

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Vorticosità nei condensati di Bose-Einstein

Relatore:
Prof.ssa Elisa Ercolessi

Presentata da:
Pietro Micaletti

Anno Accademico 2019/2020

Indice

Introduzione	2
1 Condensati di Bose-Einstein	4
1.1 Bosoni e statistica di Bose-Einstein	4
1.2 Generalità sulla condensazione di Bose-Einstein	7
1.3 Caratteristiche e proprietà dei BEC	12
1.4 Cenno su BEC ideali e BEC atomici. Vortici quantizzati nei BEC atomici.	16
2 Trattazione matematica dei vortici	18
2.1 Simmetrie, parametri d'ordine e simmetrie continue	18
2.2 Il modello $x-y$	20
2.3 Eccitazioni topologiche e vortici	22
2.4 Generalizzazioni dei parametri d'ordine e delle eccitazioni topologiche . .	27
2.5 Deformazioni ed omotopia. Classi di omotopia	30
2.6 Calcolo dell'energia di un vortice	33
2.7 Energia di interazione tra due vortici	37
3 Superfluidità e vortici	39
3.1 Fluidi classici e fluidi quantistici	39
3.2 Analisi della superfluidità	42
3.3 Quantizzazione del flusso	45
3.4 Vortici e transizione BKT	49
4 Vortici nei BEC atomici e aspetti sperimentali	53
4.1 BEC atomico, raffreddamento <i>laser</i> e trappole magnetiche	53
4.2 Confinamento degli atomi in un potenziale armonico	58
4.3 Produzione di vortici nei BEC atomici	60
Conclusioni	64
Bibliografia	65

Introduzione

Nel 1924 il fisico indiano Satyendra Nath Bose (Calcutta, 1894 - 1974) scrisse un articolo intitolato *Planck's Law and the Hypothesis of Light Quanta* nel quale derivò, attraverso ragionamenti condotti sulla base di argomentazioni statistiche, la formula di Planck della radiazione del corpo nero. L'idea consisteva nello stabilire un'analogia tra le onde elettromagnetiche del corpo nero e un gas di particelle identiche. In tal modo i tanto astrusi *quanti di luce*, menzionati per la prima volta da Max Planck (Kiel, 1858 – Gottinga, 1947), acquistavano un significato ben più concreto essendo pensabili come particelle di luce, o meglio, *fotoni*.

Tuttavia l'attività di Bose non venne ritenuta degna di pubblicazione sulle riviste scientifiche a causa della presenza di un errore grossolano nella trattazione, pertanto egli si rivolse ad Albert Einstein (Ulma, 1879 - Princeton, 1955). Il fisico tedesco, già celebre all'epoca, rimase colpito dagli scritti del collega indiano e si accorse che il suo metodo poteva essere applicato non solamente nel caso della luce ma poteva essere esteso anche ad un gas ideale di particelle massive. In tal modo venne prodotta una generalizzazione quantomeccanica del concetto classico di gas ideale sviluppato in precedenza da Ludwig Eduard Boltzmann (Vienna, 1844 – Duino, 1906), James Clerk Maxwell (Edimburgo, 1831 – Cambridge, 1879) e Josiah Willard Gibbs (New Haven, 1839 – 1903).

Einstein, compresa la portata dell'opera di Bose, decise di aiutarlo nella difficile opera di riconoscimento del suo lavoro. Pertanto, sempre nello stesso anno, destinò alla pubblicazione sulla rivista *Zeitschrift für Physik* un suo articolo, affiancato a quello del collega; nei due articoli venne introdotta la cosiddetta *statistica di Bose-Einstein* cui obbedivano i gas quantistici ideali costituiti da particelle bosoniche non interagenti, o *bosoni*. Esempi di queste particelle sono gli atomi di ^4He e i fotoni. La condensazione di Bose-Einstein riguarda le particelle bosoniche e prevede una repentina transizione di fase condotta a bassissime temperature. Tale fenomeno si verifica al di sotto della cosiddetta *temperatura critica* e consiste nell'occupazione macroscopica da parte dei bosoni dello stato fondamentale (noto anche come *condensato*). Il fatto che l'occupazione di un singolo stato quantistico (o, in ogni caso, di un numero molto limitato di stati quantistici) dia luogo - come sarà illustrato nel seguito - a fenomeni macroscopici di grande rilevanza (di cui la superfluidità è solo un esempio) è un motivo sufficiente per giustificare lo studio di tale transizione. In tali strutture si assiste, sotto particolari condizioni, alla formazione

di vortici che possono organizzarsi in reticoli più o meno ordinati e che costituiscono l'oggetto principale di studio della presente trattazione.

Nel Capitolo 1 verrà in primo luogo ricavata la statistica di Bose-Einstein; successivamente si analizzerà il fenomeno dell'omonima condensazione e verranno esaminate alcune sue proprietà caratteristiche per giungere poi alla creazione dei vortici, trattata nell'ultimo paragrafo.

Nel Capitolo 2 con l'ausilio delle versatili tecniche della topologia algebrica verrà condotto lo studio generale delle eccitazioni topologiche e, segnatamente, dei vortici: dato che questi ultimi sono pensabili come rotture della simmetria del sistema è necessario avvalersi del formalismo matematico in grado di descrivere questo stato di cose; le simmetrie continue, i parametri d'ordine e le loro generalizzazioni sono alla base di tali aspetti, congiuntamente alle deformazioni e alle classi di omotopia. Infine verranno considerate applicazioni di carattere eminentemente fisico, come l'energia di un vortice e l'energia di interazione tra due vortici.

Nel Capitolo 3 si procederà inizialmente con la distinzione tra fluido classico e fluido quantistico ravvisando in quest'ultimo una conformazione idonea ai fini della manifestazione del fenomeno della superfluidità che sarà trattata nel caso di ^4He liquido. Coerentemente con tali premesse si parlerà di quantizzazione del flusso e di come quest'ultima rappresenti un imprescindibile punto di partenza nella trattazione dei vortici. Si terminerà il Capitolo con un breve cenno alla transizione di Berezinskii-Kosterlitz-Thouless, la cui scoperta è stata insignita con il Nobel per la Fisica nel 2016: si tratta di un processo alla base della formazione dei vortici.

Nel Capitolo 4 si ripercorreranno molto sinteticamente le principali tappe che hanno condotto alla prima realizzazione dei condensati di Bose-Einstein (noti con l'acronimo di BEC), avvenuta nel 1995 e premiata con il Nobel per la Fisica nel 2001. A tal proposito verranno presi in esame i corrispettivi aspetti sperimentali, esemplificati dalle trappole magnetiche, specialmente quelle caratterizzate da un potenziale di tipo armonico, e dal raffreddamento *laser*. Grazie a procedure sempre più sofisticate nel corso degli anni è stato possibile osservare i BEC e la formazione di vortici in tali strutture; quest'ultimo aspetto è delineato nel paragrafo finale e si basa, come si vedrà, su un caso particolare del noto *effetto Stark*.

Al giorno d'oggi i campi di applicazione della condensazione di Bose-Einstein sono svariati dal momento che, come è stato detto, il suo comportamento permette di amplificare effetti quantistici su scale macroscopiche consentendo un'osservazione più semplice e meno farraginoso: settori come l'elettronica, le nanoscienze e l'astrofisica sono ora più che mai aperti a nuovi sviluppi della teoria del condensato e dei vortici.

Capitolo 1

Condensati di Bose-Einstein

Nel presente Capitolo verranno in primo luogo prese in considerazione le particelle bosoniche e le loro proprietà. Parallelamente si ricaverà la loro distribuzione, nota con il nome di *statistica di Bose-Einstein* in onore dei suoi scopritori. In seguito verrà illustrato cosa si intende per condensato di Bose-Einstein - d'ora in poi indicato con l'acronimo BEC - e ci si soffermerà sulle sue peculiari caratteristiche. Infine si opererà molto brevemente una distinzione tra BEC ideale e BEC atomico e di come quest'ultimo contempli la possibilità della creazione di vortici quantizzati al suo interno, il cui studio e la cui analisi costituiscono lo scopo della presente disamina. Si farà principalmente riferimento a [1] e [6].

1.1 Bosoni e statistica di Bose-Einstein

Una definizione semplice di *bosone* afferma che si tratta di una particella avente spin nullo o intero. Una definizione alternativa prende in esame lo stato quantistico di un insieme di particelle identiche, il quale deve risultare simmetrico per scambio di due di queste. Conseguenza immediata delle precedenti definizioni risiede nella capacità da parte dei bosoni di occupare lo stesso stato quantico in numero arbitrario, purché ci si ponga nel cosiddetto *Limite Termodinamico*, il quale prevede un numero di sottosistemi canonici N e un volume V arbitrariamente grandi:

$$V \rightarrow \infty; \quad N \rightarrow \infty; \quad \frac{N}{V} = \text{costante} < \infty.$$

Attraverso alcuni semplici calcoli di teoria combinatoria è possibile determinare il numero di modi secondo cui è possibile disporre le particelle bosoniche negli stati quantici a disposizione. Questi ultimi consentiranno in un secondo momento di ricavare la statistica di Bose-Einstein che è lo scopo del presente paragrafo.

Si consideri un sistema costituito da particelle bosoniche: in particolare si denoti con N_S il numero complessivo di bosoni identici e con M_S gli stati quantici disponibili.

Ognuno di questi può essere pensato come una scatola in cui vengono inserite delle palline identiche (i bosoni) in numero arbitrario, in accordo con le regole di occupazione degli stati precedentemente esposte. La situazione è la seguente: gli N_S bosoni sono collocati a piacimento negli M_S stati quantici fino ad esaurirsi. Il calcolo di tutte le possibili configurazioni che si possono avere viene eseguito considerando la totalità dei bosoni e le pareti comunicanti delle scatole che sono $M_S - 1$, come si può evincere dalla Figura 1.1.

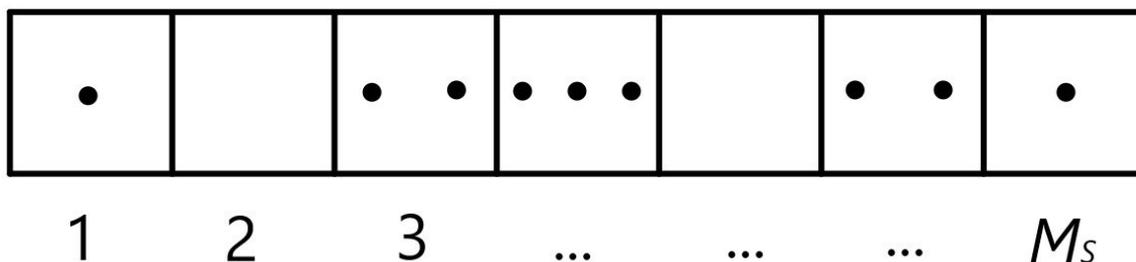


Figura 1.1: Rappresentazione degli N_S bosoni negli M_S stati quantici. Quella illustrata è solo una delle possibili configurazioni.

Le N_S palline e le $M_S - 1$ pareti comunicanti possono essere disposte in qualsiasi ordine. In totale si hanno $N_S + M_S - 1$ oggetti; nell'ipotesi che siano distinguibili è possibile disporli in $(N_S + M_S - 1)!$ modi diversi. Ma poiché in questo caso né le "palline" né le "pareti" sono distinguibili (sebbene classicamente lo siano) occorre dividere il numero degli stati disponibili per un fattore $N_S!(M_S - 1)!$, tenuto conto della diversa natura degli oggetti in esame. Pertanto, nelle ipotesi formulate in precedenza, il numero di modi W_S secondo cui disporre i bosoni negli stati quantici è dato da:

$$W_S = \frac{(N_S + M_S - 1)!}{N_S!(M_S - 1)!}. \quad (1.1)$$

È noto che l'entropia totale S di un gas risulta essere, in accordo con la sua definizione statistica, pari a $S = k_B \ln W$, ove k_B è la costante di Boltmann il cui valore (che può essere ricavato attraverso la comparazione delle previsioni teoriche con i dati sperimentali) è $1.3806488(13) \times 10^{-16}$ erg K^{-1} e W rappresenta il numero complessivo di microstati disponibili ad una data energia totale. Nel caso di un gas ideale costituito da N particelle bosoniche che occupano un dato volume, il calcolo di W si traduce in una generalizzazione della (1.1): supponendo che delle N particelle bosoniche totali N_S di queste si trovino nella *shell* s -esima, dove ci sono M_S stati quantici, il numero totale di microstati disponibili (considerando il gas nella sua totalità) è dato dal prodotto di *tutti* i modi possibili W_S di disporre le N_S particelle bosoniche nella *shell* s -esima, ossia:

$$W = \prod_S W_S = \prod_S \frac{(N_S + M_S - 1)!}{N_S!(M_S - 1)!}. \quad (1.2)$$

L'entropia S del sistema può essere riscritta partendo dalla sua definizione statistica data in precedenza e utilizzando la (1.2) e la nota approssimazione di Stirling, secondo la quale $\ln N! \sim N \ln N - N$:

$$S = k_B \ln W = k_B \sum_S [(N_S + M_S) \ln(N_S + M_S) - N_S \ln N_S - M_S \ln M_S]. \quad (1.3)$$

Ai fini del calcolo precedente si è assunto che $N_S, M_S \gg 1$, come ovviamente si verifica nei casi di interesse fisico.

All'equilibrio termico l'entropia S , come è noto, assume il suo valore massimo, pertanto si rende necessaria la scelta opportuna degli N_S bosoni in ogni *shell* che possano andare a massimizzarla. Tale operazione deve essere obbligatoriamente condotta imponendo, durante la variazione degli N_S , due vincoli ben precisi, corrispondenti alla conservazione del numero totale di particelle bosoniche del sistema e dell'energia interna totale del gas (tali requisiti definiscono ciò che viene chiamato *ensemble* microcanonico). Da un punto di vista matematico ciò equivale a richiedere rispettivamente $N = \sum_S N_S$ e $U = \sum_S \epsilon_S N_S$, ove con ϵ_s si intende l'energia dello stato quantico s -esimo, definita come $\epsilon_s = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ (\hbar è la costante di Planck ridotta, deriva dalla relazione $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ed è pari a $1.054571726(47) \times 10^{-27}$ erg s, k rappresenta il vettore d'onda e m è la massa delle particelle).

Mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange è possibile massimizzare l'entropia S : definiti - per motivi di convenienza - i due moltiplicatori come $k_B \beta$ e $-k_B \beta \mu$, è possibile scrivere:

$$\frac{\partial S}{\partial N_S} - k_B \beta \frac{\partial U}{\partial N_S} + k_B \beta \mu \frac{\partial N}{\partial N_S} = 0. \quad (1.4)$$

A questo punto, derivando il membro destro della (1.3) e ricordando le definizioni dei vincoli relativi alla conservazione delle particelle bosoniche del sistema e alla conservazione dell'energia interna totale del sistema, si ricava la seguente equazione:

$$\ln(N_S + M_S) - \ln N_S - \beta \epsilon_S + \beta \mu = 0. \quad (1.5)$$

Risolviendo per N_S la (1.5) si ottiene:

$$N_S = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_s - \mu)} - 1} M_S. \quad (1.6)$$

Il numero medio di bosoni che occupano un singolo stato quantico è dato dal rapporto N_S/M_S , pertanto, partendo dalla (1.6), è possibile scrivere:

$$f_{\text{BE}}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1}. \quad (1.7)$$

La (1.7) è la formula della distribuzione di Bose-Einstein che ci si proponeva di ricavare.

Resta da comprendere il significato fisico delle costanti β e μ , presenti nei moltiplicatori di Lagrange. Scrivendo il Primo principio della Termodinamica nel caso di un gas ideale di N particelle in cui sono in corso reazioni chimiche si ha:

$$dU = TdS - PdV + \mu dN \rightarrow S = \frac{1}{T}(dU + PdV - \mu dN), \quad (1.8)$$

ove con T , P e μ si denotano rispettivamente la temperatura, la pressione ed il potenziale chimico - una delle due costanti di cui sopra - che è funzione della temperatura (come si vedrà nella 1.2), della pressione e del numero di moli, dal momento che una delle sue definizioni più gettonate passa attraverso la derivata parziale, rispetto al numero di moli, dell'energia libera di Helmholtz. Cercando un'altra equazione per dS per poter instaurare un confronto con la (1.8) si ha:

$$dS = \sum_S \frac{\partial S}{\partial N_S} dN_S = k_B \beta \sum_S \left(\frac{\partial U}{\partial N_S} - \mu \frac{\partial N}{\partial N_S} \right) dN_S = k_B \beta (dU - \mu dN), \quad (1.9)$$

dove nella seconda uguaglianza si è impiegata la (1.4). La (1.8) e la (1.9) messe a confronto suggeriscono che:

$$\beta = \frac{1}{k_B T}. \quad (1.10)$$

La (1.10) chiarisce così il significato fisico del secondo moltiplicatore di Lagrange. Si noti che nella (1.8), che ha carattere generale, non è stato preso in considerazione il termine relativo al lavoro termodinamico, in quanto nel presente caso non si ha nessuna variazione di volume (valgono le condizioni del Limite Termodinamico).

1.2 Generalità sulla condensazione di Bose-Einstein

Il fenomeno della *condensazione* di Bose-Einstein, oggetto di studio del presente paragrafo, è una transizione di fase termodinamica unica nel suo genere poiché avviene sulla base della distribuzione statistica delle particelle bosoniche, ricavata nella 1.1, e della natura ondulatoria di queste ultime. Normalmente una transizione di fase si verifica a causa delle interazioni tra particelle, le quali tuttavia sono trascurabili nel presente caso (ciò costituisce un problema che sarà discusso nella 1.4).

La condensazione di Bose-Einstein prevede che all'equilibrio e al di sotto di una certa temperatura, detta *temperatura critica* (T^*), il gas di bosoni coesista con le particelle condensate, in analogia con il caso classico in cui la transizione di fase liquido-gas porta alla formazione di gocce (separate dal gas) che vanno a costituire vapore saturo. In questo paragrafo si vuole giungere alla definizione formale di BEC.

Utilizzando la (1.6) è possibile determinare il numero complessivo N di particelle bosoniche in un dato sistema, infatti:

$$N = \sum_s \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_s - \mu)} - 1}. \quad (1.11)$$

Esaminando la (1.6) e ponendosi nel livello fondamentale (che si ha per il pedice $s = 0$) con l'assunzione che l'energia corrispondente sia nulla:

$$N_0 = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_0 - \mu)} - 1} M_0 = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} M_0, \quad (1.12)$$

si nota che il potenziale chimico μ può assumere solo valore minore o uguale a 0; in caso contrario ciò equivarrebbe ad affermare che il numero dei bosoni nel livello fondamentale è negativo, il che è privo di senso. Allora necessariamente $\mu \leq 0$.

Riscrivendo la (1.11) in modo da esplicitare, in accordo con la (1.12), i bosoni che si trovano nel livello fondamentale, ossia nel *condensato*, si ottiene:

$$N = N_0 \left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{M_s}{M_0} e^{-\beta\epsilon_s} \left(\frac{1 - e^{\beta\mu}}{1 - e^{\beta(\mu - \epsilon_s)}} \right) \right). \quad (1.13)$$

Ora si vuole comprendere cosa succede quando $T \rightarrow 0$. Richiamando la definizione di β , data dalla (1.10), la (1.13) diventa, sotto l'imposizione di questo limite:

$$\lim_{T \rightarrow 0} N(T) = N_0(T). \quad (1.14)$$

La (1.14) afferma che in prossimità dello zero assoluto tutti i bosoni del sistema degenerano nel livello fondamentale: questo comportamento è spiegabile con la capacità di tali particelle di occupare in numero arbitrario un singolo stato, non essendo soggette al Principio di Pauli.

La frazione di bosoni che si trovano al di sotto di una scala energetica Λ strettamente positiva è data da:

$$\varrho(T, \Lambda) = \sum_{\epsilon_s \leq \Lambda} \frac{N_s}{N}. \quad (1.15)$$

Richiamando la (1.14), la (1.15) si traduce, nel limite $T \rightarrow 0$, in:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \varrho(T, \Lambda) = 1. \quad (1.16)$$

Il Limite Termodinamico, operazione condotta sistematicamente all'interno della presente trattazione, porta all'introduzione del cosiddetto *Limite del Continuo*: questa approssimazione può essere condotta sotto la condizione $V \rightarrow \infty$ (garantita appunto dal Limite Termodinamico) e prevede sostanzialmente l'infittimento dei livelli energetici. Infatti si ha nel caso generale $\beta(\epsilon_1 - \epsilon_0) \sim \frac{\hbar^2}{2mV^{2/3}k_B T} \ll 1$, ove ϵ_1 ed ϵ_0 rappresentano

rispettivamente il primo livello eccitato e il livello fondamentale. Analizzando la precedente espressione si nota che la differenza tra i livelli energetici contigui in un volume V tende ad annullarsi come $1/V^{2/3}$. Conseguenza inevitabile dell'applicazione del Limite del Continuo è la necessità di sostituire le sommatorie sui livelli energetici con degli integrali, alla luce del processo di infittimento appena descritto.

Operativamente, nel passaggio dalle grandezze discrete a quelle continue previsto dal Limite del Continuo, si assiste, tra le altre, alla seguente riscrittura per gli stati quantici M_S : $M_S \rightarrow M(\epsilon; T, V)d\epsilon$, ove la funzione $M(\epsilon; T, V)$ prende il nome di *densità degli stati* (pertanto la quantità differenziale $M(\epsilon; T, V)d\epsilon$ rappresenta il numero di stati quantici aventi energia compresa tra ϵ ed $\epsilon + d\epsilon$).

Se ora si applica il Limite del Continuo alla (1.16) il risultato rimane naturalmente invariato. Una notevole contraddizione si verifica quando si scambia l'ordine delle due operazioni, vale a dire il limite per $T \rightarrow 0$ e il Limite del Continuo. In questo caso infatti si procede in primo luogo con il Limite del Continuo e in seconda istanza con il limite per $T \rightarrow 0$.

É lecito supporre che l'applicazione del Limite del Continuo conduca, a partire dagli stati quantici, ad una densità degli stati $M(\epsilon)$ del tipo:

$$M(\epsilon) = N\hat{M}(\epsilon). \quad (1.17)$$

Nella (1.17) con $\hat{M}(\epsilon)$ è stata denotata una generica funzione che è invariante nel Limite Termodinamico. Dal momento che quest'ultimo (e quindi il Limite del Continuo) fornisce una densità degli stati proporzionale al volume V e prevede che il rapporto V/N sia una costante, la (1.17) è consistente.

Applicando il Limite del Continuo alla (1.11) si ottiene, in virtù della (1.17):

$$1 = \int_0^\infty \frac{\hat{M}(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} d\epsilon, \quad (1.18)$$

mentre la medesima operazione condotta sulla (1.15), tenuto conto della (1.6) e della (1.17), conduce a:

$$\varrho(T, \Lambda) = \int_0^\Lambda \frac{\hat{M}(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} d\epsilon. \quad (1.19)$$

Poiché $\mu \leq 0$ è possibile scrivere la seguente disuguaglianza per la (1.19):

$$\int_0^\Lambda \frac{\hat{M}(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} d\epsilon \leq \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_\xi^\Lambda \frac{\hat{M}(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon)} - 1} d\epsilon. \quad (1.20)$$

Un'ulteriore disuguaglianza applicabile questa volta al membro destro della (1.20) segue dalla relazione $e^x - 1 \geq x$ se $x \geq 0$ e dalla (1.10):

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\xi}^{\Lambda} \frac{\hat{M}(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon)} - 1} d\epsilon \leq k_B T \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\xi}^{\Lambda} \frac{\hat{M}(\epsilon)}{\epsilon} d\epsilon. \quad (1.21)$$

La catena di disuguaglianze mette pertanto in relazione la (1.19) e il membro destro della (1.21).

L'integrale del secondo membro della (1.21) è una funzione di Λ e di ξ , pertanto si può riscrivere in forma generica e compatta come $f(\Lambda, \xi)$. La precedente catena di disuguaglianze è verificata senza l'imposizione di alcuna condizione se $\lim_{\xi \rightarrow 0} f(\Lambda, \xi)$ (che si traduce in $f(\Lambda, 0)$) è infinito. Viceversa, qualora fosse:

$$f(\Lambda, 0) = \int_0^{\Lambda} \frac{M(\epsilon)}{\epsilon} d\epsilon < \infty, \quad (1.22)$$

allora si avrebbe $\lim_{T \rightarrow 0} \varrho(T, \Lambda) = 0$ per qualunque ξ a causa della catena di disuguaglianze di cui sopra, in particolare in virtù del membro destro della (1.21). Questo significherebbe, richiamato il significato della definizione (1.15), che la totalità dei bosoni svanirebbe per $T = 0$ poiché la frazione di particelle bosoniche con energia minore di qualsiasi valore positivo sarebbe nulla.

In sintesi, l'incongruenza circa il valore finale assunto da $\varrho(T, \Lambda)$ a seguito dell'applicazione del limite per $T \rightarrow 0$ e del Limite del Continuo dipende in primo luogo dall'ordine con cui sono condotte tali operazioni e, in seconda istanza, dal soddisfacimento della condizione (1.22).

Si assiste pertanto alla formale cancellazione del livello fondamentale che può essere occupato da un numero arbitrario di bosoni: questa assunzione, seppure assurda e quindi da rigettare, consentirebbe di stabilire una corrispondenza sensata tra il caso discreto e il caso continuo (in cui l'integrale del membro destro della (1.19) contemplerebbe esclusivamente le particelle bosoniche aventi energie strettamente positive).

Si definisca ora la seguente funzione:

$$F(\beta) = \int_0^{\infty} \frac{\hat{M}(\epsilon)}{e^{\beta\epsilon} - 1} d\epsilon. \quad (1.23)$$

La (1.23) ha un andamento decrescente (è il reciproco di un esponenziale) e, nel caso in cui valga la (1.22), può assumere solamente valori finiti per qualsiasi β (è sufficiente richiamare la disequazione (1.21) per rendersene conto). Un rapido studio di funzione condotto sul dominio naturale di β suggerisce inoltre che $\lim_{\beta \rightarrow 0} F(\beta) = \infty$ e che $\lim_{\beta \rightarrow \infty} F(\beta) = 0$. Tutte queste considerazioni sul comportamento della $F(\beta)$ implicano l'esistenza e l'unicità di un valore particolare di β , contrassegnato come β^* tale che, richiamando ancora la (1.10), soddisfa il membro destro della (1.23) nella maniera seguente:

$$1 = \int_0^{\infty} \frac{\hat{M}(\epsilon)}{e^{\epsilon/k_B T^*} - 1} d\epsilon. \quad (1.24)$$

La (1.24) comporta $\mu(T^*) = 0$: vigendo la (1.18), il risultato non può che essere l'annullamento del potenziale chimico quando viene calcolato in T^* . Quest'ultimo è una funzione non crescente della temperatura: infatti la condizione $\frac{\partial \mu}{\partial T} \leq 0$ deriva dalla differenziazione di entrambi i membri della (1.11) rispetto a T . Inoltre μ nel caso bosonico non può essere positivo, come già evidenziato all'inizio del presente paragrafo, e questo comporta, unitamente alla condizione $\mu(T^*)$, che al di sotto di T^* il potenziale chimico sia identicamente nullo per qualsiasi valore di temperatura.

Complessivamente si verifica una transizione repentina nel potenziale chimico il cui andamento in funzione della temperatura è illustrato in Figura 1.2.

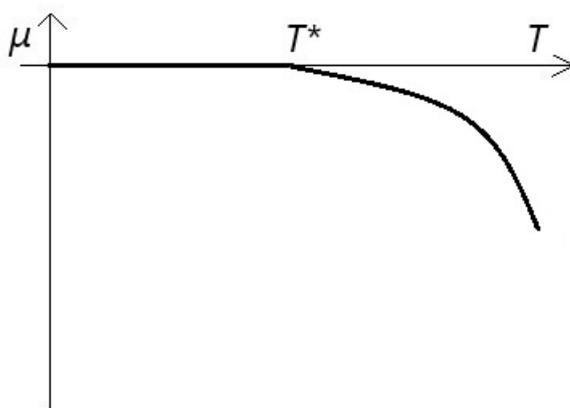


Figura 1.2: Potenziale chimico di un gas di bosoni in funzione della temperatura. Si passa da $\mu(T) < 0$ quando $T > T^*$ a $\mu(T) = 0$ qualora $T < T^*$. In particolare il potenziale chimico si annulla con continuità a T^* , tuttavia è presente una discontinuità a qualche ordine n per $\frac{\partial^n \mu}{\partial T^n}$.

Tale transizione - per ora analizzata soprattutto con l'ausilio delle tecniche dell'Analisi matematica - altro non è che la *condensazione di Bose-Einstein*. Appare evidente che la (1.22) si configura come condizione necessaria e sufficiente ai fini della manifestazione del fenomeno in esame: infatti, se tale condizione non è verificata - ossia il $\lim_{\xi \rightarrow 0} f(\Lambda, \xi)$ non è finito - non si registra nessuna transizione dal momento che $T^* = 0$. Quest'ultima considerazione si spiega considerando che, se la f diverge, allora il membro destro della (1.21), che comporta una moltiplicazione per un fattore $k_B T$ della (1.22), può assumere valore finito esclusivamente nel caso in cui $T^* \rightarrow 0$.

Nel prossimo paragrafo si proseguirà con la trattazione del fenomeno della condensazione di Bose-Einstein e se ne prenderanno in esame caratteristiche e proprietà.

1.3 Caratteristiche e proprietà dei BEC

In questo paragrafo si vuole innanzitutto ricavare l'espressione della temperatura critica T^* , in prossimità della quale si verifica il fenomeno della condensazione di Bose-Einstein, come spiegato nella 1.2. Allo scopo è utile richiamare l'espressione - specializzata al caso tridimensionale - del numero di stati quantici nello spazio delle fasi aventi energia minore di un certo valore ϵ :

$$N_{3D}(\epsilon) = \frac{1}{h^3} \int_{\Omega(V)} d\vec{r} \int_{\frac{p^2}{2m} < \epsilon} d\vec{p} = \frac{V}{h^3} \frac{4}{3} \pi (2m\epsilon)^{3/2}. \quad (1.25)$$

Nella (1.25) è stata considerata un'Hamiltoniana del tipo $h = \frac{p^2}{2m} +$ confinamento in una regione $\Omega(V)$. La densità degli stati nel caso tridimensionale discende immediatamente dalla (1.25), infatti si ha:

$$M_{3D}(\epsilon) = \frac{dN_{3D}(\epsilon)}{d\epsilon} = \frac{V}{h^3} 2\pi (2m)^{3/2} \epsilon^{1/2}. \quad (1.26)$$

In Figura 1.3 è riportato il grafico della densità degli stati $M(\epsilon)$ in tre dimensioni, la cui espressione è data dalla (1.26).

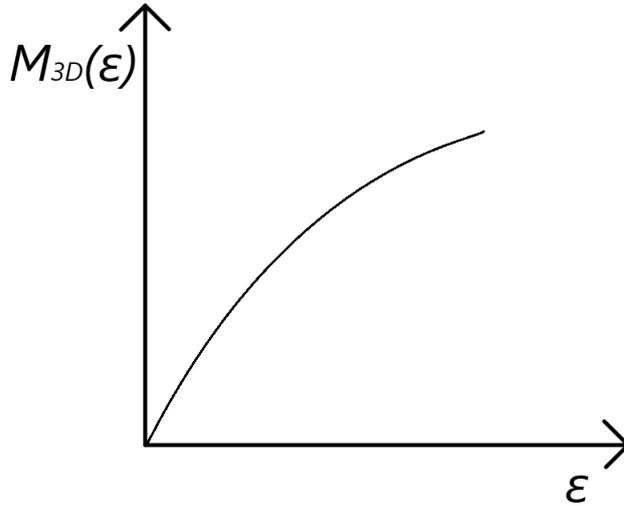


Figura 1.3: Densità degli stati in tre dimensioni in funzione dell'energia. Si osservi il progressivo diradamento degli stati disponibili andando verso il livello energetico fondamentale: questo aspetto sarà richiamato nel seguito.

A questo punto la (1.24), tenuto conto della (1.26) e della (1.10), diventa, considerando un gas di particelle bosoniche libere di muoversi in tre dimensioni:

$$N = \frac{V}{h^3} 2\pi (2m)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2}}{e^{\beta^* \epsilon} - 1} d\epsilon. \quad (1.27)$$

Operando la sostituzione $x = \beta^* \epsilon$, la (1.27) assume la forma, ricordando ancora la (1.10):

$$N = \frac{V}{h^3} 2\pi (2mk_M T^*)^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{e^{\beta^* x} - 1} dx, \quad (1.28)$$

ove l'integrale a secondo membro può essere riscritto, usando un risultato noto dall'Analisi, come $\frac{\pi^{1/2}}{2} \zeta(3/2)$. La ζ è la cosiddetta *funzione Zeta di Riemann* e, nel presente caso, vale $\zeta(3/2) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{3/2}} \simeq 2.612$.

Ora la (1.28) può essere utilizzata come equazione per T^* dal momento che una semplice manipolazione algebrica fornisce:

$$T^* = \frac{h^2}{2k_B \pi m} \left[\frac{N}{\zeta(3/2)V} \right]^{2/3}. \quad (1.29)$$

La (1.29) è pertanto l'equazione per la temperatura critica del BEC. Si osservi la dipendenza di questa dalla densità N/V . A stretto rigore la (1.27), la (1.28) e la (1.29) dovrebbero avere al loro interno un fattore dovuto alla molteplicità spinoriale (del tipo $g_s = 2s + 1$, ove s è lo *spin* complessivo) ma, dato che fondamentalmente verranno presi in esame bosoni con *spin* nullo (come ${}^4\text{He}$), si avrà che $g_s = 1$.

Un aspetto che merita di essere sottolineato riguarda la condensazione di Bose-Einstein in due dimensioni dal momento che i vortici, principale argomento della presente trattazione, sono oggetti bidimensionali. In questo caso il numero di stati quantici nello spazio delle fasi aventi energia minore di un certo valore ϵ è dato da:

$$N_{2D}(\epsilon) = \frac{A}{h^2} \int_{p^2 < 2m\epsilon} d^2p = \frac{2\pi A}{h^2} \int_{p^2 < 2m\epsilon} p dp = \frac{Am\epsilon}{2\pi h^2}, \quad (1.30)$$

ove A è la superficie di interesse.

In analogia con il procedimento seguito nella (1.26) si ricava dalla (1.30) la densità degli stati nel caso bidimensionale:

$$M_{2D}(\epsilon) = \frac{dN_{2D}(\epsilon)}{d\epsilon} = \frac{Am}{2\pi h^2}. \quad (1.31)$$

A questo punto dalla (1.31) è possibile determinare il numero di particelle bosoniche del sistema, infatti:

$$N = \int_0^\infty M_{2D}(\epsilon) f_{BE} d\epsilon = \frac{mA}{2\pi h^2} \int_0^\infty \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}} d\epsilon \quad (1.32)$$

Operando nella (1.32) le sostituzioni $t = z^{-1}e^{\beta\epsilon} - 1$ e $\beta d\epsilon = \frac{dt}{t+1}$ si giunge all'espressione per la densità del gas, infatti:

$$\begin{aligned} n = \frac{N}{A} &= \frac{m}{2\pi\hbar^2\beta} \int_{z^{-1}-1}^{\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{m}{2\pi\hbar^2\beta} [\ln(t) - \ln(1+t)]_{z^{-1}-1}^{\infty} = \\ &= -\frac{1}{\lambda_T^2} \ln(1-z), \end{aligned} \quad (1.33)$$

ove nell'ultima uguaglianza è stato posto $\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta} = \frac{1}{\lambda_T^2}$. Una semplice manipolazione algebrica della (1.33) conduce a:

$$z = 1 - e^{-\lambda_T^2 n}. \quad (1.34)$$

L'analisi della (1.34) suggerisce, sempre ricordando la (1.10), che solamente quando la temperatura $T \rightarrow 0$ (e quindi $\beta \rightarrow \infty$) si ha che $z \rightarrow 1$. In altri termini la condensazione di Bose-Einstein nel caso bidimensionale avviene solo per $T = 0$ (si assiste alla divergenza della (1.33)).

Come si può intuire esaminando la (1.29) e sostituendo in essa valori relativi alla materia ordinaria, la condensazione di Bose-Einstein è un fenomeno complesso da osservare da un punto di vista sperimentale a causa delle estreme condizioni ambientali in cui si verifica: infatti, considerando la massa $m = 6.68 \times 10^{-24}$ g e la densità N/V dell'ordine di 10^{19} cm^{-3} di ^4He si ottiene una T^* di circa 1/50 di Kelvin, prossima allo zero assoluto.

Questa e altre difficoltà tecniche, che saranno trattate diffusamente nel Capitolo 4, hanno comportato pesanti conseguenze sul piano pratico ai fini della realizzazione di un BEC dal momento che finora è stato possibile ottenerlo solo su scale ridotte e su tempi piccoli procedendo con il congelamento di un gas di solamente qualche decina di migliaia di particelle bosoniche in uno stato vicino a quello fondamentale (sebbene molto recentemente siano stati raggiunti risultati più promettenti).

Ora si prenderà in considerazione esplicitamente la popolazione del livello fondamentale che, secondo quanto si è visto nella 1.2, viene formalmente cancellata dall'applicazione del Limite del Continuo prima dell'applicazione del limite per $T \rightarrow 0$. Richiamando la (1.6) e specializzandola al livello fondamentale per cui $\epsilon_0 = 0$ si ottiene:

$$N_0 = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} M_0. \quad (1.35)$$

Manipolando algebricamente la (1.35) si ottiene l'equazione per il potenziale chimico μ nello stato fondamentale:

$$\mu = -k_B T \ln \left(1 + \frac{M_0}{N_0} \right), \quad (1.36)$$

da cui, sviluppando la (1.36) in serie di Taylor, si ricava:

$$\mu \sim -k_B T \frac{M_0}{N_0}. \quad (1.37)$$

Mantenendosi al di sotto della T^* e nelle condizioni del Limite Termodinamico ($V \rightarrow \infty$), il numero di bosoni che possono andare ad occupare il livello ϵ_0 diventa infinito, nel senso che le N_0 particelle bosoniche (a fronte delle N complessive) che occupano il livello fondamentale sono proporzionali al volume del sistema in modo tale che la frazione $\varrho_0 = N_0/N$ che occupa il livello fondamentale sia finita. In altri termini, la popolazione del condensato diverge estensivamente per tutti quei valori di temperatura tali che $T \leq T^*$.

Sotto la validità delle due precedenti ipotesi e assumendo che una frazione finita $\varrho_0 = N_0/N$ si trovi nello stato fondamentale, la (1.37) mostra che $\mu \rightarrow 0$ poiché per $V \rightarrow \infty$ si ha che $N_0 \rightarrow \infty$, come ci si attendeva.

Alla luce delle precedenti considerazioni, la (1.18) deve essere riscritta in modo tale da comprendere anche la popolazione del livello fondamentale data dalla (1.35), ossia:

$$N = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} M_0 + N \int_0^\infty \frac{\hat{M}(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} d\epsilon = N_0 + N \int_0^\infty \frac{\hat{M}(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} d\epsilon. \quad (1.38)$$

Ora si vuole determinare la frazione ϱ_0 di particelle bosoniche nel livello fondamentale in funzione della temperatura. Per perseguire questo scopo è necessario considerare la (1.38); nel caso in cui $\mu = 0$ si ha:

$$\varrho_0 = 1 - \int_0^\infty \frac{\hat{M}(\epsilon)}{e^{\beta\epsilon} - 1} d\epsilon, \quad (1.39)$$

mentre, qualora $\mu < 0$, si ha, sempre nel Limite Termodinamico, $\varrho_0 = 0$. Sostituendo nella (1.39) l'espressione (1.28) per N si ha:

$$\varrho_0(T) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{T}{T^*}\right)^{3/2} & \text{per } T \leq T^* \\ 0 & \text{per } T \geq T^* \end{cases}, \quad (1.40)$$

che appunto rappresenta la frazione di bosoni nel livello fondamentale al variare della temperatura. L'analisi della (1.40) suggerisce una serie di importanti considerazioni circa la condensazione di Bose-Einstein: quando $T \leq T^*$ la popolazione del condensato diventa estensiva e quindi assume un ruolo di primo piano nei processi termici; la situazione corrispondente è infatti quella dei pochi stati quantici associati al livello fondamentale - come già messo in evidenza nella (1.26) e in Figura 1.3 - che, essendo occupati da un ingente numero di particelle bosoniche, danno luogo a fenomeni macroscopici, uno su tutti una particolare forma della cosiddetta *superfluidità* che sarà trattata nel Capitolo 3. Per ora ci si limiterà a dire che si tratta di un peculiare stato della materia che si contraddistingue per la totale assenza di viscosità. I superfluidi pertanto, una volta messi

in movimento sotto opportune condizioni, sono in grado di scorrere indefinitamente senza attrito.

1.4 Cenno su BEC ideali e BEC atomici. Vortici quantizzati nei BEC atomici.

Come anticipato nella 1.3, ciò che caratterizza un superfluido è la totale assenza di viscosità (tuttavia questo aspetto non è l'unico che caratterizza tale stato della materia: infatti un superfluido ha anche conducibilità termica infinita ed entropia nulla).

Se in una corrente ordinaria le particelle si muovono in maniera incoerente le une rispetto alle altre a seguito dell'applicazione di un campo esterno, e quindi sono indotte a dissipare individualmente una porzione dell'energia acquisita, le particelle di un superfluido, messe in moto da opportuni campi di forze, procedono compattamente nello spazio in modo che la dissipazione energetica possa avvenire esclusivamente in forma collettiva; la probabilità associata a quest'ultimo processo è del tutto irrisoria e ciò comporta il movimento indefinito del superfluido accennato in precedenza.

Nel 1937 si scoprì che ^4He liquido (ossia una specie chimica che, contenendo due elettroni, due protoni e due neutroni, è un bosone) transiva allo stato di superfluido alla temperatura di 2.2 K . Risultò quindi sensato supporre l'esistenza di una rete di corrispondenze tra i BEC e la superfluidità di ^4He liquido. Anche l'impiego della (1.29), con l'opportuna sostituzione dei valori di ^4He nei parametri corrispondenti, rappresentò un'ulteriore conferma della similarità dei due fenomeni in questione: infatti si ottiene un valore di 3.1 K per la temperatura critica, non troppo diverso dal valore sperimentale di 2.2 K .

Tuttavia l'analogia tra BEC e superfluidità non può essere condotta fino in fondo: la teoria della condensazione illustrata nelle sezioni 1.2 e 1.3, prendendo in esame un gas bosonico ideale e rarefatto, finisce per trascurare le interazioni tra le particelle, ben presenti invece in ^4He liquido per via della sua elevata densità. Questa apparente inconciliabilità tra impalcatura teorica e realtà dei fatti è stata sormontata solamente nel 1995 quando vennero realizzati in laboratorio i primi esempi concreti di BEC atomici (su questo aspetto si ritornerà nel Capitolo 4). Tale importante risultato, conseguito non con ^4He ma con gas molto diluiti di atomi di metalli alcalini, fu insignito del Nobel per la Fisica.

Nei BEC atomici è possibile osservare il caratteristico fenomeno dei vortici quantizzati, che costituisce lo scopo della presente trattazione: esso trae origine dalla Meccanica Quantistica e dalla natura ondulatoria della materia e si manifesta quando un sistema quantistico (come un BEC atomico) viene messo in rotazione. Come sarà più diffusamente esposto nel seguito, una particella quantistica (come un bosone) che ha un moto circolare non può non descrivere una circonferenza che non sia un multiplo intero della

lunghezza d'onda di de Broglie $\lambda = \frac{h}{p}$. Se questa regola di quantizzazione conduce al modello di Bohr per l'atomo di H, nei BEC atomici in rotazione porta ai vortici quantizzati. Un vortice quantizzato, come si avrà modo di discutere nel Capitolo 2, è un'eccitazione topologica che produce un cambiamento di fase quantomeccanica di 2π in un atomo che si dirige verso il suo centro.

In Figura 1.4 è riportato un BEC atomico posto in rotazione; è possibile apprezzare visivamente un'importante differenza con la fisica classica: se infatti in situazioni ordinarie un fluido posto in rotazione si comporta come un corpo rigido, un superfluido rotante produce un reticolo di vortici (quantizzati). Anche questo importante aspetto verrà analizzato in dettaglio nel Capitolo 2 e nel Capitolo 3.

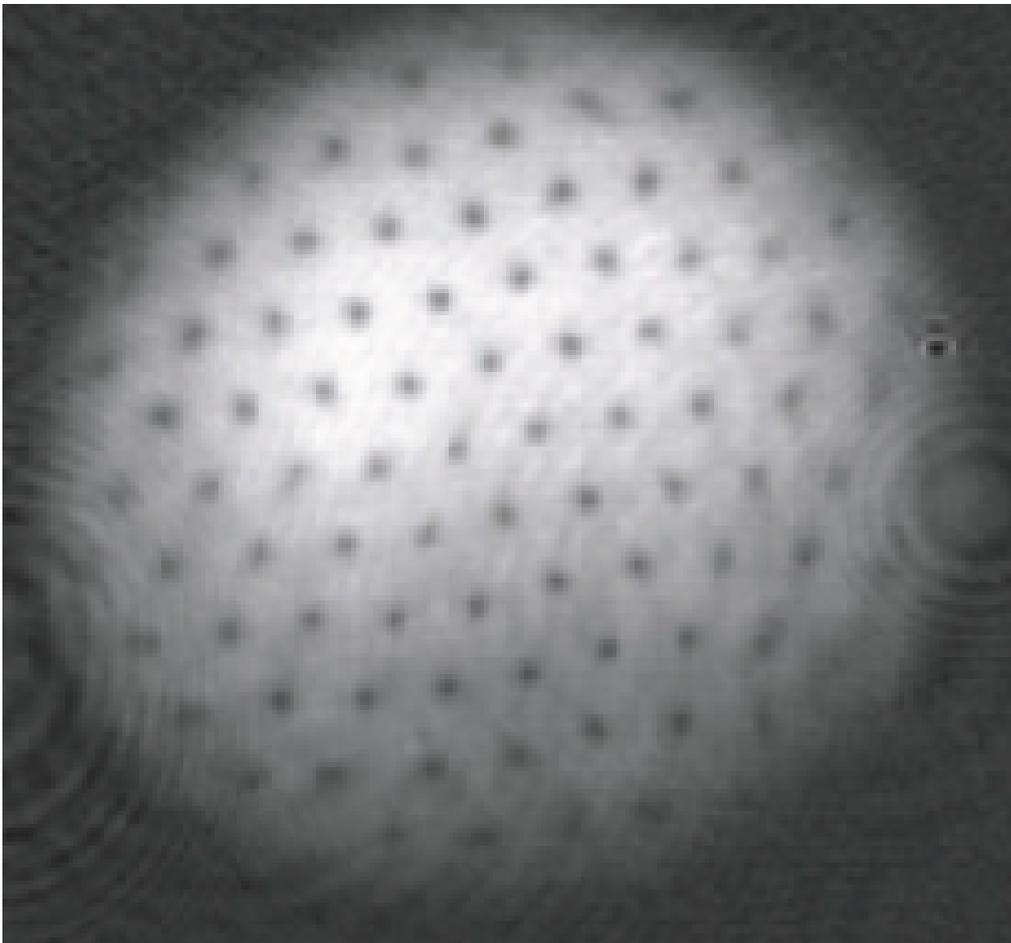


Figura 1.4: Reticolo di vortici in un BEC atomico posto in rotazione. Immagine tratta da [1].

Capitolo 2

Trattazione matematica dei vortici

Nel presente Capitolo verrà presa in considerazione la modellizzazione matematica alla base dei fenomeni vorticosi in generale e, segnatamente, nei BEC. Si tratta in sostanza di un formalismo che, partendo dal concetto di simmetria (e, specificatamente, di simmetria *continua*), opera la rottura di quest'ultima in favore della comparsa delle cosiddette *eccitazioni topologiche* (delle quali i vortici costituiscono un caso particolare). Si farà principalmente riferimento a [3].

2.1 Simmetrie, parametri d'ordine e simmetrie continue

La definizione di *simmetria* è una questione spinosa e controversa se si esaminano la vasta portata e tutte le possibili implicazioni di tale concetto. Tuttavia può ritenersi soddisfacente, considerati gli scopi, la seguente

Definizione 1 *In generale una **simmetria** è una trasformazione che lascia invarianti in forma le equazioni del moto.*

Con la precedente definizione si intende pertanto affermare che le simmetrie sono proprietà di invarianza dei sistemi fisici e il motivo del loro studio si basa sull'importanza che queste rivestono ai fini della comprensione dei meccanismi soggiacenti alle leggi fisiche [2]. La descrizione delle simmetrie si avvale della teoria dei gruppi la cui trattazione completa esula dagli scopi della presente trattazione. Alla luce delle precedenti considerazioni non stupisce pertanto che le proprietà dinamiche di un qualsiasi sistema di particelle - che è il caso di interesse - siano determinate da una Hamiltoniana H che è invariante sotto le trasformazioni di qualche gruppo G . In tal caso si è soliti affermare che il gruppo G è il *gruppo di simmetria* dell'Hamiltoniana H .

Il fenomeno della *rottura* (o *violazione*) della simmetria può verificarsi in diverse situazioni e sotto particolari condizioni, che saranno trattate in dettaglio nel Capitolo

3. La formalizzazione matematica di questo aspetto di carattere eminentemente fisico prevede l'introduzione dei cosiddetti *parametri d'ordine* - proposti per la prima volta dal fisico Lev Davidovič Landau (Baku, 1908 – Mosca, 1968) - la cui definizione è la seguente:

Definizione 2 *Siano ϕ_α degli operatori non invarianti sotto un gruppo G . I valori di aspettazione $\langle \phi_\alpha \rangle$, $\alpha = 1, \dots, n$ di tali operatori sono detti **parametri d'ordine** (sebbene talvolta ci si riferisca con tale espressione agli operatori ϕ_α stessi).*

Come detto poc'anzi, il cambiamento del sistema da uno stato simmetrico (o fase *disordinata*) a uno stato meno simmetrico (fase *ordinata*) comporta sul piano matematico la comparsa di una o più nuove variabili, i parametri d'ordine appunto; pertanto un parametro d'ordine $\langle \phi_\alpha \rangle$ fornisce una misura del grado di asimmetria di un sistema e, conseguentemente, assume valore nullo nella fase disordinata e un valore diverso da zero nella fase ordinata che finisce per caratterizzare la rottura della simmetria discussa in precedenza. A livello formale una descrizione esauriente di una fase ordinata si basa sulla conoscenza della trasformazione dei parametri d'ordine $\langle \phi_\alpha \rangle$ sotto un certo gruppo G . I parametri d'ordine $\langle \phi_\alpha \rangle$ si trasformano sotto una rappresentazione n -dimensionale del gruppo G tale per cui per ogni suo elemento g esiste una matrice $T_{\alpha\beta}$ tale che $\langle \phi_\alpha \rangle \rightarrow T_{\alpha\beta}(g) \langle \phi_\beta \rangle$. Spesso è opportuno descrivere la fase ordinata servendosi di parametri d'ordine $\langle \phi_\alpha \rangle$ la cui trasformazione avviene sotto una rappresentazione irriducibile con la minima dimensione; in tal senso un insieme di parametri d'ordine $\langle \phi_\alpha \rangle$ può essere decomposto in sottoinsiemi disgiunti che non si mescolano sotto le operazioni gruppalì. Ciascuno di questi sottoinsiemi consta di k_I elementi la cui trasformazione avviene sotto una rappresentazione irriducibile k_I -dimensionale del gruppo G . Quest'ultimo può essere *discreto* o *continuo*: se nel primo caso ha generalmente un numero finito di elementi (un esempio è il gruppo di simmetria di un cubo), nel secondo possiede un continuo non numerabile di elementi (un esempio è il gruppo delle rotazioni). Inoltre ha senso operare una distinzione tra simmetrie *globali* e simmetrie *locali*: le prime si riferiscono ad una Hamiltoniana invariante rispetto ad operazioni di gruppo spazialmente uniformi, le seconde ad una Hamiltoniana che, in aggiunta alla caratteristica del caso precedente, è invariante sotto operazioni applicate indipendentemente a punti differenti nello spazio.

Ai fini della presente trattazione sono di particolare interesse le simmetrie di gruppo continuo o, più semplicemente, le *simmetrie continue*: il gruppo continuo più semplice a queste associato è il gruppo ortogonale O_2 delle rotazioni nel piano bidimensionale. Come noto, tale gruppo è isomorfo al gruppo $U(1)$ di trasformazioni di fase di un numero complesso. In questi casi si parla anche di *simmetria x - y* dal momento che le rotazioni avvengono nel piano x - y .⁴ ^4He superfluido avente fase con simmetria $U(1)$ rotta rappresenta l'applicazione più interessante di tale teoria che sarà trattata ampiamente nel Capitolo 3; nell'immediato seguito ne viene fornita una brevissima descrizione.

Poiché si opera nel gruppo $U(1)$ è evidente che la funzione d'onda (che descrive il condensato macroscopico) della fase superfluida possiede un'ampiezza e una fase. Inoltre, dato che si verifica la rottura della simmetria, è necessario introdurre un adeguato parametro d'ordine: il valore di aspettazione $\langle \psi(\mathbf{x}) \rangle$ dell'operatore di distruzione di Bose $\psi(\mathbf{x})$ è idoneo dal momento che possiede un'ampiezza e una fase, infatti: $\langle \psi \rangle = |\langle \psi \rangle| e^{i\theta}$. Se l'operatore di distruzione è responsabile della distruzione di una particella quantistica in \mathbf{x} , il suo operatore coniugato creerà una particella quantistica in \mathbf{x} .

In generale è utile studiare sistemi invarianti sotto il gruppo ortogonale n -dimensionale del gruppo O_n delle rotazioni in uno spazio n -dimensionale.

2.2 Il modello x - y

Nella presente sezione verrà brevemente delineato il modello x - y al quale si è accennato nella 2.1. Sempre nella 2.1 si è detto che la simmetria continua di maggior interesse è quella delle rotazioni nel piano bidimensionale e che i gruppi ad esse associate sono O_2 e, per isomorfismo, $U(1)$. La rottura di tale simmetria - che, come si vedrà nel Capitolo 3, è da imputare, limitatamente ai BEC, alla comparsa dei vortici - comporta l'introduzione di un parametro d'ordine che possa misurare adeguatamente il grado di asimmetria. Nel caso in esame è possibile scegliere equivalentemente tra due parametri d'ordine, che sono:

- il vettore bidimensionale $\langle \mathbf{s}(\mathbf{x}) \rangle = s(\cos\theta(\mathbf{x}), \sin\theta(\mathbf{x}))$;
- il numero complesso $\langle \psi \rangle = |\langle \psi \rangle| e^{i\theta}$, in totale analogia con quanto proposto nella 2.1,

in cui l'angolo θ si riferisce, rispettivamente, alla direzione o alla fase. Con l'espressione *modello x - y* ci si è soliti riferire a uno qualunque tra tutti i sistemi contemplati nel precedente elenco (come per esempio ^4He superfluido), aventi cioè come parametro d'ordine un vettore bidimensionale o un numero complesso. Nel modello x - y l'*energia libera* F è una grandezza che svolge un ruolo di grande importanza, come si apprezzerà nel seguito; essa, in una fase ordinata, può essere assimilata al fondo di una bottiglia di vino e il suo valore minimo è situato su un cerchio alla base di tale bottiglia. Mentre il raggio di tale cerchio identifica l'ampiezza del parametro d'ordine, sia essa $|\langle \mathbf{s} \rangle|$ o $|\langle \psi \rangle|$, l'angolo θ individua la posizione sulla circonferenza. Se le variazioni spazialmente uniformi dell'angolo θ producono rotazioni attorno alla base della bottiglia senza che si verifichino variazioni energetiche, quelle spazialmente non uniformi sono alla base di un incremento dell'energia libera F . L'*energia libera elastica* F_{el} è definita come $F_{el} \equiv F[\theta(\mathbf{x})] - F[\theta = \text{costante}]$ e la sua forma più semplice è del tipo:

$$F_{el} = \frac{1}{2} \int \rho_s [\nabla\theta(\mathbf{x})]^2 d^n x, \quad (2.1)$$

se si richiede che l'energia libera elastica F_{el} sia analitica, ossia sviluppabile localmente in una serie di potenze convergente, in $\nabla\theta$ e che non ci siano termini lineari in tale espansione dal momento che si sta considerando uno stato di minimo rispetto a tutte le variazioni del parametro d'ordine. Nella (2.1), che si riferisce al caso n -dimensionale, il coefficiente ρ_s è la cosiddetta *densità superfluida* nel caso dei superfluidi, ha le dimensioni di una forza diviso una lunghezza, quest'ultima elevata alla $n-3$ (o, equivalentemente, di una energia diviso una lunghezza elevata alla $n-2$) e sarà ampiamente utilizzata nel seguito.

L'assenza di campi esterni al sistema si traduce matematicamente in:

$$\frac{\delta F_{el}}{\delta\theta(\mathbf{x})} = -\rho_s \nabla^2 \theta(\mathbf{x}) = 0, \quad (2.2)$$

e fisicamente nell'affermare, analizzando la (2.2), che si sta considerando lo stato di minima energia libera elastica (che in questo caso è spazialmente uniforme nell'angolo θ). L'imposizione di condizioni al contorno, come per esempio il fatto che θ sia nullo lungo il piano $z = 0$ e pari a θ_0 lungo il piano $z = L$, implica che $\theta = \theta_0 \frac{z}{L}$ ma soprattutto che :

$$F_{el} = \frac{1}{2} \rho_s L^{n-2} \theta_0^2. \quad (2.3)$$

Nel caso di interesse, ossia quello bidimensionale, $n = 2$, pertanto l'energia elastica libera elastica F_{el} diventa, in accordo con la (2.3), indipendente da L .

L'applicazione di un campo esterno $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ provoca la rottura della simmetria rotazionale dell'Hamiltoniana di partenza; infatti si ha il seguente contributo esterno:

$$F_{est} = - \int \mathbf{h}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{s}(\mathbf{x}) d^n x = - \int |\mathbf{s}(\mathbf{x})| (h_x \cos\theta(\mathbf{x}) + h_y \sin\theta(\mathbf{x})) d^n x \quad (2.4)$$

Il contributo della (2.4) deve essere aggiunto all'energia elastica libera, che quindi diventa complessivamente:

$$F_T = F_{el} + F_{est} \quad (2.5)$$

La (2.5) può essere riscritta sviluppando in serie di Taylor il contributo dell'energia esterna: supponendo di sviluppare intorno a $\theta = 0$ il membro destro della seconda uguaglianza della (2.4) si ottiene:

$$F_T = \int \left[\frac{1}{2} \rho_s (\nabla\theta)^2 - sh_x + \frac{1}{2} sh_x \theta^2 - sh_y \theta + \dots \right] d^n x. \quad (2.6)$$

Quando il campo esterno $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ è spazialmente uniforme e diretto lungo l'asse x si ha che lo stato di minima energia è quello per cui $\theta = 0$ e $|\langle \mathbf{s}(\mathbf{x}) \rangle|$ è indipendente da \mathbf{x} . Se si

aggiunge un piccolo campo δh_y questo determina una variazione angolare $\delta\theta$ e la comparsa di una componente non nulla di $\langle \mathbf{s} \rangle$ lungo l'asse y , ossia $\delta \langle s_y \rangle = s\delta\theta$. Il rapporto $\frac{\delta \langle s_y(\mathbf{x}) \rangle}{\delta h_y(\mathbf{x})}$, ove con \mathbf{x}' si intende una posizione nello spazio diversa da \mathbf{x} è equivalente a $\frac{\delta\theta(\mathbf{x})}{\delta h_y(\mathbf{x})}$ se si tiene conto della precedente uguaglianza; fisicamente tale rapporto rappresenta la risposta esercitata da $\langle s_y \rangle$ ad un campo applicato perpendicolarmente. Ai fini del calcolo di $\frac{\delta\theta(\mathbf{x})}{\delta h_y(\mathbf{x})}$ occorre minimizzare la (2.6); così facendo si ottiene:

$$\frac{\delta F_T}{\delta\theta} = [-\rho_s \nabla^2 + sh_x]\theta - sh_y. \quad (2.7)$$

Risolvendo la (2.7) si ottiene:

$$\frac{\delta\theta(\mathbf{x})}{\delta h_y(\mathbf{x})} = \frac{s\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{[-\rho_s \nabla^2 + sh_x]}. \quad (2.8)$$

La (2.8) rappresenta pertanto l'espressione cercata per $\frac{\delta\theta(\mathbf{x})}{\delta h_y(\mathbf{x})}$.

2.3 Eccitazioni topologiche e vortici

Come accennato all'inizio del presente Capitolo, le *eccitazioni topologiche* - la cui trattazione è lo scopo di questa sezione - si manifestano in sistemi in cui si verifica la rottura della simmetria continua. Queste solitamente sono caratterizzate da una regione centrale in cui l'ordine viene meno e da una regione di campo, lontana dalla regione centrale, dove una variabile elastica subisce molto lentamente variazioni nello spazio. Nei casi di interesse, ossia il modello x - y , esposto nella 2.2 e ^4He superfluido, che sarà trattato nel Capitolo 3, le eccitazioni topologiche, la cui presenza influisce enormemente nella determinazione delle proprietà dei materiali, prendono il nome, fisicamente più consistente, di *vortici* e la loro regione centrale consiste semplicemente in un punto (per completezza si segnala che le eccitazioni topologiche sono chiamate *dislocazioni* nel caso dei cristalli periodici e *declinazioni* nel caso dei cristalli liquidi nematici).

D'ora in avanti si assumerà $n = 2$, salvo dove indicato diversamente. Il vettore bidimensionale $\langle \mathbf{s}(\mathbf{x}) \rangle = s(\cos\theta(\mathbf{x}), \sin\theta(\mathbf{x}))$ è una funzione periodica di $\theta(\mathbf{x})$; è possibile che in alcune circostanze $\langle \mathbf{s}(\mathbf{x}) \rangle$ sia continuo dappertutto tranne che in un sottospazio di dimensione necessariamente uguale a 1. Se si assume che l'angolo θ sia nella forma:

$$\theta(\mathbf{x}) = \phi + \theta_0, \quad (2.9)$$

ove θ_0 è una costante e in coordinate polari $\mathbf{x} = (r, \phi)$ si ha che $\langle \mathbf{s}(\mathbf{x}) \rangle$ è continuo. Esaminando la (2.9) è possibile concludere che:

$$\nabla\theta = \frac{1}{r}. \quad (2.10)$$

Si segnala che il campo associato al parametro d'ordine $\langle \mathbf{s}(\mathbf{x}) \rangle$ è irrotazionale; la dimostrazione, che sarà condotta nella (3.3), prende in considerazione il rotore del gradiente nella forma della (2.9) che è quindi nullo. Un rapido studio di funzione condotto sulla (2.10) suggerisce che si ha una singolarità solamente per $r = 0$, mentre negli altri punti $\nabla\theta$ è finita. Esistono due modi per rimuovere tale singolarità matematica e sono illustrati in Figura 2.1.

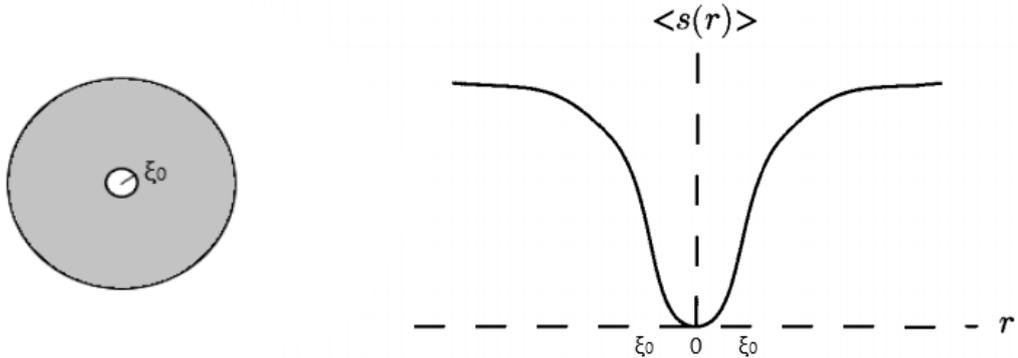


Figura 2.1: Nell'immagine a sinistra la singolarità è rimossa applicando un foro circolare di raggio ξ_0 , nell'immagine a destra si fa tendere a zero il parametro d'ordine in un intorno di raggio ξ_0 .

La prima modalità consiste nell'applicare un foro circolare di raggio ξ_0 intorno alla singolarità, la seconda prevede di far tendere a zero il parametro d'ordine in un intorno dell'origine, avente ampiezza pari al raggio ξ_0 di cui sopra, e di mantenerlo al valore di equilibrio in tutti gli altri punti. La conseguenza di una qualsiasi di queste due operazioni è che non ha più senso definire l'angolo θ nell'origine. Tale singolarità nell'origine avente dimensione pari a 0 (in quanto si tratta di un punto) rappresenta, da un punto di vista fisico, la regione centrale di un vortice, di cui adesso si andranno a studiare proprietà e caratteristiche, anche avvalendosi delle tecniche della topologia algebrica.

Un *vortice*, come detto in precedenza, è una eccitazione topologica e in quanto tale non può essere rimosso attraverso deformazioni continue del parametro d'ordine $\langle \mathbf{s}(\mathbf{x}) \rangle = s(\cos\theta(\mathbf{x}), \sin\theta(\mathbf{x}))$ la cui direzione è indicata dall'angolo θ . Tale angolo subisce una variazione di fase pari a 2π ogni qualvolta si descrive una circonferenza su un contorno circolare che racchiude la regione centrale, situata nell'origine, del vortice. Dal momento che, in virtù della periodicità, $\langle \mathbf{s}(\theta) \rangle = \langle \mathbf{s}(\theta + 2k\pi) \rangle$ per $k = 0, 1, 2, \dots$, esistono infinite e distinte singolarità in cui l'angolo θ subisce un incremento pari a $2k\pi$ in base al numero di giri k compiuti attorno alla regione centrale. k , che può pertanto assumere solo valori interi, viene chiamato *numero d'onda* o *forza* del vortice e caratterizza significativamente quest'ultimo.

Esistono infinite configurazioni del parametro d'ordine $\langle \mathbf{s}(\mathbf{x}) \rangle$ per cui $\theta(\mathbf{x})$ varia di $2k\pi$. D'ora in avanti si esclude l'eventualità, fisicamente e matematicamente poco interessante in quanto non si verifica nessuna variazione del sistema, in cui $k = 0$; allora, richiamando la (2.10) e adattandola al caso attualmente in esame, si ha che:

$$\nabla\theta = \frac{2k\pi}{r}. \quad (2.11)$$

L'analisi della (2.11) suggerisce che un generico numero d'onda k implica una singolarità in $\nabla\theta$ nell'origine: infatti, per $r \rightarrow 0$ si ha una divergenza.

Sebbene il parametro d'ordine $\langle \mathbf{s}(\mathbf{x}) \rangle$ sia continuo dappertutto, l'angolo θ non lo è se si riscrive la (2.9) come:

$$\theta(\mathbf{x}) = k\phi + \theta_0, \quad (2.12)$$

e se si impone che $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Infatti, esaminando la (2.12), l'angolo θ subisce una discontinuità pari a $2k\pi$ se l'asse positivo delle ascisse è percorso in senso antiorario. Pertanto tale asse può essere visto come un taglio o una cesura che introduce due superfici immaginarie lungo le quali θ assume il valore di 0 e di 2π , come è possibile vedere in Figura (2.2).

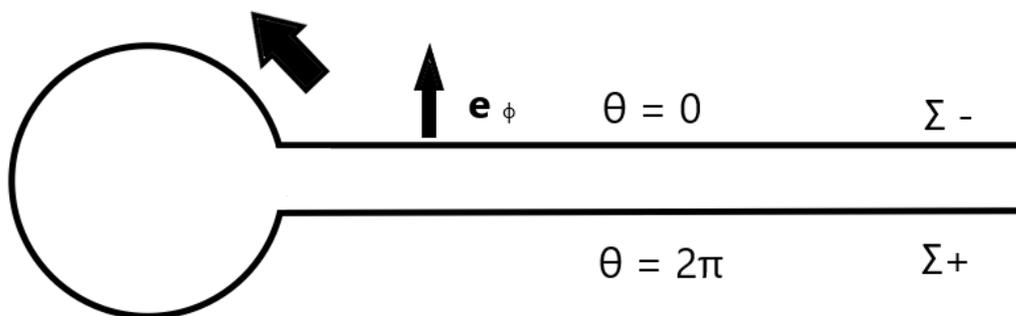


Figura 2.2: Taglio attraverso il quale l'angolo θ è discontinuo.

Si vuole ora stabilire in che senso e sotto quali condizioni un vortice può essere detto *topologicamente stabile*. Per farlo, è necessario considerare una deformazione priva di singolarità dallo stato perfettamente allineato: in questo caso è possibile operare mediante una serie di deformazioni in ciascuna delle quali ogni orientazione subisce una rotazione infinitesima. La sequenza di tali rotazioni riconduce il sistema allo stato perfettamente allineato. Se invece si prende un esame un vortice (e di conseguenza una

singularità) avente numero d'onda pari a 1 (sebbene tali considerazioni siano valide anche per differenti numeri d'onda), si ha che le rotazioni possono essere solamente di 2π (e non infinitesime) e che è impossibile applicare deformazioni in grado di condurre il sistema ad uno stato perfettamente allineato senza andare direttamente a manomettere le orientazioni ad una distanza arbitraria dalla regione centrale. Si parla, a proposito di questo stato di cose, di *stabilità topologica*. In Figura (2.3) è riportato un vortice con numero d'onda uguale a 1: esaminando la sua configurazione spaziale si nota che qualsiasi tentativo di deformazione volto a condurre il sistema nello stato perfettamente allineato in cui le orientazioni sono allineate lungo una sola direzione è votato al fallimento.

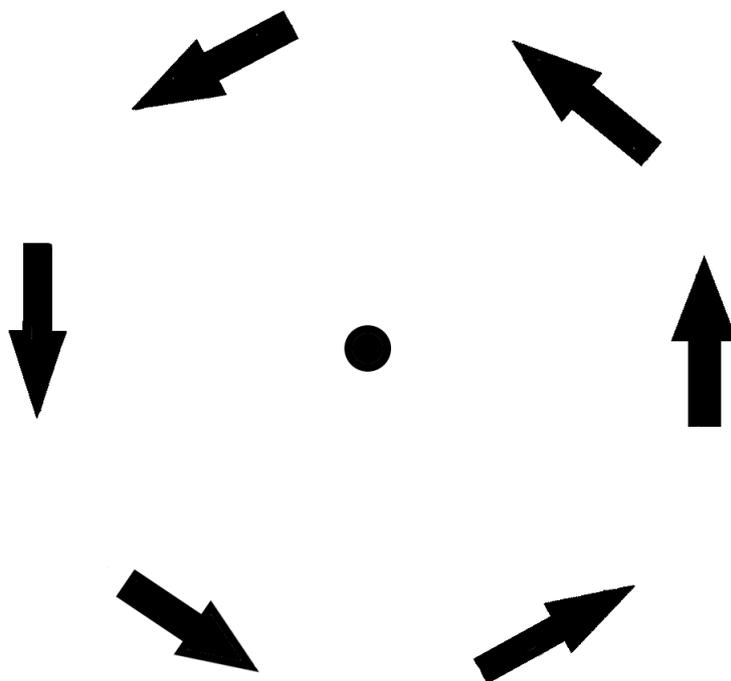


Figura 2.3: Un vortice avente numero d'onda pari a 1.

Ora si vuole provare la stabilità di un singolo vortice facendo considerazioni di carattere energetico. A tale scopo si riporta la Figura (2.4) che è una delle possibili configurazioni che si possono ottenere quando si applica una deformazione continua al vortice di partenza. In questo caso è necessaria una variazione discontinua di π per ottenere una configurazione spaziale allineata.

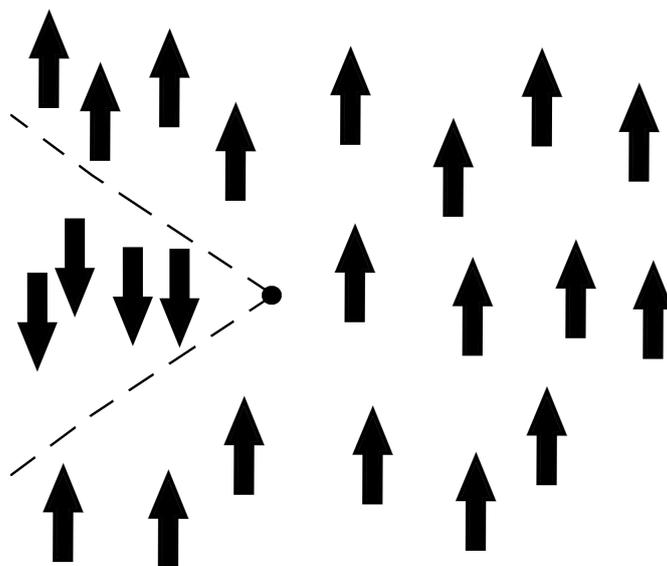


Figura 2.4: Una delle possibili configurazioni spaziali ottenibili attraverso una deformazione continua. Le linee tratteggiate segnalano il confine lungo il quale le orientazioni subiscono repentinamente un'inversione.

L'energia del sistema in Figura (2.4) è di gran lunga maggiore di quella del sistema iniziale in Figura (2.3). Inoltre, per passare dallo stato iniziale in (2.3) a quello finale in cui il sistema è perfettamente allineato, è necessaria una tappa intermedia rappresentata dalla configurazione in Figura (2.4) (o da una equivalente). Da queste due considerazioni si può dedurre che la probabilità che una fluttuazione statistica possa rimuovere un vortice è bassissima e che quindi quest'ultimo è un oggetto stabile. Per giunta lo stato vorticoso è stabile nonostante possieda un'energia notevolmente maggiore di quella associata allo stato fondamentale poiché in quest'ultimo caso non esiste un percorso o un cammino che non risulti energeticamente sfavorevole. In maniera analoga si dimostra che il numero d'onda di un vortice non può variare.

2.4 Generalizzazioni dei parametri d'ordine e delle eccitazioni topologiche

Nella presente sezione si affronta lo studio generale della stabilità topologica (concetto già introdotto nella 2.3) e della sua stretta dipendenza dalla simmetria del parametro d'ordine e dalla cosiddetta *codimensione* d' . La *codimensione* d' è data da $d' = d - d_s$, dove d è la dimensione del parametro d'ordine e d_s è la dimensione della regione centrale. Inoltre si vuole esaminare il concetto di eccitazione topologica nella sua generalità attraverso generici parametri d'ordine.

Come detto in precedenza, i vortici sono fondamentalmente oggetti bidimensionali e la loro regione centrale è costituita da un punto avente dimensione pari a zero. Allora risulta $d' = n$. Se si considera in un contesto tridimensionale un vortice la cui regione centrale è costituita da una linea si ha nuovamente $d' = n$. La stabilità topologica del vortice in esame non accomuna solamente i due casi precedentemente esposti (bidimensionale e tridimensionale) ma anche tutti quelli che contemplano dimensioni superiori. Da ciò si ricava la condizione alla base della stabilità topologica (sia che siano oggetto di studio i vortici, sia che lo sia la loro generalizzazione che consiste in un parametro d'ordine vettoriale n - dimensionale), ossia $d' = n$.

Per completezza della trattazione è necessario considerare le altre due casistiche, ossia $n < d'$ e $n > d'$. Nella prima eventualità non è possibile realizzare configurazioni in cui il parametro d'ordine ruota all'insegna della continuità attorno alla regione centrale: infatti, se questo è dato da una espressione del tipo $s(\phi) = \frac{\cos\phi}{|\cos\phi|}$, si ha $s = 1$ qualora $0 \leq \phi \leq \pi$ e $s = -1$ per $\pi \leq \phi \leq 2\pi$; pertanto il parametro d'ordine $s(\phi)$ varia in modo discontinuo da -1 a +1 quando si attraversa l'asse delle ascisse. In tal caso l'asse x è un'eccitazione topologica lineare (nota anche con il termine di *muro*), in contrapposizione alle eccitazioni topologiche puntuali esaminate prevalentemente finora.

Nella seconda eventualità non si registrano eccitazioni topologicamente stabili (o, nel caso di interesse, vortici topologicamente stabili): si considerino rotazioni tridimensionali in uno spazio bidimensionale; sebbene sia consentito costruire una configurazione in cui i 2/3 delle componenti rotazionali sono riarrangiate in modo tale da essere equivalenti alle componenti di un vortice con numero d'onda pari a 1, è possibile ottenere la cosiddetta *fuga dalla terza dimensione* che rende l'oggetto di partenza topologicamente instabile: è sufficiente operare mediante una sequenza di deformazioni infinitesimali (nelle direzioni delle rotazioni) per ottenere lo stato in cui si ha allineamento tridimensionale perpendicolare al piano bidimensionale che funge da vincolo. In Figura (2.5) è possibile visualizzare la procedura appena descritta.

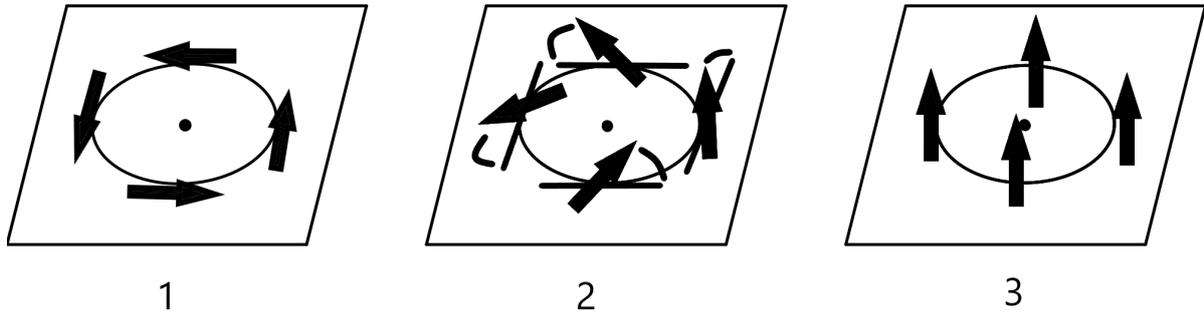


Figura 2.5: Sequenza di deformazioni che conducono allo stato totalmente allineato e perpendicolare al piano del vortice un vortice avente dimensione del parametro d'ordine pari a 3 e numero d'onda pari a 1.

Lo studio generale delle eccitazioni topologiche prevede l'impiego della topologia algebrica: la caratterizzazione di queste e le modalità con cui si intrecciano possono essere espresse formalmente attraverso l'introduzione del cosiddetto *spazio di parametro d'ordine* M ; quest'ultimo può essere pensato come la varietà dello stato fondamentale: per esempio può essere lo spazio dei parametri che descrive cambiamenti nel parametro d'ordine che lasciano inalterato l'equilibrio dell'energia libera, descritta nella (2.2). Concretamente lo spazio di parametro d'ordine M nel caso bidimensionale è la circonferenza unitaria (o S_1), nel caso tridimensionale è la superficie della sfera unitaria (o S_2) e nel caso più generale è la superficie della sfera unitaria n -dimensionale (o S_{n-1}). Il pedice w di S_w indica pertanto la dimensione della superficie di una generica sfera e non la dimensione dello spazio in cui è immersa quest'ultima.

Si consideri ora un generico spazio delle coordinate avente dominio D . Se si specifica il parametro d'ordine in tale spazio si ottiene una mappa (ossia una funzione continua) da D allo spazio del parametro d'ordine M . A titolo di esempio si riporta il caso di interesse, ossia quello dei vortici: il fatto di indicare l'angolo θ su un generico percorso chiuso Γ in D , totalmente equivalente da un punto di vista topologico alla circonferenza S_1 nello spazio delle coordinate, determina una mappa f dal percorso chiuso Γ allo spazio del parametro d'ordine M che in questo caso coincide con S_1 . In dimensione superiore il procedimento per la realizzazione della mappa è completamente analogo, tenuto conto della diversità di D e di M .

La presente sezione termina con un breve cenno allo spazio del parametro d'ordine M nel caso del modello x - y , affrontato nella (2.2). Esso si presta ad una serie di considerazioni: la più interessante di queste riguarda la relazione che intercorre tra le configurazioni spaziali sul percorso chiuso Γ e le mappe da questo allo spazio del parametro d'ordine M . In particolare, diverse configurazioni spaziali definiscono diverse mappe da D a M . Per esempio se tutte le orientazioni spaziali sono parallele l'immagine del percorso chiuso Γ

nello spazio del parametro d'ordine M consiste in un semplice punto. In altri termini in questo caso la mappa f restituisce un punto. In generale l'immagine di Γ in M contempla due casistiche:

- se Γ racchiude al suo interno un vortice l'immagine di Γ in M è un contorno chiuso che avvolge M una o più volte;
- se Γ non racchiude al suo interno un vortice l'immagine di Γ in M è un percorso che si chiude su sé stesso.

La Figura (2.6) riassume graficamente quanto detto a parole nel precedente capoverso sul modello $x-y$.

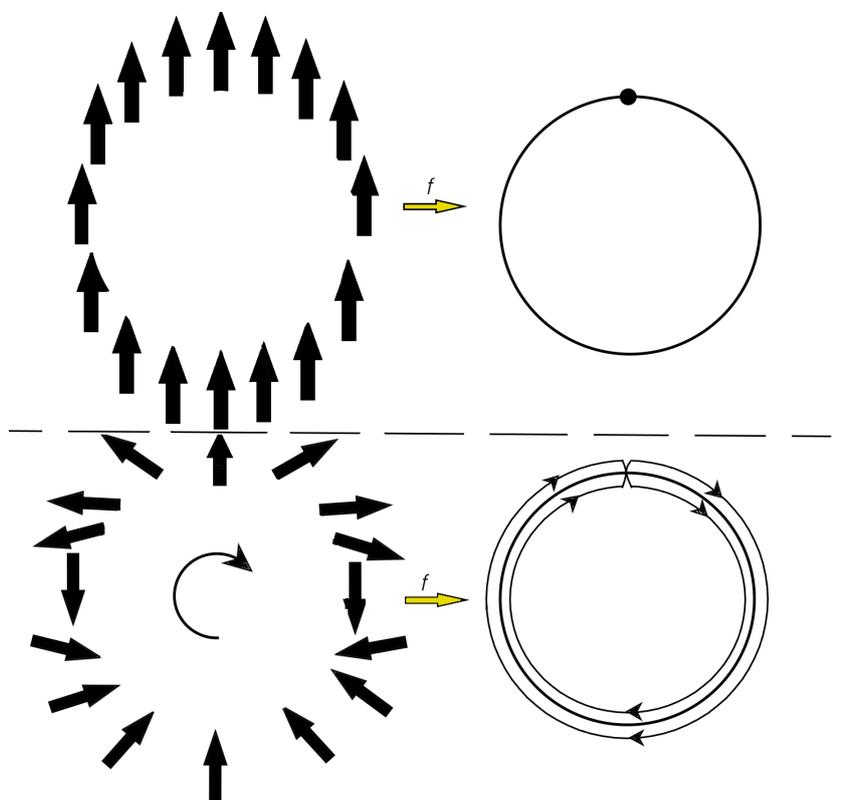


Figura 2.6: Orientazione spaziale su contorni circolari e spazio di parametro d'ordine realizzato dalla mappa a partire da tale contorno. Nel primo schema lo stato è allineato e la mappa produce un singolo punto, nel secondo lo stato non è allineato e possiede numero d'onda pari a 2 e la mappa avvolge due volte il contorno attorno allo spazio (circolare) di parametro d'ordine. Trattasi pertanto dell'immagine prodotta da un percorso chiuso che circonda un vortice.

Si conclude la presente sezione fornendo una rappresentazione alternativa dello spazio di parametro d'ordine. La circonferenza unitaria S_1 può essere pensata come una retta reale con la condizione che i punti su quest'ultima che sono separati da $2k\pi$ sono equivalenti. Pertanto un vortice avente numero d'onda k definisce una mappa da un percorso chiuso nello spazio reale a una retta reale che ha inizio nell'origine e termina nel punto $2k\pi$. La Figura (2.7) illustra tale rappresentazione alternativa.

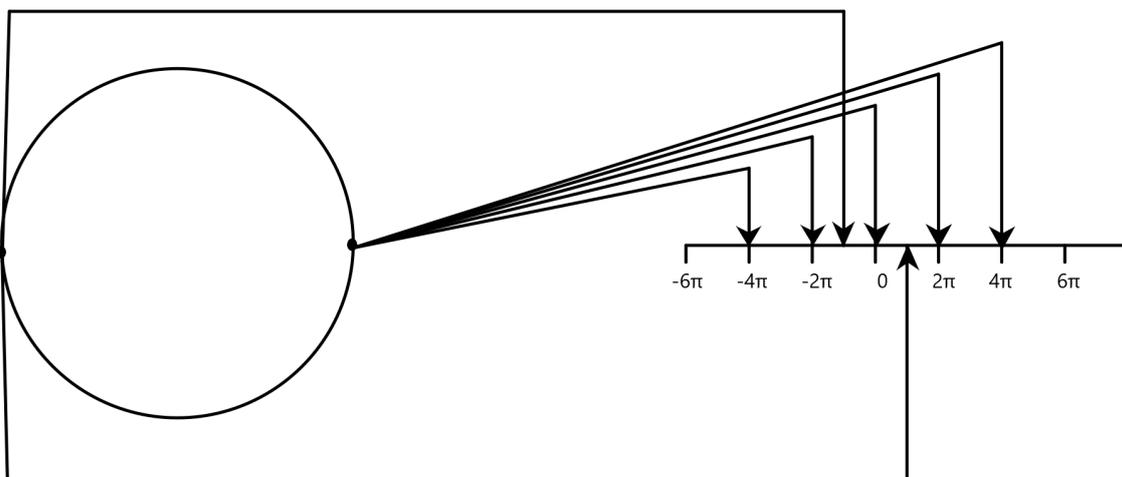


Figura 2.7: Rappresentazione alternativa di S_1 : si tratta della retta reale con la clausola di uguaglianza dei punti distanziati da $2k\pi$.

2.5 Deformazioni ed omotopia. Classi di omotopia

Verso il termine della (2.4) sono state prese in esame diverse mappe che stabiliscono genericamente una relazione funzionale (di tipo continuo) tra lo spazio delle coordinate di dominio D e lo spazio di parametro d'ordine M . Come è naturale ipotizzare, una deformazione dell'orientazione spaziale produce una deformazione a livello dell'immagine, ossia a livello del contorno chiuso in M ; inoltre, se Γ non attraversa la regione centrale, una deformazione continua di Γ stesso produce una deformazione continua dell'immagine in M . Lo studio di tali deformazioni costituisce lo scopo della presente sezione.

Alla luce delle precedenti considerazioni è interessante studiare la deformazione tra due mappe e come, mediante tale processo, una possa essere convertita nell'altra. A tal proposito è opportuno introdurre la seguente

Definizione 1 Siano f_0 e f_1 due mappe continue.

f_0 e f_1 sono dette **omotope** se possono essere deformate in maniera continua l'una nell'altra, ossia se esiste una famiglia h_t di mappe a un parametro tale che $h_{t=0} = f_0$ e $h_{t=1} = f_1$.

La realizzazione pratica della deformazione da f_0 a f_1 prende il nome di **omotopia**.

Possono essere riportati numerosi esempi sulle mappe omotope ma ci si limiterà ad analizzare quelli utili ai fini della trattazione. A tal proposito, è bene sottolineare che tutte le mappe che avvolgono la circonferenza unitaria S_1 nello spazio di parametro d'ordine M w volte sono omotope (la dimostrazione si conduce in maniera analoga a quella che stabilisce l'omotopia tra tutte le mappe che hanno come dominio un percorso chiuso Γ che non circonda un vortice e la mappa in cui lo stato è totalmente allineato - infatti in questo caso un percorso chiuso sulla circonferenza unitaria S_1 che tuttavia non la circonda totalmente può subire deformazioni continue che lo inducono a trasformarsi in un punto e così ci si riconduce alla situazione del primo schema della Figura (2.6)). Un altro esempio interessante riguarda differenti percorsi che racchiudono al loro interno le medesime eccitazioni topologiche: in questo caso, i due diversi percorsi Γ e Γ' definiscono due mappe omotope f_0 e f_1 dal momento che è possibile trovare una famiglia h_t di mappe a un parametro tale che $h_{t=0} = f_0$ e $h_{t=1} = f_1$. In generale con l'espressione *percorso chiuso che racchiude l'eccitazione* si intendono le mappe da S_n allo spazio del parametro d'ordine: in caso di spazio bidimensionale si ha a che fare con una circonferenza, se lo spazio è tridimensionale si sta considerando una sfera e così via.

Introdotte le nozioni di omotopia e mappe omotope, è opportuno prendere ora in considerazione le *classi di omotopia*. Queste ultime sono state introdotte per far fronte a diverse esigenze in ambito topologico ma, ai fini della trattazione, è sufficiente affermare pragmaticamente che la loro utilità consiste nella classificazione delle eccitazioni topologiche.

Definizione 2 *Eccitazioni topologiche appartengono alla stessa classe di omotopia se le mappe di tutti i percorsi che le circondano possono essere deformate in maniera continua le une nelle altre.*

Nel modello x - y bidimensionale il numero d'onda k riveste un'importanza cruciale nella determinazione delle differenti classi di omotopia dato che queste ultime si distinguono le une dalle altre in virtù del numero di volte che il percorso avvolge la circonferenza unitaria S_1 . Allora, in generale, è possibile affermare che le classi di omotopia possono essere definite per un qualsiasi modello prendendo in esame mappe da una qualunque superficie chiusa o percorso chiuso Γ allo spazio di parametro d'ordine M . Come esempio di classe di omotopia tridimensionale si riporta il gruppo ortogonale O_3 : qui tutte le mappe da percorsi chiusi alla superficie della sfera unitaria S_2 sono omotope dal momento che è possibile contrarre - e l'esperienza comune lo prova - qualsiasi percorso chiuso

sulla superficie di una sfera; un processo di deformazione continua conduce da una linea che cinge tutto l'equatore della sfera ad un punto in prossimità dei poli. Inoltre in tale contesto esiste solamente una classe di omotopia, ossia quella corrispondente all'identità.

La versatilità della teoria precedentemente esposta si manifesta, attraverso un processo analogico, nella possibilità di ricondurre la rete di relazioni che sussistono tra le eccitazioni topologiche al contesto in cui si studiano le connessioni tra i percorsi in diverse classi di omotopia nello spazio di parametro d'ordine. Questo è possibile poiché esiste una corrispondenza tra le eccitazioni topologiche e le classi di omotopia dello spazio di parametro d'ordine, come accennato in precedenza. Questo tipo di operazione si concretizza nella determinazione di una struttura di gruppo naturale. In particolare vale la seguente

Definizione 3 Il **gruppo fondamentale** dello spazio di parametro d'ordine M è il gruppo associato a percorsi chiusi nello spazio di parametro d'ordine M . Tale gruppo viene indicato con il simbolo $\pi_1(M)$.

In generale, il gruppo associato ad una superficie sferica chiusa n -dimensionale viene indicato con il simbolo $\pi_n(M)$.

Il modello x - y rappresenta ancora una volta un esempio efficace di quanto appena illustrato. Si considerino due vortici situati in diversi punti dello spazio e aventi numeri d'onda k_1 e k_2 . La somma di tali numeri d'onda rappresenta la modalità attraverso la quale tali eccitazioni topologiche interagiscono. Il percorso che racchiude entrambi i vortici è omotopo ai due percorsi che circondano singolarmente queste eccitazioni topologiche se si applica una sequenza di deformazioni continue al percorso originario. Il procedimento in questione è illustrato in Figura (2.8).

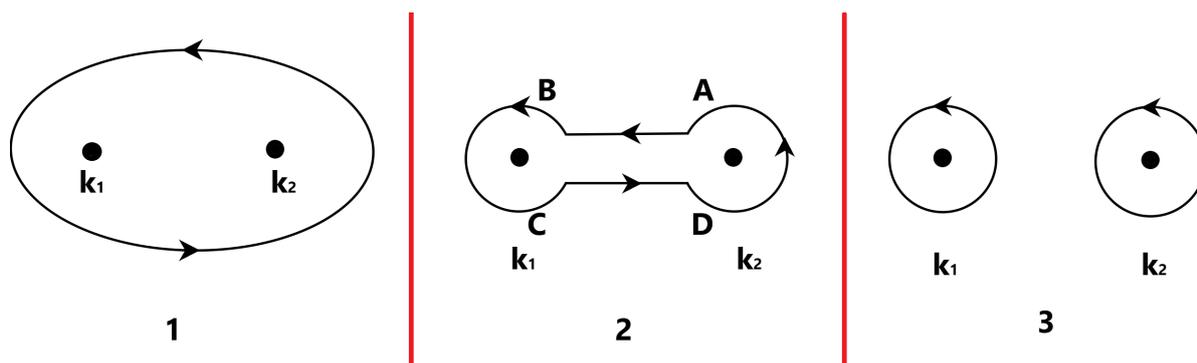


Figura 2.8: Sequenza di deformazioni che rende omotope le mappe della configurazione 1 e della configurazione 3. Questo è possibile poiché la variazione dell'angolo θ che si ha andando da A verso B compensa il cambiamento angolare che si verifica procedendo da C a D (va precisato che per parametri d'ordine più complessi non ha luogo tale cancellazione).

Poiché, come detto poc'anzi, la regola per combinare tra loro più vortici consiste nella somma dei loro numeri d'onda, il gruppo fondamentale in questo caso è quello degli interi rispetto all'operazione di somma ed è quindi Z , pertanto $\pi_1(S_2) = Z$. In questa situazione si ha che $\pi_1(S_2)$ è equivalente al gruppo che consta solo dell'identità (e quindi $\pi_1(S_2) = 0$) perché, come detto in precedenza, tutte le configurazioni delle orientazioni spaziali tridimensionali in $n = 2$ sono omotope. Generalizzando, si ha che:

$$\begin{aligned}\pi_n(S_n) &= Z \\ \pi_n(S_m) &= 0, \quad m > n.\end{aligned}\tag{2.13}$$

L'analisi della (2.13) suggerisce che per $n \geq 1$ ci sono configurazioni topologicamente stabili per orientazioni spaziali $n+1$ -dimensionali in uno spazio $n+1$ -dimensionale. Per completezza si segnala che generalmente i gruppi π_n per spazi di parametri d'ordine diversi da S_n non sono uguali a Z . Inoltre, per $n = 1$, ossia per il gruppo fondamentale, potrebbe addirittura non vigere la condizione di abelianità.

2.6 Calcolo dell'energia di un vortice

Nella presente sezione ci si propone di calcolare l'energia complessiva delle eccitazioni topologiche in generale e quindi, in particolare, dei vortici. Allo scopo verranno utilizzati alcuni risultati ottenuti nella (2.1) e nella (2.2). Una considerazione di natura preliminare suggerisce che l'energia E_d delle eccitazioni topologiche consta di due contributi: il primo è l'energia della regione centrale E_c mentre il secondo è l'energia elastica E_{el} . L'energia della regione centrale E_c è complicata da calcolare e in genere ci si limita alla determinazione del suo ordine di grandezza; concretamente è l'energia associata alla distruzione del parametro d'ordine nella regione centrale dell'eccitazione topologica. Una stima dell'energia della regione centrale E_c può essere condotta osservando che l'aumento dell'energia libera per unità di volume a causa della distruzione del parametro d'ordine è l'energia di condensazione f_{cond} dello stato ordinato. L'ordine di grandezza dell'energia della regione centrale E_c è dato dal termine di area o di volume - a seconda che si stiano considerando rispettivamente due o tre dimensioni - moltiplicato per l'energia di condensazione f_{cond} . Allora, nel caso di interesse, poiché i vortici sono sostanzialmente oggetti bidimensionali si ha che:

$$E_c = Ca^2 f_{cond},\tag{2.14}$$

ove C è una generica costante numerica e a rappresenta il raggio della regione centrale. Per completezza si segnala che, in virtù dei ragionamenti condotti sulla codimensione nella (2.4), la (2.14) rappresenta anche l'energia della regione centrale per unità di lunghezza di una linea di vortice in tre dimensioni.

Per il calcolo dell'altro contributo all'energia E_d , ossia l'energia elastica E_{el} che è genericamente associata alla lenta variazione spaziale lontano dalla regione centrale della variabile elastica, è necessario procedere alla valutazione del parametro d'ordine di un vortice in due dimensioni che altro non è che l'angolo θ ; quest'ultimo assume un solo valore in un giro completo del percorso chiuso Γ , vale a dire che si ha:

$$\oint_{\Gamma} d\theta = \oint_{\Gamma} \frac{d\theta}{ds} ds = 2k\pi \quad \text{per } k = 0, 1, \dots, s. \quad (2.15)$$

Il versore tangente alla regione centrale, sia essa un punto nel caso bidimensionale o una linea nel caso tridimensionale, è scelto in modo tale da essere una funzione continua della lunghezza d'arco e definisce una direzione \mathbf{l} per ciascun punto per tutta la sua lunghezza. L'integrale di linea della (2.15) è percorso nel senso antiorario definito dalla regola della mano destra e dal versore tangente \mathbf{l} . La Figura (2.9), riportata in fondo alla presente sezione, esemplifica quanto detto finora.

La configurazione di un vortice bidimensionale nel modello x - y al di fuori della regione centrale è ottenuta attraverso la minimizzazione dell'energia libera elastica soggetta a tale vincolo topologico. L'espressione dell'energia libera elastica minima che ci si propone di trovare è stata già ricavata nella (2.2) e corrisponde alla (2.2) con l'aggiunta della condizione (2.15). Il campo che soddisfa entrambe tali equazioni, relative rispettivamente alla condizione di equilibrio e al vincolo del percorso, è dato dalla (2.12) che per comodità si trascrive:

$$\theta = k\phi, \quad (2.16)$$

ove si è posto $\theta_0 = 0$ e $\phi = \text{tg}(y/x)$. Allora, ponendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ si ha, partendo dalla (2.16):

$$\nabla\theta = \frac{k}{r} \mathbf{e}_{\phi}. \quad (2.17)$$

Poiché la (2.17) altro non è che la velocità tangenziale del vortice (la quale è inversamente proporzionale alla distanza dall'origine) è sensato scrivere $\mathbf{v}_s \equiv \nabla\theta$. Riprendendo la (2.1) e adattandola al presente contesto in cui si assume una densità costante, è possibile ricavare l'energia elastica E_{el} del vortice che ci si proponeva di calcolare; infatti, procedendo per gradi, si ha:

$$E_{el} = \frac{1}{2} \rho_s \int \mathbf{v}_s^2 d^2x. \quad (2.18)$$

Tenendo conto che $\mathbf{v}_s \equiv \nabla\theta$, che $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e sostituendo la (2.17) nella (2.18), si ottiene:

$$E_{el} = \frac{1}{2} \rho_s 2\pi k^2 \int_a^R \frac{r}{r^2} dr, \quad (2.19)$$

ove gli estremi di integrazione, a e R , rappresentano rispettivamente il raggio della regione centrale e la dimensione lineare del sistema. Risolvendo l'integrale che compare nella (2.19) si ottiene l'espressione cercata:

$$E_{el} = \pi k^2 \rho_s \ln(R/a) \quad (2.20)$$

A questo punto, noti i due contributi energetici E_c (si veda la (2.14)) e E_{el} (si veda la (2.20)) si è in grado di scrivere l'energia complessiva E_v di un vortice come la semplice somma di questi:

$$E_v = E_c + E_{el} \quad (2.21)$$

Una precisazione relativa alla (2.21) riguarda il raggio della regione centrale a : si tratta di un parametro variazionale che di norma non viene esplicitato. Tuttavia, nell'ottica della minimizzazione di E_v , che prevede che siano minimizzate la (2.14) e la (2.21) rispetto ad a impiegando nelle manipolazioni algebriche la cosiddetta *relazione di scala di Josephson* e un'altra relazione (delle quali non verranno forniti i dettagli per brevità), si trova, come mostrato in [3], che:

$$a = \frac{k\sqrt{\pi\rho_s}}{\sqrt{2A}f_{\text{cond}}} \sim k\xi, \quad (2.22)$$

ove ξ è la lunghezza di correlazione e k il numero d'onda. Quindi la (2.22) afferma in sostanza che all'aumentare del numero d'onda di un vortice aumenta il raggio della regione centrale. Sulla falsariga di tali considerazioni, riprendendo la (2.14) e utilizzando la (2.22), si ottiene che:

$$E_c = \frac{1}{2}\pi\rho_s k^2. \quad (2.23)$$

La (2.23) mostra che l'energia della regione centrale E_c cresce quadraticamente con il numero d'onda k .

Un metodo alternativo per la determinazione dell'energia elastica E_{el} merita di essere preso in considerazione in quanto ben si presta ai successivi sviluppi che saranno trattati nella prossima sezione. Constatato che \mathbf{v}_s è una variabile continua mentre l'angolo θ , sulla base della (2.16), è una funzione polidroma, richiamando la Figura (2.2), in cui le normali alle superfici Σ^- e Σ^+ (lungo le quali l'angolo θ assume rispettivamente valore 0 e $2k\pi$) sono rispettivamente $-\mathbf{e}_\phi$ e \mathbf{e}_ϕ e introducendo il campo $\mathbf{h}_s = \rho_s \mathbf{v}_s$, si ha - riprendendo la (2.1) - che:

$$E_{el} = \frac{1}{2} \int \rho_s (\nabla\theta)^2 d^2x = \frac{1}{2} \int \theta \mathbf{h}_s \cdot d\Sigma - \frac{1}{2} \rho_s \int \theta \nabla^2 \theta d^2x, \quad (2.24)$$

ove è stata condotta l'integrazione per parti utilizzando, a partire dalla (2.2), il fatto che $\nabla^2 \theta = 0$. A questo punto, dato che l'integrale di superficie interessa le due parti dei tagli, dalla (2.24) si ottiene:

$$\begin{aligned}
E_{el} &= \frac{1}{2} \left(\int \theta^+ \mathbf{h}_s \cdot d\Sigma^+ + \int \theta^- \mathbf{h}_s \cdot d\Sigma^- \right) = \\
&= \frac{1}{2} (\theta^+ + \theta^-) \int_a^R \rho_s |\mathbf{v}_s| dr = \pi k^2 \rho_s \ln(R/a),
\end{aligned} \tag{2.25}$$

dove è ancora stata impiegata la relazione $\nabla^2 \theta = 0$. Il confronto dell'ultima uguaglianza della (2.25) con la (2.20) suggerisce l'equivalenza dei due metodi.

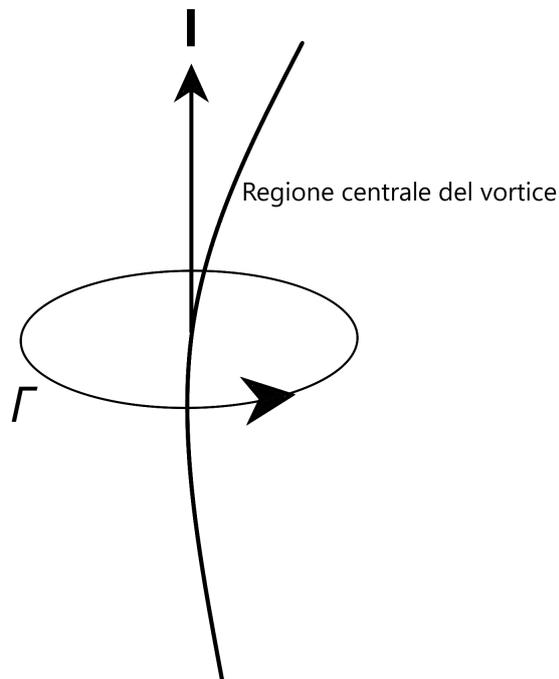


Figura 2.9: Percorso chiuso Γ che circonda la regione centrale di un vortice e versore tangente \mathbf{I} a quest'ultima.

2.7 Energia di interazione tra due vortici

Nella presente sezione che conclude il Capitolo 2 si prende in considerazione uno degli aspetti più importanti della fisica dei vortici, ossia le loro interazioni. Per semplicità si tratterà il caso in cui sono solamente due vortici ad interagire tra loro. Come accennato nella (2.6) si procederà in maniera analoga al calcolo dell'energia elastica attraverso il metodo riportato alla fine della precedente sezione. Concretamente si introdurrà quindi un taglio per ogni vortice. Il procedimento è illustrato in Figura (2.10).

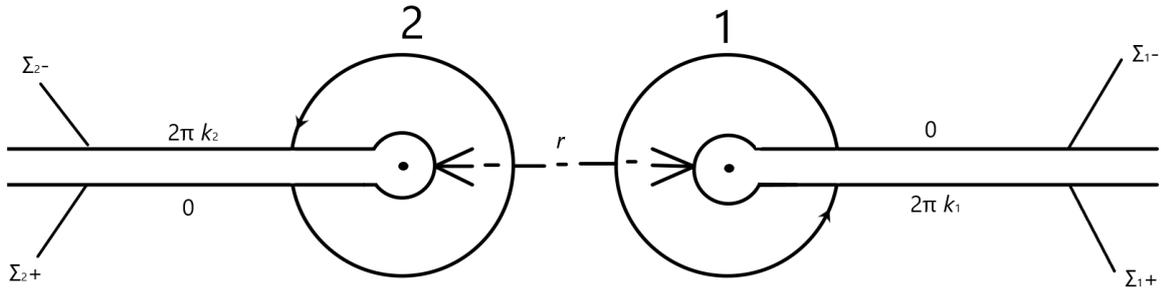


Figura 2.10: Due vortici aventi numero d'onda k_1 e k_2 separati da una distanza r . Si tratta di una generalizzazione della (2.2). Le superfici contrassegnate con "+" hanno le normali parallele al vettore \mathbf{e}_ϕ definito rispetto all'origine collocata in corrispondenza della regione centrale per ogni vortice.

Nel caso generale con n vortici si trova che, all'equilibrio (ossia $\nabla^2\theta = 0$), $\theta = \sum_i \theta_i$ con $\theta_i = k_i \arctg[(y - y_i)/(x - x_i)]$ è una soluzione in due dimensioni dove il vortice i -esimo ha numero d'onda k_i e si trova in $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$ - la dimostrazione si può condurre a partire dall'uso delle coordinate complesse $z = x + iy$ e $\bar{z} = x - iy$. Nel caso di interesse allora è necessario considerare un sistema formato da due vortici - aventi numeri d'onda k_1 e k_2 - che si trovano nelle posizioni \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 . L'angolo $\theta(\mathbf{x})$ è dato, coerentemente con quanto osservato nel caso generale, da $\theta(\mathbf{x}) = \theta_1 + \theta_2$ con $\theta_1 = \arctg[(y - y_1)/(x - x_1)]$ e $\theta_2 = \arctg[(y - y_2)/(x - x_2)]$. Scrivendo inoltre $\mathbf{v}_{s1} = \nabla\theta_1$ e $\mathbf{v}_{s2} = \nabla\theta_2$ l'energia elastica dei due vortici è data, sempre ricordando la (2.1), da:

$$E_{el} = \frac{1}{2} \int \rho_s (\mathbf{v}_{s1} + \mathbf{v}_{s2})^2 d^2x = E_1 + E_2 + \frac{1}{2} \int (\mathbf{h}_{s1} \cdot \mathbf{v}_{s2} + \mathbf{h}_{s2} \cdot \mathbf{v}_{s1}) d^2x, \quad (2.26)$$

ove E_1 e E_2 sono le energie dei vortici presi singolarmente (corrispondono rispettivamente al primo e al secondo termine quadratico) e ove sono stati introdotti i campi $\mathbf{h}_{s1} = \rho_s \mathbf{v}_{s1}$ e $\mathbf{h}_{s2} = \rho_s \mathbf{v}_{s2}$. Proseguendo nello sviluppo della (2.26) si ha:

$$\begin{aligned}
E_{el} &= E_1 + E_2 + \frac{1}{2}(\theta_2^+ - \theta_2^-) \int_r^R \rho_s \frac{k_1}{r} dr + \frac{1}{2}(\theta_1^+ - \theta_1^-) \int_r^R \rho_s \frac{k_2}{r} dr = \\
&= E_1 + E_2 + 2\pi\rho_s k_1 k_2 \ln(R/r),
\end{aligned} \tag{2.27}$$

ove con r si è denotata la distanza tra i due vortici. Riconoscendo nel termine misto della (2.27) un'espressione simile all'energia elastica di un singolo vortice (si veda la (2.20) ad eccezione della presenza dei due numeri d'onda k_1 e k_2 e della distanza r al denominatore del logaritmo in luogo del raggio del vortice a), è possibile giungere ad un'espressione più compatta della (2.27) che è:

$$E_{el} = \rho_s \pi (k_1 + k_2)^2 \ln(R/a) + 2\pi\rho_s k_1 k_2 \ln(a/r). \tag{2.28}$$

L'analisi della (2.28) suggerisce che la divergenza data da $\ln R$ scompare qualora $k_1 = -k_2$. Una immediata generalizzazione di questo aspetto consiste nell'affermare che in un sistema di n vortici in cui la somma algebrica dei numeri d'onda k_n è nulla si ha che il termine in cui compare il logaritmo di R non è presente e ciò significa che l'energia del sistema non diverge se la dimensione del sistema fa altrettanto. Un altro aspetto che merita di essere sottolineato riguarda il segno dell'energia di interazione che dipende dal segno relativo di k_1 e k_2 : in particolare se k_1 e k_2 hanno segno opposto l'interazione è attrattiva, mentre se il segno è il medesimo l'interazione è repulsiva (tale considerazione vale in virtù del fatto che il logaritmo del secondo termine della (2.28) è una funzione monotona decrescente all'aumentare della distanza tra i due vortici). A questo punto è possibile calcolare la forza che il primo vortice esercita sul secondo semplicemente come:

$$\mathbf{F}_{21} = -\nabla_2 E = 2\pi\rho_s k_1 k_2 \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^2}. \tag{2.29}$$

Il risultato ottenuto nella (2.29) può essere come di consueto esteso anche al caso di due linee vorticosi in tre dimensioni, così come il calcolo dell'energia dei percorsi chiusi attraverso l'integrale di superficie.

Si è ora in grado di affrontare lo studio dei fenomeni vorticosi dal punto di vista fisico; è questo lo scopo del Capitolo 3.

Capitolo 3

Superfluidità e vortici

Nel presente Capitolo si utilizzano i risultati ottenuti nel Capitolo 2 per condurre lo studio dei vortici da un punto di vista fisico. Nello specifico sarà preso in considerazione il fluido quantistico e verranno esaminati gli aspetti che lo differenziano da quello classico; dopodiché si procederà con l'analisi della superfluidità (già richiamata nel Capitolo 1) e si cercheranno di comprendere le ragioni per cui essa è alla base del meccanismo di formazione dei vortici; infine questi ultimi verranno esaminati nel caso di ^4He superfluido con cenni al BEC atomico (che sarà principalmente oggetto del Capitolo 4). Si seguirà principalmente [1] integrando opportunamente alcuni passaggi tratti da [3], [5] e [7].

3.1 Fluidi classici e fluidi quantistici

Come già accennato alla fine del Capitolo 1, un fluido quantistico rimane un fluido anche a temperature particolarmente basse, in prossimità delle quali gli effetti quantomeccanici sono ben evidenti. Esso si contrappone ad un fluido classico per il quale invece gli aspetti della Meccanica Quantistica sono pressoché irrilevanti; le sue proprietà sono esclusivamente determinate dalla Meccanica Statistica Classica. Un esempio di fluido quantistico è dato da un sistema di atomi di He, mentre un sistema di atomi di Ne ben rappresenta un esempio di fluido classico. In ciascuno di questi due sistemi gli atomi interagiscono tra loro - soprattutto a coppie - attraverso un certo potenziale di interazione U_r . Il potenziale nelle vicinanze del valore di equilibrio può essere in questo caso approssimato abbastanza efficacemente mediante il potenziale di Lennard-Jones che è del tipo:

$$U(r) = \epsilon_0 \left(\frac{d^{12}}{r^{12}} - 2 \frac{d^6}{r^6} \right), \quad (3.1)$$

ove r è la distanza interatomica, mentre d definisce la posizione del pozzo di potenziale ed ϵ_0 la sua profondità. L'andamento del potenziale di Lennard-Jones (la cui equazione

è data dalla (3.1)) è illustrato in Figura (3.1) alla fine della presente sezione. Sperimentalmente si ricava che il potenziale minimo si trova ad una separazione interatomica di $d=0.265$ nm e ad una profondità corrispondente di $\epsilon_0 = 1.03$ meV nel caso di He. Per quanto concerne il Ne invece si ha $d=0.296$ nm e $\epsilon_0 = 3.94$ meV. Una rapida analisi dei dati suggerisce che il potenziale di interazione dei due tipi di atomi ha grosso modo il minimo nella medesima posizione ma che la profondità nel caso di Ne è quattro volte superiore se paragonata a quella di He. Ciò significa che, sebbene il profilo dell'interazione sia molto simile, gli atomi di Ne sono molto più legati tra loro. La debole attrazione interatomica degli atomi di He, congiuntamente alla loro massa atomica, decisamente inferiore (4 u contro 20 u), fa sì che questi ultimi possano essere trattati come un liquido quantistico, a differenza di Ne e agli altri gas nobili che hanno un comportamento eminentemente classico.

Ora si vuole determinare un criterio che consenta di stabilire in modo quantitativo se un fluido possa essere trattato quantisticamente o classicamente. Allo scopo è necessario ricavare la nota distribuzione dei momenti di Maxwell-Boltzmann. Quest'ultima si ottiene a partire dalla distribuzione canonica nel caso dei gas perfetti che è:

$$\rho_c = \frac{e^{-\beta p^2/2m}}{V(2\pi mk_B T)^{3/2}}, \quad (3.2)$$

ove tutte le grandezze presenti e le relazioni che intercorrono tra queste sono state presentate nel Capitolo 1. L'integrazione della (3.2) sulle componenti della posizione e il passaggio in coordinate polari forniscono la distribuzione di probabilità cercata relativa all'impulso:

$$P_{\text{MB}}(p) = \frac{4p^2}{\sqrt{\pi}(2mk_B T)^{3/2}} e^{-p^2/2mk_B T} \quad (3.3)$$

La (3.3), sebbene ricavata da premesse che interessavano i gas perfetti, ha validità generale. Il massimo di tale distribuzione si ha approssimativamente per un valore dell'impulso pari a $p = \sqrt{2mk_B T}$. Poiché la lunghezza d'onda di De Broglie è data da $\lambda = h/p$, da un punto di vista quantistico una qualsiasi particella avrà una *lunghezza d'onda termica di De Broglie* definita convenzionalmente come:

$$\lambda_{\text{dB}} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}. \quad (3.4)$$

La (3.4) determina se un fluido possa essere trattato quantisticamente o classicamente: infatti, quando la lunghezza d'onda termica di De Broglie è dello stesso ordine di grandezza delle altre scale di lunghezza del fluido gli effetti quantistici sono ben presenti, mentre questi ultimi sono trascurabili quando lo è anche λ_{dB} . Così, se nel caso di Ne si ha, per una temperatura di 27 K (ossia quella di liquefazione), $\lambda_{\text{dB}} = 0.07$ nm a fronte di $d = 0.3$ nm (e quindi gli effetti quantistici non sono apprezzabili), nel caso di ^4He liquido

si ha, per una temperatura di 4 K (ossia quella di liquefazione), $\lambda_{dB} = 0.4$ nm e $d = 0.27$ nm (pertanto si assiste alla predominanza dei fenomeni quantistici). Il diagramma di fase di ${}^4\text{He}$ è molto differente da quello della maggior parte delle sostanze in virtù degli effetti quantomeccanici: innanzitutto non esiste in questo caso il punto triplo, vale a dire una coppia di valori pressione-temperatura tale per cui la fase solida, liquida e gassosa coesistono; infatti, la linea di transizione liquido-gas non interseca mai la linea di transizione liquido-solido. Inoltre per valori di pressione inferiori a 2.5 MPa non esiste la fase solida per alcun valore di temperatura, quindi ${}^4\text{He}$ rimane liquido anche in prossimità dello Zero assoluto. Per giunta ${}^4\text{He}$ possiede due differenti fasi liquide: ${}^4\text{He}$ liquido I è un normale liquido, mentre ${}^4\text{He}$ liquido II è un superfluido le cui proprietà sono state accennate nel Capitolo 1 (viscosità nulla, infinita conduttività termica, ecc.). La spiegazione del motivo per cui ${}^4\text{He}$ non diventa solido a bassissime temperature risiede nel fatto che un fluido (in questo caso un liquido) quantistico ha un moto di punto zero e, conseguentemente, un'energia cinetica di punto zero in virtù del Principio di Indeterminazione. Nell'ipotesi che ciascun atomo del solido vibri attorno alla sua posizione di equilibrio si ha che l'energia di punto zero è data da $E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega_0$, ove ω_0 che è la frequenza vibrazionale è, nell'ipotesi del potenziale di interazione alla Lennard-Jones, $\omega_0 = \sqrt{\frac{4k}{m}}$.

La costante elastica k è definita come $k \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U(r)}{\partial r^2}$ ed è (sempre considerando il potenziale di Lennard-Jones) $k = \frac{36\epsilon_0}{r_0^2}$, ove r_0 è la distanza di equilibrio. Il calcolo esplicito nel caso di ${}^4\text{He}$ conduce ad un'energia di punto zero di circa 7 meV che è equivalente da un punto di vista termico ad un moto che si avrebbe ad una temperatura di 70 K, valore per il quale non avviene ovviamente la transizione da liquido a solido (si precisa che in questo caso la fase solida si ha solo a seguito dell'applicazione di una pressione esterna).

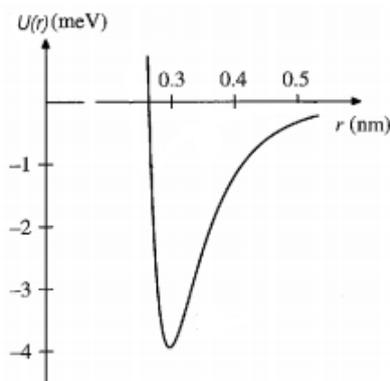


Figura 3.1: Potenziale di Lennard-Jones. Si tratta del potenziale più utilizzato ai fini della descrizione dell'interazione interatomica (e intermolecolare). Immagine tratta e adattata da [1].

3.2 Analisi della superfluidità

L'oggetto di studio della presente sezione riguarda la superfluidità: tale fenomeno sarà analizzato attraverso il formalismo matematico introdotto nel Capitolo 2.

Come detto nella (3.1) ${}^4\text{He}$ possiede due diverse fasi liquide, denotate con I (liquido normale) e II (superfluido). Il sistema bidimensionale che si vuole analizzare è del tutto equivalente al modello x - y studiato nel Capitolo 2, pertanto anche in tal caso è necessario introdurre un parametro d'ordine in grado di rendere conto delle peculiarità di ${}^4\text{He}$. Il candidato più idoneo è la *funzione d'onda macroscopica* del tipo $\psi = |\psi|e^{i\theta}$, introdotta nel Capitolo 2 (essa, sebbene non sia un valore di aspettazione, costituisce a pieno titolo un parametro d'ordine, come specificato nella Definizione 2 nella (2.1)) dal momento che la sua fase, rappresentata dall'angolo θ , è l'argomento di un versore bidimensionale del tipo $\mathbf{n}(\mathbf{r}) = (n_x, n_y) = (\cos\theta, \sin\theta)$ che descrive efficacemente il sistema in esame. Infatti quando ${}^4\text{He}$ liquido si trova nella fase I, tale versore ha un'orientazione casuale nello spazio, mentre se ${}^4\text{He}$ liquido si trova nella fase II l'ordine del versore è garantito a lungo raggio con una direzione comune ed arbitraria. La Figura (3.2) illustra quanto detto a parole.

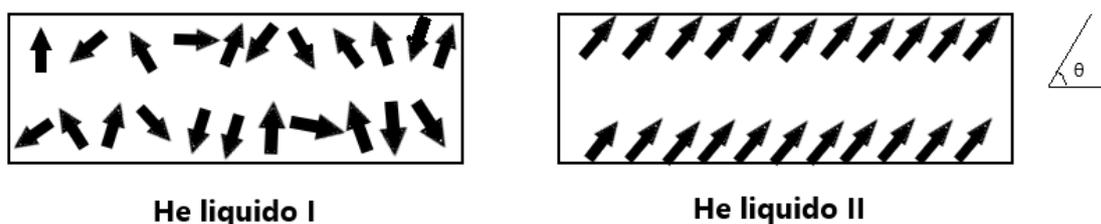


Figura 3.2: Modello x - y applicato alle fasi liquide di ${}^4\text{He}$. Il vettore bidimensionale $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ ha un'orientazione casuale nella fase liquida I, mentre si ha la condizione di allineamento nella fase liquida II.

La funzione d'onda macroscopica $\psi = |\psi|e^{i\theta}$, come suggerisce il nome, corrisponde ad un numero macroscopico di particelle (o ad un condensato, motivo per il quale si è soliti porre il pedice $_0$ intendendo in tal modo lo stato fondamentale). Essa può essere normalizzata in modo tale che la densità di particelle nel condensato (già trattata nella (1.3)) risulti essere:

$$\rho_0 = |\psi_0(\mathbf{r})|^2. \quad (3.5)$$

La (3.5) rappresenta un passaggio obbligato per pervenire al numero totale di particelle del condensato (di cui si è già discusso nella (1.40)):

$$N_0 = \rho_0 V = \int |\psi_0(\mathbf{r})|^2 d^3r. \quad (3.6)$$

Come già detto in precedenza, al di sotto della temperatura critica T^* , il numero di particelle N_0 del condensato è una frazione finita rispetto al numero complessivo di particelle N , mentre al di sopra di tale valore tale numero è sostanzialmente zero. A questo punto è possibile scrivere, richiamando la (3.5):

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho_0(\mathbf{r})}e^{i\theta(\mathbf{r})}. \quad (3.7)$$

La (3.7) mostra che non è possibile definire l'angolo θ (ossia la fase) qualora il modulo della funzione d'onda macroscopica fosse nullo. Se così non fosse è invece ragionevole pensare tale angolo come un parametro fisico del sistema. Tale fase della funzione d'onda diviene infatti ordinata al raggiungimento della temperatura critica T^* e ciò in altri termini equivale ad affermare che la funzione d'onda macroscopica è il parametro d'ordine di ^4He liquido II (fase superfluida).

Il cosiddetto *superflusso*, che è un flusso di particelle che si trovano in una fase superfluida, si manifesta ogniqualvolta l'angolo θ non è costante, cioè varia nello spazio. Dalla Meccanica Quantistica è noto che la densità di corrente per un flusso di particelle nel caso in esame è data da:

$$\mathbf{j}_0 = \frac{\hbar}{2mi}[\psi_0^*(\mathbf{r})\nabla\psi_0(\mathbf{r}) - \psi_0(\mathbf{r})\nabla\psi_0^*(\mathbf{r})]. \quad (3.8)$$

Sostituendo nella (3.8) le espressioni esplicite che compaiono si ottiene:

$$\mathbf{j}_0 = \frac{\hbar}{m}\rho_0\nabla\theta. \quad (3.9)$$

Fisicamente la densità di corrente \mathbf{j}_0 rappresenta il numero di particelle che fluiscono attraverso un'area unitaria in un secondo nel condensato. Analizzando la (3.9) si può osservare che il rapporto \mathbf{j}_0/n_0 da un punto di vista dimensionale è una velocità, pertanto si può scrivere:

$$\mathbf{v}_{\text{sf}} = \frac{\hbar}{m}\nabla\theta. \quad (3.10)$$

La (3.10) definisce la cosiddetta *velocità del superfluido*. Il superflusso altro non è che un movimento di particelle senza effetti dissipativi. In altre parole la viscosità di un superfluido è nulla. In [1] sono riportati diversi esperimenti condotti negli anni Trenta che hanno condotto all'elaborazione del cosiddetto *modello a due fluidi* per quanto concerne ^4He : si tratta in pratica della coesistenza delle due fasi di ^4He liquido. Data infatti tale sostanza, risulta che la densità complessiva è del tipo:

$$\rho = \rho_{\text{sf}} + \rho_{\text{n}}, \quad (3.11)$$

ove con ρ_{sf} si denota la densità della componente di superfluido che scorre senza alcuna viscosità, mentre con ρ_{n} si indica la componente "normale" di ^4He che ha una certa

viscosità. Dalla (3.11) e dall'analisi dimensionale condotta in precedenza discendono naturalmente una serie di equazioni del tipo $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{sf} + \mathbf{j}_n$, $\mathbf{j}_{sf} = \rho_{sf}\mathbf{v}_{sf}$, $\mathbf{j}_n = \rho_n\mathbf{v}_n$ che non necessitano di particolari giustificazioni. Nel novero delle implicazioni più significative del modello a due fluidi rientra il diverso comportamento delle componenti in materia di entropia del sistema. La componente "normale" del fluido apporta un contributo non nullo all'entropia in virtù del corrispondente moto caotico delle particelle mentre il condensato è un singolo stato quantistico a multicorpi, pertanto l'entropia ad esso associato è nulla. Allora il flusso di calore è dato esclusivamente dalla componente "normale" di un superfluido. Gli effetti di quanto appena illustrato si manifestano in un insolito comportamento termo-meccanico: se si collegano due volumi di superfluido mediante un capillare molto sottile la parte superfluida può attraversare il condotto ma non si può affermare la medesima cosa per la componente "normale" in quanto possiede una viscosità non nulla. Pertanto in tal caso si realizza un flusso di particelle ma non un flusso di calore e così le temperature dei due volumi restano diverse indefinitamente e non si realizza l'equilibrio termico. Ulteriori argomentazioni - che passano attraverso l'energia libera di Gibbs e l'uguaglianza dei due potenziali chimici - conducono, nella medesima situazione, ad una differenza di pressione che è alla base del cosiddetto *effetto fontana*, in cui si utilizza una differenza di temperatura come fosse la pompa - per l'appunto - di una fontana.

3.3 Quantizzazione del flusso

Nella presente sezione si intende affrontare il problema della quantizzazione della variabile angolare nel caso di ${}^4\text{He}$ liquido II con alcune delle tecniche già impiegate nel Capitolo 2. Tale studio costituisce la premessa dello studio dei vortici da un punto di vista fisico che sarà condotto nella sezione successiva.

Si vuole mostrare in quali termini il superflusso è soggetto ad un procedimento di quantizzazione. A tale scopo, una volta constatato che il flusso è irrotazionale, ossia $\nabla \times \mathbf{v}_{\text{sf}} = 0$ (basta considerare la (3.10) e applicare ad essa il rotore: il rotore di un gradiente è sempre nullo), è necessario considerare un flusso attorno ad un tubo chiuso. La definizione di *circolazione* di flusso passa attraverso il seguente integrale, calcolato per un percorso chiuso qualsiasi che si estenda attorno all'intera lunghezza del tubo:

$$c = \oint \mathbf{v}_{\text{sf}} \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.12)$$

Nella (3.12), in virtù dell'irrotazionalità del fluido, non è stato indicato il percorso chiuso dato che l'integrale è indipendente da questo. Sostituendo la (3.11) nella (3.12) si ha:

$$c = \frac{\hbar}{m} \oint \nabla\theta \cdot d\mathbf{r} = \frac{\hbar}{m} \Delta\theta. \quad (3.13)$$

Nella (3.13) $\Delta\theta$ rappresenta la variazione angolare che si ha se si compie il percorso attorno al tubo. Richiamando la (3.8) e imponendo che sia definita in un unico modo si giunge alla seguente uguaglianza:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r})e^{i\Delta\theta}. \quad (3.14)$$

Poiché i due membri della (3.14) devono necessariamente essere uguali ne segue che:

$$\Delta\theta = 2\pi k \quad (3.15)$$

La (3.15) è la condizione di quantizzazione che ci si proponeva di trovare. k , che è un intero, è il numero d'onda già ampiamente trattato nel corso del Capitolo 2. A questo punto, mettendo insieme la (3.13) e la (3.15), si ottiene la quantizzazione della circolazione del flusso, ossia $c = \frac{\hbar 2\pi}{m} k = \frac{h}{m} k$. Come già detto nel Capitolo 2, il numero d'onda k rappresenta il numero di volte che l'angolo θ si snoda di 2π lungo il percorso chiuso. Si parte da $\theta = 0$ e ci si muove in maniera continua lungo il percorso chiuso; una volta completato un giro si registra una variazione dell'angolo θ pari a un multiplo di 2π : in particolare il numero d'onda k , ossia il numero di avvolgimenti per un giro di 2π non può essere modificato, come detto nella (2.3); questa è una *proprietà topologica* della funzione d'onda macroscopica. Per esemplificare la cosa, in Figura (3.3) sono riportati differenti numeri d'onda e i loro avvolgimenti e dispiegamenti rispetto ad un percorso chiuso.

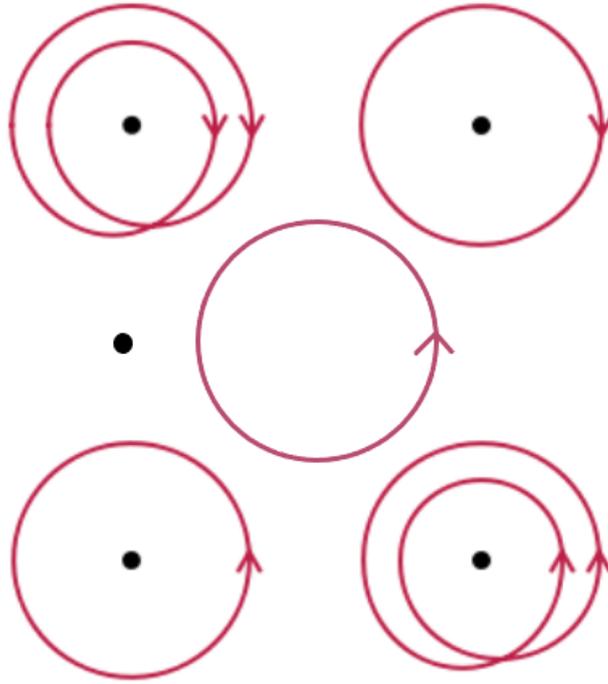


Figura 3.3: Dall'alto al basso e da sinistra verso destra $k = -2$, $k = -1$, $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$.

Ora si introdurrà il concetto di vortice in ${}^4\text{He}$ liquido ma un analogo ragionamento può essere condotto nel caso del BEC atomico.

Si consideri un sistema in cui ${}^4\text{He}$ liquido è intrappolato tra due cilindri concentrici. In condizioni statiche si ha che la circolazione del fluido è nulla così come il numero d'onda associato a tale processo. Il modello a due fluidi illustrato nella (3.2) prevede che, a seguito della messa in rotazione dei due cilindri, la componente "normale" di He acceleri fino al raggiungimento della stessa velocità angolare del sistema e che la componente superfluida rimanga ferma. Il raffreddamento graduale di quest'ultimo determina - com'è naturale attendersi esaminando il diagramma di fase di ${}^4\text{He}$ riportato in Figura (3.4) - un trasferimento di particelle dalla componente liquida "normale" a quella superfluida, andando in tal modo ad incrementare la percentuale del condensato nel sistema. Tale operazione comporta anche una migrazione di momento angolare verso la parte superfluida che, conseguentemente, comincia a ruotare.

La circolazione del fluido, tenuto conto della (3.13) e della (3.15), non aumenta in modo continuo ma subisce salti, chiamati *slittamenti di fase*, dell'ordine di h/m . Mentre l'angolo θ subisce una variazione di 2π gli slittamenti di fase sono assimilabili a transizioni tra diversi stati quantistici in un atomo in quanto corrispondono a cambiamenti nel numero quantico k .

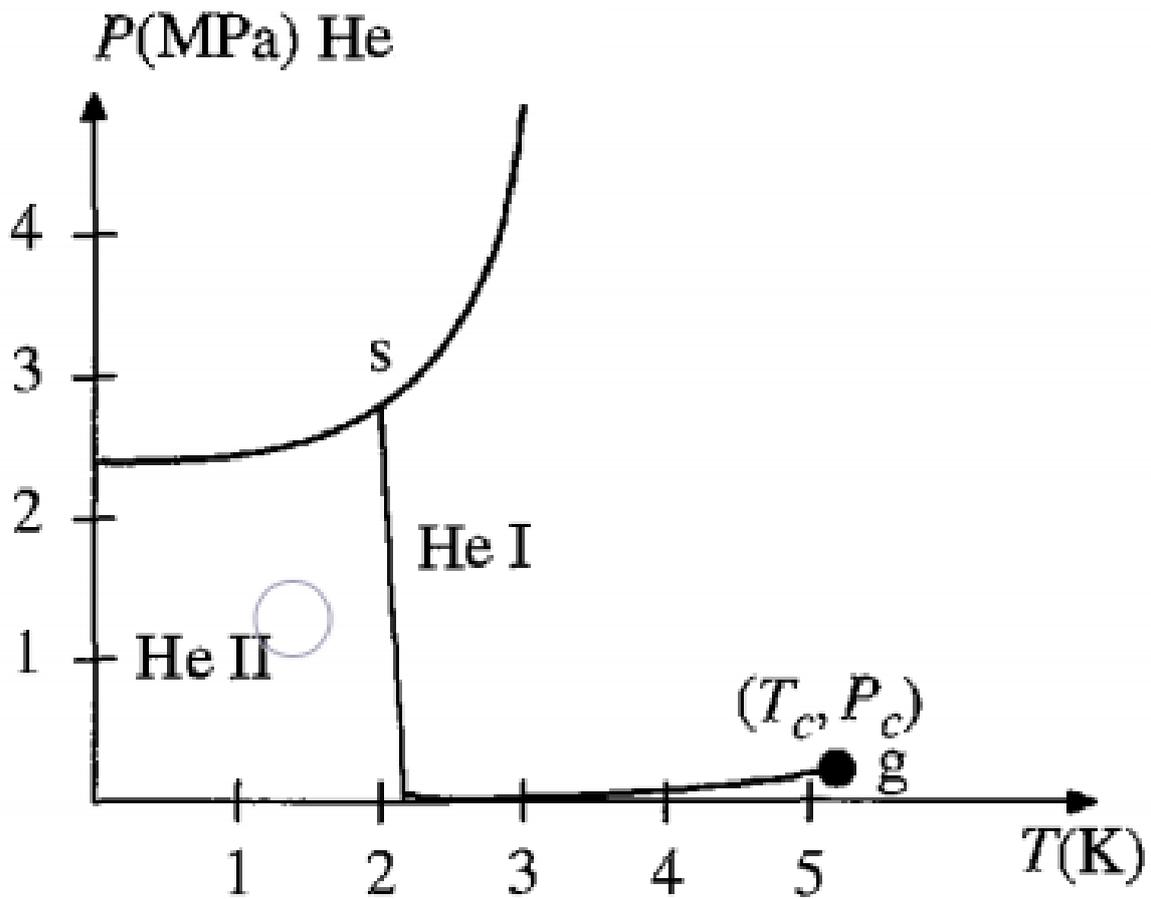


Figura 3.4: Diagramma di fase di ${}^4\text{He}$ liquido: He I è la componente "normale", He II la componente superfluida. Al di sopra del valore critico di temperatura e pressione (T_c e P_c) la sostanza si trova in uno stato non ben definito in cui non è possibile operare una distinzione netta tra liquido e gas. Figura tratta da [1].

Un'altra peculiarità del superflusso cui si è fatto cenno nella (1.4) è che è possibile dare luogo, almeno in linea di principio e sotto opportune condizioni, a una corrente persistente in grado di scorrere indefinitamente. Questo avviene dal momento che la viscosità del superfluido ruotante, il quale si ottiene mettendo in rotazione un liquido normale e poi raffreddando il sistema, è nulla.

Si consideri ora un recipiente cilindrico anziché una tubatura e in esso ^4He liquido. L'irrotazionalità, ossia $\nabla \times \mathbf{v}_{\text{sf}} = 0$, suggerisce, a guardare la (3.12) e adattandola al presente contesto, l'assenza - in linea teorica - di una qualsiasi forma di circolazione, pertanto non si dovrebbe osservare alcuna increspatura sulla superficie libera di superfluido posto in rotazione che quindi dovrebbe restare totalmente piatta. Eppure sperimentalmente si nota che tale superficie subisce una curvatura come si avrebbe nel caso di un fluido "normale" rotante (sottoposto quindi a forze centrifughe). In Figura (3.5) è illustrata la situazione. Detto in altri termini non si dovrebbe registrare alcuna rotazione macroscopica del fluido dal momento che, in virtù dell'irrotazionalità, la circolazione dovrebbe essere nulla lungo qualsiasi percorso chiuso. Questa incongruenza può essere superata se si ammette che il fluido contiene vortici al suo interno.

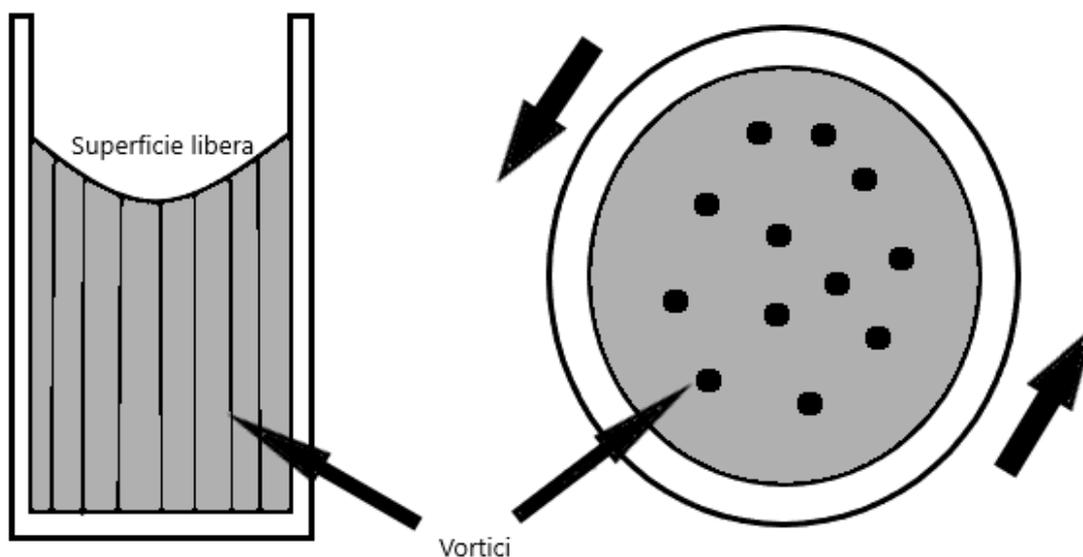


Figura 3.5: A causa delle forze centrifughe la superficie libera del liquido presenta una curvatura e si assiste alla formazione di insiemi di vortici.

3.4 Vortici e transizione BKT

Nella presente sezione si analizzano i vortici da un punto di vista fisico e si cerca di capire sotto quali condizioni avviene la loro formazione. Queste ultime sono alla base della cosiddetta *transizione di Berezinskii-Kosterlitz-Thouless*, nota anche come, per ragioni di economia linguistica, *transizione BKT*. La sua scoperta è stata insignita del Premio Nobel per la Fisica nel 2016 con la seguente motivazione: "Per le scoperte teoriche di transizioni di fase topologiche e fasi topologiche della materia".

Come detto alla fine della (3.3) un vortice è un flusso circolare che soddisfa la condizione di irrotazionalità quasi ovunque (tranne che nell'origine - che è la regione centrale - come è stato evidenziato nel Capitolo 2) e, nonostante questo, ammette una rotazione risultante non nulla. Svolgendo esplicitamente il rotore di \mathbf{v}_{sf} in coordinate polari cilindriche, ove un punto nello spazio è denotato come $\mathbf{r} = (r, \phi, z)$ con l'usuale significato, e ponendolo uguale a zero in virtù dell'irrotazionalità si ottiene:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\phi) = 0. \quad (3.16)$$

La (3.16) stabilisce pertanto, tenuto conto del fatto che $\mathbf{v}_{sf} = v_r \mathbf{e}_r + v_\phi \mathbf{e}_\phi + v_z \mathbf{e}_z$ e che $\nabla \times \mathbf{v}_{sf} = 0$, che la velocità del flusso attorno al vortice debba essere della forma:

$$\mathbf{v}_{sf} = \frac{c}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi, \quad (3.17)$$

ove c è la circolazione del flusso introdotta nella (3.3). Si nota che la corrente circolare, in virtù delle relazioni trovate nella (3.2), ha un andamento del tipo $1/r$, ossia diminuisce allontanandosi progressivamente dalla regione centrale. Richiamando la quantizzazione della circolazione del flusso, anch'essa introdotta nella (3.3), risulta che anche la \mathbf{v}_{sf} è quantizzata dal momento che vale la (3.17).

In generale si osservano quasi esclusivamente vortici aventi numeri d'onda pari a $+1$ o a -1 : ciò non deve sorprendere dal momento che tali valori, esaminando la (2.25) e tralasciando il caso in cui $k = 0$, sono quelli che garantiscono l'energia più bassa possibile.

Come detto all'inizio della presente sezione una velocità del tipo della (3.17) assicura l'irrotazionalità del fluido in ogni punto dello spazio fuorché nell'origine che va a costituire la regione centrale del vortice. All'interno di quest'ultima, la cui dimensione - come è stato osservato nella (2.6) - è direttamente proporzionale al numero d'onda k del vortice, la funzione d'onda è nulla (come già evidenziato nella (3.2)) e quindi la fase rappresentata dall'angolo θ non è definita. Questo fatto serve inoltre ad evitare singolarità di tipo infinito nella cosiddetta *supercorrente* del fluido dato che la corrispondente densità di corrente, ossia $\mathbf{j}_{sf} = n_{sf} \mathbf{v}_{sf}$, è nulla nella regione centrale (è sufficiente considerare la (3.11) e adattarla al presente contesto).

Come affermato nella (3.3) la presenza di vortici in un cilindro rotante pieno di superfluido giustifica la circolazione macroscopica del flusso e di conseguenza la superficie

libera sottoposta a curvatura. Poiché tali effetti sono ben visibili è lecito supporre che il numero di vortici del sistema sia molto elevato ed è effettivamente così; ciascuno di essi contribuisce con un termine h/m alla circolazione del fluido complessiva e matematicamente ciò significa:

$$c = \frac{h}{m} N_v. \quad (3.18)$$

Se il cilindro ha raggio R e velocità angolare ω la circolazione complessiva attorno al bordo del cilindro è:

$$c = \oint \mathbf{v}_{sf} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi R^2 \omega. \quad (3.19)$$

L'uguaglianza delle due circolazioni, date dalla (3.18) e dalla (3.19), fornisce il numero di vortici per unità di superficie nel superfluido rotante, infatti:

$$\frac{N_v}{\pi R^2} = \frac{2m\omega}{h}. \quad (3.20)$$

L'analisi della (3.20) suggerisce che un aumento della velocità angolare del sistema comporta, come è ragionevole attendersi, un incremento del numero di vortici (per unità di superficie).

Si vuole ora studiare la transizione BKT. A tale scopo è utile introdurre il concetto di *coppia di vortici*: si tratta di due vortici aventi numero d'onda opposto, quasi sempre $+1$ e -1 . Essi conducono a configurazioni che possono essere deformate in maniera continua fino al raggiungimento dello stato uniforme. Lontano dalla coppia i due vettori $\langle \mathbf{s}(\mathbf{x}) \rangle$, ossia i parametri d'ordine introdotti nel Capitolo 2, sono in pratica paralleli. Quando le regioni centrali dei due vortici si avvicinano l'una all'altra si assiste ad una riduzione della regione spaziale oltre la quale il parametro d'ordine non è uniforme spazialmente. Tale processo, se condotto in misura sempre più intensa, determina l'avvicinamento dei due vortici - tramite una serie di deformazioni continue del parametro d'ordine, come detto - ed è la causa della loro annichilazione (questo è possibile in virtù dei numeri d'onda opposti). A questo proposito si parla spesso di *coppia vortice - antivortice*, ovvero di due vortici aventi numero d'onda opposto che possono andare incontro all'annichilazione. Da un punto di vista topologico allora una *coppia* di vortici è equivalente allo stato uniforme e, a differenza di un singolo vortice, le deformazioni delle variabili elastiche lontano dalle regioni centrali non sono energeticamente sfavorite. La transizione BKT riguarda il modello $x-y$ e si osserva pertanto nel caso bidimensionale. In poche parole esiste un particolare valore di temperatura, detto *temperatura critica* e indicato con T_c , che segna un discrimine circa la possibile formazione di vortici: più correttamente, al di sopra della temperatura critica hanno luogo configurazioni libere di vortici (numero d'onda positivo) e antivortici (numero d'onda negativo), mentre al di sotto si ha creazione

esclusiva di coppie vortice-antivortice destinate all'annichilazione (è in questo caso che si ha la sopracitata equivalenza con lo stato uniforme).

Si vuole ora analizzare tale transizione da un punto di vista quantitativo senza però ricorrere ad un formalismo che appesantirebbe la trattazione. Come noto, l'energia di un vortice è data dalla (2.25). In generale si assume che $R \gg a$, ossia che il vortice nel suo complesso è molto più grande della sua regione centrale. Da calcoli di natura statistica segue che il numero di possibili posizioni occupabili da un vortice nel sistema è all'incirca $(R/a)^2$. Tale grandezza fisica rappresenta il numero complessivo di microstati disponibili ad una data energia totale e pertanto è il termine W il cui logaritmo compare nella ben nota definizione statistica di entropia (si veda la (1.1)):

$$S = k_B \ln W = k_B \ln(R/a)^2 = 2k_B \ln(R/a). \quad (3.21)$$

Per scrivere l'energia libera di Helmholtz occorre considerare la (3.21), infatti:

$$F = E - TS = (\pi k^2 \rho_s - 2k_B T) \ln(R/a). \quad (3.22)$$

Quando l'energia libera di Helmholtz, data dalla (3.22), è maggiore di zero non è consentita la formazione di vortici, mentre se è minore di zero (e si verifica quindi la condizione di minimo) può aver luogo la formazione di un vortice. Come è ragionevole supporre, la temperatura critica T_c cui si è fatto cenno in precedenza è quella per cui l'energia libera di Helmholtz è nulla, ossia $F = 0$. Imponendo alla (3.22) tale condizione si ottiene l'espressione per la temperatura critica T_c :

$$T_c = \frac{\pi k^2 \rho_s}{2k_B}. \quad (3.23)$$

Se il sistema si trova ad una temperatura superiore alla temperatura critica T_c data dalla (3.23) la presenza di vortici liberi è favorita da un punto di vista termodinamico, mentre se la temperatura è inferiore si verifica la condensazione di coppie vortice - antivortice per cui si può pragmaticamente affermare che in tal caso non si ha formazione di vortici.

Si precisa che la temperatura critica T^* nel caso della condensazione di Bose-Einstein e la temperatura critica T_c nel caso della transizione di Kosterlitz-Thouless sono state indicate con due differenti notazioni, a testimonianza del fatto che si tratta di due grandezze fisiche ben distinte tra loro e in generale il valore della prima è più basso della seconda, come riportato nel diagramma di fase in Figura (3.6).

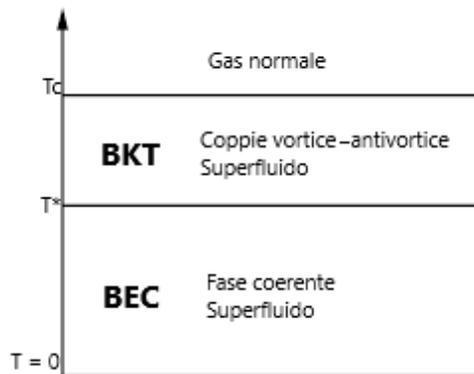


Figura 3.6: Diagramma di fase semplificato che illustra la collocazione della temperatura critica per la condensazione di Bose-Einstein e della temperatura critica per la transizione BKT nel caso di un gas di bosoni bidimensionale.

Si conclude la presente sezione facendo un breve cenno sul concetto di *turbolenza*. Si tratta di una condizione per cui si assiste ad un vero e proprio aggrovigliamento dei vortici che induce un'alta casualità nel flusso il quale, conseguentemente, non è omogeneo e varia in modo repentino da un punto all'altro nello spazio. Ciò si verifica quando al sistema vengono applicati bruschi cambiamenti nella velocità di rotazione o altre perturbazioni. In generale, in condizioni normali e a piccole velocità, i vortici in ${}^4\text{He}$ tendono a formare strutture triangolari abbastanza ordinate.

I vortici sono stati osservati anche nei BEC atomici. Anche in questi ultimi avviene un trasferimento di momento angolare dai campi magnetici (o, meglio, dalla loro rotazione), che costituiscono la base della trappola di potenziale in cui sono relegati gli atomi, agli atomi stessi. Quando il gas confinato viene raffreddato fino al raggiungimento della temperatura critica T^* per la condensazione di Bose-Einstein si può assistere alla formazione di vortici che avviene come conseguenza del trasferimento sopracitato di momento angolare dalle trappole di potenziale. Tali dinamiche verranno approfondite nel Capitolo 4. Anche tali vortici, come quelli di ${}^4\text{He}$ liquido, tendono a formare strutture triangolari in condizioni normali: è possibile rendersene conto esaminando nuovamente la Figura (1.4).

Capitolo 4

Vortici nei BEC atomici e aspetti sperimentali

Nel presente Capitolo verranno presi in esame i BEC atomici e ci si soffermerà sulla realizzazione di tali sistemi attraverso raffreddamento *laser* e trappole magnetiche. A titolo di esempio si riporterà il confinamento atomico in un potenziale di tipo armonico. Nel corso della trattazione si farà puntuale riferimento ai vortici presenti in tali strutture e si esamineranno alcune tecniche alla base della loro produzione. Si seguiranno prevalentemente [1], [4], [5], [7] e [8].

4.1 BEC atomico, raffreddamento *laser* e trappole magnetiche

Come detto nella (1.4), i primi BEC furono ottenuti solamente nel 1995 dopo numerosi tentativi da parte della comunità internazionale. Tuttavia tali strutture furono indagate sulla base della pura speculazione da Bose ed Einstein intorno agli anni Venti. Un intervallo temporale così ampio tra previsione teorica ed osservazione sperimentale si spiega considerando le bassissime temperature e le altissime densità che è necessario raggiungere affinché abbia luogo il fenomeno della condensazione in esame. Da un punto di vista pratico ciò equivale a richiedere che la densità nello spazio delle fasi, data dalla (1.33) e qui riscritta in una formulazione analoga:

$$\rho_0 = n\lambda_{\text{dB}}^3, \quad (4.1)$$

ove λ_{dB} è la lunghezza d'onda termica di De Broglie (si veda la (3.4) per la sua definizione), sia dell'ordine dell'unità. Questo requisito imprescindibile non può essere certamente soddisfatto in condizioni normali: un gas rarefatto a 300 K ha una densità, data dalla

(4.1), che è all'incirca 20 ordini di grandezza più piccola di quanto occorre ai fini della condensazione di Bose-Einstein.

In estrema sintesi, la procedura sperimentale per la condensazione di Bose-Einstein è la seguente: a temperatura ambiente si parte da un gas di atomi di metalli alcalini (la prima volta fu impiegato il Na) rarefatto - si parla in genere di 10^8 atomi/cm³. Poiché è noto dalla teoria cinetica dei gas che la velocità media degli atomi è direttamente proporzionale alla radice quadrata della temperatura si ha in questo caso un valore dell'ordine delle centinaia di m/s. Tendenzialmente sono previste due fasi di raffreddamento: la prima consiste nell'impiego della radiazione *laser* ai fini del raggiungimento di temperature prossime al milionesimo di Kelvin; la seconda contempla l'utilizzo di campi magnetici per intrappolare una parte del gas atomico e un ulteriore raffreddamento. In questa fase ha luogo un processo di evaporazione forzata che rende possibile la condensazione di Bose-Einstein: in tale contesto la densità è tipicamente di 10^{14} atomi/cm³ e la temperatura, come detto, è dell'ordine di 10^{-7} K, mentre le velocità si attestano intorno ai mm/s.

Come affermato nel precedente capoverso, si è soliti impiegare sperimentalmente atomi di metalli alcalini: questi sono pensabili come bosoni - e dunque, come specificato nel Capitolo 1, ha senso cercare di ottenere la condensazione di Bose-Einstein - se si ammette che lo *spin* totale dell'atomo in questione è intero. Infatti, in accordo con la Meccanica Quantistica e con la definizione data nella (1.1), una particella è un bosone se ha uno *spin* intero. Nel caso di metalli alcalini e, in particolare di ²³Na, il nucleo apporta un contributo pari a $S = 3/2$ e l'unico elettrone di valenza $S = 1/2$. Le regole della somma degli *spin* affermano che è possibile combinare questi due contributi affinché alla fine si abbia $S = 1$ o $S = 2$, ottenendo così una particella bosonica. In questo senso è possibile affermare l'equivalenza tra atomi alcalini e bosoni.

Per quanto concerne la prima fase del raffreddamento, l'impiego della trappola magnetooptica (nota come *MOT*) rappresenta la soluzione più adottata. Il soddisfacimento della condizione di risonanza $h\nu = \Delta E$, ove ν è la frequenza della luce e ΔE il salto energetico, rappresenta l'assorbimento da parte degli atomi dell'energia dalla radiazione proveniente da tre coppie di fasci *laser* che si contropropagano nelle tre direzioni spaziali. Generalmente la frequenza ν è minore di quella richiesta; inoltre l'atomo in moto assorbe fotoni in prevalenza dal fascio verso cui si muove dal momento che l'effetto Doppler pareggia lo spostamento in frequenza. L'atomo avverte una forza diretta in verso opposto rispetto alla sua velocità a causa dei rinculi. Questo schema di raffreddamento - in grado di portare il sistema ad una temperatura dell'ordine dei μK - prende il nome di *melassa ottica* poiché la forza coinvolta è di natura viscosa.

La seconda fase prevede sempre l'utilizzo della *MOT* alla quale viene aggiunto un campo magnetico generato da due spire attraversate in verso opposto dalla stessa intensità di corrente. Tale struttura è in grado di confinare, sempre nell'ottica del raffreddamento e del raggiungimento di bassissime energie e temperature, solamente gli atomi aventi piccola energia cinetica (ossia quelli "freddi"), mentre quelli "caldi" non sono trattiene dalla trappola. Il reale funzionamento di questa struttura è certamente più

complicato di quanto discusso finora ma la descrizione completa esula dagli scopi della presente trattazione. Per semplicità si riporta la Figura (4.1) che illustra per sommi capi il criterio di selezione degli atomi operato dalla *MOT*.

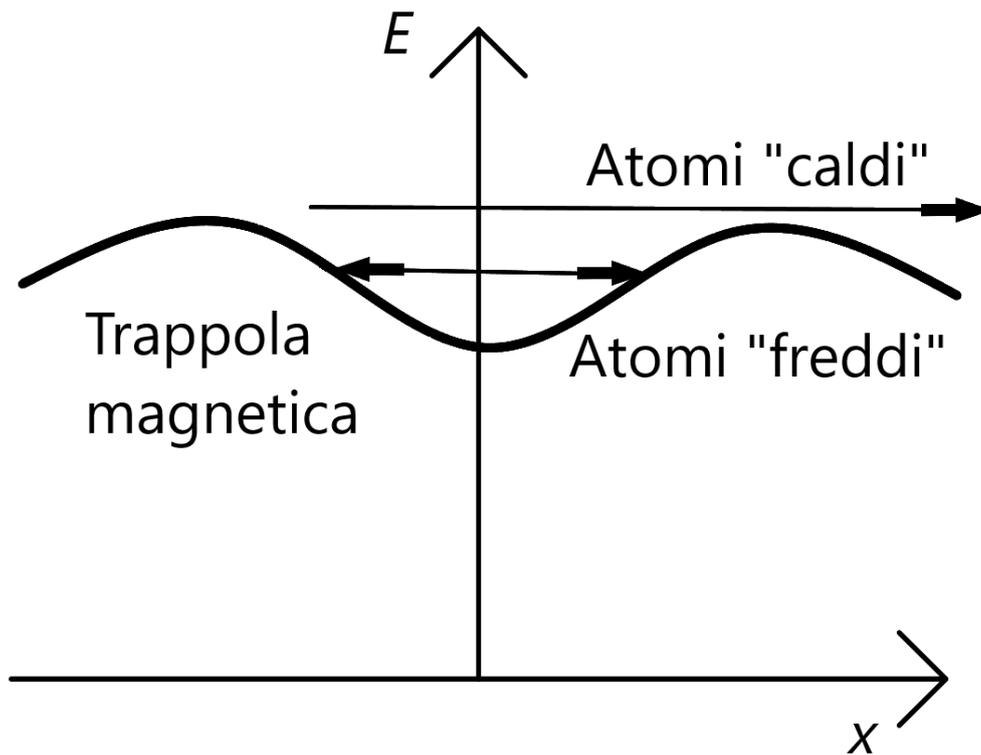


Figura 4.1: Una *MOT* possiede un minimo locale in energia in maniera tale da intrappolare gli atomi a bassa energia cinetica e lasciare liberi quelli più "caldi". L'atomo che si muove in una regione in cui il campo magnetico è meno intenso perde energia e sarà quindi attratto verso la *MOT* dal momento che vede quest'ultima come un minimo locale nell'energia potenziale.

L'intrappolamento magnetico qui descritto si coniuga con il procedimento del raffreddamento evaporativo cui si è fatto cenno all'inizio della presente sezione. Più precisamente, sempre nell'ottica della rimozione degli atomi più energetici, si è soliti introdurre un campo a radiofrequenza: esso è responsabile dell'allontanamento radicale degli atomi "caldi" del centro della trappola e del loro conseguente approdo verso regioni dello spazio caratterizzate da un campo magnetico più intenso. È possibile ridurre la frequenza del campo a radiofrequenza: così facendo si ottengono nella *MOT* atomi ad energie cinetiche sempre minori. Tuttavia in tal caso è necessario scegliere oculatamente il tempo e i parametri associati al processo di evaporazione: infatti, una volta allontanati gli atomi più "caldi", le collisioni elastiche devono poter determinare la ritermalizzazione a temperature più basse affinché possa aver luogo il fenomeno della condensazione. In quest'ottica è bene evitare le collisioni non elastiche che possono causare la fuoriuscita di atomi dalla *MOT* e la conseguente riduzione di densità che deve invece essere altissima ai fini della condensazione, come già rimarcato: la logica dell'intera operazione si basa non a caso sull'aumento della densità in risposta ad un notevole abbassamento della temperatura del sistema. L'unico parametro fisico che si utilizza per descrivere le collisioni elastiche è la lunghezza di diffusione, denotata con l : quest'ultima dipende dall'atomo e dal livello energetico considerato; una lunghezza di diffusione negativa suggerisce l'attrazione tra gli atomi, mentre una quantità positiva indica la repulsione. La Figura (4.2) illustra il procedimento di raffreddamento degli atomi discusso finora che conduce alla condensazione di Bose-Einstein.

Come già detto, la condensazione avviene solo quando la temperatura è dell'ordine dei 10^{-7} K e la densità si attesta intorno a $10^{13} - 10^{14}$ atomi/cm³. In queste condizioni in qualche decina di secondi viene prodotto un campione di $10^5 - 10^6$ atomi *condensati*/cm³: tale sistema si estende per qualche decina di μm e ha una vita media generalmente di qualche secondo.

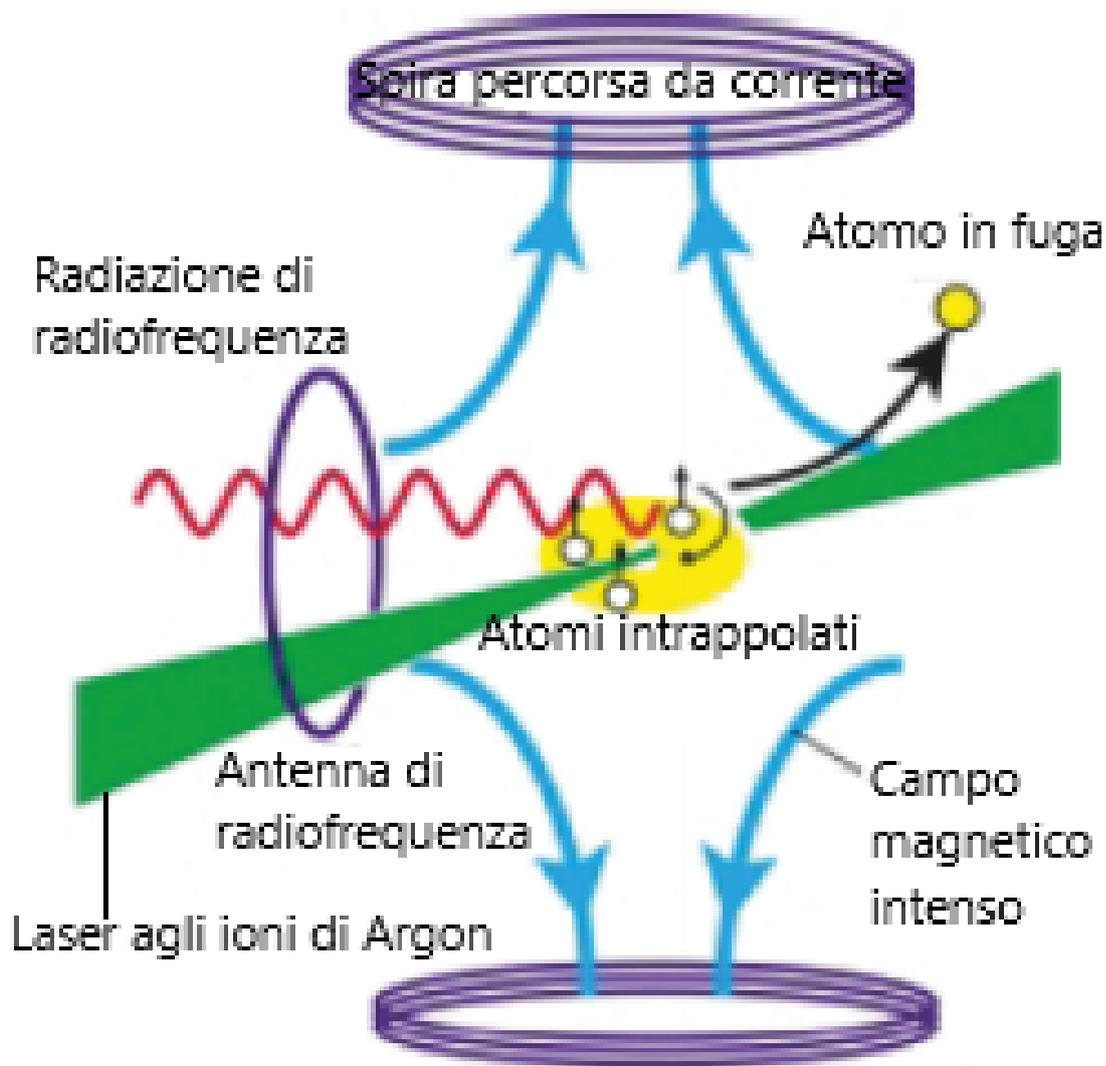


Figura 4.2: Schema dell'apparato sperimentale per il raffreddamento atomico. Due spire percorse da corrente generano un intenso campo magnetico che intrappola gli atomi di Na. Al centro, in corrispondenza del minimo locale, il campo magnetico scompare consentendo l'allontanamento degli atomi da tale zona. Tale fenomeno persiste in virtù dell'applicazione di un fascio *laser* di atomi di Ar che è in grado di esercitare una forza di tipo repulsivo. Il processo di evaporazione è controllato da un'antenna mediante la radiazione di radiofrequenza e conduce, in caso di abbassamento di quest'ultima, alla rimozione degli atomi più "caldi"; quelli rimanenti ritermalizzano, ossia raggiungono l'equilibrio termico, ad una temperatura più bassa per mezzo di collisioni elastiche. Immagine tratta e adattata da [7].

4.2 Confinamento degli atomi in un potenziale armonico

Nella presente sezione si riporta a titolo di esempio il confinamento degli atomi mediante una trappola avente un potenziale di tipo armonico. Questa configurazione rappresenta uno dei casi fisicamente più interessanti e merita di essere menzionata dal momento che la produzione dei vortici nei BEC si differenzia all'atto pratico da quella in ^4He liquido proprio a causa della presenza di un potenziale di tipo armonico.

In tal caso, richiamando quanto detto nel Capitolo 1, si avrà la seguente situazione nel caso bidimensionale:

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2). \quad (4.2)$$

In virtù della (4.2), il numero di stati quantici aventi energia minore di ϵ è dato da:

$$N_{2D}(\epsilon) = \int_{\frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) < \epsilon} \frac{dp_x dp_y dx dy}{h^2} \quad (4.3)$$

È conveniente utilizzare i seguenti cambi di variabile:

$$p_x \rightarrow \sqrt{2m}x_1, \quad p_y \rightarrow \sqrt{2m}x_2, \quad x \rightarrow x_3\sqrt{2/m\omega^2}, \quad y \rightarrow x_4\sqrt{2/m\omega^2}$$

e con questi riscrivere la (4.3):

$$N_{2D}(\epsilon) = \frac{4}{(h\omega)^2} \int_{\sum_{j=1}^4 x_j^2 < \epsilon} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4. \quad (4.4)$$

L'integrale che compare nella (4.4) è il volume della sfera quadridimensionale di raggio $r = \sqrt{\epsilon}$: più correttamente si parla di misura 4-dimensionale della corrispondente palla V_4 che, sapendo che $V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} r^n$ (ove Γ è la funzione di Eulero), è $V_4 = \frac{\pi^2}{2} \epsilon^2$. Allora la (4.4) diventa:

$$N_{2D}(\epsilon) = \frac{2\pi^2 \epsilon^2}{(h\omega)^2}. \quad (4.5)$$

Come di consueto la densità degli stati discende dal numero degli stati appena calcolato; ricordando la (1.26) si ha, nel caso della (4.5):

$$M_{2D}(\epsilon) = \frac{\epsilon}{(h\omega)^2}. \quad (4.6)$$

In totale analogia con quanto calcolato nella (1.3), si vuole ora determinare il numero di particelle; per farlo è necessario ricorrere ancora una volta alla (1.32); così operando si ha, utilizzando la (4.6) :

$$N = \int_0^\infty M_{2D}(\epsilon) f_{BE} d\epsilon = \frac{1}{(\hbar\omega)^2} \int_0^\infty \frac{\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} d\epsilon. \quad (4.7)$$

Operando le stesse sostituzioni utilizzate nella (1.32) la (4.7) diventa:

$$N = \frac{1}{(\beta\hbar\omega)^2} \int_0^\infty \frac{t}{z^{-1}e^t - 1} dt. \quad (4.8)$$

Ponendo per semplicità l'integrale che compare nella (4.8) uguale a una generica funzione $g_2(z)$ si ottiene, richiamando la (1.10):

$$N = g_2(z) \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^2. \quad (4.9)$$

Come detto nella (1.3) la condizione matematica che sancisce l'inizio della condensazione di Bose-Einstein è $z = 1$, pertanto, sapendo che $g_2(z = 1) = \frac{\pi^2}{6}$, la (4.9) si tramuta in:

$$N = g_2(z = 1) \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^2 = \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^2. \quad (4.10)$$

Una semplice manipolazione algebrica della (4.10) fornisce il valore della temperatura critica T^* ai fini della condensazione di Bose-Einstein nel caso di confinamento atomico in un potenziale di tipo armonico:

$$T^* = \frac{\hbar\omega}{k_B \pi} \sqrt{6N}. \quad (4.11)$$

La (4.11) evidenzia la dipendenza della temperatura critica T^* dalla radice quadrata del numero di particelle del sistema (con l'imposizione di $g_2(z = 1)$).

In Figura (4.3) si riporta il grafico di un potenziale di tipo armonico: esso corrisponde al secondo termine della (4.2).

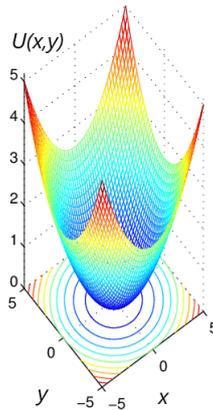


Figura 4.3: Potenziale armonico bidimensionale.

4.3 Produzione di vortici nei BEC atomici

Lo studio del potenziale armonico condotto nella (4.2) non è stato un esercizio ozioso privo di applicazioni pratiche; infatti, come già accennato, tale potenziale è alla base del confinamento - condotto con la *MOT* - nel caso dei BEC atomici. Se, come detto nella (3.4), la formazione di vortici in ^4He superfluido si verifica raffreddando un cilindro rotante di He al di sotto della temperatura critica T_c , per i BEC atomici questa procedura non è attuabile a causa della presenza del potenziale armonico.

Innanzitutto il condensato appena formato occupa un'area trasversale al centro della *MOT* talmente piccola da non rendere possibile la produzione di vortici. Può succedere che il condensato accresca le sue dimensioni ma il tempo di scala necessario ai fini della formazione dei vortici a partire dal sistema messo in rotazione potrebbe eccedere la vita media del condensato stesso. Il procedimento che viene maggiormente impiegato ai fini della produzione dei vortici consiste nell'impiego di ^{87}Rb e delle transizioni tra due stati di *spin* interni (separati dallo *splitting* di struttura iperfine dello stato fondamentale), denotati, attraverso l'uso della notazione di Dirac, come $|1\rangle$ e $|2\rangle$. Questi ultimi possono essere confinati contemporaneamente in potenziali di trappola magnetica identici e del tutto sovrapposti. Le conversioni da $|1\rangle$ in $|2\rangle$ e viceversa vengono indotte da un campo a microonde a due fotoni. Agendo sulla dipendenza temporale e spaziale della transizione da $|1\rangle$ a $|2\rangle$ (o viceversa) è possibile creare una funzione d'onda di stato $|2\rangle$ (o $|1\rangle$) a partire da una funzione d'onda di stato fondamentale $|1\rangle$ (o $|2\rangle$). Il processo di conversione viene controllato attraverso lo spostamento della frequenza di transizione che avviene mediante l'*effetto AC Stark*; quest'ultimo è un tipo di effetto Stark dinamico che corrisponde al caso in cui un fascio *laser* (o un campo elettrico oscillante) è messo in risonanza con la frequenza di una certa linea spettrale; tra le varie conseguenze si assiste al cambiamento della forma dello spettro di emissione ed assorbimento della linea spettrale in questione.

Lo scopo del procedimento fin qui descritto consiste nel creare una funzione d'onda che abbia la stessa simmetria spaziale dello stato vorticoso: come noto, quest'ultimo è caratterizzato di fatto da un anello con simmetria assiale tale che si ha un avvolgimento di fase pari a 2π attorno al nucleo del vortice dove la densità, come detto nella (3.2), è nulla. A tale scopo il fascio *laser*, cui si è fatto cenno nella descrizione dell'*effetto AC Stark* e che fornisce il controllo di quest'ultimo per quanto concerne la dipendenza spaziale e temporale, viene messo in rotazione attorno al condensato di partenza. La dipendenza spaziale che si vuole ottenere viene ricavata desintonizzando la frequenza delle microonde dalla transizione e ruotando il raggio *laser* ad una certa frequenza ω tale per cui si verifica la risonanza. In generale per grandi desintonizzazioni δ (cui devono corrispondere frequenze di rotazioni δ ai fini della risonanza) la condizione di risonanza si traduce nel fatto che gli atomi possono cambiare stato interno solo mediante l'accoppiamento della perturbazione variabile nel tempo; quindi questi ultimi sono vincolati ad obbedire alle regole di selezione che la simmetria di spaziale di tale simmetria è in grado di imporre.

In queste condizioni il centro del condensato che si trova in corrispondenza dell'asse di rotazione del fascio *laser* non risente di cambiamenti che variano nel tempo a differenza delle regioni vicine alla circonferenza del condensato che avvertono una variazione di tipo sinusoidale con un ritardo di fase pari all'angolo azimutale θ attorno alla circonferenza stessa. Tale geometria del sistema ben si presta alla formazione dei vortici all'interno del condensato. A seconda del segno della desintonizzazione delle microonde, un fascio *laser* che ruota in verso orario può dar luogo ad una circolazione oraria o antioraria del vortice, il quale quindi non è semplicemente indotto dalle forze meccaniche del *laser*. In Figura (4.4) è riportato per sommi capi il meccanismo alla base della produzione di vortici in un BEC atomico appena discusso.

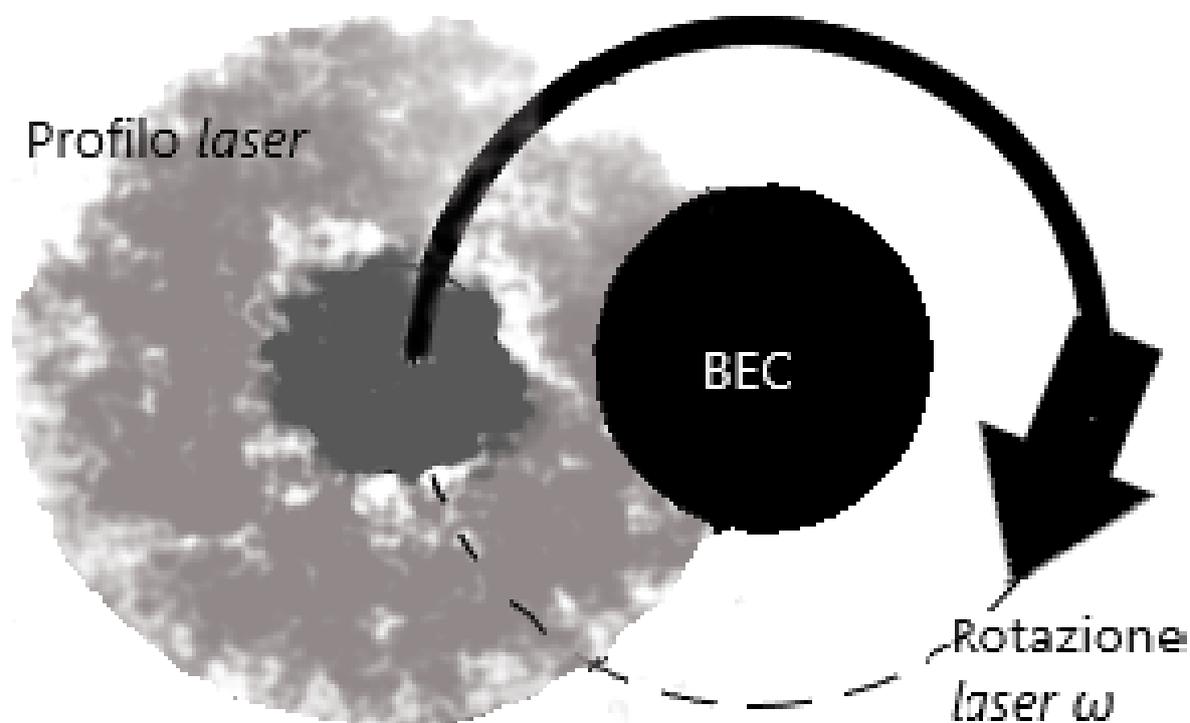


Figura 4.4: Mentre viene applicato un azionamento a microonde di desintonizzazione pari a δ , il *laser* rotante fornisce al condensato un gradiente di rotazione nello spostamento dovuto all'effetto AC Stark.

I due stati di spin interni $|1\rangle$ e $|2\rangle$, in assenza del campo a microonde, possono essere pensati come due superfluidi distinguibili e interpenetranti interagenti tra loro e con loro stessi. Quando ad esempio il fluido $|1\rangle$ possiede un momento angolare non nullo forma un anello equatoriale attorno al fluido $|2\rangle$. Quest'ultimo, che forma una barriera di potenziale centrale e ha fase costante, viene penetrato parzialmente dal fluido $|1\rangle$. Dal canto suo un vortice $|2\rangle$ forma un anello che tende a contrarsi nel fluido $|1\rangle$.

In presenza di un campo a microonde vicino alla condizione di risonanza invece si assiste all'interconversione dei due stati di partenza (secondo una velocità sensibile alla differenza locale nelle fasi quantistiche dei due stati); in particolare un impulso a microonde risonante a $\pi/2$ determina la trasformazione della distribuzione della densità a due fluidi in una distribuzione che riflette la differenza di fase locale, ossia un *interferogramma di fase*. L'osservazione del condensato, se condotta prima e dopo l'applicazione dell'impulso risonante, fornisce l'ampiezza e la fase dell'anello vorticoso.

Descritto molto sinteticamente il meccanismo alla base della produzione dei vortici nei BEC atomici, si procederà ad una breve disamina delle tecniche utilizzate per l'osservazione di tali strutture. Occorre in primo luogo precisare che le misurazioni devono essere condotte con accorgimenti particolari dal momento che si vogliono analizzare oggetti con un marcato comportamento quantistico: proprio per questo è necessario ricorrere a tecniche non distruttive. In generale, a partire dal controllo della potenza e della frequenza delle microonde, si utilizzano sequenze di impulsi in grado di governare diversi aspetti di un vortice, tra i quali si annovera la sua osservazione. A titolo di esempio si segnala che è possibile mettere il condensato di partenza nello stato $|1\rangle$ o $|2\rangle$ e quindi creare un vortice rispettivamente nello stato $|2\rangle$ o $|1\rangle$. A seguito dello spegnimento del *laser* rotante è possibile ottenere gli interferogrammi di fase, cambiare stato del vortice in qualunque momento e anche osservare l'evoluzione del fenomeno vorticoso su scale temporali che vanno generalmente dai millisecondi ai secondi.

Si riporta ora una immagine del profilo di fase di un vortice $|2\rangle$. Essa costituisce la Figura (4.5).

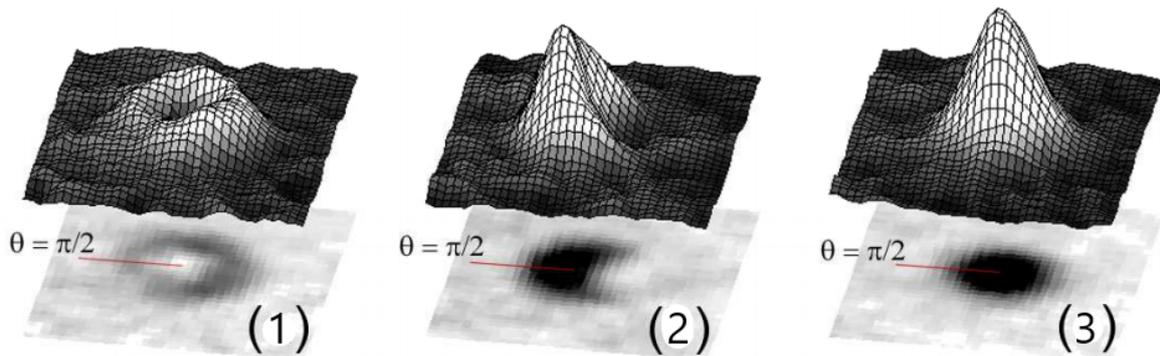


Figura 4.5: Immagini del condensato in cui il *laser* è sintonizzato in maniera tale che solo lo stato $|2\rangle$ è visibile. L'immagine (1) raffigura il vortice all'inizio del processo di produzione. L'immagine (2) è stata acquisita dopo un impulso di interconversione pari a $\pi/2$. L'immagine (3) illustra il vortice dopo che è stato totalmente scoccato l'impulso π . Il vortice risulta ora invisibile in $|1\rangle$. Figura tratta e adattata da [8].

Si conclude la presente trattazione evidenziando come in linea di massima i vortici si organizzino in strutture caratterizzate da un'alta regolarità, dette *reticoli di Abrikosov*. Tuttavia, trattandosi di oggetti reali, possono essere presenti delle imperfezioni che vanno ad alterare l'ordine che si avrebbe in condizioni ideali, come mostra la Figura (4.6).

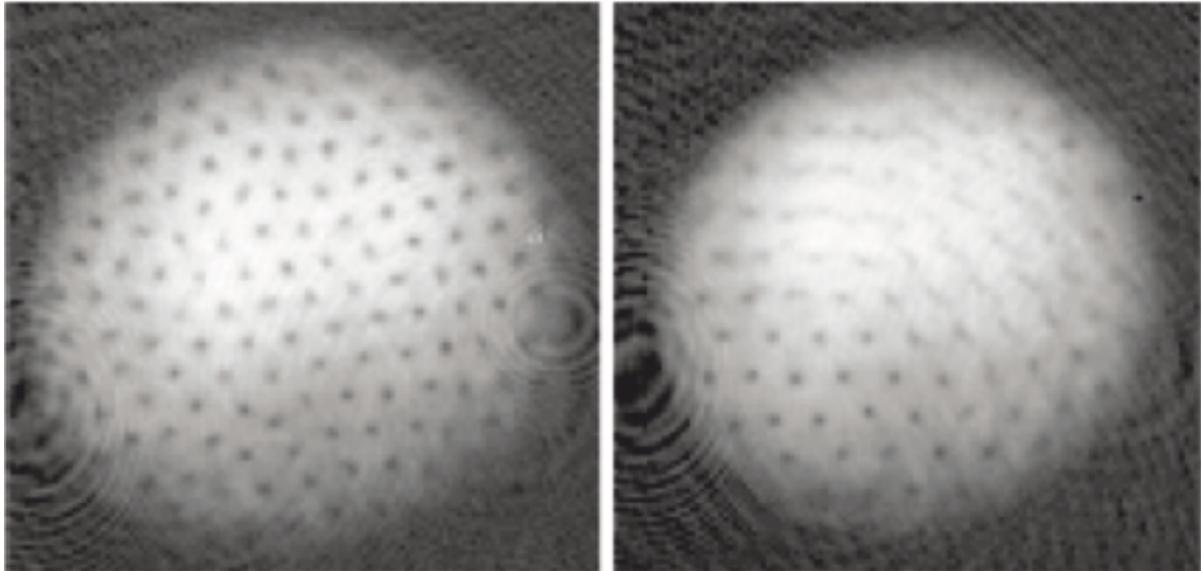


Figura 4.6: Reticoli vorticosi caratterizzati da impurità. Nell'immagine a sinistra c'è una dislocazione in prossimità del centro del condensato, in quella a destra sono evidenti imperfezioni di tipo granuloso. Figura tratta da [7].

Conclusioni

Nella presente trattazione si è cercato di analizzare il fenomeno della condensazione di Bose-Einstein e di trattare la corrispondente questione dei vortici fornendo, dove possibile, una prospettiva di carattere storico - fino alle soglie del millennio - che consentisse l'inquadramento di tali dinamiche in un contesto tecnologico - scientifico più o meno delineato. Negli ultimissimi anni ci sono stati significativi sviluppi: nel 2018 per esempio, nel corso dell'esperimento tedesco MAIUS nei pressi dell'orbita terrestre, è stato realizzato un BEC nello spazio. Poiché nello spazio si è in condizione di microgravità permanente - a differenza della Terra - è stato possibile esaminare alcune proprietà quantistiche tipiche degli atomi ultrafreddi spingendosi a temperature ancora più basse, tipicamente dell'ordine dei pK. Lo studio delle leggi della fisica fondamentale è quindi particolarmente fecondo in un simile scenario. Quest'ultima considerazione trova conferma nel fatto che nel corso del programma MAIUS sono stati necessari solo 1.6 secondi per la realizzazione di un BEC costituito da centinaia di migliaia di atomi e che nei 6 minuti di vita di tale fenomeno è stato possibile condurre quasi una novantina di esperimenti [9].

Le prospettive presenti e future vedono l'applicazione dei BEC nella realizzazione di nuovi dispositivi interferometrici. Al momento queste strumentazioni funzionano attraverso il fenomeno dell'interferenza della luce che è tuttavia particolarmente sensibile alle variazioni del cammino percorso dal raggio luminoso. Tenuto conto delle proprietà quantistiche dei condensati di Bose-Einstein e che questi possono essere descritti attraverso un'onda di materia, si sta cercando di rimpiazzare le onde luminose con quelle di materia e di realizzare così interferometri quantistici. Tali dispositivi, mediante la ricerca delle onde gravitazionali, consentiranno di esaminare con un altissimo grado di dettaglio la Teoria della Relatività Generale di Einstein e di individuarne, operando in un intervallo di frequenze del tutto inaccessibili sulla Terra, eventuali discrepanze. Gli interferometri quantistici potranno essere anche impiegati anche ai fini della misurazione certissima della gravità terrestre e ciò fornirà ulteriori informazioni sullo spostamento dei ghiacciai, sui movimenti del magma vulcanico, sulle variazioni del livello del mare e così via.

Nell'anno corrente il BEC è stato definito *stato della materia* a pieno titolo assieme al solido, al liquido, all'aeriforme e al plasmatico, a ulteriore dimostrazione della sua grande rilevanza e del suo ruolo di assoluta centralità nella Fisica contemporanea.

Bibliografia

- [1] Annett J.F. (2004), *Superconductivity, Superfluids, and Condensates*, Oxford University Press.
- [2] Bastianelli F. (2019), *Appunti sulla teoria dei gruppi*, Corso di Laurea in Fisica, Dipartimento di Fisica e Astronomia dell'Università di Bologna. <https://www-th.bo.infn.it/people/bastianelli/2-gruppi-FNS-19-20.pdf>
- [3] Chaikin P.M., Lubensky T.C. (1995), *Principles of condensed matter physics*, Cambridge University Press.
- [4] Chevy F., Madison K.W., Bretin W., Dalibard J. (2001), *Interferometric detection of a single vortex in a dilute Bose-Einstein Condensate*, Cornell University.
- [5] Cornell E.A., Wieman C.E. (2001), *Bose-Einstein condensation in a dilute gas; the first 70 years and some recent experiments*, Nobel Lecture. <https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/cornellwieman-lecture-1.pdf>
- [6] Ferrari L. (2015), *Appunti dal corso di Fisica della Materia*, Corso di Laurea in Fisica, Dipartimento di Fisica e Astronomia dell'Università di Bologna.
- [7] Ketterle W. (2001), *When atoms behave as waves: Bose-Einstein condensation and the atom laser*, Nobel Lecture. <https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/ketterle-lecture.pdf>
- [8] Matthews M.R., Anderson B.P., Haljan P.C., Hall D.S., Wieman, Cornell E.A. (1999), *Vortices in a Bose-Einstein Condensate*, University of Colorado.
- [9] Becker D. et al. (2018), *Space-borne Bose-Einstein condensation for precision interferometry*, Nature.