Esempio 6 (Metrica di Euclide). La metrica più familiare è sicuramente quella di Euclide nell'origine di \mathbb{R}^3 . In particolare rispetto alla base canonica ovvero in coordinate Cartesiane che risulta essere anche la base diagonalizzante $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$, la metrica di Euclide ha la matrice associata

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_3$$

Esempio 7 (Metrica di Minkowski). Nello Spazio-tempo di Minkowski $\mathbb{R}_{ct} \times \mathbb{R}^3$ definiamo il tensore metrico nell'origine (che ricordiamo identifica un evento di riferimento) essere quello che rispetto alla base in coordinate Cartesiane $\{\vec{e}_t, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ ha la matrice associata

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La metrica così definita si chiama metrica di H. Minkowski (1864-1909).

Osservazione 6. Al segno meno della componente temporale corrispondono le caratteristiche peculiari del tempo; ad esempio esso si muove solo verso il futuro. Così come le isometrie preservano la metrica di Euclide, si può verificare che la metrica di Minkowski è invariante per le trasformazioni di Lorentz. Quest'ultime sono le trasformazioni che permettono di scrivere le coordinate di un evento rispetto ad un osservatore F nelle coordinate secondo un altro osservatore F' .

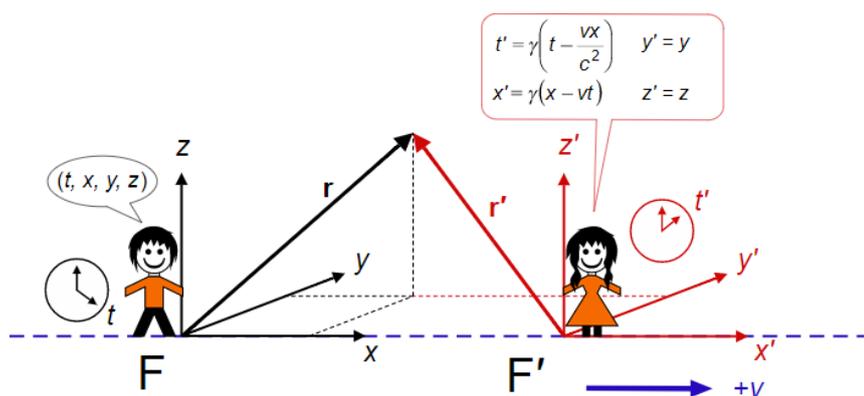


Figura 2.5: Trasformazioni di lorentz dal sistema F ad F'

Infatti consideriamo le trasformazioni più semplici ovvero quelle in cui F' è in moto lungo la direzione positiva X di F con velocità v :

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \frac{v}{c}x) \\ x' = \gamma(x - \frac{v}{c}ct) \end{cases}$$

dove

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

è il fattore relativistico.

Allora in forma matriciale ponendo

$$L = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si verifica direttamente che

$$L^T \eta L = \eta$$

proprio come

$$\forall A \in O_{\mathbb{R}}(3) \quad A^T \mathbb{I}_3 A = A^T A = \mathbb{I}_3$$

Osservazione 7 (Distanza). A partire dalla metrica è possibile definire il prodotto scalare di due vettori in coordinate locali $\vec{v} = v^i \vec{e}_i^0$ e $w = \vec{w}^j \vec{e}_j^0$, dove adottiamo come di seguito la convenzione di Einstein sugli indici ripetuti sottintendendo la sommatoria da 1 a n . Definiamo il prodotto scalare tra \vec{v} e \vec{w} essere

$$\langle v, w \rangle := g_{ij} v^i w^j$$

Di conseguenza rimane definita il concetto di norma di un vettore, angolo tra vettori e distanze tra punti.

Definizione 10 (Elemento di linea metrica). *Data una metrica g in punto di p di un varietà M , indichiamo con*

$$ds^2 := g_{ij} dx^i dx^j$$

il quadrato del suo elemento di linea, dove

$$dx^i := (\vec{e}_i^0)^*$$

è il vettore duale corrispondente all' i -esimo vettore di base

Esempio 8. *Il quadrato dell' elemento di linea della metrica di Euclide e di Minkowski in coordinate cartesiane $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ e $\{\vec{e}_t, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ sono rispettivamente:*

$$\begin{cases} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ ds^2 &= -(d(ct))^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \end{cases}$$

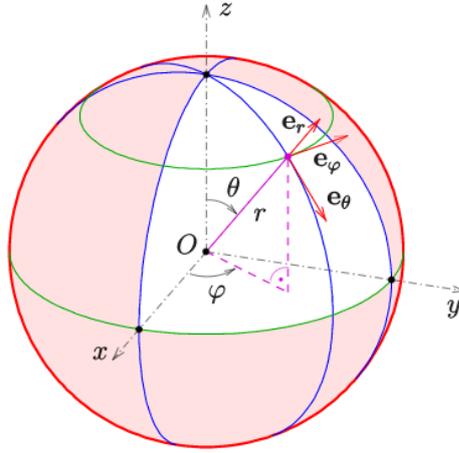


Figura 2.6: Coordinate sferiche per lo spazio tangente a un punto di \mathbb{R}^3

Si può inoltre mostrare che in coordinate sferiche (indotte dalle coordinate sferiche di \mathbb{R}^3 e di $\mathbb{R}_{ct} \times \mathbb{R}^3$) $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi\}$ e $\{\vec{e}_t, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi\}$ l'elemento di linea delle due metriche diventano

$$\begin{cases} ds^2 &= dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\ ds^2 &= -(d(ct))^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \end{cases}$$

dove

$$d\Omega^2 := d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$$

Definizione 11 (Campo di vettori/metriche). *Data una varietà M un campo di vettori/metriche \vec{v}/g è una mappa che associa ad ogni punto della varietà un suo vettore/una sua metrica. Chiamiamo ogni varietà dotata di un campo di metriche (M,g) varietà metrica.*

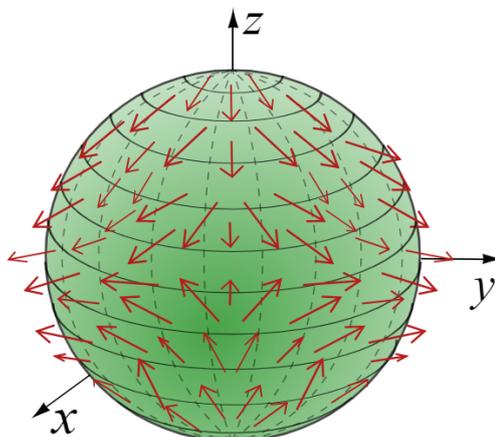


Figura 2.7: Un esempio di campo di vettori su una superficie sferica

Esempio 9. *Sia il campo di metriche di Euclide g che quello di Minkowski η sono costanti su tutta la varietà.*

Teorema 2.2.2 (della Base canonica per i campi). *Si può generalizzare il teorema 2.1.3 tale che su ogni carta locale, ogni campo di vettore può essere espresso in modo unico come combinazione lineare degli elementi della base coordinata per i campi costituita dagli*

$$\vec{e}_i := \frac{\partial(\bullet \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}$$

2.3 Geodetiche

Definizione 12 (Curva differenziabile). *Data una curva γ in una varietà M*

$$\gamma : (a, b) \rightarrow M$$

γ è detta curva differenziabile se e soltanto se per ogni carta locale che ne contiene il supporto (U, ϕ) la curva

$$\phi \circ \gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

è liscia.

Ricordiamo la notazione di Einstein

Notazione 3. Quando nelle formule vi compaiono 2 indici ripetuti omettiamo la scrittura di sommatoria per indice che varia da 1..n. così quando scriviamo

$$\left. \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i} \right|_{(\phi \circ \gamma)(\lambda_0)} \quad \frac{d(\phi_i \circ \gamma)}{d\lambda}(\lambda_0)$$

stiamo intendendo

$$\sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i} \right|_{(\phi \circ \gamma)(\lambda_0)} \quad \frac{d(\phi_i \circ \gamma)}{d\lambda}(\lambda_0)$$

per alleggerire per quanto si possa la notazione.

Definizione 13 (Campo tangente ad una curva). Data una curva differenziabile γ in una varietà M ,

$$\gamma : (a, b) \rightarrow M \quad \gamma = \gamma(\lambda)$$

e sia (U, ϕ) una carta locale che ne contiene il supporto, data poi un mappa differenziabile f

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

per la regola della catena sappiamo che

$$\left. \frac{df \circ \gamma}{d\lambda} \right|_{\lambda_0} = \left. \frac{d(f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \gamma)}{d\lambda} \right|_{\lambda_0} = \left. \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i} \right|_{(\phi \circ \gamma)(\lambda_0)} \quad \frac{d(\phi_i \circ \gamma)}{d\lambda}(\lambda_0)$$

notando che l'ultimo termine non è altro che una combinazione lineare di una base di $T_{\gamma(\lambda_0)}M$ (si riveda il Teorema 2.2.2) possiamo associare a γ un campo di vettori \vec{v} tale che lungo i punti del supporto della curva i vettori sono esattamente l'ultimo termine della catena di uguaglianza. Si dimostra che tale campo è unico e chiamiamo tale campo il campo tangente alla curva.

Inoltre si scrive $\vec{v} = \frac{d}{d\lambda}$

Definizione 14 (Connessione affine). Una connessione affine, per semplicità connessione, su una varietà M è formalmente una regola che stabilisce quando un vettore viene trasportato in modo parallelo lungo una curva.

Definizione 15 (Derivata covariante in un punto). Data una varietà M e un suo punto p , scelta una connessione e una curva $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ che passa per $p = \gamma(\lambda_0)$ se chiamiamo \vec{v} il campo di vettori tangente a γ e sia \vec{w} un campo di vettori generico, poniamo la derivata covariante di \vec{w} lungo \vec{v} nel punto p essere il vettore:

$$\nabla_{\vec{v}} \vec{w} \Big|_p := \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\vec{w}''_{\Delta\lambda}(p) - \vec{w}(p)}{\Delta\lambda}$$

dove $\vec{w}''_{\Delta\lambda}(p)$ è il vettore trasportato parallelamente secondo la regola della connessione del vettore $\vec{w}(q)$ dal punto $q = \gamma(\lambda_0 + \Delta\lambda)$ a p .

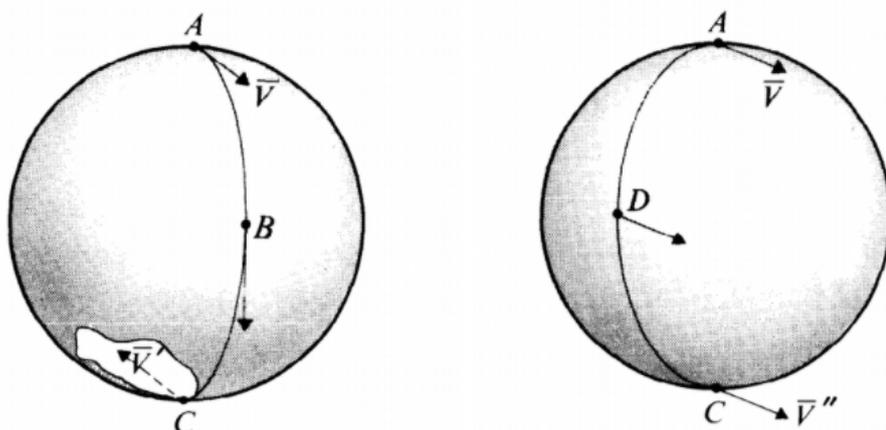


Figura 2.8: 2 connessioni per una stessa varietà; nel primo caso il trasportato sarebbe antiparallelo all'originale secondo la connessione a cui siamo abituati

Teorema 2.3.1. *Data una varietà M e scelta una connessione, sia $\{\vec{e}_i\}_{i=1..n}$ la base coordinata per i campi come nel teorema 2.2.2 se denotiamo con*

$$\frac{\partial}{\partial x^i} := \vec{e}_i$$

ovvero omettendo la mappa coordinata ϕ^{-1} e trasformando il pedice del denominatore in apice tale che un qualsiasi campo di vettori \vec{v} si possa scrivere

$$\vec{v} = v^i \vec{e}_i$$

si può mostrare che

$$\nabla_{\vec{v}} \vec{w} = (v^i \frac{\partial w^k}{\partial x^i}) + w^j \Gamma_{ji}^k \vec{e}_k$$

dove le componenti $(\Gamma_{ji}^1, \dots, \Gamma_{ji}^n)$ sono i così chiamati coefficienti di Christoffel per \vec{e}_i ed \vec{e}_j che soddisfano la seguente relazione:

$$\nabla_{\vec{e}_i} \vec{e}_j = \Gamma_{ji}^k \vec{e}_k \quad \forall p \in M$$

Corollario 2.3.2. *Una connessione di una varietà si può caratterizzare in termini della scelta dei coefficienti di Christoffel per ogni coppia di campi di vettori in una base.*

In particolare per ciò che ci riguarda siamo interessati alla connessione metrica di una varietà metrica (M, g) cioè una regola del trasporto parallelo che preservi sia la

lunghezza sia gli angoli definibili a partire da tale metrica. Si può mostrare che in una carta locale tale connessione metrica equivale alla scelta

$$\Gamma_{ji}^k := \frac{1}{2}g^{kl}\left(-\frac{\partial}{\partial x^l}g_{ij} + \frac{\partial}{\partial x^j}g_{il} + \frac{\partial}{\partial x^i}g_{jl}\right)$$

dove (g^{ij}) è la matrice inversa di quella associata alla metrica che esiste per definizione.

Notazione 4. Data una varietà metrica scegliamo sempre per convenzione la connessione essere quella metrica.

Definizione 16 (Geodetica). Data una varietà metrica (M,g) , sia γ una curva in M diciamo che tale curva è una geodetica di M se e soltanto se il campo di vettori tangente a γ viene trasportato in modo parallelo lungo sè stesso nei punti della curva, in altre parole

$$\nabla_{\vec{v}}\vec{v} = 0 \quad \forall p \in \gamma^*$$

Esempio 10. In \mathbb{R}^n le geodetiche sono tutti e soli i segmenti di una retta.

2.4 Gravitazione secondo Einstein

Come conseguenza delle Teoria della Relatività Ristretta dobbiamo accettare che il concetto di forza a distanza non sia più adatta per descrivere la realtà, quindi neppure la teoria della gravitazione di Newton. Infatti sappiamo da risultati teorici e sperimentali che nessuna particella dotata di massa può viaggiare con un velocità superiore a c . D'altra parte se ammettessimo che la forza gravitazionale fosse istantanea otterremmo la seguente contraddizione.

Esempio 11. Dati 2 corpi celesti distanti per esempio 1 secondo-luce tale che la luce impiega 1s di tempo per arrivare da un corpo all'altro

$$r \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ m}$$

sia il prodotto delle masse un numero dell'ordine di grandezza pari a

$$mM \simeq 10^{30} \text{ Kg}$$

allora l'istantaneità della forza gravitazionale implica che un segnale luminoso mandato da un corpo arriverebbe all'altro con 1s di ritardo rispetto al mediatore della forza gravitazionale che in questo ha intensità pari a 1000N, quindi non trascurabile.

Bisogna quindi trovare una seconda teoria che sotto opportune condizioni deve ragionevolmente, poichè le evidenze sperimentali confermano che la teoria dei Newton è una descrizione piuttosto fedele della realtà, ridursi alla gravitazione Newtoniana.

Gli strumenti matematici finora sviluppati ci permettono di accennare alla costruzione di tale teoria. Innanzitutto enunciamo il

Principio 1 (della Relatività Generale (1915)). *Le leggi della fisica hanno la stessa forma matematica per ogni osservatore inerziale o meno.*

che in termini pratici si traduce in

Principio 2 (di Covarianza Generale). *Le leggi della fisica in un sistema di riferimento arbitrario si ottengono da quelli della Relatività Ristretta in cui un osservatore inerziale identifica una varietà metrica $(\mathbb{R}_{ct} \times \mathbb{R}^3, \eta)$ dove η è il campo di metriche costante di Minkowski*

(i) *sostituendo a $(\mathbb{R}_{ct} \times \mathbb{R}^3, \eta)$ una nuova varietà metrica (M, g) con il campo di metriche avente la stessa segnatura. Cioè in ogni punto, avendo diagonalizzato g , la somma degli elementi della diagonale deve essere pari a $-1+1+1+1=+2$.*

(ii) *sostituendo nelle equazioni l'operatore di derivata parziale $\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x^i}$ l'operatore di derivata covariante $\nabla_{\vec{e}_i}$*

Legge 2. *Fissato un osservatore inerziale o meno le particelle di prova (i.e. particelle sulle quali la risultante delle forze agenti di natura elettromagnetica, forte o debole è nulla) si muovono lungo le geodetiche della varietà in maniera tale che la dimensione temporale di queste curve sia percorsa in un solo verso.*

Esempio 12 (Primo principio della Dinamica). *In (\mathbb{R}^4, η) , quindi fissato un sistema di riferimento inerziale a cui siamo abituati nello studio della Fisica, le geodetiche sono tutti e soli i segmenti di una retta (spazio-temporale!).*

Dire che una particella non soggetta a forze si muove lungo una retta spazio-temporale non significa altro che essa si sta muovendo in moto rettilineo uniforme. Proponiamo una rappresentazione $(1+1)D$ poco formale ma che rende molto chiaro il concetto: supponiamo di essere delle creature che vivono in 1 dimensione (per esempio delle formiche costrette a muoversi lungo un filo nello spazio) osservando il grafico spazio-tempo di una particella di prova (che può essere pensata genuinamente come una successione di immagini del filo in istanti diversi) è immediato rendersi conto di tale equivalenza.

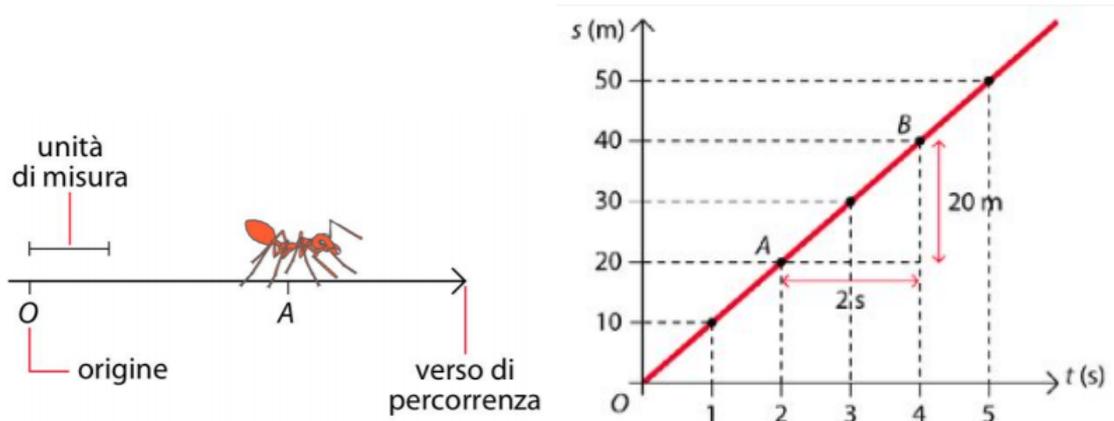


Figura 2.9: Grafico spazio-tempo di un particella in moto rettilineo uniforme sul filo

Definizione 17 (Tensore di Riemann). *Data una varietà metrica (M,g) definiamo il campo di tensori noto come di Riemann R_{ijkl} , il tensore di rango $(0,4)$ tale che per ogni carta locale (U,ϕ)*

$$R_{ijkl} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k} g_{il} - \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^l} g_{ik} + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^l} g_{jk} - \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k} g_{jl} \right)$$

Definizione 18 (Tensore di G. R. Curbastro e lo scalare di curvatura). *Data una varietà metrica (M,g) definiamo il tensore di R. Curbastro R_{ij} essere*

$$R_{ij} := g^{lk} R_{likj}$$

e lo scalare di curvatura R

$$R := g^{ij} R_{ij}$$

Teorema 2.4.1 (Equazione del campo di Einstein). *In presenza di massa, la varietà metrica che descrive lo Spazio-tempo possiede il campo delle metriche g tale che sia soddisfatto il seguente sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali di secondo ordine :*

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

dove G è la costante gravitazionale e T è un tensore $(0,2)$ legato alla presenza di massa chiamata perciò tensore Energia-Impulso.

Notazione 5. *Ogni volta che scriveremo i pedici μ, ν si sottointende che ciascun pedice varia da 0 a 3. Dove la dimensione 0-esima è quella relativa al tempo.*

In altre parole non esiste nessuna forza gravitazionale. La forza di attrazione che il sole esercita sui pianeti per un osservatore lontano è semplicemente, secondo Einstein, effetto della modifica della varietà metrica in cui vivono tali pianeti. Modifiche delle geodetiche tali per cui questi non possono muoversi nello spazio e nel tempo in altro modo.

Sembra molto poetica questa descrizione della realtà, ma il suo fascino come ogni teoria fisica non si arresta solo sulla costruzione formale matematica. Oltre a includere la teoria gravitazionale classica di Newton come caso limite, come vedremo nel prossimo capitolo, questa nuova teoria riesce a spiegare fenomeni non spiegabili da quella Newtoniana.

Osservazione 8 (Precessione del perielio di Mercurio). *Infatti sappiamo che Mercurio possiede un periodo di rivoluzione attorno al sole pari a 88 giorni terrestri. La teoria di Newton aveva previsto che l'orbita del Mercurio non doveva essere un'ellisse perfettamente chiusa a causa degli effetti gravitazionali degli altri pianeti del sistema solare. In particolare la posizione del perielio, il punto più vicino al sole, non doveva essere fissa ad ogni rivoluzione. Nella figura 2.10 vengono mostrati 4 posizioni del perielio in corrispondenza di 4 rivoluzioni. Lo spostamento dell'orbita su cui Mercurio procede in senso orario è stato esagerato per rendere più chiara l'idea. Tuttavia si osservò che il valore di tale spostamento non era quella prevista dalla teoria di Newton.*

Infatti sperimentalmente si misurò uno spostamento per unità di tempo pari a $\frac{1,556^\circ}{\text{secolo}}$. Mentre dalla teoria di Newton si ricavava un valore di $\frac{1,544^\circ}{\text{secolo}}$. Einstein stesso nel 1919 riuscì a dimostrare che con la nuova teoria della gravità si riusciva ad ottenere un valore esattamente pari a quella delle osservazioni. Recuperando i famosi 43 arcosecondi per secolo.

$$\frac{1,556^\circ}{\text{secolo}} - \frac{1,544^\circ}{\text{secolo}} = \frac{0,012^\circ}{\text{secolo}} = \frac{43''}{\text{secolo}}$$

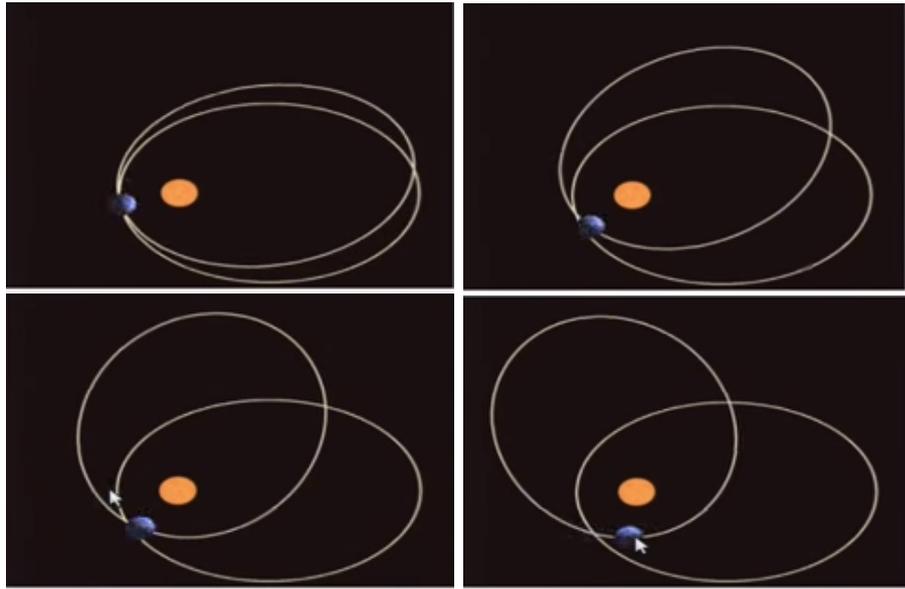


Figura 2.10: 4 posizioni diverse del perielio di Mercurio: L' orbita ellittica iniziale è sempre mostrata in tutte e 4 le figure

Osservazione 9. *Molto spesso per la prima presentazione della teoria di Einstein si usa l' immagine di un telo elastico deformato da alcune biglie.*

Questa è in effetti la rappresentazione più immediata per noi esseri (1+3)-dimensionali, ma non bisogna confondere la dimensione temporale con quelli spaziali. Così il telo è in realtà una successione di immagini di un mondo 1-dimensionale e l' orbita del pianeta attorno al sole è del tutto inappropriato perchè se ammettessimo che la curva rossa fosse una geodetica avremmo l' assurdit  (almeno per ora considerata tale) del pianeta che torna indietro nel tempo.

La rappresentazione pi  corretta sarebbe immaginarne che sia il sole sia il pianeta vivano su una superficie (il mondo (1+2)-dimensionale   giustificato poich  da lontano il pianeta pu  essere schematizzato da un punto che si muove sul piano dell' eclittica), ma l' orbita deve essere simile a una curva elica dal momento che ogni piano   in realt  la superficie in un certo istante. Per esempio la seguente coppia di figure mostra un satellite in orbita attorno alla Terra (come vedremo la metrica attorno alla Terra non   tanto diversa da quella del sole) in 2 istanti diversi. L' asse del tempo   stata scelta essere la solita asse Z mentre il reticolo accennato dai fasci di segmenti rappresenta il piano su cui si muove il satellite. La dimensione della Terra   stata ingrandita in modo esagerato.

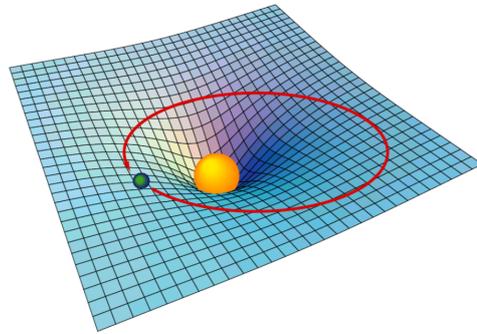


Figura 2.11: Rappresentazione fuorviante degli effetti di gravità del sole sullo Spazio-tempo

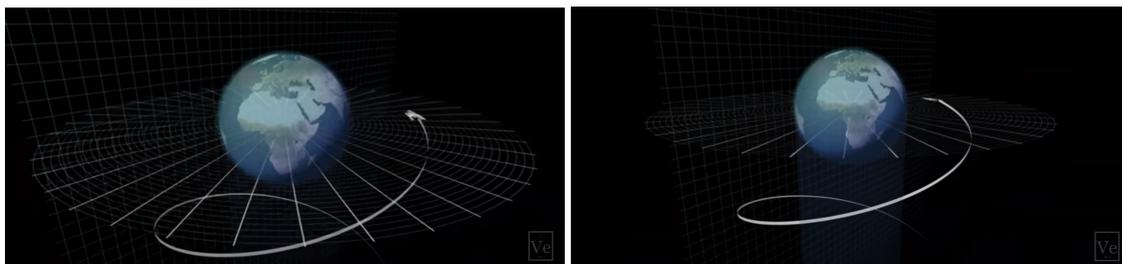


Figura 2.12: Corretta rappresentazione degli effetti di gravità della Terra sullo Spazio-tempo

2.5 Campo di metriche di Schwartzschild

Teorema 2.5.1. *Intorno ad una massa puntiforme M espressa di $[Kg]$ sotto l'ipotesi che il campo g dello Spazio-tempo attorno sia statico e debole, cioè la metrica è molto vicina a quella di Minkowski, se la velocità di tale particella è molto inferiore a c allora la teoria della gravità di Einstein si riduce a quella di Newton.*

Dimostrazione. (Cenni)

Secondo la Legge 3 la particella deve muoversi lungo una geodetica $\gamma = \gamma(\lambda)$ con campo tangente $\vec{v} = \frac{d}{d\lambda}$ tale che in un intorno spazio-temporale

$$0 = \nabla_{\vec{v}} \vec{v} = (v^i (\frac{\partial v^k}{\partial x^i}) + v^j \Gamma_{ji}^k) \vec{e}_k \Rightarrow \forall k = 0, 1, 2, 3 \quad 0 = v^i (\frac{\partial v^k}{\partial x^i}) + v^j \Gamma_{ji}^k = \frac{dv^k}{d\lambda} + \Gamma_{ji}^k v^i v^j$$

Introducendo la notazione

$$\phi \circ \gamma(\lambda) = (x^0(\lambda), x^1(\lambda), x^2(\lambda), x^3(\lambda))$$

e scegliendo il parametro di γ essere il tempo proprio τ della particella l'equazione della geodetica diventa:

$$\forall k = 0, 1, 2, 3 \quad \frac{d^2 x^k}{d\tau^2} + \Gamma_{ji}^k \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} = 0$$

Poichè dire che le velocità (spaziale) della particella è molto piccola equivale a dire

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{d\tau}, i = 1, 2, 3$$

l'equazione geodetica si riduce a

$$\forall k = 0, 1, 2, 3 \quad \frac{d^2 x^k}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^k \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} = 0$$

Infine sfruttando la staticità del campo si può mostrare che ritroviamo le stesse leggi di Newton del tipo

$$a = G \frac{M}{r^2}$$

assumendo che la componente temporale del campo sia

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)$$

□

Teorema 2.5.2 (di K. Schwarzschild (1916)). *Dato un corpo di massa M , espressa in [Kg], statica e con simmetria sferica (incluso il caso estremo di massa una puntiforme come nel teorema precedente) la regione esterna di tale corpo può essere descritta con una varietà metrica avente il campo di metriche g che possiede l'elemento di linea :*

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)(d(ct))^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Dimostrazione. (Cenni) Con un'agormentazione che necessita l'introduzione dei campi di vettori di Killing si può mostrare che la staticità e la simmetria sferica ci garantiscono che l'elemento di linea sia della forma:

$$ds^2 = -A(d(ct))^2 + Bdr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad , A = A(r), B = B(r)$$

D'altra parte poichè nella regione esterna assumiamo che non sia presente della materia l'equazione del campo di Einstein si semplifica in

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0$$

in particolare è nulla anche la seguente quantità (ricordiamo che stiamo omettendo la sommatoria in μ, ν da 0 a 3)

$$0 = g^{\mu\nu}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}) = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}g_{\mu\nu}$$

Ricordando la definizione dello scalare di curvatura risulta

$$R - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 0$$

Per il principio di Covarianza Generale g deve avere la stessa segnatura della metrica di Minkowski η di conseguenza

$$g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} = (-1)(-1) + 1 + 1 + 1 = 4$$

dunque

$$0 = R - \frac{1}{2}R4 = R - 2R = -R \Rightarrow R = 0$$

L'equazione del campo di Einstein allora si semplifica ulteriormente

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{\mu\nu} = 0$$

In particolare devono essere nulli gli elementi sulla diagonale del tensore di G. R. Curbarstro

$$\begin{cases} R_{00} = 0 \\ R_{11} = 0 \\ R_{22} = 0 \\ R_{33} = 0 \end{cases}$$

Dal momento che il tensore di G. R. Curbarstro deriva dal tensore di Riemann e questa è stata definita a partire del campo di metriche g si può mostrare che tale sistema equivale a

$$\begin{cases} -\frac{A''}{2B} + \frac{A'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{A'}{rB} = 0 & (i) \\ \frac{A'}{2A} - \frac{A'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + B'B\right) - \frac{B'}{rB} = 0 & (ii) \\ \frac{1}{B} - 1 + r\frac{r}{2B}\left(\frac{A'}{A} - B'B\right) = 0 & (iii) \\ \frac{1}{B} - 1 + r\frac{r}{2B}\left(\frac{A'}{A} - B'B\right)\sin(2\theta) = 0 & (iv) \end{cases}$$

dove si nota subito che l'ultima equazione è superflua. Ora se moltiplichiamo la prima equazione per $\frac{B}{A}$ allora la somma di questa con la seconda deve essere nulla.

$$\frac{B}{A}(i) + (ii) = 0$$

da cui si ottiene sviluppando i calcoli

$$(AB)' = 0$$

dunque a meno di riscalare r possiamo dire che

$$AB = 1 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{A}$$

Allora esprimendo la terza equazione in funzione solo di A abbiamo

$$B' = -\frac{A'}{A^2} \quad \Rightarrow \quad r + rA' = 1$$

cioè

$$(rA)' = 1 \quad \Rightarrow \quad rA = r + K$$

ricordando il ruolo di $-A = g_{00}$ per l'osservazione finale del teorema precedente si ha

$$-A = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) \quad \Rightarrow \quad A = \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)$$

di conseguenza

$$B = \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)}$$

□

Osservazione 10. *Innanzitutto osserviamo che la metrica di Schwarzschild è valida per qualsiasi corpo che possa essere approssimata con un corpo avente simmetria sferica: che sia un buco nero, una stella o addirittura un pianeta.*

Osservazione 11 (Piattezza asintotica). *Si nota che quando siamo molto distanti dalla sorgente di massa ($r \rightarrow +\infty$) oppure quando la massa M è piccola ($M \rightarrow 0$), per esempio nel caso della Terra, la metrica si riduce a quella di Minkowski*

$$ds^2 = -(d(ct))^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Osservazione 12 (Dilatazione gravitazionale dei tempi). *Essendo il termine $\frac{2GM}{c^2 r} > 0$ allora $1 - \frac{2GM}{c^2 r} < 1$. Ciò può essere interpretato come il fenomeno di dilatazione gravitazionale dei tempi cioè tanto più siamo vicini alla sorgente più lentamente il tempo scorrerà per noi visto da un osservatore lontano. In effetti se ci troviamo a una distanza r , e un altro osservatore alla distanza R*

$$r < R \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{2GM}{c^2 r} < 1 - \frac{2GM}{c^2 R}$$

Tale fenomeno che suona un po' fantascientifico in realtà viene applicato in uno strumento che si usa nella vita di tutti i giorni. Infatti se non considerassimo le differenze di tempo che misura un orologio atomico a terra e uno a bordo di un satellite GPS avremmo delle discrepanze non trascurabili per la geolocalizzazione di un qualunque oggetto. Più precisamente secondo M. Pallavicini [VI] dell' Università di Genova avremmo un errore fino a 15Km.

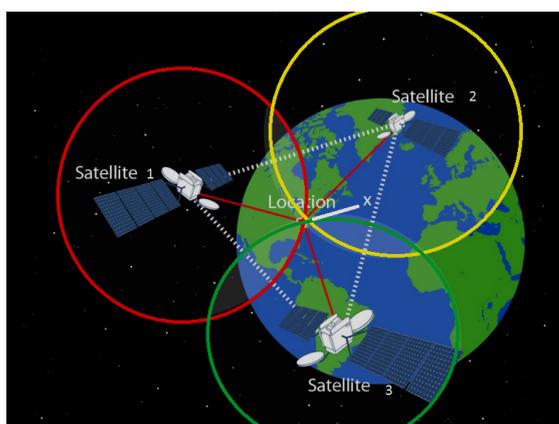


Figura 2.13: 3 satelliti GPS localizzano la posizione di un oggetto tramite la triangolazione

Osservazione 13 (Redshift gravitazionale). *Conseguenza immediata della dilatazione gravitazionale dei tempi è il cosiddetto redshift gravitazionale. Se infatti il tempo scorre più lentamente per un segnale emesso in una zona prossima alla sorgente $r \ll 1$ dal punto di vista di un osservatore lontano ciò significa che la sua frequenza ν deve essere minore, o equivalentemente lunghezza d'onda λ maggiore ricordando la relazione:*

$$\nu\lambda = c$$

In particolare si può mostrare che le frequenze misurate da 2 osservatori alla distanza rispettivamente r e R soddisfano la relazione

$$\nu_R = \nu_r \sqrt{\frac{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}{1 - \frac{2GM}{c^2 R}}}$$

e che tale formula è in perfetto accordo con le misure sperimentali. Tra gli esperimenti condotti sulla terra sicuramente è da ricordare la prima effettuata di R. Pound e G. A. Rebka Jr del 1959 all'Università di Harvard.

Curiosita' 1. *Si consideri la superficie di raggio R_S con valore esattamente pari a quello trovato da J. Michell, ma con un significato leggermente diverso*

$$\frac{2GM}{c^2} =: R_S$$

che chiamiamo raggio di Schwarzschild in onore del primo astronomo/fisico-matematico che ha risolto l'equazione del campo di Einstein. Supponiamo di essere inizialmente all'esterno di tale superficie ($r > R_S$). Si osserva dalla forma della metrica che una volta oltrepassata tale superficie il tempo scambia il proprio ruolo con la dimensione della distanza dal centro

$$r < R_S \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{2GM}{c^2 r} < 0$$

cioè una volta entrato nella zona delimitata da tale superficie l'unico senso possibile per la dimensione della distanza r è quello che ci porta sempre più vicino all'origine.

Curiosamente si osserva che in corrispondenza dell'origine la metrica presenta una singolarità

$$r \rightarrow 0^+ \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \rightarrow -\infty$$

così come quando è pari esattamente al raggio di Schwarzschild. Ma il primo è realmente un punto singolare della varietà Spazio-tempo in esame, mentre si può mostrare che il secondo è solo una singolarità dovuta alle scelte delle coordinate. Stiamo assistendo alla predizione forse più importante delle Relatività Generale: i buchi neri.

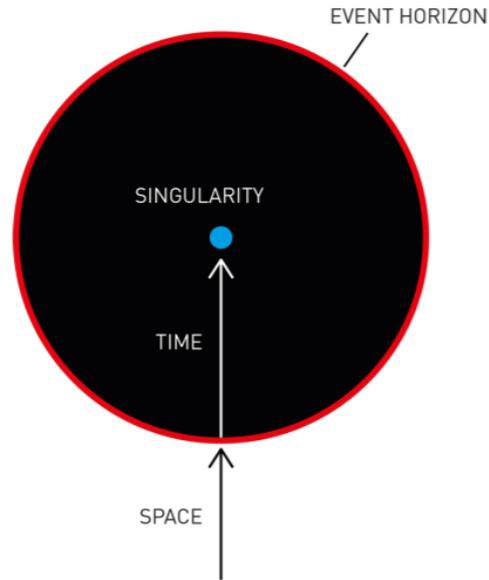


Figura 2.14: Scambio di ruolo tra spazio e tempo oltre l' Orizzonte degli eventi

2.6 Buchi neri di Schwarzschild

Con le conoscenze attuali possiamo dare la

Definizione 19 (Buco nero nello Spazio-tempo). *Un buco nero è un'entità che possiede una superficie spazio-temporale che delimita una regione dello Spazio-tempo con la proprietà di essere causalmente e strutturalmente unidirezionale (in particolare che permette il passaggio di materia o radiazione solo dall'esterno verso l'interno) oltrepassata la quale tutte le geodetiche portano verso un singolo punto dello Spazio-Tempo.*

Tale superficie si chiama l'Orizzonte degli eventi del buco nero, mentre quest'ultimo punto la sua Singolarità .

Ora riusciamo a comprendere meglio cosa significa che avere una velocità di fuga superiore a c sia una condizione necessaria per essere considerato un buco nero.

Comprendiamo anche che il raggio critico derivato dall'argomentazione sulla velocità di fuga di Michell non è esattamente il raggio di Schwarzschild di un buco nero. Infatti mentre quella di Michell esprime la distanza euclidea di 2 punti, il raggio di Schwarzschild è stato ottenuto nella dimostrazione del Teorema 2.5.2 riscaldando un opportuno valore (si tenga presente la relazione $(A(r)B(r))' = 0$) tale da ottenere la metrica mostrata.

Legge 3 (Teorema no-hair). *Un buco nero è completamente determinato da 3 parametri fisici: la sua massa M , la sua carica elettrica Q e il suo momento angolare \vec{L} .*

Definizione 20. *Il tipo di buchi neri più semplice è sicuramente quella con carica elettrica nulla e momento angolare nullo.*

$$\begin{cases} Q = 0 \\ \vec{L} = 0 \end{cases}$$

Questa tipologia di buchi neri si chiama di Schwarzschild.

Per completezza diciamo che un buco nero con carica ma $\vec{L} = 0$ si dice di Reissner-Nordström (1918), viceversa uno in moto rotatorio ma senza carica $Q = 0$ si dice buco nero di Kerr (1963).

Capitolo 3

La prima immagine

L'esistenza dei buchi neri è stata sempre molto dibattuta fra i fisico-matematici e gli astrofisici. Lo stesso Einstein non credeva che tali oggetti potessero esistere realmente in Natura. Eppure evidenze teoriche e osservative che provengono dall'Astrofisica ci hanno costretto ad accettare il fatto che le singolarità siano una caratteristica intrinseca della Natura.

3.1 Oggetti compatti

3.1.1 Nane bianche

Parallelamente allo sviluppo della teoria della Relatività Generale di Einstein, in campo astronomico furono trovati corpi celesti molto compatti avente "massa pressoché equivalente al Sole e di raggio molto minore rispetto ad Urano" ; furono battezzati col nome di "nane bianche". Oggi sappiamo con maggiore precisione che una nana bianca ha sì una massa equivalente al Sole, ma tipicamente con un diametro tanto grande quanto quello della Terra.

Esempio 13 (Sirius B). *La prima nana bianca mai scoperta fu Sirio B, la compagna della stella più luminosa notturna Sirio. Questa nana bianca secondo l' Enciclopedia Britannica possiede una densità ρ centomila volte quella dell' acqua*

$$\rho \simeq 10^5 \rho_{acqua}$$

dove

$$\rho_{acqua} \simeq 1 \frac{g}{cm^3}$$

Da confrontare la densità del nostro Sole dal *Sun fact sheet* di NASA

$$\rho_{\odot} = 1,408 \frac{g}{cm^3}$$

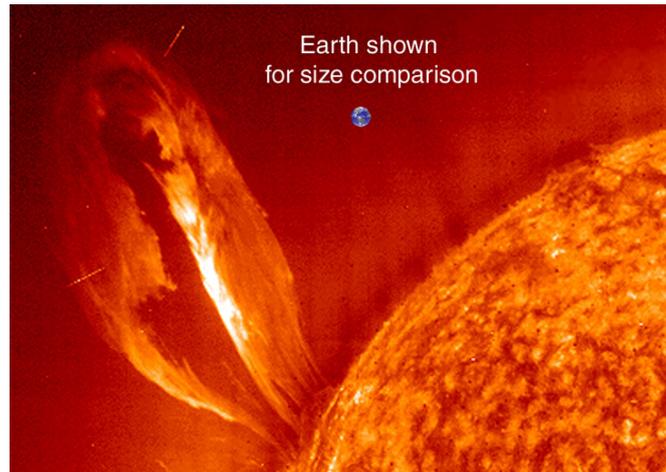


Figura 3.1: Una nana bianca avrebbe la stessa densità di un corpo ottenuto schiacciando tutta la massa del Sole in una sfera dalle dimensioni della Terra, dimensioni in proporzione Terra-Sole secondo Nasa

Nel 1931, esattamente 15 anni dopo la scoperta della metrica di Schwarzschild, fu calcolato il limite superiore di questi oggetti compatti. Poichè la struttura delle nane bianche è mantenuta stabile dalla pressione P degli elettroni degeneri che nel caso non relativistico, considerato il gas costituito da N elettroni e contenuto in uno spazio di volume V , ha la seguente forma

$$P = \frac{2E}{3V} = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{m_e} \left(\frac{N}{V} \right)^{\frac{5}{3}}$$

dove h e m_e indicano la costante di Planck e la massa dell' elettrone, come conseguenza della Meccanica Quantistica e Statistica l' astrofisico S. Chandrasekhar dedusse una massa oltre la quale una ideale nana bianca non può essere più stabile. Tale limite di massa è oggi conosciuto come limite di Chandrasekhar e ha un valore pari a

$$M_{Chandrasekhar} \simeq 1,4M_{\odot}$$

dove

$$1M_{\odot} = 1,9885 \cdot 10^{30} \text{ Kg}$$

è il simbolo usato in Astronomia per indicare la massa del nostro sole.

3.1.2 Stelle di neutroni

La scoperta di Chandrasekhar permise agli altri astrofisici di speculare sull'esistenza di corpi celesti ancora più compatti: le stelle di neutroni. Previste nel 1934 da F.

Zwicky e W. Baade furono confermati solamente nel 1967 con la scoperta della prima pulsar da parte di J. B. Burnell e A. Hewish.

La teoria moderna prevede che le stelle di neutroni siano un residuo di stelle con massa iniziale piuttosto grande, almeno maggiore di $3M_{\odot}$. La forza che mantiene stabile la loro struttura è quella della pressione P dovuta ai neutroni degeneri che è proporzionale a

$$P \propto \frac{1}{m_n} \left(\frac{\rho}{\mu_n} \right)^{\frac{5}{3}}$$

dove m_n e μ_n indicano rispettivamente la massa e massa molecolare del neutrone, ρ la densità del gas. Inoltre, diversamente dalle nane bianche, una stella di neutroni ha la massa quasi doppio della massa Solare e occupa soltanto una regione di circa 10-20 Km. Di conseguenza, secondo la stessa Enciclopedia, possiedono una densità

$$\rho \simeq 10^{14} \rho_{acqua}$$

Esempio 14. *La prima prova osservativa delle stelle di neutroni fu PSR 0329+54, una sorgente radio con pulsazioni estremamente regolari che implicavano densità compatibili con quelle predette teoricamente per le stelle di neutroni.*

Così come per le nane bianche esiste un limite superiore di massa, anche per le stelle di neutroni esiste una massa oltre la quale la pressione dei neutroni degeneri non può più controbilanciare gli effetti di collasso gravitazionale.

Difatti nel 1939 J. R. Oppenheimer e H. Snyder pubblicarono su "Physical Review" uno studio intitolato "On Continued Gravitational Contraction" in cui mostrarono come una stella sufficientemente massiccia potesse contrarsi indefinitivamente una volta esaurite tutte le sue sorgenti di energia termonucleare.

Il valore moderno del limite di Oppenheimer è

$$M_{Oppenheimer} \simeq 3M_{\odot}$$

3.2 Il teorema della singolarità

Una obiezione che si potrebbe porre allo studio di Oppenheimer e Snyder, e che storicamente è stata proprio posta, è l'assunzione della simmetria sferica. Infatti il modello della sfera è in fin dei conti una idealizzazione matematica. Come fa osservare il comitato Nobel per la Fisica in [I]: "Se il sistema non avesse simmetria sferica, come può la materia che collassa a riunirsi in un singolo punto e creare una singolarità?"

Seppure il fisico-matematico R. Kerr del 1963 riuscì a trovare per la prima volta una soluzione dell'equazione di Einstein (Teorema 2.4.1) che non richiedesse più

la simmetria sferica, vi sono comunque nelle ipotesi richieste di simmetria assiale. Per la descrizione del collasso nel caso più generale possibile bisognava attendere altri 2 anni.

Nel 1965 R. Penrose pubblicò sulla stessa rivista "Physical Review" un articolo intitolato "Gravitational collapse and space-time singularities" in cui viene illustrato quello che è noto ora come il **Teorema della singolarità**.

Ipotesi chiave per la formazione di un buco nero diventò un oggetto topologico: le superfici intrappolate. In termini qualitativi una superficie intrappolata è una superficie chiusa immergibile nello spazio ordinario con la proprietà che 2 raggi di luce che colpiscono tale superficie ortogonalmente convergono localmente nello spazio e nel tempo. Il teorema della singolarità assicura che sotto la condizione di una densità di energia positiva una volta formata una superficie intrappolata, indipendentemente da ogni tipo simmetria, nulla può prevenire alla formazione di una singolarità nello Spazio-tempo.

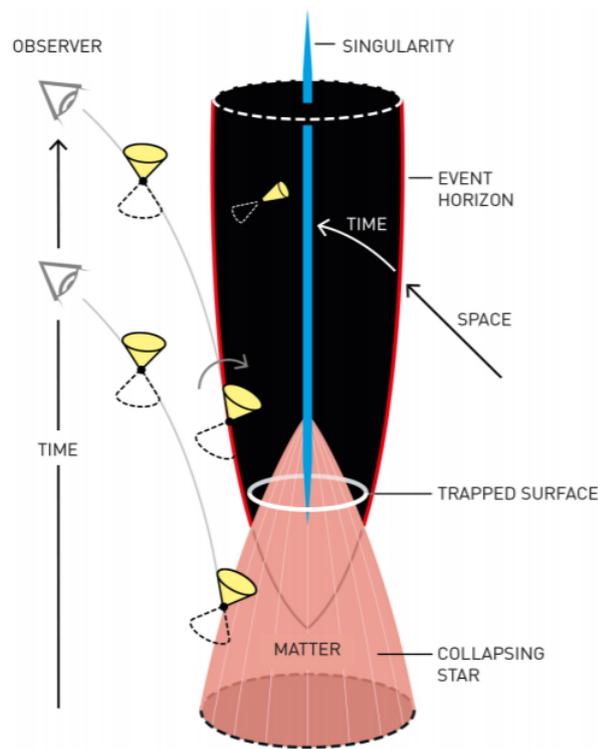


Figura 3.2: Una volta formata una superficie intrappolata, la singolarità è inevitabile

3.3 Buchi neri supermassicci

Il teorema di Penrose fornì una condizione sufficiente per la formazione di un buco nero. Non bisogna dimenticare però che questo risultato teorico era motivato da osservazioni astrofisiche.

Infatti pochi anni prima furono trovati dagli astronomi delle "stelle" che erano anche sorgenti radio molto intense. Una di queste, QSR 3C 273, era particolarmente luminosa tant'è che quando nel 1963 M. Schmidt scoprì che in realtà era un oggetto extragalattico, la comunità scientifica rimase assai sorpresa. Poichè dall'analisi dello spettro di emissione si evinceva una distanza di 760 Mpc e ricordando che

$$1 \text{ pc} = 3,26 \text{ anni} - \text{luce} = 3,086 \cdot 10^{13} \text{ Km}$$

questo significava che questa quasar, abbreviazione per Quasi Stellar Radio source, doveva essere estremamente luminosa. In particolare si stimò che doveva essere mille volte più luminosa della nostra intera Via Lattea e 100 volte più luminosa delle galassie che si trovavano a quella distanza, secondo l'Enciclopedia Britannica. In termini di potenza di emissione doveva avere una luminosità L almeno

$$L \geq 10^{40} \text{ W}$$

da paragonare con la luminosità del Sole riportata da NASA

$$L_{\odot} = 3,828 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

Esiste in astrofisica una relazione che lega la luminosità di un oggetto che emetta in condizione di simmetria sferica e la sua massa nota come

Legge 4 (Limite Eddington). *Un oggetto luminoso stabile che possiede una luminosità L espressa in $[W]$ non può avere una massa inferiore ad una massa M espressa in $[Kg]$ tale che*

$$L = 1,3 \cdot 10^{31} \frac{M}{M_{\odot}} \quad [W]$$

Come conseguenza di tale legge gli astrofisici poterono stimare il limite inferiore della massa di QSR 3C 273: doveva essere almeno un miliardo di volte superiore alla massa del Sole. Ci fu ancora più stupore quando gli astrofisici scoprirono che la dimensione di questa sorgente non doveva essere superiore a qualche giorno-luce, cioè estremamente inferiore al diametro di una galassia. Basti pensare che la Via Lattea ha un diametro di circa

$$D \simeq 100\,000 \text{ anni} - \text{luce}$$

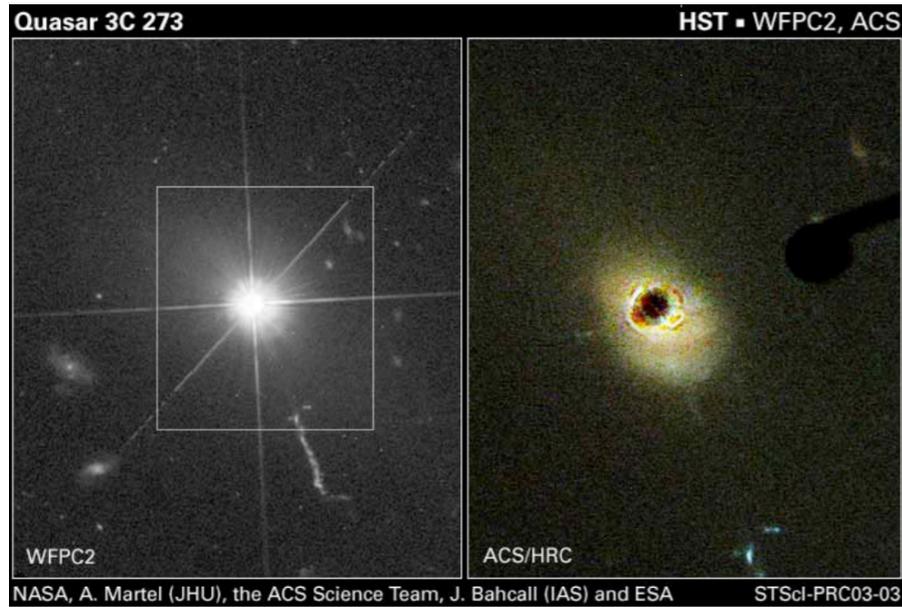


Figura 3.3: Una stessa immagine ottenuta in due bande osservative diverse che mostra QSR 3C 273 a sinistra e la sua galassia ospite a destra

Oggi sappiamo che in realtà QSR 3C 273 è situato nel nucleo di una galassia e irradia così tanta energia da celare la luminosità della stessa galassia ospite.

Nel corso negli anni furono scoperti molti corpi distanti e luminosi come QSR 3C 273, che oggi sono chiamati AGN, acronimo per Nuclei Galattivi Attivi. Per ora l'unico candidato così compatto che possediamo, in grado di produrre così tanta energia in un volume relativamente ridotto è un buco nero supermassiccio che abbia massa M un milione o addirittura un miliardo di volte superiore a quella solare

$$M \sim 10^6 - 10^9 M_{\odot}$$

Nel 1969 l'astrofisico D. Lynden-Bell propose il modello oggi universalmente accettato secondo il quale nel centro di quasi ogni galassia sia presente un buco nero supermassiccio. In particolare due anni dopo pubblicò un altro articolo insieme a M. J. Rees in cui si legge che i due scienziati sospettano che esista un buco nero supermassiccio proprio al centro della nostra galassia. Da qui parte la caccia ventennale al buco nero dei 2 già menzionati "Nobel laureate" Ghez e Genzel.

3.4 L' Ombra di un buco nero

Se il modo migliore per dimostrare l'esistenza di un ente matematico è fornire un algoritmo che lo possa costruire, la prova più convincente per dire che un buco

nero esiste davvero è mostrarne un'immagine. Come si presenta un buco nero secondo la teoria della Relatività Generale per un osservatore lontano che si trova ad esempio sulla Terra? Di seguito verrà riportata una breve descrizione degli elementi costitutivi di un buco nero di Schwarzschild, quindi un buco nero non ruotante e priva di carica elettrica.

Abbiamo già menzionato nella Definizione 20 che la **Singularità** e tutto ciò che si trova nella parte interna la cui confine è delimitata dell' **Orizzonte degli eventi** non può essere osservata in alcun modo. Esattamente 15 anni dopo la scoperta della metrica di Schwarzschild, l'astrofisico giapponese Y. Hagihara con l'articolo "Theory of relativistic trajectories in a gravitational field of Schwarzschild" presentò, fra i vari risultati sulle geodetiche nelle vicinanze di un buco nero, la **Sfera di fotoni** di un buco nero.

Definizione 21. *La Sfera di fotoni di un buco nero di Schwarzschild (si riguardi la definizione di R_S in Curiosità 1) è una ideale superficie sferica avente raggio*

$$R = \frac{3}{2}R_S$$

e delimita una zona in cui solo i fotoni possono restare in orbita in modo instabile.

In una delle prime simulazione dell'immagine di un buco nero pubblicato da J. P. Luminet nel 1979 si può osservare la rappresentazione della sfera di fotoni come un anello di luce debole che circonda una zona totalmente oscura.

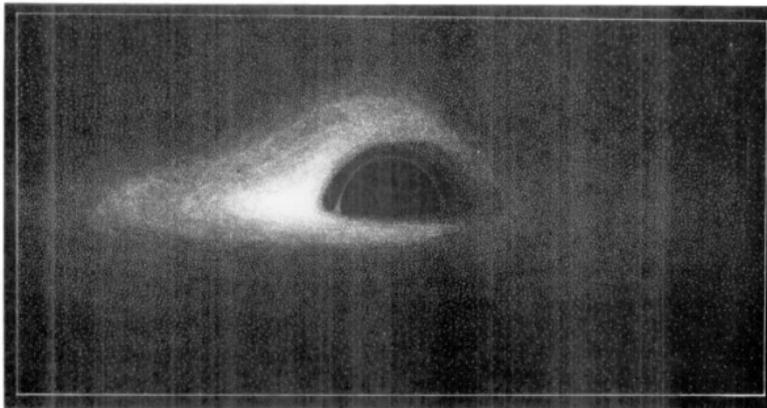


Figura 3.4: La sfera di fotoni di un buco nero sferico secondo Luminet

I fotoni che possono trovarsi sulla sfera di fotoni sono quelli che quando si sono avvicinati al buco nero hanno avuto un parametro d'impatto con un ben determinato valore. Ricordando che il parametro d'impatto è la distanza tra la traiettoria (rettilinea) del fotone e la singolarità si ha

Teorema 3.4.1 (Hilbert (1917)). *I fotoni che si avvicinano a un buco nero di Schwarzschild con un parametro di impatto b esattamente pari a*

$$b = \frac{\sqrt{27}}{2} R_S$$

finiranno in orbita attorno al buco nero, quelli con b minore finiranno nell' Orizzonte degli eventi e infine quelli con un parametro di impatto b maggiore riusciranno ad allontanarsi definitivamente.

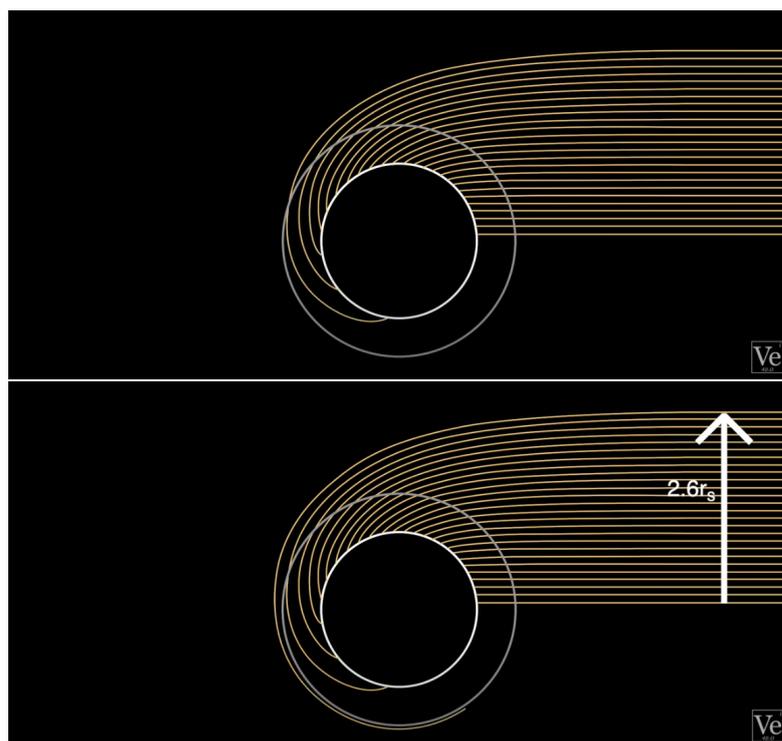


Figura 3.5: Nell 'immagine superiore vengono mostrati le geodetiche spaziali dei fotoni che si avvicinano a un buco nero con b minore del valore necessario per arrivare sulla sfera di fotoni e sotto quella di un fotone con b esattamente pari a tale valore

Poichè le traiettorie dei fotoni, le geodetiche spaziali di tipo-luce, sono uguali in avvicinamento e in allontanamento le traiettorie in giallo della Figura 3.5 possono essere interpretate anche come le traiettorie che percorrerebbero quei fotoni che possono allontanarsi dal buco nero. Ma per la Definizione 20 dell'Orizzonte degli eventi tutte le geodetiche nella figura superiore sono percorribili solo nel verso che termina nella singolarità. Questo significa che tutti i fotoni che sono riusciti a raggiungerci hanno percorso una traiettoria come quella della figura inferiore.

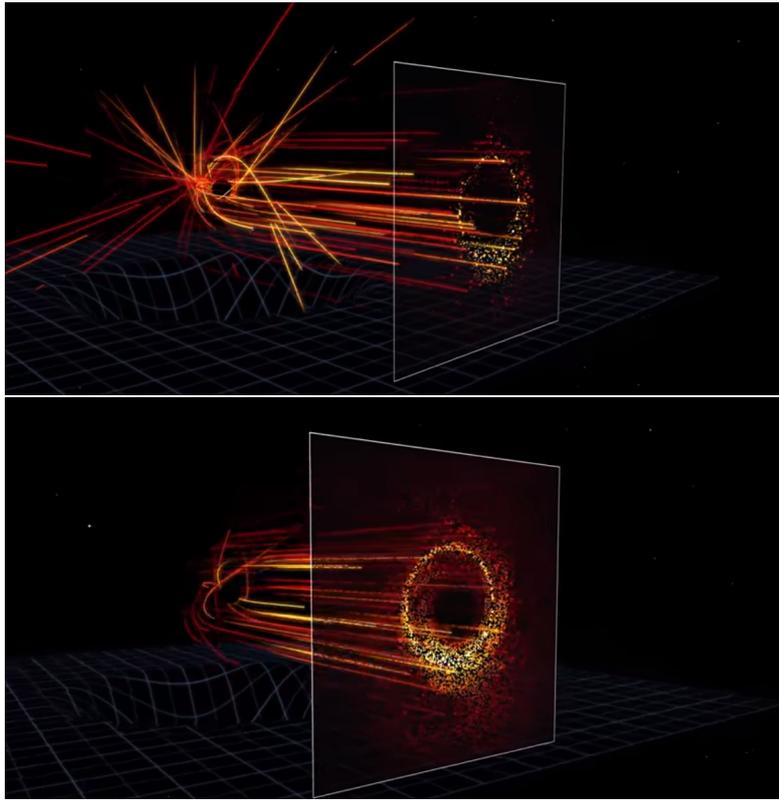


Figura 3.6: Dei fotoni colpiscono un buco nero e alcuni di questi riescono ad allontanarsi colpendo l'immaginario schermo posto a destra. Nella seconda immagine l'osservatore si è spostato leggermente a destra. Si osservi il vuoto di fotoni che si crea nella zona centrale del "cilindro" buco nero-la sua proiezione sullo schermo, fonte: Center for Astrophysics | Harvard & Smithsonian

Dunque solo le traiettorie sulle quali ogni fotone avrebbe un parametro d'impatto maggiore o uguale al valore critico del Teorema 3.4.1 possono raggiungerci. L'immagine che otteniamo guardando un buco nero da lontano possiede letteralmente un "buco" per i fotoni, chiamato l' **Ombra** del buco nero, che risulta avere dimensioni maggiori di quelli dell'Orizzonte degli Eventi in particolare dovrebbe possedere un raggio esattamente

$$R_{Ombra} = \frac{\sqrt{27}}{2} R_S$$

Procedendo verso l'esterno troviamo poi l'**ISCO**, Innermost Stable Circular Orbit, ovvero l'ultima orbita circolare stabile su cui può stare un oggetto dotato di massa. Qualunque materia che si trovi ad una distanza minore del raggio dell'ISCO che ha

un valore di

$$R_{ISCO} = 3R_S$$

finirà inevitabilmente nell'Orizzonte degli eventi. Osserviamo che il raggio dell'ISCO è leggermente superiore al valore del raggio dell'Ombra quindi in linea di principio otterremo una regione oscura nello spazio di mezzo.

Infine poichè in genere un buco nero non è un sistema complementemente isolato, l'effetto gravitazionale dovuta alla sua presenza "attirerà" tutto ciò che si trova nelle sue vicinanze verso ad esso: principalmente gas e polvere cioè le costituenti più abbondanti del mezzo interstellare. Dato che il momento angolare del sistema deve essere conservato questi cadranno verso il centro del buco nero attraverso un movimento spirale formando ciò che noto come il **Disco di accrescimento** del buco nero. E in termini di meccanica classica la materia viene sottoposta ad un'accelerazione così grande che raggiunge ad una frazione significativa della velocità della luce c .

La frizione inoltre aumenta la temperatura che, nel caso di un buco nero supermassiccio, può raggiungere a qualche milione di gradi! Il risultato è un **anello di emissione** estremamente brillante che diventa una sorgente radio di cui abbiamo parlato nella sezione precedente.

Come conseguenza del ripiegamento dei raggi di luce dovuta alla modifica dello Spazio-tempo un osservatore lontano avrebbe la visione del disco di accrescimento in tutte le sue angolazioni. Dunque il disco di accrescimento visto da qualsiasi angolazione apparirebbe come un grande anello.

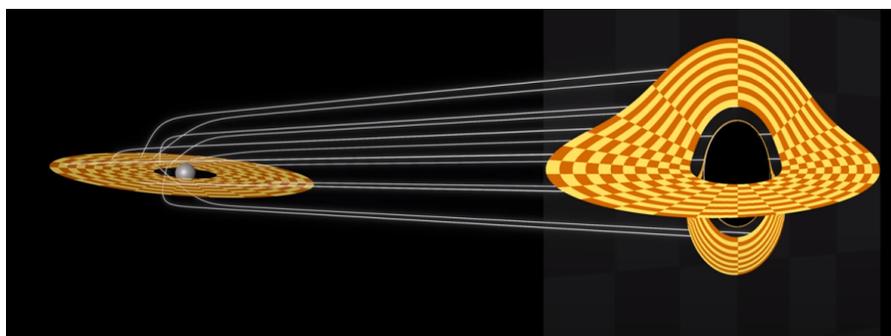


Figura 3.7: Formazione dell'anello di emissione, simulazione di Institut für Theoretische Physik, Goethe-Universität

Inoltre per effetto del "beaming relativistico", vedremo una parte più luminosa dell'anello in corrispondenza dei punti in cui la materia ci sta avvicinando nella nostra direzione durante il suo moto di orbita attorno al buco nero.

La seguente rappresentazione della NASA riassume piuttosto bene quanto detto finora.

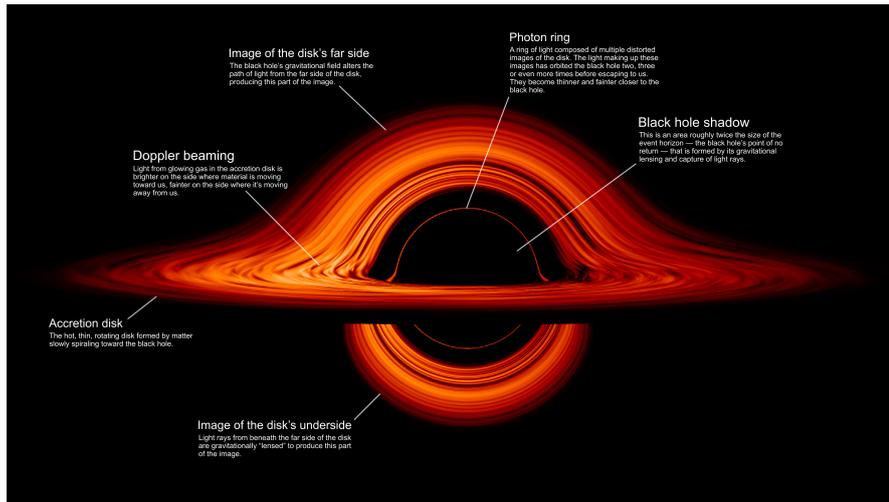


Figura 3.8: Elementi costitutivi di un buco nero, illustrazione di NASA

3.5 Il buco nero supermassiccio al centro di M87 (M87*)

In alcuni AGN il segnale radio è reso ancora più intenso dai **getti relativistici di plasma**, come nel caso della famosa galassia Virgo A nota anche come M87. L'origine della loro formazione è tutt'oggi tema di ricerca; si pensa che la loro origine sia correlata alla rotazione del buco nero e al campo elettro-magnetico da esso generato.

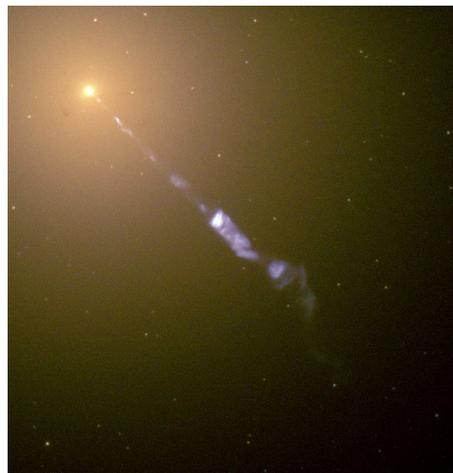


Figura 3.9: M87 E i suoi getti di plasma

3.5.1 Stima della massa a priori

Ricordando il seguente risultato della meccanica classica

Teorema 3.5.1 (del viriale). *In un sistema costituito da N particelle se è presente solo la forza di attrazione gravitazionale allora l'energia cinetica media $\langle T \rangle$ e l'energia potenziale gravitazionale media $\langle U \rangle$ sono tali che*

$$2 \langle T \rangle + \langle U \rangle = 0$$

Si può notare che dall'analisi dello spettro di emissione della sorgente è possibile ottenere una stima della massa M della regione di emissione.

Infatti

$$2 \langle T \rangle + \langle U \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) + G \frac{M m}{r} = 0$$

allora M deve essere

$$M = \frac{1}{G} r v^2$$

Studiando le righe di emissioni che sono state allargate per effetto Doppler riusciamo a dedurre una differenza di velocità per regioni opposte v di

$$v \simeq 1000 \frac{Km}{s} = 10^6 \frac{m}{s}$$

Dalle misurazioni del telescopio spaziale Hubble otteniamo $r \simeq 22pc$.

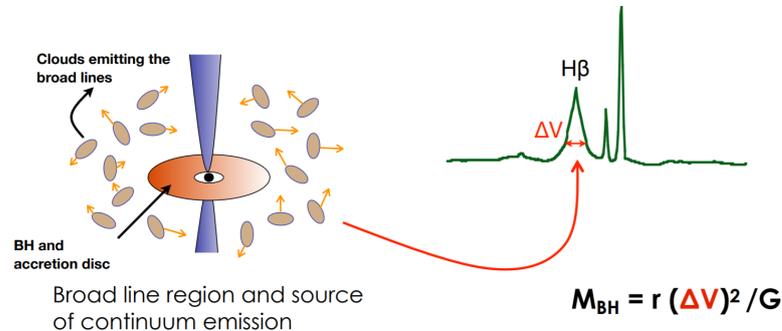


Figura 3.10: Come stimare la velocità dallo spettro di emissione

d'altra parte

$$1pc = 3,086 \cdot 10^{16} m \quad \Rightarrow \quad r \simeq 6,79 \cdot 10^{17} m$$

la massa della sorgente dei getti relativistici deve quindi essere dell'ordine di grandezza di

$$M = \frac{1}{G} r v^2 \simeq \frac{1}{6,67 \cdot 10^{-11}} 6,79 \cdot 10^{17} \cdot 10^{12} = 1,018 \cdot 10^{40} \quad [Kg]$$

ovvero rispetto alla massa solare

$$M = \frac{1,018 \cdot 10^{40}}{1,9885 \cdot 10^{30}} M_{\odot} \simeq 5,12 \cdot 10^9 M_{\odot}$$

3.5.2 Foto del secolo

Assumendo per semplicità che il buco nero sia uno di Schwarzschild dalla stima della massa M possiamo avere anche un'idea della dimensione dell'Orizzonte degli eventi. Infatti

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \simeq \frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,018 \cdot 10^{40}}{9 \cdot 10^{16}} \quad [m] = 1,509 \cdot 10^{13} [m]$$

equivalentemente

$$R_S = \frac{1,509 \cdot 10^{10}}{3,086 \cdot 10^{13}} [pc] = 0,489 \cdot 10^{-3} [pc]$$

Dunque poichè questa galassia è distante 54,768 Milioni di anni-luce dalla Terra o meglio

$$d = 16,8 Mpc$$

il diametro angolare apparente θ sarà

$$\theta d = 2R_S \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{2R_S}{d} = \frac{0,489 \cdot 10^{-3}}{16,8 \cdot 10^6} [rad] = 2,91 \cdot 10^{-11} [rad]$$

Ricordando il

Legge 5 (Criterio di Rayleigh). *La risoluzione angolare di un telescopio, cioè l'angolo θ più piccolo che il telescopio riesce a distinguere, che osserva ad una lunghezza d'onda λ soddisfa la seguente relazione*

$$\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

dove D è il diametro del telescopio espressa in $[m]$ così come λ .

Considerata la dimensione del buco nero avremo bisogno di un telescopio con le dimensioni maggiori del diametro della Terra per poter osservarla direttamente se l'osservazione fosse fatta a 1,3mm

$$D = 1,22 \frac{\lambda}{\theta} = 1,22 \frac{1,3 \cdot 10^{-3}}{2,91 \cdot 10^{-11}} [m] = 5,545 \cdot 10^7 [m]$$

poichè secondo "Earth fact sheet" della NASA il diametro terrestre all' equatore è pari a

$$D_{\odot} = 1,276 \cdot 10^7 m$$

L'impresa dell'EHT, Event Horizon Telescope, è stata quella di collegare una rete di 8 telescopi tra cui uno in Antartide che ha osservato simultaneamente M87* nelle giornate di 5,6,10,11 aprile 2017 e di fatto raggiungendo la risoluzione necessaria.

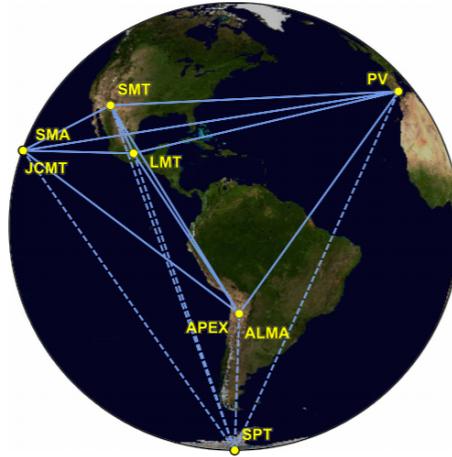


Figura 3.11: Gli 8 telescopi che simulano EHT

Ciascun telescopio è dotato di un orologio atomico perchè tutti insieme possano simulare un telescopio con le dimensioni della Terra.

L'osservazione è stata fatta proprio a 1,3mm, o equivalentemente 230 GHz, poichè il picco di emissione si trova esattamente in questa banda e perchè il segnale possa attraversare l'eventuale mezzo interstellare che ci bloccherebbero la vista del buco nero.

In particolare per garantire l'oggettività dei dati sono stati effettuati osservazioni a 2 bande diverse, a 227,1 e a 229,1GHz. Per lo stesso motivo l'operazione dell'imaging è stata affidata a 4 gruppi che hanno lavorato in modo totalmente indipendente. Tuttavia il risultato che si è ottenuto è lo stesso: un anello luminoso di emissione asimmetrico che circonda un'ombra, esattamente come la previsione del modello.

Dalla misura del diametro dell'Ombra è possibile ottenere il diametro dell'Orizzonte

degli eventi θ (si riguardi la precedente sezione) che vale

$$\theta = 1,52 \cdot 10^{-5} ["] = 7,369 \cdot 10^{-11} [rad]$$

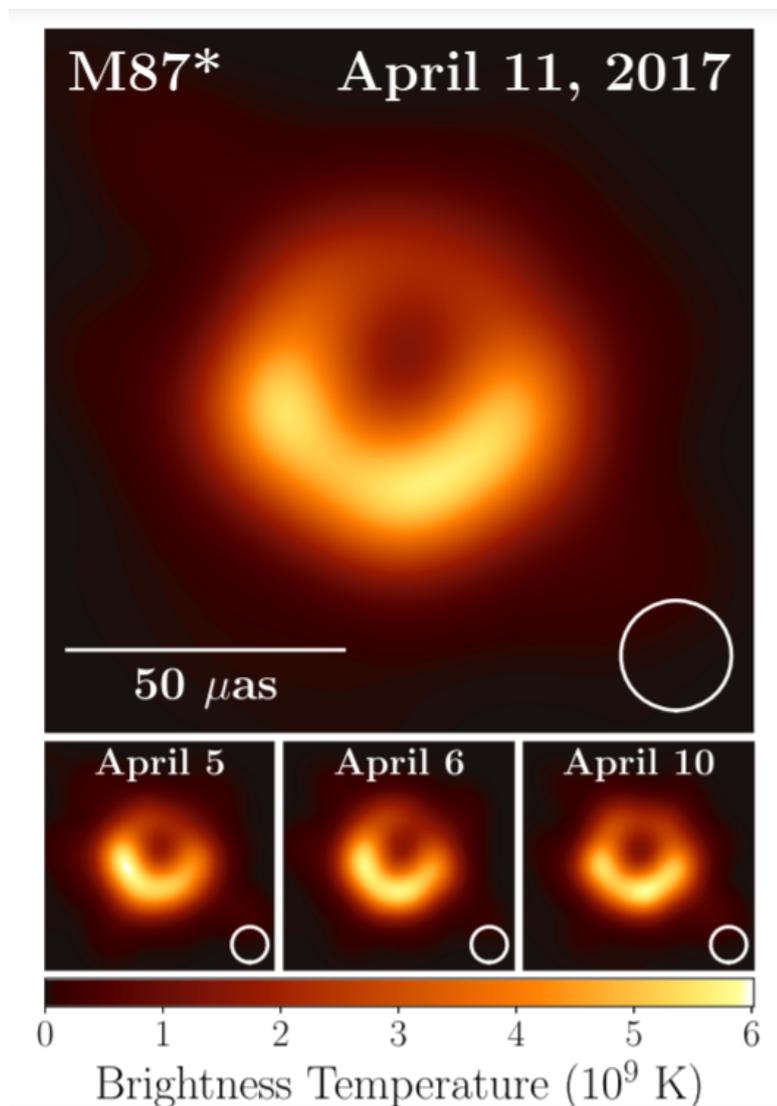


Figura 3.12: La prima vera immagine di un buco nero

Dunque ricordando che si trova a 16,8 Mpc distanza e che sussiste la relazione

$$\theta D = 2 \frac{2GM}{c^2}$$

otteniamo una misura "diretta" della massa del buco nero

$$M = \frac{\theta D c^2}{4G} \simeq \frac{7,369 \cdot 10^{-11} \cdot 5,184 \cdot 10^{23} \cdot 9 \cdot 10^{16}}{4 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}} [Kg] = 1,289 \cdot 10^{40} [Kg]$$

cioè

$$M = 6,482 \cdot 10^9 M_{\odot}$$

coerente alla stima della massa a partire dal moto delle stelle e gas attorno al buco nero.

In conclusione la foto dell'Ombra di M87* fornisce l'evidenza attualmente più convincente sull'esistenza delle singolarità in Natura, mostrando ancora una volta la validità della Relatività Generale.

Elenco delle figure

1.1	Targa commemorativa dedicata a J. Michell nella "Thornhill Parish Church", Yorkshire e Humber, Regno Unito Fonte: https://www.queens.cam.ac.uk/visiting-the-college/history/college-facts/john-michell	7
1.2	La celeberrima illustrazione della sesta pagina dei "Principi matematici della filosofia naturale" di I. Newton Fonte: https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasure-newtons-principia-in-english	10
1.3	L'immagine di una stella nera Fonte: https://it.wikipedia.org/wiki/Stella_nera_(astronomia) . . .	11
1.4	Le posizioni delle stelle luminose attorno al buco nero al centro della nostra galassia osservate dal 1995 al 2008 Fonte: M. Brusa - Slides del corso di Fondamenti di Astronomia, Lezione 19	13
2.1	Una simulazione dell'immagine di un buco nero dal film: Interstellar Fonte: https://www.reddit.com/r/MovieDetails/comments/hd0h7l/in_interstellar_2014_the_black_hole_was_so/	15
2.2	Rappresentazione della mappa di transizione per una 2-varietà Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Differentiable_manifold	16
2.3	Globulo rosso sulla punta di un ago Fonte: https://it.quora.com/Quali-foto-al-microscopio-ti-hanno-lasciato-a-bocca-aperta	17
2.4	La classica rappresentazione di 3 vettori di $T_0\mathbb{R}^2$ Fonte: https://www.okpedia.it/spazio-vettoriale	18
2.5	Trasformazioni di Lorentz dal sistema F ad F' Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Lorentz_transformation	21
2.6	Coordinate sferiche per lo spazio tangente a un punto di \mathbb{R}^3 Fonte: https://it.cleanpng.com/cleanpng-m7e4uv/download-png.html	22

2.7	Un esempio di campo di vettori su una superficie sferica Fonte: https://it.wikipedia.org/wiki/Campo_vettoriale	23
2.8	Il trasportato di uno stesso vettore \vec{V} secondo 2 connessioni Fonte: B. F. Schutz-Geometrical methods of Mathematical Physics	25
2.9	Fonte: https://slideplayer.it/slide/17556278/	28
2.10	4 posizioni diverse del perielio di Mercurio dalla conferenza di L. Zampieri, astronomo ricercatore dell'INAF Osservatorio Astronomico di Padova Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=IIpvXsxIoxE	30
2.11	Scorretta rappresentazione degli effetti di gravità del sole sullo spazio-tempo Fonte: M. Pallavicini-slides per l' edizione 2011 del progetto di divulgazione scientifica dell' INFN "Fisica in Barca" :GPS e la relatività	31
2.12	Corretta rappresentazione degli effetti di gravità della Terra sullo spazio-tempo Fonte: D. Muller-why gravity is not a force https://www.youtube.com/watch?v=XRr1kaXKBsU	31
2.13	3 satelliti GPS Fonte: https://explainingscience.org/2017/01/29/gps/	35
2.14	Scambio di ruolo tra spazio e tempo oltre l' Orizzonte degli eventi Fonte: The Nobel Committee for Physics-Theoretical foundation for black holes and the supermassive compact object at the galactic centre	37
3.1	Una nana bianca avrebbe la stessa densità di un corpo ottenuto schiacciando tutta la massa del Sole in una sfera dalle dimensioni della Terra Fonte: https://solarsystem.nasa.gov/solar-system/sun/in-depth/	40
3.2	Una volta formata una superficie intrappolata, la singolarità è inevitabile Fonte: The Nobel Committee for Physics-Theoretical foundation for black holes and the supermassive compact object at the galactic centre	42
3.3	Una stessa immagine ottenuta in due bande osservative diverse che mostra QSR 3C 273 a sinistra e la galassia ospite a destra Fonte: M. Brusa - Slides del corso di Fondamenti di Astronomia: lezione 19	44
3.4	La sfera di fotoni di un buco nero sferico Fonte: J.P. Luminet - Image of a spherical black hole with thin accretion disk, Astronomy and Astrophysics, Vol. 75, p. 228-235	45

- 3.5 Nell'immagine superiore vengono mostrati le geodetiche spaziali dei fotoni che si avvicinano a un buco nero con b minore del valore necessaria per arrivare sulla sfera di fotoni e sotto quella di un fotone con b esattamente pari a tale valore
Fonte: D. Müller - Come interpretare l'immagine di un buco nero, <https://www.youtube.com/watch?v=zUyH3XhpLTo> 46
- 3.6 Motivo della formazione dell'Ombra di un buco nero
Fonte: Center for Astrophysics | Harvard & Smithsonian
<https://www.ias.edu/press-releases/2020/photon-ring> 47
- 3.7 Formazione dell'anello di emissione
Fonte: Relastro @ ITP - Goethe University, Frankfurt
<https://www.youtube.com/watch?v=jvftAadCFRI> 48
- 3.8 Elementi costitutivi di un buco nero, illustrazione di NASA
Fonte: <https://www.nasa.gov/feature/goddard/2019/nasa-visualization-shows-a-black-hole-s-warped-world/> 49
- 3.9 M87 E i suoi getti di plasma
Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Messier_87 49
- 3.10 Come stimare la velocità dallo spettro di emissione
Fonte: M. Brusa - Slides del corso di Fondamenti di Astronomia, lezione 19 50
- 3.11 Gli 8 telescopi che simulano EHT
Fonte: First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole, *The Astrophysical Journal Letters*, 875:L1 (17pp), 2019 April 10 52
- 3.12 La prima vera immagine di un buco nero
Fonte: First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole, *The Astrophysical Journal Letters*, 875:L1 (17pp), 2019 April 10 53

Bibliografia

- [I] **The Nobel Committee for Physics**, Scientific background: *Theoretical foundation for black holes and the supermassive compact object at the galactic centre*
- [II] **S. Carroll**, *Spacetime and Geometry: An introduction to General Relativity*
- [III] **R. Casadio**, *Elements of General Relativity*, dispense del corso di "Elementi di teoria della Relatività Generale", laurea in Fisica, Università di Bologna
- [IV] **B. F. Schutz**, *Geometrical methods of Mathematical Physics*
- [V] **B. F. Schutz**, *A first course in General Relativity*
- [VI] **M. Pallavicini**, *GPS e la relatività*, slides per l' edizione 2011 del progetto di divulgazione scientifica dell' INFN "Fisica in Barca"
- [VII] **Resnick-Halliday-Krane**, *Fisica 1*
- [VIII] **M. Brusa**, Slides del corso di *Fondamenti di Astronomia*, laurea in Matematica, Università di Bologna
- [IX] **H. Karttunen-P. Kröger-H.Oja-M.Poutanen-K. J. Donner**, *Fundamental Astronomy*
- [X] **The Astrophysical Journal Letters**, *First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole*