

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Teoria del Trasporto Ottimale di Massa

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
GIOVANNA CITTI

Presentata da:
MICHELE CIRCELLI

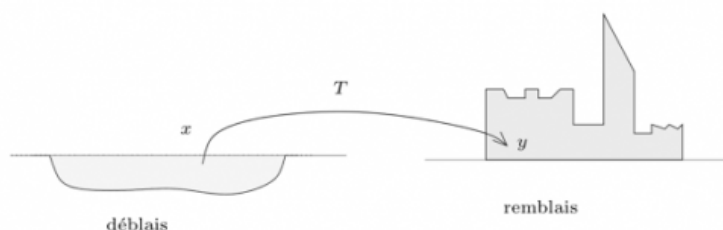
Sessione Unica
Anno Accademico 2018-2019

*A Matteo, alla sua purezza d'animo,
all'amore che prova per me
e al suo modo strano di dimostrarmelo.*

Introduzione

La teoria del trasporto ottimale tratta l'omonimo problema, che, in matematica, consiste nel capire come trasportare una distribuzione di massa da un posto ad un altro, appunto, "in maniera ottimale".

Questo problema risale agli anni immediatamente precedenti alla Rivoluzione francese, quando il matematico e disegnatore Gaspard Monge, nel suo trattato *Mémoire sur la Théorie des Déblais et des Remblais* (Trattato sulla teoria di scavi e terrapieni) del 1781, affrontò la questione da un punto di vista prettamente militare. Egli si domandò quale fosse la maniera ottimale di spostare della terra per costruire fortificazioni, nell'ipotesi che i costi per il trasporto (da intendere non strettamente in senso economico, ma anche eventualmente in senso energetico) fossero proporzionali alla distanza.



Da un punto di vista matematico, sapere se un tale trasporto esista (e, in caso affermativo, sia unico) è una questione complessa che ha visto progressi solo nel 1945, grazie al matematico russo Leonid Kantorovich, che proprio per questo ha vinto, nel 1975, il premio Nobel per l'economia. Sostanzialmente, a Kantorovich si deve una nuova formulazione del problema, più generale, che permette uno "splitting" della massa, e quindi un suo spostamento in diversi punti.

Questo "splitting" della massa è assolutamente naturale se si pensa al problema seguente: supponiamo di avere un numero N di miniere di ferro, da ciascuna delle quali si estrae una certa quantità a_i di ferro ($i = 1, \dots, N$), e di avere M industrie, ciascuna delle quali richiede una quantità b_j di ferro come materia prima ($j = 1, \dots, M$). Supponendo che $a_1 + \dots + a_N = b_1 + \dots + b_M$, e cioè che la produzione coincida con la domanda, risulta naturale che una stessa miniera debba rifornire diverse fabbriche allo stesso tempo (ovviamente, fornendo quantità diverse a ognuna delle fabbriche).

Per quanto i lavori di Kantorovich avessero messo in evidenza l'importanza di questo problema in ambito economico, dal punto di vista matematico mancava ancora una vera e propria teoria: per questo bisognerà aspettare la fine degli anni Ottanta, quando Yann Brenier, si trovò di fronte a questioni di meccanica dei fluidi (le equazioni di Eulero per fluidi incomprimibili) che lo portarono al problema di Monge-Kantorovich: in questo caso, però, il costo di trasporto non era proporzionale alla distanza, bensì al quadrato della stessa (una sorta di "energia cinetica"). Brenier dimostrò che, in questo caso, il modo di trasportare materia minimizzando i costi esiste ed è unico. L'esistenza di un trasporto nel caso in cui il costo fosse uguale alla distanza era, in quel momento, ancora un problema aperto e fu risolto solamente alla fine degli anni '90.

Il lavoro di Brenier fu importante non solo per il risultato in sé, ma, soprattutto, per aver mostrato una connessione con problemi derivanti dalla meccanica dei fluidi. Il fatto di avere legami con altri settori della matematica ha reso il trasporto ottimale un argomento affascinante e estremamente importante della matematica dei nostri giorni.

Durante la metà degli anni '90 del secolo scorso, Robert McCann mostrò che la teoria del trasporto poteva essere applicata anche alla meccanica dei gas, e propose una tecnica per lo studio del problema del trasporto, chiamata "displacement interpolation". Questo approccio è risultato molto utile anche per dimostrare importanti risultati geometrici, come la disuguaglianza isoperimetrica, o problemi legati alle superfici minime.

Poiché in generale i problemi naturali o fisici evolvono seguendo configurazioni di energia minima, questa teoria può essere applicata, per esempio, anche alla meteorologia, alla fisica nucleare o alle neuroscienze. Importanti risultati in questa direzione sono dovuti al matematico Alessio Figalli, Medaglia Fields 2018.

Noi tratteremo una semplice applicazione di questa teoria alla registrazione di immagini mediche: in particolare vedremo che il trasporto ottimale può essere interpretato come una tecnica di registrazione non-rigida.

L'obiettivo della presente tesi è quello di introdurre la teoria del trasporto ottimale di massa nell'ambiente generale degli spazi polacchi (spazi metrici separabili e completi) e analizzare poi alcuni casi particolari. Più dettagliatamente, la tesi è organizzata come segue.

Nel primo capitolo richiamiamo, inizialmente, alcuni risultati preliminari di teoria della misura. Introduciamo poi, da un punto di vista matematico, seguendo [49], le due formulazioni del problema e proviamo, sotto opportune ipotesi per la funzione costo, l'esistenza di una soluzione per il problema di Kantorovich. Infine introduciamo la formulazione duale del problema: proviamo la sua equivalenza con quello di Kantorovich e l'esistenza, sotto opportune ipotesi, di un punto di massimo.

Nel secondo capitolo proviamo l'esistenza di mappe di trasporto in alcuni casi particolari. Più precisamente, nella prima sezione analizziamo il caso discreto e nella seconda il caso semi-discreto. Nella terza trattiamo il problema del trasporto in una dimensione e nell'ultima il problema del trasporto ottimale in L^2 .

Nel terzo capitolo facciamo riferimento a [40] per trattare il problema del trasporto in L^2 nel caso particolare in cui le misure di probabilità siano assolutamente continue rispetto alla misura di Lebesgue, con densità periodiche. Mostriamo poi l'equivalenza fra questo problema e l'equazione di Monge-Ampère. Proviamo infine la convergenza di un algoritmo per la soluzione di questa equazione, sfruttando le stime a priori sulla regolarità della soluzione e l'unicità, a meno di costanti, di una soluzione per le PDE lineari strettamente

ellittiche con condizioni periodiche.

Nel quarto capito, seguendo [39], proviamo che è effettivamente possibile definire una distanza fra le misure di probabilità, a partire dalla soluzione del problema del trasporto ottimale di massa.

Nel quinto capitolo riportiamo da [40] una semplice applicazione della teoria del trasporto alla registrazione delle immagini, in particolare alla diagnosi della malattia della sclerosi multipla.

Indice

Introduzione	iv
1 Problema del Trasporto Ottimale e Dualità di Kantorovich	1
1.1 Nozioni Preliminari di Teoria della Misura	1
1.2 Problema del Trasporto Ottimale di Massa	5
1.2.1 Formulazione di Monge	6
1.2.2 Formulazione di Kantorovich	8
1.2.3 Esistenza dei Piani di Trasporto	10
1.3 Formulazione Duale	12
1.3.1 Dualità di Kantorovich	12
1.3.2 Esistenza di un Punto di Massimo per il Problema Duale	24
2 Esistenza di Mappe di Trasporto Ottimali	31
2.1 Caso Discreto	31
2.2 Caso Semi-Discreto	37
2.3 Trasporto Ottimale in \mathbb{R}	41
2.4 Problema del Trasporto Ottimale in L^2 : Teorema di Brenier .	49
3 Trasporto Ottimale in L^2: Caso Periodico	63
3.1 Esistenza e Unicità della Soluzione per una PDE Lineare Stret- tamente Ellittica	64
3.2 Equazione di Monge-Ampère	69
3.3 Algoritmo	75
3.3.1 Convergenza dell'algoritmo	78

4	Distanze di Wasserstein	87
5	Un'Applicazione alla Registrazione delle Immagini	91
	Bibliografia	97

Capitolo 1

Problema del Trasporto Ottimale e Dualità di Kantorovich

1.1 Nozioni Preliminari di Teoria della Misura

In questa sezione riportiamo alcuni risultati di teoria sulle misure di probabilità definite su spazi metrici, che ci saranno utili nel seguito della tesi.

Consideriamo uno spazio metrico (X, d) .

La σ -algebra di Borel $\mathcal{B}(X)$ è la più piccola σ -algebra su X che include tutti i sottoinsiemi aperti di X . Gli elementi di \mathcal{B} sono detti *insiemi boreliani* di X e una misura $\mu : \mathcal{B}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ è detta *misura di Borel* su X .

Una misura μ su X si dice *finita* se $\mu(X) < +\infty$; si dice *di probabilità* se $\mu(X) = 1$.

Il *supporto* di una misura μ su X è la chiusura del sottoinsieme di X i cui punti hanno la proprietà che ogni loro intorno ha misura positiva, i.e.

$$\text{supp}(\mu) := \overline{\{x \in X : \forall U \ni x, \mu(U) > 0\}}.$$

Denotiamo con $\mathcal{M}_+(X)$ l'insieme delle misure di Borel su X e con $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle misure di probabilità di Borel su X .

Definizione 1.1. [42]. Siano X uno spazio topologico di Hausdorff e $\mathcal{B}(X)$ la sua σ -algebra di Borel, una *misura di Radon* su X è una misura

$\mu : \mathcal{B}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ che soddisfa le seguenti proprietà:

1. μ è localmente finita, i.e. $\forall x \in X, \exists U$ intorno di x in X , t.c. $\mu(U) < +\infty$;
2. μ è internamente regolare, i.e. $\forall B \in \mathcal{B}(X), \mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq B, K \text{ compatto}\}$;

Uno spazio metrico (X, d) è detto *separabile* se ammette un sottoinsieme numerabile e denso.

Uno spazio metrico completo e separabile è anche detto *spazio polacco*.

Teorema 1.1.1. *Sia (X, d) uno spazio polacco, μ una misura di Borel su X , μ localmente finita $\implies \mu$ è sia internamente regolare che esternamente regolare, i.e. $\forall B \in \mathcal{B}(X), \mu(B) = \inf\{\mu(O) : B \subseteq O, O \text{ aperto}\}$;*

Per la dimostrazione si veda [5, theorem 23.6].

Osservazione 1. In uno spazio polacco tutte le misure di Borel finite, e in particolare quelle di probabilità, sono misure di Radon.

Definizione 1.2. Siano X uno spazio metrico, $C_b(X)$ lo spazio delle funzioni continue e limitate su X , $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$ e $\mu \in \mathcal{P}(X)$. Diciamo che μ_n converge debolmente* a μ , e scriviamo $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$, se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f(x) d\mu_n(x) = \int_X f(x) d\mu(x), \quad \forall f \in C_b(X)$$

Introduciamo delle definizioni equivalenti di convergenza debole*.

Teorema 1.1.2 (di Portmanteau). *Siano X uno spazio metrico, $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$ e $\mu \in \mathcal{P}(X)$, sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

1. $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$;
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f(x) d\mu_n(x) = \int_X f(x) d\mu(x)$, per ogni funzione limitata e lipschitziana f ;
3. $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_X f(x) d\mu_n(x) \leq \int_X f(x) d\mu(x)$, per ogni funzione semi-continua superiormente e limitata dall'alto;

4. $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f(x) d\mu_n(x) \geq \int_X f(x) d\mu(x)$, per ogni funzione semi-continua inferiormente e limitata dal basso;
5. $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(C) \leq \mu(C)$, per ogni chiuso $C \subset X$;
6. $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(O) \geq \mu(O)$, per ogni aperto $O \subset X$;
7. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$, $\forall A \in \mathcal{B}(X)$ t.c. $\mu(\partial A) = 0$;

Per la dimostrazione del teorema si veda [32, theorem 6.1].

Un insieme $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ si dice *tight* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto $K_\varepsilon \subseteq X$ t.c. $\mu(X \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon$, per ogni $\mu \in \mathcal{K}$. In particolare se $\mathcal{K} = \{\mu\}$ allora diremo che la misura μ è *tight*.

Riportiamo ora un teorema che ci permette di caratterizzare la compattezza per successioni nella topologia debole*: questa è simile alla compattezza negli gli spazi euclidei ma la nozione di limitatezza è rimpiazzata da quella di "tightness".

Teorema 1.1.3 (di Prokhorov). *Sia X un spazio polacco. Un insieme $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ è tight \Leftrightarrow la chiusura di \mathcal{K} è compatta per successioni nella topologia debole*.*

Per la dimostrazione si veda [32, theorem 6.7].

Data una mappa misurabile T tra due spazi metrici, possiamo definire la *misura immagine* di una misura di probabilità boreliana tramite T nel modo seguente.

Definizione 1.3. Siano X, Y due spazi metrici, $\mu \in \mathcal{P}(X)$ e $T : X \rightarrow Y$ misurabile, la *misura immagine* di μ tramite T , che indichiamo con $T_{\#}\mu$, è la misura ν definita su $\mathcal{B}(Y)$ come segue:

$$\nu(B) = \mu(T^{-1}(B)), \quad \forall B \in \mathcal{B}(Y). \quad (1.1)$$

Introduciamo due utili proprietà della misura immagine.

Proposizione 1.1.4. *Siano X, Y, Z spazi metrici, $\mu \in \mathcal{P}(X)$.*

1. *Cambio di variabili:*

Siano $T : X \rightarrow Y$ una mappa misurabile e $f \in L^1(Y, T_{\#}\mu)$, allora:

$$\int_Y f(y)d(T_{\#}\mu)(y) = \int_X f(T(x))d\mu(x); \quad (1.2)$$

2. *Legge di composizione:*

Siano $T : X \rightarrow Y$, $S : Y \rightarrow Z$ mappe misurabili, allora:

$$(S \circ T)_{\#}\mu = S_{\#}(T_{\#}\mu) \quad (1.3)$$

Dimostrazione. 1. Ricordiamo che per $f : Y \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$\int_Y f(y)d(T_{\#}\mu)(y) := \sup \left\{ \int_Y s(y)d(T_{\#}\mu)(y) : 0 \leq s \leq f, s(y) = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{U_i}(y) \right\}.$$

Ora osserviamo che

$$\begin{aligned} \int_Y s(y)d(T_{\#}\mu)(y) &= \int_Y \sum_{i=1}^N a_i \chi_{U_i}(y)d(T_{\#}\mu)(y) = \sum_{i=1}^N a_i \int_{U_i} d(T_{\#}\mu) = \\ &= \sum_{i=1}^N a_i T_{\#}\mu(U_i) = \sum_{i=1}^N a_i \mu(V_i) = \int_X r(x)d\mu(x) \end{aligned}$$

per $V_i = T^{-1}(U_i)$ e $r = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{V_i}$.

Se $x \in V_i \Rightarrow T(x) \in U_i$ e $r(x) = a_i = s(T(x)) \leq f(T(x))$. Passando, da ambo i lati, al sup sulle funzioni semplici, segue che:

$$\sup_{0 \leq s \leq f} \int_Y s(y)d(T_{\#}\mu)(y) = \sup_{0 \leq r \leq f \circ T} \int_X r(x)d\mu(x)$$

2. Sia $A \subset Z \Rightarrow T^{-1}(S^{-1}(A)) = (S \circ T)^{-1}(A)$. Allora

$$\begin{aligned} S_{\#}(T_{\#}\mu)(A) &= T_{\#}\mu(S^{-1}(A)) = \mu(T^{-1}(S^{-1}(A))) = \mu((S \circ T)^{-1}(A)) = \\ &= (S \circ T)_{\#}\mu(A) \Rightarrow S_{\#}(T_{\#}\mu) = (S \circ T)_{\#}\mu \end{aligned}$$

□

L'ultimo risultato che richiamiamo in questa sezione è il *teorema di disintegrazione delle misure*.

Teorema 1.1.5. *Siano X, Y spazi polacchi e $P : X \rightarrow Y$ una mappa misurabile. Sia $\mu \in \mathcal{P}(X)$ e definiamo $\nu := P_{\#}\mu \in \mathcal{P}(Y)$. Allora esiste una famiglia di misure di probabilità $\{\mu(\cdot|y)\}_{y \in Y}$, definita unicamente ν -quasi ovunque, tale che $\mu(\cdot|y) \in \mathcal{P}(P^{-1}(y))$ e*

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_Y \int_{P^{-1}(y)} f(x) d\mu(x|y) d\nu(y),$$

per ogni $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile.

Si veda [3, theorem 5.3.1].

In termini di probabilità condizionata, $\mu(A|y)$ indica la probabilità condizionata di A dato l'evento y .

In particolare considereremo $X := X \times Y$, che è ancora uno spazio polacco, $\pi \in \mathcal{P}(X \times Y)$, $P(x, y) = y$ e $\nu = P_{\#}\pi$. Poiché $P^{-1}(y) = X \times \{y\}$, possiamo identificare canonicamente ogni fibra $P^{-1}(y)$ con X e trovare una famiglia di misure di probabilità di Borel $\pi(\cdot|y) \in \mathcal{P}(X)$ (con un abuso di notazione). In particolare possiamo scrivere

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d\pi(x, y) = \int_Y \int_X f(x, y) d\pi(x|y) d\nu(y) \quad (1.4)$$

per ogni $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile.

1.2 Problema del Trasporto Ottimale di Massa

Il problema del trasporto ottimale consiste nello studio di come trasferire una distribuzione di massa da un luogo ad un altro minimizzando il costo del trasporto. Supponiamo di avere un mucchio di sabbia e una cavità da riempire completamente con questa sabbia. Il mucchio e la cavità devono, ovviamente, avere lo stesso volume: possiamo supporre che la massa del mucchio di sabbia sia normalizzata, quindi che sia uguale a 1. Possiamo quindi modellarli entrambi con delle misure di probabilità μ e ν definite su

due spazi di misura X e Y , che noi supponiamo essere spazi polacchi. Dati A e B sottoinsiemi misurabili di X e Y rispettivamente, $\mu(A)$ indica quanta sabbia è contenuta in A , $\nu(B)$ quanta ne può essere accumulata in B . Lo spostamento della sabbia richiede un certo sforzo, modellato da una *funzione costo* misurabile definita su $X \times Y$. Informalmente, $c(x, y)$ dice quanto costa trasportare un'unità di massa da x a y . È naturale assumere che c sia una mappa misurabile e non negativa, $c : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$. L'obiettivo quindi è quello di trasportare μ in ν minimizzando c .

1.2.1 Formulazione di Monge

Data una mappa misurabile $T : X \rightarrow Y$, diciamo che questa *trasporta* $\mu \in \mathcal{P}(X)$ in $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ se

$$\nu = T_{\#}\mu.$$

Chiameremo una mappa T , con tale proprietà, *mappa di trasporto*.

La formulazione del problema del trasporto ottimale, data da Monge nel 1781, [31], è la seguente:

Definizione 1.4 (Problema di Monge). Date $\mu \in \mathcal{P}(X)$ e $\nu \in \mathcal{P}(Y)$, e indicato con

$$\mathbb{M}(T) := \int_X c(x, T(x)) d\mu(x), \quad (1.5)$$

risolvere il problema

$$\inf_{T: \nu = T_{\#}\mu} \mathbb{M}(T).$$

Una mappa T che soddisfa il problema precedente, se esiste, è detta *mappa di trasporto ottimale*.

Nel prossimo capitolo proveremo l'esistenza della mappa di trasporto per una funzione costo $c \in L^2$, sotto opportune ipotesi per le misure μ e ν , mentre originariamente, Monge considerò il problema per una funzione costo $c \in L^1$, i.e. $c(x, y) = |x - y|$: questa ipotesi rende il problema più difficile

da risolvere. Infatti per la prima dimostrazione corretta, dovuta a Evans e Gangbo, bisogna aspettare il 1999, [18]. Sudakov, nel 1979, propose una soluzione del medesimo problema, in [45], che si rivelò essere sbagliata e che venne corretta, successivamente, da Ambrosio e Pratelli, [2, 4].

Indipendentemente dalla scelta della funzione costo c , questo problema può essere mal posto perché, date due misure di probabilità μ e ν , non è detto che esista una mappa che porti una nell'altra. Per esempio, consideriamo due misure discrete $\mu = \delta_{x_1}$ e $\nu = \frac{1}{2}\delta_{y_1} + \frac{1}{2}\delta_{y_2}$ con $y_1 \neq y_2$. Allora $\nu(\{y_1\}) = \frac{1}{2}$ ma $\mu(T^{-1}(y_1)) \in \{0, 1\}$ a seconda del fatto che $x_1 \in T^{-1}(y_1)$ o meno, quindi non esiste nessuna mappa di trasporto.

Nel prossimo capitolo analizzeremo nel dettaglio tre casi particolari in cui esiste una mappa di trasporto:

1. *caso uniforme discreto*: $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$ e $\nu = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{y_j}$ in cui è importante che le due misure siano supportate sullo stesso numero di punti;
2. *caso assolutamente continuo*: assumiamo che μ e ν siano assolutamente continue rispetto alla misura di Lebesgue su \mathbb{R}^d , i.e. abbiano derivate di Radon-Nikodym $d\mu(x) = f(x)dx$ e $d\nu(y) = g(y)dy$, allora (1.1) diventa:

$$\int_B g(y)dy = \int_{T^{-1}(B)} f(x)dx.$$

Supponiamo che T sia un diffeomorfismo C^1 allora, usando il cambio di variabili $y = T(x)$ al membro di sinistra, si ottiene

$$\int_B g(y)dy = \int_{T^{-1}(B)} g(T(x)) |\det((\mathcal{J}T)(x))| dx.$$

Quindi, in questo caso, (1.1) diventa equivalente a

$$f(x) = g(T(x)) |\det((\mathcal{J}T)(x))|.$$

Vedremo questo conto più dettagliatamente nel capitolo 3, nel caso in cui la mappa T sia il gradiente di una funzione convessa su \mathbb{R}^d ;

3. *caso semi-discreto*: μ assolutamente continua, i.e. $d\mu(x) = f(x)dx$, ν discreta, i.e. $\nu = \sum_{j=1}^n m_j \delta_{y_j}$ t.c. $\sum_{j=1}^n m_j = 1$;

1.2.2 Formulazione di Kantorovich

Nel 1942 Kantorovich propose in [25] una generalizzazione del problema, per aggirare l'ostacolo della mal posizione dello stesso: propose di cercare un cosiddetto *piano di trasporto*, cioè una misura di probabilità su $X \times Y$ le cui marginali sono μ e ν , anziché una mappa di trasporto.

Considerare una misura di probabilità su $X \times Y$ è un modo alternativo per descrivere lo spostamento dei granelli di sabbia di cui si parlava in precedenza: invece di specificare, per ogni x , qual è la destinazione $T(x)$ della sabbia originariamente situata in x , indichiamo con $d\pi(x, y)$ la quantità di sabbia spostata da x a y . Ovviamente, affinché $\pi \in \mathcal{P}(X \times Y)$ sia ammissibile, è necessario che la massa presa dal punto x coincida con $d\mu(x)$ e quella trasferita nel punto y coincida con $d\nu(y)$. Più rigorosamente, se il valore $\pi(A \times B)$ indica la quantità di massa spostata da A a B , allora $\pi(A \times Y) = \mu(A)$, $\pi(X \times B) = \nu(B)$.

È naturale assumere, a priori, che i granelli di sabbia possano essere spostati da un singolo punto x in destinazioni y diverse. In questa nuova descrizione vengono inclusi anche questi tipi di spostamenti che, nella formulazione di Monge, non vengono presi in considerazione, visto che la massa viene mappata da $x \mapsto T(x)$, quindi non può essere "divisa".

Definizione 1.5 (Problema di Kantorovich). Date $\mu \in \mathcal{P}(X)$ e $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ e indicato con

$$\mathbb{K}(\pi) := \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y), \quad (1.6)$$

risolvere il problema

$$\inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{K}(\pi),$$

dove

$$\Pi(\mu, \nu) := \left\{ \pi \in \mathcal{P}(X \times Y) : \pi(A \times Y) = \mu(A), \forall A \in \mathcal{B}(X), \right.$$

$$\left. \pi(X \times B) = \nu(B), \forall B \in \mathcal{B}(Y) \right\}.$$

Osservazione 2. Per quanto detto nella sezione precedente, l'insieme delle mappe di trasporto fra due misure di probabilità μ e ν può essere vuoto (si veda il caso delle Delta di Dirac). L'insieme dei piani di trasporto, invece, è sicuramente non vuoto perché banalmente si può osservare che $\mu \otimes \nu \in \Pi(\mu, \nu)$.

Per un dato piano di trasporto π , la quantità $\mathbb{K}(\pi)$ è il *costo totale di trasporto* associato a π .

Il *costo del trasporto ottimale* è la quantità $\tau_c(\mu, \nu) = \min_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{K}(\pi)$.

I piani di trasporto π t.c. $\tau_c(\mu, \nu) = \mathbb{K}(\pi)$ si dicono *piani di trasporto ottimali* tra μ e ν .

Dall'osservazione 2 segue che il problema di Monge e quello di Kantorovich, in generale, non coincidono; tuttavia il secondo può essere visto come una generalizzazione del primo. Nella formulazione di Kantorovich la classe di oggetti su cui si cerca l'estremo inferiore viene, di fatto, ampliata: osserviamo, infatti, che ogni mappa di trasporto induce un piano di trasporto con lo stesso costo.

Più precisamente, consideriamo $T : X \rightarrow Y$ mappa di trasporto e la funzione $\text{Id} \times T : X \rightarrow X \times Y$, $(\text{Id} \times T)(x) = (x, Tx)$. La misura $\pi_T := (\text{Id} \times T)_\# \mu$ risulta essere un elemento di $\Pi(\mu, \nu)$, infatti, presi $A \in \mathcal{B}(X)$ e $B \in \mathcal{B}(Y)$,

$$\pi_T(A \times Y) = (\text{Id} \times T)_\# \mu(A \times Y) = \mu((\text{Id} \times T)^{-1}(A \times Y)) = \mu(A),$$

e

$$\begin{aligned} \pi_T(X \times B) &= (\text{Id} \times T)_\# \mu(X \times B) = \mu((\text{Id} \times T)^{-1}(X \times B)) = \\ &= \mu(T^{-1}(B)) = T_\# \mu(B) = \nu(B). \end{aligned}$$

Equivalentemente, $d\pi_T(x, y) := d\mu(x)\delta_{T(x)}(y)$ e

$$\pi_T(A \times Y) = \int_A \delta_{T(x) \in Y} d\mu(x) = \mu(A)$$

e

$$\pi_T(X \times B) = \int_X \delta_{T(x) \in B} d\mu(x) = \mu(T^{-1}(B)) = T_{\#}\mu(B) = \nu(B).$$

Inoltre, partendo dal funzionale del problema di Kantorovich e usando il punto 1. della *proposizione 1.1.4*

$$\int_{X \times Y} c(x, y) d\pi_T(x, y) = \int_{X \times Y} c(x, y) d(\text{Id} \times T)_{\#}\mu(x, y) = \int_X c(x, Tx) d\mu(x).$$

Da questo segue che

$$\inf \mathbb{K}(\pi) \leq \inf \mathbb{M}(T), \tag{1.7}$$

e che, se il minimo del problema di Kantorovich è della forma $\pi = (\text{Id} \times T)_{\#}\mu$ per qualche mappa di trasporto T , allora T realizza il minimo per il problema di Monge.

Nel prossimo capitolo vedremo delle condizioni sufficienti affinché, in casi particolari, esista un piano di trasporto ottimale della forma $d\tilde{\pi}(x, y) = d\mu(x)\delta_{T(x)}(y)$. Quindi, in questo caso, come già detto, T sarà una mappa di trasporto ottimale e avremo che $\min \mathbb{K}(\pi) = \min \mathbb{M}(T)$.

1.2.3 Esistenza dei Piani di Trasporto

Completiamo questa sezione provando l'esistenza di un punto di minimo per il problema di Kantorovich con il *metodo diretto del calcolo delle variazioni*.

Definizione 1.6. Su uno spazio metrico X , una funzione $F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ si dice *semi-continua inferiormente* (l.s.c. in breve) se per ogni successione $x_n \rightarrow x$ vale $F(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} F(x_n)$.

In particolare, dato un problema variazionale $\inf_{v \in V} F(v)$, bisogna provare prima che l'insieme V è compatto (o almeno che un insieme che contiene il punto di minimo è compatto); poi, data $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione minimizzante, i.e. $F(v_n) \rightarrow \inf_{v \in V} F$, si può assumere, per la compattezza, che questa converga, a meno di sottosuccessioni, a un $\tilde{v} \in V$. Questo ci dà un candidato

punto di minimo. Se si riesce a provare che F è semi-continua inferiormente allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(v_n) \geq F(\tilde{v})$ e quindi \tilde{v} è un punto di minimo.

Teorema 1.2.1 (Esistenza). [49, Proposition 2.1] *Siano X, Y spazi polacchi, $\mu \in \mathcal{P}(X)$, $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ e assumiamo che $c : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ sia semi-continua inferiormente $\implies \exists \tilde{\pi} \in \Pi(\mu, \nu)$ piano di trasporto ottimale.*

Dimostrazione. Ricordiamo che $\Pi(\mu, \nu) \neq \emptyset$. Proviamo che $\Pi(\mu, \nu)$ è compatto nella topologia debole*.

Sia $\delta > 0$ allora esistono $K \subseteq X$ e $L \subseteq Y$ t.c.

$$\mu(X \setminus K) \leq \delta, \quad \nu(Y \setminus L) \leq \delta$$

perché μ e ν sono misure di Radon.

Se $(x, y) \in (X \times Y) \setminus (K \times L)$ allora o $x \notin K$ o $y \notin L$ quindi $(x, y) \in X \times (Y \setminus L)$ o $(x, y) \in (X \setminus K) \times Y$. Quindi, per ogni $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$

$$\begin{aligned} \pi((X \times Y) \setminus (K \times L)) &\leq \pi(X \times (Y \setminus L)) + \pi((X \setminus K) \times Y) = \\ &= \nu(Y \setminus L) + \mu(X \setminus K) \leq 2\delta. \end{aligned}$$

Da questo segue che $\Pi(\mu, \nu)$ è tight. Dal *teorema di Prokhorov* la chiusura di $\Pi(\mu, \nu)$ è compatta per successioni nella topologia della convergenza debole*.

Proviamo ora che $\Pi(\mu, \nu)$ è chiuso.

Sia $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Pi(\mu, \nu)$, $\pi_n \xrightarrow{*} \pi \in \mathcal{P}(X \times Y)$, i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{X \times Y} f(x, y) d\pi_n(x, y) = \int_{X \times Y} f(x, y) d\pi(x, y), \quad \forall f \in C_b(X \times Y).$$

Scegliendo $f(x, y) = \tilde{f}(x)$, con \tilde{f} è continua e limitata su X , segue che

$$\begin{aligned} \int_X \tilde{f}(x) d\mu(x) &= \int_{X \times Y} \tilde{f}(x) d\pi_n(x, y) \longrightarrow \int_{X \times Y} \tilde{f}(x) d\pi(x, y) = \\ &= \int_X \tilde{f}(x) dP_{\#}^X \pi(x), \end{aligned}$$

dove $P^X(x, y) = x$ è la proiezione di $X \times Y$ su X (quindi $P_{\#}^X \pi$ è la marginale su X). Poiché questo è vero $\forall \tilde{f} \in C_b(X)$ allora $P_{\#}^X \pi = \mu$. Analogamente si

dimostra che $P_{\#}^Y \pi = \nu$. Quindi $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ e $\Pi(\mu, \nu)$ è chiuso.

Sia $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Pi(\mu, \nu)$ una successione minimizzante, i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{K}(\pi_n) = \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{K}(\pi)$. Poiché $\Pi(\mu, \nu)$ è compatto possiamo assumere che, a meno di sottosuccessioni, $\pi_n \xrightarrow{*} \tilde{\pi} \in \Pi(\mu, \nu)$. Per ipotesi c è semi-continua inferiormente e limitata dal basso. Allora,

$$\inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{K}(\pi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi_n(x, y) \geq \int_{X \times Y} c(x, y) d\tilde{\pi}(x, y),$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dal *teorema 1.1.2*. Quindi $\tilde{\pi}$ è un minimizzatore. □

1.3 Formulazione Duale

Il problema del trasporto ottimale, nella formulazione di Kantorovich, è un problema di minimo del funzionale lineare $\pi \rightarrow \int c d\pi$ con vincoli $P_{\#}^X \pi = \mu$, $P_{\#}^Y \pi = \nu$ e $\pi \geq 0$. L'obiettivo di questa sezione è quello di mostrare che un problema di questo tipo ammette una formulazione duale, in cui si massimizza un funzionale lineare, con vincoli diversi.

Il problema duale può essere espresso mediante la *dualità di Kantorovich*; per provare l'equivalenza fra i due problemi introduciamo, in un primo momento, la *dualità di Fenchel-Rockafellar*, un principio generale su cui si basa la dimostrazione della dualità di Kantorovich; poi, sotto opportune ipotesi aggiuntive, proviamo l'esistenza di soluzioni per il problema duale.

1.3.1 Dualità di Kantorovich

Cominciamo con una definizione:

Definizione 1.7. Siano E uno spazio vettoriale normato, $\Theta : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una funzione convessa, si dice *trasformata di Legendre-Fenchel* (o anche *coniugata convessa*) la funzione

$$\Theta^* : E^* \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad \Theta^*(z^*) := \sup_{z \in E} (\langle z^*, z \rangle - \Theta(z)).$$

Richiamiamo ora due risultati preliminari, che non dimostriamo, e che ci saranno utili per la dimostrazione del teorema di Fenchel-Rockafeller:

Lemma 1.3.1. *Sia E uno spazio vettoriale normato.*

1. *Se $\Theta : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ è convessa allora l'epigrafico A definito da*

$$A = \{(z, t) \in E \times \mathbb{R} : t \geq \Theta(z)\}$$

è ancora convesso.

2. *Se $\Theta : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ è concava allora l'ipografico B definito da*

$$B = \{(z, t) \in E \times \mathbb{R} : t \leq \Theta(z)\}$$

è convesso.

3. *Se $C \subset E$ è convesso allora $\text{Int}(C)$ è convesso.*

4. *Se $D \subset E$ è convesso e $\text{Int}(D) \neq \emptyset$ allora $\overline{D} = \overline{\text{Int}(D)}$.*

Teorema 1.3.2 (Hahn-Banach). *[8, Theorem 1.6] Siano E uno spazio vettoriale normato, $A \subset E$, $B \subset E$ sottoinsiemi convessi, non vuoti e t.c. $A \cap B \neq \emptyset$. Supponiamo che uno dei due sia aperto, allora esiste un iperpiano chiuso che separa A e B .*

Teorema 1.3.3 (Dualità di Fenchel-Rockafellar). *[49, Theorem 1.9] Siano E uno spazio vettoriale normato e $\Theta, \Xi : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ due funzioni convesse. Assumiamo che esista $z_0 \in E$ t.c. $\Theta(z_0) < +\infty$, $\Xi(z_0) < +\infty$ e Θ sia continua in z_0 . Allora,*

$$\inf_E (\Theta + \Xi) = \max_{z^* \in E^*} (-\Theta^*(-z^*) - \Xi^*(z^*)). \quad (1.8)$$

Dimostrazione. Inizialmente osserviamo che scrivendo, per definizione,

$$-\Theta^*(-z^*) - \Xi^*(z^*) = \inf_{x, y \in E} (\Theta(x) + \Xi(y) + \langle z^*, x - y \rangle)$$

e prendendo $y = x$ osserviamo che

$$\inf_{x \in E} (\Theta(x) + \Xi(x)) \geq \sup_{z^* \in E^*} (-\Theta^*(-z^*) - \Xi^*(z^*)).$$

Sia ora $M := \inf(\Theta + \Xi)$, definiamo gli insiemi A e B nel modo seguente:

$$A := \{(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R} : \lambda \geq \Theta(x)\}$$

$$B := \{(y, \sigma) \in E \times \mathbb{R} : \sigma \leq M - \Xi(y)\}.$$

Dal lemma 1.3.1 A e B sono convessi. Dalla continuità e dalla finitezza di Θ in z_0 , l'interno di A è non vuoto e, dalla finitezza di Ξ in z_0 , B è non vuoto. $C := \text{Int}(A)$ è convesso per il lemma 1.3.1. Ora, se $(x, \lambda) \in C$ allora $\lambda > \Theta(x)$, quindi $\lambda + \Xi(x) > \Theta(x) + \Xi(x) \geq M$. Quindi $(x, \lambda) \notin B$, in particolare $B \cap C \neq \emptyset$. Dal teorema di Hahn-Banach esiste un iperpiano chiuso $H = \{\Phi = \alpha\}$ che separa B e C , i.e. se scriviamo $\Phi(x, \lambda) = f(x) + k\lambda$, con f lineare opportuna, allora (per definizione),

$$\forall (x, \lambda) \in C, \quad f(x) + k\lambda \geq \alpha$$

e

$$\forall (x, \lambda) \in B, \quad f(x) + k\lambda \leq \alpha.$$

Poichè H è chiuso allora Φ è una funzione continua (si guardi [8, Proposition 1.5]).

Ora se $(x, \lambda) \in A$ allora esiste una $(x_n, \lambda_n) \in C$ t.c. $(x_n, \lambda_n) \rightarrow (x, \lambda)$. Quindi $f(x) + k\lambda \leftarrow f(x_n) + k\lambda_n \geq \alpha$ e si può concludere che

$$\forall (x, \lambda) \in A, \quad f(x) + k\lambda \geq \alpha \tag{1.9}$$

$$\forall (x, \lambda) \in B, \quad f(x) + k\lambda \leq \alpha. \tag{1.10}$$

Sappiamo che $(z_0, \lambda) \in A$ per λ sufficientemente grande, quindi passando al limite per $\lambda \rightarrow +\infty$, segue che $k \geq 0$. Affermiamo che $k > 0$. Per assurdo, supponiamo che $k = 0$, allora

$$\forall (x, \lambda) \in A, \quad f(x) \geq \alpha \implies f(x) \geq \alpha, \quad \forall x \in \text{Dom}(\Theta)$$

$$\forall (x, \lambda) \in B, \quad f(x) \leq \alpha \implies f(x) \leq \alpha, \quad \forall x \in \text{Dom}(\Xi).$$

Siccome $\text{Dom}(\Xi) \ni z_0 \in \text{Dom}(\Theta) \Rightarrow f(z_0) = \alpha$. Poiché Θ è continua in z_0 esiste $r > 0$ t.c. $B(z_0, r) \subset \text{Dom}(\Theta)$, quindi $\forall z$ t.c. $\|z\| < r$ e $\delta \in \mathbb{R}$ con $|\delta| < 1$ vale

$$f(z_0 + \delta z) \geq \alpha \implies f(z_0) + \delta f(z) \geq \alpha \implies \delta f(z) \geq 0.$$

Questo è vero per ogni $\delta \in (-1, 1)$ quindi $f(z) = 0$ per $z \in B(0, r)$. Quindi $f \equiv 0$ su E . Segue che $\Phi \equiv 0$, i.e. $H = E \times \mathbb{R}$, se $\alpha = 0$, oppure $H = \emptyset$ e questa è una contraddizione.

Da (1.9) segue che

$$\Theta^* \left(-\frac{f}{k} \right) = \sup_{z \in E} \left(-\frac{f(z)}{k} - \Theta(z) \right) = -\frac{1}{k} \inf_{z \in E} (f(z) + k\Theta(z)) \leq -\frac{\alpha}{k}$$

poiché $(z, \Theta(z)) \in A$. Analogamente, da (1.10) segue che

$$\Xi^* \left(\frac{f}{k} \right) = \sup_{z \in E} \left(\frac{f(z)}{k} - \Xi(z) \right) = -M + \frac{1}{k} \sup_{z \in E} (f(z) + k(M - \Xi(z))) \leq -M + \frac{\alpha}{k}$$

poiché $(z, M - \Xi(z)) \in B$. Segue che

$$M \geq \sup_{z^* \in E^*} (-\Theta^*(-z^*) - \Xi^*(z^*)) \geq -\Theta^* \left(-\frac{f}{k} \right) - \Xi^* \left(\frac{f}{k} \right) \geq \frac{\alpha}{k} + M - \frac{\alpha}{k} = M.$$

Quindi

$$\inf_{x \in E} (\Theta(x) + \Xi(x)) = M = \sup_{z^* \in E^*} (-\Theta^*(-z^*) - \Xi^*(z^*)).$$

Inoltre il punto $z^* = \frac{f}{k}$ è un punto di massimo. \square

Osserviamo che, nella *definizione 1.5*, la condizione $\pi(A \times Y) = \mu(A)$, $\pi(X \times B) = \nu(B)$, $\forall A \in \mathcal{B}(X)$, $\forall B \in \mathcal{B}(Y)$, equivale all'affermare che per tutte le funzioni φ, ψ in un'appropriata classe di funzioni test:

$$\int_{X \times Y} (\varphi(x) + \psi(y)) d\pi(x, y) = \int_X \varphi(x) d\mu(x) + \int_Y \psi(y) d\nu(y).$$

In generale, l'ambiente naturale per le funzioni test (φ, ψ) è $L^1(\mu) \times L^1(\nu)$. Introduciamo, ora, la formulazione duale del problema del trasporto ottimale di massa e proviamo l'equivalenza tra la formulazione duale e quella di Kantorovich.

Teorema 1.3.4 (Dualità di Kantorovich). [49, Theorem 1.3] Siano X, Y spazi polacchi, $\mu \in \mathcal{P}(X)$, $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ e $c : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ una funzione costo semi-continua inferiormente. Definiamo

$$\mathbb{J} : L^1(\mu) \times L^1(\nu) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbb{J}(\varphi, \psi) := \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu \quad (1.11)$$

e

$$\Phi_c := \{(\varphi, \psi) \in L^1(\mu) \times L^1(\nu) : \varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y)\}, \quad (1.12)$$

dove la disuguaglianza vale per μ -quasi ogni $x \in X$ e ν -quasi ogni $y \in Y$.

Allora,

$$\min_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{K}(\pi) = \sup_{(\varphi, \psi) \in \Phi_c} \mathbb{J}(\varphi, \psi). \quad (1.13)$$

Dimostrazione. Proviamo che

$$\sup_{(\varphi, \psi) \in \Phi_c} \mathbb{J}(\varphi, \psi) \leq \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{K}(\pi). \quad (1.14)$$

Siano $(\varphi, \psi) \in \Phi_c$ e $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$. Siano $A \subset X$ e $B \subset Y$ tali che $\mu(A) = 1$, $\nu(B) = 1$ e $\varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y)$, $\forall (x, y) \in A \times B$.

Ora $\pi(A^c \times B^c) \leq \pi(A^c \times Y) + \pi(X \times B^c) = \mu(A^c) + \nu(B^c) = 0$ quindi,

$$\begin{aligned} \pi(A \times B) &= \pi(X \times B) - \pi(A^c \times B) = \nu(B) - \pi(A^c \times Y) + \pi(A^c \times B^c) = \\ &= 1 - \mu(A^c) + \pi(A^c \times B^c) = 1. \end{aligned}$$

Da questo segue che $\varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y)$ per π -quasi ogni (x, y) e quindi

$$\begin{aligned} \mathbb{J}(\varphi, \psi) &= \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu = \int_{X \times Y} (\varphi(x) + \psi(y)) d\pi(x, y) \leq \\ &\leq \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y). \end{aligned}$$

Passando al sup su $(\varphi, \psi) \in \Phi_c$ al membro di sinistra e all'inf su $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ al membro di destra si ottiene $\sup_{(\varphi, \psi) \in \Phi_c} \mathbb{J}(\varphi, \psi) \leq \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{K}(\pi)$.

Viceversa, vogliamo dimostrare che

$$\sup_{(\varphi, \psi) \in \Phi_c} \mathbb{J}(\varphi, \psi) \geq \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{K}(\pi). \quad (1.15)$$

Completiamo la dimostrazione in tre step:

1. Supponiamo che X, Y siano compatti e che c sia continua;
2. Togliamo l'ipotesi di compattezza su X e Y ;
3. Supponiamo solo che c sia semi-continua inferiormente;

1. Il teorema di rappresentazione di Riesz-Markov-Kakutani (si guardi [1, Theorem 14.14]) ci dice che il duale topologico di $C_c(Z)$ è lo spazio delle misure di Radon su Z , $\mathcal{M}(Z)$, per ogni spazio di Hausdorff Z localmente compatto. Se Z è compatto allora $C_c(Z) = C_b(Z) = C(Z) \Rightarrow (C_b(Z))^* = \mathcal{M}(Z)$.

Consideriamo $E = C_b(X \times Y)$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Per ipotesi X e Y sono spazi polacchi compatti, quindi possiamo identificare il suo duale topologico con lo spazio delle misure di Radon $E^* = \mathcal{M}(X \times Y)$ su $X \times Y$, normato dalla variazione totale, [37, Chapter 6]. Inoltre, una forma lineare *non negativa* è definita da una misura di Borel regolare, non negativa.

Definiamo

$$\Theta(u) := \begin{cases} 0 & \text{se } u(x, y) \geq -c(x, y) \\ +\infty & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (1.16)$$

e

$$\Xi(u) := \begin{cases} \int_X \varphi(x) d\mu(x) + \int_Y \psi(y) d\nu(y) & \text{se } u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (1.17)$$

Notiamo che Ξ è ben definita: se $\varphi(x) + \psi(y) = \tilde{\varphi}(x) + \tilde{\psi}(y)$, $\forall x, y$, allora $\exists s \in \mathbb{R}$ t.c. $\varphi = \tilde{\varphi} + s$, $\psi = \tilde{\psi} - s$ e quindi

$$\int_X \tilde{\varphi}(x) d\mu(x) + \int_Y \tilde{\psi}(y) d\nu(y) = \int_X \varphi(x) d\mu(x) + \int_Y \psi(y) d\nu(y).$$

Proviamo che Θ e Ξ sono convesse.

Consideriamo u, v t.c. $\Theta(u), \Theta(v) < +\infty$, allora $u(x, y) \geq -c(x, y)$ e $v(x, y) \geq -c(x, y)$, quindi $tu(x, y) + (1-t)v(x, y) \geq -tc(x, y) - (1-t)c(x, y) = -c(x, y)$, $\forall t \in [0, 1]$. Segue che

$$\Theta(tu + (1-t)v) = 0 = t\Theta(u) + (1-t)\Theta(v).$$

Se, invece, $\Theta(u) = +\infty$ o $\Theta(v) = +\infty$ allora, ovviamente,

$$\Theta(tu + (1-t)v) \leq t\Theta(u) + (1-t)\Theta(v).$$

Quindi Θ è convessa.

Se $\Xi(u) = +\infty$ o $\Xi(v) = +\infty$ allora ovviamente

$$\Xi(tu + (1-t)v) \leq t\Xi(u) + (1-t)\Xi(v).$$

Supponiamo che $u(x, y) = \varphi_1(x) + \psi_1(y)$, $v(x, y) = \varphi_2(x) + \psi_2(y)$ allora

$$tu(x, y) + (1-t)v(x, y) = t\varphi_1(x) + (1-t)\varphi_2(x) + t\psi_1(y) + (1-t)\psi_2(y)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \Xi(tu + (1-t)v) &= \int_X (t\varphi_1 + (1-t)\varphi_2) d\mu + \int_Y (t\psi_1 + (1-t)\psi_2) d\nu = \\ &= t\Xi(u) + (1-t)\Xi(v). \end{aligned}$$

Quindi Ξ è convessa. Sia $u \equiv 1$ allora $\Theta(u), \Xi(u) < +\infty$ e Θ è continua in u . Dal teorema 1.3.3 segue che

$$\inf_{u \in E} (\Theta(u) + \Xi(u)) = \max_{\pi \in E^*} (-\Theta^*(-\pi) - \Xi^*(\pi)). \quad (1.18)$$

Osserviamo che, poiché $C_b(X) \times C_b(Y) \subset L^1(\mu) \times L^1(\nu)$, vale

$$\begin{aligned} \inf_{u \in E} (\Theta(u) + \Xi(u)) &\geq \inf_{\substack{\varphi + \psi \geq -c, \\ \varphi \in L^1(\mu), \psi \in L^1(\nu)}} \left(\int_X \varphi(x) d\mu(x) + \int_Y \psi(y) d\nu(y) \right) = \\ &= - \sup_{(\varphi, \psi) \in \Phi_c} \mathbb{J}(\varphi, \psi). \end{aligned}$$

Calcoliamo ora Θ^* e Ξ^* . Sia $\pi \in \mathcal{M}(X \times Y)$,

$$\begin{aligned} \Theta^*(-\pi) &= \sup_{u \in E} \left(- \int_{X \times Y} u d\pi - \Theta(u) \right) = \sup_{u \geq -c} \left(- \int_{X \times Y} u d\pi \right) = \\ &= \sup_{u \leq c} \int_{X \times Y} u d\pi. \end{aligned}$$

Allora

- Se π non è una misura non negativa, allora esiste $v \in C_b(X \times Y)$ non positiva tale che $\int_{X \times Y} v d\pi > 0$. Allora, scegliendo $u = \lambda v$, con $\lambda \rightarrow +\infty$, si può concludere che l'estremo superiore è $+\infty$.
- Se π è non negativa allora l'estremo superiore è $\int_{X \times Y} c d\pi$.

Quindi

$$\Theta^*(-\pi) = \begin{cases} \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi & \text{se } \pi \in \mathcal{M}_+(X \times Y) \\ +\infty & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $\mathcal{M}_+(X \times Y)$ è lo spazio delle misure di Radon.

Analogamente

$$\begin{aligned} \Xi^*(\pi) &= \sup_{u \in E} \left(\int_{X \times Y} u d\pi - \Xi(u) \right) = \\ &= \sup_{u = \varphi + \psi} \left(\int_{X \times Y} u d\pi - \int_X \varphi d\mu - \int_Y \psi d\nu \right) = \\ &= \sup_{u = \varphi + \psi} \left(\int_X \varphi d(P_{\#}^X \pi - \mu) + \int_Y \psi d(P_{\#}^Y \pi - \nu) \right) = \begin{cases} 0 & \text{se } \pi \in \Pi(\mu, \nu) \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \end{aligned}$$

In altre parole Θ^* e Ξ^* sono le funzioni indicatrici di $\mathcal{M}_+(X \times Y)$ e $\Pi(\mu, \nu)$ rispettivamente. Quindi il membro di destra di (1.18) diventa

$$\max_{\pi \in E^*} (-\Theta^*(-\pi) - \Xi^*(\pi)) = - \min_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi = - \min_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{K}(\pi)$$

Questo completa la dimostrazione della parte 1.

2. Questo step è il più tecnico. Togliamo l'ipotesi di compattezza di X e Y e manteniamo la continuità e la limitatezza di c . Definiamo

$$\|c\|_{\infty} = \sup_{X \times Y} c(x, y).$$

Vogliamo ricondurci al caso compatto. Prima di tutto, sia π_* un piano di trasporto ottimale, che esiste per il *teorema 1.2.1*. Poiché c è limitata, $\mathbb{K}(\pi_*)$ è finito.

Sia $\delta > 0$ arbitrariamente piccolo. Poiché X e Y sono spazi polacchi, anche

$X \times Y$ lo è. In particolare, π_* è tight, ed esistono $X_0 \subset X$, $Y_0 \subset Y$ compatti, tali che

$$\mu(X \setminus X_0) \leq \delta, \quad \nu(Y \setminus Y_0) \leq \delta.$$

Per quanto già visto nella dimostrazione del 1.2.1 vale

$$\pi_*((X \times Y) \times (X_0 \times Y_0)) \leq 2\delta$$

Definiamo

$$\pi_{*0} = \frac{\mathbb{I}_{X_0 \times Y_0}}{\pi_*(X_0 \times Y_0)} \pi_*;$$

notiamo che questa è una misura di probabilità su $X_0 \times Y_0$, e indichiamo con μ_0 e ν_0 le marginali di π_{*0} su X_0 e Y_0 rispettivamente. Definiamo, di conseguenza, $\Pi_0(\mu_0, \nu_0)$ come l'insieme delle misure di probabilità π_0 su $X_0 \times Y_0$, con marginali μ_0, ν_0 rispettivamente, e definiamo \mathbb{K}_0 su $\Pi_0(\mu_0, \nu_0)$ come

$$\mathbb{K}_0(\pi_0) = \int_{X_0 \times Y_0} c(x, y) d\pi_0(x, y).$$

Sia $\tilde{\pi}_0 \in \Pi_0(\mu_0, \nu_0)$ t.c.

$$\mathbb{K}_0(\tilde{\pi}_0) = \inf_{\pi_0 \in \Pi_0(\mu_0, \nu_0)} \mathbb{K}_0(\pi_0).$$

Costruiamo $\tilde{\pi} \in \Pi(\mu, \nu)$ a partire da $\tilde{\pi}_0$ e π_* :

$$\tilde{\pi} = \pi_*(X_0 \times Y_0) \tilde{\pi}_0 + \mathbb{I}_{(X_0 \times Y_0)^c} \pi_*.$$

Ora

$$\begin{aligned} \mathbb{K}(\tilde{\pi}) &= \pi_*(X_0 \times Y_0) \mathbb{K}_0(\tilde{\pi}_0) + \int_{(X_0 \times Y_0)^c} c(x, y) d\pi_*(x, y) \leq \\ &\leq \mathbb{K}_0(\tilde{\pi}_0) + 2\|c\|_\infty \delta = \inf \mathbb{K}_0 + 2\|c\|_\infty \delta. \end{aligned}$$

Segue che

$$\inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{K}(\pi) \leq \inf \mathbb{K}_0 + 2\|c\|_\infty \delta.$$

Introduciamo ora il funzionale

$$\mathbb{J}_0(\varphi_0, \psi_0) = \int_{X_0} \varphi_0 d\mu_0 + \int_{Y_0} \psi_0 d\nu_0,$$

definito su $L^1(\mu_0) \times L^1(\nu_0)$. Dalla dimostrazione della parte 1. sappiamo che $\inf \mathbb{K}_0 = \sup \mathbb{J}_0$, dove il sup è fatto su tutte le coppie ammissibili $(\varphi_0, \psi_0) \in L^1(\mu_0) \times L^1(\nu_0)$, i.e. che soddisfano $\varphi_0(x) + \psi_0(y) \leq c(x, y)$ per μ_0 -quasi ogni $x \in X_0$ e ν_0 -quasi ogni $y \in Y_0$. In particolare, esiste una coppia ammissibile $(\tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0)$ tale che

$$\mathbb{J}_0(\tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0) \geq \sup \mathbb{J}_0 - \delta.$$

Vogliamo costruire, a partire da $(\tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0)$, una coppia (φ, ψ) che sia un punto di massimo per \mathbb{J} .

Sarà utile osservare che la disuguaglianza $\tilde{\varphi}_0(x) + \tilde{\psi}_0(y) \leq c(x, y)$ è valida per ogni x, y . Possiamo garantire questo, a patto che consentiamo alle funzioni $\tilde{\varphi}_0$ e $\tilde{\psi}_0$ di prendere valori in $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Infatti, possiamo introdurre due insiemi N_x e N_y trascurabili, t.c. la disuguaglianza valga per ogni $(x, y) \in N_x^c \times N_y^c$, e ridefinire i valori di $\tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0$ su N_x e N_y rispettivamente, supponendo che siano $-\infty$.

Vogliamo controllare $\tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0$ dal basso in qualche punto di $X \times Y$. Senza perdita di generalità, possiamo assumere che $\delta \leq 1$. Poiché $\mathbb{J}_0(0, 0) = 0$, sappiamo che $\sup \mathbb{J}_0 \geq 0$, e quindi $\mathbb{J}_0(\tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0) \geq -\delta \geq -1$. Scrivendo

$$\mathbb{J}_0(\tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0) = \int_{X_0 \times Y_0} (\tilde{\varphi}_0(x) + \tilde{\psi}_0(y)) d\pi_0(x, y),$$

dove π_0 è un qualche elemento di $\Pi_0(\mu_0, \nu_0)$, deduciamo che esiste $(x_0, y_0) \in X_0 \times Y_0$, tale che

$$\tilde{\varphi}_0(x_0) + \tilde{\psi}_0(y_0) \geq -1.$$

Se rimpiazziamo $(\tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0) = (\tilde{\varphi}_0 + s, \tilde{\psi}_0 - s)$ per qualche numero reale s , non cambia il valore di $\mathbb{J}_0(\tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0)$ e la nuova coppia è ancora ammissibile. Possiamo scegliere s in modo che

$$\tilde{\varphi}_0(x_0) \geq -\frac{1}{2}, \quad \tilde{\psi}_0(y_0) \geq -\frac{1}{2}.$$

Questo implica che, per ogni $(x, y) \in X_0 \times Y_0$,

$$\tilde{\varphi}_0(x) \leq c(x, y_0) - \tilde{\psi}_0(y_0) \leq c(x, y_0) + \frac{1}{2},$$

$$\tilde{\psi}_0(y) \leq c(x_0, y) - \tilde{\varphi}_0(x_0) \leq c(x_0, y) + \frac{1}{2}.$$

A questo punto, definiamo, per $x \in X$,

$$\bar{\varphi}_0(x) = \inf_{y \in Y_0} (c(x, y) - \tilde{\psi}_0(y)).$$

Dalla disuguaglianza $\tilde{\varphi}_0(x) \leq c(x, y) - \tilde{\psi}_0(y)$ vediamo che $\tilde{\varphi}_0 \leq \bar{\varphi}_0$ su X_0 . Questo implica che $\mathbb{J}_0(\bar{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0) \geq \mathbb{J}_0(\tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0)$. Inoltre, per ogni $x \in X$ possiamo controllare $\bar{\varphi}_0(x)$ dal basso e dall'alto, in termini della funzione costo:

$$\bar{\varphi}_0(x) \geq \inf_{y \in Y_0} (c(x, y) - c(x_0, y)) - \frac{1}{2},$$

$$\bar{\varphi}_0(x) \leq c(x, y_0) - \tilde{\psi}_0(y_0) \leq c(x, y_0) + \frac{1}{2}.$$

Infine definiamo, per $y \in Y$,

$$\bar{\psi}_0(y) = \inf_{x \in X} (c(x, y) - \bar{\varphi}_0(x)).$$

$(\bar{\varphi}_0, \bar{\psi}_0) \in \Phi_c$. Osserviamo che vale $\mathbb{J}_0(\bar{\varphi}_0, \bar{\psi}_0) \geq \mathbb{J}_0(\bar{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0) \geq \mathbb{J}_0(\tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0)$. Inoltre, per ogni $y \in Y$,

$$\bar{\psi}_0(y) \geq \inf_{x \in X} (c(x, y) - c(x, y_0)) - \frac{1}{2},$$

$$\bar{\psi}_0(y) \leq c(x_0, y) - \bar{\varphi}_0(x_0) \leq c(x_0, y) - \tilde{\varphi}_0(x_0) \leq c(x_0, y) + \frac{1}{2}.$$

In particolare,

$$\bar{\varphi}_0(x) \geq -\|c\|_\infty - \frac{1}{2},$$

$$\bar{\psi}_0(y) \geq -\|c\|_\infty - \frac{1}{2}.$$

A questo punto

$$\begin{aligned} \mathbb{J}(\bar{\varphi}_0, \bar{\psi}_0) &= \int_X \bar{\varphi}_0 d\mu + \int_Y \bar{\psi}_0 d\nu = \int_{X \times Y} (\bar{\varphi}_0(x) + \bar{\psi}_0(y)) d\pi_*(x, y) = \\ &= \pi_*(X_0 \times Y_0) \int_{X_0 \times Y_0} (\bar{\varphi}_0(x) + \bar{\psi}_0(y)) d\pi_{*0}(x, y) + \\ &\quad + \int_{(X_0 \times Y_0)^c} (\bar{\varphi}_0(x) + \bar{\psi}_0(y)) d\pi_*(x, y) \geq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq (1 - 2\delta) \left(\int_{X_0} \bar{\varphi}_0 d\mu_0 + \int_{Y_0} \bar{\psi}_0 d\nu_0 \right) - (2\|c\|_\infty + 1)\pi_*((X_0 \times Y_0)^c) \geq \\
&\quad \geq (1 - 2\delta)\mathbb{J}_0(\bar{\varphi}_0, \bar{\psi}_0) - 2(2\|c\|_\infty + 1)\delta \geq \\
&\quad \geq (1 - 2\delta)\mathbb{J}_0(\tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0) - 2(2\|c\|_\infty + 1)\delta \geq \\
&\quad \geq (1 - 2\delta)(\inf \mathbb{K}_0 - \delta) - 2(2\|c\|_\infty + 1)\delta \geq \\
&\quad \geq (1 - 2\delta)(\inf \mathbb{K} - (2\|c\|_\infty + 1)\delta) - 2(2\|c\|_\infty + 1)\delta.
\end{aligned}$$

Poiché δ è arbitrariamente piccolo, possiamo concludere che $\sup \mathbb{J}(\varphi, \psi) \geq \inf \mathbb{K}$.

3. Proviamo ora il caso generale. Scriviamo $c = \sup c_n$, dove c_n è una successione non decrescente di funzioni costo non negative e continue. Rimpiazzando c_n con $\inf(c_n, n)$ si può assumere che ogni c_n sia limitato. Sia ora \mathbb{K}_n definito su $\Pi(\mu, \nu)$ da

$$\mathbb{K}_n(\pi) = \int_{X \times Y} c_n d\pi.$$

Da 2. sappiamo che

$$\inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{K}_n(\pi) = \sup_{(\varphi, \psi) \in \Phi_{c_n}} \mathbb{J}(\varphi, \psi). \quad (1.19)$$

Noi concluderemo la dimostrazione provando che

$$\inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{K}(\pi) = \sup_n \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{K}_n(\pi), \quad (1.20)$$

e che, per ogni n ,

$$\sup_{(\varphi, \psi) \in \Phi_{c_n}} \mathbb{J}(\varphi, \psi) \leq \sup_{(\varphi, \psi) \in \Phi_c} \mathbb{J}(\varphi, \psi). \quad (1.21)$$

Infatti da (1.19), (1.20) e (1.21) segue che

$$\inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{K}(\pi) \leq \sup_{(\varphi, \psi) \in \Phi_c} \mathbb{J}(\varphi, \psi),$$

e già sappiamo che la disuguaglianza inversa è sempre vera.

Poiché $c_n \leq c$ per costruzione, segue che Φ_{c_n} è un sottoinsieme di Φ_c su cui

\mathbb{J}_n coincide con \mathbb{J} , quindi (1.21) è banale.

Poiché \mathbb{K}_n è una successione non decrescente di funzionali, è ovvio che $\inf \mathbb{K}_n$ sia una successione non decrescente, limitata dall'alto da $\inf \mathbb{K}$. Quindi, dobbiamo provare solo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{K}_n(\pi) \geq \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{K}(\pi). \quad (1.22)$$

Dal teorema 1.2.1 sappiamo che $\exists \pi_n \in \Pi(\mu, \nu)$ t.c.

$$\inf \mathbb{K}_n = \int c_n d\pi_n.$$

Sempre per la compattezza di $\Pi(\mu, \nu)$, la successione $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, a meno di sottosuccessioni, a $\pi_* \in \Pi(\mu, \nu)$. Se $n \geq m$, si ha

$$\mathbb{K}_n(\pi_n) \geq \mathbb{K}_m(\pi_n).$$

Quindi, dalla continuità di \mathbb{K}_m ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{K}_n(\pi_n) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{K}_m(\pi_n) \geq \mathbb{K}_m(\pi_*).$$

Dalla convergenza monotona, $\mathbb{K}_m(\pi_*) \rightarrow \mathbb{K}(\pi_*)$, quando $m \rightarrow +\infty$, quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{K}_n(\pi_n) \geq \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbb{K}_m(\pi_*) = \mathbb{K}(\pi_*) \geq \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{K}(\pi),$$

che prova (1.22) e quindi completa la dimostrazione del teorema. \square

1.3.2 Esistenza di un Punto di Massimo per il Problema Duale

In questa sezione, vogliamo provare, sotto opportune ipotesi, l'esistenza di una soluzione per il problema duale (1.13). Per farlo abbiamo bisogno delle definizioni di *c-trasformate* e di due lemmi preliminari([49, Lemma2.10]).

Definizione 1.8. Siano X, Y spazi polacchi, $c : X \times Y \rightarrow [0, +\infty)$. Data $\varphi : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, definiamo le *c-traformate* di φ , che indichiamo con φ^c e φ^{cc} , nel modo seguente:

$$\varphi^c : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad \varphi^c(y) = \inf_{x \in X} (c(x, y) - \varphi(x)) \quad (1.23)$$

$$\varphi^{cc} : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad \varphi^{cc}(x) = \inf_{y \in Y} (c(x, y) - \varphi^c(y)) \quad (1.24)$$

Si osservi che se $Y = X^*$ e $c(x, y) = \langle y, x \rangle$, allora $(-\varphi)^c(-y) = \varphi^*(y)$, dove φ^* è la trasformata di Fenchel-Legendre di φ .

Lemma 1.3.5. *Siano X, Y spazi polacchi, $\mu \in \mathcal{P}(X)$, $\nu \in \mathcal{P}(Y)$. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ e $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \in \Phi_c$ abbiamo che $(\varphi, \psi) = (\tilde{\varphi}^{cc} - a, \tilde{\varphi}^c + a)$ soddisfa $\mathbb{J}(\varphi, \psi) \geq \mathbb{J}(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ e $\varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y)$ per μ -quasi ogni $x \in X$ e per ν -quasi ogni $y \in Y$.*

Inoltre, se $\mathbb{J}(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) > -\infty$ e se esistono $c_X \in L^1(\mu)$ e $c_Y \in L^1(\nu)$ t.c. $\varphi \leq c_X$ e $\psi \leq c_Y$, allora $(\varphi, \psi) \in \Phi_c$.

Dimostrazione. Ovviamente $\mathbb{J}(\varphi - a, \psi + a) = \mathbb{J}(\varphi, \psi)$ per ogni $a \in \mathbb{R}$, $\varphi \in L^1(\mu)$ e $\psi \in L^1(\nu)$, quindi è sufficiente dimostrare che $\varphi = \tilde{\varphi}^{cc} \geq \tilde{\varphi}$, $\psi = \tilde{\varphi}^c \geq \tilde{\psi}$, $\varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y)$.

Notiamo che

$$\psi(y) = \inf_{x \in X} (c(x, y) - \tilde{\varphi}(x)) \geq \tilde{\psi}(y)$$

poiché, per ipotesi, $\tilde{\varphi}(x) + \tilde{\psi}(y) \leq c(x, y)$.

Notiamo, inoltre, che

$$\varphi(x) = \inf_{y \in Y} (c(x, y) - \tilde{\varphi}^c(y)) = \inf_{y \in Y} \sup_{z \in X} (c(x, y) - c(z, y) + \tilde{\varphi}(z)) \geq \tilde{\varphi}(x),$$

dove abbiamo considerato $z = x$.

Osserviamo che

$$\varphi(x) + \psi(y) = \inf_{z \in Y} (c(x, z) - \tilde{\varphi}^c(z) + \tilde{\varphi}^c(y)) \leq c(x, y),$$

scegliendo $z = y$.

Sia

$$M := \int_X c_X(x) d\mu(x) + \int_Y c_Y(y) d\nu(y) < +\infty. \quad (1.25)$$

Notiamo che

$$\int_X (\varphi(x) - c_X(x)) d\mu(x) + \int_Y (\psi(y) - c_Y(y)) d\nu(y) = \mathbb{J}(\varphi, \psi) - M \geq \mathbb{J}(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) - M$$

e poiché $\varphi - c_X \leq 0$, $\psi - c_Y \leq 0$ allora entrambi gli integrali al membro di sinistra sono negativi. In particolare

$$\|\varphi - c_X\|_{L^1(\mu)} + \|\psi - c_Y\|_{L^1(\nu)} = - \int_X (\varphi(x) - c_X(x)) d\mu(x) +$$

$$- \int_Y (\psi(y) - c_Y(y)) d\nu(y) \leq M - \mathbb{J}(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$$

Quindi $\varphi - c_X \in L^1(\mu)$, $\psi - c_Y \in L^1(\nu)$ da cui segue che $\varphi \in L^1(\mu)$ e $\psi \in L^1(\nu)$. \square

Lemma 1.3.6. *Siano X, Y spazi polacchi, $\mu \in \mathcal{P}(X)$, $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ e $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che $c(x, y) \leq c_X(x) + c_Y(y)$, con $c_X \in L^1(\mu)$ e $c_Y \in L^1(\nu)$. Allora esiste una successione $(\varphi_k, \psi_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \Phi_c$ tale che $\mathbb{J}(\varphi_k, \psi_k) \rightarrow \sup \Phi_c \mathbb{J}$ per cui valgono le stime*

$$\varphi_k(x) \leq c_X(x), \quad \forall x \in X, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\psi_k(y) \leq c_Y(y), \quad \forall y \in Y, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dimostrazione. Sia $(\tilde{\varphi}_k, \tilde{\psi}_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \Phi_c$ una successione massimizzante. Si noti che poiché $0 \leq \sup_{\Phi_c} \mathbb{J} \leq \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{J} \leq M < +\infty$, le funzioni $\tilde{\varphi}_k, \tilde{\psi}_k$ non sono uguali a ∞ ovunque. Sia $(\varphi_k, \psi_k) = (\tilde{\varphi}_k^{cc} - a_k, \tilde{\varphi}_k^c + a_k)$ dove scegliamo

$$a_k = \inf_{y \in Y} (c_Y(y) - \tilde{\varphi}_k^c(y)).$$

Se proviamo che $\varphi_k \leq c_X$ e $\psi_k \leq c_Y$, dal lemma precedente segue che $(\varphi_k, \psi_k) \in \Phi_c$ e che è una successione massimizzante. Cominciamo col provare che $a_k \in (-\infty, +\infty)$. Poiché $(\tilde{\varphi}_k, \tilde{\psi}_k) \in \Phi_c$ allora $\tilde{\varphi}_k(x) \leq c(x, y) - \tilde{\psi}_k(y)$, $\forall y \in Y$. Quindi esistono $y_0 \in Y$ e $b_0 \in \mathbb{R}$ (che può dipendere anche da k) tali che $\tilde{\varphi}_k(x) \leq c(x, y_0) + b_0$. Allora,

$$\tilde{\varphi}_k^c(y_0) = \inf_{x \in X} (c(x, y_0) - \tilde{\varphi}_k(x)) \geq -b_0.$$

Quindi,

$$a_k \leq c_Y(y_0) - \tilde{\varphi}_k^c(y_0) \leq c_Y(y_0) + b_0 < +\infty.$$

Osserviamo che vale anche

$$\begin{aligned} c_Y(y) - \tilde{\varphi}_k^c(y) &= \sup_{x \in X} (c_Y(y) - c(x, y) + \tilde{\varphi}_k(x)) \geq \sup_{x \in X} (\tilde{\varphi}_k(x) - c_X(x)) \geq \\ &\geq \tilde{\varphi}_k(x_0) - c_X(x_0), \end{aligned}$$

per ogni $x_0 \in X$. Quindi

$$a_k \geq \tilde{\varphi}_k(x_0) - c_X(x_0) > -\infty.$$

Abbiamo provato che $a_k \in (-\infty, +\infty)$ e quindi che la coppia di funzioni (φ_k, ψ_k) è ben definita, per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Ovviamente $\psi_k(y) = \tilde{\varphi}_k^c(y) + a_k \leq c_Y(y)$. E,

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) - c_X(x) &= \inf_{y \in Y} (c(x, y) - \tilde{\varphi}_k^c(y) - a_k - c_X(x)) \leq \\ &\leq \inf_{y \in Y} (c_Y(y) - \tilde{\varphi}_k^c(y) - a_k) = 0, \end{aligned}$$

per definizione di a_k .

□

Con l'aiuto del lemma precedente possiamo provare l'esistenza di un punto di massimo per il problema duale [49, Theorem 2.9].

Teorema 1.3.7. *Siano X, Y spazi polacchi, $\mu \in \mathcal{P}(X)$, $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ e $c : X \times Y \rightarrow [0, +\infty)$. Supponiamo che esistano $c_X \in L^1(\mu)$, $c_Y \in L^1(\nu)$ tali che $c(x, y) \leq c_X(x) + c_Y(y)$ per μ -quasi ogni $x \in X$ e per ν -quasi ogni $y \in Y$. Allora esistono $(\varphi, \psi) \in \Phi_c$ tali che*

$$\sup_{\Phi_c} \mathbb{J} = \mathbb{J}(\varphi, \psi).$$

Inoltre possiamo scegliere $(\varphi, \psi) = (\eta, \eta^c)$ per qualche $\eta \in L^1(\mu)$ tale che $\eta = \eta^{cc}$ (una funzione di questo tipo si dice c -concava).

Osservazione 3. In particolare, se $X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$, e consideriamo $c(x, y) = |x - y|^p$ allora $c(x, y) \leq C(|x|^p + |y|^p)$. Supponiamo che

$$\int_X |x|^p d\mu(x) < +\infty$$

e

$$\int_Y |y|^p d\nu(y) < +\infty$$

allora possiamo prendere $C_X(x) := |x|^p \in L^1(\mu)$ e $c_Y(y) := |y|^p \in L^1(\nu)$. In questo caso diciamo che μ e ν hanno *p-esimo momento finito*.

Indichiamo con

$$\mathcal{P}_p(X) := \left\{ \mu \in \mathcal{P}(X) : \int_X |x|^p d\mu(x) < +\infty \right\}$$

lo spazio delle misure di probabilità su $X \subseteq \mathbb{R}^d$ con *p-esimo momento finito*. In particolare, se $p < q \Rightarrow \mathcal{P}_p(X) \subset \mathcal{P}_q(X)$ e se X è limitato, $\mathcal{P}_p(X) = \mathcal{P}(X)$.

Dimostrazione. Dalla dimostrazione del teorema della *dualità di Kantorovic*, sappiamo che

$$\sup_{(\varphi, \psi) \in \Phi_c} \mathbb{J}(\varphi, \psi) \leq \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{K}(\pi) \leq M < +\infty$$

(per la dimostrazione non è stata necessaria l'ipotesi di semi-continuità inferiore della funzione costo).

Sia $\{(\varphi_k, \psi_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \in \Phi_c$ una successione come nella tesi del lemma (1.3.6).

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ definiamo

$$\varphi_k^{(l)}(x) = \max\{\varphi_k(x) - c_X(x), -l\} + c_X(x) \quad (1.26)$$

$$\psi_k^{(l)}(y) = \max\{\psi_k(y) - c_Y(y), -l\} + c_Y(y) \quad (1.27)$$

Notiamo che $\varphi_k \leq \varphi_k^{(l)}$, $\psi_k \leq \psi_k^{(l)}$,

$$-l \leq \varphi_k^{(l)}(x) - c_X(x) \leq 0, \quad \forall x \in X, \forall k \in \mathbb{N}, \forall l \in \mathbb{N},$$

$$-l \leq \psi_k^{(l)}(y) - c_Y(y) \leq 0, \quad \forall y \in Y, \forall k \in \mathbb{N}, \forall l \in \mathbb{N},$$

$$\varphi_k^{(1)} \geq \varphi_k^{(2)} \geq \dots$$

$$\psi_k^{(1)} \geq \psi_k^{(2)} \geq \dots$$

e, infine,

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(l)}(x) + \psi_k^{(l)}(y) &\leq \max\{\varphi_k(x) - c_X(x) + \psi_k(y) - c_Y(y), -l\} + c_X(x) + c_Y(y) \leq \\ &\leq \max\{c(x, y) - c_X(x) - c_Y(y), -l\} + c_X(x) + c_Y(y). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Per ciascun l la successione $\{\varphi_k^{(l)} - c_X\}_{k \in \mathbb{N}}$ è limitata in $L^\infty(\mu)$ quindi $\overline{\{\varphi_k^{(l)} - c_X\}_{k \in \mathbb{N}}}$ è debolmente compatta in $L^p(\mu)$ per ogni $p \in (1, \infty)$ (per spazi di Banach riflessivi chiusura più limitatezza è equivalente alla compattezza debole). Scegliamo $p = 2$ allora, dopo aver estratto una sottosuccessione, $\varphi_k^{(l)} - c_X \xrightarrow{L^2(\mu)} \varphi^{(l)} - c_X \in L^1(\mu)$ (poiché $L^2(\mu) \subset L^1(\mu)$) per qualche $\varphi^{(l)} \in L^1(\mu)$. Inoltre, siccome la convergenza debole in $L^2(\mu)$ implica la convergenza debole in $L^1(\mu)$ allora abbiamo che $\varphi_k^{(l)} - c_X \xrightarrow{L^1(\mu)} \varphi^{(l)} - c_X$, e quindi $\varphi_k^{(l)} \xrightarrow{L^1(\mu)} \varphi^{(l)}$. Per diagonalizzazione si può estrarre una sottosuccessione di $k \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi_k^{(l)} \xrightarrow{L^1(\mu)} \varphi^{(l)}$ valga per ogni $l \in \mathbb{N}$. Nello stesso modo possiamo dimostrare che $\psi_k^{(l)} \xrightarrow{L^1(\nu)} \psi^{(l)} \in L^1(\nu)$ per ogni $l \in \mathbb{N}$. Poiché la convergenza debole preserva l'ordine abbiamo che

$$c_X \geq \varphi^{(1)} \geq \varphi^{(2)} \geq \dots$$

$$c_Y \geq \psi^{(1)} \geq \psi^{(2)} \geq \dots$$

Poiché, $\forall l \in \mathbb{N}$, le funzioni $\varphi^{(l)}$, $\psi^{(l)}$ sono limitate dall'alto da una funzione L^1 e decrescono monotonicamente al variare di $l \in \mathbb{N}$, possiamo usare il *teorema della convergenza monotona* per affermare che

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \int_X \varphi^{(l)}(x) d\mu(x) = \int_X \tilde{\varphi}(x) d\mu(x)$$

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \int_Y \psi^{(l)}(y) d\nu(y) = \int_Y \tilde{\psi}(y) d\nu(y),$$

dove $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$ sono i limiti puntuali di $\varphi^{(l)}$ e $\psi^{(l)}$:

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \varphi^{(l)}(x), \quad \tilde{\psi}(y) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \psi^{(l)}(y).$$

Proviamo che la coppia di funzioni $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ massimizza \mathbb{J} . Vogliamo provare che $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \in \Phi_c$ e che $\mathbb{J}(\varphi, \psi) \leq \mathbb{J}(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$, $\forall (\varphi, \psi) \in \Phi_c$.

Poiché

$$\sup_{\Phi_c} \mathbb{J} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{J}(\varphi_k, \psi_k) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{J}(\varphi_k^{(l)}, \psi_k^{(l)}) = \mathbb{J}(\varphi^{(l)}, \psi^{(l)}), \quad \forall l \in \mathbb{N}$$

allora

$$\mathbb{J}(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \mathbb{J}(\varphi^{(l)}, \psi^{(l)}) \geq \sup_{\Phi_c} \mathbb{J}.$$

Quindi $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ massimizza \mathbb{J} .

Prendendo $l \rightarrow +\infty$ in (1.28) segue che $\tilde{\varphi}(x) + \tilde{\psi}(y) \leq c(x, y)$. Ora l'integrabilità segue da

$$0 \geq \int_X (\tilde{\varphi}(x) - c_X(x)) d\mu(x) + \int_Y (\tilde{\psi}(y) - c_Y(y)) d\nu(y) \geq \sup_{\Phi_c} \mathbb{J} - M$$

dove M è stato definito in (1.25). In particolare, poiché $\tilde{\varphi} - c_X \leq 0$, $\tilde{\psi} - c_Y \leq 0$ allora segue che entrambi gli integrali sono finiti e $\tilde{\varphi} - c_X \in L^1(\mu)$, $\tilde{\psi} - c_Y \in L^1(\nu)$. Quindi $\tilde{\varphi} \in L^1(\mu)$ e $\tilde{\psi} \in L^1(\nu)$.

Dal lemma 1.3.5 sappiamo che $\forall a \in \mathbb{R}$ vale

$$\mathbb{J}(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \leq \mathbb{J}(\tilde{\varphi}^{cc} - a, \tilde{\varphi}^c + a) = \mathbb{J}(\tilde{\varphi}^{cc}, \tilde{\varphi}^c).$$

Dobbiamo solo provare che $(\tilde{\varphi}^{cc}, \tilde{\varphi}^c) \in L^1(\mu) \times L^1(\nu)$. Sia $a = \inf_{y \in Y} (c_Y(y) - \tilde{\varphi}^c(y))$ allora $a \in \mathbb{R}$ per lo stesso motivo per cui, nella dimostrazione del lemma precedente, $a_k \in \mathbb{R}$. Ovviamente $a + \tilde{\varphi}^c(y) \leq c_Y(y)$ e

$$\tilde{\varphi}^{cc}(x) - a = \inf_{y \in Y} (c(x, y) - \tilde{\varphi}^c(y) - a) \leq \inf_{y \in Y} (c_X(x) + c_Y(y) - \tilde{\varphi}^c(y) - a) \leq c_X(x).$$

Quindi, $(\tilde{\varphi}^{cc} - a, \tilde{\varphi}^c + a) \in L^1(\mu) \times L^1(\nu)$ per il lemma 1.3.5. Da questo segue banalmente che $(\tilde{\varphi}^{cc}, \tilde{\varphi}^c) \in L^1(\mu) \times L^1(\nu)$.

Applicando lo stesso ragionamento si dimostra che la coppia $(\tilde{\varphi}^{cccc}, \tilde{\varphi}^{ccc}) \in \Phi_c$ massimizza \mathbb{J} su Φ_c . Si dimostra che $\tilde{\varphi}^{cccc} = \tilde{\varphi}^{cc}$ e che $\tilde{\varphi}^{ccc} = \tilde{\varphi}^c$ e quindi la scelta $\eta = \tilde{\varphi}^{cc}$ completa la dimostrazione. \square

Capitolo 2

Esistenza di Mappe di Trasporto Ottimali

Provare l'esistenza di una mappa di trasporto T^\dagger , ottimale per il problema di Monge, è difficile a causa della non linearità del vincolo (1.1). L'obiettivo di questo capitolo è proprio quello di analizzare alcuni casi particolari, in cui esiste una mappa di trasporto ottimale.

Il capitolo è suddiviso in 4 sezioni: nelle prime due analizziamo il caso discreto e quello semi-discreto; la terza parla del trasporto ottimale unidimensionale; nell'ultima, la quarta, viene trattato il problema ottimale in \mathbb{R}^d con funzione costo quadratica. Questo è anche conosciuto, in letteratura, con il nome di *problema del trasporto ottimale in L^2* .

2.1 Caso Discreto

In questa sezione sviluppiamo l'esempio proposto in [49, Introduction].

Consideriamo una funzione costo generica e supponiamo che X e Y siano due spazi discreti, con lo stesso numero di punti, dove tutti i punti hanno la stessa massa. Su questi spazi consideriamo due misure di probabilità discrete

μ e ν : più precisamente, prendiamo

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta x_i \quad \text{su } X = \{x_i\}_{i=1}^n \quad e \quad \nu = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta y_j, \quad \text{su } Y = \{y_j\}_{j=1}^n.$$

Definiamo la mappa

$$T : X \longrightarrow Y, \quad \text{t.c. } x_i \longmapsto T(x_i) := y_{\sigma(i)},$$

dove $\sigma : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$ è una permutazione.

In questo caso l'insieme delle mappe di trasporto è non vuoto perché la mappa T , così definita, appartiene a tale insieme (soddisfa (1.1)) visto che tutti i punti hanno la stessa massa.

Osservazione 4. Indichiamo con B l'insieme delle *matrici bistocastiche* $n \times n$, i.e.

$$B := \left\{ \pi = (\pi_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n} : \forall i, j, \pi_{ij} \geq 0; \forall j, \sum_{i=1}^n \pi_{ij} = 1; \forall i, \sum_{j=1}^n \pi_{ij} = 1 \right\} \quad (2.1)$$

Chiaramente ogni misura $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ può essere rappresentata con una matrice bistocastica $n \times n$.

Con un abuso di notazioni possiamo dire che $\pi \in B \iff \frac{1}{n}\pi \in \Pi(\mu, \nu)$.

Data una funzione costo $c : X \times Y \longrightarrow [0, +\infty]$, indicando con $c_{ij} := c(x_i, y_j)$, il problema di Kantorovich consiste nel trovare

$$\inf_{\pi \in B} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n c_{ij} \pi_{ij} \right\} \quad (2.2)$$

Definizione 2.1. Siano M uno spazio di Banach, $B \subset M$ convesso e compatto, definiamo l'*insieme dei punti estremi*, che indichiamo con $\mathcal{E}(B)$, come l'insieme dei punti in B che non possono essere scritti come combinazione convessa non banale di punti di B . I.e. se $B \ni \pi = \sum_{i=1}^m \alpha_i \pi_i$, con $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$, $\pi_i \in B$, allora $\pi \in \mathcal{E}(B) \iff \alpha_i \in \{0, 1\}$, $\forall i$.

Richiamiamo un risultato per gli spazi euclidei conosciuto come *teorema di Minkowski-Carathéodory*, che è un caso particolare del *teorema di Choquet* per gli spazi Banach. Per maggiori dettagli si veda [14, Chapter 6].

Teorema 2.1.1 (di Minkowski-Carathéodory). [43, Theorem 8.11] Sia $B \subset \mathbb{R}^M$ un insieme non vuoto, convesso e compatto. Mettiamo su \mathbb{R}^M la metrica euclidea. Allora, per ogni $\tilde{\pi} \in B$ esiste una misura di probabilità η supportata su $\mathcal{E}(B)$ tale che per ogni funzione affine f

$$f(\tilde{\pi}) = \int f(\pi) d\eta(\pi)$$

Dimostrazione. Sia $d = \dim(B)$. È sufficiente dimostrare che esistono $\{a_i\}_{i=0}^d$ e $\{\pi^{(i)}\}_{i=0}^d$ tali che $\tilde{\pi} = \sum_{i=0}^d a_i \pi^{(i)}$, con $\sum_{i=0}^d a_i = 1$ e $\{\pi^{(i)}\}_{i=0}^d \subset \mathcal{E}(B)$.

Procediamo per induzione.

Il caso in cui $d = 0$ è banale poiché B è solo un punto.

Supponiamo che la tesi sia vera per tutti gli insiemi di dimensione al massimo $d - 1$. Scegliamo $\tilde{\pi} \in B$ e supponiamo che $\tilde{\pi} \notin \mathcal{E}(B)$. Scegliamo $\pi^{(0)} \in \mathcal{E}(B)$, prendiamo il segmento $[\pi^{(0)}, \tilde{\pi}]$ ed estendiamo fino a che questo non intersechi il bordo di B , i.e se θ parametrizza il segmento allora possiamo supporre che $\{\theta : (1 - \theta)\pi^{(0)} + \theta\tilde{\pi} \in B\} = [0, \alpha]$ per qualche $\alpha \geq 1$ (dove α esiste finito per la convessità e la compattezza di B). Sia $\xi = (1 - \alpha)\pi^{(0)} + \alpha\tilde{\pi}$ allora $\tilde{\pi} = (1 - \theta_0)\xi + \theta_0\pi^{(0)}$, dove $\theta_0 = 1 - \frac{1}{\alpha}$. Ora, poiché $\xi \in F$ per qualche faccia propria F di B ¹, allora per ipotesi induttiva, esiste $\{\pi^{(i)}\}_{i=1}^d$ t.c. $\xi = \sum_{i=1}^d \theta_i \pi^{(i)}$ con $\sum_{i=1}^d \theta_i = 1$. Quindi, $\tilde{\pi} = \sum_{i=1}^d (1 - \theta_0)\theta_i \pi^{(i)} + \theta_0\pi^{(0)}$. Poiché $(1 - \theta_0)\sum_{i=1}^d \theta_i + \theta_0 = 1$ allora $\tilde{\pi}$ è combinazione convessa di $\{\pi^{(i)}\}_{i=0}^d$. \square

Un altro risultato utile è il

Teorema 2.1.2 (di Birkhoff). Sia B l'insieme delle matrici bistocastiche $n \times n$, allora $\mathcal{E}(B)$ è l'insieme delle matrici di permutazione, i.e.

$$\mathcal{E}(B) = \left\{ \pi \in \{0, 1\}^{n \times n} : \forall j, \sum_{i=1}^n \pi_{ij} = 1; \forall i, \sum_{j=1}^n \pi_{ij} = 1 \right\}$$

¹Una faccia F di un insieme convesso B è un qualsiasi insieme con la proprietà che se $\pi^{(1)}, \pi^{(2)} \in B$, $t \in (0, 1)$ e $t\pi^{(1)} + (1 - t)\pi^{(2)} \in F$ allora $\pi^{(1)}, \pi^{(2)} \in F$. Una faccia propria di B è una faccia che ha dimensione al massimo $\dim(B) - 1$. Un risultato che usiamo ma che non dimostriamo è che il bordo di un insieme convesso è l'unione di tutte le sue facce proprie.

Dimostrazione. Cominciamo col dimostrare che ogni matrice di permutazione è un punto estremo.

Sia $\pi_{ij} = \delta_{j=\sigma(i)}$ dove σ è una permutazione. Supponiamo che $\pi \notin \mathcal{E}(B)$. Allora esistono $\pi^{(1)}, \pi^{(2)} \in B$, con $\pi^{(1)} \neq \pi \neq \pi^{(2)}$, e $t \in (0, 1)$ t.c. $\pi = t\pi^{(1)} + (1-t)\pi^{(2)}$. Sia ij t.c. $0 = \pi_{ij} \neq \pi_{ij}^{(1)}$, allora

$$0 = \pi_{ij} = t\pi_{ij}^{(1)} + (1-t)\pi_{ij}^{(2)} \implies \pi_{ij}^{(2)} = -\frac{\pi_{ij}^{(1)}}{1-t} < 0.$$

Questo contraddice $\pi_{ij}^{(2)} \geq 0$, quindi $\pi \in \mathcal{E}(B)$.

Ora proviamo che ogni $\pi \in \mathcal{E}(B)$ è una matrice di permutazione: dimostriamo prima che $\pi \in \mathcal{E}(B) \implies \pi_{ij} \in \{0, 1\}$ e poi che $\pi = \delta_{j=\sigma(i)}$, per una qualche permutazione σ .

Sia $\pi \in \mathcal{E}(B)$ e assumiamo che esista $i_1 j_1$ t.c. $\pi_{i_1 j_1} \in (0, 1)$. Poiché $\sum_{i=1}^n \pi_{ij_1} = 1$ allora esiste $i_2 \neq i_1$ t.c. $\pi_{i_2 j_1} \in (0, 1)$. Analogamente, poiché $\sum_{j=1}^n \pi_{i_2 j} = 1$, allora esiste $j_2 \neq j_1$ t.c. $\pi_{i_2 j_2} \in (0, 1)$. Continuando così fino a quando $i_m = i_1$ otteniamo due insiemi:

$$\mathcal{I} = \{i_k j_k : k \in \{1, \dots, m-1\}\} \quad e \quad \mathcal{I}^+ = \{i_{k+1} j_k : k \in \{1, \dots, m-1\}\}$$

con $i_{k+1} \neq i_k$ e $j_{k+1} \neq j_k$. Definiamo $\pi^{(\delta)}$ nel modo seguente:

$$\pi_{ij}^{(\delta)} \begin{cases} \pi_{i_k j_k} + \delta & \text{se } ij = i_k j_k \text{ per qualche } k \\ \pi_{i_{k+1} j_k} - \delta & \text{se } ij = i_{k+1} j_k \text{ per qualche } k \\ \pi_{ij} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora,

$$\sum_{i=1}^n \pi_{ij}^{(\delta)} = \sum_{i=1}^n \pi_{ij} + \delta |\{ij \in \mathcal{I} : i \in \{1, \dots, n\}\}| - \delta |\{ij \in \mathcal{I}^+ : i \in \{1, \dots, n\}\}|.$$

Ora se $ij \in \mathcal{I}$ allora esiste i' t.c. $i'j \in \mathcal{I}^+$, e allo stesso modo, se $ij \in \mathcal{I}^+$ allora esiste i' t.c. $i'j \in \mathcal{I}$. Quindi,

$$|\{ij \in \mathcal{I} : i \in \{1, \dots, n\}\}| = |\{ij \in \mathcal{I}^+ : i \in \{1, \dots, n\}\}|.$$

Da questo segue che $\sum_{i=1}^n \pi_{ij}^{(\delta)} = 1$ e analogamente $\sum_{j=1}^n \pi_{ij}^{(\delta)} = 1$.

Scelgo ora $\delta = \min\{\min\{\pi_{ij}, 1 - \pi_{ij}\} : ij \in \mathcal{I} \cup \mathcal{I}^+\} \in (0, 1)$. Definisco $\pi^{(1)} = \pi^{(-\delta)}$, $\pi^{(2)} = \pi^{(\delta)}$. Abbiamo che $\pi_{ij}^{(1)}, \pi_{ij}^{(2)} \geq 0$ e perciò $\pi^{(1)}, \pi^{(2)} \in B$, con $\pi^{(1)} \neq \pi^{(2)}$. Inoltre abbiamo che $\pi = \frac{1}{2}\pi^{(1)} + \frac{1}{2}\pi^{(2)}$. Quindi $\pi \notin \mathcal{E}(B)$ e questa è una contraddizione. Allora non esiste $i_1 j_1$ t.c. $\pi_{i_1 j_1} \in (0, 1)$.

Abbiamo provato che se $\pi \in \mathcal{E}(B)$ allora $\pi_{ij} \in \{0, 1\}$.

Poiché $\pi \in B$ allora $\forall i$ esiste j^* t.c. $\pi_{ij^*} = 1$ (altrimenti $\sum_{j=1}^n \pi_{ij} \neq 1$). Poniamo $\sigma(i) := j^*$ per ogni i , quindi per costruzione $\pi_{i\sigma(i)} = 1$. Proviamo che σ è una permutazione. È sufficiente provare che σ è iniettiva. Ora se $j = \sigma(i_1) = \sigma(i_2)$, con $i_1 \neq i_2$, allora

$$1 = \sum_{i=1}^n \pi_{ij} \geq \pi_{i_1 j} + \pi_{i_2 j} = 2.$$

Questa è contraddizione implica che $i_1 = i_2$ e quindi σ è una iniettiva. \square

Proviamo ora l'esistenza di una mappa di trasporto ottimale tra le due misure discrete $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$ e $\nu = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{y_j}$.

Teorema 2.1.3. *Siano $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$ e $\nu = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{y_j}$ e supponiamo che $x_i \neq x_j, \forall i \neq j$. Allora, data una funzione costo $c : \{x_i\}_{i=1}^n \times \{y_j\}_{j=1}^n \rightarrow \mathbb{R}$, esiste una soluzione del problema del trasporto ottimale di Monge e vale*

$$\min_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{K}(\pi) = \min_{T: T\# \mu = \nu} \mathbb{M}(T).$$

Dimostrazione. Come detto nell'osservazione 4, posto $c_{ij} := c(x_i, y_j)$ e indicato con B l'insieme delle matrici bistocastiche $n \times n$, il problema di Kantorovich diventa

$$\text{minimizzare } \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n c_{ij} \pi_{ij}$$

su $\pi \in B$.

Sia M il minimo del problema del trasporto ottimale di Kantorovich, sia $\varepsilon > 0$, troviamo un punto di minimo approssimato $\pi^\varepsilon \in B$ t.c.

$$M \geq \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n c_{ij} \pi_{ij}^\varepsilon - \varepsilon.$$

Se consideriamo $f(\pi) = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n c_{ij} \pi_{ij}$ e supponiamo che B sia compatto e convesso allora esiste una misura η supportata su $\mathcal{E}(B)$ t.c.

$$f(\pi^\varepsilon) = \int f(\pi) d\eta(\pi).$$

Quindi

$$M \geq \int \left(\frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n c_{ij} \pi_{ij} \right) - \varepsilon \geq \inf_{\pi \in \mathcal{E}(B)} \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n c_{ij} \pi_{ij} - \varepsilon \geq M - \varepsilon.$$

Poiché questo è vero per ogni ε segue che $\inf_{\pi \in \mathcal{E}(B)} \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n c_{ij} \pi_{ij} = M$. Poiché $\mathcal{E}(B)$ è finito ($\#\{\pi \in \mathcal{E}(B)\} \leq n!$) allora esiste $\tilde{\pi} \in \mathcal{E}(B)$ che minimizza f , i.e. $\frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n c_{ij} \tilde{\pi}_{ij} = M$. Poiché $\min_{\pi \in \mathcal{E}(B)} \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n c_{ij} \pi_{ij} = \min_{\pi \in B} \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n c_{ij} \pi_{ij}$ abbiamo provato l'esistenza di una soluzione del problema del trasporto ottimale di Kantorovich.

Dal teorema di Birkhoff segue che $\tilde{\pi}$ è una matrice di permutazione, quindi esiste una permutazione $\tilde{\sigma} : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ t.c. $\tilde{\pi}_{ij} = \delta_{j=\tilde{\sigma}(i)}$. Sia $\tilde{T} : X \rightarrow Y$ definita da $\tilde{T}(x_i) = y_{\tilde{\sigma}(i)}$. Poiché, per ipotesi, $x_i \neq x_j, \forall i \neq j$ allora la mappa \tilde{T} è ben definita.

Abbiamo visto, all'inizio di questa sezione, che l'insieme delle mappe di trasporto è non vuoto. Sia T una qualsiasi mappa di trasporto e definiamo $\pi_{ij} = \delta_{y_j=T(x_i)} \Rightarrow \pi \in B$, quindi

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(T) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c(x_i, T(x_i)) = \frac{1}{n} \sum_{ij} c_{ij} \pi_{ij} \geq \frac{1}{n} \sum_{ij} c_{ij} \tilde{\pi}_{ij} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c(x_i, \tilde{T}(x_i)) = \mathbb{M}(\tilde{T}). \end{aligned}$$

Quindi \tilde{T} è una soluzione del problema del trasporto ottimale di Monge. Ovviamente, poiché le mappe di trasporto sono al massimo $n!$, segue che \tilde{T} è un punto di minimo per \mathbb{M} .

Ci resta da provare che B è compatto e convesso. Per dimostrare la compattezza consideriamo la norma ℓ^1 : $\|\pi\|_1 := \sum_{ij} |\pi_{ij}|$ (negli spazi finito dimensionali tutte le norme sono equivalenti). Chiaramente B è limitato perché

$\forall \pi \in B$ si ha che $\|\pi\|_1 = 1$. Per la chiusura, consideriamo una successione $\pi^{(m)} \in B$ t.c. $\pi^{(m)} \rightarrow \pi$. Banalmente $\pi_{ij}^{(m)} \rightarrow \pi_{ij}$, $\forall ij$, quindi $\pi_{ij} \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n \pi_{ij} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \pi_{ij}^{(m)} = 1$, quindi anche $\sum_{j=1}^n \pi_{ij} = 1$. Quindi $\pi \in B$ e B è chiuso. Quindi B è compatto.

Per la convessità, siano $\pi^{(1)}, \pi^{(2)} \in B$ e $\pi = t\pi^{(1)} + (1-t)\pi^{(2)}$, con $t \in [0, 1]$ allora ovviamente $\pi_{ij} \geq 0$,

$$\sum_{i=1}^n \pi_{ij} = t \sum_{i=1}^n \pi_{ij}^{(1)} + (1-t) \sum_{i=1}^n \pi_{ij}^{(2)} = t + (1-t) = 1,$$

e, allo stesso modo, $\sum_{j=1}^n \pi_{ij} = 1$. Quindi $\pi \in B$ e B è convesso. \square

2.2 Caso Semi-Discreto

In questa sezione assumiamo che $X = Y = \mathbb{R}^d$, $c(x, y) = |x - y|^2$ e $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ della forma sia

$$\nu = \sum_{j=1}^n m_j \delta_{y_j}, \quad (2.3)$$

per un insieme di punti $\{y_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}^d$ e un insieme di pesi $\{m_j\} \subset [0, 1]$ tali che $\sum_{j=1}^n m_j = 1$.

Introduciamo la definizione di *diagramma di Laguerre* e un lemma che useremo per provare l'esistenza di una mappa di trasporto ottimale tra una misura $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue su \mathbb{R}^d e una misura ν della forma (2.3).

Definizione 2.2. Dato un insieme di punti un insieme di punti $\{y_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}^d$ e un insieme di pesi $\{w_j\}$, il diagramma di Laguerre è la collezione degli insiemi

$$L_j = \{x \in \mathbb{R}^d : |x - y_j|^2 - w_j < |x - y_i|^2 - w_i, \forall i = 1, \dots, n\},$$

per $j = 1, \dots, n$.

Ovviamente, se $w_j = 0$, $\forall j$, allora il diagramma di Laguerre coincide con il *diagramma di Voronoi*.

Osservazione 5. Si noti che L_j è aperto, $\forall j = 1, \dots, n$.

Lemma 2.2.1. *Siano $\rho \in L^1(\mathbb{R}^d)$ non negativa e t.c. $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x) dx = 1$, $\{y_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}^d$, $\{m_j\} \subset [0, 1]$ tali che $\sum_{j=1}^n m_j = 1$. Definiamo la funzione $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$*

$$g(w_1, \dots, w_n) := \int_{\mathbb{R}^d} \inf_j [|x - y_j|^2 - w_j] \rho(x) dx + \sum_{j=1}^n w_j m_j. \quad (2.4)$$

Allora,

1. g è concava;

2.

$$\frac{\partial g}{\partial w_i}(W) = - \int_{L_i(W)} \rho(x) dx + m_i,$$

dove $L_1(W), \dots, L^n(W)$ sono le celle di Laguerre corrispondenti a $W = (w_1, \dots, w_n)$.

Dimostrazione. 1. Sia $\gamma : \mathbb{R}^d \rightarrow \{1, \dots, n\}$ una qualsiasi partizione di \mathbb{R}^d , $\gamma^{-1}(j) = \{x \in \mathbb{R}^d : \gamma(x) = j\}$. Definiamo

$$G(\gamma, W) = \int_{\mathbb{R}^d} (|x - y_{\gamma(x)}|^2 - w_{\gamma(x)}) \rho(x) dx + \sum_{j=1}^n w_j m_j.$$

Poiché γ è una partizione

$$\begin{aligned} G(\gamma, W) &= \sum_{j=1}^n \left(\int_{\gamma^{-1}(j)} (|x - y_j|^2 - w_j) \rho(x) dx + w_j m_j \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{\gamma^{-1}(j)} |x - y_j|^2 \rho(x) dx + \sum_{j=1}^n w_j \left(m_j - \int_{\gamma^{-1}(j)} \rho(x) dx \right). \end{aligned}$$

Per ogni γ , G è una funzione affine di W , e quindi

$$W \mapsto G(\gamma, W)$$

è concava.

Poiché

$$g(W) = \inf_{\gamma} G(\gamma, W)$$

segue che anche g è concava.

2. Sia $\alpha_j(x, W) := \chi_{L_j(W)}(x)(|x - y_j|^2 - w_j)\rho(x)$, quindi

$$g(W) = \sum_{j=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_j(x, W) dx + w_j m_j \right).$$

Poiché L_j è aperto, $\forall x \in L_j(W)$, $\exists t > 0$, sufficientemente piccolo, t.c. $\chi_{L_j(W+te_i)}(x) = \chi_{L_j(W)}(x)$, dove e_i è l' i -esimo elemento della base canonica di \mathbb{R}^n . Inoltre,

$$\frac{1}{t}(\alpha_j(x, W + te_i) - \alpha_j(x, W)) = -\chi_{L_j(W)}(x)\delta_{i,j}\rho(x).$$

Quindi,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial w_i}(W) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t}(g(W + te_i) - g(W)) = \\ &= \sum_{j=1}^n \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{t}(\alpha_j(x, W + te_i) - \alpha_j(x, W)) dx + (w_j + \delta_{i,j}t)m_j - w_j m_j \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(- \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{L_j(W)}(x)\delta_{i,j}\rho(x) dx + \delta_{i,j}m_j \right) = - \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{L_i(W)}(x)\rho(x) dx + m_i. \end{aligned}$$

□

Adesso mostriamo che per ogni misura $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$, assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue, esiste una mappa di trasporto ottimale tra μ e ν che definisce un diagramma di Laguerre (fino al bordo delle celle L_j). Inoltre possiamo trovare i pesi $\{w_j\}_{j=1}^n$ come soluzione del problema variazionale concavo:

$$\text{massimizzare } g(W) \text{ su } W = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$$

dove g è la funzione definita in (2.4) e ρ è la densità di μ .

Teorema 2.2.2. *Siano $\{y_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}^d$, $\{m_j\}_{j=1}^n \subset [0, 1]$ con $\sum_{j=1}^n m_j = 1$, $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ e definiamo $\nu = \sum_{j=1}^n m_j \delta_{y_j}$. Supponiamo che $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ abbia densità ρ rispetto alla misura di Lebesgue su \mathbb{R}^d . Definiamo g come in (2.4) e supponiamo che (w_1, \dots, w_n) massimizzi g . Sia $\{L_j\}_{j=1}^n$ il diagramma di*

Laguerre associato a $\{(y_j, w_j)\}_{j=1}^n$. Definiamo $T(x) := y_j$ se $x \in L_j$ (che definisce T μ -quasi ovunque), $\psi(y_j) = w_j$ e $\varphi(x) = \inf_j(|x - y_j|^2 - w_j)$. Allora,

1. T è soluzione del problema del trasporto ottimale di Monge con costo $c(x, y) = |x - y|^2$;
2. (φ, ψ) è soluzione del problema duale con costo $c(x, y) = |x - y|^2$.

Dimostrazione. Proviamo come prima cosa che $\varphi \in L^1(\mu)$.

Infatti,

$$-\sup_j w_j \leq \varphi(x) \leq |x - y_1|^2 - w_1$$

e quindi $|\varphi(x)| \leq 2|x|^2 + C$, con $C = 2|y_1|^2 - w_1 + \sup_j w_j$. Quindi $\|\varphi\|_{L^1(\mu)} \leq 2 \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 d\mu(x) + C < +\infty$.

Osserviamo che

$$\int_{L_j} \rho(x) dx = m_j.$$

Infatti, poiché se $W = (w_1, \dots, w_n)$ è un punto di massimo per g allora $\frac{\partial g}{\partial w_j}(W) = 0$, $\forall j = 1, \dots, n$, e dal *lemma 2.2.1* segue che

$$-\int_{L_j(W)} \rho(x) dx + m_j = 0$$

e quindi

$$\int_{L_j(W)} \rho(x) dx = m_j.$$

Da questo segue che $\forall i = 1, \dots, n$ vale

$$\mu(T^{-1}(y_i)) = \mu(\{x : T(x) = y_i\}) = \mu(L_i) = m_i.$$

Quindi $T_{\#}\mu = \nu$.

Osserviamo che

$$\varphi(x) + \psi(y_i) = \inf_j (|x - y_j|^2 - w_j + w_i) \leq |x - y_i|^2$$

quindi $(\varphi, \psi) \in \Phi_c$ con $c(x, y) = |x - y|^2$. A questo punto, da (1.7), dal teorema 1.3.4 e da quanto appena visto, segue che

$$\mathbb{M}(T) \geq \inf_{\tilde{T}: \tilde{T}_\# \mu = \nu} \mathbb{M}(\tilde{T}) \geq \min_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{K}(\pi) = \sup_{(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \in \Phi_c} \mathbb{J}(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \geq \mathbb{J}(\varphi, \psi). \quad (2.5)$$

Calcoliamo ora $\mathbb{J}(\varphi, \psi)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{J}(\varphi, \psi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \rho(x) dx + \sum_{j=1}^n m_j \psi(y_j) = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\int_{L_j} \varphi(x) \rho(x) dx + m_j \psi(y_j) \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\int_{L_j} (|x - y_j|^2 - w_j) \rho(x) dx + m_j w_j \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{L_j} |x - y_j|^2 \rho(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} |x - T(x)|^2 \rho(x) dx = \mathbb{M}(T). \end{aligned}$$

Quindi tutte le disuguaglianze in (2.5) sono uguaglianze. \square

2.3 Trasporto Ottimale in \mathbb{R}

In questa sezione supponiamo che $X = Y = \mathbb{R}$, munito della metrica Euclidea. Consideriamo due misure $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, con *funzioni di ripartizione* F, G rispettivamente.

Ricordiamo che, data $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, la sua funzione di ripartizione

$$F(x) = \int_{-\infty}^x d\mu = \mu((-\infty, x])$$

gode delle seguenti proprietà:

1. F è non decrescente;
2. F è continua a destra, ossia vale

$$F(x) = \lim_{y \rightarrow x^+} F(y);$$

3. $\lim_{n \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

Definiamo $F^{-1} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $F^{-1}(t) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\}$.

Se F è invertibile allora $F^{-1}(F(x)) = x$ e $F(F^{-1}(t)) = t$.

Il risultato principale di questa sezione è il seguente:

Teorema 2.3.1. *Siano $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ con funzioni di ripartizione F e G rispettivamente. Supponiamo che $c(x, y) = d(x - y)$ con $d : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ è convessa e continua.*

Sia $\tilde{\pi}$ la misura su \mathbb{R}^2 con funzione di ripartizione $H(x, y) = \min\{F(x), G(y)\}$ allora $\tilde{\pi} \in \Pi(\mu, \nu)$ ed è una soluzione del problema di Kantorovich con funzione costo c . In questo caso, il costo del trasporto ottimale è

$$\min_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{K}(\pi) = \int_0^1 d(F^{-1}(t) - G^{-1}(t)) dt.$$

Inoltre,

1. *Se $c(x, y) = |x - y|$ allora il costo del trasporto ottimale è la distanza in L^1 fra le funzioni di ripartizione, i.e.*

$$\inf_{\pi \in \Pi} \mathbb{K}(\pi) = \int_{\mathbb{R}} |F(x) - G(x)| dx.$$

2. *Se F è continua allora*

$$\min_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{K}(\pi) = \min_{\{T: T_{\#}\mu = \nu\}} \mathbb{M}(T)$$

e inoltre $\tilde{T} := G^{-1} \circ F$ è un punto di minimo per il problema di Monge, i.e. $\tilde{T}_{\#}\mu = \nu$ e

$$\inf_{\{T: T_{\#}\mu = \nu\}} \mathbb{M}(T) = \mathbb{M}(\tilde{T}).$$

Proposizione 2.3.2. *Siano $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\tilde{\pi} \in \Pi(\mu, \nu)$ piano di trasporto ottimale per la funzione costo $c(x, y) = d(x - y)$, con d continua. Allora $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \text{supp}(\tilde{\pi})$ vale*

$$d(x_1 - y_1) + d(x_2 - y_2) \leq d(x_1 - y_2) + d(x_2 - y_1).$$

Osservazione 6. In questo caso si dice che $\text{supp}(\tilde{\pi})$ è *monotono* (rispetto a d). Questa nozione può essere usata, in dimensione più alta, per provare risultati analoghi al *teorema 2.3.1*. Come vedremo, anche il sottodifferenziale di una funzione convessa soddisfa una certa proprietà di monotonicità.

Dimostrazione. Indichiamo con $\Gamma = \text{supp}(\tilde{\pi})$ e consideriamo $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Gamma$. Supponiamo che esista $\eta > 0$ t.c.

$$d(x_1 - y_1) + d(x_2 - y_2) - d(x_1 - y_2) + d(x_2 - y_1) \geq \eta.$$

Siano I_1, I_2, J_1, J_2 intervalli chiusi t.c.:

1. $x_i \in I_i, y_i \in J_i, i = 1, 2$;
2. $|d(x - y) - d(x_i - y_j)| \leq \varepsilon$ per $x \in I_i, y \in J_j, i, j = 1, 2$, dove $\varepsilon < \frac{\eta}{4}$;
3. $I_i \times J_j$ sono disgiunti;
4. $\tilde{\pi}(I_1 \times J_1) = \tilde{\pi}(I_2 \times J_2) = \delta > 0$.

Le proprietà 1 – 3 sono soddisfatte a patto di prendere I_i, J_j sufficientemente piccoli. Potrebbe non essere soddisfatta la proprietà 4, tuttavia, poiché $(x_i, y_i) \in \Gamma$, possiamo trovare I_i, J_j che soddisfano 1 – 3 e tali che $\tilde{\pi}(I_1 \times J_1) > 0$ e $\tilde{\pi}(I_2 \times J_2) > 0$. Per comodità supponiamo inizialmente che $\tilde{\pi}(I_1 \times J_1) = \tilde{\pi}(I_2 \times J_2)$. Successivamente toglieremo questa ipotesi e riadatteremo la dimostrazione.

L'idea della dimostrazione è quella di trasferire la massa da x_1 a y_2 e da x_2 a y_1 anziché da x_1 a y_1 e da x_2 a y_2 .

Siano

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_1 &= P_{\#}^X \tilde{\pi}|_{I_1 \times J_1}, & \bar{\mu}_2 &= P_{\#}^X \tilde{\pi}|_{I_2 \times J_2}, \\ \bar{\nu}_1 &= P_{\#}^Y \tilde{\pi}|_{I_1 \times J_1}, & \bar{\nu}_2 &= P_{\#}^Y \tilde{\pi}|_{I_2 \times J_2}. \end{aligned}$$

Scegliamo $\bar{\pi}_{12} \in \Pi(\bar{\mu}_1, \bar{\nu}_2), \bar{\pi}_{21} \in \Pi(\bar{\mu}_2, \bar{\nu}_1)$ qualsiasi.

Definiamo $\bar{\pi}$ t.c.

$$\bar{\pi}(A \times B) = \begin{cases} \tilde{\pi}(A \times B) & \text{se } (A \times B) \cap (I_i \times J_j) = \emptyset, \forall i, j \\ 0 & \text{se } A \times B \subseteq I_i \times J_i, \text{ per qualche } i \\ \tilde{\pi}(A \times B) + \bar{\pi}_{12}(A \times B) & \text{se } A \times B \subseteq I_1 \times J_2 \\ \tilde{\pi}(A \times B) + \bar{\pi}_{21}(A \times B) & \text{se } A \times B \subseteq I_2 \times J_1 \end{cases}$$

Per insiemi $(A \times B) \cap (I_i \times J_j) \neq \emptyset$ ma $A \times B \not\subseteq I_i \times J_j$ definiamo $\bar{\pi}(A \times B)$ come

$$\bar{\pi}(A \times B) = \bar{\pi}((A \times B) \cap (I_i \times J_j)) + \bar{\pi}((A \times B) \cap (I_i \times J_j)^c).$$

Per costruzione, per $B \cap (J_1 \cup J_2) = \emptyset$,

$$\bar{\pi}(\mathbb{R} \times B) = \tilde{\pi}(\mathbb{R} \times B) = \nu(B).$$

Se $B \subseteq J_1$ allora

$$\begin{aligned} \bar{\pi}(\mathbb{R} \times B) &= \bar{\pi}((\mathbb{R} \setminus (I_1 \cup I_2)) \times B) + \bar{\pi}(I_1 \times B) + \bar{\pi}(I_2 \times B) = \\ &= \tilde{\pi}((\mathbb{R} \setminus (I_1 \cup I_2)) \times B) + 0 + \tilde{\pi}(I_2 \times B) + \bar{\pi}_{21}(I_2 \times B) = \\ &= \tilde{\pi}((\mathbb{R} \setminus I_1) \times B) + \tilde{\pi}(I_1 \times B) = \tilde{\pi}(\mathbb{R} \times B) = \nu(B) \end{aligned}$$

poiché $\bar{\pi}_{21}(I_2 \times B) = \bar{\nu}_1(B) = \tilde{\pi}(I_1 \times (B \cap J_1)) = \tilde{\pi}(I_1 \times B)$.

Vale lo stesso per $B \subseteq J_2$. Quindi segue che $\bar{\pi}(\mathbb{R} \times B) = \nu(B)$ per ogni insieme misurabile B . Analogamente $\bar{\pi}(A \times \mathbb{R}) = \mu(A)$ per ogni insieme misurabile A . Quindi $\bar{\pi} \in \Pi(\mu, \nu)$.

Ora,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} d(x-y) d\tilde{\pi}(x, y) - \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} d(x-y) d\bar{\pi}(x, y) = \\ &= \int_{(I_1 \times J_1) \cup (I_2 \times J_2)} d(x-y) d\tilde{\pi}(x, y) + \\ &- \int_{I_1 \times J_2} d(x-y) d\bar{\pi}_{12}(x, y) - \int_{I_2 \times J_1} d(x-y) d\bar{\pi}_{21}(x, y) \geq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \delta(d(x_1 - y_1) - \varepsilon) + \delta(d(x_2 - y_2) - \varepsilon) - \delta(d(x_1 - y_2) - \varepsilon) + \\ &\quad - \delta(d(x_2 - y_1) + \varepsilon) \geq \delta(\eta - 4\varepsilon) > 0 \end{aligned}$$

poiché $\bar{\pi}_{12}(I_1 \times J_2) = \bar{\mu}_1(I_1) = \tilde{\pi}(I_1 \times J_1) = \delta$, e allo stesso modo $\bar{\pi}_{21}(I_2 \times J_1) = \delta$. Questo vuol dire che $\tilde{\pi}$ non è ottimale che è una contraddizione. Quindi non può esistere un tale η .

Infine supponiamo che $\tilde{\pi}(I_1 \times J_1) > \tilde{\pi}(I_2 \times J_2)$ è necessario riadattare il piano $\bar{\pi}$ che abbiamo costruito. In particolare supponiamo che

$$\bar{\pi}(A \times B) = \tilde{\pi}(A \times B) \left(1 - \frac{\tilde{\pi}(I_2 \times J_2)}{\tilde{\pi}(I_1 \times J_1)} \right)$$

se $A \times B \subset I_1 \times J_1$, e $\bar{\mu}_1, \bar{\nu}_1$ vengono riscalate:

$$\bar{\mu}_1 = \frac{\tilde{\pi}(I_2 \times J_2)}{\tilde{\pi}(I_1 \times J_1)} P_{\#}^X \tilde{\pi}|_{I_1 \times J_1}, \quad \bar{\nu}_1 = \frac{\tilde{\pi}(I_2 \times J_2)}{\tilde{\pi}(I_1 \times J_1)} P_{\#}^Y \tilde{\pi}|_{I_1 \times J_1}.$$

Lasciando invariate le altre definizioni si arriva alla stessa conclusione. Analogamente se $\tilde{\pi}(I_1 \times J_1) < \tilde{\pi}(I_2 \times J_2)$. \square

Dimostrazione del teorema 2.3.1. Supponiamo che d sia continua e strettamente convessa. Per il *teorema 1.1.2* esiste $\pi^* \in \Pi(\mu, \nu)$ ottimale per la formulazione di Kantorovich. Proviamo che $\pi^* = \tilde{\pi}$. Per la *proposizione 2.3.2* $\Gamma = \text{supp}(\pi^*)$ è monotono, i.e.

$$d(x_1 - y_1) + d(x_2 - y_2) \leq d(x_1 - y_2) + d(x_2 - y_1)$$

$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Gamma$. Affermiamo che $\forall x_1, x_2, y_1, y_2$ come sopra e tali che $x_1 < x_2$ allora $y_1 \leq y_2$. Supponiamo che $y_2 < y_1$ e siano $a = x_1 - y_1$, $b = x_2 - y_2$ e $\delta = x_2 - x_1$. Sappiamo che

$$d(a) + d(b) \leq d(b - \delta) + d(a + \delta).$$

Sia $t = \frac{\delta}{b-a}$, allora $t \in (0, 1)$ se e solo se $y_2 < y_1$, e $b - \delta = (1 - t)b + ta$, $a + \delta = tb + (1 - t)a$. Allora, dalla convessità stretta di d , segue che

$$d(b - \delta) + d(a + \delta) < (1 - t)d(b) + td(a) + td(b) + (1 - t)d(a) = d(a) + d(b).$$

Questa è una contraddizione, quindi $y_2 \geq y_1$.

Proviamo ora che $\tilde{\pi} = \pi^*$. Più precisamente mostriamo che

$$\pi^*((-\infty, x] \times (-\infty, y]) = \min\{F(x), G(y)\}.$$

Siano $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $A = (-\infty, x] \times (y, +\infty)$, $B = (x, +\infty) \times (-\infty, y]$ e proviamo che $\pi^*(A)$ e $\pi^*(B)$ non possono essere entrambi diversi da 0. Infatti assumiamo che esista $(x_1, y_1) \in \Gamma \cap A$ e prendiamo un qualsiasi $(x_2, y_2) \in B$. Dalla definizione di A e di B abbiamo che $x_1 \leq x < x_2$ e $y_2 \leq y < y_1$. Poiché $x_1 < x_2$, se $(x_2, y_2) \in \Gamma$ deve valere necessariamente che $y_1 \leq y_2$ per quanto visto prima. Questa è una contraddizione, quindi se esiste $(x_1, y_1) \in \Gamma \cap A$ allora $B \subset \Gamma^c$, e quindi $\pi^*(B) = 0$. Analogamente, se esiste $(x_2, y_2) \in \Gamma \cap B$ allora $\pi^*(A) = 0$.

Segue che

$$\pi^*((-\infty, x] \times (-\infty, y]) = \min\{\pi^*(((-\infty, x] \times (-\infty, y]) \cup A),$$

$$\pi^*(((-\infty, x] \times (-\infty, y]) \cup B)\}$$

Ma,

$$\pi^*(((-\infty, x] \times (-\infty, y]) \cup A) = \pi^*((-\infty, x] \times \mathbb{R}) = F(x)$$

$$\pi^*(((-\infty, x] \times (-\infty, y]) \cup B) = \pi^*(\mathbb{R} \times (-\infty, y]) = G(y).$$

Quindi $\pi^*((-\infty, x] \times (-\infty, y]) = \min\{F(x), G(y)\}$.

Ora generalizziamo a d non strettamente convessa. Poiché d è convessa può essere limitata dal basso da una funzione affine. Sia $d(x) \geq (ax + b)_+$. Si osservi che $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4 + (ax + b)^2} + \frac{1}{2}(ax + b)$ è strettamente convessa e soddisfa $0 \leq f(x) \leq 1 + d(x)$. Allora $d_\varepsilon := d + \varepsilon f$ è strettamente convessa e soddisfa $d \leq d_\varepsilon \leq (1 + \varepsilon)d + \varepsilon$. Ora sia $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$, allora

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} d(x - y) d\tilde{\pi}(x, y) &\leq \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} d_\varepsilon(x - y) d\tilde{\pi}(x, y) \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} d_\varepsilon(x - y) d\pi(x, y) \leq (1 + \varepsilon) \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} d(x - y) d\pi(x, y) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ si prova che $\tilde{\pi}$ è un piano di trasporto ottimale.

Ora proviamo che $\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} d(x-y) d\tilde{\pi}(x,y) = \int_0^1 d(F^{-1}(t) - G^{-1}(t)) dt$.

Se $\tilde{\pi} = (F^{-1}, G^{-1})_{\#} \mathcal{L}_{|[0,1]}$, allora

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} d(x-y) d\tilde{\pi}(x,y) &= \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} d(x-y) d((F^{-1}, G^{-1})_{\#} \mathcal{L}_{|[0,1]})(x,y) = \\ &= \int_0^1 d(F^{-1}(t) - G^{-1}(t)) dt \end{aligned}$$

dalla formula del cambio di variabili (1.2). Andiamo a calcolare

$$\begin{aligned} &(F^{-1}, G^{-1})_{\#} \mathcal{L}_{|[0,1]}((-\infty, x] \times (-\infty, y]) = \\ &= \mathcal{L}_{|[0,1]}((F^{-1}, G^{-1})^{-1}((-\infty, x] \times (-\infty, y])) = \\ &= \mathcal{L}_{|[0,1]}(\{t : F^{-1}(t) \leq x \text{ e } G^{-1}(t) \leq y\}) = \\ &= \mathcal{L}_{|[0,1]}(\{t : F(x) \geq t \text{ e } G(y) \geq t\}) = \\ &= \min\{F(x), G(y)\} = \tilde{\pi}((-\infty, x] \times (-\infty, y]) \end{aligned}$$

dove abbiamo usato $F^{-1}(t) \leq x \iff F(x) \geq t$.

Osservazione 7. Abbiamo provato che se d è continua e strettamente convessa le soluzioni del problema di Kantorovich sono uniche.

Proviamo ora 1-2.

1. In virtù di quanto appena dimostrato è sufficiente provare che

$$\int_0^1 |F^{-1}(t) - G^{-1}(t)| dt = \int_{\mathbb{R}} |F(x) - G(x)| dx.$$

Definiamo $A \subset \mathbb{R}^2$ come

$$\begin{aligned} A &:= \{(x, t) : \min\{F(x), G(x)\} \leq t \leq \max\{F(x), G(x)\}, x \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(x, t) : \min\{F^{-1}(t), G^{-1}(t)\} \leq x \leq \max\{F^{-1}(t), G^{-1}(t)\}, t \in [0, 1]\}, \end{aligned}$$

a meno di un insieme trascurabile rispetto alla misura \mathcal{L} di Lebesgue.

Dal teorema di Fubini segue che

$$\mathcal{L}(A) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\min\{F(x), G(x)\}}^{\max\{F(x), G(x)\}} dt dx = \int_0^1 \int_{\min\{F^{-1}(t), G^{-1}(t)\}}^{\max\{F^{-1}(t), G^{-1}(t)\}} dx dt.$$

Poiché $\max\{a, b\} - \min\{a, b\} = |a - b|$ allora

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\min\{F(x), G(x)\}}^{\max\{F(x), G(x)\}} dt dx &= \int_{\mathbb{R}} (\max\{F(x), G(x)\} - \min\{F(x), G(x)\}) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} |F(x) - G(x)| dx. \end{aligned}$$

E analogamente

$$\int_0^1 \int_{\min\{F^{-1}(t), G^{-1}(t)\}}^{\max\{F^{-1}(t), G^{-1}(t)\}} dx dt = \int_0^1 |F^{-1}(t) - G^{-1}(t)| dt.$$

2. Da (1.3) segue che $\tilde{T}_{\#}\mu = G_{\#}^{-1}(F_{\#}\mu)$.

Vogliamo provare che $G_{\#}^{-1}\mathcal{L}_{|[0,1]} = \nu$ e che $\mathcal{L}_{|[0,1]} = F_{\#}\mu$. Questo è sufficiente per provare che $\tilde{T}_{\#}\mu = \nu$.

$$\begin{aligned} G_{\#}^{-1}\mathcal{L}_{|[0,1]}((-\infty, y]) &= \mathcal{L}_{|[0,1]}(\{t : G^{-1}(t) \leq y\}) = \\ &= \mathcal{L}_{|[0,1]}(\{t : G(y) \geq t\}) = G(y) = \nu((-\infty, y]). \end{aligned}$$

Poiché F è continua, $\forall t \in (0, 1)$ l'insieme $F^{-1}([0, t]) = (-\infty, x_t]$, per qualche x_t t.c. $F(x_t) = t$, è chiuso. Ora, per $t \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} F_{\#}\mu([0, t]) &= \mu(\{x : F(x) \leq t\}) = \mu(\{x : F(x) \leq F(x_t)\}) = \\ &= \mu(\{x : x \leq x_t\}) = F(x_t) = t. \end{aligned}$$

Quindi $F_{\#}\mu = \mathcal{L}_{|[0,1]}$.

Ora proviamo che \tilde{T} è ottimale.

$$\begin{aligned} \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{K}(\pi) &= \int_0^1 d(F^{-1}(t) - G^{-1}(t)) dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}} d(x - G^{-1}(F(x))) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} d(x - \tilde{T}(x)) d\mu(x) \geq \inf_{\{T: T_{\#}\mu = \nu\}} \mathbb{M}(T), \end{aligned}$$

nella seconda uguaglianza abbiamo usato (1.2) e il fatto che $F_{\#}\mu = \mathcal{L}_{|[0,1]}$. Poiché la disuguaglianza nel verso opposto è sempre vera, vedi (1.7), abbiamo finito.

□

2.4 Problema del Trasporto Ottimale in L^2 : Teorema di Brenier

In questa sezione supponiamo che X e Y siano sottoinsiemi di \mathbb{R}^d e, per comodità, consideriamo la funzione costo $c(x, y) := \frac{1}{2}|x - y|^2$, anziché $c(x, y) := |x - y|^2$.

L'obiettivo è quello di introdurre una caratterizzazione per i piani di trasporto ottimali e mostrare delle condizioni sufficienti per l'esistenza di una mappa di trasporto ottimale.

In questo caso la funzione costo è quadratica quindi il problema va sotto il nome di *Problema del Trasporto Ottimale in L^2* .

Questo caso particolare ha attratto molti ricercatori: negli ultimi decenni sono stati introdotti molti risultati teorici interessanti, insieme a diverse applicazioni scientifiche e ingegneristiche, per esempio alla meteorologia, alla dinamica dei fluidi e all'economia. Si guardi [7, 48, 49] per un resoconto su queste applicazioni.

Quindi, in questa sezione,

$$\mathbb{K}(\pi) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{|x - y|^2}{2} d\pi(x, y). \quad (2.6)$$

Consideriamo $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$, *i.e.*

$$M_2 := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|x|^2}{2} d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|y|^2}{2} d\nu(y) < +\infty. \quad (2.7)$$

Questa condizione assicura che il funzionale \mathbb{K} è finito su $\Pi(\mu, \nu)$, infatti $\forall \pi \in \Pi(\mu, \nu)$

$$\mathbb{K}(\pi) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{|x - y|^2}{2} d\pi(x, y) \leq \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} (|x|^2 + |y|^2) d\pi(x, y) = 2M_2 < +\infty.$$

Ricordiamo che dal *teorema 1.3.4 di dualità di Kantorovich* segue che

$$\inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{K}(\pi) = \sup_{(\varphi, \psi) \in \Phi_c} \mathbb{J}(\varphi, \psi), \quad (2.8)$$

dove \mathbb{J} è definito in (1.11).

Prima di proseguire è necessario richiamare alcune definizioni e alcuni risultati di analisi convessa.

Cominciamo con una definizione: il *sottodifferenziale* $\partial\varphi$ di una funzione convessa φ è definito da

$$\partial\varphi(x) := \{y : \varphi(z) \geq \varphi(x) + y \cdot (z - x), \forall z \in \mathbb{R}^d\}.$$

Usando il *teorema di separazione di Hahn-Banach* si può dimostrare che $\forall x \in \text{Int}(\text{Dom}(\varphi))$ il sottodifferenziale $\partial\varphi(x)$ è non vuoto. Inoltre, φ è differenziabile nel punto $x \iff \partial\varphi(x) = \{\nabla\varphi(x)\}$.

Se φ è semi-continua inferiormente allora la mappa sottodifferenziale è continua su tutto \mathbb{R}^d , nel senso che se $x_k \rightarrow x$ e $\partial\varphi(x_k) \ni y_k \rightarrow y \Rightarrow y \in \partial\varphi(x)$. Per noi è sufficiente sapere che il sottodifferenziale è una generalizzazione del differenziale che esiste sempre per funzioni convesse e semi-continue inferiormente.

Come già anticipato, un'immediata conseguenza della sua definizione è che il sottodifferenziale di una funzione convessa φ è una *mappatura monotona*: $\forall y_1 \in \partial\varphi(x_1), \forall y_2 \in \partial\varphi(x_2)$,

$$\langle y_2 - y_1, x_2 - x_1 \rangle \geq 0$$

Il nostro obiettivo è quello di caratterizzare il sottodifferenziale. Per farlo è necessario considerare la trasformata di Fenchel-Legendre (Definizione 1.7) di una funzione convessa su \mathbb{R}^d .

Data una funzione *propria* (non identicamente $+\infty$, i.e. $\varphi \not\equiv +\infty$) $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, la sua *convessa coniugata* è la funzione

$$\varphi^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (x \cdot y - \varphi(x)).$$

Quindi φ^* è una funzione propria; in particolare vedremo in *Proposizione 2.4.4* che è anche *convessa* e *semi-continua inferiormente*.

Inoltre, dalla definizione segue che

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad x \cdot y \leq \varphi(x) + \varphi^*(y). \quad (2.9)$$

La seguente proposizione caratterizza il sottodifferenziale.

Proposizione 2.4.1. *Sia φ una funzione propria, semi-continua inferiormente e convessa su \mathbb{R}^d . Allora $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$*

$$x \cdot y = \varphi(x) + \varphi^*(y) \iff y \in \partial\varphi(x).$$

Dimostrazione. Da (2.9) segue che

$$x \cdot y = \varphi(x) + \varphi^*(y) \iff x \cdot y \geq \varphi(x) + \varphi^*(y).$$

Ma $x \cdot y \geq \varphi(x) + \varphi^*(y) \iff x \cdot y \geq \varphi(x) + y \cdot z - \varphi(z), \quad \forall z \in \mathbb{R}^d$
 $\iff \varphi(z) \geq \varphi(x) + y \cdot (z - x), \quad \forall z \in \mathbb{R}^d \iff y \in \partial\varphi(x).$

Da questo segue la tesi. □

Vediamo che, di fatto, se φ è convessa allora φ è differenziabile quasi ovunque, quindi abbiamo che $\partial\varphi(x) = \{\nabla\varphi(x)\}$ per quasi ogni x .

Teorema 2.4.2 (di Rademacher). *: Sia $U \subset \mathbb{R}^d$ aperto, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitziana allora f è differenziabile quasi ovunque in U .*

Proposizione 2.4.3. *Se $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ è convessa allora:*

1. φ è differenziabile quasi ovunque nell'interno del suo dominio;
2. ogni volta che φ è differenziabile, $\partial\varphi(x) = \{\nabla\varphi(x)\}$.

Dimostrazione. 1. Sia $x \in \text{int}(\text{Dom}(\varphi))$ e δ^* t.c. $\overline{B(x, \delta^*)} \subset \text{int}(\text{Dom}(\varphi))$. Proviamo che φ è lipschitziana su $B(x, \frac{\delta^*}{2\sqrt{d}})$. Allora, per il teorema di Rademacher, φ è differenziabile quasi ovunque su $B(x, \frac{\delta^*}{2\sqrt{d}})$, e quindi differenziabile quasi ovunque in $\text{int}(\text{Dom}(\varphi))$.

Per farlo proviamo prima che φ è uniformemente limitata su $\overline{B(x, \frac{\delta^*}{\sqrt{d}})}$. Consideriamo il cubo d -dimensionale Q con lato di lunghezza $\frac{2\delta^*}{\sqrt{d}}$ e centrato in x . Notiamo che $\overline{B(x, \frac{\delta^*}{\sqrt{d}})} \subset Q \subset \overline{B(x, \delta^*)}$ e che i vertici $\{x_i\}_{i=1}^{2^d} \subset \partial B(x, \delta^*)$. Notiamo inoltre che l'insieme dei punti estremi di Q è $\{x_i\}_{i=1}^{2^d}$. Dal *teorema di Minkowski-Carathéodory* (teorema 2.2.1) per ogni $y \in B(x, \frac{\delta^*}{\sqrt{d}})$ esistono $\{\lambda_i\}_{i=1}^{2^d} \subset [0, 1]$ con $\sum_{i=1}^{2^d} \lambda_i = 1$ e $y = \sum_{i=1}^{2^d} \lambda_i x_i$. Quindi,

$$\varphi(y) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{2^d} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{2^d} \lambda_i \varphi(x_i) \leq \max_{i=1, \dots, 2^d} |\varphi(x_i)| =: C (< +\infty).$$

Ora, per $y \in B(x, \frac{\delta^*}{\sqrt{d}})$ possiamo definire $y' = x - (y - x) = 2x - y$ e quindi $y' \in B(x, \frac{\delta^*}{\sqrt{d}})$ e $x = \frac{1}{2}y' + \frac{1}{2}y$. Quindi, $\varphi(x) \leq \frac{1}{2}\varphi(y') + \varphi(y)$. In particolare,

$$\varphi(y) \geq 2\varphi(x) - \varphi(y') \geq \varphi(x) - C.$$

Abbiamo provato che

$$2\varphi(x) - C \leq \varphi(y) \leq C, \quad \forall y \in B\left(x, \frac{\delta^*}{\sqrt{d}}\right).$$

Quindi

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\overline{B(x, \delta^*/\sqrt{d})})} \leq \max\{C - 2\varphi(x), C\} < +\infty.$$

Per provare che φ è lipschitziana su $B(x, \delta^*/(2\sqrt{d}))$ siano $x_1, x_2 \in B(x, \frac{\delta^*}{2\sqrt{d}})$, $x_1 \neq x_2$ e sia x_3 il punto di intersezione della retta che passa per x_1, x_2 con $\partial B(x, \delta^*/\sqrt{d})$; ci sono due possibilità per x_3 , noi scegliamo x_3 t.c. x_2 sta tra x_1 e x_3 . Sia $\lambda := \frac{|x_2 - x_3|}{|x_1 - x_3|} \in (0, 1)$. Ora,

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3 &= \lambda x_2 + \lambda(x_1 - x_2) + (1 - \lambda)x_2 + (1 - \lambda)(x_3 - x_2) = \\ &= x_2 + \frac{|x_2 - x_3|}{|x_1 - x_3|}(x_1 - x_2) + \frac{(|x_3 - x_1| - |x_3 - x_2|)(x_3 - x_2)}{|x_3 - x_1|} = \\ &= x_2 + \frac{1}{|x_3 - x_1|}(|x_3 - x_2|(x_1 - x_2) + |x_2 - x_1|(x_3 - x_2)) = x_2, \end{aligned}$$

poiché $\frac{|x_2 - x_1|}{|x_2 - x_1|} = \frac{|x_3 - x_2|}{|x_3 - x_2|}$. Quindi, dalla convessità di φ ,

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) \leq (1 - \lambda)(\varphi(x_3) - \varphi(x_1)) =$$

$$= \frac{|x_1 - x_3| - |x_2 - x_3|}{|x_1 - x_3|} (\varphi(x_3) - \varphi(x_1)) \leq \frac{4\sqrt{d}M|x_1 - x_2|}{\delta^*},$$

dove $M := \|\varphi\|_{L^\infty(\overline{B(x, \delta^*/\sqrt{d})})}$ e abbiamo usato $|x_1 - x_3| \geq \delta^*/(2\sqrt{d})$. Scambiando x_1 e x_2 otteniamo che

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leq \frac{4\sqrt{d}M|x_1 - x_2|}{\delta^*},$$

quindi φ è lipschitziana di costante $L = \frac{4\sqrt{d}M}{\delta^*}$ in $B(x, \delta^*/(2\sqrt{d}))$.

2. Supponiamo che φ sia differenziabile in x . Allora,

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \nabla\varphi(x) \cdot (z - x) &= \varphi(x) + \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x + (z - x)h) - \varphi(x)}{h} \\ &= \varphi(x) + \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\varphi((1 - h)x + hz) - \varphi(x)}{h} \leq \\ &\leq \varphi(x) + \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(1 - h)\varphi(x) + h\varphi(z) - \varphi(x)}{h} = \varphi(z). \end{aligned}$$

Quindi $\nabla\varphi(x) \in \partial\varphi(x)$. Ora se $y \in \partial\varphi(x)$ allora

$$\varphi(x) + y \cdot (z - x) \leq \varphi(z)$$

$\forall z \in \mathbb{R}^d$. Sia $z = x + hw$ allora

$$y \cdot w \leq \frac{\varphi(x + hw) - \varphi(x)}{h}$$

$\forall h > 0$ e $\forall w \in \mathbb{R}^d$. Mandando $h \rightarrow 0^+$ otteniamo che $y \cdot w \leq \nabla\varphi(x) \cdot w$ $\forall w \in \mathbb{R}^d$. Sostituendo $w \mapsto -w$ abbiamo $y \cdot w = \nabla\varphi(x) \cdot w$, $\forall w \in \mathbb{R}^d$. Quindi $y = \nabla\varphi(x)$. \square

La proposizione seguente ci dà delle condizioni equivalenti per la convessità e la semi-continuità inferiore.

Proposizione 2.4.4. *Sia $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una funzione propria, allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. φ è convessa e semi-continua inferiormente;
2. $\varphi = \psi^*$ per qualche funzione propria ψ ;

3. $\varphi^{**} = \varphi$.

Dimostrazione. Chiaramente 3 implica 2. Mostriamo che 2 implica 1. Sia $\varphi = \psi^*$ e proviamo che φ è convessa e semi-continua inferiormente. Per la convessità siano $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0, 1]$ allora

$$\begin{aligned} \varphi(tx_1 + (1-t)x_2) &= \psi^*(tx_1 + (1-t)x_2) = \\ &= \sup_{y \in \mathbb{R}^d} ((tx_1 + (1-t)x_2) \cdot y - \psi(y)) \leq \\ &\leq \sup_{y \in \mathbb{R}^d} (tx_1 \cdot y - t\psi(y)) + \sup_{y \in \mathbb{R}^d} ((1-t)x_2 \cdot y - (1-t)\psi(y)) = \\ &= t\psi^*(x_1) + (1-t)\psi^*(x_2) = t\varphi(x_1) + (1-t)\varphi(x_2). \end{aligned}$$

Per la semi-continuità inferiore sia $x_m \rightarrow x$, allora

$$\liminf_{m \rightarrow +\infty} \varphi(x_m) = \liminf_{m \rightarrow +\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^d} (x_m \cdot y - \psi(y)) \geq \lim_{m \rightarrow +\infty} (x_m \cdot y - \psi(y)) = x \cdot y - \psi(y)$$

$\forall y \in \mathbb{R}^d$. Passando al sup su $y \in \mathbb{R}^d$ segue che $\liminf_{m \rightarrow +\infty} \varphi(x_m) \geq \varphi(x)$. Per finire proviamo che 1 implica 3. Sia φ convessa e semi-continua inferiormente. Fissato $x \in \mathbb{R}^d$, vogliamo provare che $\varphi(x) = \varphi^{**}(x)$. Poiché $\varphi^*(y) \geq x \cdot y - \varphi(x)$, $\forall y \in \mathbb{R}^d$ allora

$$\varphi(x) \geq \sup_{y \in \mathbb{R}^d} (x \cdot y - \varphi^*(y)) = \varphi^{**}(x).$$

Ci resta da provare che $\varphi(x) \leq \varphi^{**}(x)$.

Sia $x \in \text{Int}(\text{Dom}(\varphi))$, allora poiché φ può essere limitata dal basso da una funzione affine che passa per $\varphi(x)$ (poiché φ è convessa) allora $\partial\varphi(x) \neq \emptyset$. Sia $y_0 \in \partial\varphi(x)$. Dalla *proposizione 2.4.1* segue che $x \cdot y_0 = \varphi(x) + \varphi^*(y_0)$, allora

$$\varphi(x) = x \cdot y_0 - \varphi^*(y_0) \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^d} (x \cdot y - \varphi^*(y)) = \varphi^{**}(x).$$

Quindi abbiamo provato la proposizione per ogni φ con $\text{Int}(\text{Dom}(\varphi)) = \mathbb{R}^d$. Per tutte le altre φ definiamo $\psi_\varepsilon(x) = \frac{|x|^2}{\varepsilon}$ e

$$\varphi_\varepsilon(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^d} (\varphi(x-y) + \psi_\varepsilon(y)) = \inf_{y \in \mathbb{R}^d} (\varphi(y) + \psi_\varepsilon(x-y)).$$

Per provare che $\varphi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon^{**}$ su \mathbb{R}^d è sufficiente provare che φ_ε è convessa, semi-continua inferiormente e $\text{int}(\text{Dom}(\varphi_\varepsilon)) = \mathbb{R}^d$. Per la convessità notiamo che

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon(tx_1 + (1-t)x_2) &= \inf_{y \in \mathbb{R}^d} (\varphi(tx_1 + (1-t)x_2 - y) + \psi_\varepsilon(y)) = \\ &= \inf_{y_1, y_2 \in \mathbb{R}^d} (\varphi(t(x_1 - y_1) + (1-t)(x_2 - y_2)) + \psi_\varepsilon(ty_1 + (1-t)y_2)) \leq \\ &\leq \inf_{y_1, y_2 \in \mathbb{R}^d} (t(\varphi(x_1 - y_1) + \psi_\varepsilon(y_1)) + (1-t)(\varphi(x_2 - y_2) + \psi_\varepsilon(y_2))) = \\ &= t\varphi_\varepsilon(x_1) + (1-t)\varphi_\varepsilon(x_2). \end{aligned}$$

Il limite puntuale di una collezione arbitraria di funzioni semi-continue inferiormente è semi-continua inferiormente, quindi φ_ε è semi-continua inferiormente.

Ora, sia $x \in \mathbb{R}^d$ e $y_0 \in \mathbb{R}^d$ t.c. $\varphi(y_0) < +\infty$ (esiste perché, per ipotesi, φ è una funzione propria), allora $\varphi_\varepsilon(x) \leq \varphi(y_0) + \psi_\varepsilon(x - y_0)$. Poiché ψ_ε è finita ovunque, segue che $\varphi_\varepsilon(x)$ è finita e quindi $x \in \text{Dom}(\varphi_\varepsilon)$. In particolare $\text{Int}(\text{Dom}(\varphi_\varepsilon)) = \mathbb{R}^d$.

Proviamo ora che $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varphi_\varepsilon(x) \geq \varphi(x)$. Fissato $x \in \mathbb{R}^d$ notiamo che $\varphi_\varepsilon(x) \leq A + \frac{B}{\varepsilon}$. Poiché φ è convessa, è limitata dal basso da una funzione affine, $\varphi(z) \geq a \cdot z + b$, $\forall z \in \mathbb{R}^d$. Sia y_ε una successione minimizzante, *i.e.* $\varphi_\varepsilon(x) \geq \varphi(x - y_\varepsilon) + \psi_\varepsilon(y_\varepsilon) - \varepsilon$. Allora,

$$\begin{aligned} A + \frac{B}{\varepsilon} \geq \varphi_\varepsilon(x) &\geq a \cdot (x - y_\varepsilon) + \frac{|y_\varepsilon|^2}{\varepsilon} - \varepsilon \geq \\ &\geq -\frac{(1+\varepsilon)|a|^2}{\varepsilon} - \frac{|x|^2}{2} + \frac{|y_\varepsilon|^2}{2\varepsilon} - \varepsilon. \end{aligned}$$

Questo implica che $|y_\varepsilon| = O(1)$. Sia ora $\varepsilon_n \rightarrow 0$ una sottosuccessione tale che $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varphi_\varepsilon(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_{\varepsilon_n}(x)$. Poiché y_{ε_n} è limitato allora esiste una ulteriore sottosuccessione, che per non appesantire la notazione rinominiamo y_{ε_n} , e qualche $y \in \mathbb{R}^d$ tale che $y_{\varepsilon_n} \rightarrow y$. Inoltre,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_{\varepsilon_n}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\varphi(x - y_{\varepsilon_n}) + \psi_{\varepsilon_n}(y_{\varepsilon_n})) \geq \begin{cases} \varphi(x) & \text{se } y = 0 \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In entrambi i casi il membro di destra è più grande di $\varphi(x)$ quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_{\varepsilon_n}(x) \geq \varphi(x).$$

D'altra parte, poiché $\varphi(x) \geq \varphi_\varepsilon(x)$ allora

$$\begin{aligned} \varphi^{**}(x) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \inf_{z \in \mathbb{R}^d} (y \cdot (x - z) + \varphi(z)) \geq \\ &\geq \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \inf_{z \in \mathbb{R}^d} (y \cdot (x - z) + \varphi_\varepsilon(z)) = \varphi_\varepsilon^{**}(x). \end{aligned}$$

Quindi,

$$\varphi^{**}(x) \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varphi_\varepsilon^{**}(x) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varphi_\varepsilon(x) \geq \varphi(x).$$

Questo conclude la dimostrazione. \square

Tornando al problema del trasporto, noi ci aspettiamo che un piano ottimale abbia supporto nel grafico del sottodifferenziale di una funzione convessa. Questo perché, consideriamo, per esempio, il caso 1D e una mappa $T_{\#}\mu = \nu$. Dovremmo aspettarci che qualsiasi mappa "ottimale" preservi l'ordine, *i.e* se $x_1 \leq x_2$ allora $T(x_1) \leq T(x_2)$. Questo è equivalente a dire che T è non decrescente.

Se consideriamo il grafico di T , $\Gamma = \{(x, y) : x \in X, y \in T(x)\}$ (cioè consideriamo un piano anziché la mappa) allora la proprietà di non decrescenza diventa: $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Gamma$ t.c. $x_1 \leq x_2$ allora $y_1 \leq y_2$.

In analisi convessa questa proprietà è detta *monotonicità ciclica*. Si può provare che ogni insieme ciclicamente monotono può essere scritto come il sottodifferenziale di una funzione convessa (poiché ogni funzione convessa ha derivata non decrescente). Quindi ci aspettiamo che ogni piano ottimale sia supportato sul sottodifferenziale di una funzione convessa. Questo risulta essere vero anche in dimensione più grande di uno. Infatti, coerentemente con quanto appena detto, vale il seguente risultato:

Teorema 2.4.5 (Criterio di Ottimalità di Knott-Smith). [49, Theorem 2.12, (i)] Siano $\mu \in \mathcal{P}_2(X)$, $\nu \in \mathcal{P}_2(Y)$ con $X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$, e sia $c(x, y) = \frac{1}{2}|x - y|^2$. Definiamo

$$\tilde{\Phi} = \left\{ (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \in L^1(\mu) \times L^1(\nu) : \tilde{\varphi}(x) + \tilde{\psi}(y) \geq x \cdot y \right\} \quad (2.10)$$

1. Sia $\pi^\dagger \in \Pi(\mu, \nu)$ un punto di minimo per il problema del trasporto ottimale di Kantorovich e sia $(\tilde{\varphi}^\dagger, (\tilde{\varphi}^\dagger)^*) \in \tilde{\Phi}$ una soluzione per il problema $\inf_{(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \in \tilde{\Phi}} \mathbb{J}(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$. Allora $\text{supp}(\pi^\dagger) \subseteq \text{Graph}(\partial\tilde{\varphi}^\dagger)$, o equivalentemente $y \in \partial\tilde{\varphi}^\dagger(x)$ per π^\dagger -quasi ogni (x, y) .
2. Sia $\pi^\dagger \in \Pi(\mu, \nu)$ e supponiamo che esista una funzione $\tilde{\varphi}^\dagger \in L^1(\mu)$ convessa e semi-continua inferiormente tale che $\text{supp}(\pi^\dagger) \subseteq \text{Graph}(\partial\tilde{\varphi}^\dagger)$. Allora, π^\dagger è un punto di minimo del problema del trasporto ottimale di Kantorovich e $(\tilde{\varphi}^\dagger, (\tilde{\varphi}^\dagger)^*)$ è un punto di minimo del problema $\inf_{(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \in \tilde{\Phi}} \mathbb{J}(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$.

Prima di provare il teorema manipoliamo il problema di Kantorovic e quello duale per ottenere dei problemi equivalenti.

Sia $(\varphi, \psi) \in \Phi_c$ con $c(x, y) = \frac{1}{2}|x - y|^2$ e definiamo $\tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{2}|x|^2 - \varphi(x)$, $\tilde{\psi}(y) = \frac{1}{2}|y|^2 - \psi(y)$. Chiaramente $\tilde{\varphi} \in L^1(\mu)$, $\tilde{\psi} \in L^1(\nu)$ se $\mu \in \mathcal{P}_2(X)$ e $\nu \in \mathcal{P}_2(Y)$.

Inoltre,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x) + \tilde{\psi}(y) &= \frac{1}{2}|x|^2 + \frac{1}{2}|y|^2 - \varphi(x) - \psi(y) \geq \\ &\geq \frac{1}{2}|x|^2 + \frac{1}{2}|y|^2 - \frac{1}{2}|x - y|^2 \geq x \cdot y. \end{aligned}$$

Di fatto $(\varphi, \psi) \in \Phi_c \Leftrightarrow (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \in \tilde{\Phi}$. Inoltre

$$\mathbb{J}(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = M - \mathbb{J}(\varphi, \psi),$$

dove $M = \frac{1}{2} \int_X |x|^2 d\mu(x) + \frac{1}{2} \int_Y |y|^2 d\nu(y)$.

Se $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$,

$$\mathbb{K}(\pi) = \frac{1}{2} \int_{X \times Y} |x - y|^2 d\pi(x, y) = M - \int_{X \times Y} x \cdot y d\pi(x, y).$$

Quindi,

$$M - \mathbb{J}(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = \mathbb{J}(\varphi, \psi) \leq \mathbb{K}(\pi) = M - \int_{X \times Y} x \cdot y d\pi(x, y)$$

Più convenientemente

$$\mathbb{J}(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \geq \int_{X \times Y} x \cdot y d\pi(x, y).$$

Dalla *dualità di Kantorovich* (Teorema 1.3.4) segue che

$$\min_{(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \in \tilde{\Phi}} \mathbb{J}(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = \max_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{X \times Y} x \cdot y \, d\pi(x, y). \quad (2.11)$$

Notiamo che se $\pi^\dagger \in \Pi(\mu, \nu)$ minimizza \mathbb{K} allora massimizza $\int_{X \times Y} x \cdot y \, d\pi(x, y)$, e viceversa. D'altra parte, se $(\varphi, \psi) \in \Phi_c$ massimizza \mathbb{J} , allora $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = (\frac{1}{2}|\cdot|^2 - \varphi, \frac{1}{2}|\cdot|^2 - \psi) \in \tilde{\Phi}$ minimizza \mathbb{J} , e viceversa.

Dal *Teorema 1.3.7* (di esistenza di punti di minimo di \mathbb{J} su Φ_c) segue l'esistenza di $\varphi \in L^1(\mu)$ con $\varphi = \varphi^{cc}$ tale che $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = (\frac{1}{2}|\cdot|^2 - \varphi^{cc}, \frac{1}{2}|\cdot|^2 - \varphi^c) \in \tilde{\Phi}$ e $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ minimizza \mathbb{J} su $\tilde{\Phi}$.

Inoltre,

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(y) &= \frac{1}{2}|y|^2 - \varphi^c(y) = \sup_{x \in X} \left(\frac{1}{2}|y|^2 - \frac{1}{2}|x - y|^2 + \varphi(x) \right) = \\ &= \sup_{x \in X} (x \cdot y - \tilde{\varphi}(x)) = \tilde{\varphi}^*(y) \end{aligned}$$

dove $\tilde{\varphi}^*$ è la trasformata di Legendre-Fenchel di $\tilde{\varphi}$. Abbiamo anche che,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x) &= \frac{1}{2}|x|^2 - \varphi^{cc}(x) = \sup_{y \in Y} \left(\frac{1}{2}|x|^2 - \frac{1}{2}|x - y|^2 + \varphi^c(y) \right) = \\ &= \sup_{y \in Y} \left(\frac{1}{2}|x|^2 - \frac{1}{2}|x - y|^2 + \frac{1}{2}|y|^2 - \tilde{\varphi}^*(y) \right) = \sup_{y \in Y} (x \cdot y - \tilde{\varphi}^*(y)) = \tilde{\varphi}^{**}(x). \end{aligned}$$

Quindi i minimizzatori di \mathbb{J} su $\tilde{\Phi}$ sono della forma $(\tilde{\varphi}^{**}, \tilde{\varphi}^*)$.

Sia $\tilde{\eta} = \tilde{\varphi}^{**}$ allora dalla *proposizione 2.2.4* segue che $\tilde{\eta}$ è convessa e semi-continua inferiormente. Sempre dalla *proposizione 2.2.4* segue che $\tilde{\eta}^* = \tilde{\varphi}^{***} = \tilde{\varphi}^*$. Quindi esiste un elemento di $\tilde{\Phi}$ della forma $(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}^*)$ che minimizza \mathbb{J} , dove $\tilde{\eta}$ è una funzione propria, convessa e semi-continua inferiormente.

Dimostrazione del teorema 2.4.5. Sia $\pi^\dagger \in \Pi(\mu, \nu)$ che minimizza \mathbb{K} su $\Pi(\mu, \nu)$ e $\tilde{\varphi}$ funzione propria, semi-continua inferiormente tale che la coppia $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^*)$ minimizza \mathbb{J} su $\tilde{\Phi}$. Da (2.11) segue che

$$\int_X \tilde{\varphi}(x) d\mu(x) + \int_Y \tilde{\varphi}^*(y) d\nu(y) = \int_{X \times Y} x \cdot y \, d\pi^\dagger(x, y).$$

Equivalentemente,

$$\int_{X \times Y} (\tilde{\varphi}(x) + \tilde{\varphi}^*(y) - x \cdot y) d\pi^\dagger(x, y) = 0.$$

Dalla definizione di convessa coniugata $\tilde{\varphi}(x) + \tilde{\varphi}^*(y) \geq x \cdot y$ e quindi l'integranda è non negativa. Quindi $\tilde{\varphi}(x) + \tilde{\varphi}^*(y) = x \cdot y$ per π^\dagger -quasi ogni (x, y) e quindi, dalla *proposizione 2.4.1*, segue che $y \in \partial\tilde{\varphi}(x)$ per π^\dagger -quasi ogni (x, y) . Viceversa, supponiamo che $\pi^\dagger \in \Pi(\mu, \nu)$, $y \in \partial\tilde{\varphi}(x)$ per π^\dagger -quasi ogni (x, y) , con $\tilde{\varphi} \in L^1(\mu)$ funzione propria, semi-continua inferiormente e convessa. Proviamo che π^\dagger e la coppia $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^*)$ sono ottimali per i rispettivi problemi.

Dalla *proposizione 2.4.1*

$$\int_{X \times Y} (\tilde{\varphi}(x) + \tilde{\varphi}^*(y) - x \cdot y) d\pi^\dagger(x, y) = 0.$$

Notiamo che dalla definizione di trasformata di Fenchel-Legendre segue che $\tilde{\varphi}(x) + \tilde{\varphi}^*(y) \geq x \cdot y$. Assumiamo, per ora (poi lo dimostreremo), che $\tilde{\varphi}^* \in L^1(\nu)$ allora $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^*) \in \tilde{\Phi}$. Quindi,

$$\min_{\tilde{\Phi}} \mathbb{J} \leq \mathbb{J}(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^*) = \int_{X \times Y} x \cdot y d\pi^\dagger(x, y) \leq \max_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{X \times Y} x \cdot y d\pi(x, y).$$

Da (2.11) segue che $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^*)$ minimizza \mathbb{J} su $\tilde{\Phi}$ e π^\dagger massimizza la quantità $\int_{X \times Y} x \cdot y d\pi(x, y)$ su $\Pi(\mu, \nu)$. Quindi π^\dagger è un piano ottimale.

Ci resta da provare che $\tilde{\varphi}^* \in L^1(\nu)$. Poiché $\tilde{\varphi}$ è convessa $\tilde{\varphi}^*$ può essere limitata dal basso da una funzione affine, in particolare esiste $x_0 \in X$ t.c. $\tilde{\varphi}^*(y) \geq x_0 \cdot y - \tilde{\varphi}(x_0) \geq x_0 \cdot y - b_0 =: f(y)$. Quindi,

$$\begin{aligned} \|\tilde{\varphi}^* - f\|_{L^1(\nu)} &= \int_Y (\tilde{\varphi}^*(y) - f(y)) d\nu(y) \leq \\ &\leq \mathbb{J}(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^*) + \|\tilde{\varphi}\|_{L^1(\mu)} + \frac{1}{2}|x_0|^2 + \frac{1}{2} \int_Y |y|^2 d\nu(y) + b_0 < +\infty. \end{aligned}$$

Da questo segue che $\tilde{\varphi}^* - f \in L^1(\nu)$ e quindi, poiché $f \in L^1(\nu)$, $\tilde{\varphi}^* \in L^1(\nu)$. \square

Il risultato più importante di questa sezione è il seguente teorema, che ci dà delle condizioni sufficienti per l'esistenza delle mappe di trasporto.

Teorema 2.4.6 (di Brenier). *Siano $\mu \in \mathcal{P}_2(X)$ e $\nu \in \mathcal{P}_2(Y)$, con $X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$, $c(x, y) = \frac{1}{2}|x - y|^2$. Supponiamo che $\mu(\{x\}) = 0$, $\forall x \in X$, allora*

1. *esiste un'unica soluzione $\pi^\dagger \in \Pi(\mu, \nu)$ del problema di Kantorovich;*
2. *esiste $\tilde{\varphi}^\dagger \in L^1(\mu)$ convessa, semi-continua inferiormente tale che*

$$\pi^\dagger = (\text{Id} \times \nabla \tilde{\varphi}^\dagger)_\# \mu$$

o equivalentemente

$$d\pi^\dagger(x, y) = d\mu(x) \delta_{\nabla \tilde{\varphi}^\dagger(x)}(y);$$

3. *$(\tilde{\varphi}^\dagger, (\tilde{\varphi}^\dagger)^*)$ minimizza \mathbb{J} su $\tilde{\Phi}$;*
4. *se $\bar{\varphi}$ è un'altra funzione convessa t.c. $(\nabla \bar{\varphi})_\# \mu = \nu$ allora $\nabla \bar{\varphi} = \nabla \tilde{\varphi}^\dagger$ (μ -quasi ovunque).*

Osservazione 8. Il fatto che una funzione convessa sia differenziabile quasi ovunque (*Proposizione 2.4.3*), insieme al fatto che $\mu(\{x\}) = 0, \forall x \in X$, ci permette di parlare della derivata di φ sul supporto di μ come se questa esistesse ovunque. Quindi questo teorema continua ad essere vero anche sotto altre ipotesi su μ : per esempio possiamo supporre che μ sia assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue; oppure che $\mu(A) = 0$ per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^d$ t.c. $\mathcal{H}^{d-1}(A) < +\infty$ o usare qualsiasi altra ipotesi che assicuri che l'insieme di non-differenziabilità di $\tilde{\varphi}^\dagger$ sia trascurabile.

Osservazione 9. Ha senso scrivere $(\nabla \tilde{\varphi}^\dagger)_\# \mu = \nu$ anche se $\nabla \tilde{\varphi}^\dagger$ non è definita ovunque: per definizione $(\nabla \tilde{\varphi}^\dagger)^{-1}(A)$ è l'insieme degli x tali che $\nabla \tilde{\varphi}^\dagger(x)$ è ben definito e appartiene ad A . In questo contesto, questa sottigliezza è di poca importanza perché μ è concentrata nell'insieme di differenziabilità di φ . L'ipotesi che μ non dà massa gli insiemi piccoli è cruciale anche per questo.

Dimostrazione del teorema 2.4.6. Sia π^\dagger un piano di trasporto ottimale. Se scriviamo (dal *teorema 1.1.6*)

$$\pi^\dagger(A \times B) = \int_A \pi^\dagger(B|x) d\mu(x),$$

per qualche famiglia $\{\pi^\dagger(\cdot|x)\}_{x \in X} \subset \mathcal{P}(Y)$, allora $\text{supp}(\pi^\dagger(\cdot|x)) \subseteq \partial\tilde{\varphi}^\dagger(x)$ per μ -quasi ogni $x \in X$ dal *teorema 2.4.5*. Dalla *proposizione 2.4.3*, $\partial\tilde{\varphi}^\dagger(x) = \{\nabla\tilde{\varphi}^\dagger(x)\}$ per \mathcal{L} -quasi ogni $x \in X$ (e quindi per μ -quasi ogni $x \in X$). Quindi $\text{supp}(\pi^\dagger(\cdot|x)) \subseteq \{\nabla\tilde{\varphi}^\dagger(x)\}$ per μ -quasi ogni $x \in X$. Questo implica che $\pi^\dagger(\cdot|x) = \delta_{\nabla\tilde{\varphi}^\dagger(x)}$ μ -quasi ogni $x \in X$. Abbiamo provato che ogni piano di trasporto ottimale π^\dagger può essere scritto come

$$\pi^\dagger = (\text{Id} \times \nabla\tilde{\varphi}^\dagger)_\# \mu$$

e poiché

$$\begin{aligned} \nu(B) &= \pi^\dagger(\mathbb{R}^d \times B) = (\text{Id} \times \nabla\tilde{\varphi}^\dagger)_\# \mu(\mathbb{R}^d \times B) = \\ &= \mu((\text{Id} \times \nabla\tilde{\varphi}^\dagger)^{-1}(\mathbb{R}^d \times B)) = \mu\{x : (\text{Id} \times \nabla\tilde{\varphi}^\dagger)(x) \in \mathbb{R}^d \times B\} = \\ &= \mu(\{x : \nabla\tilde{\varphi}^\dagger(x) \in B\}) = (\nabla\tilde{\varphi}^\dagger)_\# \mu(B), \end{aligned}$$

abbiamo anche provato che $(\nabla\tilde{\varphi}^\dagger)_\# \mu = \nu$. Poiché la scelta di π^\dagger è stata fatta indipendentemente da $\tilde{\varphi}^\dagger$ segue che la soluzione del problema di Kantorovich è unica.

Ci resta da provare l'unicità (a meno di costanti additive) della funzione convessa le cui derivate mandano μ in ν . Assumiamo che $\bar{\varphi}$ sia un'altra funzione convessa tale che $(\nabla\bar{\varphi})_\# \mu = \nu$. Proviamo che $\nabla\bar{\varphi} = \nabla\tilde{\varphi}^\dagger$ a meno di insiemi di misura μ nulla. Dal *teorema 2.4.5* sappiamo che $(\text{Id} \times \nabla\bar{\varphi})_\# \mu$ è un piano di trasporto ottimale e la coppia $(\bar{\varphi}, \bar{\varphi}^*)$ minimizza \mathbb{J} su $\tilde{\Phi}$. Quindi,

$$\int_X \bar{\varphi} d\mu + \int_Y \bar{\varphi}^* d\nu = \int_X \tilde{\varphi}^\dagger d\mu + \int_Y (\tilde{\varphi}^\dagger)^* d\nu.$$

Da questo segue che

$$\begin{aligned} &\int_{X \times Y} (\bar{\varphi}(x) + \bar{\varphi}^*(y)) d\pi^\dagger(x, y) = \int_{X \times Y} (\tilde{\varphi}^\dagger(x) + (\tilde{\varphi}^\dagger)^*(y)) d\pi^\dagger(x, y) \\ &= \int_{X \times Y} x \cdot y d\pi^\dagger(x, y) = \int_{X \times Y} x \cdot y d(\text{Id} \times \nabla\tilde{\varphi}^\dagger)_\# \mu(x, y) = \int_X x \cdot \nabla\tilde{\varphi}^\dagger(x) d\mu(x), \end{aligned}$$

dove la seconda uguaglianza vale per la *proposizione 2.4.1*, visto che $y \in \partial\tilde{\varphi}^\dagger(x)$ per π^\dagger -quasi ogni (x, y) . Vale anche

$$\int_{X \times Y} (\bar{\varphi}(x) + \bar{\varphi}^*(y)) d\pi^\dagger(x, y) = \int_X (\bar{\varphi}(x) + \bar{\varphi}^*(\nabla\tilde{\varphi}^\dagger(x))) d\mu(x).$$

Quindi

$$\int_X (\bar{\varphi}(x) + \bar{\varphi}^*(\nabla\tilde{\varphi}^\dagger(x)) - x \cdot \nabla\tilde{\varphi}^\dagger(x)) d\mu(x) = 0.$$

In particolare, poiché la funzione integranda è non negativa (per la definizione di trasformata di Fenchel-Legendre), $\bar{\varphi}(x) + \bar{\varphi}^*(\nabla\tilde{\varphi}^\dagger(x)) - x \cdot \nabla\tilde{\varphi}^\dagger(x) = 0$ per μ -quasi ogni $x \in X$. Dalla *proposizione 2.4.1* segue che $\nabla\tilde{\varphi}^\dagger(x) \in \partial\bar{\varphi}(x)$ per μ -quasi ogni x e quindi $\nabla\tilde{\varphi}^\dagger(x) = \nabla\bar{\varphi}(x)$ per μ -quasi ogni x . \square

Da questo teorema segue immediatamente un corollario che afferma l'unicità della mappa di trasporto ottimale:

Corollario 2.4.7 (Unicità). *Sotto le ipotesi del Teorema 2.4.6, $\nabla\tilde{\varphi}^\dagger$ è l'unica soluzione del problema del trasporto ottimale di Monge:*

$$\frac{1}{2} \int_X |x - \nabla\tilde{\varphi}^\dagger(x)|^2 d\mu(x) = \frac{1}{2} \inf_{T: T_{\#}\mu = \nu} \int_X |x - T(x)|^2 d\mu(x).$$

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza

$$\min_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{K}(\pi) \leq \inf_{T: T_{\#}\mu = \nu} \mathbb{M}(T)$$

è sufficiente dimostrare che $T^\dagger = \nabla\tilde{\varphi}^\dagger$ soddisfa $\mathbb{M}(T^\dagger) \leq \min_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{K}(\pi)$.

Il fatto che $T_{\#}^\dagger\mu = \nu$ lo abbiamo verificato nella dimostrazione del *Teorema 2.4.6*. Ora, sia $\pi^\dagger \in \Pi(\mu, \nu)$ come nella dimostrazione del *Teorema 2.4.6*,

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(T^\dagger) &= \frac{1}{2} \int_X |x - T^\dagger(x)|^2 d\mu(x) = \\ &= \frac{1}{2} \int_{X \times Y} |x - T^\dagger(x)|^2 d\pi^\dagger(x, y) = \frac{1}{2} \int_{X \times Y} |x - y|^2 d\pi^\dagger(x, y) = \min_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{K}(\pi), \end{aligned}$$

poiché $T^\dagger(x) = y$ per π^\dagger -quasi ogni $(x, y) \in X \times Y$. L'unicità di T^\dagger segue dall'unicità di π^\dagger . \square

Capitolo 3

Trasporto Ottimale in L^2 : Caso Periodico

In questo capitolo faremo riferimento a [40] e tratteremo il problema del trasporto in L^2 nel caso in cui le due misure di probabilità μ e ν siano a.c. rispetto alla misura di Lebesgue, con densità f e g periodiche.

In particolare vedremo che, sotto opportune ipotesi, risolvere il problema del trasporto ottimale in L^2 è equivalente a risolvere una PDE non lineare ellittica del secondo ordine, che va sotto il nome di equazione di Monge-Ampère.

Analizzeremo poi, dal punto di vista teorico, l'algoritmo proposto da L.P. Saumier, M. Agueh, B. Khouider in [40], per la soluzione di questo problema. L'idea di base dell'algoritmo consiste nell'impostare uno schema iterativo dove l'equazione non lineare viene approssimata da una PDE lineare ellittica a coefficienti non costanti: l'obiettivo della prima sezione sarà quello di dimostrare che una tale equazione, con condizioni periodiche, ammette un'unica soluzione a meno di costanti.

Saumier et al. risolvono numericamente la PDE lineare in due modi diversi: con uno schema alle differenze finite del secondo ordine e con un metodo introdotto da Strain [44], basato sulla trasformata di Fourier (FT), che si traduce in un algoritmo di $\mathcal{O}(P \log P)$ operazioni complessive, in cui

P è il numero di punti di discretizzazione. Ovviamente, la scelta del metodo di discretizzazione influenza l'accuratezza del metodo.

Ci si restringe al caso delle densità periodiche perché questo permette di utilizzare delle stime a priori di regolarità, nell'interno del dominio, per le soluzioni di questa equazione, [23, 47], che serviranno per dimostrare la convergenza del metodo.

3.1 Esistenza e Unicità della Soluzione per una PDE Lineare Strettamente Ellittica

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} L\theta = h \\ \theta \text{ periodica,} \end{cases} \quad (3.1)$$

dove L è un operatore lineare del secondo ordine strettamente ellittico con coefficienti 1-periodici $C^\alpha(\Omega)$

$$L = \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\partial_i\partial_j + \sum_{i=1}^d b_i(x)\partial_i + c(x), \quad a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j,$$

h è una funzione $C^\alpha(\Omega)$ 1-periodica con media 0. L'obiettivo di questa sezione è quello di provare che questo problema ha un'unica soluzione, a meno di costanti, $\theta \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ quando $c \leq 0$. Seguiamo l'argomento proposto da Gilbarg e Trudinger in [23] nel caso di condizioni al bordo di Dirichlet.

Richiamiamo la definizione di operatore lineare ellittico del secondo ordine.

Definizione 3.1. Sia $A(x) = (a_{ij}(x))$ la matrice dei coefficienti di L . Supponiamo che valga

$$\lambda(x)|\xi|^2 \leq \xi^T A(x)\xi \leq \Lambda(x)|\xi|^2$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}^d$, $\xi \neq 0$, allora l'operatore L si dice:

1. *ellittico* in Ω se $\lambda > 0$ in Ω ;
2. *strettamente ellittico* in Ω se $\lambda \geq m_\lambda > 0$ in Ω per qualche costante m_λ ;
3. *uniformemente ellittico* in Ω se $\frac{\lambda}{\lambda}$ è limitato in Ω .

Osserviamo che se i coefficienti a_{ij} sono costanti allora l'ellitticità implica quella stretta e quella uniforme. Per provare che il problema (3.1) ammette un'unica soluzione (a meno di costanti), usiamo il *metodo di continuità* e colleghiamo il problema (3.1) al problema di Poisson

$$\begin{cases} \Delta\theta = h \\ \theta \quad 1\text{-periodica.} \end{cases} \quad (3.2)$$

Per semplificare il lavoro, fissiamo la costante restringendo lo spazio della soluzione $C^{2,\alpha}(\Omega)$, considerando solo le funzioni θ tali che $\int_\Omega \theta dx = 0$. L'esistenza e l'unicità di una soluzione debole di (3.2) è garantita dal *teorema di Lax-Milgram*:

Teorema 3.1.1. *Sia H uno spazio di Hilbert e H^* il suo duale, $h : H \rightarrow \mathbb{R}$ un funzionale lineare e limitato su H e ζ una forma bilineare, continua e coerciva su H , i.e.*

1. $\exists K_1 > 0$ costante tale che $\zeta(\theta, \theta) \geq K_1 \|\theta\|_H^2, \forall \theta \in H$,
2. $\exists K_2 > 0$ costante tale che $|\zeta(\theta, v)| \leq K_2 \|\theta\|_H \|v\|_H, \forall \theta, v \in H$.

Allora esiste un unico elemento $\theta \in H$ tale che

$$\zeta(\theta, v) = \langle h, v \rangle_{H^*, H} \quad \forall v \in H,$$

dove $\langle h, v \rangle_{H^*, H}$ rappresenta l'azione duale di $h \in H^*$ su $v \in H$.

Nel nostro caso, se denotiamo con $C_{per}^\infty(\Omega)$ la restrizione a $\Omega = [0, 1]^d$ delle funzioni lisce, 1-periodiche su \mathbb{R}^d , allora possiamo definire lo spazio $L_{per}^2(\Omega)$ come il completamento di $C_{per}^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{L^2}$ e in

modo analogo $H_{per}^1(\Omega)$, dove $H^1(\Omega)$ è lo spazio di Sobolev delle funzioni di quadrato sommabile la cui derivata prima è ancora di quadrato sommabile. A questo punto definiamo

$$H := \left\{ \theta \in H_{per}^1(\Omega) \text{ t.c. } \int_{\Omega} \theta dy = 0 \right\}$$

e il suo duale

$$H^* = \{ \theta^* \in (H_{per}^1(\Omega))^* \text{ t.c. } \langle \theta^*, 1 \rangle_{H^*, H_{per}} = 0 \}.$$

Ricordiamo che θ è una soluzione debole dell'equazione di Poisson se

$$\zeta(\theta, v) = \int_{\Omega} \nabla \theta(x) \cdot \nabla v(x) dx = \langle h, v \rangle_{H^*, H} \quad \forall v \in H.$$

La forma bilineare $\zeta(\theta, v)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lax-Milgram e questo ci dà l'esistenza e l'unicità della soluzione debole $\theta \in H$, se $h \in H^*$. Quest'ultima condizione ha senso grazie al *teorema di Rappresentazione di Riesz*. Inoltre questo forza il membro di destra h a soddisfare $\int_{\Omega} h dx = 0$.

Adesso riportiamo da [23] una stima a priori che ci servirà per stabilire se la nostra soluzione debole può essere considerata soluzione in senso classico o no. Sia $\Omega_A \subset \Omega$ un aperto limitato, $\Omega_B \subset\subset \Omega_A$ (compattamente contenuto in Ω). Se θ è una soluzione debole di $\Delta \theta = h$ in Ω_A e se $h \in C^\alpha(\Omega_A)$, allora esiste una costante $k > 0$ tale che

$$\|\theta\|_{C^{2,\alpha}(\Omega_B)} \leq k(\|h\|_{C^\alpha(\Omega_A)} + \|\theta\|_{L^2(\Omega_A)}).$$

Questa stima implica la regolarità $C^{2,\alpha}$ della soluzione θ in un dominio Ω_B contenuto in Ω quando $h \in C^\alpha(\Omega_B)$. Ricordiamo che poiché abbiamo a che fare con funzioni periodiche, possiamo estendere il risultato all'intero dominio, quindi $\theta \in C^{2,\alpha}(\Omega)$. Il risultato più importante di questa sezione è il seguente:

Teorema 3.1.2. *Sia $\Omega = [0, 1]^d$, L un operatore strettamente ellittico in Ω con coefficienti in $C^\alpha(\Omega)$ e t.c. $c \leq 0$. Se il problema (3.2) ha un'unica soluzione $C^{2,\alpha}(\Omega)$ con media 0 per tutte le funzioni $h \in C^\alpha(\Omega)$ tali che*

$\int_{\Omega} h dx = 0$, allora il problema (3.1) ha un'unica soluzione $C^{2,\alpha}(\Omega)$ con media 0 per tutte le funzioni h come in precedenza.

Per dimostrare questo teorema abbiamo bisogno di alcuni risultati classici sulla teoria degli operatori ellittici. Per prima cosa richiamiamo da [23] un'altra stima per controllare la componente Hölderiana della derivata seconda di θ . Siano Ω_A e Ω_B definiti come in precedenza. Se $\text{dist}(\Omega_B, \partial\Omega_A) \geq r$, allora esiste una costante $k > 0$ tale che

$$\begin{aligned} r \max_{|i|=1} \sup_{x \in \Omega_B} |D^i \theta| + r^2 \max_{|i|=2} \sup_{x \in \Omega_B} |D^i \theta| + r^{2+\alpha} \max_{|i|=2} \|D^i \theta\|_{\alpha, \Omega_B} &\leq \\ &\leq k(\|\theta\|_{C^0(\Omega_A)} + \|h\|_{C^\alpha(\Omega_A)}), \end{aligned} \quad (3.3)$$

dove i è un multi-indice e $\|D^i \theta\|_{\alpha, \Omega_B} = \sup_{x, y \in \Omega_B} \frac{f(x) - f(y)}{|x - y|^\alpha}$ e k dipende solo dalla costante di ellitticità λ , dalle norme $C^\alpha(\Omega_A)$ dei coefficienti di L , da d , α e dal diametro di Ω_A . Questa stima, per periodicità, vale su tutto il dominio Ω .

Ricordiamo che $C^{m,\alpha}(\Omega)$ è l'insieme delle funzioni $f \in C^m(\Omega)$ tali che $\|D^i f\|_{\alpha, \Omega} < +\infty$, per ogni multi-indice i con altezza m , i.e. $|i| = m$. In questo caso la rispettiva norma Hölderiana è

$$\|f\|_{C^{m,\alpha}(\Omega)} = \|f\|_{C^m(\Omega)} + \max_{|i|=m} \|D^i f\|_{\alpha, \Omega}.$$

Introduciamo ora il *metodo di continuità* che ci permette di legare i due problemi (3.1) e (3.2) e trarre risultati dal primo e applicarli al secondo.

Teorema 3.1.3 (Metodo di Continuità). *Sia B uno spazio di Banach, V uno spazio vettoriale normato e L_0, L_1 operatori lineari limitati da B a V . Per ogni $t \in [0, 1]$, poniamo*

$$L_t = (1 - t)L_0 + tL_1 \quad (3.4)$$

e supponiamo che esista una costante C tale che

$$\|\theta\|_B \leq C \|L_t \theta\|_V \quad (3.5)$$

per ogni $t \in [0, 1]$, $\forall \theta \in B$. Allora L_1 mappa B in V se e solo se L_0 mappa B in V .

Prima di provare il teorema dobbiamo riportare due utili risultati.

Lemma 3.1.4. *Se $\theta \in C^2(\Omega)$ è una soluzione 1-periodica di $L\theta = 0$ tale che $\int_{\Omega} \theta dx = 0$ allora $\theta = 0$*

Lemma 3.1.5. *Ogni soluzione 1-periodica $\theta \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ del problema $L\theta = h$ con $\int_{\Omega} \theta dx = 0$ soddisfa $\|\theta\|_{C^0(\Omega)} \leq C\|h\|_{C^\alpha(\Omega)}$, con C costante.*

Dimostriamo ora il teorema

Dimostrazione del teorema 3.1.2. Consideriamo la famiglia di operatori

$$L_t = tL + (1-t)\Delta, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

e la corrispondente equazione $L_t\theta_t = h$. Poiché i coefficienti di L , per ipotesi, soddisfano

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda(x)|\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^d$$

e

$$\|a_{ij}\|_{C^\alpha(\Omega)}, \|b_i\|_{C^\alpha(\Omega)}, \|c\|_{C^\alpha(\Omega)} \leq \sigma, \quad \forall i, j$$

possiamo provare che i coefficienti di L_t soddisfano le stesse disuguaglianze, rimpiazzando λ e σ con $\lambda_t = \min(1, \lambda)$ e $\sigma_t = \max(1, \sigma)$. Infatti, se indichiamo con $a_{t_{ij}}$ i coefficienti dei termini di secondo ordine di L_t , abbiamo che:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^d a_{t_{ij}}\xi_i\xi_j &= t \sum_{i,j=1}^d a_{ij}\xi_i\xi_j + (1-t) \sum_{i=1}^d \xi_i^2 \geq \\ &\geq t\lambda|\xi|^2 + (1-t)|\xi|^2 = (t\lambda + (1-t))|\xi|^2 \geq \lambda_t|\xi|^2. \end{aligned}$$

Inoltre, i coefficienti b_i e c sono gli stessi per L e L_t e vale

$$\begin{aligned} \|a_{t_{ij}}\|_{C^\alpha(\Omega)} &= \|ta_{ij} + (1-t)\delta_{ij}\|_{C^\alpha(\Omega)} \leq \\ &\leq t\|a_{ij}\|_{C^\alpha(\Omega)} + (1-t)\|\delta_{ij}\|_{C^\alpha(\Omega)} \leq \\ &\leq t\sigma + (1-t) \leq \sigma_t. \end{aligned}$$

Quindi, considerando L_t operatore lineare limitato dallo spazio di Banach

$$B := \left\{ \theta_t \in C^{2,\alpha}(\Omega) \text{ t.c. } \int_{\Omega} \theta_t dx = 0 \right\}$$

nello spazio di Banach

$$V := \left\{ h \in C^{\alpha}(\Omega) \text{ t.c. } \int_{\Omega} h dx = 0 \right\},$$

la risolubilità del problema $L_t \theta_t = h$ con condizioni periodiche al bordo diventa equivalente all'invertibilità della mappa L_t per $\theta_t \in B$ e $h \in V$. Dal *lemma 3.1.5* abbiamo che $\|\theta_t\|_{C^0(\Omega)} \leq K_1 \|L_t \theta_t\|_{C^{\alpha}(\Omega)}$. Usando la stima (3.3) deduciamo che

$$\begin{aligned} \|\theta_t\|_B = \|\theta_t\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} &\leq K_2 (\|\theta_t\|_{C^0(\Omega)} + \|L_t \theta_t\|_{C^{\alpha}(\Omega)}) \leq \\ &\leq K_3 \|L_t \theta_t\|_{C^{\alpha}(\Omega)} = K_3 \|L_t \theta_t\|_V. \end{aligned}$$

Notiamo che qui K_3 è una costante che non dipende da t . Per ipotesi (3.2) ha una soluzione (unica) in B e quindi Δ mappa B in V . Usando il metodo di continuità otteniamo che anche L mappa B in B . Dal *lemma 3.1.4* concludiamo che L è un isomorfismo e quindi è invertibile. \square

3.2 Equazione di Monge-Ampère

Ricordiamo che se μ è una misura di probabilità che modella la distribuzione di materiale nel dominio $X \subseteq \mathbb{R}^d$, e ν è un'altra misura di probabilità che modella la struttura del dominio di arrivo $Y \subseteq \mathbb{R}^d$, il problema di Monge consiste nel trovare una mappa di trasporto ottimale T che risolva il seguente problema di minimo:

$$\inf_{\{T: T_{\#}\mu = \nu\}} \int_X c(x, T(x)) d\mu(x). \quad (3.6)$$

Sotto opportune ipotesi, la mappa di trasporto ottimale per il problema di Monge risolve anche l'equazione di Monge-Ampère. Vediamo come. Supponiamo che le misure μ e ν siano assolutamente continue rispetto alla misura

di Lebesgue su \mathbb{R}^d e che abbiano derivate di Radon-Nikodym date da f e g , rispettivamente (*i.e.* $d\mu(x) = f(x)dx$ e $d\nu(x) = g(x)dx$). Denotiamo

$$m_f := \inf_{x \in X} f(x), \quad M_f := \sup_{x \in X} f(x), \quad m_g := \inf_{y \in Y} g(y), \quad M_g := \sup_{y \in Y} g(y). \quad (3.7)$$

In seguito avremo a che fare con f e g continue, su un insieme compatto, quindi gli inf e i sup in (3.7) possono essere pensati come minimi e massimi rispettivamente. Per comodità, in seguito, ci riferiremo ad f e g come densità iniziale e finale rispettivamente.

Dal teorema di Brenier (*Teorema 2.4.6*) sappiamo che il problema del trasporto ottimale in L^2 ha un'unica (μ -quasi ovunque) soluzione $T^\dagger = \nabla\varphi$, con φ convessa.

Inoltre, è stato dimostrato che, se f e g sono sufficientemente regolari (noi vedremo un caso particolare), allora $\varphi \in C^2$ e soddisfa

$$f(x) = g(\nabla\varphi(x)) \det(D^2\varphi(x)), \quad (3.8)$$

(si veda Delanoë [16], Caffarelli [10, 11], Urbans [47]).

Quindi, per densità di probabilità sufficientemente regolari f e g , una soluzione convessa φ dell'equazione (3.8) fornisce la soluzione $T^\dagger = \nabla\varphi$ del problema del trasporto ottimale in L^2 .

In particolare sappiamo che il gradiente $\nabla\varphi$ soddisfa

$$\nu(B) = \mu((\nabla\varphi)^{-1}(B)), \quad \forall B \in \mathcal{B}(Y).$$

Possiamo riscrivere questa condizione usando le funzioni indicatrici:

$$\begin{aligned} \int_Y \chi_B(y)g(y) dy &= \int_X \chi_{((\nabla\varphi)^{-1}(B))}(x)f(x) dx = \\ &= \int_X \chi_B(\nabla\varphi(x))f(x) dx. \end{aligned}$$

Ora, usando un risultato noto della teoria della misura, che afferma che ogni funzione misurabile, positiva e limitata può essere scritta come limite uniforme di una successione di combinazioni lineari di funzioni indicatrici di insiemi a due a due disgiunti, possiamo scrivere che

$$\int_Y \zeta(y)g(y) dy = \int_X \zeta(\nabla\varphi(x))f(x) dx, \quad \forall \zeta \in C_b(\mathbb{R}^d). \quad (3.9)$$

Assumiamo che $\nabla\varphi$ sia C^1 e iniettiva (che è il caso di φ strettamente convessa). Allora possiamo usare il cambio di variabili $y = \nabla\varphi(x)$ al membro di sinistra di (3.9):

$$\int_Y \zeta(y)g(y) dy = \int_X \zeta(\nabla\varphi(x))g(\nabla\varphi(x)) \det(D^2\varphi(x)) dx. \quad (3.10)$$

Combinando (3.9) e (3.10) segue che

$$\int_X \zeta(\nabla\varphi(x))f(x) dx = \int_X \zeta(\nabla\varphi(x))g(\nabla\varphi(x)) \det(D^2\varphi(x)) dx, \quad \forall \zeta \in C_b(\mathbb{R}^d). \quad (3.11)$$

Vedremo sotto quali ipotesi queste assunzioni sono vere.

Poiché ζ è arbitraria, dal *lemma fondamentale del calcolo delle variazioni*, segue che

$$f(x) = g(\nabla\varphi(x)) \det(D^2\varphi(x)), \quad (3.12)$$

dove $D^2\varphi = (D_{ij}^2\varphi)_{i,j=1,\dots,d}$ denota la matrice Hessiana di φ .

Se g è positiva, questa può anche essere riscritta come

$$\det(D^2\varphi) = \frac{f(x)}{g(\nabla\varphi(x))}. \quad (3.13)$$

L'equazione (3.13) è un caso particolare dell'*equazione di Monge-Ampère*

$$\det(D^2\varphi(x)) = F(x, \varphi(x), \nabla\varphi(x)). \quad (3.14)$$

Per maggiori informazioni si guardi [24].

Prima abbiamo detto che questa è una PDE non lineare di tipo ellittico. La non linearità dell'equazione (3.12) segue sia dal termine $g(\nabla\varphi)$, ma anche dal termine di ordine più alto $\det(D^2\varphi)$. Introduciamo la seguente definizione di PDE ellittica:

Definizione 3.2. Sia G una funzione continua definita su $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$ dove $\mathcal{S}_d(\mathbb{R})$ è lo spazio delle matrici simmetriche d -dimensionale a coefficienti in \mathbb{R} . La PDE

$$G(x, \varphi, \nabla\varphi, D^2\varphi) = 0$$

si dice *ellittica* se per ogni scelta di x, r, p, A, B ,

$$B \geq A \Rightarrow G(x, r, p, B) \geq G(x, r, p, A).$$

Inoltre, si dice *uniformemente ellittica* se esistono $Q_1, Q_2 > 0$ tali che per ogni scelta di x, r, p, A, B ,

$$B \geq A \Rightarrow Q_1 \text{Tr}(B - A) \geq G(x, r, p, B) - G(x, r, p, A) \geq Q_2 \text{Tr}(B - A).$$

In questa definizione, l'ordinamento delle matrici è dato da $B \geq A$ se e solo se $B - A$ è semidefinita positiva.

Negli ultimi decenni sono stati introdotti risultati molto importanti per la teoria di questa classe di equazioni: di particolare importanza è la teoria delle soluzioni viscose, si guardi [12].

Se l'equazione di Monge-Ampère (3.12) fosse ellittica allora soddisferebbe molte proprietà utili, come il principio del massimo o il fatto che se i dati sono lisci allora le soluzioni sono lisce. In generale, però, questa equazione non è ellittica. Se ci restringiamo all'insieme delle funzioni φ convesse, allora abbiamo che A e B sono semidefinite positive. Quindi abbiamo che

$$B \geq A \geq 0 \Rightarrow \det(B) \geq \det(A)$$

e

$$G(x, r, p, B) - G(x, r, p, A) = g(p)(\det(B) - \det(A)) \geq 0.$$

Osserviamo però che, nonostante questa restrizione, l'equazione non è uniformemente ellittica.

Come già detto in precedenza, ci vogliamo restringere ad un ambiente periodico, per usare delle stime di regolarità a priori. Non possiamo utilizzare delle stime globali di regolarità per la derivata seconda a causa della non linearità e della non uniforme ellitticità dell'equazione.

D'ora in avanti, dato $d \geq 1$ intero, indicheremo con e_i l' i -esimo vettore della base canonica di \mathbb{R}^d . Una funzione $\zeta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *1-periodica* se $\zeta(x+e_i) = \zeta(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\forall i \in \{1, \dots, d\}$. Notiamo che per una funzione del genere, i suoi valori sul sottoinsieme $\Omega := [0, 1]^d$ di \mathbb{R}^d sono sufficienti per definire il suo valore su tutto \mathbb{R}^d . Per quanto appena detto noi identificheremo nel seguito le funzioni 1-periodiche su \mathbb{R}^d con le loro restrizioni su $\Omega := [0, 1]^d$.

Tornando ora alle due misure di probabilità μ e ν introdotte all'inizio della sezione, assumiamo che le rispettive densità f e g siano 1-periodiche. Allora $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, e il problema del trasporto, in questo caso, diventa

$$\inf_{T: \Omega \rightarrow \Omega} \left\{ \int_{\Omega} |x - T(x)|^2 d\mu(x); T_{\#}\mu = \nu, d\mu(x) = f(x)dx, d\nu(x) = g(x)dx \right\}. \quad (3.15)$$

Inoltre, l'unica soluzione $T^\dagger = \nabla\varphi$ di questo problema (dove $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega$ è convessa) soddisfa l'equazione di Monge-Ampère su Ω .

La regolarità è data dal seguente teorema:

Teorema 3.2.1 (di Cordero-Erausquin). [15] *Siano μ e ν due misure di probabilità periodiche su \mathbb{R}^d . Supponiamo che μ sia assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue. Allora esiste una funzione φ convessa su \mathbb{R}^d tale che $\nabla\varphi$ trasporta μ in ν e $\nabla\varphi$ è additivo, nel senso che $\nabla\varphi(x+p) = \nabla\varphi(x) + p$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^d$ e per ogni $p \in \mathbb{Z}^d$. Inoltre, $\nabla\varphi$ è invertibile (μ a.e.) e la sua inversa $\nabla\phi$ soddisfa $(\nabla\phi)_{\#} = \mu$.*

Se supponiamo che anche ν sia assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue e che f e g siano le rispettive densità, periodiche, (di integrale 1 su $[0, 1]^d$). Assumiamo che $f, g \in C^\alpha(\mathbb{R}^d)$, $\alpha > 0$, e $m_g, M_f > 0$, allora $\varphi \in C^{2,\beta}(\mathbb{R}^d)$, $0 < \beta < \alpha$ ed è una soluzione convessa dell'equazione di Monge-Ampère (3.12).

La dimostrazione del teorema, dovuta a McCann [29], consiste nel costruire una misura di Radon positiva su $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ che ha μ e ν come marginali

e supporto ciclicamente monotono. Per farlo si partirà dal caso in cui μ e ν siano misure discrete e si proverà la tesi del teorema per approssimazione.

Notiamo che poiché $\nabla\varphi$ è additiva, può essere scritta come x più il gradiente di una funzione u , 1-periodica, $\nabla\varphi(x) = x + \nabla u(x)$. Quindi, assumiamo che $\varphi(x) = \frac{|x|^2}{2} + u(x)$ con $\nabla u(x+p) = \nabla u(x)$ per ogni $p \in \mathbb{Z}^d$.

Per $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, diciamo che y è la *riflessione* di x rispetto ad x_i se $y = (x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_d)$. Allora, da [13]

Teorema 3.2.2. *Supponiamo che f, g siano definite su Ω e scriviamo la mappa di trasporto come $T^\dagger(x) = \nabla\varphi(x) = x + \nabla u(x)$. Se estendiamo f e g a \hat{f} e \hat{g} per riflessioni su un cubo più grande $\hat{\Omega}$, allora anche u si estende periodicamente a \hat{u} , definita sullo stesso $\hat{\Omega}$ per riflessioni, e T^\dagger si estende alla mappa di trasporto ottimale $\hat{T}^\dagger(x) = x + \nabla\hat{u}(x)$, che va da $\hat{\Omega}$ a $\hat{\Omega}$.*

Inoltre, se f e g sono positive e $f, g \in C^\alpha(\Omega)$, allora T^\dagger mappa ogni faccia del cubo in se stessa e ha un'estensione $C^{1,\alpha}$ al bordo $\partial\Omega$.

Questo risultato giustifica il fatto che possiamo usare stime interne su tutto il dominio, poiché ogni faccia di Ω diventa interna dopo una riflessione. Quindi usando questo cambio di funzione nell'equazione di Monge-Ampère (3.12), vediamo che la corrispondente equazione in u soddisfa una condizione periodica al bordo in Ω . Di fatto, le condizioni periodiche al bordo ci permettono di usare le stime a priori interne per le soluzioni classiche dell'equazione di Monge-Ampère su tutto il dominio, al fine di provare la convergenza dell'algoritmo.

Il teorema 3.2.1 ci dice indirettamente che se $f, g \in C^\alpha(\Omega)$, allora $\varphi \in C^{2,\beta}(\Omega)$ è l'unica, a meno di costanti, soluzione convessa dell'equazione (3.12) su Ω . Infatti, ripetendo il procedimento presentato all'inizio della sezione, i.e. partendo dall'equazione, moltiplicando per una funzione test, integrando e usando il cambio di variabili (lecito poiché $\nabla\varphi \in C^{1,\beta}(\Omega)$ è invertibile) per

tornare indietro al vincolo di conservazione della massa, notiamo che il gradiente di una soluzione convessa di (3.12) è la mappa ottimale per il problema del trasporto. Quindi, per il teorema di Brenier, $\nabla\varphi$ deve essere unica, che implica che φ deve essere unica a meno di costanti. Inoltre si possono usare classici argomenti della teoria della regolarità per le equazioni ellittiche per provare che se $f, g \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ allora $\varphi \in C^{k+2,\beta}(\Omega)$.

3.3 Algoritmo

In questa sezione introduciamo l'algoritmo proposto da Saumier et. al. per risolvere l'equazione di Monge-Ampère e proviamo la sua convergenza.

G.Loeper e F.Rapetti in [26] hanno proposto un algoritmo per risolvere numericamente l'equazione

$$\det(D^2\varphi(x)) = f(x), \quad (3.16)$$

con f periodica, attraverso uno schema iterativo basato sul metodo di Newton, che può essere visto come una variante del metodo di continuità [23]. L'equazione (3.16) può essere associata al problema del trasporto nel caso in cui le misure μ e ν siano assolutamente continue rispetto alla misura di Lebesgue, i.e. $d\mu(x) = f(x)dx$ e $d\nu(y) = g(y)dy$, con $g \equiv 1$. L'obiettivo di Saumier et al. in [40] è quello di estendere questo algoritmo al caso in cui entrambe le densità sono periodiche.

Metodo di Newton per risolvere $F(x)=0$. Supponiamo di voler trovare le soluzioni dell'equazione $F = 0$, dove $F : X \rightarrow X$ è una funzione liscia da uno spazio vettoriale in se stesso. Supponiamo che esista una soluzione \bar{x} , con $DF(x)$ operatore lineare invertibile. Dato un punto iniziale x_0 , possiamo procedere ricorsivamente una successione nel modo seguente: x_{k+1} è l'unica soluzione dell'equazione linearizzata $F(x_k) + DF(x_k)(x - x_k) = 0$. In altre

parole, $x_{k+1} = x_k - DF(x_k)^{-1} \cdot F(x_k)$. Questo significa iterare la mappa $x \mapsto G(x) := x - DF(x)^{-1} \cdot F(x)$. Questa mappa è ben definita ed è una contrazione in un intorno di \bar{x} . Le iterate convergono ad \bar{x} se il punto iniziale appartiene a questo intorno.

Scriviamo, come detto in precedenza, $\varphi(x) = \frac{|x|^2}{2} + u(x)$ quindi l'equazione (3.12) diventa

$$g(x + \nabla u(x)) \det(I + D^2 u(x)) = f(x). \quad (3.17)$$

Denotiamo l'operatore di Monge-Ampère applicato alla funzione u con $M(u)$. Quindi, cerchiamo una soluzione u 1-periodica dell'equazione $M(u) = f$ tale che $\frac{|x|^2}{2} + u(x)$ sia convessa su $\Omega = [0, 1]^d$.

Siccome l'algoritmo usato per risolvere numericamente (3.17) si basa sul metodo di Newton, dobbiamo linearizzare (3.17). In particolare $\det(I + \varepsilon B) = 1 + \text{Tr}(B) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ è l'espansione del determinante in un intorno della matrice identità. Se cerchiamo una linearizzazione del determinante attorno ad un'altra matrice A , e supponiamo che A sia invertibile, allora

$$\begin{aligned} \det(A + \varepsilon B) &= \det(A) \det(I + \varepsilon A^{-1} B) = \det(A) \det(1 + \varepsilon \text{Tr}[A^{-1} B] + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) = \\ &= \det(A) + \varepsilon \text{Tr}[\text{Adj}(A) B] + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

dove $\text{Adj}(A) = \det(A) \cdot A^{-1}$. Quindi, nel nostro caso, l'espansione del determinante è:

$$\det(I + D^2(u + s\theta)) = \det(I + D^2 u) + s \text{Tr}(\text{Adj}(I + D^2 u) D^2 \theta) + \mathcal{O}(s^2). \quad (3.18)$$

Dall'usuale formula di Taylor otteniamo l'espansione di g :

$$g(x + \nabla(u + s\theta)) = g(x + \nabla u) + s \nabla g(x + \nabla u) \cdot \nabla \theta + \mathcal{O}(s^2). \quad (3.19)$$

Moltiplicando (3.18) e (3.19) otteniamo

$$M(u + s\theta) = \det(I + D^2 u) g(x + \nabla u) +$$

$$+s \left[g(x + \nabla u) \text{Tr}(\text{Adj}(I + D^2 u) D^2 \theta) + \det(I + D^2 u) \nabla g(x + \nabla u) \cdot \nabla \theta \right] + \mathcal{O}(s^2). \quad (3.20)$$

Da (3.20) otteniamo la seguente formula per la derivata dell'operatore di Monge-Ampère nel punto u in direzione θ :

$$D_u M \cdot \theta = g(x + \nabla u) \text{Tr}(\text{Adj}(I + D^2 u) D^2 \theta) + \det(I + D^2 u) \nabla g(x + \nabla u) \cdot \nabla \theta. \quad (3.21)$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\text{Adj}(I + D^2 u) D^2 \theta) &= \sum_{i,j=1}^d \text{Adj}(I + D^2 u)_{ij} D_{ij} \theta = \\ &= \det(I + D^2 u) \sum_{i,j=1}^d (I + D^2 u)_{ij}^{-1} D_{ij} \theta. \end{aligned}$$

Da ora in avanti, denoteremo con L l'operatore di Monge-Ampère linearizzato e con L_n quello linearizzato al passo n .

A questo punto possiamo introdurre l'algoritmo.

Algoritmo di Newton

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Con } u_0 \text{ dato, loop su } n \in \mathbb{N} \\ \\ \text{Calcolare } f_n = g(x + \nabla u_n) \det(I + D^2 u_n) \\ \\ \text{Risolvere l'equazione linearizzata di Monge-Ampère :} \\ \quad L_n \theta_n = \frac{1}{\tau} (f - f_n) \\ \\ \text{Aggiornare la soluzione: } u_{n+1} = u_n + \theta_n \end{array} \right.$$

Il fattore $1/\tau$ è utilizzato come parametro di passo per prevenire il divergere del metodo, quando l'ampiezza del passo è troppo grande.

Nella prima sezione di questo capitolo abbiamo mostrato che l'equazione di Monge-Ampère linearizzata ha un'unica soluzione, a meno di costanti. Per fissare questa costante, possiamo imporre che u soddisfi $\int_{\Omega} u \, dx = 0$. Durante l'esecuzione dell'algoritmo, si impone quest'ultima condizione su θ in modo da essere sicuri che anche u la soddisfi.

Il metodo di Newton dipende fortemente dal punto di partenza u_0 . Proveremo che se si parte con un u_0 costante, allora esiste un τ tale che l'algoritmo converga. Mettere qualcosa sulla soluzione dell'eqne linearizzata

3.3.1 Convergenza dell'algoritmo

La dimostrazione della convergenza teorica dell'algoritmo, come detto in precedenza, si basa su tre stime a priori per la soluzione dell'equazione di Monge-Ampère. La prima è presa da Liu, Trudinger e Wang [27] ed è la seguente: se $\lambda \leq f/g \leq \Lambda$ per opportune costanti positive λ, Λ , e se $f \in C^\alpha(\Omega)$ per qualche $\alpha \in (0, 1)$, allora la soluzione convessa di (3.12) soddisfa

$$\|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(\Omega_{r_1})} \leq R_1 \left[1 + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left\| \frac{f(x)}{g(\nabla\varphi(x))} \right\|_{C^\alpha(\Omega)} \right] \quad (3.22)$$

dove $\Omega_{r_1} = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > r_1\}$ e R_1 è una costante che dipende solo da d, r_1, λ, Λ e Ω . La seconda, scoperta da Caffarelli [49] ed espressa da Frozani e Maldonado [20], è una stima sulla componente Hölderiana di $\nabla\varphi$. Questa disuguaglianza ci dice che, sotto le stesse ipotesi precedenti per f e g , esiste una costante k tale che

$$\frac{|\nabla\varphi(z) - \nabla\varphi(y)|}{|z - y|^{\frac{1}{k+1}}} \leq R_y \left(\frac{K}{m(\varphi_y^*, 0, R_y)} \right)^{\frac{1}{k+1}} \left(\frac{M(\varphi, y, r_2)}{r_2} \right)^{\frac{1}{k+1}}, \quad (3.23)$$

per $|z - y| \leq r_2$, dove $\varphi_y(x) = \varphi(x + y) - \varphi(y) - \nabla\varphi(y) \cdot x$,

$$R_y = \max \left\{ 1, \left(\frac{KM(\varphi, y, r_2)}{m(\varphi_y^*, 0, 1)} \right)^{\frac{k}{k+1}} \right\}$$

e $M(\varphi, y, r_2)$, $m(\varphi, y, r_2)$ sono rispettivamente il massimo e il minimo di $\varphi_y(z - y)$ preso su tutti i punti z tali che $|z - y| = r_2$. Poiché questa stima

non vale per tutti i k , uno potrebbe chiedersi per quali valori è valida. In [20], è provato che questa stima vale per

$$k = 2K(K + 1), \quad K = \frac{2^{3d+2}w_d w_{d-1}\Lambda}{d^{-3/2}\lambda}, \quad w_m = \frac{\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2 + 1)}.$$

Qui w_m è il volume della palla unitaria m -dimensionale. Riportiamo alcuni valori nella seguente tabella ($C = \frac{\Lambda}{\lambda}$):

d	w_d	K
1	2	64C
2	π	4550C
3	$\frac{4\pi}{3}$	140039C
4	$\frac{\pi^2}{2}$	2709370C

Infine, la terza stima controlla la crescita della derivata seconda di φ rispetto ai valori al bordo, a patto che $\frac{f}{g} \in C^2(\Omega)$ e $\varphi \in C^4(\Omega)$ [46, 23]:

$$\sup_{\Omega} |D^2\varphi| \leq R_3 \left(1 + \sup_{\partial\Omega} |D^2\varphi| \right), \quad (3.24)$$

dove R_3 dipende solo da $\Omega, d, f/g$ e da $\sup_{\Omega}(\varphi + \nabla\varphi)$. Possiamo provare ora il teorema sulla convergenza dell'algoritmo: la dimostrazione fornisce alcune importanti informazioni sull'algoritmo stesso.

Teorema 3.3.1. *Siano $\Omega = [0, 1]^d$ e f, g due densità di probabilità 1-periodiche. Supponiamo che il punto iniziale u_0 sia costante. Allora se $f \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ e $g \in C^{3,\alpha}(\Omega)$ per ogni $0 < \alpha < 1$, allora esiste $\tau \geq 1$ tale che (u_n) converge in $C^{4,\beta}(\Omega)$, per ogni $0 < \beta < \alpha$, ad un'unica (a meno di costanti) soluzione u dell'equazione di Monge-Ampère (3.12). Inoltre, τ dipende solo da $\alpha, d, \|f\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)}, \|g\|_{C^{3,\alpha}(\Omega)}$ e M_f, M_g, m_f, m_g definiti in (3.7).*

Dimostrazione. Come prima cosa notiamo che per l'additività della mappa di trasporto, applicando il cambio di variabile $y = T_n^\dagger(x) = x + \nabla u_n(x)$, possiamo provare che per ogni n ,

$$\int_{T_n^\dagger(\Omega)} g(y)dy = \int_{\Omega} g(T_n^\dagger(x)) \det(DT_n^\dagger(x))dx = \int_{\Omega} f_n(x)dx = 1,$$

i.e. ad ogni step, risolviamo il problema del trasporto ottimale tra f_n e g . Infatti, supponiamo per un attimo $f \in C^\alpha(\Omega)$, $g \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, $\int_\Omega g dx = 1$ e se $|x|^2/2 + u(x)$ è uniformemente convessa, allora possiamo provare che $\int_\Omega f dx = 1$, vediamo perché. Dalla formula del cambio di variabili

$$\int_{T^\dagger\Omega} g(x) dx = \int_\Omega g(T^\dagger(x)) \det(DT^\dagger(x)) dx.$$

Analizziamo $T^\dagger(\Omega) = T^\dagger([0, 1]^d)$. Per ogni $e_i \Rightarrow u(x + e_i) = u(x)$, $\forall x \in \Omega$, $\forall i \in \{1, \dots, d\} \Rightarrow \nabla u(x + e_i) = \nabla u(x)$. Quindi, $T^\dagger(x + e_i) = x + e_i + \nabla u(x + e_i) = x + e_i + \nabla u(x) = T^\dagger(x) + e_i$. Prendendo $x = 0$, otteniamo che $T^\dagger(0 + e_i) = T^\dagger(0) + e_i = \nabla u(0) + e_i, \forall i$. Ripetendo questo argomento si ottiene che $T^\dagger(0 + \sum_{j=0}^m e_{i_j}) = \nabla u(0) + \sum_{j=0}^m e_{i_j}$, per ogni sottoinsieme di indici $\{i_0, \dots, i_m\}$. Quindi il solido corrispondente a $T^\dagger(\Omega)$ ha i suoi vertici dati dai punti $\nabla u(0) + \sum_{j=0}^m e_{i_j}$. Consideriamo la $(d-1)$ -ipersuperficie $T^\dagger((x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_d))$, dove $x_j \in [0, 1]$ per $j \neq i$. Poiché $T^\dagger \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ e ∇u è 1-periodica, questa superficie è la stessa di $T^\dagger((x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_d))$ ma traslata di un'unità nella direzione e_i . Poiché questo vale per ogni i , possiamo concludere che l'ipercubo $\nabla u(0) + [0, 1]^d$ contiene gli stessi punti di $T^\dagger(\Omega)$. Ora, osserviamo integrare una funzione 1D continua γ 1-periodica, su un intervallo di lunghezza 1, è equivalente ad integrarla su $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} \int_a^{a+1} \gamma(x) dx &= \int_a^1 \gamma(x) dx + \int_1^{a+1} \gamma(x) dx = \\ &= \int_a^1 \gamma(x) dx + \int_0^a \gamma(x-1) dx = \int_a^1 \gamma(x) dx + \int_0^a \gamma(x) dx = \int_0^1 \gamma(x) dx, \end{aligned}$$

poiché γ è 1-periodica. Usando questa idea più in generale per g , abbiamo che

$$\begin{aligned} &\int_{T^\dagger(\Omega)} g(x) dx = \int_{\nabla u(0) + [0, 1]^d} g(x) dx = \\ &= \int_{u_{x_d}(0)}^{u_{x_d}(0)+1} \dots \int_{u_{x_1}(0)}^{u_{x_1}(0)+1} g(x) dx_1 \dots dx_d = \int_0^1 \dots \int_0^1 g(x) dx_1 \dots dx_d = 1. \end{aligned}$$

Inoltre, se non diversamente indicato, dobbiamo solo supporre che $f \in C^\alpha(\Omega)$ e $g \in C^{2,\alpha}(\Omega)$. I passaggi fondamentali della dimostrazione stanno nel provare per induzione che le seguenti affermazioni valgono per ogni n :

1. $I + D^2u_n$, $\text{Adj}(I + D^2u_n)$ sono matrici $C^\alpha(\Omega)$, uniformemente definite positive (u.p.d.);
2. $\frac{f}{C_1} \leq f_n \leq C_1f$, dove C_1 è indipendente da n ;
3. $\|f - f_n\|_{C^\alpha(\Omega)} \leq C_2$, dove C_2 è indipendente da n .

Diciamo che la matrice A è $C^\alpha(\Omega)$ se tutti i suoi coefficienti sono in $C^\alpha(\Omega)$; diciamo che A è *uniformemente definita positiva* (u.p.d.) se esiste una costante $k > 0$ tale che $\xi^T A \xi \geq k|\xi|^2$ per ogni $\xi \in \Omega$. Osserviamo anche che l'affermazione 1. implica che $\varphi_n = \frac{|x|^2}{2} + u_n$ è convessa uniformemente e che L_n è un operatore lineare strettamente ellittico. 2. e 3. implicano la validità delle stime a priori introdotte in precedenza.

Notiamo che per u_0 costante, abbiamo che $f_0 = g$. Ora, siano

$$C_1 = \max\left(\frac{M_f}{m_g}, \frac{M_g}{m_f}\right), \quad C_2 = \|f\|_{C^\alpha(\Omega)} + \|g\|_{C^\alpha(\Omega)}.$$

Osserviamo che

$$I + D^2u_0 = \text{Adj}(I + D^2u_0) = I,$$

e quindi entrambe le matrici sono lisce e definite positive uniformemente.

$$\sum_{i,j=1}^d g(x + \nabla u_0) \text{Adj}(I + D^2u_0)_{ij} \xi_i \xi_j = g(x + \nabla u_0) |\xi|^2 \geq m_g |\xi|^2, \quad (m_g > 0).$$

Quindi L_0 è un operatore ellittico. Ora, poiché $D^2(u_0 + |x|^2/2) = I$ è definita positiva uniformemente, sappiamo che $u_0 + |x|^2/2$ è una funzione convessa uniformemente. Osserviamo anche che $f/C_1 \leq m_g \leq g$ e $g \leq M_g \leq C_1f$ e quindi $f/C_1 \leq f_0 \leq C_1f$. Infine

$$\|f - f_0\|_{C^\alpha(\Omega)} \leq \|f\|_{C^\alpha(\Omega)} + \|g\|_{C^\alpha(\Omega)} = C_2 < +\infty,$$

poiché f e g sono in $C^\alpha(\Omega)$. Allora tutte e tre le affermazioni valgono per $n = 0$. Assumiamo che valgano per un certo $n \in \mathbb{N}$ e proviamo che valgono

per $n+1$. Per ora, supponiamo che il parametro di ampiezza del passo possa variare con n . Dimosteremo in seguito che possiamo effettivamente ritenerlo costante senza influenzare alcun risultato. Poiché $f \in C^\alpha(\Omega)$, $g \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ e 1. vale per ipotesi induttiva allora segue che i coefficienti di L_n sono $C^\alpha(\Omega)$. 3. implica che anche il membro di destra $\frac{f-f_n}{\tau}$ è $C^\alpha(\Omega)$. Sia θ_n l'unica soluzione di $L_n\theta_n = \frac{1}{\tau}(f-f_n)$ tale che $\int_\Omega \theta_n dx = 0$. In accordo con i risultati di [23] (modificati per il caso periodico) esiste una costante k_{θ_n} tale che

$$\|\theta_n\|_{C^{i,\alpha}(\Omega)} \leq \frac{k_{\theta_n}}{\tau} \|f - f_n\|_{C^\alpha(\Omega)} \leq \frac{k_{\theta_n} C_2}{\tau}, \quad i = 1, 2. \quad (3.25)$$

Poiché $u_{n+1} = u_n + \theta_n$, deduciamo che $I + D^2u_{n+1}$ e che $\text{Adj}(I + D^2u_{n+1})$ sono $C^\alpha(\Omega)$. Ora, poiché $I + D^2u_n$ è u.p.d. per ipotesi, allora:

$$\begin{aligned} \xi^T(I + D^2u_{n+1})\xi &= \xi^T(I + D^2u_n)\xi + \xi^T(D^2\theta_n)\xi \geq \\ &\geq K_1|\xi|^2 - \frac{k_{\theta_n}}{\tau} \|f - f_n\|_{C^\alpha(\Omega)} \sum_{i,j=1}^d \xi_i \xi_j \geq \\ &\geq K_1|\xi|^2 - \frac{k_{\theta_n}}{2\tau} \|f - f_n\|_{C^\alpha(\Omega)} \sum_{i,j=1}^d (\xi_i^2 + \xi_j^2) = \\ &= \left[K_1 - \frac{k_{\theta_n} d}{\tau} \|f - f_n\|_{C^\alpha(\Omega)} \right] |\xi|^2 \geq K_2|\xi|^2, \end{aligned}$$

per τ sufficientemente grande, dove K_2 è una costante positiva. Quindi $I + D^2u_{n+1}$ è una matrice u.p.d. Da questo segue che $\frac{|x|^2}{2} + u_{n+1}(x)$ è uniformemente convessa. Ora, utilizzando l'espansione in serie di Taylor introdotta in precedenza, per scrivere f_{n+1} in termini di f_n come segue:

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= g(x + \nabla u_{n+1}) \det(I + D^2u_{n+1}) = \\ &g(x + \nabla u_n) \det(I + D^2u_n) + L_n\theta_n + r_n = f_n + \frac{f - f_n}{\tau} + r_n. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Ora cerchiamo una stima per il residuo r_n . È facile vedere che una formula esplicita per r_n può essere ottenuta dai termini di secondo ordine dell'espansione in serie di Taylor dell'operatore di Monge-Ampère, ed è costituito da una somma di alcuni prodotti di almeno due derivate prime o seconde di θ_n

con g e le sue derivate calcolate in $\nabla\varphi_n$ e con le derivate seconde di φ_n . Da (3.25), sappiamo che possiamo stimare la norma $C^\alpha(\Omega)$ della derivata seconda di θ_n con una costante per $\|f - f_n\|_{C^\alpha(\Omega)}/\tau$. Inoltre, poiché $g \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, la norma Hölder di g e delle sue derivate prime e seconde sono uniformemente limitate. Quindi possiamo dedurre che

$$\|r_n\|_{C^\alpha(\Omega)} \leq \frac{k_{r_n}}{\tau^2} \|f - f_n\|_{C^\alpha(\Omega)}^2, \quad (3.27)$$

dove k_{r_n} può dipendere dalle norme Hölder delle derivate prime e seconde di φ_n . Scegliendo $\tau \geq 2k_{r_n}C_2$, (3.26), (3.27) e 3. implicano che

$$\begin{aligned} \|f - f_{n+1}\|_{C^\alpha(\Omega)} &\leq \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) \|f - f_n\|_{C^\alpha(\Omega)} + \frac{k_{r_n}}{\tau^2} \|f - f_n\|_{C^\alpha(\Omega)}^2 \leq \\ &\leq \|f - f_n\|_{C^\alpha(\Omega)} \left(1 - \frac{1}{\tau} + \frac{k_{r_n}C_2}{\tau^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2\tau}\right) \|f - f_n\|_{C^\alpha(\Omega)}. \end{aligned}$$

Questo mostra che la stima 3. è preservata per τ sufficientemente grande. Verifichiamo che vale la stima 2. Se scegliamo $\tau \geq \frac{k_{r_n}C_2^2}{m_f(1-\frac{1}{C_1})}$, da tutti i risultati e le ipotesi precedenti otteniamo che

$$\begin{aligned} f - f_{n+1} &\leq \frac{\tau - 1}{\tau} (f - f_n) + \frac{k_{r_n}}{\tau^2} \|f - f_n\|_{C^\alpha(\Omega)}^2 \leq \\ &\leq \frac{\tau - 1}{\tau} f \left(1 - \frac{1}{C_1}\right) + \frac{k_{r_n}C_2^2}{\tau^2} = f \left(1 - \frac{1}{C_1}\right) \end{aligned}$$

da cui deduciamo che $\frac{f}{C_1} \leq f_{n+1}$. Con un ragionamento analogo, partendo da un'ampiezza del passo $\tau \geq \frac{k_{r_n}C_2^2}{m_f(C_1-1)}$, otteniamo l'altra stima in 2. Ora torniamo indietro e completiamo la dimostrazione di 1. Sapendo che $I + D^2u_{n+1}$ è u.p.d., possiamo dire che $\det(I + D^2u_{n+1}) > 0$ e quindi $I + D^2u_{n+1}$ è invertibile. Possiamo provare che la sua inversa è una matrice u.p.d. Infatti, se $\xi = (I + D^2u_{n+1})y \in \Omega$, abbiamo che

$$\begin{aligned} \xi^T (I + D^2u_{n+1})^{-1} \xi &= [((I + D^2u_{n+1})y)^T (I + D^2u_{n+1})^{-1} ((I + D^2u_{n+1})y)] \\ &= y^T (I + D^2u_{n+1})y \geq K_3 |y|^2 = K_3 |(I + D^2u_{n+1})^{-1} \xi|^2. \end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza $|AB| \leq |A||B|$ con $A = I + D^2u_{n+1}$ e $B = (I + D^2u_{n+1})^{-1}\xi$, otteniamo che $|\xi| \leq |I + D^2u_{n+1}| |(I + D^2u_{n+1})^{-1}\xi|$. Ora, per

l'equivalenza delle norme, usiamo le stime ricavate precedentemente per dire che

$$\begin{aligned} |I + D^2 u_{n+1}| &\leq d \max_{i,j} \{|(I + D^2 u_{n+1})_{ij}|\} \leq \\ &\leq d(1 + \|u_n\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} + \|\theta_n\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)}) \leq K_4, \end{aligned}$$

dove K_4 è una costante positiva. Da questo segue che

$$\xi^T (I + D^2 u_{n+1})^{-1} \xi \geq \frac{K_3 |\xi|^2}{|I + D^2 u_{n+1}|^2} \geq \frac{K_3}{K_4^2} |\xi|^2 = K_5 |\xi|^2, \quad K_5 > 0.$$

Ora usiamo quanto dimostrato finora per provare che L_{n+1} è un operatore strettamente ellittico:

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^d g(x + \nabla u_{n+1}) \text{Adj}(I + D^2 u_{n+1}) \xi_i \xi_j = \\ &= g(x + \nabla u_{n+1}) \det(I + D^2 u_{n+1}) \sum_{i,j=1}^d (I + D^2 u_{n+1})_{ij}^{-1} \xi_i \xi_j \geq \\ &\geq f_{n+1} K_3 |\xi|^2 \quad \text{per la stima precedente} \\ &\geq \frac{f}{C_1} K_3 |\xi|^2 \quad \text{per 2.} \\ &\geq K_6 |\xi|^2, \quad K_6 > 0. \end{aligned}$$

Notiamo che rimuovendo g dalle precedenti disuguaglianze, otteniamo che $\text{Adj}(I + D^2 u_{n+1})$ è una matrice u.p.d. e questo completa la dimostrazione di 1, per $n+1 \in \mathbb{N}$. Quindi concludiamo, per induzione, che 1-3 valgono $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ora proviamo che possiamo scegliere l'ampiezza del passo τ costante, come affermato in precedenza. Infatti da 1. segue che $\varphi_n \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ per costruzione, mentre da 2. e da 3. segue che $f_n \in C^\alpha(\Omega)$ e

$$0 < \frac{m_f}{C_1 M_g} \leq \frac{f_n(x)}{g(x + \nabla u_n)} \leq \frac{C_1 M_f}{m_g}.$$

Quindi, ad ogni step, sono soddisfatte tutte le condizioni per la stima (3.22), da cui segue che, indicato con $\Omega_r := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > r\}$,

$$\|\varphi_n\|_{C^{2,\alpha}(\Omega_r)} \leq K_7 \left[1 + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left\| \frac{f_n(x)}{g(x + \nabla u_n)} \right\|_{C^\alpha(\Omega)} \right]. \quad (3.28)$$

Poiché f_n e g sono Hölderiane con $m_g > 0$ su $[0, 1]^d$, possiamo concludere che

$$\left\| \frac{f_n}{g(\nabla\varphi_n)} \right\|_{C^\alpha(\Omega)} \leq \|f_n\|_{C^\alpha(\Omega)} \left\| \frac{1}{g} \right\|_{C^{\sqrt{\alpha}}(\Omega)} \left(1 + \|\nabla\varphi_n\|_{C^{\sqrt{\alpha}}(\Omega)}^{\sqrt{\alpha}} \right). \quad (3.29)$$

In (3.29) abbiamo usato il fatto che prese $\gamma \in C^\alpha(\Omega)$, $\sigma \in C^\beta(\Omega) \Rightarrow \gamma \circ \sigma \in C^{\alpha\beta}(\Omega)$ e vale $\|\gamma \circ \sigma\|_{C^{\alpha\beta}(\Omega)} \leq \|\gamma\|_{C^\alpha(\Omega)} \left[1 + \left(\|\sigma\|_{C^\beta(\Omega)} \right)^\alpha \right]$. Inoltre, se $\exists m_\sigma > 0$ t.c. $m_\sigma \leq \sigma \Rightarrow \frac{1}{\sigma} \in C^\beta(\Omega)$.

Se ψ è un'altra funzione $C^\alpha(\Omega) \Rightarrow \|\gamma\psi\|_{C^\alpha(\Omega)} \leq \|\gamma\|_{C^\alpha(\Omega)} + \|\psi\|_{C^\alpha(\Omega)}$.

A questo punto resta da stimare $\|\nabla\varphi_n\|_{C^{\sqrt{\alpha}}(\Omega)}$. Poiché $\nabla\varphi_n$ è la mappa che trasporta f_n in g , possiamo usare il *teorema (3.2.1) di Cordero-Erausquin* per dedurre che $\nabla\varphi_n$ è invertibile e quindi $\nabla\varphi_n \in \Omega$ che a sua volta implica che $\varphi_n \in [0, \sqrt{d}]$ quando $\Omega = [0, 1]^d$. Resta da stimare solo la componente Hölderiana $\sqrt{\alpha}$ -esima e per farlo usiamo (3.23). Vediamo che i termini di massimo $M(\varphi, y, r_2)$ possono essere uniformemente limitati e che l'unico problema potrebbe venire dai termini di minimo $m(\varphi_{n_y}, 0, a)$, con $a = 1$ o $R_y \geq 1$. Usando degli argomenti di analisi convessa, presentati per esempio in [43], possiamo provare che, poiché φ_n è uniformemente convessa per ogni n , abbiamo che $m(\varphi_{n_y}^*, 0, a) = \min \varphi_{n_y}^*(z)$, dove il minimo è preso sulla sfera $|z| = a$, $a \geq 1$ (con la periodicità noi possiamo aumentare la grandezza di Ω per includerlo all'interno e avere ancora una stima uniforme su φ_n e $\nabla\varphi_n$). Inoltre, $\nabla\varphi_{n_y}^*(z) = 0$ se e solo se $z = 0$, e $\nabla\varphi_{n_y}^*$ è strettamente monotona perché $\nabla\varphi_{n_y}$ lo è e $\nabla\varphi_{n_y}^{-1} = \nabla\varphi_{n_y}^*$. Osserviamo che l'unico possibile problema si ha quando $\nabla\varphi_{n_y}^*$ converge ad una funzione che è nulla fino a $|z| = a$. Questo significa che $|\nabla\varphi_{n_y}| = |\nabla\varphi_n(x+y) - \nabla\varphi_n(y)| \rightarrow +\infty$ quando $|x| \rightarrow 0$ e $n \rightarrow \infty$, per ogni y . Osserviamo ora che se aumentiamo la regolarità delle densità, $f \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, $g \in C^{3,\alpha}(\Omega)$, otteniamo che $f_n \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ ad ogni step. Questo ci dice che $\theta_n \in C^{4,\alpha}(\Omega)$ e quindi $\varphi_n \in C^{4,\alpha}(\Omega)$. Così facendo possiamo applicare (3.24) e aggirare il precedente problema. Otteniamo che la norma $C^{2,\alpha}(\Omega_r)$ di φ_n è uniformemente limitata e quindi dall'additività

e dalla periodicità la stessa stima vale per la norma $C^{2,\alpha}(\Omega)$. Questo ci dice anche che k_{r_n} e k_{θ_n} sono uniformemente limitate. Da questo segue che possiamo scegliere un $\tau \geq 1$ costante tale che tutte e tre le stime valgano per ogni $n \in \mathbb{N}$ per induzione. Inoltre, la successione $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è uniformemente limitata in $C^{2,\alpha}(\Omega)$ e equicontinua. Dal teorema di Ascoli-Arzelà, questa converge uniformemente in $C^{2,\beta}(\Omega)$ per $0 < \beta < \alpha$ alla soluzione u di (3.17), che è unica poiché abbiamo imposto che $\int_{\Omega} u dx = 0$. Infine, poiché la densità iniziale e quella finale sono $C^{2,\alpha}(\Omega)$, noi sappiamo che questa soluzione è in $C^{4,\beta}(\Omega)$. \square

Questa prova per induzione fornisce molte informazioni riguardanti le iterate creati dal metodo. Innanzitutto, dal fatto che $I + D^2 u_n$ è u.p.d. ad ogni step, segue che la successione $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di funzioni uniformemente convesse. Ricordiamo che l'equazione (3.12) è ellittica solo quando ci restringiamo allo spazio delle funzioni convesse. Pertanto l'algoritmo approssima la soluzione convessa dell'equazione di Monge-Ampère (3.12) con una successione di funzioni uniformemente convesse. Inoltre, ciò garantisce che l'equazione linearizzata sia strettamente ellittica e quindi abbia una soluzione unica (una volta fissata la costante). Si possono anche ottenere delle stime sulla velocità di convergenza del metodo. Infatti, assumendo che $\tau \geq 2k_{r_n} C_2$, abbiamo che

$$\|f - f_{n+1}\|_{C^\alpha(\Omega)} \leq \left(1 - \frac{1}{2\tau}\right) \|f - f_n\|_{C^\alpha(\Omega)}$$

che ci dice che $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ad f seguendo una convergenza geometrica di velocità di almeno $1 - 1/2\tau$. Per quanto riguarda l'ampiezza del passo τ , sarebbe molto utile, ma difficile, conoscere a priori quale valore selezionare per far convergere l'algoritmo. Tuttavia, da alcune stime dal basso usate nella dimostrazione, come per esempio

$$\tau \geq \frac{k_{r_n} C_2^2}{m_f \left(1 - \frac{1}{C_1}\right)}, \quad \tau \geq \frac{k_{r_n} C_2^2}{(C_1 - 1)m_f} \quad \text{o} \quad \tau \geq 2k_{r_n} C_2,$$

segue che il minimo valore richiesto per la convergenza potrebbe essere grande quando m_f è vicino allo 0 o quando uno fra $\|f\|_{C^\alpha(\Omega)}$ e $\|g\|_{C^\alpha(\Omega)}$ è grande.

Capitolo 4

Distanze di Wasserstein

In questo capitolo facciamo riferimento a [39] con l'obiettivo di capire come il trasporto ottimale possa essere usato per definire una metrica tra le misure di probabilità: in particolare definiremo la *p-distanza di Wasserstein*. In questo capitolo assumeremo che $c(x, y) = |x - y|^p$, con $p \in [0, +\infty)$ e X, Y siano sottoinsiemi di \mathbb{R}^d . Lavoreremo nello spazio delle misure di probabilità definite su $X \subseteq \mathbb{R}^d$ con p-esimo momento finito, già definito nell'osservazione 3:

$$\mathcal{P}_p(X) := \left\{ \mu \in \mathcal{P}(X) : \int_X |x|^p d\mu(x) < +\infty \right\}$$

. Introduciamo ora la definizione di p-distanza di Wasserstein e proviamo che è effettivamente una metrica:

Definizione 4.1. Siano $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(X)$, allora la *p-distanza di Wasserstein* è definita come

$$d_{W^p}(\mu, \nu) = \min_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \left(\int_{X \times X} |x - y|^p d\pi(x, y) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

La p-distanza di Wasserstein è la radice p-esima del minimo del problema di Kantorovic con funzione costo $c(x, y) = |x - y|^p$. L'ipotesi $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(X)$ è sufficiente per garantire che $d_{W^p}(\mu, \nu) < +\infty$, infatti $|x - y|^p \leq C(|x|^p + |y|^p)$ e quindi

$$d_{W^p}^p(\mu, \nu) \leq C \left(\int_X |x|^p d\mu(x) + \int_X |y|^p d\nu(x) \right) < +\infty.$$

Inoltre, esistono delle condizioni sufficienti per l'equivalenza delle p-distanze di Wasserstein. Infatti, per la disuguaglianza di Jensen, preso $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ vale

$$\left(\int_{X \times X} |x - y|^p d\pi(x, y) \right)^{\frac{1}{p}} \geq \int_{X \times X} |x - y| d\pi(x, y).$$

Quindi $d_{W^p}(\mu, \nu) \geq d_{W^1}(\mu, \nu)$. Inoltre, se X è limitato, allora $\forall x, y \in X$,

$$|x - y|^p \leq \left(\max_{w, z \in X} |w - z|^{p-1} \right) |x - y| = (\text{diam}(X))^{p-1} |x - y|.$$

Quindi,

$$\int_{X \times X} |x - y|^p d\pi(x, y) \leq (\text{diam}(X))^{p-1} \int_{X \times X} |x - y| d\pi(x, y).$$

Da questo segue che $d_{W^p}^p(\mu, \nu) \leq (\text{diam}(X))^{p-1} d_{W^1}(\mu, \nu)$.

A questo punto, per provare che d_{W^p} è una metrica, abbiamo bisogno di un lemma preliminare.

Lemma 4.0.1. *Siano $X, Y, Z \subseteq \mathbb{R}^d$. Date le misure di probabilità $\mu \in \mathcal{P}(X)$, $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ e $\omega \in \mathcal{P}(Z)$ e i piani di trasporto $\pi_1 \in \Pi(\mu, \nu)$ e $\pi_2 \in \Pi(\nu, \omega)$ esiste una misura $\gamma \in \mathcal{P}(X \times Y \times Z)$ tale che $P_{\#}^{X,Y} \gamma = \pi_1$ e $P_{\#}^{Y,Z} \gamma = \pi_2$, dove $P^{X,Y}(x, y, z) = (x, y)$ e $P^{Y,Z}(x, y, z) = (y, z)$ sono le proiezioni sulle prime due e le ultime due variabili, rispettivamente.*

Dimostrazione. Dal teorema di disintegrazione delle misure (Teorema 1.1.5) possiamo scrivere

$$\pi_1(A \times B) = \int_B \pi_1(A|y) d\nu(y)$$

per qualche famiglia di misure di probabilità $\pi_1(\cdot|y) \in \mathcal{P}(X)$, e analogamente per π_2 ,

$$\pi_2(B \times C) = \int_B \pi_2(C|y) d\nu(y).$$

Definiamo ora $\gamma \in \mathcal{M}(X \times Y \times Z)$ come

$$\gamma(A \times B \times C) = \int_B \pi_1(A|y) \pi_2(C|y) d\nu(y).$$

Allora,

$$\gamma(A \times B \times Z) = \int_B \pi_1(A|y) \pi_2(Z|y) d\nu(y) = \int_B \pi_1(A|y) d\nu(y) = \pi_1(A \times B).$$

Analogamente, $\gamma(X \times B \times C) = \pi_2(B \times C)$. Quindi $P_{\#}^{X,Y} \gamma = \pi_1$ e $P_{\#}^{Y,Z} \gamma = \pi_2$. \square

Proviamo che d_{W^p} è una metrica.

Teorema 4.0.2. *Sia $X \subseteq \mathbb{R}^d$ allora $d_{W^p} : \mathcal{P}_p(X) \times \mathcal{P}_p(X) \rightarrow [0, +\infty)$ è una metrica su $\mathcal{P}_p(X)$.*

Dimostrazione. Innanzitutto è chiaro che $d_{W^p}(\mu, \nu) \geq 0$ per ogni $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(X)$ e, dalla simmetria della funzione costo $|x - y|^p$ e dal fatto che $\pi \in \Pi(\mu, \nu) \Leftrightarrow S_{\#} \pi \in \Pi(\nu, \mu)$ dove $S(x, y) = (y, x)$, segue la simmetria di d_{W^p} . Ora se $\mu = \nu$ allora possiamo prendere $d\pi(x, y) = \delta_x(y) d\mu(x)$ e quindi

$$d_{W^p}^p(\mu, \nu) \leq \int_{X \times X} |x - y|^p d\pi(x, y) = 0.$$

Ora se $d_{W^p}(\mu, \nu) = 0$ allora esiste $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ tale che $x = y$ π -quasi ovunque. Quindi per ogni funzione test $f : X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_{X \times X} f(x) d\pi(x, y) = \int_{X \times X} f(y) d\pi(x, y) = \int_X f(y) d\nu(y).$$

Siccome questo vale per tutte le funzioni test f allora $\mu = \nu$. La disuguaglianza triangolare segue dal *lemma 4.0.1* e dalla disuguaglianza triangolare per le distanze L^p . Siano $\mu, \nu, \omega \in \mathcal{P}_p(X)$ e supponiamo che $\pi_{XY} \in \Pi(\mu, \nu)$ e $\pi_{YZ} \in \Pi(\nu, \omega)$ sono ottimali, i.e.

$$d_{W^p}^p(\mu, \nu) = \int_{X \times X} |x - y|^p d\pi_{XY}(x, y)$$

e

$$d_{W^p}^p(\nu, \omega) = \int_{X \times X} |y - z|^p d\pi_{YZ}(y, z).$$

Sia $\gamma \in \mathcal{P}(X \times X \times X)$ tale che $P_{\#}^{X,Y} \gamma = \pi_{XY}$ e $P_{\#}^{Y,Z} \gamma = \pi_{YZ}$, che esiste per il *lemma 4.0.1*. Sia $\pi_{XZ} = P_{\#}^{X,Z} \gamma$, allora,

$$\begin{aligned} \pi_{XZ}(A \times X) &= P_{\#}^{X,Z} \gamma(A \times X) = \gamma(\{(x, y, z) : P^{X,Z}(x, y, z) = (x, z) \in A \times X\}) = \\ &= \gamma(\{(x, y, z) : x \in A\}) = \gamma(A \times X \times X) = \pi_{XZ}(A \times X) = \mu(A). \end{aligned}$$

Analogamente $\pi_{XZ}(X \times B) = \omega(B)$. Quindi, $\pi_{XZ} \in \Pi(\mu, \omega)$. Ora,

$$\begin{aligned}
 d_{W^p}(\mu, \omega) &\leq \left(\int_{X \times X} |x - z|^p d\pi_{XZ}(x, z) \right)^{\frac{1}{p}} = \\
 &\quad \left(\int_{X \times X \times X} |x - z|^p d\gamma(x, y, z) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\
 &\leq \left(\int_{X \times X \times X} |x - y|^p d\gamma(x, y, z) \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{X \times X \times X} |y - z|^p d\gamma(x, y, z) \right)^{\frac{1}{p}} = \\
 &\quad \left(\int_{X \times X} |x - y|^p d\pi_{XY}(x, y) \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{X \times X} |y - z|^p d\pi_{YZ}(y, z) \right)^{\frac{1}{p}} = \\
 &\quad = d_{W^p}(\mu, \nu) + d_{W^p}(\nu, \omega).
 \end{aligned}$$

Questo prova la disuguaglianza triangolare. \square

Osservazione 10. Consideriamo il caso in cui $p = 2$ e $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(X)$ siano assolutamente continue rispetto alla misura di Lebesgue, i.e. $d\mu(x) = f(x)dx$ e $d\nu(x) = g(x)dx$. Sappiamo, dal *teorema di Brenier*, che la 2-distanza di Wasserstein si può scrivere

$$d_{W^2}(\mu, \nu) = \int_X |x - T^\dagger(x)|^2 f(x) dx,$$

dove T^\dagger è il gradiente di una funzione convessa.

Capitolo 5

Un'Applicazione alla Registrazione delle Immagini

La teoria del trasporto ottimale di massa, oltre a quelle già citate nell'introduzione, ha anche altre importanti applicazioni pratiche: dall'astrofisica [21] all'oceanografia [6]; dalla visione artificiale [36] all'elaborazione digitale delle immagini, per il trasferimento dei colori [19], il restauro virtuale [17], la nanoscopia ottica [9] e la registrazione di immagini mediche [40]. Nel campo dell'elaborazione digitale delle immagini uno dei compiti più comuni è, appunto, quello di determinare una corrispondenza geometrica fra immagini (che possono essere rappresentate come funzioni, o come densità di probabilità) prese dalla stessa scena con l'obiettivo di confrontarle e integrare le informazioni che contengono, al fine di ottenere dati più significativi. Questo processo rientra nella categoria della registrazione delle immagini. Possiamo pensare, per esempio, a due immagini acquisite in tempi diversi, con attrezzature diverse o da punti di vista diversi. Il processo di registrazione delle immagini avviene in più fasi: inizialmente, viene stabilita una misura di somiglianza (tipicamente una distanza quadratica) tra i set di dati, in modo che si possa quantificare la distanza tra un'immagine e un'altra dopo opportune trasformazioni. Tale misura può basarsi, per esempio, sulla somiglianza tra i livelli di intensità dei pixel, o tra altre caratteristiche delle immagini, come

i contorni di superficie, punti di riferimento anatomici, ecc. Successivamente, si trova la trasformazione che massimizza la somiglianza tra le immagini. Spesso questa è data come soluzione di un problema di ottimizzazione in cui le trasformazioni da considerare sono vincolate a soddisfare determinate proprietà, come nel caso delle due formulazioni del problema del trasporto. Infine, una volta trovata una trasformazione ottimale, questa viene utilizzata per integrare i dati.

Ci sono due tipi diversi di registrazione delle immagini: quella rigida e quella non-rigida. La registrazione rigida viene generalmente eseguita quando si presume che le immagini siano di oggetti che devono semplicemente essere ruotati e traslati l'uno rispetto all'altro per ottenere una corrispondenza. Quella non-rigida, d'altra parte, viene utilizzata quando a causa di differenze, di natura biologica, di acquisizione dell'immagine o entrambe, non può essere ottenuta alcuna corrispondenza tra le strutture di due immagini, se non attraverso la deformazione di una delle due. Contrariamente alle tecniche di registrazione rigida quelle di registrazione non rigida sono oggetto di significative attività di ricerca. È stato dimostrato che il trasporto ottimale di massa fornisce un buon metodo di registrazione non-rigida delle immagini, ma, come tutte le altre tecniche appartenenti a questa tipologia di registrazione, ha un costo computazionale elevato, specialmente per le registrazioni 3D.

Vediamo perché il trasporto ottimale può essere visto come una tecnica di registrazione non-rigida. Prendiamo per esempio due immagini a livelli di grigio: possiamo anche pensare che queste rappresentino delle distribuzioni di massa della quantità di luce "accumulata" in un determinato punto, $d\mu(x) = f(x)dx$, $d\nu(x) = g(x)dx$. Un pixel luminoso su un'immagine rappresenta una regione con più massa mentre un pixel più scuro corrisponderebbe a una regione con meno massa. Calcolare la mappa di trasporto ottimale tra queste immagini potrebbe rivelare il modo migliore (in termini di minimizzazione della distanza di trasporto) per spostare la massa dalla prima densità alla seconda, mostrando esattamente cosa sta cambiando sulle immagini e come

sta accadendo. Tra i vantaggi della tecnica del trasporto ottimale per la registrazione delle immagini c'è sicuramente il fatto che la mappa di trasporto è unica. Un altro vantaggio può essere il fatto che si tratta di un problema simmetrico, nel senso che la mappatura ottimale di un'immagine A in un'altra immagine B è l'inversa della mappatura ottimale di dell'immagine B in A. Tuttavia, in [34], Rehman sottolinea che il metodo del trasporto ottimale per la registrazione delle immagini è computazionalmente costoso. Ciò che cerca di fare Saumier in [40] è proprio trovare un metodo numerico efficiente per la risoluzione del problema del trasporto.

In ambito medico, la registrazione non-rigida può essere utilizzata, nel campo della diagnostica per immagini, per confrontare (registrare) i dati di un paziente rispetto ad un atlante anatomico, come ad esempio, nel caso dell'immagine dell'encefalo, l'Atlas di Talairach: si tratta di un sistema di coordinate 3D che viene utilizzato per mappare la posizione delle strutture cerebrali indipendentemente dalle differenze individuali nelle dimensioni e nella forma generale del cervello. C'è una sostanziosa letteratura sulle tecniche di registrazione di immagini mediche, si guardi [28] per una rassegna di questi metodi. Nel campo medico, una diagnosi precoce e accurata è essenziale per aumentare le possibilità di sopravvivenza di una persona malata. Un chirurgo, per esempio, durante un intervento al cervello, potrebbe utilizzare l'imaging in tempo reale per rilevare rapidamente, per esempio, l'apparizione di qualche aneurisma cerebrale e reagire in modo appropriato. Pertanto, avere accesso a un metodo rapido e preciso, che faccia un lavoro simile, potrebbe essere di grande aiuto per gli specialisti: il trasporto ottimale rappresenterebbe una valida soluzione, se si potesse ridurre il suo elevato costo computazionale.

Consideriamo le due scansioni MRI (Magnetic Resonance Imaging) del cervello presentate in Figura 4.1. Notiamo che poiché le scansioni sono nere, la loro rappresentazione a livelli di grigi contiene molti valori vicini o uguali a 0. Queste immagini sono prese dal database BrainWeb Simulated Brain

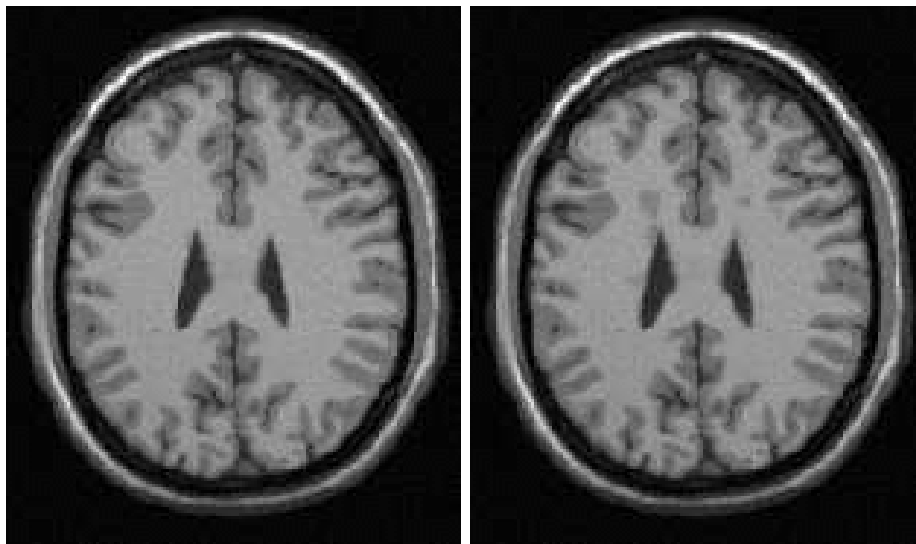


Figura 5.1: A sinistra: scansione MRI di un cervello sano (densità iniziale f); a destra: scansione MRI dello stesso cervello con lesioni da Sclerosi Multipla

dell'Università McGill [30] e rappresentano una sezione di cervello sano e una sezione, dello stesso cervello, in cui la malattia da sclerosi multipla, comunemente conosciuta come MS, si sta diffondendo. Questa malattia del sistema nervoso danneggia le guaine mieliniche attorno agli assoni del cervello e lascia cicatrici (o sclerosi) visibili attraverso una risonanza magnetica. È stata scelta la MS come test perché il suo processo di rilevamento si basa sull'identificazione di cicatrici e quindi lascia tracce simili a quelle dei tumori. Si può pensare che la scansione del cervello sano sia la densità iniziale f e quella del cervello malato la densità finale g . Saumier applica in [40] il suo algoritmo a queste due scansioni. Ovviamente, nella seconda immagine, le cicatrici sono posizionate nei punti in cui c'è una variazione di luminosità rispetto alla prima immagine. In questo caso non si ha accesso all'espressione analitica delle due densità f e g , ma bisogna considerare una loro approssimazione nei punti della griglia.

La mappa di trasporto, che sappiamo essere in questo caso della forma $T^\dagger(x) = x + \nabla u(x)$ dà precise informazioni su quanto è cambiato dalla prima scansione MRI alla seconda. Possiamo considerare la p -distanza di Wasser-

stein definita nel capitolo 4, per esempio per $p = 2$ (come in gran parte delle applicazioni pratiche):

$$d(\mu, \nu) = \int_{\Omega} |x - T^{\dagger}(x)|^2 f(x) dx = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 f(x) dx.$$

Questa quantità può, in un certo senso, misurare il cambiamento fra le due scansioni e quindi aiutare a tenere sotto controllo la crescita della malattia. Ovviamente un alto valore di questa quantità suggerisce che la malattia è già in uno stato avanzato.

Bibliografia

- [1] C. D. Aliprantis, K. C. Border *Infinite Dimensional Analysis-A Hitchhiker's Guide* Third Edition, Springer, 2006.
- [2] L. Ambrosio, *Lecture Notes on Optimal Transport Problems*, Springer, Berlin Heidelberg, 2003.
- [3] L.Ambrosio, N.Gigli, G.Savaré, *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, second edition, 2008.
- [4] L. Ambrosio e A. Pratelli, *Existence and stability results in the L1 theory of optimal transportation*, Springer, Berlin Heidelberg, 2003.
- [5] H. Bauer, *Measure and Integration Theory*, Berlin, de Gruyter, Studies in Math. vol. 26, 2001.
- [6] J. Benamou and Y. Brenier, *Weak existence for the semigeostrophic equations formulated as a coupled Monge-Ampere/transport problem*, SIAM Journal on Applied Mathematics, 58(5):1450–1461, 1998.
- [7] Y. Brenier, U. Frisch, M. Henon, G. Loeper, S. Matarrese, R. Mohayaee, A. Sobolevskii, *Reconstruction of the early Universe as a convex optimization problem*, 2003.
- [8] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer, Verlag New York, 2010.

-
- [9] | C. Brune, *4D imaging in tomography and optical nanoscopy*, PhD thesis, University of Münster, Germany, 2010.
- [10] L. A. Caffarelli, *The regularity of mappings with a convex potential*, J. Amer. Math. Soc. vol. 5, 1992.
- [11] L. A. Caffarelli, *Boundary regularity of maps with convex potentials*, II, Ann. of Math., 1996.
- [12] L. Caffarelli, X. Cabre, *Fully Nonlinear Elliptic Equations*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. 43, American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.
- [13] L.A.Caffarelli, *Monotonicity of optimal transportation and the fkg and related inequalities*, Commun. Math. Phys., 2000.
- [14] G. Choquet, *Lectures on analysis, Vol. II: Representation theory*, Inc., New York-Amsterdam, 1969.
- [15] Cordero-Erausquin, *Sur le transport de mesures périodiques*, C. R. Acad. Sci. Paris, 1999.
- [16] P. Delanoë, *Classical solvability in dimension two of the second boundary value problem associated with the Monge-Ampère operator*, 1991.
- [17] J. Delon, *Movie and video scale-time equalization application to flicker reduction*, IEEE Transactions on Image Processing, 15(1):241–248, 2006.
- [18] L. C. Evans and W. Gangbo, *Differential equations methods for the Monge-Kantorovich mass transfer problem*, volume 653, American Society, 1999.
- [19] S.Ferradans, N.Papadakis, G.Peyre, J.-F. Aujol, *Regularized Discrete Optimal Transport*, SIAM Journal on Imaging Sciences, July, 2013.
- [20] L. Forzani and D. Maldonado, *Properties of the Solutions to the Monge-Ampère Equation*, Nonlinear Analysis vol. 57, 2004.

- [21] U. Frisch, s. Matarrese, R. Mohayae, and A. Sobolevski. *A reconstruction of the initial conditions of the universe by optimal mass transportation*, Nature,417:260–262, 2002.
- [22] W. Gangbo and R. J. McCann, *The geometry of optimal transportation*, Acta Mathematica, 1996.
- [23] D.Gilbarg, N.S.Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, 2001.
- [24] C. Gutiérrez, *The Monge-Ampère Equation*, Birkhäuser, Basel, 2001.
- [25] L.V.Kantorovich: *On the transfer of masses*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 1942.
- [26] G. Loeper, F. Rapetti, *Numerical solution of the Monge-Ampere equation by a Newton's method*. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. 1 340(4), 319–324 (2005)
- [27] J. Liu, N.S. Trudinger and X.J. Wang, *Interior $C^{2,\alpha}$ Regularity for Potential Functions in Optimal Transportation*, Comm. Part. Diff. Eqns. vol. 35, 2010.
- [28] J.B.A. Maintz and M.A. Viergever, *A survey of medical image registration*, Medical Image Analysis 2 (1998).
- [29] R.J. McCann, *Existence and uniqueness of monotone measure-preserving maps*, Duke Math.J., 1995
- [30] McConnell Brain Imaging Centre (BIC) of the Montreal Neurological Institute. Brainweb simulated brain database. <http://www.bic.mni.mcgill.ca/brainweb/>.
- [31] G. Monge. *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*, De l'Imprimerie Royale, 1781.

-
- [32] K.R. Parthasarathy, *Probability Measures on Metric Spaces*, Academic Press, New York - London, 1967.
- [33] K.B.Peterson and M.S.Pederson, *The matrix cookbook*, 2008.
- [34] G.Pryor J.Melonakos T.Rehman, E.Haber and A.Tannenbaum, *3d non-rigid registration via optimal mass transport on the GPU*, Medical Image Analysis, 13:931–940, 2009.
- [35] R.T.Rockafellar, *Characterization of the subdifferential of convex functions*, Pacific J. Math. 17, 1966.
- [36] Y. Rubner, C. Tomasi, and L. Guibas, *A metric for distributions with applications to image databases*, InIEEE International Conference on Computer Vision(ICCV'98), pages 59–66, 1998.
- [37] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 1986 (3rd edition).
- [38] Y.Saad, *Iterative methods for sparse linear systems*, Second Edition. SIAM, 2003.
- [39] F. Santambrogio, *Optimal transport for applied mathematicians*, Birkäuser Springer, Basel, 2015.
- [40] L.-P. Saumier, M. Agueh, B. Khouider, *An efficient numerical algorithm for the L^2 optimal transport problem with periodic densities*, IMA J. Appl. Math. 80(1), 135–157 (2015)
- [41] R. L. Schilling, *Measures, Integrals and Martingales*, Cambridge University Press, 2006.
- [42] L. Schwartz, *Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures*, Tata Institute of Fundamental Research, Oxford University Press, London, 1973.
- [43] B. Simon, *Convexity: An Analytic Viewpoint*, Cambridge University Press, 2011.

-
- [44] J.Strain, *Fast spectrally-accurate solution of variable-coefficients elliptic problems*, 1994.
- [45] V. N. Sudakov, *Geometric problems in the theory of infinite-dimensional probability distribution*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 1979.
- [46] N.S.Trudinger, X.J.Wang, *On the second boundary value problem for Monge-Ampère type equations and optimal transportation*.
- [47] J. Urbas, *On the second boundary value problem for equations of Monge-Ampère type*, J. Reine Angew. Math., 1997.
- [48] C. Villani, *Optimal Transport, Old and New*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 338, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
- [49] C. Villani, *Topics in Optimal Transportation*, American Mathematical Society, 2003.

