

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Un approccio semiclassico e quantistico alle oscillazioni di Rabi

Relatore:
Prof.ssa Elisa Ercolessi

Presentata da:
Sonia Salomoni

Anno Accademico 2019/2020

Abstract

Questo lavoro di tesi si pone l'obiettivo di studiare il fenomeno delle oscillazioni di Rabi tramite un approccio semiclassico e uno quantistico.

Tali oscillazioni si osservano quando luce e materia interagiscono fortemente, cioè quando sono vicine alla risonanza. Il primo metodo utilizzato per studiare questa interazione è quello proposto da I.I. Rabi: questo modello descrive la più semplice interazione luce-materia possibile, quella tra un atomo a due livelli e un'onda elettromagnetica monocromatica.

Successivamente viene affrontato il problema considerando più correttamente una elettrodinamica quantistica, seguendo il modello ideato da Jaynes e Cummings. Tale formulazione, particolarmente semplice da risolvere analiticamente, è un'approssimazione del modello di Rabi quantistico, valida nella maggior parte delle situazioni sperimentali.

Dopo l'introduzione delle due Hamiltoniane nei rispettivi modelli, viene derivata la dinamica del sistema: sia nel modello semiclassico che il quello quantistico emergono naturalmente delle oscillazioni di popolazione dei livelli energetici, le oscillazioni di Rabi. Inoltre, nel caso quantistico vengono prese in considerazione diverse condizioni iniziali del campo elettromagnetico.

Infine si illustra l'apparato sperimentale e il funzionamento generale degli esperimenti condotti da S. Haroche, i quali si basano sulla possibilità di modificare lo stato di un certo tipo di atomi attraverso le oscillazioni di Rabi.

Indice

Introduzione	1
1 Hamiltoniana del sistema	3
1.1 Strong Coupling	5
1.2 Onde elettromagnetiche stazionarie	7
1.3 Quantizzazione del campo elettromagnetico	10
1.4 Atomo a due livelli	11
1.5 Interazione elettrone-campo	13
1.6 Quantizzazione dell'hamiltoniana di interazione	15
1.7 RWA, Approssimazione di onda rotante	16
1.8 Stati vestiti	18
2 Oscillazioni di Rabi	20
2.1 Oscillazioni di Rabi semiclassiche	20
2.2 Oscillazioni di Rabi quantistiche	22
2.3 Stati di Fock e stati Coerenti	25
2.4 Comportamento delle oscillazioni	27
2.5 Oscillazioni di Rabi sulla sfera di Bloch	31
3 L'esperimento di Haroche	33
3.1 Atomi di Rydberg	34
3.2 Apparato sperimentale	35
3.3 Misura del numero di fotoni	38
Conclusioni	40
A Microcavità	41
B La sfera di Bloch	44

Elenco delle figure

1.1	Stati energetici dell'elettrone in un atomo a due livelli e stati di Fock del fotone in cavità. Elettrone e fotone, in questa rappresentazione, non sono accoppiati.	4
1.2	Oscillazioni naturali di due pendoli accoppiati in fase (a) e fuori fase (b). Le frequenze delle oscillazioni sono diverse da quelle dei pendoli singoli e la differenza tra le due è proporzionale al grado di accoppiamento.	5
1.3	Onda elettromagnetica confinata in una cavità planare. In $z = 0$ e $z = L$ sono collocati due specchi semiriflettenti. Le onde elettromagnetiche rimangono confinate per effetto di interferenze costruttive all'interno della struttura ottica.	7
1.4	Processi di emissione e assorbimento spontanei tra fotone ed elettrone. Nella situazione di destra l'atomo si trova nello stato fondamentale $ g\rangle$ e nella cavità sono presenti n fotoni $ n\rangle$, mentre a sinistra l'atomo è eccitato $ e\rangle$ e sono presenti $n - 1$ fotoni $ n - 1\rangle$. Le transizioni tra le due configurazioni $ g, n\rangle$ e $ e, n - 1\rangle$ vengono descritte dai termini risonanti di interazione $\hat{a}^\dagger \hat{b}$ e $\hat{a} \hat{b}^\dagger$	17
1.5	Formazione degli stati misti o vestiti $ \pm\rangle$ a partire dagli stati risonanti di n fotoni e un atomo a due stati in cavità. La differenza di energia dei nuovi stati $\hbar\Omega_{Rn}$ è proporzionale alla frequenza di Rabi e dunque al grado di accoppiamento del sistema.	19
2.1	Funzioni di inversione per un atomo a due stati inizialmente nello stato fondamentale interagente con un campo elettrico oscillante. Le tre curve differiscono per il valore di Δ . Il tempo viene misurato in unità dell'inverso della frequenza di oscillazione del campo elettrico Ω	23
2.2	Autovalori dell'energia del sistema prima e dopo l'accoppiamento. I livelli degli stati imperturbati assumono lo stesso valore in condizioni di perfetta risonanza (<i>crossing</i>), mentre le curve relative alle energie degli stati vestiti non si intersecano mai (<i>anti-crossing</i>).	24

2.3	Funzioni di inversione per un atomo a due stati inizialmente nello stato fondamentale, interagente con un campo elettromagnetico in una cavità mantenuta a una temperatura costante T . I tre grafici differiscono per il valore medio del numero di fotoni in cavità n . Il tempo viene misurato in unità dell'inverso della frequenza di Rabi.	28
2.4	Funzioni di inversione per un atomo a due stati inizialmente nello stato fondamentale, interagente con un campo elettromagnetico posto, in $t = 0$ in uno stato coerente. I tre grafici differiscono per il valore medio del numero di fotoni in cavità n . Il tempo viene misurato in unità dell'inverso della frequenza di Rabi.	30
2.5	Oscillazioni di Rabi sulla sfera di Bloch: (a) il cerchio tratteggiato sul piano xy corrisponde a una possibile traiettoria seguita da un vettore di Bloch in evoluzione libera, quando $\Omega = 0$; (b) il cerchio tratteggiato nel piano yz descrive la traiettoria seguita se il sistema si trova in perfetta risonanza $\Delta = 0$; (c) il cerchio in linea continua rappresenta invece una composizione delle rotazioni precedenti, che si verifica quando $\Omega, \Delta \neq 0$. Inoltre sono indicati i vettori corrispondenti allo stato stato fondamentale $ g, n\rangle$ e eccitato $ e, n - 1\rangle$	32
3.1	Rappresentazione grafica di un atomo di Rydberg circolare. A sinistra, l'atomo si trova in un autostato e l'onda di de Broglie dell'elettrone più esterno ha un'ampiezza uniforme tutto intorno al nucleo. A destra, l'atomo si trova in una sovrapposizione di stati di Rydberg adiacenti che interagiscono costruttivamente e distruttivamente in punti diversi, producendo un dipolo elettrico atomico rotante.	34
3.2	Schema dell'apparato sperimentale utilizzato per testare l'accoppiamento atomi di Rydberg-cavità. Gli atomi provenienti da un raggio atomico vengono selezionati in base alla loro velocità da un pompaggio laser prima di essere preparati in stati di Rydberg (O). Essi attraversano la cavità C e vengono misurati in uscita da un detector D che applica un campo ionizzante. Lo stato degli atomi può essere preparato tramite delle cavità ausiliarie R_1 e R_2 prima e dopo la cavità.	36
3.3	Oscillazioni di Rabi in un sistema di due oscillatori armonici accoppiati, controllate attraverso impulsi di diversa durata. Assumendo come condizione iniziale che il sistema venga preparato nello stato fondamentale: (a) se $\Omega t = \pi/2$ i due stati si trovano ugualmente popolati, (b) se $\Omega t = \pi$ si verifica un'inversione di popolazione, (c) se $\Omega t = 2\pi$ il sistema ritorna nello stato iniziale.	37

- 3.4 Evoluzione del vettore di Bloch durante un processo QND di misurazione del numero di fotoni. (a) passaggio dell'atomo in R_1 ; (b) interazione dispersiva in C : 8 possibili vettori di Bloch sono correlati al numero di fotoni in cavità, da 0 a 7, per $\phi_0 = \pi/4$; (c) passaggio dell'atomo in R_2 39
- A.1 Distribuzione spettrale dei modi di risonanza di una microcavità. In ascissa si trova lunghezza d'onda in unità di misura di $\lambda = \frac{2\pi c}{n\omega_0}$, mentre sull'asse verticale viene riportato il coefficiente di trasmissione. Le due curve si riferiscono a cavità con fattori di qualità Q diversi. Sul grafico vengono anche riportate le larghezze di banda del modo di cavità ($\delta\lambda$) e il range spettrale libero ($\Delta\lambda$). 42

Introduzione

L'interazione tra luce e materia dà origine a una grande varietà di fenomeni fisici che sono stati ampiamente studiati fin dai tempi antichi. La prima descrizione matematica soddisfacente di questi fenomeni è data dalle equazioni di Maxwell. All'inizio del secolo scorso, nuove osservazioni sperimentali come la radiazione di corpo nero e l'effetto fotoelettrico che non potevano essere spiegate all'interno dell'elettrodinamica classica, portarono allo sviluppo di una teoria fondamentalmente diversa, la meccanica quantistica. Gli sviluppi successivi, supportati dalla grande applicabilità della nuova teoria, confluirono nella nascita dell'elettrodinamica quantistica, o QED (*Quantum Electrodynamics*), e dell'ottica quantistica [15]. La descrizione intuitiva dell'interazione tra luce e materia come una serie di processi elementari, in cui un fotone è assorbito, emesso o diffuso da una distribuzione di cariche, si basa essenzialmente sul valore piccolo della costante di struttura fine α , circa $1/137$. Tale parametro adimensionale, infatti, fornisce una misura dell'intensità dell'interazione elettromagnetica ed emerge in modo naturale nella descrizione quantistica dell'elettrodinamica. Il valore di α , molto più piccolo dell'unità, permette di descrivere la maggior parte della dinamica del campo elettromagnetico considerando solamente i processi al primo ordine (emissione e assorbimento) e al secondo ordine (diffusione).

Il valore assunto dalla costante di struttura fine è fissato per natura, tuttavia nel 1946 Purcell scoprì che l'intensità dell'interazione con un emettitore di luce poteva essere aumentata o diminuita modificando l'ambiente elettromagnetico circostante [16]. Ad esempio, l'emissione di un fotone da parte dell'emettitore poteva essere soppressa, intensificata o addirittura resa reversibile. Quest'ultima possibilità si verifica sotto opportune condizioni di accoppiamento luce-materia e si riferisce a un regime di interazione forte, o SC (*Strong Coupling*). In questo regime la cavità è in grado di contenere la radiazione elettromagnetica per un tempo sufficientemente lungo da rendere trascurabili le perdite del sistema. Dunque, diventa possibile osservare scambi di quanti energetici tra luce e materia, i quali sono associati a un ciclo di emissione e riassorbimento di fotoni da parte dell'emettitore. Questo fenomeno è noto come oscillazioni di Rabi. In queste condizioni, inoltre, fotoni e atomi si sovrappongono, formando nuovi stati detti polaritonici o vestiti, dotati di

proprietà ibride.

Da queste prime osservazioni cruciali nacque un intero campo di ricerca, oggi denominato elettrodinamica quantistica in cavità (CQED), punto di partenza per lo sviluppo di dispositivi per la computazione quantistica. Infatti, data la natura *entangled* di fotoni ed eccitoni in regime di SC, è possibile utilizzare tale proprietà degli stati polaritonici per studiare e testare nuovi metodi per processare informazioni quantistiche. Negli esperimenti di informazione quantistica vengono manipolati sistemi a due stati chiamati *qubits*; nell'ambito di CQED possono essere considerati *qubits* sia gli atomi, che possono presentarsi in uno stato fondamentale e uno eccitato, sia il campo di cavità, oscillante tra due stati con diverso numero di fotoni. L'accoppiamento tra questi due *qubits* può essere controllato attraverso la realizzazione di oscillazioni di Rabi di diversa durata.

Il contributo più significativo nell'ambito dell'*entanglement* tra fotoni ed elettroni è stato fornito dal premio Nobel S. Haroche nei suoi esperimenti con atomi di Rydberg inviati in microcavità con altissimo fattore di qualità a specchi superconduttori [8].

Il fenomeno delle oscillazioni di Rabi, quindi, non solo occupa una posizione di rilievo dal punto di vista teorico, in quanto legato a proprietà essenzialmente quantistiche, ma gioca anche un ruolo fondamentale sul piano applicativo offrendo la possibilità di ingegnerizzare l'interazione luce-materia e la manipolazione di particelle quantistiche isolate.

Il primo capitolo di questa tesi tratterà la costruzione dell'operatore hamiltoniano del sistema atomo-campo; incorporando diversi contributi si otterranno le Hamiltoniane associate ai modelli di Rabi semiclassico e quantistico, infine tramite opportune approssimazioni si giungerà al modello di Jaynes-Cummings.

Nel secondo capitolo, quindi, si affronterà nel dettaglio il fenomeno delle oscillazioni di Rabi: questo comportamento tipicamente quantistico viene derivato a partire sia dalle formulazioni semiclassica, sia da quella quantistica approssimata. Inoltre viene mostrato come l'evoluzione del sistema dipenda fortemente dalle condizioni iniziali della cavità.

Nell'ultimo capitolo viene infine mostrato un esempio applicativo di questo fenomeno: viene quindi descritto brevemente il funzionamento degli esperimenti di S. Haroche. In particolare, ci si focalizzerà sulla possibilità di manipolare lo stato degli atomi di Rydberg utilizzando le oscillazioni di Rabi e come sia possibile ottenere informazioni sul numero di fotoni in cavità sfruttando l'*entanglement* tra atomi e campo.

Capitolo 1

Hamiltoniana del sistema

Un approccio perturbativo per l'interazione atomo-campo elettromagnetico assume che le popolazioni degli stati atomici restino essenzialmente inalterate, cioè che la probabilità di trovare l'elettrone in uno stato diverso da quello iniziale sia molto piccola. D'altra parte, con una radiazione laser abbastanza intensa ed una frequenza praticamente risonante con la differenza di energia tra due livelli elettronici, si ottiene un grosso trasferimento di popolazione tra i due stati risonanti. In questo caso dunque la teoria perturbativa sostanzialmente fallisce, deve essere abbandonata ed occorre esaminare il problema con tecniche diverse [14].

Inizialmente si propone un prototipo di interazione in regime di Strong Coupling, legato sostanzialmente alla meccanica classica.

Uno studio semplificato, ma più soddisfacente, può essere portato avanti invece con un approccio semiclassico utilizzando il modello di Rabi [17]. Tale modello viene detto semiclassico poichè il sistema atomico viene trattato quantisticamente, mentre la radiazione ancora da un punto di vista classico.

Altrimenti, per descrivere in modo appropriato l'interazione luce-materia all'interno di una microcavità è possibile utilizzare un approccio completamente quantistico, seguendo le idee di Jaynes e Cummings [11]: la radiazione confinata sarà da considerare come composta da fotoni associati ad onde stazionarie alla frequenza di risonanza della cavità mentre, per quanto riguarda la materia, verrà considerato un sistema atomico in cui un elettrone può compiere transizioni tra due soli livelli energetici [12].

In tale modello lo stato dei due sistemi non accoppiati è schematizzato in Figura 1.1. L'atomo è trattato come un sistema a due livelli, lo stato fondamentale $|g\rangle$ e lo stato eccitato $|e\rangle$, mentre i fotoni confinati vengono descritti da una base di stati di Fock alla frequenza di risonanza della cavità. Gli autoket della base di Fock vengono etichettati tramite un numero naturale, che indica il numero di fotoni coinvolti nel sistema: ad esempio, gli stati $|0\rangle$, $|1\rangle$ e $|n\rangle$ rappresentano rispettivamente la situazione in cui non ci sono fotoni nella cavità, in cui ce n'è solo uno

oppure ce ne sono n .

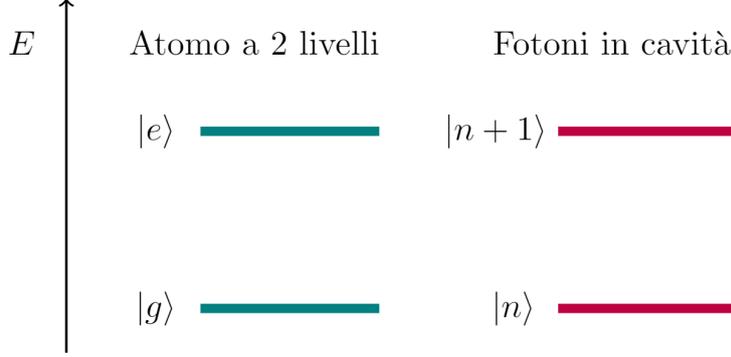


Figura 1.1: *Stati energetici dell'elettrone in un atomo a due livelli e stati di Fock del fotone in cavità. Elettrone e fotone, in questa rappresentazione, non sono accoppiati.*

Il modello semiclassico proposto da Rabi, in approssimazione di dipolo, prevede un'Hamiltoniana per l'atomo illuminato da una radiazione elettromagnetica del tipo:

$$\boxed{\hat{H}_R = \hat{H}_0 - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}} \quad (1.1)$$

con \hat{H}_0 Hamiltoniana atomica, \mathbf{d} momento di dipolo elettrico dell'elettrone mentre \mathbf{E} è il campo elettrico.

L'Hamiltoniana del sistema, nel modello quantistico, ha una struttura più ricca, che può essere scritta come somma di tre termini:

$$\boxed{\hat{H}_R = \hat{H}_e + \hat{H}_f + \hat{H}_{int}} \quad (1.2)$$

in questa formulazione \hat{H}_e è l'hamiltoniana che descrive le transizioni elettroniche in un atomo a due livelli, \hat{H}_f è l'hamiltoniana associata al campo elettromagnetico e \hat{H}_{int} è l'hamiltoniana che descrive l'accoppiamento tra atomo e campo [4]. Eseguendo un'ulteriore approssimazione, detta di onda rotante (RWA, *Rotating Wave Approximation*), il termine di interazione di tale Hamiltoniana viene semplificato notevolmente e la nuova formulazione prende il nome di modello di Jaynes-Cummings (JCM), in onore dei due fisici che per primi idearono tale modello.

1.1 Strong Coupling

È possibile osservare i vari regimi di interazione tra luce e materia all'interno di dispositivi detti di confinamento ottico, i quali permettono ai fotoni di rimanere localizzati per un tempo sufficientemente lungo da entrare in regime di accoppiamento debole, forte e ultra forte con la materia. Questo argomento è brevemente trattato in Appendice A. In seguito, tuttavia, ci occuperemo solo del regime in cui l'accoppiamento atomo-radiazione è forte.

Questo regime di interazione si può ottenere in qualsiasi sistema associabile a due oscillatori armonici accoppiati e quindi ha un perfetto analogo nella meccanica classica. Un prototipo per l'interazione emettitore-risonatore si ha considerando due pendoli identici che possono scambiarsi energia attraverso una molla [fig. 1.2]. Se la costante elastica della molla è sufficientemente grande, il doppio pendolo potrà oscillare a due frequenze corrispondenti all'oscillazione in fase e fuori fase dei singoli pendoli, diverse dalla frequenza di oscillazione naturale dei due pendoli non accoppiati. La differenza tra le due nuove frequenze dipenderà allora anche dalla costante elastica della molla e quindi dal grado di accoppiamento degli oscillatori armonici.



Figura 1.2: *Oscillazioni naturali di due pendoli accoppiati in fase (a) e fuori fase (b). Le frequenze delle oscillazioni sono diverse da quelle dei pendoli singoli e la differenza tra le due è proporzionale al grado di accoppiamento.*

La condizione necessaria per entrare nel regime di strong coupling è inserire in una struttura di confinamento ottico un materiale in cui possono avvenire transizioni elettroniche. Si dovranno prendere in considerazione quindi materiali in cui gli elettroni di valenza compiono transizioni dallo stato fondamentale a quello eccitato e formano con le lacune nello stato fondamentale (vacanze di elettroni con carica opposta) delle quasi-particelle chiamate eccitoni.

Se l'energia della transizione eccitonica è uguale o molto vicina a quella dei fotoni confinati nel modo di risonanza della cavità, viene raggiunto l'accoppiamento forte luce-materia: in questo modo atomi e fotoni si scambiano energia più rapidamente

rispetto ad eventuali processi di decadimento (*dephasing*) dell'eccitone e di fuoriuscita del fotone dalla cavità.

In queste condizioni l'interazione tra i fotoni nel modo di cavità e l'atomo può essere considerata reversibile: l'atomo emette un fotone nel modo risonante, il quale poi è riflesso dagli specchi agli estremi della cavità e viene riassorbito dall'atomo. L'interazione reversibile tra l'atomo e il campo di cavità è più rapida dei processi irreversibili dovuti alle perdite dei fotoni, di conseguenza l'interazione luce-materia non può essere trattata ricorrendo alla regola d'oro di Fermi.

Nel regime di accoppiamento forte il fotone e l'eccitone formano, dunque, un sistema unico caratterizzato da due nuovi stati a due energie diverse da quella degli stati di partenza: a questi stati si possono associare delle quasiparticelle chiamate polaritoni che possiedono proprietà ibride rispetto a quelle degli stati non accoppiati.

Lorentz propose una rappresentazione completamente classica dell'interazione luce-materia con un'impostazione vicina al prototipo presentato. In questo modello la luce segue le equazioni di Maxwell e l'emettitore, in questo caso un atomo, viene modellizzato da un sistema meccanico composto da due masse, il nucleo e l'elettrone, collegate da una molla. A causa della grande differenza di massa tra i due corpi, il risultato dell'interazione viene rappresentato come il moto oscillatorio dell'elettrone attorno al nucleo, sotto l'influenza di un campo elettromagnetico esterno.

Nonostante sia estremamente semplicistico, questo modello riesce a descrivere in modo anche piuttosto soddisfacente gli spettri di diversi emettitori atomici e molecolari. D'altra parte però, non riesce a fornire la corretta evoluzione temporale del sistema e non prevede l'esistenza di fenomeni tipicamente quantistici, come le oscillazioni di Rabi [15].

Un primo passo per migliorare questo modello è implementare una descrizione quantistica dell'atomo, utilizzando il formalismo della teoria dei sistemi a due stati. In questo modo si assume che l'atomo si possa trovare solo in uno stato fondamentale, a minore energia, e uno eccitato, più energetico.

La descrizione del campo occupa un ruolo centrale nella comprensione delle interazioni luce-materia. Da una parte la teoria classica di Maxwell ha avuto un incredibile successo nel descrivere la propagazione della luce attraverso lo spazio e vari mezzi per lunghi intervalli di tempo e interazioni macroscopiche e mesoscopiche statiche luce-materia come riflessione, rifrazione e diversi tipi di diffusione. La teoria quantistica, basata invece sull'esistenza dei fotoni, risulta necessaria per descrivere interazioni microscopiche su scale temporali molto corte, dunque ci aspettiamo che in regime di accoppiamento forte la trattazione quantistica sia più potente e appropriata.

1.2 Onde elettromagnetiche stazionarie

Per studiare il comportamento della radiazione elettromagnetica in una cavità planare, è necessario trovare una particolare soluzione delle equazioni di Maxwell che rappresenti un'onda piana stazionaria lungo la direzione z . In questo caso è comodo fare riferimento alla Figura 1.3.

Poiché per un'onda elettromagnetica nel vuoto il campo elettrico ed il campo ma-

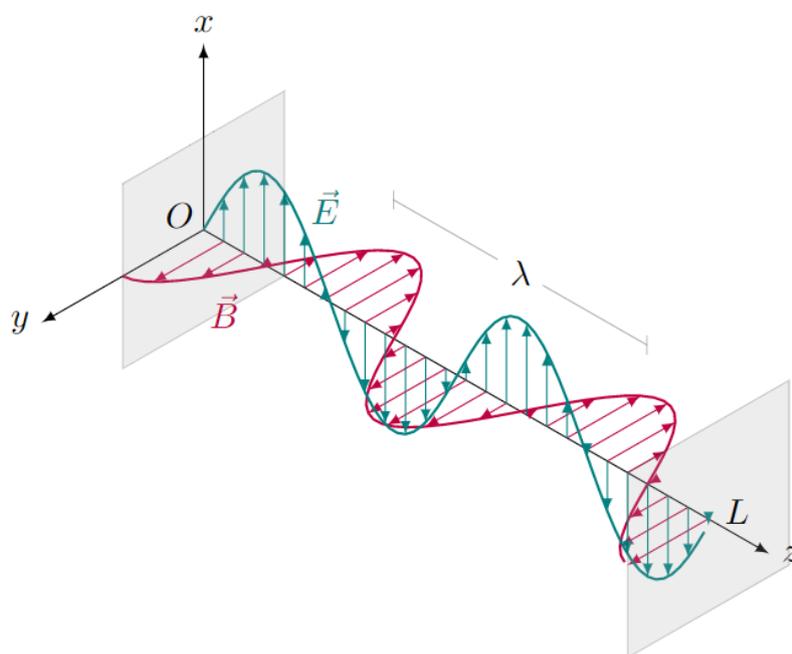


Figura 1.3: *Onda elettromagnetica confinata in una cavità planare. In $z = 0$ e $z = L$ sono collocati due specchi semiriflettenti. Le onde elettromagnetiche rimangono confinate per effetto di interferenze costruttive all'interno della struttura ottica.*

gnetico sono ortogonali tra loro ed alla direzione di propagazione della radiazione (a meno di sovrapposizioni con campi statici ed uniformi che non hanno contenuto dinamico e che non hanno alcun effetto sulle equazioni di Maxwell) risulta comodo scegliere un campo elettrico diretto lungo l'asse x e un campo magnetico diretto lungo l'asse y :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_x(z, t) \mathbf{i}_x \quad (1.3)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = B_y(z, t) \mathbf{i}_y \quad (1.4)$$

Inserendo queste espressioni per il campo elettrico e magnetico nelle equazioni di Maxwell senza sorgenti, si trovano le seguenti relazioni tra le componenti E_x e B_y :

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0 \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \quad (1.6)$$

derivando ulteriormente una equazione rispetto al tempo e l'altra rispetto allo spazio (nei due modi possibili ed assumendo derivate miste continue) è possibile disaccoppiare le due componenti, ottenendo le tipiche equazioni di propagazione ondulatoria lungo z :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = 0 \quad (1.8)$$

Inoltre si assume che la cavità presa in considerazione sia delimitata lungo z da due piani perfettamente conduttori, ovvero da due specchi perfettamente riflettenti (riflessione metallica), posti a una distanza L .

Le condizioni al contorno impongono che il campo elettrico si annulli su tali piani dunque:

$$E_x(0, t) = E_x(L, t) = 0 \quad (1.9)$$

mentre non esistono vincoli analoghi per quando riguarda il campo magnetico.

Tramite un *ansatz* si può ipotizzare una soluzione nella forma:

$$E_x(z, t) = Q(t) \sin k_z z \quad (1.10)$$

che rappresenta appunto un'onda stazionaria confinata tra due pareti metalliche. Il confinamento all'interno della cavità determina una discretizzazione della componente lungo z del vettore d'onda, la quale deve soddisfare la relazione già trovata nella sezione precedente (con $n = 1$ per il vuoto):

$$k_z = \frac{m\pi}{L} \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (1.11)$$

Utilizzando la prima delle relazioni trovate in precedenza tra E_x e B_y (1.5) si ottiene un'espressione anche per il campo magnetico:

$$B_y(z, t) = \frac{1}{k_z c^2} \dot{Q}(t) \cos k_z z \quad (1.12)$$

Inserendo poi le espressioni trovate in (1.8) si ottiene la seguente equazione differenziale di secondo grado in $Q(t)$:

$$\frac{1}{k_z c^2} \ddot{Q}(t) \cos k_z z = -kQ(t) \cos k_z z \quad (1.13)$$

Tale equazione è identicamente verificata se $Q(t)$ soddisfa l'equazione:

$$\ddot{Q}(t) = -c^2 k_z^2 Q(t) \quad (1.14)$$

che è perfettamente analoga all'equazione di un oscillatore armonico di massa unitaria e frequenza:

$$\omega = ck_z \quad (1.15)$$

Si ridefinisce ora $Q(t)$, che ha le dimensioni di un campo elettrico, in termini di una variabile $q(t)$, con le dimensioni effettive di una coordinata per un oscillatore armonico di massa unitaria (dimensionalmente una lunghezza per la radice di una massa):

$$Q(t) = \left(\frac{2\omega^2}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2} q(t) \quad (1.16)$$

dove V è il volume della cavità e ϵ_0 indica la costante dielettrica del vuoto. Si definisce inoltre il momento coniugato $p(t)$:

$$p(t) = \dot{q}(t) \quad (1.17)$$

Le espressioni per le uniche componenti non nulle dei campi elettrico e magnetico si scrivono:

$$E_x(z, t) = \left(\frac{2\omega^2}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2} q(t) \sin k_z z \quad (1.18)$$

$$B_y(z, t) = \frac{1}{\omega c} \left(\frac{2\omega^2}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2} p(t) \cos k_z z \quad (1.19)$$

La scelta della normalizzazione per il campo elettrico e magnetico è suggerita dal calcolo dell'energia assegnata al campo elettromagnetico:

$$H = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2) dV \quad (1.20)$$

$$= \frac{1}{V} \int_V (\omega^2 q^2(t) \sin^2 k_z z + p^2(t) \cos^2 k_z z) dx dy dz \quad (1.21)$$

$$= \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2) \quad (1.22)$$

È semplice dare ora un'interpretazione delle equazioni trovate: ciò che si è fatto è stato sostanzialmente selezionare una particolare soluzione delle equazioni di Maxwell, un modo di oscillazione singolo (una volta fatta una scelta di k_z e della corrispondente pulsazione ω) dei campi elettrico e magnetico, che nel caso specifico rappresenta un'onda piana stazionaria.

Tale modo di oscillazione è formalmente equivalente ad un oscillatore armonico di massa unitaria dove i campi elettrico e magnetico, a meno di fattori di scala, assumono i ruoli di posizione e impulso [14].

1.3 Quantizzazione del campo elettromagnetico

Avendo identificato le variabili canoniche del campo elettromagnetico come sistema fisico classico, si utilizza la regola di corrispondenza per associare ad esse degli operatori quantistici autoaggiunti \hat{q} e \hat{p} che soddisfano le regole di commutazione canoniche:

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \quad (1.23)$$

Tuttavia la trattazione quantistica di un modo del campo elettromagnetico, in analogia con quella dell'oscillatore armonico quantistico, risulta più agevole introducendo gli operatori (non autoaggiunti e quindi non osservabili) di creazione \hat{a}^\dagger e di distruzione \hat{a} :

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\hat{q} + i\hat{p}) \quad (1.24)$$

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\hat{q} - i\hat{p}) \quad (1.25)$$

Inoltre gli operatori di creazione e distruzione soddisfano la seguente regola di commutazione:

$$[\hat{a}^\dagger, \hat{a}] = 1 \quad (1.26)$$

Le relazioni inverse che esprimono gli operatori \hat{q} e \hat{p} in funzione di \hat{a}^\dagger e \hat{a} sono date invece da:

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \quad (1.27)$$

$$\hat{p} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} i(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \quad (1.28)$$

Utilizzando proprio queste ultime è possibile esprimere l'hamiltoniana quantistica del campo tramite gli operatori di creazione e di distruzione:

$$\hat{H}_f = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \hat{I} \right) \quad (1.29)$$

Poiché il termine proporzionale all'identità non influenza la dinamica, si può scrivere più semplicemente:

$$\boxed{\hat{H}_f = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a}} \quad (1.30)$$

Gli operatori di creazione e distruzione hanno un significato sottile poiché agiscono sullo stato del sistema rispettivamente incrementando o diminuendo di una unità il numero di quanti di oscillazione.

L'operatore $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ è chiamato operatore numero \hat{n} ed il suo valore di aspettazione è un numero intero e positivo e rappresenta proprio il numero di oscillazioni quantizzate presenti nel sistema. Nel caso della quantizzazione della luce i quanti di oscillazione sono rappresentati dai fotoni.

Gli autostati dell'hamiltoniana del campo corrispondono agli autostati dell'operatore numero i quali vengono chiamati anche stati di Fock $|n\rangle$. Gli stati $|n\rangle$ non individuano quindi degli stati eccitati ma degli stati a n particelle, i fotoni, ognuna delle quali "trasporta" un quanto di energia $\hbar\omega$ che si aggiunge all'energia dello stato fondamentale.

1.4 Atomo a due livelli

Per un atomo a due livelli che ha uno stato fondamentale $|g\rangle$ e uno stato eccitato $|e\rangle$ con autovalori di energia E_g e E_e , l'hamiltoniana risulta diagonale ed è data da:

$$\hat{H}_e = E_e |e\rangle \langle e| + E_g |g\rangle \langle g| \quad (1.31)$$

Poiché ci troviamo in uno spazio di Hilbert bidimensionale, ogni operatore può essere scritto come combinazione dell'operatore identità \hat{I} e delle matrici di Pauli $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ e $\hat{\sigma}_z$. Tuttavia è possibile scegliere una base operatoriale migliore, in cui vengono sostituite le matrici di Pauli con una base operatoriale sferica $\{\hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_\pm\}$, data da:

$$\hat{I} = |e\rangle \langle e| + |g\rangle \langle g| \quad (1.32)$$

$$\hat{\sigma}_+ = |e\rangle \langle g| \quad (1.33)$$

$$\hat{\sigma}_- = |g\rangle \langle e| \quad (1.34)$$

$$\hat{\sigma}_0 = |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g| = \hat{\sigma}_z \quad (1.35)$$

Le matrici $\hat{\sigma}_x$ e $\hat{\sigma}_y$ sono state quindi sostituite con gli operatori di innalzamento $\hat{\sigma}_+$ e di abbassamento $\hat{\sigma}_-$, definiti in questo modo:

$$\hat{\sigma}_\pm = \frac{\hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y}{2} \quad (1.36)$$

La comodità di tale base si apprezza considerando l'azione degli operatori sugli autostati del sistema:

$$\hat{I}|e\rangle = |e\rangle \quad \hat{I}|g\rangle = |g\rangle \quad (1.37)$$

$$\hat{\sigma}_+|e\rangle = 0 \quad \hat{\sigma}_+|g\rangle = |e\rangle \quad (1.38)$$

$$\hat{\sigma}_-|e\rangle = |g\rangle \quad \hat{\sigma}_-|g\rangle = 0 \quad (1.39)$$

$$\hat{\sigma}_z|e\rangle = |e\rangle \quad \hat{\sigma}_z|g\rangle = -|g\rangle \quad (1.40)$$

Osserviamo che l'operatore $\hat{\sigma}_+$ produce una transizione dallo stato fondamentale $|g\rangle$ allo stato eccitato $|e\rangle$, mentre l'operatore $\hat{\sigma}_-$ produce un diseccitamento dell'atomo, eseguendo una transizione dallo stato $|e\rangle$ allo stato $|g\rangle$.

L'hamiltoniana che descrive le eccitazioni elettroniche nell'atomo a due livelli può essere scritta come una combinazione lineare degli operatori \hat{I} e $\hat{\sigma}_z$:

$$\hat{H}_e = \frac{E_e + E_g}{2}\hat{I} + \frac{E_e - E_g}{2}\hat{\sigma}_z \quad (1.41)$$

Tuttavia il primo termine, essendo proporzionale all'identità può essere trascurato, non avendo effetti sulla dinamica del sistema. Considerando poi che $E_e - E_g = \hbar\omega_e$, con ω_e frequenza di transizione tra i due livelli energetici dell'atomo, si può riscrivere l'equazione dell'hamiltoniana nella forma compatta:

$$\hat{H}_e = \frac{\hbar\omega_e}{2}\hat{\sigma}_z \quad (1.42)$$

Inoltre sfruttando il fatto che $\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- = \hat{\sigma}_z/2$ posso infine riscrivere l'hamiltoniana elettronica come:

$$\hat{H}_e = \hbar\omega_e\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- \quad (1.43)$$

Si nota che gli operatori di innalzamento e di abbassamento si comportano rispettivamente come una sorta di operatori di creazione e distruzione di eccitazioni elettroniche. Possiamo quindi sostituire $\hat{\sigma}_+$ e $\hat{\sigma}_-$ con gli operatori di creazione e distruzione di tipo fermionico \hat{b}^\dagger e \hat{b} :

$$\boxed{\hat{H}_e = \hbar\omega_e\hat{b}^\dagger\hat{b}} \quad (1.44)$$

1.5 Interazione elettrone-campo

Discutiamo ora come un campo elettromagnetico possa interagire con la materia, in particolare con gli atomi, per capire meglio il meccanismo di assorbimento ed emissione della radiazione elettromagnetica [14].

Ricordiamo prima brevemente come descrivere il comportamento di una carica elettrica in presenza di un campo elettrico e magnetico. Consideriamo un elettrone con carica elettrica $-e$, velocità \mathbf{v} , non relativistica, sulla quale i campi elettrico e magnetico esercitano la forza di Lorentz:

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E} - e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1.45)$$

a cui sono associate le seguenti equazioni del moto:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = e \left[\nabla\Phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right] \quad (1.46)$$

in cui il campo elettrico e magnetico vengono espressi in funzione del potenziale scalare Φ e del potenziale vettore \mathbf{A} . Tali potenziali non sono unici e sono definiti a meno di una trasformazione di gauge:

$$\Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \quad (1.47)$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f \quad (1.48)$$

dove f è un potenziale scalare. Tuttavia tale ambiguità di gauge non affliggerà l'Hamiltoniana del sistema perchè sia \mathbf{E} che \mathbf{B} non dipendono dalla scelta di gauge. L'Hamiltoniana che fornisce l'equazione del moto associata alla forza di Lorentz è:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \frac{(\mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2}{2m} - e\Phi(\mathbf{r}, t) \quad (1.49)$$

Rispetto all'Hamiltoniana di una particella libera $H = \mathbf{p}^2/2m$ si nota, in particolare, la comparsa di un termine aggiuntivo accanto all'impulso \mathbf{p} nella parte di hamiltoniana cinetica.

L'introduzione del campo elettromagnetico equivale, dunque, alla seguente sostituzione minimale:

$$V \rightarrow V - e\Phi(\mathbf{r}, t) \quad (1.50)$$

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (1.51)$$

L'Hamiltoniana di interazione può essere semplificata applicando l'approssimazione di dipolo. In generale, infatti, la lunghezza d'onda del campo elettromagnetico

che è assorbita o che è emessa durante le transizioni atomiche è molto più grande della dimensione di un atomo. Questa condizione permette di considerare che tutto l'atomo, il cui nucleo è posizionato in \mathbf{r}_0 , sia immerso in un'onda piana elettromagnetica descritta da un vettore potenziale del tipo:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{A}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{s}, t) = \mathbf{A}(t) \exp(i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_0 + \mathbf{s})) \\ &\simeq \mathbf{A}(t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0)\end{aligned}\quad (1.52)$$

in cui il vettore \mathbf{s} descrive la posizione di un generico punto dell'atomo rispetto al nucleo: l'approssimazione prevede di considerare $\mathbf{k} \cdot \mathbf{s} \leq |\mathbf{k}||\mathbf{s}| \ll 1$. Questo equivale a ignorare la struttura interna elettronica dell'atomo, trattandolo come una particella puntiforme.

Considerando per semplicità un gauge tale che $\Phi(\mathbf{r}, t) = 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, l'equazione di Schrödinger per l'Hamiltoniana si scrive:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\nabla + \frac{ie}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) \right]^2 \right) \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1.53)$$

Definiamo $\psi(\mathbf{r}, t)$ in funzione di una nuova funzione d'onda $\phi(\mathbf{r}, t)$:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \exp\left(\frac{ie}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) \cdot \mathbf{r}\right) \phi(\mathbf{r}, t) \quad (1.54)$$

e la sostituiamo nell'equazione di Schrödinger:

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{ie}{\hbar} \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}\right) \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right) \phi(\mathbf{r}, t) = \\ i\hbar \left[-\frac{ie}{\hbar} \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{r} \phi(\mathbf{r}, t) + \dot{\phi}(\mathbf{r}, t) \right] \exp\left(\frac{ie}{\hbar} \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}\right)\end{aligned}\quad (1.55)$$

Nel gauge utilizzato vale l'identità $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}$, dunque si ha:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[\frac{p^2}{2m} + e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t) \right] \psi(\mathbf{r}, t) \quad (1.56)$$

Da cui si possono identificare due hamiltoniane: una relativa all'atomo imperturbato e una relativa all'interazione dell'elettrone col campo elettromagnetico in approssimazione di dipolo. Dunque si trova:

$$H_{int} = e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t) = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (1.57)$$

dove si è introdotto il dipolo elettrico $\mathbf{d} = -e\mathbf{r}$.

1.6 Quantizzazione dell'hamiltoniana di interazione

Per ottenere l'operatore Hamiltoniano di interazione \hat{H}_{int} è necessario, a questo punto, sostituire i vettori dipolo e campo elettrico con i rispettivi operatori:

$$\hat{H}_{int} = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{E}} \quad (1.58)$$

L'operatore campo elettrico può essere ottenuto sostituendo l'equazione per \hat{q} in funzione degli operatori di creazione \hat{a}^\dagger e distruzione \hat{a} (1.27) all'interno dell'equazione (1.18); ciò che si trova è:

$$\begin{aligned} \hat{E} &= \left(\frac{2\omega^2}{\epsilon_0 V}\right)^{1/2} \left(\frac{\hbar}{2\omega}\right)^{1/2} \sin(k_z z)(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \\ &= \lambda(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \end{aligned} \quad (1.59)$$

Per quanto riguarda l'operatore di dipolo, è utile eseguire alcune costatazioni sulla parità del sistema [20]. L'operatore di parità \hat{P} agisce sull'operatore posizione cambiandone il segno e risulta definito dall'equazione:

$$\hat{P}\hat{q}\hat{P}^\dagger = -\hat{q} \quad (1.60)$$

L'operatore parità è unitario e idempotente; questo significa che \hat{P} e \hat{P}^{-1} corrispondono alla stessa operazione di inversione delle coordinate e dunque $\hat{P}^2 = \hat{I}$. Applicando \hat{P} a destra dell'equazione (1.60) si ottiene la relazione: $\hat{P}\hat{q} = -\hat{q}\hat{P}$ che equivale a richiedere che l'anticommutatore tra i due operatori sia zero. Possiamo scrivere gli elementi di matrice dell'anticommutatore $[\hat{P}, \hat{q}]_+$ nella forma:

$$\langle a | [\hat{P}, \hat{q}]_+ | b \rangle = \langle a | \hat{P}\hat{q} + \hat{q}\hat{P} | b \rangle = (\pi_a + \pi_b) \langle a | \hat{q} | b \rangle = 0 \quad (1.61)$$

dove π_a e π_b sono autovalori di \hat{P} ; questo è possibile poichè l'operatore parità commuta con l'operatore hamiltoniano atomico e dunque \hat{P} e \hat{H} hanno autostati simultanei. Dalla condizione $\hat{P}^2 = \hat{I}$ si ottiene che i possibili autovalori di \hat{P} sono ± 1 , che corrispondono rispettivamente a parità pari (+) e dispari (-). Affinchè possa essere soddisfatta la condizione in (1.61) si deve avere $\pi_a + \pi_b = 0$ o $\langle a | \hat{q} | b \rangle = 0$.

Queste considerazioni possono essere ripetute sostituendo a \hat{q} l'operatore dipolo elettrico \hat{d} . Si trova quindi che gli elementi diagonali di \hat{d} si annullano sempre

mentre, in generale, gli elementi fuori dalla diagonale non sono nulli:

$$\langle g | \hat{d} | g \rangle = \langle e | \hat{d} | e \rangle = 0 \quad (1.62)$$

$$\langle g | \hat{d} | e \rangle = \langle e | \hat{d} | g \rangle^* \neq 0 \quad (1.63)$$

L'operatore \hat{d} dunque ammette la decomposizione:

$$\begin{aligned} \hat{d} &= \langle g | \hat{d} | e \rangle | g \rangle \langle e | + \langle e | \hat{d} | g \rangle | e \rangle \langle g | \\ &= d | g \rangle \langle e | + d^* | e \rangle \langle g | \end{aligned} \quad (1.64)$$

Tuttavia poiché è possibile scegliere liberamente la fase tra $|e\rangle$ e $\langle g|$, nella trattazione seguente si sceglie di assumere $d = d^*$, ovvero $d \in \mathbb{R}$, per semplificare e alleggerire i calcoli; è, quindi, possibile riscrivere un'equazione per \hat{d} nella forma:

$$\hat{d} = d(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) = d(\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \quad (1.65)$$

in cui sono stati utilizzati gli operatori di incremento $\hat{\sigma}_+$ e decremento $\hat{\sigma}_-$ prima, e gli operatori di creazione \hat{b}^\dagger e di distruzione \hat{b} di eccitazioni elettroniche poi. Componendo i risultati ottenuti, è possibile scrivere l'Hamiltoniana di interazione tra l'atomo e il campo elettromagnetico in approssimazione di dipolo:

$$\boxed{\hat{H}_{int} = \hbar\Omega(\hat{b}^\dagger + \hat{b})(\hat{a}^\dagger + \hat{a})} \quad (1.66)$$

dove $\Omega \equiv d\lambda/\hbar$ ha le dimensioni dell'inverso di un tempo $[T^{-1}]$ e viene chiamata frequenza di Rabi. Questa grandezza rappresenta la frequenza di interazione tra fotone e elettrone e può essere vista come una misura dell'accoppiamento luce-materia.

1.7 RWA, Approssimazione di onda rotante

Raccogliendo i risultati ottenuti nelle precedenti sezioni, si può esplicitare l'hamiltoniana di Rabi, costituita dalla somma dei termini \hat{H}_f (1.30), \hat{H}_e (1.44) e \hat{H}_{int} (1.66):

$$\begin{aligned} \hat{H}_R &= \hat{H}_f + \hat{H}_e + \hat{H}_{int} \\ &= \hbar\omega_0(\hat{a}^\dagger\hat{a}) + \hbar\omega_e(\hat{b}^\dagger\hat{b}) + \hbar\Omega(\hat{b}^\dagger + \hat{b})(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \end{aligned} \quad (1.67)$$

Sviluppando il termine di interazione è possibile fare alcune considerazioni aggiuntive:

$$\hat{H}_{int} = \hbar\Omega(\hat{a}\hat{b} + \hat{a}\hat{b}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{b} + \hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger) \quad (1.68)$$

É possibile suddividere i quattro termini dell'hamiltoniana di interazione in termini cosiddetti di risonanza, in $\hat{a}\hat{b}^\dagger$ e in $\hat{a}^\dagger\hat{b}$, e in termini di antirisonanza, in cui compaiono $\hat{a}\hat{b}$ e $\hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger$. I termini risonanti tengono in considerazione le transizioni tra fotoni ed elettroni in risonanza e conservano il numero di eccitazioni e dunque l'energia del sistema: quando viene creata un'eccitazione di un tipo contemporaneamente ne viene distrutta una del tipo opposto. Tali termini rappresentano quindi transizioni reali: nel caso dell'emissione spontanea la creazione di un fotone è associata al decadimento di un eccitone, mentre nel caso di assorbimento spontaneo la distruzione di un fotone è associata alla creazione di uno stato eccitato dell'atomo. In Figura 1.4 viene mostrato il comportamento dei termini risonanti. Invece, i termini antirisonanti creano e distruggono contemporaneamente due eccitazioni; di conseguenza non soddisfano il principio di conservazione dell'energia e dunque descrivono transizioni virtuali, che hanno una probabilità molto bassa di avvenire. Nella RWA i termini antirisonanti vengono trascurati proprio per questo motivo.

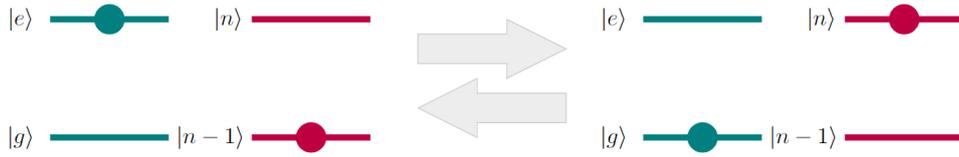


Figura 1.4: *Processi di emissione e assorbimento spontanei tra fotone ed elettrone. Nella situazione di destra l'atomo si trova nello stato fondamentale $|g\rangle$ e nella cavità sono presenti n fotoni $|n\rangle$, mentre a sinistra l'atomo è eccitato $|e\rangle$ e sono presenti $n - 1$ fotoni $|n - 1\rangle$. Le transizioni tra le due configurazioni $|g, n\rangle$ e $|e, n - 1\rangle$ vengono descritte dai termini risonanti di interazione $\hat{a}^\dagger\hat{b}$ e $\hat{a}\hat{b}^\dagger$.*

Con questa approssimazione l'hamiltoniana del sistema, detta di Jaynes-Cummings, assume la seguente forma:

$$\boxed{\hat{H}_{JC} = \hbar\omega_0(\hat{a}^\dagger\hat{a}) + \hbar\omega_e(\hat{b}^\dagger\hat{b}) + \hbar\Omega(\hat{a}^\dagger\hat{b} + \hat{a}\hat{b}^\dagger)} \quad (1.69)$$

Nell'hamiltoniana di Jaynes-Cummings presentata non viene tenuto conto di numerosi effetti. Ad esempio, poichè il modello prevede l'utilizzo di cavità con fattori di qualità Q molto alti, al limite infinito, eventuali perdite energetiche della cavità non sono prese in considerazione. Inoltre si ricorda che per semplicità si è deciso di trascurare la presenza di modi di cavità multipli, di possibili degenerazioni atomiche e il fenomeno della polarizzazione atomica, che origina *Stark shifts* [19].

1.8 Stati vestiti

A causa della presenza dei termini risonanti di interazione luce-materia, l'hamiltoniana di Jaynes-Cummings non ha come autostati gli autostati del fotone e dell'eccitone imperturbati, ma viene diagonalizzata utilizzando una combinazione lineare dei ket $|g, n\rangle$ e $|e, n-1\rangle$.

Vediamo come agisce l'Hamiltoniana JC su questa base; iniziamo considerando il caso particolare in cui $n = 0$:

$$\hat{H}_{JC} |g, 0\rangle = -\frac{1}{2}\hbar\Delta |g, 0\rangle \quad \Delta = \omega_e - \omega_0 \quad (1.70)$$

quando invece $n = 1, 2, \dots$

$$\hat{H}_{JC} |g, n\rangle = \hbar \left(n\omega_0 - \frac{1}{2}\Delta \right) |g, n\rangle + \frac{1}{2}\hbar\Omega\sqrt{n} |e, n-1\rangle \quad (1.71)$$

$$\hat{H}_{JC} |e, n-1\rangle = \hbar \left(n\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta \right) |e, n-1\rangle + \frac{1}{2}\hbar\Omega\sqrt{n} |g, n\rangle \quad (1.72)$$

Lo spazio di Hilbert si decompone naturalmente in sottospazi ortogonali:

$$\begin{aligned} L_0 &= \text{Span}\{|g, 0\rangle\} \\ L_1 &= \text{Span}\{|g, 1\rangle, |e, 0\rangle\} \\ &\vdots \\ L_n &= \text{Span}\{|g, n\rangle, |e, n-1\rangle\} \end{aligned} \quad (1.73)$$

Allo stesso modo, cambiano anche le energie permesse al sistema; in particolare, quando il sistema è vicino alla risonanza, cioè $\omega_0 \simeq \omega_e$, avviene uno *splitting* dei livelli energetici [Fig. 1.5].

In ogni sottospazio L_n l'Hamiltoniana può essere rappresentata da una matrice 2×2 :

$$\hat{H}_{JCn} = \begin{pmatrix} E_1 & W_{12} \\ W_{21} & E_2 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} n\omega_0 - \frac{1}{2}\Delta & \frac{1}{2}\Omega\sqrt{n} \\ \frac{1}{2}\Omega\sqrt{n} & n\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta \end{pmatrix} \quad (1.74)$$

dove E_1 corrisponde all'energia dello stato imperturbato $|g, n\rangle$, mentre E_2 indica l'energia dello stato $|e, n-1\rangle$: è importante notare che i due autostati imperturbati differiscono per un gap energetico pari a $\hbar\Delta$. Infine, gli elementi di matrice W_{12} e W_{21} modellizzano la perturbazione, data dai termini di interazione, puramente non diagonalizzabile.

Eseguito la diagonalizzazione della matrice è possibile calcolare gli autovalori

dell'energia relativi ai nuovi stati misti, chiamati stati *vestiti*:

$$E_{\pm n} = n\hbar\omega_0 \pm \frac{1}{2}\hbar\Omega_{Rn} \quad (1.75)$$

con le frequenze, dette sempre di Rabi:

$$\Omega_{Rn} = \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2 n} \quad (1.76)$$

La differenza di energia tra i due nuovi stati è $\hbar\Omega_{Rn} \geq \hbar\Delta$.

É immediato anche trovare le equazioni relative agli stati vestiti, espressi in funzione degli stati *nudi* imperturbati:

$$|\pm, n\rangle = |g, n\rangle \sqrt{\frac{\Omega_{Rn} \mp \Delta}{2\Omega_{Rn}}} \pm |e, n-1\rangle \sqrt{\frac{\Omega_{Rn} \pm \Delta}{2\Omega_{Rn}}} \quad (1.77)$$

Invece il sottospazio L_0 , essendo unidimensionale, è composto dal solo autostato $|g, 0\rangle$, con energia $-\hbar\omega_e/2$.

I nuovi stati polaritonici $|\pm, n\rangle$ possiedono caratteristiche ibride, essendo una combinazione di fotoni e eccitazioni elettroniche. Inoltre in questi stati misti, i fotoni e l'eccitone sono *entangled*, cioè correlati, poiché non si possono scrivere come un semplice prodotto delle basi dei sistemi separati, ossia non sono fattorizzabili.

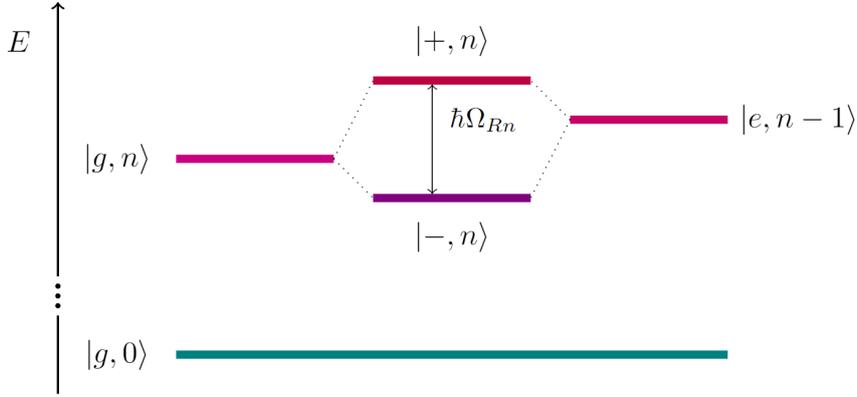


Figura 1.5: *Formazione degli stati misti o vestiti $|\pm\rangle$ a partire dagli stati risonanti di n fotoni e un atomo a due stati in cavità. La differenza di energia dei nuovi stati $\hbar\Omega_{Rn}$ è proporzionale alla frequenza di Rabi e dunque al grado di accoppiamento del sistema.*

Quando invece il sistema è lontano dalla risonanza, $\Delta = \omega_0 - \omega_e \gg 1$ i nuovi livelli energetici tendono a coincidere con quelli di partenza poiché $\Omega_{Rn} \rightarrow \Delta$.

Capitolo 2

Oscillazioni di Rabi

In questo capitolo studieremo la dinamica del sistema formato dall'atomo a due livelli e dal campo elettromagnetico, a partire dalle espressioni per l'Hamiltoniana trovate nel capitolo precedente seguendo un approccio semiclassico e quantistico. In particolare, considereremo la situazione in cui atomo e campo sono vicini alla risonanza, la quale prevede che la frequenza di transizione elettronica ω_e sia quasi coincidente con la frequenza dei fotoni ω_0 e, dunque, che il *detuning* Δ sia piccolo: $\Delta = \omega_e - \omega_0 \ll 1$.

2.1 Oscillazioni di Rabi semiclassiche

Riportiamo l'equazione per l'Hamiltoniana del sistema data dal modello di Rabi semiclassico:

$$\hat{H}_R = \hat{H}_0 - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} \quad (2.1)$$

e ipotizziamo un comportamento periodico oscillante per la radiazione. Inseriamo, quindi, un campo elettrico nella forma: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cdot \cos \omega_0 t$, all'interno di \hat{H}_R :

$$\hat{H}_R = \hat{H}_0 - \hat{V}_0 \cdot \cos \omega_0 t \quad (2.2)$$

dove $\hat{V}_0 = \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0$.

Assumendo appropriata l'approssimazione di atomo a due livelli, la funzione d'onda dell'elettrone all'istante t è data da:

$$|\psi(t)\rangle = |g\rangle e^{-iE_g t/\hbar} g(t) + |e\rangle e^{-iE_e t/\hbar} e(t) \quad (2.3)$$

dove le funzioni $g(t)$ e $e(t)$ descrivono le ampiezze il cui modulo quadro esprime la probabilità di trovare l'elettrone nello stato corrispondente, che equivale anche alla popolazione del livello poichè in gioco c'è un solo elettrone.

Come visto nella sezione 2.3 gli stati $|g\rangle$ e $|e\rangle$ sono autostati di H_0 con autovalori E_g e E_e ; mentre, per considerazioni di parità analoghe a quelle effettuate nella sezione 2.5, è lecito assumere che gli elementi diagonali di \hat{V}_0 siano nulli. Invece poniamo i rimanenti elementi di matrice siano non nulli e proporzionali a una frequenza Ω e Ω^* .

A questo punto è possibile inserire la funzione d'onda $|\psi(t)\rangle$ all'interno dell'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo:

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}_R |\psi(t)\rangle \quad (2.4)$$

Otteniamo allora delle equazioni per le ampiezze $g(t)$ e $e(t)$.

$$i \frac{dg(t)}{dt} = \Omega^* \cos(\omega_0 t) e^{-i\omega_e t} e(t) = \frac{\bar{\nu}}{2} (e^{-i(\omega_e - \omega_0)t} + e^{-i(\omega_e + \omega_0)t}) e(t) \quad (2.5)$$

$$i \frac{de(t)}{dt} = \Omega \cos(\omega_0 t) e^{+i\omega_e t} g(t) = \frac{\nu}{2} (e^{+i(\omega_e - \omega_0)t} + e^{+i(\omega_e + \omega_0)t}) g(t) \quad (2.6)$$

Inoltre, in ogni istante deve valere la condizione di normalizzazione:

$$|g(t)|^2 + |e(t)|^2 = 1 \quad (2.7)$$

questo equivale a richiedere che la probabilità di trovare l'elettrone nello stato fondamentale o nello stato eccitato sia uguale a 1.

Poichè il *detuning* è per ipotesi piccolo, i termini che dipendono da $\omega_e - \omega_0$ oscillano lentamente, mentre il fattore dipendente dalla somma risulta, in confronto, rapidamente oscillante e su tempi macroscopici il suo contributo è trascurabile.

Eseguendo dunque anche a questo livello una RWA si ottengono delle equazioni più semplici:

$$i \frac{dg(t)}{dt} = \frac{\Omega^*}{2} e^{-i\Delta t} e(t) \quad (2.8)$$

$$i \frac{de(t)}{dt} = \frac{\Omega}{2} e^{+i\Delta t} g(t) \quad (2.9)$$

Questa nuova coppia di equazioni è facilmente risolvibile, infatti ponendo, ad esempio, la condizione iniziale corrispondente all'elettrone nello stato fondamentale:

$$\text{condizioni iniziali: } g(0) = 1 \quad e(0) = 0 \quad (2.10)$$

Risolvendo il problema di Cauchy si trova:

$$g(t) = e^{-i\Delta t/2} \left[\cos(\Omega_R t/2) + i \frac{\Delta}{\Omega_R} \sin(\Omega_R t/2) \right] \quad (2.11)$$

$$e(t) = -i \frac{\Omega}{\Omega_R} e^{i\Delta t/2} \sin(\Omega_R t/2) \quad (2.12)$$

dove Ω_R è la frequenza di Rabi, definita da:

$$\Omega_R = \sqrt{|\Omega|^2 + \Delta^2} \quad (2.13)$$

Dalle soluzioni per $g(t)$ e $e(t)$ si possono determinare le probabilità di trovare l'atomo a due livelli rispettivamente nello stato fondamentale ed eccitato:

$$P_g(t) = |g(t)|^2 = 1 - \frac{|\Omega|^2}{|\Omega|^2 + \Delta^2} \sin^2(\Omega_R t/2) \quad (2.14)$$

$$P_e(t) = |e(t)|^2 = \frac{|\Omega|^2}{|\Omega|^2 + \Delta^2} \sin^2(\Omega_R t/2) \quad (2.15)$$

Si definisce, infine, la funzione di inversione $W(t)$ che descrive l'andamento delle popolazioni dei due livelli nel tempo:

$$W(t) = P_e(t) - P_g(t) = -\frac{\Delta^2}{|\Omega|^2 + \Delta^2} - \frac{|\Omega|^2}{|\Omega|^2 + \Delta^2} \cos(\Omega_R t) \quad (2.16)$$

Tenendo conto della condizione di normalizzazione si ha che quando $W(t) = -1$ (valore minimo) solo il livello fondamentale è occupato, mentre se $W(t) = 1$ (valore massimo) allora il livello fondamentale è vuoto e l'atomo si trova nello stato eccitato; in questo secondo caso si dice che la popolazione elettronica si è invertita. Questa condizione si verifica esattamente solo quando si ha una perfetta risonanza tra la frequenza della radiazione e l'energia di eccitazione atomica, cioè quando: $\Delta = 0$. Inoltre in questa situazione l'inversione di popolazione avviene ad intervalli di tempo $t = \pi/|\nu|$; per questo motivo nella terminologia della risonanza magnetica nucleare (NMR) si parla di trasferimento di un impulso π [14].

In figura 2.1 vengono mostrate alcune funzioni di inversioni per diversi valori di *detuning*.

2.2 Oscillazioni di Rabi quantistiche

Anche dalla struttura dell'hamiltoniana del modello di Jaynes-Cummings emerge in modo naturale il fenomeno delle *oscillazioni di Rabi*, peculiare dei sistemi a due

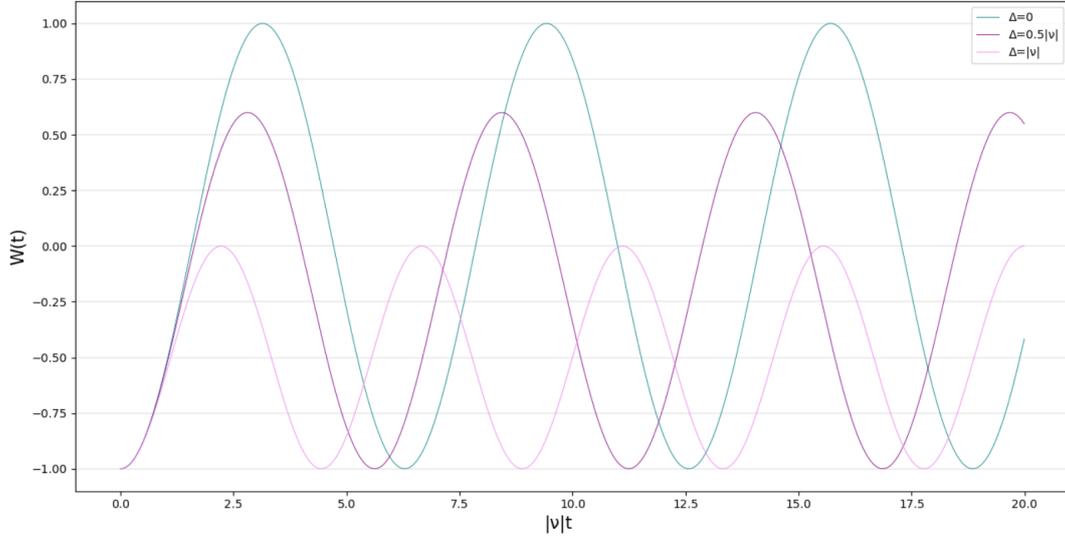


Figura 2.1: Funzioni di inversione per un atomo a due stati inizialmente nello stato fondamentale interagente con un campo elettrico oscillante. Le tre curve differiscono per il valore di Δ . Il tempo viene misurato in unità dell'inverso della frequenza di oscillazione del campo elettrico Ω .

stati quando vengono sottoposti a un campo elettromagnetico oscillante oscillante. In primo luogo, si riscrive l'hamiltoniana \hat{H}_{JC} in un nuovo "sistema di riferimento", in modo da porre l'energia dello stato fondamentale uguale a 0 (in pratica si sottrae ad \hat{H}_{JC} un termine proporzionale alla matrice identità, che dunque non modifica la dinamica del sistema):

$$\hat{H} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\Omega\sqrt{n} \\ \frac{1}{2}\Omega\sqrt{n} & \Delta \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

La nuovi livelli energetici vengono mostrati in figura 2.2; si nota che le curve relative agli autovalori dell'energia si intersecano per $\Delta = 0$, cioè in condizioni di perfetta risonanza. Quando invece i due sistemi sono accoppiati tale degenerazione viene eliminata, infatti le curve relative agli stati vestiti sono delle iperboli, i cui asintoti sono le rette E_g e E_e : poichè le nuove energie non assumono mai lo stesso valore, tale situazione viene detta di *anti-crossing* [20, p.161].

Poiché si assume che gli unici stati coinvolti nei processi di emissione e assorbimento siano $|g, n\rangle$ e $|e, n-1\rangle$, la funzione di stato $\psi(t)$ sarà una combinazione lineare dei due con coefficienti dipendenti dal tempo; questo significa che il sistema

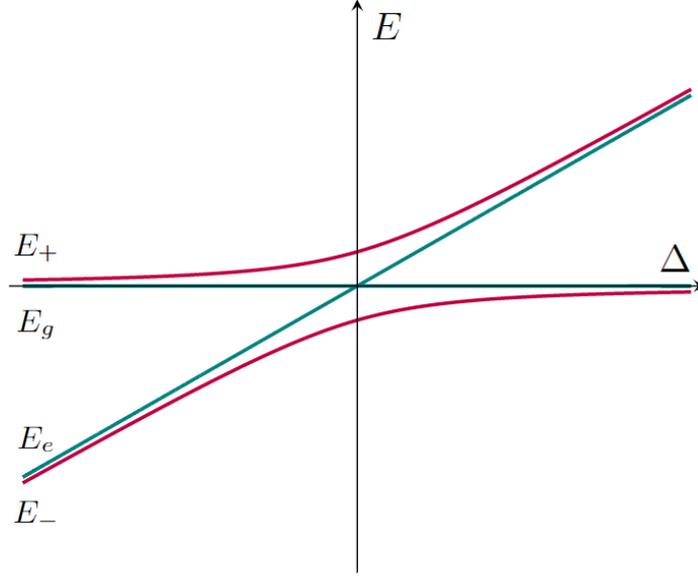


Figura 2.2: Autovalori dell'energia del sistema prima e dopo l'accoppiamento. I livelli degli stati imperturbati assumono lo stesso valore in condizioni di perfetta risonanza (crossing), mentre le curve relative alle energie degli stati vestiti non si intersecano mai (anti-crossing).

oscillerà nel tempo tra uno stato e l'altro:

$$|\psi(t)\rangle = c_i(t) |i\rangle + c_f(t) |f\rangle \quad (2.18)$$

Si ipotizza inoltre che lo stato iniziale sia $|i\rangle = |g, n\rangle$ e che lo stato finale sia $|f\rangle = |e, n - 1\rangle$; questa scelta si traduce nelle condizioni iniziali:

$$c_i(0) = 1 \quad c_f(0) = 0 \quad (2.19)$$

Utilizzando quindi la nuova forma matriciale dell'Hamiltoniana, se inseriamo la funzione di stato nell'equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H}_{int} |\psi(t)\rangle \quad (2.20)$$

si ottengono le seguenti equazioni differenziali:

$$i \frac{dc_i(t)}{dt} = \frac{1}{2} \Omega \sqrt{n} c_f \quad (2.21)$$

$$i \frac{dc_f(t)}{dt} = \frac{1}{2} [\Omega \sqrt{n} c_i + 2\Delta c_f] \quad (2.22)$$

Sostituendo la prima dentro la seconda si trova:

$$\ddot{c}_f + i\Delta \dot{c}_f + \frac{1}{4} \Omega^2(n) c_f = 0 \quad (2.23)$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene:

$$c_f(t) = -i \frac{\Omega}{\Omega_{Rn}} \sin(\Omega_{Rn} t / 2) e^{i\Delta t / 2} \quad (2.24)$$

con $\Omega_{Rn} = \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2 n}$ frequenza di Rabi generalizzata [13]. Tale equazione risulta essere analoga alla soluzione trovata precedentemente per $e(t)$; analogamente si avrà una diretta corrispondenza tra $c_i(t)$ e $g(t)$. Calcolando la funzione di inversione si ritrovano allora le oscillazioni di Rabi:

$$W(t) = P_f(t) - P_i(t) = -\frac{\Delta^2}{\Omega^2 + \Delta^2} - \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \Delta^2} \cos(\Omega_R t) \quad (2.25)$$

Si ha $W(t) = 1$ quando solo il livello $|e, n-1\rangle$ è occupato, $W(t) = -1$ quando invece è occupato $|g, n\rangle$. Come per le oscillazioni di Rabi trovate attraverso il metodo semiclassico la configurazione associata a $W(t) = 1$ si riesce a raggiungere solo quando si ha risonanza perfetta.

É importante notare che anche nel caso in cui $n = 0$ la probabilità di transizione risulta comunque diversa da zero (*Vacuum Rabi Oscillations*).

2.3 Stati di Fock e stati Coerenti

Le oscillazioni di Rabi sono un fenomeno puramente quantistico che risulta da un susseguirsi di emissioni spontanee e assorbimenti. Come visto nella sezione precedente quando il numero di fotoni interagenti è fissato i cambiamenti delle popolazioni procedono in modo sinusoidale; tuttavia, per una sovrapposizione di stati arbitraria del campo si possono generare comportamenti pulsanti complessi. Prima di discutere questa situazione è opportuno soffermarsi più in dettaglio sui concetti di stati di Fock e stati coerenti [1].

Stati di Fock

Gli stati di Fock, indicati già con $|n\rangle$, sono gli autostati dell'operatore numero; perciò vengono definiti in modo rigoroso dalle relazioni:

$$\hat{n}|n\rangle = |n\rangle n; \quad \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|; \quad \langle n|n'\rangle = \delta_{n,n'} \quad (2.26)$$

ricordiamo anche come agiscono gli operatori di creazione e di distruzione su questi stati:

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (2.27)$$

Dunque tutti gli stati di Fock eccitati possono essere scritti in funzione dello stato $|0\rangle$:

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \quad (2.28)$$

Stati Coerenti

Sono definiti stati coerenti gli autostati dell'operatore di distruzione e vengono indicati con la notazione $|\alpha\rangle$:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = |\alpha\rangle \alpha; \quad \langle \alpha|\beta\rangle = e^{\alpha^*\beta} \quad (2.29)$$

in questo caso, pur essendo ben definite l'ampiezza $|\alpha|$ e la fase $\arg(\alpha)$, poichè \hat{a} non è hermitiano, gli autovalori α potrebbero essere complessi.

Inoltre si nota come gli stati $|\alpha\rangle$ non siano nè normalizzati nè ortogonali tra loro. Si introduce l'operatore di *displacement* \hat{D} al fine di scrivere gli stati coerenti in funzione della base di Fock. Tale operatore è definito in questo modo:

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}} \quad (2.30)$$

e se applicato a destra e a sinistra di \hat{a} aggiunge un contributo proporzionale al numero complesso α , se applicato a \hat{a}^\dagger aggiunge α^* :

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha\hat{I} \quad (2.31)$$

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}^\dagger\hat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*\hat{I} \quad (2.32)$$

questo significa che:

$$\hat{D}(-\alpha)|\alpha\rangle = |\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle \quad (2.33)$$

Utilizzando la formula di Baker-Campbell-Hausdorff per l'esponenziale di una somma di operatori non commutanti:

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{-\frac{[\hat{A},\hat{B}]}{2}} e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} \quad (2.34)$$

è possibile riscrivere l'operatore \hat{D} nella forma:

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-1/2|\alpha|^2} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{\alpha^*\hat{a}} \quad (2.35)$$

Applicando l'operatore di *displacement* allo stato di vuoto si ottiene a questo punto:

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle = e^{-1/2|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (2.36)$$

La rappresentazione di Fock mostra che gli stati coerenti hanno una statistica di tipo poissoniana. Si trova infatti che la probabilità di avere n fotoni è:

$$P_n(\alpha) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2} \quad (2.37)$$

dove $|\alpha|^2 = \bar{n}$, in cui \bar{n} rappresenta il numero medio di fotoni interagenti. Per una trattazione più esaustiva sugli stati coerenti è possibile consultare [6].

2.4 Comportamento delle oscillazioni

Quando il campo di cavità è esprimibile come una sovrapposizione di stati, l'evoluzione temporale delle popolazioni può assumere un comportamento peculiare.

Gli stati iniziali dell'atomo e del campo si scrivono in questo caso:

$$|\psi_a(0)\rangle = |g\rangle \quad (2.38)$$

$$|\psi_f(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle, \quad (2.39)$$

Mentre lo stato iniziale del sistema completo è dato da:

$$|\psi(0)\rangle = |\psi_a(0)\rangle \otimes |\psi_f(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |g, n\rangle \quad (2.40)$$

In questo caso, per ottenere la funzione di inversione, tutte le funzioni $W_n(t)$ vanno moltiplicate per i coefficienti $|c_n|^2$ e sommate [14]:

$$W(t) = -|c_0|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \left(\frac{\Delta^2}{\Omega_{Rn}^2} + \frac{\Omega^2 n}{\Omega_{Rn}^2} \cos(\Omega_{Rn} t) \right) \quad (2.41)$$

Nella trattazione seguente si seguirà [19].

Consideriamo inizialmente il caso in cui la cavità sia mantenuta a una temperatura finita T , in modo che la distribuzione del numero di fotoni n sia data dalla distribuzione di probabilità di Bose-Einstein, per la radiazione di corpo nero:

$$|c_n|^2 = P_n(T) = \frac{1}{1 - \bar{n}} \left(\frac{\bar{n}}{1 - \bar{n}} \right)^n \quad (2.42)$$

dove \bar{n} è il numero medio di fotoni contenuti nella cavità alla temperatura T :

$$\bar{n} = \left(e^{\frac{h\omega_0}{k_B T}} - 1 \right)^{-1} \quad (2.43)$$

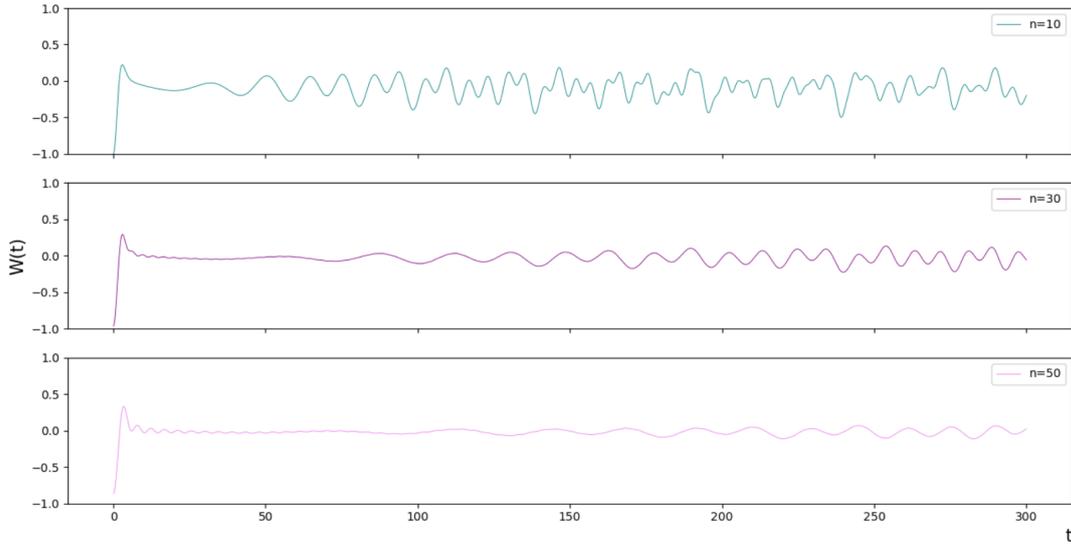


Figura 2.3: Funzioni di inversione per un atomo a due stati inizialmente nello stato fondamentale, interagente con un campo elettromagnetico in una cavità mantenuta a una temperatura costante T . I tre grafici differiscono per il valore medio del numero di fotoni in cavità n . Il tempo viene misurato in unità dell'inverso della frequenza di Rabi.

In figura 2.3 viene illustrato il comportamento della funzione di inversione per un atomo a due stati inizialmente nello stato fondamentale, interagente con un campo elettromagnetico termalizzato. Si trova che le popolazioni, per un numero medio di fotoni diverso da 0, non oscillano più in modo sinusoidale: non c'è quasi più traccia delle oscillazioni di Rabi e dopo un collasso iniziale si possono osservare fluttuazioni irregolari. Inoltre si trova che il collasso avviene a una precisa scala t_c , fissata dalla frequenza di Rabi generalizzata. Per \bar{n} molto grande si trova che:

$$t_c = \frac{2}{\Omega_{Rn}} \quad (2.44)$$

e poichè nella figura si è scelto di utilizzare come scala temporale l'inverso della frequenza di Rabi, il collasso avviene sempre in $t = 2$.

Un'altra configurazione iniziale possibile per il campo è data da una sovrapposizione di stati coerente. Come illustrato nella sezione precedente in questo caso il numero di fotoni segue una distribuzione Poissoniana e:

$$|c_n|^2 = P_n(\alpha) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} \quad (2.45)$$

dove $\bar{n} = |\alpha|^2$. Come nel caso precedente si trova che le oscillazioni di Rabi non persistono indefinitamente: inevitabilmente l'incommensurabilità tra le frequenze di Rabi Ω_{Rn} per diversi numeri di fotoni distrugge la periodicità dei trasferimenti di popolazione. Tuttavia, questa volta, dopo un periodo di quiescenza, in cui le popolazioni sono costanti, si tornano ad osservare delle oscillazioni.

Questo tipo di comportamento è mostrato in figura 2.4.

Dunque il comportamento di un atomo a due stati, interagente tramite assorbimenti ed emissioni di un singolo fotone (in RWA) con un campo a singolo modo preparato in uno stato coerente è sorprendentemente irregolare. Le oscillazioni di Rabi prima collassano, rimangono quiescenti, poi ricominciano, si interrompono di nuovo fino a raggiungere un pattern casuale.

I grafici raffiguranti la funzione di inversione danno l'impressione che il sistema, in seguito al collasso, sia dormiente; questo non è corretto, infatti, durante questi intervalli il momento di dipolo dell'atomo continua a cambiare e anche il campo continua a evolvere, anche se le popolazioni rimangono invariate.

É possibile fornire una spiegazione intuitiva della differenza di comportamento delle popolazioni per le due condizioni iniziali presentate. In figura sono mostrate le distribuzioni di probabilità utilizzate. La distribuzione termica di Bose-Einstein, infatti, può essere rappresentata come una composizione di stati coerenti con numero medio di fotoni che segue una distribuzione gaussiana. Ogni componente

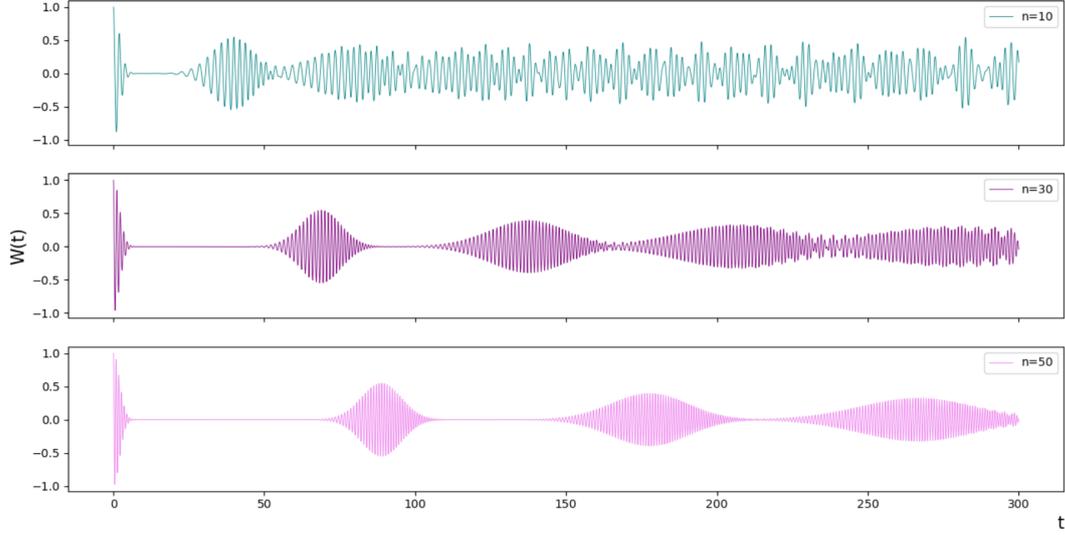


Figura 2.4: Funzioni di inversione per un atomo a due stati inizialmente nello stato fondamentale, interagente con un campo elettromagnetico posto, in $t = 0$ in uno stato coerente. I tre grafici differiscono per il valore medio del numero di fotoni in cavità n . Il tempo viene misurato in unità dell'inverso della frequenza di Rabi.

attraversa dei cicli in cui le oscillazioni prima si interrompono e poi ricominciano, tuttavia a livello globale una serie di complicate interferenze estingue tale comportamento.

Anche se è naturale assumere che l'atomo sia preparato inizialmente nello stato fondamentale, nello stato eccitato o in una distribuzione media incoerente dei due, è possibile considerare il caso in cui si abbia una sovrapposizione dei due. Le condizioni iniziali, per un campo espresso come sovrapposizione di stati numero e per un atomo in una sovrapposizione degli stati energetici, si scrivono:

$$|\Psi(0)\rangle = |\psi_a(0)\rangle |\psi_f(0)\rangle \quad (2.46)$$

$$|\psi_a(0)\rangle = g(0) |g\rangle + e(0) |e\rangle \quad (2.47)$$

$$|\psi_f(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \quad (2.48)$$

Quando l'atomo arriva nella cavità il comportamento successivo dipende dalla fase relativa tra il campo di cavità e la sovrapposizione di stati dell'atomo.

Ad esempio, i fenomeni di interruzione e ripresa delle oscillazioni di Rabi sono completamente assenti se l'atomo si trova inizialmente in uno dei due stati vestiti

$|\pm, n\rangle$ definiti dall'equazione (1.77).

Infatti questi stati rimangono costanti nel tempo e come conseguenza quando un atomo in uno stato vestito viene fatto interagire con uno stato coerente $|\alpha\rangle$, il cui numero medio di fotoni è grande, l'evoluzione temporale del vettore di stato totale può essere approssimata da un prodotto disaccoppiato degli stati dell'atomo e del campo. Questo significa che l'atomo non diventa mai veramente correlato al campo e che una misura del solo stato atomico non comunica alcuna informazione sullo stato del campo.

2.5 Oscillazioni di Rabi sulla sfera di Bloch

La sfera di Bloch è una rappresentazione geometrica degli stati di un sistema a due livelli (*qubit*) come punti sulla superficie di una sfera unitaria.

Una derivazione matematica di questo potente strumento viene mostrata in Appendice.

Seguendo [20, p. 170] e considerando l'Hamiltoniana in forma matriciale (1.74) si trova, ad esempio, che quando il sistema non è sottoposto a perturbazioni esterne, cioè quando $\Omega = 0$, il vettore di Bloch evolve lungo traiettorie orizzontali, precedendo attorno all'asse z . La frequenza con cui vengono percorse tali circonferenze è Δ . Questo significa che l'evoluzione libera corrisponde semplicemente a un cambiamento relativo di fase tra lo stato fondamentale ed eccitato.

Quando invece il sistema si trova in perfetta risonanza, cioè quando $\Delta = 0$, non c'è evoluzione in ϕ e il vettore precede attorno all'asse x . Dunque il vettore di stato segue una traiettoria lungo un cerchio massimo e lo stato eccitato è accessibile. Inoltre, le traiettorie vengono percorse con frequenza $\Omega\sqrt{n}$.

Nel caso in cui il sistema sia fuori dalla risonanza e sia Ω che Δ sono diversi da 0 si ha un moto che è una composizione dei precedenti e la frequenza è data dalla frequenza di Rabi generalizzata $\Omega_{Rn} = \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2 n}$. In accordo a quanto trovato nelle sezioni precedenti, in questo caso non è possibile avere un'inversione di popolazione completa.

In figura 2.5 vengono mostrate queste tre situazioni.

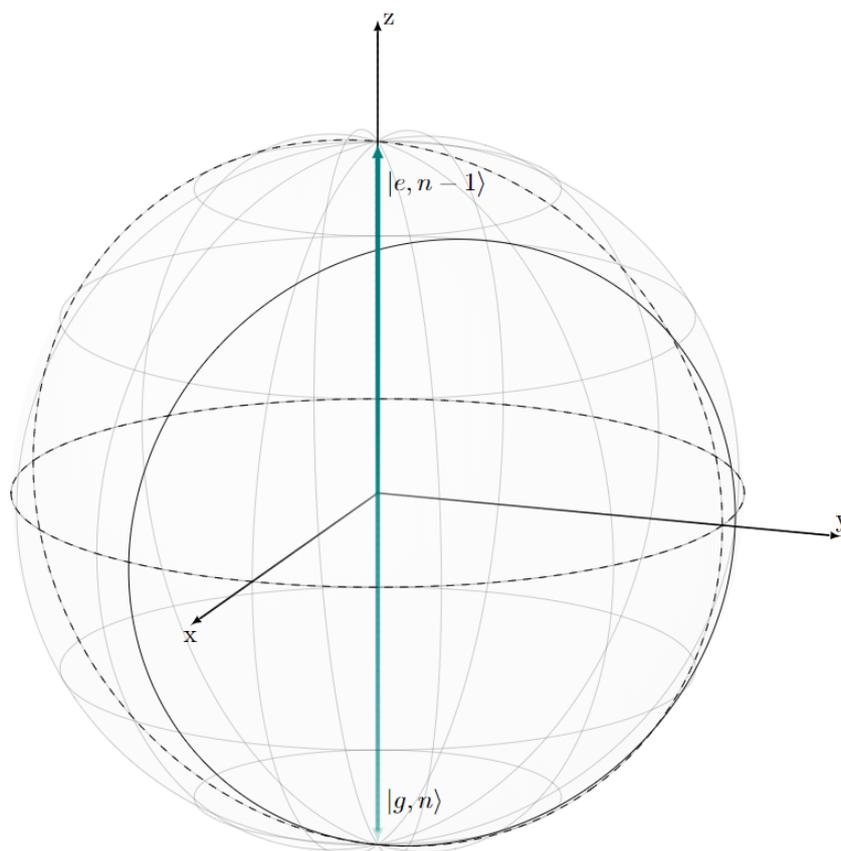


Figura 2.5: *Oscillazioni di Rabi sulla sfera di Bloch: (a) il cerchio tratteggiato sul piano xy corrisponde a una possibile traiettoria seguita da un vettore di Bloch in evoluzione libera, quando $\Omega = 0$; (b) il cerchio tratteggiato nel piano yz descrive la traiettoria seguita se il sistema si trova in perfetta risonanza $\Delta = 0$; (c) il cerchio in linea continua rappresenta invece una composizione delle rotazioni precedenti, che si verifica quando $\Omega, \Delta \neq 0$. Inoltre sono indicati i vettori corrispondenti allo stato stato fondamentale $|g, n\rangle$ e eccitato $|e, n - 1\rangle$.*

Capitolo 3

L'esperimento di Haroche

I trasferimenti di popolazione indotti dalle oscillazioni di Rabi sono ora diventati procedure standard per manipolare non solo stati di spin in esperimenti NMR (*Nuclear Magnetic Resonance*), ma sono diventati routine ordinaria per manipolare stati atomici o ionici in esperimenti di spettroscopia laser.

In tale campo i risultati più significativi sono stati ottenuti dal premio Nobel S. Haroche, insieme ai suoi collaboratori [10]. Nei loro esperimenti, eseguiti negli anni '70, sono riusciti a sfruttare l'accoppiamento forte tra fotoni e atomi per sondare il fenomeno dell'*entanglement* e della decoerenza quantistica, che sono entrambi alla base di uno dei maggiori dibattiti irrisolti della fisica contemporanea. Questi concetti si inseriscono, infatti, all'interno della questione sulla transizione dal mondo microscopico, governato dalle leggi probabilistiche della meccanica quantistica, a quello macroscopico, descritto dalle leggi deterministiche della fisica classica.

Sostanzialmente il procedimento utilizzato in questi esperimenti, consiste nel fare passare un fascio di atomi o ioni opportuni attraverso una cavità, sottoponendoli a radiazione elettromagnetica durante il loro tempo di volo (dipendente dalla velocità). I fotoni, che rimbalzano all'interno della cavità, tra gli specchi, lasciano agli sperimentatori pochi centesimi di secondo per manipolare gli atomi. In uscita, la popolazione dei due livelli coinvolti può essere poi osservata spettroscopicamente. Ogni atomo infatti, attraversando la cavità singolarmente, mantiene una traccia dello stato del campo elettromagnetico. L'informazione sul numero di fotoni è acquisito gradualmente, mano a mano che più atomi vengono rilevati, ognuno dei quali fornisce un contributo alla determinazione dello stato della radiazione.

Nelle prossime sezioni verrà illustrato più in dettaglio l'apparato sperimentale di questi esperimenti pionieristici, a partire dal tipo di atomi utilizzato.

3.1 Atomi di Rydberg

Gli esperimenti di Haroche coinvolgono in larga parte sistemi quantistici noti come atomi di Rydberg. Tali atomi sono caratterizzati da un elevato numero atomico e , dunque, da elettroni esterni molto distanti dal nucleo. Gli elettroni di valenza, essendo notevolmente schermati dal campo elettrico prodotto dal nucleo, sono caratterizzati da una risposta intensa a campi elettrici e magnetici esterni [7].

Inoltre la configurazione elettronica degli atomi di Rydberg è tale per cui gli elettroni più esterni sono soggetti a un potenziale molto simile a quello dell'atomo di idrogeno. Queste proprietà rendono gli atomi di Rydberg degli ottimi sistemi per lo studio degli stati polaritonici, poiché il loro comportamento può essere facilmente modellizzato da un sistema a due livelli.

In particolare il tipo di atomi utilizzati da Haroche è detto circolare, poiché l'orbita dell'elettrone più esterno è ben approssimabile da un cerchio molto ampio, circa mille volte più grande di quello associato a un normale atomo nel proprio stato fondamentale. In accordo con la teoria quantistica, all'elettrone orbitante può essere associata un'onda, con lunghezza d'onda di de Broglie, e le orbite stabili sono quelle per cui la circonferenza risulta essere un multiplo intero di questa lunghezza d'onda. Tale numero intero è chiamato numero quantico principale dell'atomo di Rydberg, e nell'esperimento di Haroche risulta essere uguale a 50 per lo stato $|g\rangle$ e 51 per lo stato $|e\rangle$.

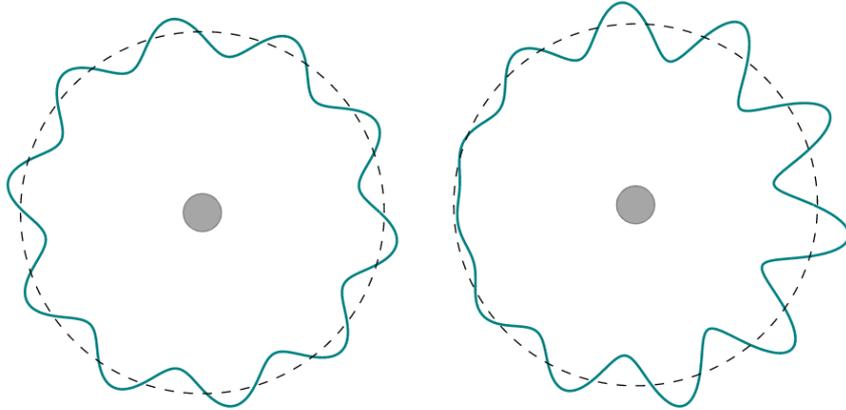


Figura 3.1: *Rappresentazione grafica di un atomo di Rydberg circolare. A sinistra, l'atomo si trova in un autostato e l'onda di de Broglie dell'elettrone più esterno ha un'ampiezza uniforme tutto intorno al nucleo. A destra, l'atomo si trova in una sovrapposizione di stati di Rydberg adiacenti che interagiscono costruttivamente e distruttivamente in punti diversi, producendo un dipolo elettrico atomico rotante.*

In questi stati l'ampiezza dell'onda di de Broglie è uniforme e dunque risulta in una densità di carica centrata nel nucleo atomico, con dipolo elettrico atomico nullo.

Una condizione con dipolo elettrico non nullo può essere raggiunta applicando un campo risonante nell'intervallo delle microonde all'atomo, la cui azione è quella di portare il sistema in una sovrapposizione degli stati adiacenti $|g\rangle$ e $|e\rangle$. I due stati interferiscono costruttivamente in un punto dell'orbita e distruttivamente nel punto diametralmente opposto, dando come risultato un dipolo elettrico rotante nel piano orbitale a una frequenza di 51 GHz [Fig. 3.1].

Se una microonda non risonante viene inviata sull'atomo, il fotone associato all'onda non può essere assorbito e dunque rimane intatto. Tuttavia, questa interazione produce sull'atomo un piccolo effetto: i livelli energetici dell'atomo vengono leggermente spostati e anche la frequenza angolare del dipolo atomico viene modificata. In questo modo è possibile effettuare misure e manipolazioni non distruttive (QND *Quantum Non Demolition measurements*) sul sistema [10].

3.2 Apparato sperimentale

Descriviamo ora l'apparato sperimentale utilizzato da Haroche, un cui schema semplificato viene mostrato in figura 3.2.

La cavità C utilizzata è fabbricata in modo da confinare i fotoni nell'intervallo delle microonde, a una frequenza vicina a quella di transizione tra due livelli energetici atomici (frequenza di circa 51 GHz e lunghezza d'onda di 6 mm).

Il lungo tempo di permanenza dei fotoni, circa 1 ms , dovuto all'elevato fattore di qualità ($Q \sim 10^8$), dello stesso ordine di grandezza della vita media degli stati atomici, permette l'interazione della cavità con un solo atomo di Rydberg per volta, se inviato all'interno di essa con la giusta velocità.

Inviando gli atomi uno alla volta nella cavità e cambiando il tempo di interazione luce-materia è possibile ricostruire sperimentalmente le oscillazioni di Rabi in funzione del tempo. Il tempo di interazione viene modificato a comando applicando un campo elettrico tra gli specchi della cavità che, grazie all'effetto Stark, modifica i livelli energetici degli atomi mandando il sistema fuori risonanza.

Nella parte finale si inseriscono dei detector D che misurano lo stato degli atomi dopo il passaggio all'interno della microcavità applicando un campo ionizzante che fornisce un segnale di tipo on/off se l'energia di ionizzazione è sufficiente o meno per strappare l'elettrone dall'atomo.

Per minimizzare le perturbazioni causate dalla radiazione termica l'apparato deve essere raffreddato fino a temperature bassissime, di circa 0.8 K , che corrisponde a un numero medio di fotoni termici $\bar{n} = 0.05$ [9].

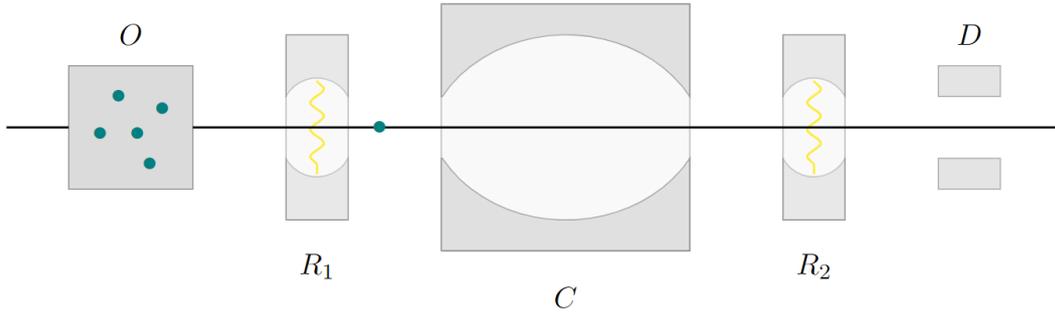


Figura 3.2: Schema dell'apparato sperimentale utilizzato per testare l'accoppiamento atomi di Rydberg-cavità. Gli atomi provenienti da un raggio atomico vengono selezionati in base alla loro velocità da un pompaggio laser prima di essere preparati in stati di Rydberg (O). Essi attraversano la cavità C e vengono misurati in uscita da un detector D che applica un campo ionizzante. Lo stato degli atomi può essere preparato tramite delle cavità ausiliarie R_1 e R_2 prima e dopo la cavità.

Negli esperimenti di informazione quantistica, i sistemi a due livelli vengono chiamati *qubits*. In questo caso, possono essere considerati dei *qubits* sia gli atomi che attraversano la cavità, oscillando tra i due stati di Rydberg, sia i modi di cavità oscillanti. L'accoppiamento tra *qubits* è basato sulla realizzazione di oscillazioni di Rabi di diversa durata. Le cavità ausiliarie R_1 e R_2 , che insieme costituiscono un interferometro di Ramsey, racchiudono la cavità C e vengono utilizzate per preparare e analizzare lo stato del *qubit* atomico, prima e dopo la sua interazione con il campo di cavità [18].

Quando il tempo di interazione è scelto in modo che $\Omega t = \pi/2$, le oscillazioni di Rabi massimizzano l'*entanglement* dell'atomo con il campo di cavità, realizzando la trasformazione $|g, n\rangle \rightarrow (|e, n-1\rangle + |g, n\rangle)/\sqrt{2}$.

Quando $\Omega t = \pi$, l'atomo e il campo si scambiano un quanto di eccitazione, realizzando le trasformazioni $|e, n-1\rangle \rightarrow |g, n\rangle$ e $|g, n\rangle \rightarrow -|e, n-1\rangle$. In questo modo si è operata un'inversione di popolazione.

Un altro caso di interesse è quello per $\Omega t = 2\pi$: in questa situazione viene indotto un cambio di fase π del sistema atomo-fotone (in modo analogo a una rotazione di 2π di un sistema a spin $1/2$), realizzando le trasformazioni $|e, n-1\rangle \rightarrow -|e, n-1\rangle$ e $|g, n\rangle \rightarrow -|g, n\rangle$, mentre per un atomo nello stato fondamentale che attraversasse la cavità vuota si avrebbe $|g, 0\rangle \rightarrow |g, 0\rangle$.

In Figura 3.3 vengono mostrati le probabilità associate ai tre casi precedenti di trovare l'atomo, in seguito all'interazione, nello stato fondamentale o eccitato.

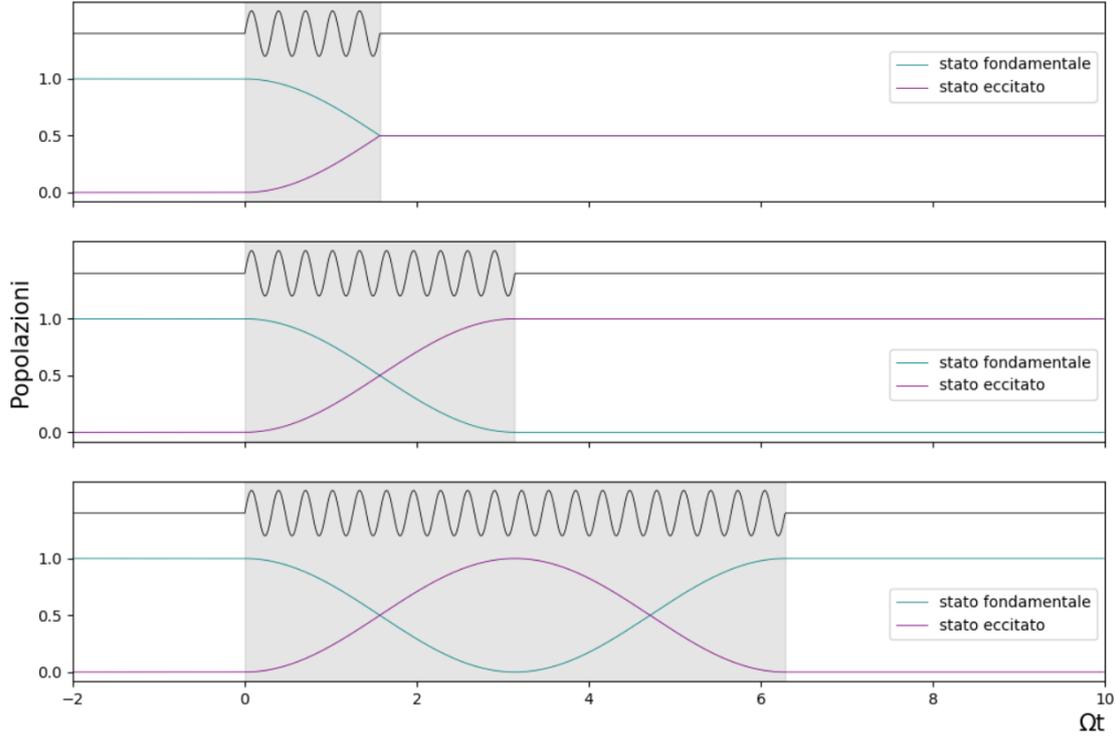


Figura 3.3: *Oscillazioni di Rabi in un sistema di due oscillatori armonici accoppiati, controllate attraverso impulsi di diversa durata. Assumendo come condizione iniziale che il sistema venga preparato nello stato fondamentale: (a) se $\Omega t = \pi/2$ i due stati si trovano ugualmente popolati, (b) se $\Omega t = \pi$ si verifica un'inversione di popolazione, (c) se $\Omega t = 2\pi$ il sistema ritorna nello stato iniziale.*

Per ottenere informazioni sull'interazione atomo-cavità, viene utilizzato un interferometro atomico di Ramsey: prima e dopo la cavità C gli atomi, inizialmente preparati in $|g\rangle$, vengono fatti interagire in R_1 e R_2 con un campo risonante, in modo da produrre un impulso risonante di $\pi/2$. Dunque nella prima cavità ausiliaria si realizza la trasformazione: $|g\rangle \rightarrow (|g\rangle + |e\rangle)/\sqrt{2}$. Questo stato nella rappresentazione della sfera di Bloch è individuato da un vettore lungo l'asse x . A seconda che l'atomo dopo il passaggio all'interno della cavità si trovi nello stato fondamentale o eccitato, il secondo impulso realizza le trasformazioni:

$$|g\rangle \rightarrow (|g\rangle + \exp(i\phi_r) |e\rangle)/\sqrt{2} \quad (3.1)$$

$$|e\rangle \rightarrow (|e\rangle + \exp(-i\phi_r) |g\rangle)/\sqrt{2} \quad (3.2)$$

dove la fase ϕ_r può essere modificata aggiustando le fasi relative tra gli impulsi

nelle cavità ausiliare, oppure, tramite l'applicazione di uno Stark shift transiente durante il passaggio tra R_1 e R_2 .

Considerando solo l'azione dell'interferometro, la probabilità di trovare in D l'atomo nello stato eccitato è:

$$\pi_e(\phi_r) = \frac{1 + \cos(\phi_r)}{2} \quad (3.3)$$

Infine, una sorgente S può essere utilizzata per inserire in C una radiazione elettromagnetica nello stato coerente $|\alpha\rangle$. Tale operazione può essere rappresentata dall'operatore unitario di *displacement* $D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)$, con $|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$ [3].

3.3 Misura del numero di fotoni

Cotinuiamo a seguire [3] anche in questa sezione.

Quando l'atomo, preparato nella sovrapposizione di stati $(|e\rangle + |g\rangle)/2$ (prodotto in R_1), entra nella cavità contenente n fotoni, si ha un cambiamento di fase nella sovrapposizione degli stati di una quantità $\phi_0(n + 1/2)$, funzione di n .

Dunque la probabilità di rilevare l'atomo nello stato eccitato $|e\rangle$ è:

$$\pi_e(\phi_r|n) = 1 - \pi_g(\phi_r|n) = \frac{1 + \cos(\phi_r + \phi_0)}{2} \quad (3.4)$$

D'altra parte questo significa che la misurazione dello stato dell'atomo trasporta informazioni sul numero di fotoni in cavità.

L'atomo, fuori dalla risonanza, incapace di assorbire o emettere radiazione, si comporta come un piccolo pezzo di dielettrico trasparente in grado di modificare la frequenza di risonanza della cavità. Per un campo di cavità nello stato coerente $|\alpha\rangle$ si hanno le seguenti relazione di dispersione:

$$\begin{aligned} |e, \alpha\rangle &\rightarrow \exp(-i\phi_0/2) |e, \exp(-i\phi_0/2)\alpha\rangle \\ |g, \alpha\rangle &\rightarrow |g, \exp(+i\phi_0/2)\alpha\rangle \end{aligned} \quad (3.5)$$

In Figura 3.4 viene rappresentata la situazione in cui $\phi_0 = \frac{\pi}{4}$ e si ipotizza che l'evoluzione dello stato atomico sia dovuta solo all'interazione con la cavità C . Si trova che otto diverse orientazioni del vettore di Bloch all'uscita della cavità sono *entangled* con un numero di fotoni da 0 a 7 (8 fotoni producono la stessa rotazione $\phi_0/2$ del vuoto). Dopo l'interazione con la seconda cavità R_2 , che mappa uno degli stati nel piano equatoriale in $|e\rangle$, l'atomo viene rivelato nella base $\{|g\rangle, |e\rangle\}$, producendo un bit di informazione.

Chiaramente la rilevazione di un singolo atomo non è sufficiente per discriminare il

numero di fotoni. Tuttavia la rilevazione di un numero sempre maggiore di atomi fornisce informazioni sempre più stringenti sullo stato della cavità.

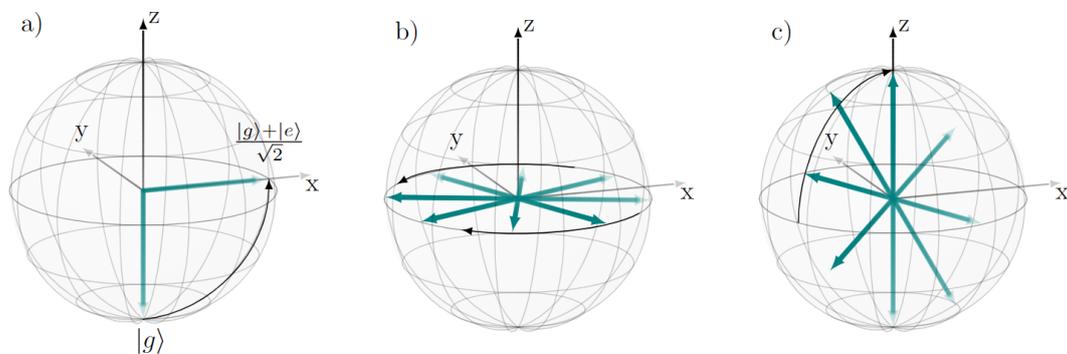


Figura 3.4: *Evoluzione del vettore di Bloch durante un processo QND di misurazione del numero di fotoni. (a) passaggio dell'atomo in R_1 ; (b) interazione dispersiva in C: 8 possibili vettori di Bloch sono correlati al numero di fotoni in cavità, da 0 a 7, per $\phi_0 = \pi/4$; (c) passaggio dell'atomo in R_2 .*

Conclusioni

Nel corso della trattazione è stata presentata una modellizzazione dell'interazione più semplice tra luce e materia da un punto di vista semiclassico e uno quantistico. In particolare si è seguita la costruzione a blocchi dell'operatore hamiltoniano: nel modello semiclassico tale operatore è dato dalla somma di soli due termini, uno legato alle transizioni energetiche atomiche (trattate già quantisticamente) e l'altro associato all'interazione con un campo elettromagnetico (trattato classicamente). Nel modello quantistico di Rabi compaiono invece tre contributi: il primo relativo anche questa volta all'atomo; un secondo termine si occupa invece di modellizzare il campo, ora quantizzato; infine compare un terzo termine, necessario per descrivere l'accoppiamento tra atomo e campo. Questo modello viene poi semplificato, tramite opportune approssimazioni, dal modello di Jaynes-Cummings.

In entrambi i casi, dallo studio della dinamica associata alle due Hamiltoniane, sono emersi fenomeni di scambio energetico tra le parti in gioco, le oscillazioni di Rabi. Tuttavia si scopre che la formulazione quantistica, inevitabilmente, possiede una più ampia applicabilità e fornisce una maggiore comprensione del fenomeno. In particolare, permette di studiare l'evoluzione del sistema con diversi tipi di distribuzione del numero di fotoni iniziale e questo porta alla comparsa di comportamenti energetici più complessi e inaspettati.

Inoltre si è mostrato un metodo di rappresentazione grafica e geometrica dello stato di un sistema a due stati, la sfera di Bloch. Tale rappresentazione è utile per comprendere l'evoluzione dello stato atomico/del sistema durante i fenomeni di scambio energetico.

Infine è stata descritta a livello introduttivo l'idea alla base degli esperimenti guidati da S. Haroche. Infatti il fenomeno fisico su cui si sviluppano tali studi sono le oscillazioni di Rabi e il modello teorico di riferimento è quello di Jaynes-Cummings. In seguito a questi esperimenti pionieristici, le oscillazioni di Rabi sono state utilizzate in una grande varietà di esperimenti di CQED per creare e ingegnerizzare l'*entanglement* tra atomi e fotoni.

In questo modo si è cercato di studiare lo stesso fenomeno da più prospettive, con metodi diversi, usando come punto di partenza la costruzione dell'operatore hamiltoniano per poi passare a una dimensione più geometrica e applicativa, questo per fornire uno sguardo d'insieme a tutto tondo.

Appendice A

Microcavità

I dispositivi di confinamento ottico permettono ai fotoni di rimanere localizzati per un tempo sufficientemente lungo in modo da poter studiare diversi regimi di accoppiamento luce-materia.

Le onde elettromagnetiche subiscono fenomeni di risonanza nelle microcavità ottiche, causati dall'interferenza costruttiva della radiazione che subisce riflessioni multiple sugli specchi del risonatore, se questi sono distanziati di un multiplo della lunghezza d'onda della luce da confinare. La sovrapposizione delle onde riflesse può quindi portare alla generazione di un campo stazionario per il quale l'energia all'interno della cavità non si propagherà più lungo una direzione spaziale ma si limiterà ad un'oscillazione nella scala dei tempi [8].

Il sistema di confinamento ottico più semplice che permette la comprensione dei maggiori fenomeni in gioco è la microcavità planare, costituita da due strati di specchi posti ad una distanza L (cavità di Fabry-Perot) [fig. 1.3].

Il campo elettrico si annulla in corrispondenza delle due interfacce tra gli specchi e la cavità: questo equivale a imporre le condizioni di stazionarietà per un'onda elettromagnetica nella direzione perpendicolare al piano degli specchi, che assumeremo come direzione z .

Le onde stazionarie ammesse all'interno della cavità sono quelle per cui lo sfasamento nel cammino tra i due specchi è un multiplo intero di π , cioè:

$$k_z = \frac{m\pi}{nL} = \frac{m\omega_0}{c} \quad (\text{A.1})$$

dove k_z è la componente del vettore d'onda \mathbf{k} lungo la direzione z , n è l'indice di rifrazione del mezzo all'interno della cavità, L è la lunghezza della cavità, m è un numero intero che definisce l'ordine di risonanza e infine ω_0 è la frequenza di risonanza.

All'interno del risonatore sono quindi ammesse tutte le onde con frequenza pari un multiplo intero della frequenza di risonanza della cavità ω_0 .

Gli specchi in un'interferometro planare reale sono superfici parzialmente riflettenti con un alto coefficiente di riflessione; questo significa che la luce entrante effettua diverse andate e ritorno fra le due superfici riflettenti all'interno della cavità e ne fuoriesce solo una piccola parte ad ogni riflessione. In particolare è permessa la trasmissione di onde la cui lunghezza d'onda è in risonanza con la frequenza della cavità [fig. A.1].

Un parametro che intuitivamente è legato al numero di rimbalzi che compie un fotone tra gli specchi prima di fuoriuscire dalla cavità e che quindi fornisce una misura di quanto la luce venga confinata nella struttura è il fattore di qualità Q (Q -factor). Esso è definito come il rapporto tra la frequenza di risonanza della cavità ω_0 e la larghezza in frequenza a metà altezza del picco di risonanza $\delta\lambda$, detta larghezza di banda del modo di cavità.

Tuttavia le cavità di Fabry-Perot sono caratterizzate da valori di Q piuttosto bassi rispetto ad altri dispositivi più sofisticati perchè il confinamento avviene principalmente in una sola direzione.

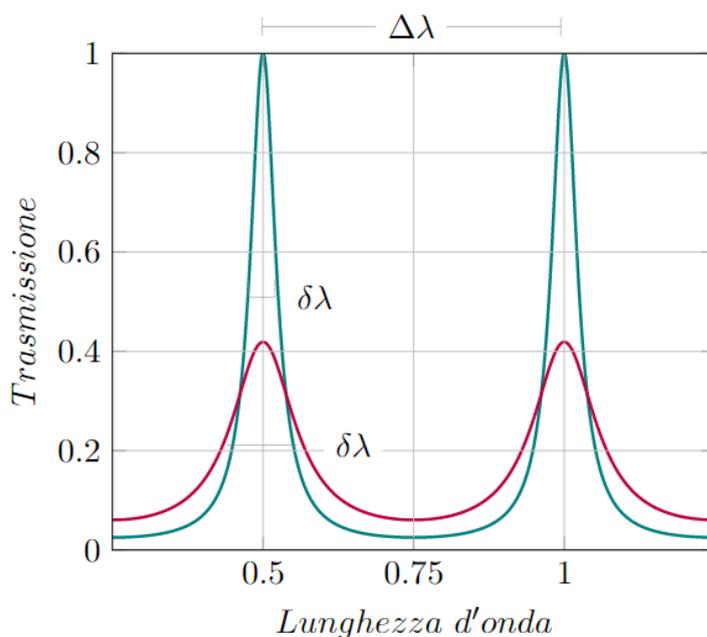


Figura A.1: Distribuzione spettrale dei modi di risonanza di una microcavità. In ascissa si trova lunghezza d'onda in unità di misura di $\lambda = \frac{2\pi c}{n\omega_0}$, mentre sull'asse verticale viene riportato il coefficiente di trasmissione. Le due curve si riferiscono a cavità con fattori di qualità Q diversi. Sul grafico vengono anche riportate le larghezze di banda del modo di cavità ($\delta\lambda$) e il range spettrale libero ($\Delta\lambda$).

Quando viene inserito un atomo all'interno della cavità è possibile osservare diversi fenomeni.

È particolarmente interessante il caso in cui la frequenza di transizione dell'atomo ω_e è confrontabile con uno dei modi risonanti della cavità $m\omega_0$, con $m \in \mathbb{N}$: in questo caso si possono osservare assorbimenti e emissioni di fotoni da parte dell'atomo. In queste circostanze ci si attende che l'interazione tra l'atomo e il campo di radiazione siano fortemente influenzati poiché l'atomo e la cavità possono scambiarsi fotoni in modo risonante.

Le frequenze di transizione dell'atomo sono determinate dalla sua struttura interna e possono essere assunte fissate. La condizione di risonanza è invece ottenuta accordando la cavità così che la frequenza di uno dei modi di cavità coincida proprio con quella di transizione ($\omega_e \sim m\omega_0$). In questo modo inoltre è possibile trascurare il modi d'onda non risonanti e dunque si può assumere che il campo sia monocromatico.

Quando invece atomo e cavità sono fuori dalla risonanza non La forza relativa dell'interazione tra l'atomo e i modi risonanti all'interno della cavità è determinata da tre parametri: il tasso di decadimento dello stato eccitato libero γ , il tasso di decadimento del fotone nella cavità vuota κ e il parametro di accoppiamento atomo-fotone g .

Ciascuno dei tre parametri definisce una scala temporale caratteristica per la dinamica del sistema atomo-fotone. Più precisamente l'interazione è detta essere nel limite di accoppiamento forte quando $g \gg \max(\gamma, \kappa)$, contrariamente, si è nel limite di accoppiamento debole quando $g \ll \max(\gamma, \kappa)$ [5].

Lo sviluppo tecnologico degli ultimi decenni ha permesso di sondare sperimentalmente ulteriori regimi di interazione, dapprima esplorati solamente dal punto di vista teorico.

Il primo regime che si incontra aumentando il valore di un altro parametro η (~ 0.11), che indica il rapporto tra g e l'energia nuda delle eccitazioni, è denominato regime ultra-forte (*Ultra Strong Coupling*). Tale rapporto è così importante perché determina quali approssimazioni sia lecito assumere nei modelli teorici.

Ad esempio, nel regime di USC non è escluso che certe assunzioni, come il fatto di considerare l'atomo come un sistema a due stati o la radiazione elettromagnetica come se fosse a singolo modo, certamente valide nel regime di SC e WC, possano non essere più adeguate. In particolare, si trova che, a differenza del regime di accoppiamento forte, l'approssimazione di onda rotante (RWA) non è più giustificabile, con conseguenze molto forti sulla struttura matematica da utilizzare [2].

Appendice B

La sfera di Bloch

La sfera di Bloch è essenzialmente una generalizzazione della rappresentazione di un numero complesso z , con $|z|^2 = 1$ sulla circonferenza unitaria nel piano complesso.

Uno stato arbitrario di un sistema a due livelli può essere espresso da:

$$|\psi\rangle = \alpha |e\rangle + \beta |g\rangle \quad (\text{B.1})$$

dove α e β sono numeri complessi. La condizione di normalizzazione $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ impone che:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (\text{B.2})$$

Utilizzando le coordinate polari per rappresentare i coefficienti complessi si ottiene:

$$|\psi\rangle = r_\alpha e^{i\phi_\alpha} |e\rangle + r_\beta e^{i\phi_\beta} |g\rangle \quad (\text{B.3})$$

in cui si sono utilizzati 4 parametri reali.

Tuttavia le uniche quantità misurabili sono $|\alpha|^2$ e $|\beta|^2$; questo significa che la moltiplicazione per un fattore $e^{i\gamma}$ non si hanno conseguenze osservabili, infatti:

$$|e^{i\gamma}\alpha|^2 = (e^{i\gamma}\alpha)^*(e^{i\gamma}\alpha) = \alpha^*\alpha = |\alpha|^2 \quad (\text{B.4})$$

e lo stesso tipo di ragionamento può essere fatto per quanto riguarda β .

Dunque è possibile moltiplicare l'espressione (B.3) per un fattore $e^{-i\phi_\alpha}$:

$$|\psi\rangle = r_\alpha |e\rangle + r_\beta e^{i(\phi_\beta - \phi_\alpha)} |g\rangle \quad (\text{B.5})$$

che contiene ora solo 3 parametri reali: r_α , r_β e $\phi = \phi_\beta - \phi_\alpha$. Inoltre la condizione di normalizzazione impone:

$$\begin{aligned} |r_\alpha|^2 + |r_\beta e^{i\phi}|^2 &= r_\alpha^2 + |x + iy|^2 \\ &= r_\alpha^2 + (x - iy)(x + iy) \\ &= r_\alpha^2 + x^2 + y^2 = 1 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

che risulta essere l'equazione per una sfera unitario in \mathbb{R}^3 con coordinate cartesiane (x, y, r_α) .

Rinominando $r_\alpha = z$ e utilizzando le coordinate sferiche ricordando che $r = 1$:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= z |e\rangle + (x + iy) |g\rangle \\ &= \cos \theta' |e\rangle + \sin \theta' (\cos \phi + i \sin \phi) |g\rangle \\ &= \cos \theta' |e\rangle + e^{i\phi} \sin \theta' |g\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

in questo modo sono necessari solo due parametri per indicare un punto sulla sfera unitaria.

Tuttavia ciò che abbiamo trovato non è ancora la sfera di Bloch. Osserviamo che:

$$\begin{aligned} \theta' = 0 &\rightarrow |\psi\rangle = |e\rangle \\ \theta' = \pi/2 &\rightarrow |\psi\rangle = e^{i\phi} |g\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Questo suggerisce che $0 \leq \theta' \leq \pi/2$ possa generare tutti gli stati disponibili per il sistema. Mappiamo dunque i punti dell'emisfero superiore su una nuova sfera unitaria utilizzando $\theta = 2\theta'$.

Infine si trova:

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2) |e\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2) |g\rangle \quad (\text{B.9})$$

dove $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi < 2\pi$ sono le coordinate dei punti sulla sfera di Bloch.

La componente verticale $z = \cos \theta$ del vettore di stato rappresenta il grado di eccitazione atomica (inversione di popolazione): il vettore punta verso il basso quando il sistema si trova nello stato fondamentale $|g\rangle$ e punta verso l'alto quando il sistema si trova nello stato eccitato $|e\rangle$. Quando il sistema si trova in una sovrapposizione dei due stati $|g\rangle$ ed $|e\rangle$, l'angolo azimutale ϕ esprime la differenza di fase tra questi due stati ed è associata alla presenza di un dipolo elettrico.

Dunque tutti gli stati puri del sistema hanno associato un vettore di Bloch di lunghezza unitaria, mentre uno stato misto in generale ha una lunghezza minore. Se lo stato è completamente casuale il vettore di Bloch diventa degenere e coincide con il centro della sfera.

Inoltre, sempre sulla sfera di Bloch, possono essere rappresentati diversi tipi tra-

sformazioni, che risultano in una composizione di rotazioni del vettore di Bloch. Le matrici di Pauli $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ e $\hat{\sigma}_z$, quando esponenziate, danno origine agli operatori di rotazione, che ruotano il vettore di Bloch $(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ attorno agli assi x , y e z :

$$\hat{R}_x(\alpha) = e^{-i\alpha\hat{\sigma}_x/2} = \cos(\alpha/2)\hat{I} - i\sin(\alpha/2)\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) & -i\sin(\alpha/2) \\ -i\sin(\alpha/2) & \cos(\alpha/2) \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

$$\hat{R}_y(\alpha) = e^{-i\alpha\hat{\sigma}_y/2} = \cos(\alpha/2)\hat{I} - i\sin(\alpha/2)\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) & -\sin(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) & \cos(\alpha/2) \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

$$\hat{R}_z(\alpha) = e^{-i\alpha\hat{\sigma}_z/2} = \cos(\alpha/2)\hat{I} - i\sin(\alpha/2)\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

Dunque se nell'Hamiltoniana del sistema sono presenti dei termini proporzionali alle matrici di Pauli, si avranno delle rotazioni del vettore di stato attorno ai rispettivi assi.

Bibliografia

- [1] Ramadhan A. «Jaynes-Cummings Model, Nonlinear Optics presentation». 2016.
- [2] A. A. Anappara et al. «Signatures of the ultrastrong light-matter coupling regime». In: *Phys. Rev. B* 79, 201303 (2009).
- [3] A. Auffèves et al. *Strong Light-Matter Coupling, from atoms to solid-state systems*. World Scientific, 2014. Cap. 1.
- [4] J. E. Calderón Krejci. «Rabi hamiltonian and geometric phases». Master's thesis. Pontificia Universidad Católica del Perú, 2016.
- [5] D. S. Dovzhenko et al. «Light-matter interaction in the strong coupling regime: configurations, conditions, and applications». In: *Nanoscale*, 10, 3589 (2018).
- [6] E. Ercolessi. «L'integrale funzionale con stati coerenti, Appunti del corso di Teoria dei Sistemi a Molti Corpi». 2010.
- [7] T. F. Gallagher. *Rydberg Atoms*. Cambridge University Press, 2005.
- [8] A. Genco. «Strong Coupling: l'entanglement tra luce e materia». In: *Ithaca: Viaggio nella Scienza VII* (2016).
- [9] C. Gerry e P. L. Knight. «Quantum superpositions and Schrödinger cat states in quantum optics». In: *American Journal of Physics* (1997).
- [10] S. Haroche. «Nobel Lecture: Controlling photons in a box and exploring the quantum to classical boundary». In: *Reviews of Modern Physics* (2013).
- [11] E. T. Jaynes e F. W. Cummings. «Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser». In: *Proc. IEEE* (1963).
- [12] A. Kavokin. *Microcavities*. Oxford University Press, 2011.
- [13] D. Keylon. «Notes for Lectures on Coherent Excitation». 2015. URL: https://www.phys.ksu.edu/reu2015/danielkeylon/coherent_excitation.pdf.

- [14] F. Ortolani. «Appunti di teoria quantistica della materia». 2016. URL: <https://core.ac.uk/download/pdf/11215663.pdf>.
- [15] V. Parinda. «Strong Light–Matter Interaction». In: *Wiley Online Library* (2019). URL: <https://doi.org/10.1002/3527600434.eap828>.
- [16] E. M. Purcell. «Spontaneous emission probabilities at radio frequencies». In: *Phys. Rev.* 69, 681 (1946).
- [17] I. Rabi. «Space quantization in a gyrating magnetic field». In: *Phys. Rev.* 49 (1936).
- [18] N. F. Ramsey. «A new molecular beam resonance method». In: *Phys. Rev.* 76, 996 (1949).
- [19] B. W. Shore. «The Jaynes-Cummings model». In: *Journal of Modern Optics* (1993).
- [20] D. A. Steck. «Quantum and Atom Optics». 2019. URL: <http://atomoptics-nas.uoregon.edu/~dsteck/teaching/quantum-optics/quantum-optics-notes.pdf>.