

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Classificazione di orbite stellari in
potenziali galattici: il metodo
dell'integrale di correlazione
applicato alle superfici di sezione

Relatore:
Prof. Carlo Nipoti

Presentata da:
Morgana Maria Elena
Pederzoli

Correlatore:
Dott. Raffaele Pascale

Abstract

Con il seguente elaborato ci proponiamo di presentare un metodo per la classificazione di orbite nel contesto del problema della ricerca degli integrali del moto all'interno di potenziali galattici. Abbiamo visto come siano fortemente legati alle simmetrie del sistema considerato e come in certi casi essi non siano individuabili attraverso i metodi analitici della meccanica classica, ma sia necessario ricorrere a metodi di integrazione numerica. Abbiamo evidenziato le differenze tra i sistemi a simmetria sferica, dove gli integrali del moto sono tutti noti e analitici, e i sistemi a simmetria assiale, di cui, con i metodi classici, riusciamo a ricavare solamente due integrali del moto. Abbiamo mostrato come le osservazioni sul piano meridionale di orbite integrate in potenziali assi-simmetrici, abbiano permesso di dedurre in molti casi la presenza di un ulteriore integrale del moto. Ci siamo soffermati sulla classificazione delle orbite e sulla descrizione delle principali caratteristiche delle varie famiglie, evidenziando in particolare la differenza tra orbite regolari e orbite caotiche, per poi illustrare i principali metodi di classificazione di orbite noti in letteratura. Tra questi metodi una particolare attenzione è stata data a quelli basati sull'integrale di correlazione e alla superficie di sezione. Poiché quest'ultima, particolarmente significativa per i potenziali assi-simmetrici, nasce come metodo qualitativo, siccome richiede l'ispezione grafica della superficie di sezione stessa, ci siamo chiesti se fosse possibile riuscire ad applicare a essa un algoritmo di classificazione automatica sfruttando l'integrale di correlazione. Siamo riusciti a scrivere tale algoritmo e, per testarne la correttezza, abbiamo analizzato orbite integrate in un potenziale di Plummer shiftato. Tale analisi ha confermato la bontà del metodo.

Indice

Introduzione	3
1 Teoria del potenziale	5
1.1 Il campo gravitazionale	6
1.1.1 Sistemi a simmetria sferica: Il modello di Plummer	9
1.1.2 Sistemi assi-simmetrici: I modelli di Kuzmin e di Miyamoto - Nagai	9
1.2 Simmetrie e integrali del moto	11
1.2.1 Integrali del moto per sistemi a simmetria sferica	14
1.2.2 Integrali del moto per sistemi a simmetria assiale	15
2 Classificazione delle orbite stellari	16
2.1 Classificazione orbite nello spazio delle fasi	16
2.1.1 Orbite regolari	18
2.1.2 Orbite caotiche	19
2.2 Metodi di classificazione	19
2.2.1 L'esponente di Lyapunov	19
2.2.2 L'integrale di correlazione	20
2.2.3 La superficie di sezione	22
3 Il caso di studio	24
3.1 Il potenziale di Plummer complessificato	24
3.1.1 Il campione di orbite	25
3.2 L'implementazione del metodo	27
3.2.1 I vantaggi dello studio dell'integrale di correlazione sulla su- perficie di sezione	27
3.2.2 La discretizzazione di r	28
3.2.3 La finestra mobile e la minimizzazione del χ^2	30
3.3 Risultati	32
3.3.1 Valori attesi	32

3.3.2 Valori ottenuti	33
Conclusioni	36
A Minimizzazione del χ^2 nel caso della regressione lineare	38
Bibliografia	40

Introduzione

Nell'ambito della ricerca in astrofisica, le galassie, intese come sistemi autogravitanti composti principalmente da stelle, materia oscura e gas, sono oggetto di studio da diversi punti di vista. Tra i temi che si presentano in questo ambito, risulta particolarmente interessante la ricerca e la costruzione di modelli dinamici che possano descriverne l'equilibrio, la stabilità o instabilità e l'evoluzione temporale. Il fulcro di questo tipo di indagini sta nell'individuazione della forma del potenziale caratteristico della galassia oggetto di studio. Poiché le proprietà dell'orbita di un qualsiasi corpo immerso in un potenziale sono completamente determinate dal potenziale stesso, lo studio e la classificazione delle tipologie di orbite stellari presenti in una galassia costituisce uno strumento particolarmente importante per identificarne il potenziale.

Con questa tesi ci soffermeremo principalmente sul caso dei potenziali a simmetria assiale, mostreremo le principali caratteristiche delle orbite che essi possono generare e spiegheremo come sia stato possibile creare un algoritmo in grado di classificarle.

Il Capitolo 1 è dedicato alla teoria del potenziale per sistemi gravitazionali. Mostreremo come nei sistemi galattici sia spesso possibile (e conveniente) trattare la distribuzione della massa del sistema come una densità continua e, attraverso l'equazione di Poisson, vedremo come essa sia strettamente legata al potenziale. Descriveremo poi alcuni dei potenziali più noti in letteratura: il potenziale di Plummer, un potenziale a simmetria sferica particolarmente importante per la modellizzazione di ammassi globulari, il potenziale di Kuzmin, un potenziale assi-simmetrico che descrive sistemi fortemente schiacciati, e il potenziale di Miyamoto-Nagai, che nasce dalla fusione dei due modelli precedenti e che permette di descrivere sistemi schiacciati qualsiasi. Vedremo, infine, come il potenziale entri a far parte delle equazioni del moto di un corpo immerso in esso e come, attraverso il concetto di integrale del moto, le simmetrie del sistema siano fondamentali nella determinazione delle leggi di conservazione a cui tale corpo ubbidisce.

Nel Capitolo 2 mostreremo come le osservazioni sul piano meridionale di orbite in potenziali assi-simmetrici abbiano permesso di dedurre l'esistenza di integrali del

moto al di là di quelli previsti dalla meccanica classica. Ci soffermeremo a descrivere le principali tipologie di orbite che si possono generare in potenziali a simmetria assiale, evidenziando in particolare la differenza tra orbite regolari e caotiche, e vedremo come le varie tipologie di orbite siano legate al numero di integrali del moto. La seconda parte di questo capitolo sarà dedicata alla descrizione dei tre metodi di classificazione più noti: l'esponente di Lyapunov, legato al concetto di caos deterministico, l'integrale di correlazione, che permette di calcolare la dimensione della varietà su cui giace un'orbita nello spazio delle fasi, e la superficie di sezione, un metodo visuale di classificazione che si basa sull'osservazione della dimensione della varietà su cui giace la traccia dell'orbita in un sottospazio dello spazio delle fasi. Proprio riguardo a quest'ultimo metodo ci siamo chiesti se fosse possibile riuscire ad automatizzarlo sfruttando l'integrale di correlazione.

Nel Capitolo 3 mostreremo come sia stato possibile implementare un algoritmo che, attraverso l'integrale di correlazione, calcolasse la dimensione della varietà su cui giacciono i punti della superficie di sezione, ne spiegheremo i vantaggi rispetto all'implementazione classica dell'integrale di correlazione e riporteremo i risultati ottenuti su orbite integrate in un potenziale di Plummer complessificato. Tale potenziale è ricavabile dalla complessificazione del potenziale di Plummer sferico e risulta particolarmente adatto a descrivere alcuni sistemi schiacciati. Mostreremo la coppia potenziale densità associata a questo potenziale e le caratteristiche del campione di orbite utilizzate. La parte più consistente di questo capitolo sarà riservata alla descrizione del processo con cui siamo riusciti a costruire l'algoritmo di classificazione. Parleremo, in particolare, dell'importanza della discretizzazione e della tecnica di ricerca dei parametri di *best fit* tramite finestra mobile.

Infine mostreremo come i valori attesi sulla dimensione di tali orbite e i valori calcolati dall'algoritmo siano in ottima corrispondenza.

Capitolo 1

Teoria del potenziale

E' ormai fatto noto e accertato che il contributo più importante alla massa di una galassia viene dalla sua componente di materia oscura, ossia materia che contribuisce gravitazionalmente ma che ad oggi non siamo ancora riusciti a "vedere"; in molti casi, inoltre, il contributo della materia oscura è talmente maggioritario da rendere trascurabile quello della componente stellare. In quest'ultimo caso, possiamo considerare le stelle come traccianti del potenziale gravitazionale generato dalla materia oscura, ossia possiamo trattare le stelle come oggetti puntiformi che si muovono sotto l'azione di un campo esterno che non contribuiscono a formare.

Nel caso, invece, in cui il contributo stellare non sia trascurabile, allora, ci troviamo a trattare oggetti che si muovono in un campo gravitazionale $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, con \mathbf{x} vettore posizione, da essi stesso generato. In questo caso il sistema è detto auto-gravitante e, come vedremo in seguito nel capitolo, il potenziale è legato alla stessa gravità tramite la cosiddetta equazione di Poisson.

Per poter studiare la dinamica di una galassia è necessario integrare le equazioni del moto $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ delle stelle che la compongono. Nel caso di forze conservative esiste una funzione scalare $\Phi(\mathbf{x})$, detta appunto potenziale, tale che $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -\nabla\Phi(\mathbf{x})$, grazie alla quale le equazioni del moto diventano $\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla\Phi(\mathbf{x})$; perciò risulta chiaro come sia di fondamentale importanza conoscere il potenziale Φ del sistema.

Tuttavia, dal punto di vista computazionale, dato che una galassia tipica ha circa 10^{11} stelle, nella maggior parte dei casi non è possibile integrare le equazioni del moto delle singole stelle. Risulta perciò necessario sfruttare il concetto di collisionalità: la maggior parte delle galassie, infatti, è trattabile come un sistema non collisionale, ossia come un sistema in cui la probabilità di interazione tra due oggetti del sistema è talmente bassa da poter trascurare sia eventuali collisioni, sia l'effetto delle interazioni gravitazionali a due corpi, che è piccolo rispetto a quello del campo gravitazionale medio. Tale caratteristica, in dinamica gravitazionale, permette di

approssimare la distribuzione discreta di stelle con una distribuzione continua di massa, ossia una densità $\rho(\mathbf{x})$.

In questo capitolo verrà introdotto il supporto teorico agli argomenti che verranno trattati in seguito, in particolare si parlerà della teoria del potenziale per fenomeni gravitazionali e di ricerca di integrali del moto.

1.1 Il campo gravitazionale

Lo studio del campo gravitazionale si basa su 2 fatti empirici:

- l'espressione di Newton per il campo gravitazionale in un punto dello spazio \mathbf{x} generato da una massa M posizionata nel punto $\boldsymbol{\xi}$:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -GM \frac{\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}}{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|^3}, \quad (1.1.1)$$

dove $G = 6.6743010^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ è la costante di gravitazione universale;

- la validità del principio di sovrapposizione: dati due corpi di massa M_1 ed M_2 , posizionati rispettivamente in $\boldsymbol{\xi}_1$ e $\boldsymbol{\xi}_2$, il campo totale nel punto \mathbf{x} è dato dalla somma vettoriale dei campi generati da ognuno dei due corpi:

$$(M_1, \boldsymbol{\xi}_1), (M_2, \boldsymbol{\xi}_2) \implies \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_2(\mathbf{x}). \quad (1.1.2)$$

Ovviamente tale principio è estendibile a N corpi.

Da questi principi e sfruttando il teorema di Gauss della divergenza, risulta semplice ottenere un'importante proprietà del campo gravitazionale, che ci permetterà di dimostrare in modo molto semplice i primi due teoremi di Newton.

Data una distribuzione di densità di massa ρ , grazie al principio di sovrapposizione possiamo esprimere il campo gravitazionale da essa generato come:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -G \int \frac{\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}}{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|^3} \rho(\boldsymbol{\xi}) d^3\boldsymbol{\xi}.$$

Se applichiamo l'operatore divergenza a \mathbf{g} ,

$$\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = -G \int \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\frac{\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}}{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|^3} \right) \rho(\boldsymbol{\xi}) d^3\boldsymbol{\xi},$$

troviamo che:

- per $\mathbf{x} \neq \boldsymbol{\xi}$, la divergenza di $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ è nulla:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\frac{\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}}{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|^3} \right) = \frac{3}{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|^3} - \frac{3(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})}{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|^5} = 0 \implies \nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0;$$

- per $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$, la divergenza si calcola ponendoci in una sfera centrata in $\boldsymbol{\xi}$ di raggio h sufficientemente piccolo in modo tale che $\rho(\boldsymbol{\xi})$ sia praticamente costante su tutto il volume considerato e uguale a $\rho(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= -G \int_{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}| \leq h} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\frac{\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}}{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|^3} \right) \rho(\boldsymbol{\xi}) d^3 \boldsymbol{\xi} \\ &= -G \int_{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}| \leq h} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\frac{\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}}{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|^3} \right) \rho(\mathbf{x}) d^3 \boldsymbol{\xi} \\ &= -G \rho(\mathbf{x}) \int_{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|=h} \frac{\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}}{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|^3} \cdot d^2 \boldsymbol{\sigma}, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il teorema della divergenza e l'elemento di integrazione $d^2 \boldsymbol{\sigma}$ è diventato superficiale, la sua espressione è $d^2 \boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) h d^2 \Omega$, dove $d^2 \Omega$ è l'elemento infinitesimo di angolo solido. Proseguendo i calcoli otteniamo

$$\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = -G \rho(\mathbf{x}) \int d^2 \Omega = -4\pi G \rho(\mathbf{x}). \quad (1.1.3)$$

Nel caso di un corpo puntiforme di massa M , i due risultati appena trovati possono essere sintetizzati nella scrittura:

$$\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = -4\pi G M \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}), \quad (1.1.4)$$

dove $\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$ è la distribuzione delta di Dirac.

Quanto appena ottenuto altro non è che il teorema di Gauss per il campo gravitazionale:

Teorema Di Gauss. *Il flusso di \mathbf{g} attraverso una superficie chiusa è uguale a $4\pi G$ la massa contenuta all'interno della superficie.*

Grazie a questo teorema risulta banale la dimostrazione dei primi due teoremi di Newton:

Primo teorema di Newton. *Un corpo che si trova all'interno di un guscio sferico di materia risente di una forza gravitazionale netta nulla da parte del guscio.*

Secondo teorema di Newton. *Un corpo che si trova all'esterno di un guscio sferico di materia risente di una forza gravitazionale netta da parte del guscio come se l'intera massa del guscio fosse concentrata in un unico punto al centro della sfera.*

Il potenziale gravitazionale

Introduciamo ora la funzione

$$\Phi(\mathbf{x}) = -G \int \frac{\rho(\boldsymbol{\xi})}{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|} d^3\xi, \quad (1.1.5)$$

e notiamo che questa soddisfa:

$$\nabla\Phi(\mathbf{x}) = G \int \frac{\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}}{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|^3} \rho(\boldsymbol{\xi}) d^3\xi = -\mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad \text{poichè} \quad \nabla_x \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|} \right) = -\frac{\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}}{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|^3}.$$

Perciò è Φ tale che

$$\mathbf{g} = -\nabla\Phi \quad (1.1.6)$$

e prende il nome di potenziale gravitazionale.

E' bene precisare che l'espressione del potenziale è sempre definita a meno di due costanti arbitrarie: l'estremo di integrazione \mathbf{x}_0 e la costante di integrazione Φ_0 , per cui l'espressione esatta del potenziale risulta:

$$\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{x}_0) = -G \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \frac{\rho(\boldsymbol{\xi})}{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|} d^3\xi.$$

E' convenzione scegliere, nei casi in cui la massa del sistema risulta finita, $\mathbf{x}_0 = \infty$ e $\Phi(\mathbf{x}_0) = 0$.

Notiamo infine che $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ risulta essere un campo irrotazionale,

$$\nabla \times \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \nabla \times \nabla\Phi(\mathbf{x}) = 0,$$

poichè il rotore di un gradiente è nullo.

Combinando i risultati ottenuti con le equazioni (1.1.3) e (1.1.6), qui riportate

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = -4\pi G\rho(\mathbf{x}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) = -\nabla\Phi(\mathbf{x}), \end{cases}$$

otteniamo l'equazione di Poisson per il potenziale gravitazionale:

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{x}) = 4\pi G\rho(\mathbf{x}). \quad (1.1.7)$$

1.1.1 Sistemi a simmetria sferica: Il modello di Plummer

Data una distribuzione di densità, tramite l'equazione di Poisson (1.1.7) è possibile determinare l'espressione del potenziale che esso genera (e vice versa). Nel caso in cui la distribuzione di densità (o il potenziale) sia nella forma $\rho = \rho(r)$, con r che nel sistema di coordinate sferico (r, θ, ϕ) rappresenta la distanza dal centro del sistema di riferimento, allora diremo che il sistema è a simmetria sferica.

Un esempio di sistema gravitazionale a simmetria sferica di rilevante importanza astrofisica è il cosiddetto modello di Plummer [1], usato per la prima volta da H.C. Plummer per descrivere la distribuzione radiale proiettata delle stelle che compongono un ammasso globulare.

Il modello considera il potenziale sferico

$$\Phi_P(r) = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + b^2}}, \quad (1.1.8)$$

dove b è un parametro di scala, chiamato raggio di Plummer, mentre M è la massa totale del sistema. Sfruttando la simmetria del sistema e la forma del laplaciano in coordinate sferiche,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad (1.1.9)$$

si ha che

$$\nabla^2 \Phi_P(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi_P}{dr} \right) = \frac{3GMb^2}{(r^2 + b^2)^{5/2}},$$

da cui, tramite l'equazione di Poisson, possiamo ricavare la densità:

$$\rho_P(r) = \left(\frac{3M}{4\pi b^3} \right) \left(1 + \frac{r^2}{b^2} \right)^{-\frac{5}{2}}. \quad (1.1.10)$$

Come possiamo vedere in Fig. 1.1, il parametro b è legato alle dimensioni di una regione centrale dell'ammasso con densità approssimativamente costante, detta *core*.

1.1.2 Sistemi assi-simmetrici: I modelli di Kuzmin e di Miyamoto - Nagai

Nella classe dei sistemi assi-simmetrici ricadono i sistemi schiacciati, quali, ad esempio, i dischi di galassie a spirale, il cui calcolo del potenziale risulta un problema non banale. Fortunatamente in molti casi è sufficiente studiare un modello più semplice, ma complessivamente affine al sistema di interesse.

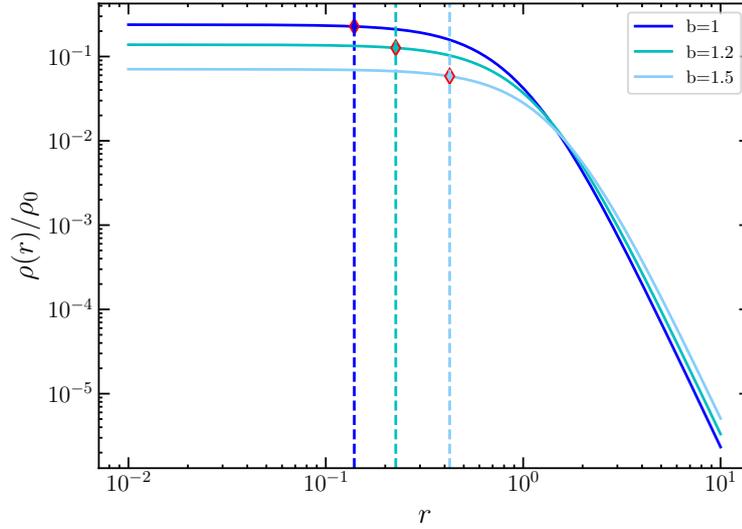


Fig. 1.1: Profili di densità della sfera di Plummer al variare al variare del parametro b con $\rho_0 = \frac{3M}{4\pi b^3}$. Le linee tratteggiate verticali, di colore corrispondente a quello delle curve, segnano il limite del volume a densità quasi costante, il *core*.

Un primo esempio di potenziale a simmetria assi-simmetrica è il potenziale di Kuzmin [2], che in coordinate cilindriche (R, z, ϕ) è dato da:

$$\Phi_K(R, z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a + |z|)^2}}, \quad (1.1.11)$$

dove a è un parametro di scala. Nella regione di spazio $z > 0$ il potenziale di Kuzmin è equivalente al potenziale generato da un corpo puntiforme posto in $(R, z, \phi) = (0, -a, 0)$. Viceversa, nella regione $z < 0$, Φ_K si comporta come un potenziale generato da una massa puntiforme posta in $(0, a, 0)$. Il potenziale di Kuzmin è caratteristico di sistemi fortemente schiacciati; infatti, attraverso l'equazione di Poisson, si trova che la densità corrispondente a $\Phi_K(R, z)$ è nulla ovunque tranne che sul piano $z = 0$. Segue quindi che il potenziale $\Phi_K(R, z)$ è generato da una densità:

$$\rho(R, z, \phi) = \rho(R, z) = \Sigma_K(R)\delta(z). \quad (1.1.12)$$

dove

$$\Sigma_K(R) = \frac{aM}{2\pi(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.1.13)$$

è la densità superficiale.

La sintesi dei modelli di Plummer e di Kuzmin avviene nel modello di Miyamoto

e Nagai [3]:

$$\Phi_M(R, z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}}. \quad (1.1.14)$$

Infatti:

- per $a = 0$, Φ_M si riduce al potenziale di Plummer con raggio di scala b ,
- per $b = 0$, Φ_M si riduce al potenziale di Kuzmin con raggio di scala a .

Per il modello Miyamoto-Nagai, il rapporto a/b determina lo schiacciamento e $a + b$ il raggio di scala. Considerando ancora una volta l'equazione di Poisson e sfruttando il laplaciano in coordinate cilindriche,

$$\nabla^2 = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (1.1.15)$$

troviamo che la densità associata al potenziale di Miyamoto-Nagai è:

$$\rho_M(R, z) = \left(\frac{b^2 M}{4\pi} \right) \frac{aR^2 + (a + 3\sqrt{z^2 + b^2})(a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}{[R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2]^{5/2} (z^2 + b^2)^{3/2}}. \quad (1.1.16)$$

1.2 Simmetrie e integrali del moto

Equazioni del moto

Se consideriamo una massa puntiforme immersa in un campo gravitazionale $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, con \mathbf{x} vettore generico della posizione, dalla seconda legge della dinamica possiamo ricavare l'equazione del moto in forma generale:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (1.2.1)$$

ovvero

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla\Phi(\mathbf{x}). \quad (1.2.2)$$

Fissate le condizioni al contorno $\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0$ e $\dot{\mathbf{x}}(t=0) = \mathbf{v}_0$, abbiamo ottenuto il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{x}}(t) = -\nabla\Phi(\mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v}_0 \end{cases} \quad (1.2.3)$$

ovvero un problema alle equazioni differenziali con condizioni al contorno. Nel caso in cui $\nabla\Phi(\mathbf{x})$ fosse continuo, allora, il teorema di esistenza e unicità [4] ci assicurerebbe l'unicità della soluzione $\mathbf{x}(t)$ (chiamata legge oraria) del problema di Cauchy.

L'unicità della soluzione $\mathbf{x}(t)$ implica l'unicità anche della velocità $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$; questo ci permette di tracciare univocamente l'orbita $\Gamma(t)$ dell'oggetto nello spazio delle fasi, ossia lo spazio generato dal prodotto cartesiano tra lo spazio delle posizioni e lo spazio delle velocità.

Nello spazio delle fasi possiamo, allora, definire gli integrali del moto come delle quantità che si conservano lungo la traiettoria $(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t))$ della particella, ossia funzioni $I(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, che non dipendono esplicitamente dal tempo, tali che:

$$I[\mathbf{x}(t_1), \mathbf{v}(t_1)] = I[\mathbf{x}(t_2), \mathbf{v}(t_2)] \quad (1.2.4)$$

per qualsiasi t_1 e t_2 , da cui la definizione operativa equivalente:

$$\frac{dI}{dt} = 0. \quad (1.2.5)$$

La ricerca degli integrali del moto costituisce un problema fisico di particolare interesse in quanto essi forniscono importanti informazioni riguardo al sistema, dato che possono ridurre i gradi di libertà della traiettoria e, nel migliore dei casi, possono anche fornire informazioni circa la forma e le caratteristiche dell'orbita a priori dell'integrazione delle equazioni del moto. Possiamo classificare gli integrali del moto come:

- isolanti, se riducono di 1 la dimensionalità di $\Gamma(t)$. Un sistema con k integrali del moto isolanti in uno spazio delle fasi $2N$ -dimensionale avrà quindi una traiettoria $2N - k$ dimensionale.
- non isolanti, se non riducono la dimensionalità di $\Gamma(t)$.

In un sistema Hamiltoniano il numero di integrali del moto è sempre $2N - 1$, mentre il numero di integrali del moto isolanti può variare da 1 a $2N - 1$. Sono proprio questi integrali del moto isolanti ad essere di particolare importanza sia pratica che teorica.

Accenni di formalismo lagrangiano

Sia \mathbf{q} una coordinata generalizzata N -dimensionale e sia $\dot{\mathbf{q}}$ la sua derivata rispetto al tempo. Introduciamo la funzione Lagrangiana $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ che per i sistemi gravitazionali e quindi conservativi, assume la forma

$$L \equiv \mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}), \quad (1.2.6)$$

dove \mathcal{T} e \mathcal{U} sono rispettivamente l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema. Questa funzione ha la proprietà di determinare completamente la dinamica del

sistema: dati due istanti temporali t_1 e t_2 in cui lo stato del sistema è ben definito, l'integrale

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt, \quad (1.2.7)$$

detto azione, soddisfa il principio di minima azione (o *Principio di Hamilton*), ossia il principio secondo il quale il sistema si evolve in modo tale da minimizzare S .

Si dimostra che richiedere che S soddisfi il principio di minima azione equivale a imporre che venga rispettato il sistema di N equazioni differenziali al secondo ordine

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = 0 \quad (1.2.8)$$

dette equazioni di Eulero-Lagrange, dove

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \left(\frac{\partial L}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial L}{\partial q_i}, \dots, \frac{\partial L}{\partial q_N} \right) \quad (1.2.9)$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}, \dots, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \dots, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_N} \right) \quad (1.2.10)$$

Dalla definizione di L segue immediatamente la definizione di momento generalizzato $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ e di forza generalizzata $\mathbf{F} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}$, che permette di scrivere l'equazione (1.2.8) nella forma

$$\mathbf{F} - \dot{\mathbf{p}} = 0 \quad (1.2.11)$$

per cui risulta evidente l'analogia con la formulazione di Newton della meccanica classica.

Per poter parlare di integrali del moto è ora necessario citare il teorema di Noether [5]:

Teorema di Noether. *Sia \mathcal{M} una varietà regolare, $T\mathcal{M}$ il suo spazio tangente e $L : T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione regolare. Sia $\mathbf{h} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ un'applicazione regolare. Se (L, \mathcal{M}) ammette il gruppo di diffeomorfismi ad un parametro $\mathbf{h}^s : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, con $s \in \mathbb{R}$, $\mathbf{h}^0 = E$ ed E energia totale del sistema, allora le equazioni di Lagrange corrispondenti a L hanno un integrale primo $I : T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ nella forma*

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \frac{d\mathbf{h}^s(\mathbf{q})}{ds} \Big|_{s=0}. \quad (1.2.12)$$

Questo teorema ci assicura che se la Lagrangiana non dipende esplicitamente da una coordinata, che in tal caso viene detta *ciclica*, allora il momento coniugato ad essa è un integrale del moto.

Si dimostra che il sistema delle equazioni di Lagrange è equivalente ad un sistema di $2N$ equazioni al primo ordine nella forma:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \quad (1.2.13)$$

dove $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \equiv \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L$ è detta Hamiltoniana. Nei sistemi chiusi \mathcal{H} corrisponde alla somma di energia cinetica ed energia potenziale del sistema, mentre in quelli conservativi non dipende esplicitamente dal tempo e risulta una quantità conservata pari all'energia totale del sistema.

1.2.1 Integrali del moto per sistemi a simmetria sferica

La peculiarità dei sistemi a simmetria sferica è di essere invarianti per rotazioni nello spazio tridimensionale, questo si traduce matematicamente nell'invarianza della Lagrangiana per trasformazioni di $SO(3)$, un gruppo di Lie a 3 parametri indipendenti. Il teorema di Noether, allora ci assicura la presenza di 3 integrali del moto. Tenendo conto che i sistemi in seguito considerati non dipendono esplicitamente dal tempo, questi saranno invarianti per traslazioni temporali, perciò ancora una volta il teorema di Noether ci assicura la presenza di un integrale del moto, che in questo caso sarà l'energia totale.

Per i sistemi a simmetria sferica abbiamo già visto che il campo è nella forma $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = g(r)\hat{\mathbf{e}}_r$, per cui l'equazione del moto diventa

$$\ddot{\mathbf{r}} = g(r)\hat{\mathbf{e}}_r. \quad (1.2.14)$$

Se si considera il momento angolare per unità di massa, $\boldsymbol{\ell} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$, abbiamo che:

$$\dot{\boldsymbol{\ell}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = g(r)\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{e}}_r = 0, \quad (1.2.15)$$

ossia $\boldsymbol{\ell}$ è un vettore costante e le sue 3 componenti sono proprio i 3 integrali del moto previsti dal teorema di Noether. Il fatto che $\boldsymbol{\ell}$ nei sistemi a simmetria sferica sia sempre conservato ci permette di dedurre che le orbite da esso generate sono tutte planari e che il piano caratteristico di ogni orbita, detto piano orbitale, è perpendicolare a $\boldsymbol{\ell}$. Il problema si riduce perciò a un problema bidimensionale la cui Lagrangiana può essere scritta non in coordinate sferiche (r, θ, ϕ) , ma più semplicemente in quelle polari (r, ϕ) :

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \Phi(r), \quad (1.2.16)$$

dove \tilde{L} è la Lagrangiana per unità di massa e $\frac{d\Phi(r)}{dr} = -g(r)$.

1.2.2 Integrali del moto per sistemi a simmetria assiale

La peculiarità dei sistemi assi-simmetrici è di essere invarianti per rotazioni intorno ad un asse, scelto essere l'asse z per convenzione. Questo si traduce matematicamente nell'invarianza della Lagrangiana per trasformazioni di $SO(2)$, un gruppo di Lie a un parametro. Il teorema di Noether, allora ci assicura la presenza di un integrale del moto. Anche in questo caso tratteremo sistemi che non dipendono esplicitamente dal tempo, ossia invarianti per traslazioni temporali, perciò ancora una volta il teorema di Noether ci assicura la presenza dell'energia totale come integrale del moto.

Possiamo scrivere la Lagrangiana del sistema nelle coordinate cilindriche (R, z, ϕ) :

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}(\dot{R}^2 + \dot{z}^2 + R^2\dot{\phi}^2) - \Phi(R, z), \quad (1.2.17)$$

da cui si trova immediatamente che, essendo ϕ una coordinata ciclica, il momento coniugato p_ϕ , corrispondente alla componente del momento angolare totale parallela all'asse z , ℓ_z , è l'integrale del moto previsto dal teorema di Noether. Esplicitiamo ora l'Hamiltoniana di tale sistema,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\dot{R}^2 + \dot{z}^2) + \frac{\ell_z^2}{2R^2} + \Phi(R, z), \quad (1.2.18)$$

grazie alla quale possiamo definire il potenziale efficace

$$\Phi_{\text{eff}}(R, z) = \Phi(R, z) + \frac{\ell_z^2}{2R^2} \quad (1.2.19)$$

e riscrivere la Lagrangiana nella forma:

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}(\dot{R}^2 + \dot{z}^2) - \Phi_{\text{eff}}(R, z). \quad (1.2.20)$$

Risulta naturale chiedersi se per i potenziali assi-simmetrici siano E e ℓ_z gli unici integrali del moto possibili o se ne esistano altri derivanti da leggi di conservazioni meno evidenti dell'energia e della quantità di moto. Per poter rispondere a questa questione risulta inevitabile l'introduzione di ulteriori metodi investigativi, non puramente e necessariamente analitici, che tratteremo nel capitolo successivo.

Capitolo 2

Classificazione delle orbite stellari

Nello studio del comportamento generale di un sistema stellare, al fine di ottenere modelli realistici di galassie, è essenziale conoscere le caratteristiche delle orbite delle stelle che lo vanno a comporre.

Come spiegheremo in seguito nel capitolo, la principale distinzione tra le tipologie di orbite è quella tra regolari e caotiche, in quanto, se le prime sono sicuramente preponderanti e fungono da scheletro per la struttura del sistema stellare, è importante anche quantificare il contributo delle orbite caotiche per capire se esse possono essere o meno trascurate nella costruzione di modelli dinamici.

2.1 Classificazione orbite nello spazio delle fasi

Quando si parla di orbita nello spazio delle fasi $2N$ -dimensionale, si intende la curva $\Gamma(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t))$, dove $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ sono le soluzioni del problema di Cauchy (1.2.3). Nella sezione § 1.2, inoltre, abbiamo visto come la dimensionalità di $\Gamma(t)$ e il numero di integrali del moto isolanti siano strettamente correlati.

Per quanto riguarda i potenziali sferici introdotti in sezione § 1.2.1, la classificazione risulta notevolmente facilitata dal fatto che tutti gli integrali del moto sono noti ed analitici. In questo caso tutte le orbite sono quasi periodiche e quindi regolari.

Nel caso dei potenziali assi-simmetrici invece, la trattazione analitica vista in § 1.2.2 ci permette di trovare solamente E e ℓ_z come integrali del moto. Tuttavia esperimenti di integrazione numerica di orbite in potenziali assi-simmetrici simigliantissimi mostrano come risulti necessaria l'esistenza di una legge di conservazione ausiliaria, non ricavabile con i metodi della meccanica classica.

In Fig. 2.1 sono riportate sul piano meridionale (R, z) due orbite integrate in un

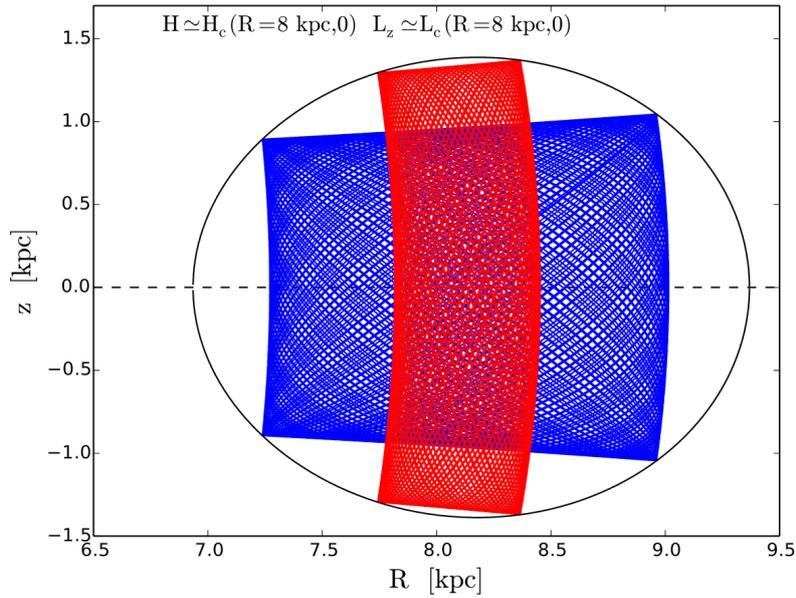


Fig. 2.1: Due orbite nel piano meridionale integrate nel potenziale assi-simmetrico $\Phi(R, z) = \frac{v_c^2}{2} \ln\left(R^2 + \frac{z^2}{q}\right)$, con $v_c = 220\text{km/s}$ e $q = 0.8$ [7]

potenziale schiacciato logaritmico ¹. La curva chiusa che si può notare in figura e che racchiude le due orbite rappresenta il bordo della superficie a velocità zero (*ZVS*). Tale superficie è identificata, per una qualunque energia fissata E , dall'equazione:

$$E = \Phi_{\text{eff}}, \quad (2.1.1)$$

per cui sul suo bordo le velocità si annullano. La *ZVS*, inoltre, delimita la regione di spazio ammessa per il moto, per cui, se effettivamente non esistesse un terzo vincolo oltre E e ℓ_z , allora le orbite riempirebbero densamente la regione delimitata dalla curva. Poiché questo non accade, deve necessariamente esistere un ulteriore vincolo che limita l'orbita in un sottospazio della regione delimitata dalla *ZVS*.

Non sempre, però, accade quanto visto in Fig. 2.1 e la regione permessa viene effettivamente densamente riempita, questo significa che l'esistenza di un terzo integrale del moto in potenziale assi-simmetrici non è sempre garantita e va eventualmente cercata attraverso tecniche non analitiche, che illustreremo in sezione § 2.2. Per questo motivo sotto l'effetto di potenziali assi-simmetrici si vanno a creare diverse famiglie di orbite le cui caratteristiche saranno illustrate in questa sezione.

¹Vedi [6] sezione §2.3.2

2.1.1 Orbite regolari

Chiamiamo regolari, o quasi periodiche o condizionatamente periodiche, quelle orbite che possiedono almeno N integrali isolanti, per cui nello spazio delle fasi avranno dimensione al più pari a $2N - N$ [8].

Le orbite regolari sono caratterizzate dal fatto che, a differenza di quelle che chiameremo caotiche in § 2.1.2, la loro evoluzione temporale è tale per cui se consideriamo un'orbita regolare e un'orbita perturbata rispetto ad essa, ossia un'orbita con condizioni iniziali molto simili a quelle dell'orbita regolare, allora con lo scorrere del tempo l'orbita perturbata si manterrà comunque vicina all'orbita imperturbata.

Per il problema del terzo integrale del moto in potenziali assi-simmetrici sarà proprio l'esistenza di eventuali orbite regolari a fornirci la prima indicazione riguardo la presenza e l'identità dell'integrale.

La famiglia delle orbite regolari è a sua volta distinta in:

Orbite periodiche (o risonanti). Chiamiamo periodiche le orbite tali per cui le frequenze orbitali $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_R, \Omega_z, \Omega_\phi)$ ² sono tra loro commensurabili, ossia esiste un vettore con componenti intere \mathbf{n} tale che $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} = 0$ [9]. Per queste orbite esiste, quindi, un periodo T , tale che $\Gamma(t) = \Gamma(t + T)$.

Le orbite periodiche sono particolarmente interessanti perchè possiedono un numero di integrali del moto maggiore di N e perchè, essendo stabili, all'interno di una galassia generano gruppi di orbite intorno ad esse [8], le cosiddette orbite intrappolate da una risonanza.

Orbite intrappolate da una risonanza. Le orbite intrappolate da una risonanza, dette anche *resonantly trapped* o più semplicemente *trapped*, sono la famiglia di orbite costituita dalle orbite periodiche sopra citate, che hanno più di N integrali del moto, e dalle orbite che si generano andandole a perturbare, che avranno N integrali del moto. Quest'ultime, nello spazio delle fasi vanno ad occupare le aree strettamente limitrofe all'orbita periodica, perciò vengono spesso usate come strumento di ricerca per l'individuazione di eventuali orbite perfettamente periodiche.

²Dato un vettore posizione generico $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_i, \dots)$, se la coordinata q_i compie un'oscillazione (o rotazione) completa in un tempo T_i , possiamo definire la frequenza orbitale:

$$\Omega_i = \frac{2\pi}{T_i},$$

perciò nel nostro caso saranno $(\Omega_R, \Omega_z, \Omega_\phi) = (\frac{2\pi}{T_R}, \frac{2\pi}{T_z}, \frac{2\pi}{T_\phi})$

Orbite non intrappolate da una risonanza. Sono queste le orbite che in seguito, per semplicità di trattazione, chiameremo regolari. Esse obbediscono a N integrali del moto e a differenza di quelle *trapped* nello spazio delle fasi non sono confinate in prossimità delle orbite periodiche.

2.1.2 Orbite caotiche

Chiamiamo caotiche, o irregolari, quelle orbite che, dato un potenziale N -dimensionale, possiedono un numero di integrali isolanti minore di N [8], per cui la varietà su cui giace $\Gamma(t)$ ha dimensione maggiore di N .

Le orbite caotiche, come accennato in § 2.1.1, sono caratterizzate dal fatto che, a differenza di quelle regolari, la loro evoluzione temporale dipende fortemente dalle condizioni iniziali, ovvero se consideriamo due orbite caotiche con condizioni iniziali molto simili tra loro, allora con lo scorrere del tempo queste si allontaneranno esponenzialmente.

2.2 Metodi di classificazione

Di seguito illustriamo tre possibili metodi di classificazione per le orbite stellari, riferendoci in particolare a potenziali assi-simmetrici del tipo $\Phi(R, z)$.

2.2.1 L'esponente di Lyapunov

Un metodo puramente quantitativo di caratterizzazione di un'orbita è il calcolo dell'*esponente di Lyapunov* [10]. Quest'ultimo sfrutta il concetto di caos deterministico, ossia il fatto che due orbite $\Gamma_1(t)$ e $\Gamma_2(t)$ generate nello stesso potenziale, ma con condizioni iniziali, al tempo t_0 , distanti fra loro $r_0 = |(\mathbf{x}_{0_1}, \mathbf{v}_{0_1}) - (\mathbf{x}_{0_2}, \mathbf{v}_{0_2})|$, con r_0 molto piccolo, si allontanano esponenzialmente con lo scorrere del tempo secondo la formula:

$$r(t) = r_0 e^{\lambda(t-t_0)}, \quad (2.2.1)$$

dove λ è proprio l'esponente di Lyapunov; il suo inverso $\tau \equiv \lambda^{-1}$ è detto tempo di Lyapunov in quanto misura il tempo caratteristico in cui si manifesta il carattere caotico dell'orbita.

La classificazione di orbite attraverso questo metodo avviene tramite lo studio dell'andamento di:

$$\lambda(t) = \frac{\ln[r(t)/r_0]}{t - t_0}, \quad (2.2.2)$$

da cui l'esponente di Lyapunov è deducibile dal limite:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t). \quad (2.2.3)$$

In figura Fig. 2.2 è riportato l'andamento tipico di $\log \lambda$ in funzione di $\log t$ per un'orbita regolare (curva 1) e un'orbita caotica (curva 2), da cui possiamo ricavare che per un'orbita caotica l'andamento sarà del tipo $\lambda(t) \approx cost$, mentre quelle regolari avranno un andamento decrescente in quanto il rapporto $r(t)/r_0$ non cresce nel tempo.

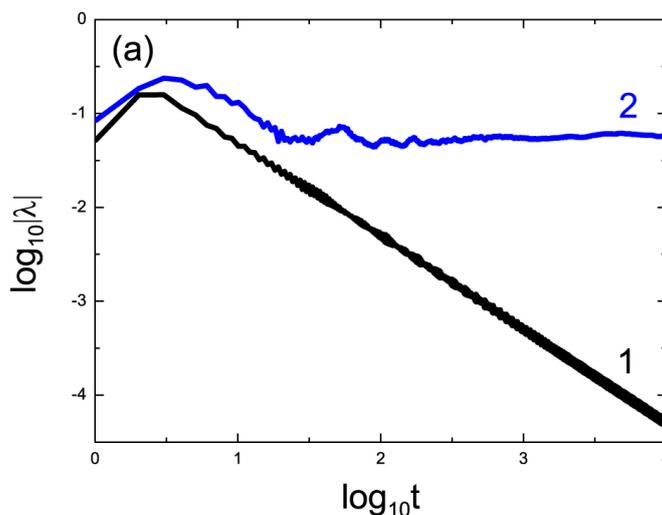


Fig. 2.2: L'andamento di $\lambda(t)$ per un'orbita regolare (1) e per un'orbita caotica 2. [11]

Sebbene questo metodo sia molto versatile in quanto applicabile a orbite in qualsiasi potenziale, può risultare abbastanza dispendioso per quanto riguarda i tempi di calcolo, dato che λ è formalmente definito per $t \rightarrow \infty$. Inoltre, il suo impiego risulta alquanto limitato per quanto riguarda le orbite regolari, dato che, per esempio, non può darci informazioni sull'eventuale esistenza di integrali del moto al di là del terzo.

2.2.2 L'integrale di correlazione

Il metodo dell'integrale di correlazione permette di calcolare direttamente la dimensionalità di $\Gamma(t)$ e fu proposto per la prima volta da Grassberger & Procaccia [12]. Grazie ai lavori indipendenti di Barnes [13] e Carpintero [8], venne, poi, comprovata la sua notevole efficacia nello studio della dimensione delle orbite stellari.

Consideriamo ora l'orbita $\Gamma(t)$ campionata in N punti $\zeta_i = (\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i)$, con $i = 1, \dots, N$, e r una distanza arbitraria nello spazio delle fasi, l'integrale di correlazione

$C(r)$ è determinato numericamente dalla formula ([12]):

$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_i \sum_{i \neq j} \Theta(r - |\zeta_i - \zeta_j|), \quad (2.2.4)$$

dove Θ è la funzione a scalino di Heaviside. Geometricamente l'integrale di correlazione rappresenta la funzione cumulativa del numero di punti separati al più dalla distanza r nello spazio delle fasi, tale concetto sarà chiarito meglio in sezione § 3.2.

Come trovarono Grassberger & Procaccia, la dimensione di $\Gamma(t)$ emerge osservando l'andamento di $C(r)$ agli r piccoli, che va con legge di potenza del tipo r^D con D che corrisponde esattamente alla dimensione della varietà su cui giace l'orbita nello spazio delle fasi.

Come vedremo in sezione § 3.2, la potenza del metodo sta nel fatto che D , ricavabile attraverso un *fit* lineare nel grafico $\log C(r) - \log r$, fornisce esattamente la dimensione di $\Gamma(t)$, perciò non si limita alla classificazione dell'orbita ma fornisce esplicitamente la sua sua dimensione, da cui si possono ricavare immediatamente gli eventuali integrali del moto.

Sempre grazie alla scala logaritmica possiamo intuire la necessità di considerare solo l'andamento agli r piccoli per riuscire a ricavare D . Come possiamo notare in Fig. 2.3, infatti, per gli r grandi l'integrale di correlazione cambia andamento e tende a saturare intorno ad 1.

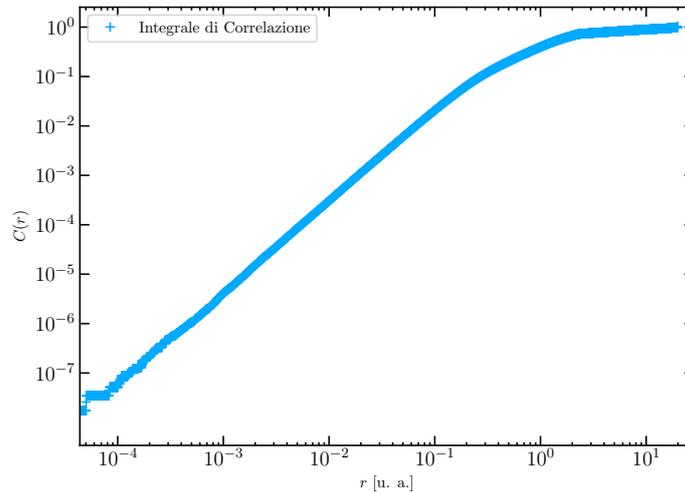


Fig. 2.3: Andamento tipico dell'integrale di correlazione in scala logaritmica. Nella parte più a destra del grafico si può notare come l'andamento tenda ad appiattirsi.

2.2.3 La superficie di sezione

Il metodo della Superficie di Sezione (o mappa di Poincaré) è sicuramente uno dei più noti e usati per classificare orbite in potenziali assi-simmetrici.

Abbiamo già visto in sezione § 1.2.2 che E , energia totale, e ℓ_z , componente z del momento angolare, sono due integrali del moto per qualsiasi potenziale assi-simmetrico, perciò la varietà su cui giace $\Gamma(t)$ può essere al più 4-dimensionale.

Chiamiamo superficie di sezione il piano (R, \dot{R}) su cui andremo a tracciare i punti di $\Gamma(t)$ che corrispondono ad attraversamenti del piano equatoriale $z = 0$ con $\dot{z} > 0$. Il fatto che i punti sian tracciati solo per $\dot{z} > 0$ garantisce che, dati E e ℓ_z , ogni punto nella superficie di sezione corrisponda a una sola orbita. Dato che in questo lavoro siamo principalmente interessati alla morfologia e alla topologia delle tracce delle orbite, e dato che mostriamo solitamente una sola orbita in ogni superficie di sezione, nelle superfici di sezione mostrate in questa tesi tracciamo punti per tutti gli attraversamenti, sia con $\dot{z} > 0$ che con $\dot{z} < 0$.

L'esistenza di un terzo integrale del moto per il potenziale considerato si deduce dalla dimensionalità della traccia di $\Gamma(t)$ nella superficie di sezione. Le orbite regolari nella superficie di sezione sono individuabili attraverso tracce 1-dimensionali, ossia curve continue: questo è dovuto al fatto che il moto è costretto da un ulteriore vincolo ($\dot{R} = \dot{R}(R, z, \dot{z})$), da cui l'esistenza del terzo integrale del moto. Le orbite periodiche, avendo un integrale del moto in più rispetto a quelle regolari, sono individuabili attraverso una serie di punti isolati, spazati tra loro. Intorno a tali punti vanno a svilupparsi le tracce delle orbite *resonantly trapped*, che si presentano come delle isole, o *loop* (vedi Fig. 2.4 pannello di destra), ossia tracce continue, come quelle delle altre orbite regolari, ma chiuse intorno al punto corrispondente all'orbita periodica. Le orbite caotiche, infine, avendo solamente E ed ℓ_z come integrali del moto, si mostrano come una serie di punti irregolari che allo scorrere del tempo vanno a ricoprire densamente una porzione di spazio della superficie di sezione.

In Fig. 2.4 sono riportate le tracce sulle superfici di sezione di tre orbite generate da un potenziale di Plummer complesso shiftato (vedi § 3.1). Le orbite e le relative superfici di sezione, che saranno presentate in [14], sono state calcolate numericamente da R. Pascale [9] mantenendo fissati E e ℓ_z e facendo variare R e p_R nelle condizioni iniziali.

Questo metodo, sebbene molto immediato, risulta di per sè abbastanza dispendioso nel caso si voglia classificare un campione vasto di orbite, in quanto richiede un'analisi puramente *visiva* delle superfici di sezione. Quello che ci proponiamo con questa tesi è di verificare se sia possibile automatizzare il processo applicando il metodo dell'integrale di correlazione (vedi § 2.2.2) ai punti della traccia di $\Gamma(t)$ sulla

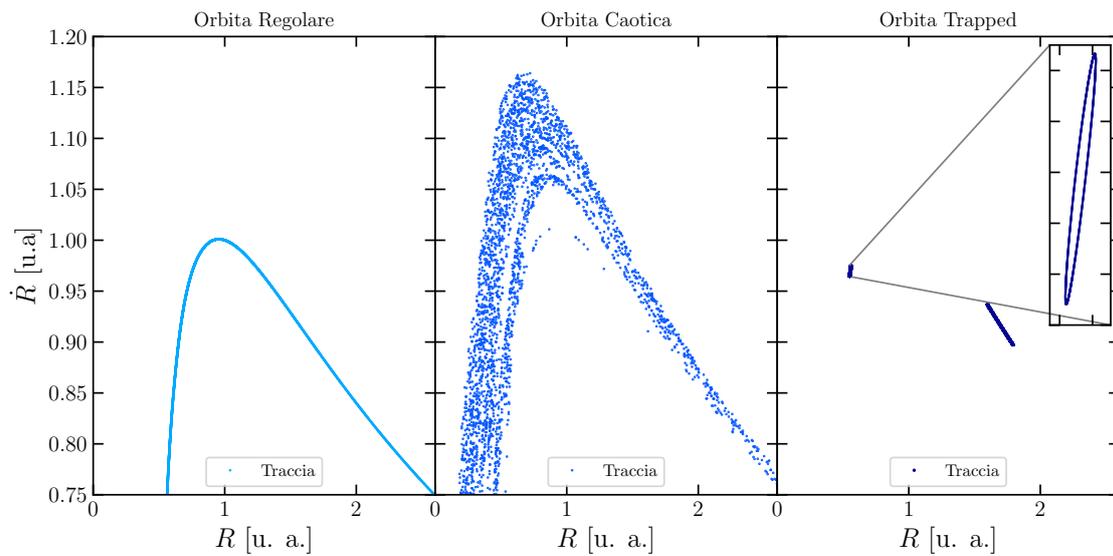


Fig. 2.4: Confronto delle superfici di sezione tratte da [9] di un'orbita regolare (sinistra), una caotica (centro) e una *resonantly trapped* (destra). Si noti che per riuscire a visualizzare il loop di quest'ultima è stato necessario eseguire uno zoom 25x.

superficie.

Sottolineiamo, che, nell'ambito dello studio dei potenziali galattici, il metodo della superficie di sezione può essere applicato solamente ai sistemi assi-simmetrici, poichè riguardo ad essi è garantita l'esistenza di due integrali isolanti, e risulta inutile quando si vanno a studiare, per esempio, potenziali triassiali.

Capitolo 3

Il caso di studio

Nella sezione § 2.2.3 ci siamo chiesti se fosse possibile automatizzare il processo di classificazione delle orbite tramite le superfici di sezione.

In questo capitolo spiegheremo come sia stato possibile sviluppare un algoritmo, utilizzando il linguaggio `python`, che adempisse a questo scopo. La scrittura e l'implementazione dell'algoritmo sono state ispirate dal lavoro di Carpintero [8], per poi essere ottimizzate per lavorare su superfici di sezione di orbite in potenziali assi-simmetrici.

Mostreremo, inoltre, l'efficacia del codice in cui questo algoritmo è implementato, applicandolo a tre orbite di carattere diverso, integrate numericamente in un potenziale assi-simmetrico: il potenziale di Plummer *shiftato*, ossia lo *shift* complesso del potenziale di Plummer.

3.1 Il potenziale di Plummer complessificato

E' possibile riuscire a ricavare l'espressione di alcuni potenziali schiacciati a partire da potenziali a simmetria sferica attraverso il metodo dello sfasamento (o *complex shift* [15]). Dati \mathbf{x} un vettore posizione, $\Phi(\mathbf{x})$ un potenziale gravitazionale e $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ una terna di numeri reali, la complessificazione consiste nello *shift*

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} - i\mathbf{a} \quad \Longrightarrow \quad \Phi(\mathbf{x}) \rightarrow \Phi(\mathbf{x} - i\mathbf{a}), \quad (3.1.1)$$

dove i è l'unità immaginaria, $i^2 = -1$. Se Φ soddisfa l'equazione dei Poisson (1.1.7) allora $\Phi(\mathbf{x} - i\mathbf{a})$ genera due coppie potenziale-densità date dalla parte reale e dalla parte immaginaria di Φ e di ρ .

Applicando lo *shift* al potenziale di Plummer (1.1.8) con lunghezza di scala b , scegliendo $\mathbf{a} = (0, 0, a)$, con $0 \leq a \leq b$, e prendendo solo la parte reale, otteniamo il

potenziale di Plummer *shiftato*:

$$\Phi_{PS}(R, z) = -\frac{GM}{b}\psi_{PS}(R, z), \quad (3.1.2)$$

dove

$$\psi_{PS}(R, z) = b\sqrt{\frac{d + b^2 + R^2 + z^2 - a^2}{2d^2}}, \quad (3.1.3)$$

con

$$d = \sqrt{(b^2 - a^2 + R^2 + z^2)^2 + 4a^2z^2}, \quad (3.1.4)$$

e M è la massa totale del sistema. Tramite l'equazione (1.1.7) possiamo ricavare la densità di massa che genera questo potenziale:

$$\rho_{PS} = \frac{3M\psi_{PS}}{4\pi b^3} \left[\psi_{PS}^4 - \frac{10a^2z^2}{d^4} + \frac{5a^4z^4}{d^8\psi_{PS}^4} \right]. \quad (3.1.5)$$

In Fig. 3.1 riportiamo un esempio di superfici di iso-potenziale e iso-densità per un potenziale di Plummer *shiftato* con $a/b = 0.5$

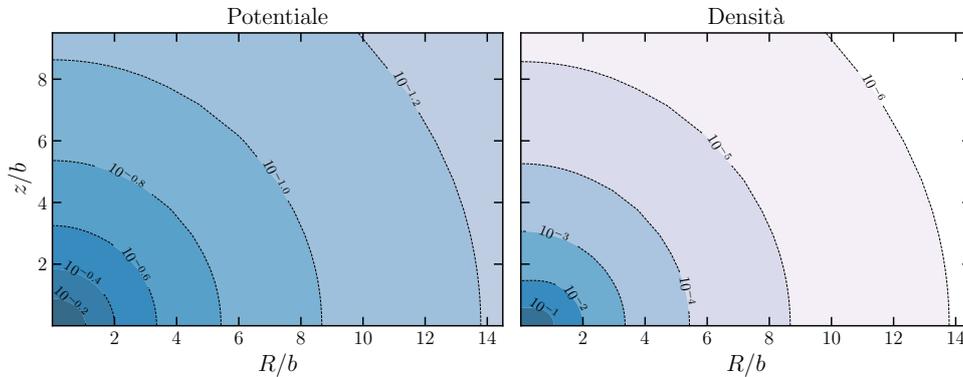


Fig. 3.1: A sinistra: le superfici iso-potenziali di un potenziale di Plummer *shiftato* normalizzato a $\Phi(0,0)$ con $a/b = 0.5$. A destra le superfici di iso-densità della corrispondente densità rinormalizzata a $\rho(0,0)$.

3.1.1 Il campione di orbite

In questa tesi utilizziamo un campione di orbite integrate nel potenziale assi-simmetrico (3.1.2) con $a/b = 0.5$. Tale integrazione numerica, attraverso il metodo *Runge-Kutta* al quarto ordine con *timestep* adattivo [16], e il calcolo delle loro tracce nella superficie di sezione è stata realizzata da R. Pascale e presentata in [9] e [14]. Le orbite

sono state classificate in base a ispezione visuale delle loro tracce nella superficie di sezione.

	Regolare	Raotica	Trapped
R/b	0.35	0.4	0.28
z/b	0	0	0
$p_R/\sqrt{GM/b}$	0	0	0.18
$E/(GM/b)$	-0.05	-0.05	-0.05
ℓ_z/\sqrt{GMb}	0.001	0.001	0.001

Tab. 3.1: Condizioni iniziali delle tre orbite oggetto di studio.

In Tab. 3.1 riportiamo le condizioni iniziali delle tre orbite oggetto di studio, con p_R momento coniugato a R , e di cui di seguito riporteremo i risultati dell'analisi tramite l'integrale di correlazione. Dalla tabella si può notare che i valori di E e ℓ_z coincidono per tutte e tre le orbite, sebbene queste presentino un carattere diverso. Dunque, tali grandezze non sono sufficienti per classificare l'orbita, ma occorre ricercare un terzo integrale del moto attraverso metodi non analitici. Sottolineiamo, inoltre, che p_z non fa parte delle condizioni iniziali sopra specificate poiché è determinato univocamente dall'equazione (3.1.2).

In Fig. 3.2 riportiamo la tracce sulla superficie di sezione delle tre orbite: guardando il pannello di destra si può notare chiaramente la struttura ad isole dell'orbita *trapped*.

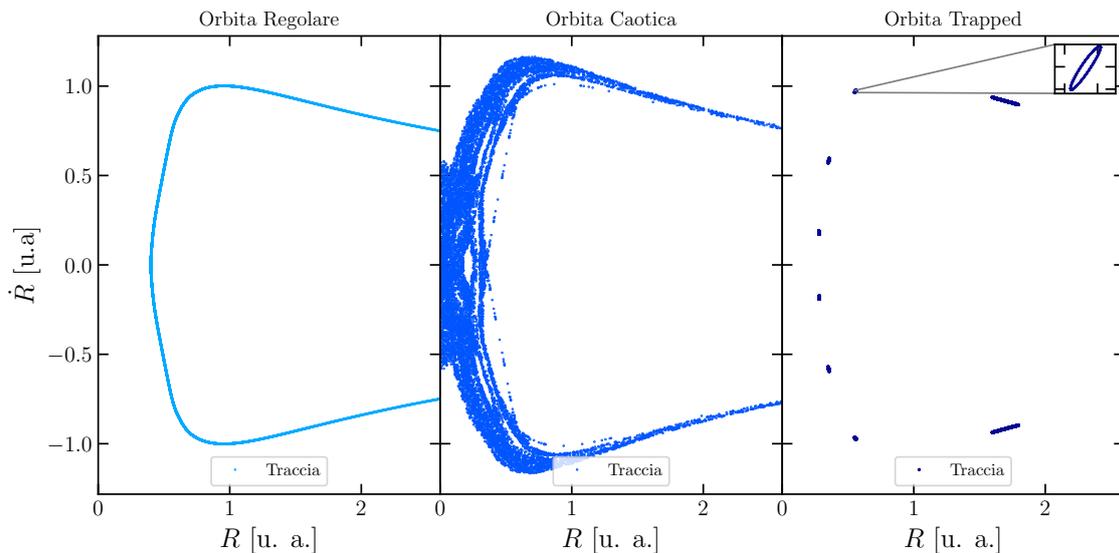


Fig. 3.2: Tracce sulla superficie di sezione dell'orbita regolare (sinistra), dell'orbita caotica (centro) e di quella *trapped* (destra).

3.2 L'implementazione del metodo

Basandoci principalmente sul lavoro di Carpintero [8], illustriamo qui di seguito le principali tecniche necessarie per l'implementazione numerica del metodo.

In § 2.2.2 abbiamo visto come l'integrale di correlazione si comporti come una legge di potenza:

$$C(r) = C_0 r^D, \quad (3.2.1)$$

dove D è la dimensione della varietà su cui giace l'orbita $\Gamma(t)$, C_0 è una costante di normalizzazione e r è la distanza tra due punti generici dell'orbita misurata nello spazio delle fasi

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + \eta^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}, \quad (3.2.2)$$

dove η è una costante con le dimensioni del tempo, necessaria per rendere omogenee le grandezze sotto radice. Come mostrato da Carpintero [8], $\sqrt{\sigma_x/\sigma_v}$ risulta essere un valore ragionevole per η , con σ_x e σ_v deviazioni standard rispettivamente della posizione \mathbf{x} e della velocità \mathbf{v} , tuttavia i risultati non sono particolarmente dipendenti da esso, perciò da qui in poi assumeremo $\eta = \sqrt{b^3/(GM)}$, dove b e M sono i parametri del potenziale qui considerato.

Riprendendo l'equazione (3.2.1), risulta particolarmente conveniente il passaggio in scala logaritmica, che trasforma la relazione precedente in

$$\log C(r) = D \log r + \log C_0, \quad (3.2.3)$$

in modo tale che il *fit* si riduca ad una più semplice regressione lineare, dove D corrisponderà alla pendenza, o *slope*, della retta.

Sottolineiamo, infine, che nell'implementazione classica del metodo, ossia nel calcolo dell'integrale di correlazione sui punti di $\Gamma(t)$ sull'intero spazio delle fasi, è necessario prestare attenzione al *timestep* usato, in quanto punti troppo vicini dal punto di vista temporale aumentano il rischio di autocorrelazione.

3.2.1 I vantaggi dello studio dell'integrale di correlazione sulla superficie di sezione

Nel caso in cui si sia interessati solamente a classificare le orbite come caotiche o regolari, e non a determinare il numero di integrali del moto dell'orbita, quello che proponiamo con questa tesi è di applicare il metodo dell'integrale di correlazione alla traccia sulla superficie di sezione e non all'orbita $\Gamma(t)$ nell'intero spazio delle fasi. In questo caso, quindi, l'esponente D dell'integrale di correlazione $C(r) \propto r^D$ indica la

dimensione della varietà su cui giace la traccia, quindi $D = 1$ per un'orbita regolare e $D = 2$ per un'orbita caotica.

Tale scelta è stata suggerita dal fatto di poter ottenere alcuni importanti vantaggi.

In primo luogo, il fatto che, seppur trattando punti in coordinate cilindriche, considerando solo il piano $R - \dot{R}$ non abbiamo bisogno di apportare correzioni alla metrica (3.2.2), perciò possiamo determinare r attraverso la distanza euclidea:

$$r = \sqrt{R^2 + \eta^2 \dot{R}^2}, \quad (3.2.4)$$

dove, come visto prima, η è una costante necessaria per rendere omogenee le grandezze sotto radice e che possiamo porre uguale a $\sqrt{b^3/(GM)}$ senza perdere di generalità.

In secondo luogo il fatto che i punti della traccia di $\Gamma(t)$ sulla superficie di sezione sono già di per se ben spazati temporalmente, perciò non dobbiamo preoccuparci di eventuali autocorrelazioni dipendenti al valore del *timestep* utilizzato nell'integrazione.

Infine, considerando solo i punti della traccia della superficie di sezione riduciamo notevolmente il numero di punti da considerare nel calcolo, senza perdere informazioni riguardo al carattere dell'orbita. Specifichiamo ora che le superfici di sezione delle orbite da noi considerate hanno un numero totale N di punti dell'ordine di 10^5 punti.

3.2.2 La discretizzazione di r

E' possibile implementare il calcolo diretto dell'integrale di correlazione tramite la formula (2.2.4), costruendo $C(r)$ come distribuzione cumulativa di tutte le distanze r tra i punti della traccia, tuttavia questo metodo è risultato estremamente dispendioso dal punto computazionale già per la singola orbita. Nell'idea di sfruttare l'algoritmo per un'approfondita investigazione dello spazio delle fasi di un singolo potenziale, che può richiedere la classificazione di un ampio numero di orbite (ad esempio 10^5 , come in [14]), questo metodo nella pratica può risultare inapplicabile.

Per i suddetti motivi abbiamo deciso di sfruttare la suddivisione in *bin* delle possibili distanze, calcolate con la formula (3.2.4), ottenendo così una considerevole accelerazione dei tempi di calcolo dell'algoritmo. Per riuscire a tenere conto del fatto che l'andamento più significativo di $C(r)$ si ha per gli r piccoli, abbiamo scelto di utilizzare un *binnaggio* spaziato in scala logaritmica in modo da riuscire a campionare allo stesso modo ogni ordine di grandezza.

Dopo aver suddiviso la scala delle distanze in n_{bin} , abbiamo contato quante delle distanze reciproche tra i punti della traccia ricadessero all'interno di ognuno degli intervalli. In questo modo l'integrale di correlazione si riduce al semplice integrale di tale istogramma, ossia un istogramma cumulativo. In altre parole, le occorrenze di $C(r)$ costruito in questo modo non contano solamente le distanze che ricadono all'interno del singolo *bin*, ma del *bin* considerato e di tutti i precedenti, proprio come richiede la funzione di Heaviside in formula (2.2.4).

Essenziale per la tecnica del *binnaggio* è la scelta di *bin* di ampiezza corretta: *bin* troppo piccoli non permettono di accelerare i tempi di calcolo sensibilmente, mentre *bin* troppo larghi possono portare a un integrale di correlazione troppo poco campionato. Bisogna, inoltre, valutare correttamente l'estremo inferiore del primo *bin*, ovvero da dove iniziare a discretizzare nella variabile r . Mentre nel caso dell'orbita regolare e caotica discretizzando in r nel range $[10^{-3}, 10^1]$ in scala logaritmica abbiamo ottenuto buone stime dell'integrale di correlazione e della dimensione D , lo studio del carattere dell'orbita *trapped* nel suddetto range porta ad una situazione come quella in Fig. 3.3, dove la retta con *slope* 1, ossia la dimensione attesa per orbite *trapped*, coincide con l'andamento della curva per nemmeno un ordine di grandezza. Guardando la parte iniziale della curva, questa presenta una crescita molto più ripida rispetto ai casi caotico e regolare, per i cui andamenti si vedano Fig. 3.6 e Fig. 3.8, questo significa che all'interno dei *bin* iniziali ricadono molte più occorrenze rispetto agli altri due casi.

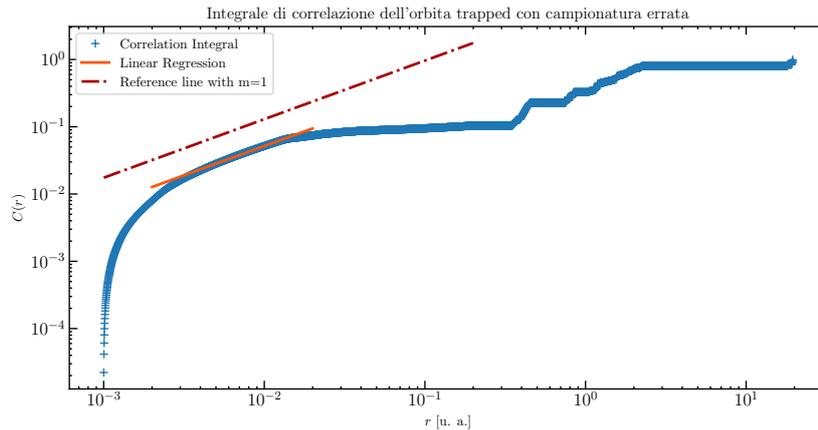


Fig. 3.3: Andamento dell'integrale di correlazione in funzione di r dell'orbita *trapped* con una campionatura errata. La retta tratteggiata rossa è una retta con *slope* 1 posta come riferimento. La retta arancione corrisponde alla regressione lineare.

Osservando la traccia dell'orbita quasi periodica in Fig. 3.2, abbiamo notato come i punti siano tra loro molto più ravvicinati che nelle altre due orbite, questo

rende chiaro perchè il *binnaggio* nel range $[10^{-3}, 10^1]$ risulti troppo grossolano per un'orbita *trapped* e che questa necessita di un maggior numero di *bin* alle piccole distanze. Utilizzando il range $[10^{-6}, 10^1]$ siamo riusciti ad ottenere l'andamento corretto mostrato Fig. 3.4, senza produrre effetti significativi sulle altre orbite, perciò si è scelto di non differenziare l'intervallo di *binnaggio* per i tre casi.

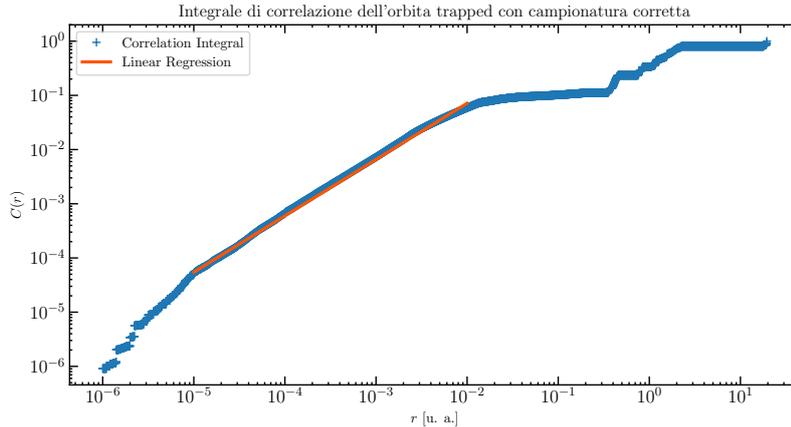


Fig. 3.4: Andamento dell'integrale di correlazione in funzione di r dell'orbita *trapped* con campionatura corretta.

3.2.3 La finestra mobile e la minimizzazione del χ^2

Nel paragrafo precedente abbiamo parlato di quanto sia importante l'intervallo di valori su cui eseguire il *fit* lineare con cui ricavare la dimensione della varietà su cui giace la traccia di $\Gamma(t)$ nella superficie di sezione. Dato che non esiste un intervallo universale, comune a tutte le orbite, su cui andare ad eseguire la regressione lineare, abbiamo dovuto escludere la scelta "manuale" di tale *range*, che avrebbe limitato fortemente l'applicabilità del codice. Ispirandoci al lavoro di Carpintero [8], abbiamo deciso di sfruttare la tecnica della ricerca del minimo χ^2 tramite finestra mobile.

Chiamiamo finestra l'intervallo: $[r_i, \dots, r_{i+M}] \times [C(r_i), \dots, C(r_{i+M})]$, dove gli r_i sono i valori medi dei *bin* usati per costruire l'integrale di correlazione $C(r_i)$ con il metodo dell'istogramma cumulativo e M è il numero di *bin* che vanno a comporre la finestra. Nella costruzione di tale finestra abbiamo tenuto conto del fatto che M dovesse essere sufficientemente grande da ottenere un intervallo di valori statisticamente significativo. Sulla finestra abbiamo poi eseguito una regressione lineare del tipo:

$$y = mx + q, \quad (3.2.5)$$

dove m è il coefficiente e angolare q l'intercetta dell'asse verticale, tramite la tecnica di minimizzazione del χ^2 (vedi App. A).

Abbiamo ripetuto la stessa operazione scalando r_i per ogni $i = 0, \dots, n_{bin} - M$, e abbiamo espresso l'andamento del χ^2 in funzione del primo *bin* (r_i) come mostrato in Fig. 3.5.

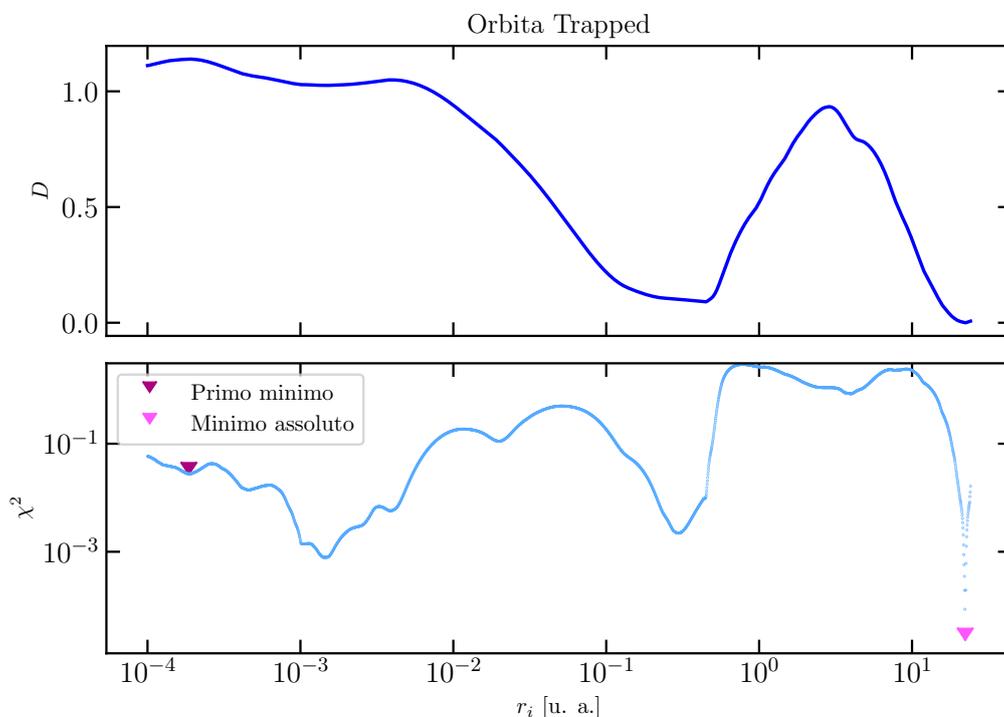


Fig. 3.5: Nel pannello in alto: l'andamento di D (calcolato come *slope* della retta di *fit* in funzione del primo *bin* della finestra mobile). Nel pannello in basso: l'andamento del χ^2 calcolato su tutta la finestra in funzione del primo *bin*.

Sceghieremo, allora, come parametri di *best fit* quei parametri per cui χ^2 presenta un minimo. Tuttavia, come si può notare in Fig. 3.5, e come nota anche Carpintero [8], l'andamento di χ^2 presenta più di un minimo nella maggior parte dei casi, perciò risulta fondamentale riuscire a individuare quello giusto. Per fare ciò basta ricordare che l'integrale di correlazione fornisce informazioni realmente attendibili sulla dimensionalità della curva analizzata solamente nel limite per $r \rightarrow 0$, dunque a livello computazionale sarà sufficiente scegliere come minimo χ^2 il primo minimo che si presenta.

Possiamo trovare conferma di quanto appena riportato nei grafici in Fig. 3.5, che mostrano, per l'orbita *trapped* (riferimento: Tab. 3.1), l'andamento del χ^2 e della dimensione D , calcolata come *slope* della retta di *fit* nella corrispettiva finestra. Come accennato in § 3.2.1, per un'orbita di questo tipo ci aspettiamo una traccia con $D = 1$. Scegliendo non il primo minimo (*bordeaux*), ma il minimo assoluto (*rosa*) del χ^2 , otteniamo $D \approx 0$, proprio a causa del fatto che a grandi distanze $C(r)$

tende a saturare. Le prove sugli altri tipi di orbite hanno confermato che è proprio il primo minimo di χ^2 a fornire le informazioni corrette riguardo la dimensionalità della traccia.

Infine, riportiamo in Tab. 3.2 alcuni dei valori ottenuti al variare di M , numero di bin della finestra, e di n , numero di bin totali. Attraverso numerose prove abbiamo scelto la combinazione $M = 500$ e $n_{bin} = N/4$, dove N ricordiamo essere il numero di punti della traccia dell'orbita sulla superficie di sezione.

M	n_{bin}	Orbita regolare	Orbita coatica	Orbita <i>trapped</i>
200	2000	1.5 ± 0.6	2.1 ± 0.6	0.8 ± 0.6
350	2000	1.0 ± 0.2	1.9 ± 0.2	0.9 ± 0.2
500	2000	1.01 ± 0.14	1.86 ± 0.14	0.77 ± 0.14
200	2500	1.6 ± 0.7	2.1 ± 0.7	0.8 ± 0.7
350	2500	1.1 ± 0.3	1.9 ± 0.3	0.9 ± 0.3
700	2500	1.01 ± 0.11	1.86 ± 0.11	0.11 ± 0.11
500	N/2	1.1 ± 0.4	1.9 ± 0.3	1.0 ± 0.3
500	N/4	1.10 ± 0.18	1.86 ± 0.16	1.14 ± 0.17

Tab. 3.2: Alcuni esempi dei valori di D ottenuti al variare di M e n_{bin} nella finestra mobile

3.3 Risultati

Per concludere questo capitolo riportiamo ora i valori attesi e i risultati ottenuti applicando l'algoritmo alle tre orbite in Tab. 3.1.

3.3.1 Valori attesi

Nel caso di un potenziale assi-simmetrico, abbiamo visto in sezione § 2.2.3, la dimensione della traccia di $\Gamma(t)$ sulla superficie di sezione dipende dal numero di integrali del moto. In particolare, abbiamo trovato che le orbite regolari e *trapped* hanno una traccia unidimensionale, mentre quelle irregolari (o caotiche) hanno una traccia bidimensionale.

Calcolando l'integrale di correlazione (2.2.4) delle orbite in Tab. 3.1 ed eseguendo il *fit* lineare sulla (3.2.3), come illustrato in sezione § 3.2, ci aspettiamo allora che la *slope* m coincida con la dimensione D della traccia. Attraverso il *fit* lineare riusciamo anche a ricavare l'intercetta q delle rette, che costituisce un semplice fattore di normalizzazione e non fornisce alcun risultato fisico rilevante, perciò su di essa non ci soffermeremo.

3.3.2 Valori ottenuti

Riassumiamo in Tab. 3.3 i risultati ottenuti dal *fit* sull'integrale di correlazione calcolato per le tre orbite integrate nel potenziale di Plummer *shiftato* con condizioni iniziali in Tab. 3.1.

	Orbita regolare	Orbita caotica	Orbita <i>trapped</i>
m	1.10 ± 0.18	1.86 ± 0.16	1.14 ± 0.17
q	-0.2 ± 0.5	0.2 ± 0.3	0.9 ± 0.7

Tab. 3.3: Tabella riassuntiva valori dei parametri di *best fit* con le rispettive incertezze.

Confrontiamo ora i risultati ottenuti con i valori attesi.

Orbita regolare. Come si può notare in Tab. 3.3 siamo riusciti a ottenere quanto atteso:

$$D_{att} = 1 \quad D_{calc} = 1.10 \pm 0.18.$$

Il grafico nel pannello di destra in Fig. 3.6 mostra visivamente la bontà del *fit* lineare nell'intervallo di valori significativo.

Orbita caotica. Anche per l'orbita caotica abbiamo ottenuto D in ottimo accordo con il valore atteso:

$$D_{att} = 2 \quad D_{calc} = 1.86 \pm 0.16.$$

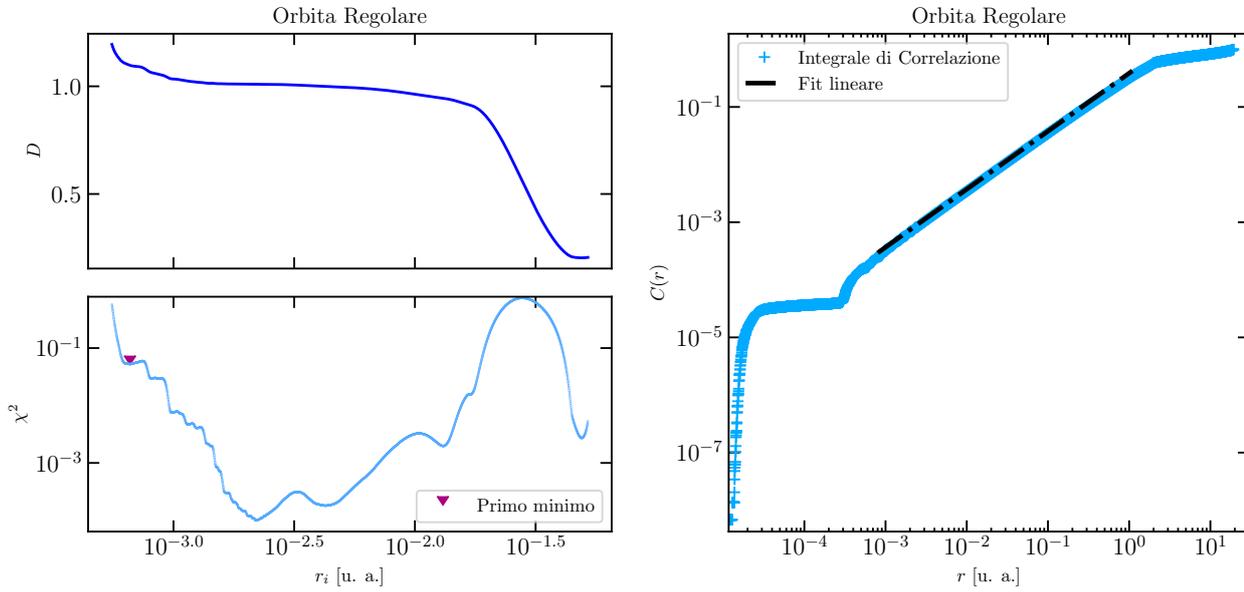
Analogamente al caso dell'orbita regolare, il grafico nel pannello a destra in Fig. 3.7 mostra visivamente la concordanza tra il *fit* lineare e l'andamento dell'integrale di correlazione in scala logaritmica.

Orbita *trapped*. L'orbita *trapped* funge da ulteriore conferma della validità del nostro algoritmo, dato che:

$$D_{att} = 1 \quad D_{calc} = 1.14 \pm 0.17.$$

Anche per quanto riguarda l'orbita *trapped* il *fit* lineare è in ottima corrispondenza con l'andamento di $\log C(r)$, come possiamo vedere nel pannello a destra in Fig. 3.8. Notiamo, inoltre, dallo stesso grafico una delle caratteristiche peculiari dell'orbita *trapped*, ossia delle discontinuità nell'andamento dell'integrale di correlazione, degli *scalini*. Questo, molto probabilmente, è dovuto proprio alla struttura a isole della

traccia di queste orbite nella superficie di sezione, ogni scalino corrisponde al "salto" da una all'altra di quelle isole che abbiamo notato in Fig. 3.2 (pannello di destra).



(a) In alto: andamento di D in funzione di r_i . In basso: andamento di χ^2 in funzione di r_i

(b) Andamento di $C(r)$ in funzione della distanza r (curva azzurra) e relativo *fit* lineare (linea tratteggiata)

Fig. 3.6: Analisi dati relativa all'orbita regolare

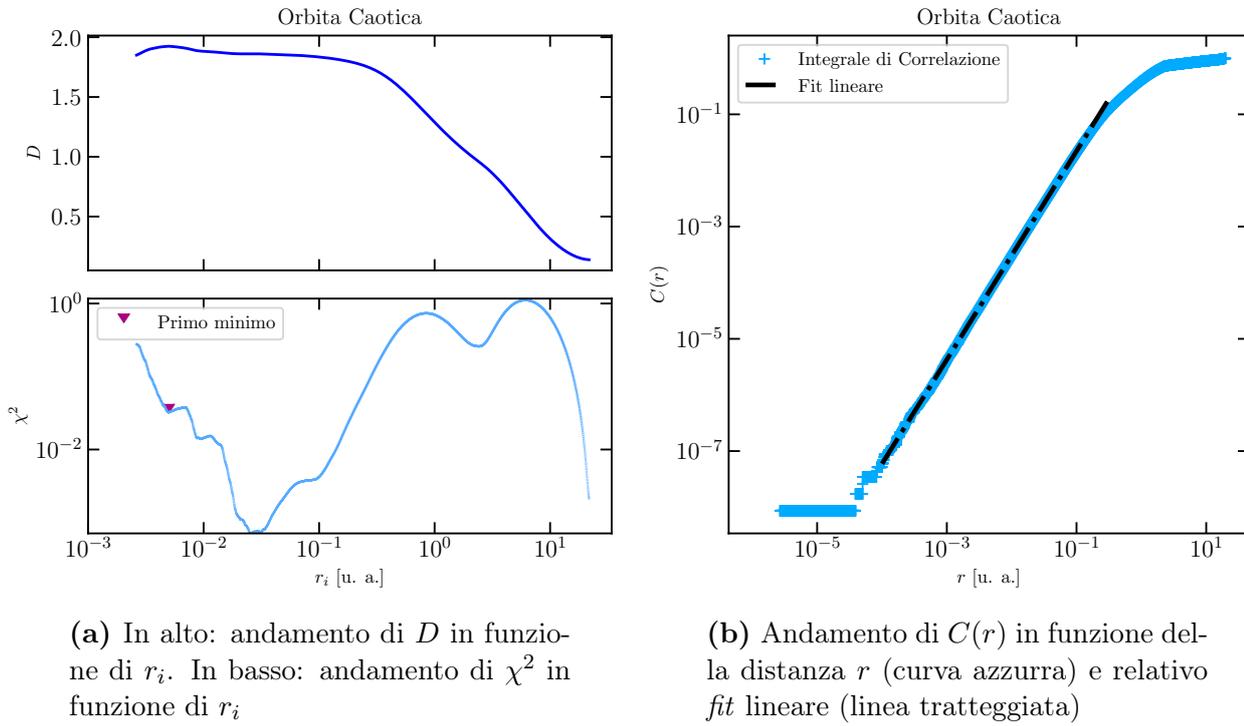
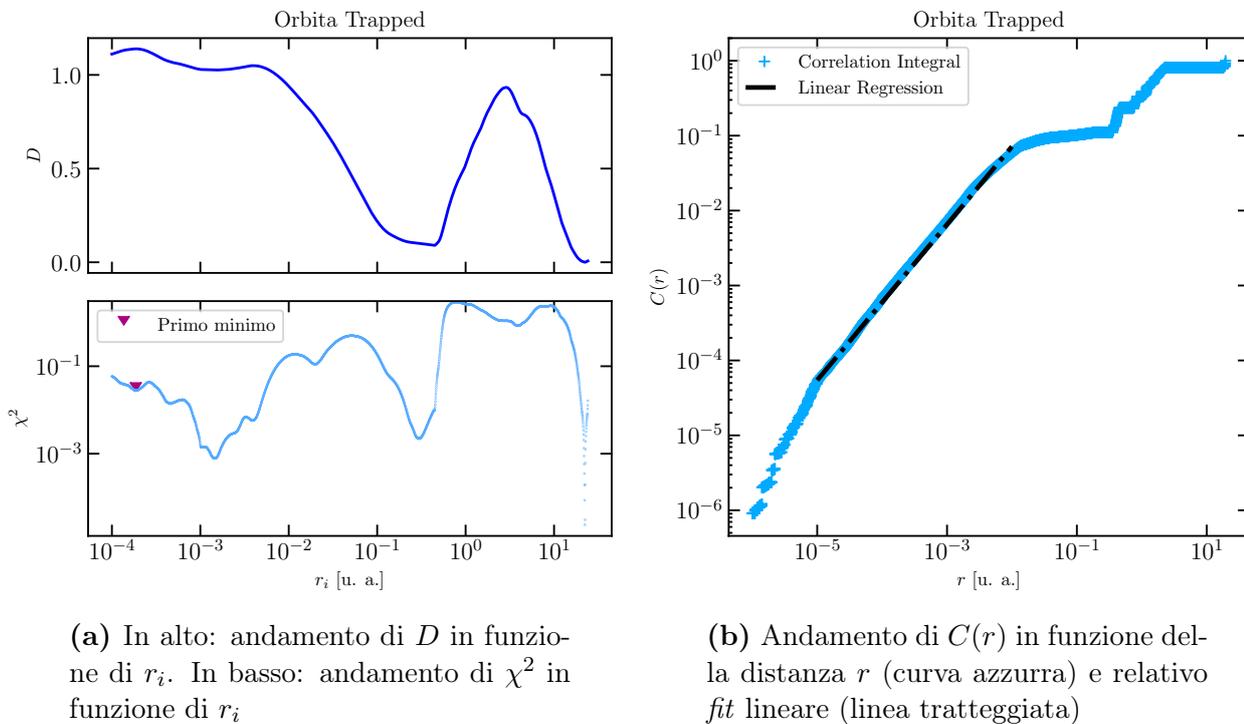


Fig. 3.7: Analisi dati relativa all'orbita caotica

Fig. 3.8: Analisi dati relativa all'orbita *trapped*

Conclusioni

Nel corso di questa tesi abbiamo visto come la dimensionalità dell'orbita nello spazio delle fasi di una particella di test soggetta all'azione di un potenziale gravitazionale sia intrinsecamente legata al numero di integrali del moto dell'orbita.

Abbiamo trovato in sezione § 1.2.1 che per sistemi a simmetria sferica si possono sempre trovare quattro integrali del moto isolanti con una trattazione analitica: l'energia totale E e le tre componenti del momento angolare ℓ . La conservazione del momento angolare totale, inoltre, ci permette di concludere che tutte le orbite integrate in potenziali a simmetria sferica sono orbite planari, ossia il moto delle stelle soggette a questo tipo di potenziale è confinato su una superficie perpendicolare a ℓ . Per i sistemi a simmetria assiale, invece, abbiamo visto in § 1.2.2 che con i metodi della fisica classica si possono trovare solamente due integrali del moto: l'energia totale E e la componente z del momento angolare ℓ . Esperimenti di integrazione numerica di orbite in potenziali assi-simmetrici, come nel caso riportato in sezione § 2.1 (Fig. 2.1), mostrano che, oltre E e ℓ_z , molte orbite in potenziali schiacciati conservano anche un terzo integrale del quale, tuttavia, non abbiamo nessuna forma analitica, da cui la necessità di ricorrere a metodi numerici.

Abbiamo visto la famiglia di possibili orbite che possono nascere da potenziali assi-simmetrici attraverso la divisione in orbite regolari, con almeno 3 integrali del moto, e in orbite irregolari, o caotiche, i cui integrali del moto sono solamente E e ℓ_z .

Abbiamo, poi, analizzato tre metodi di classificazione delle orbite:

- l'esponente di Lyapunov
- la superficie di sezione
- l'integrale di correlazione,

con lo scopo di individuare se certe orbite obbedissero o meno a un terzo integrale del moto.

Il metodo delle superfici di sezione nasce come metodo qualitativo di classificazione delle orbite ed è legato alla dimensione della traccia delle stesse su tali superfici. Abbiamo provato a rendere quantitativo questo metodo, applicando la tecnica dell'integrale di correlazione ai punti della traccia.

Per poter testare il nostro metodo abbiamo considerato tre orbite integrate su un potenziale di Plummer *shiftato* (3.1.2), un potenziale assi-simmetrico ottenuto tramite la complessificazione del potenziale di Plummer sferico (1.1.8), con le condizioni iniziali riportate in Tab. 3.1.

Abbiamo scritto un algoritmo che computasse l'integrale di correlazione $C(r)$ dei punti sulla traccia dell'orbita nella superficie di sezione. Per fare ciò abbiamo scelto di discretizzare l'intervallo dei valori in r attraverso un *binnaggio* in scala logaritmica, in tal modo siamo riusciti a calcolare $C(r)$ come istogramma cumulativo delle occorrenze in r . Per estrapolare la dimensione D dall'andamento dell'integrale di correlazione abbiamo eseguito un *fit* tramite la tecnica di minimizzazione del χ^2 su finestra mobile. Dopo vari tentativi (alcuni dei quali sono riportati in Tab. 3.2) abbiamo trovato una larghezza di finestra pari a 500 *bin* e un numero di *bin* totali pari a $n_{punti}/4$, dove n_{punti} è il numero di punti totali della traccia, come valori ottimali per la buona riuscita del *fit* su tutte e tre le orbite.

Come possiamo vedere in Tab. 3.4 possiamo affermare la buona riuscita del metodo.

	Orbita regolare	Orbita caotica	Orbita trapped
D_{att}	1	2	1
D_{calc}	1.10 ± 0.18	1.86 ± 0.16	1.14 ± 0.17

Tab. 3.4: Tabella riassuntiva delle dimensioni attese (D_{att}) e calcolate per le tre orbite analizzate (D_{calc})

Il codice del programma sviluppato per quest'analisi è liberamente consultabile presso:

https://github.com/morganapederzoli/Correlation_integral_SoS.git.

Appendice A

Minimizzazione del χ^2 nel caso della regressione lineare

Vogliamo ora eseguire una regressione lineare su un campione di N punti (x_i, y_i) con $i = 1, \dots, N$,

$$y(x) = y(x, a, b) = ax + b. \quad (\text{A.1})$$

Dato che nel nostro caso i dati considerati non provengono da osservazioni sperimentali, ma da simulazioni numeriche, è lecito assumere di conoscerne il valore esatto, perciò possiamo trascurare nella trattazione gli errori sulle y_i e sulle x_i . La funzione χ^2 [17], per definizione diventa:

$$\chi^2(a, b) = \sum_{i=1}^N (y_i - a - bx_i)^2, \quad (\text{A.2})$$

per cui il problema della ricerca dei parametri di *best fit* si riduce alla ricerca di parametri a e b , tali che

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = \frac{\partial \chi^2}{\partial b} = 0 \quad (\text{A.3})$$

Fortunatamente, il caso lineare è risolvibile analiticamente. Introducendo le somme

$$S \equiv \sum_{i=1}^N 1 = N \quad \begin{array}{ll} S_x \equiv \sum_{i=1}^N x_i & S_y \equiv \sum_{i=1}^N y_i \\ S_{xx} \equiv \sum_{i=1}^N x_i^2 & S_{xy} \equiv \sum_{i=1}^N x_i y_i, \end{array}$$

le equazioni (A.3) diventano:

$$\begin{cases} aS + bS_x = S_y \\ aS_x + bS_{xx} = S_{xy}. \end{cases}$$

Ricaviamo, allora, le soluzioni:

$$\begin{cases} a = \frac{S_{xx}S_y - S_xS_{xy}}{\Delta} \\ b = \frac{SS_{xy} - S_xS_y}{\Delta} \end{cases} \quad \text{con} \quad \Delta \equiv SS_{xx} - (S_x)^2 \quad (\text{A.4})$$

Ricordando la propagazione degli errori, abbiamo che il quadrato dell'incertezza σ_ξ^2 associata alle grandezze $\xi = a, b$ è data da:

$$\sigma_\xi^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \xi}{\partial y_i} \right)^2. \quad (\text{A.5})$$

Possiamo calcolare le derivate parziali rispetto a y_i direttamente dalle equazioni (A.4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial y_i} &= \frac{S_{xx} - S_x x_i}{\Delta} \\ \frac{\partial b}{\partial y_i} &= \frac{S x_i - S_x}{\Delta}, \end{aligned}$$

che, sostituite nella sommatoria (A.5), ci danno le varianze dei parametri a e b :

$$\begin{cases} \sigma_a^2 = \frac{S_{xx}}{\Delta} \\ \sigma_b^2 = \frac{S}{\Delta}. \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Bibliografia

- [1] H. C. Plummer. «On the problem of distribution in globular star clusters». In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 71 (mar. 1911), pp. 460–470. DOI: 10.1093/mnras/71.5.460.
- [2] GG Kuzmin. «A stationary galaxy model admitting triaxial velocity distribution». In: *Astron. zh* 33 (1956), p. 27.
- [3] M. Miyamoto e R. Nagai. «Three-dimensional models for the distribution of mass in galaxies.» In: *Publications of the Astronomical Society of Japan* 27 (gen. 1975), pp. 533–543.
- [4] Carlo D. Pagani e Sandro Salsa. *Analisi matematica, Vol. 2*. 2^a ed. Zanichelli, 2016. ISBN: 9788808637086.
- [5] V.I. Arnold. *Metodi matematici della meccanica classica*. Editori Riuniti University Press, 2010. ISBN: 9788864732046.
- [6] J. Binney e S. Tremaine. *Galactic Dynamics: Second Edition*. Princeton Series in Astrophysics. Princeton University Press, 2011. ISBN: 9781400828722.
- [7] Lorenzo Posti. «On the Luminous and Dark Matter Distribution in Early-Type Galaxies». Tesi di dott. alma, dic. 2015. URL: <http://amsdottorato.unibo.it/7235/>.
- [8] D. D. Carpintero. «Finding how many isolating integrals of motion an orbit obeys». In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 388.3 (ago. 2008), pp. 1293–1304. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2008.13469.x. arXiv: 0805.2532 [astro-ph].
- [9] Raffaele Pascale. «Dynamical models of dwarf spheroidal galaxies based on distribution functions depending on actions». Tesi di dott. alma, mar. 2020. URL: <http://amsdottorato.unibo.it/9426/>.
- [10] Carl D. Murray e Stanley F. Dermott. *Solar System Dynamics*. 1^a ed. Cambridge University Press, 2000. ISBN: 9780521575973.

-
- [11] Shiyang Hu et al. «A Novel Energy-conserving Scheme for Eight-dimensional Hamiltonian Problems». In: *The Astrophysical Journal* 887.2 (ott. 2019), p. 191. DOI: 10.3847/1538-4357/ab5061.
- [12] Peter Grassberger e Itamar Procaccia. «Characterization of strange attractors». In: *Physical Review Letters* 50.5 (gen. 1983), pp. 346–349. DOI: 10.1103/PhysRevLett.50.346.
- [13] Eric I. Barnes. «Using Correlation Integrals to Characterize Three-dimensional Stellar Orbits». In: *The Astrophysical Journal* 559.2 (ott. 2001), pp. 736–753. DOI: 10.1086/322376. arXiv: astro-ph/0105514 [astro-ph].
- [14] R. Pascale, C. Nipoti e L. Ciotti. «Regular and chaotic orbits in axisymmetric stellar systems». In prep.
- [15] Luca Ciotti e Federico Marinacci. «Exact density-potential pairs from complex-shifted axisymmetric systems». In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 387.3 (lug. 2008), pp. 1117–1125. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2008.13301.x. arXiv: 0804.1633 [astro-ph].
- [16] J.C. Butcher. «A history of Runge-Kutta methods». In: *Applied Numerical Mathematics* 20.3 (1996), pp. 247–260. ISSN: 0168-9274. DOI: [https://doi.org/10.1016/0168-9274\(95\)00108-5](https://doi.org/10.1016/0168-9274(95)00108-5). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0168927495001085>.
- [17] William H. Press et al. *Numerical Recipes in Fortran 77: the Art of Scientific Computing. Second Edition*. Vol. 1. 1996. ISBN: 052143064X.