

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Matematica

INSIEME  
DI KAKEYA

Tesi di Laurea in Analisi Funzionale

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
Nicola Arcozzi

Presentata da:  
Camilla Cassanelli

Sessione unica  
Anno Accademico 2018/2019

*Alla mia famiglia.*

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>Richiami</b>	<b>7</b>
<b>1 Costruzione dell'insieme di Besicovitch e Kakeya</b>	<b>9</b>
1.1 Insieme di Besicovitch . . . . .	9
1.2 Problema di Kakeya . . . . .	17
<b>2 Il doppio approccio</b>	<b>20</b>
2.1 Relazione tra insiemi di Lebesgue misurabili e insiemi di rette . . . . .	21
2.2 Costruzione dell'insieme di Besicovitch utilizzando la dualità . . . . .	23
2.3 Problema di Besicovitch e Kenney . . . . .	24
2.4 Insieme di Besicovitch in dimensione maggiore . . . . .	26
2.5 Conseguenze delle costruzioni di Besicovitch e Kakeya . . . . .	28
<b>3 Analisi armonica</b>	<b>30</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>34</b>

# Introduzione

La seguente trattazione inizia con un excursus storico riguardante il Problema di Kakeya, le cui evoluzioni durante gli anni sono state molteplici.

Nel 1917 Besicovitch, lavorando alla congettura di Riemann, secondo cui data una funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrabile, è possibile trovare una coppia di assi cartesiani (ortogonali)  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  tali che le funzioni  $x \rightarrow f(x, y)$  e  $y \rightarrow \int f(x, y)dx$  siano Riemann-integrabili  $\forall y \in \mathbb{R}$ , riuscì a trovare un controesempio usando quelli che sarebbero diventati gli insiemi di Besicovitch. Negli stessi anni Kakeya, un matematico giapponese, si apprestava a voler risolvere un problema analogo, ovvero trovare l'area dell'insieme convesso più piccolo all'interno del quale un segmento unitario può essere ruotato di  $180^\circ$  senza lasciare l'insieme. Inizialmente ipotizzò che il triangolo equilatero con altezza unitaria fosse il più piccolo di tali insiemi, ma il matematico Kubota notò che senza l'ipotesi di convessità, sarebbe stato possibile considerare un insieme più piccolo, vale a dire un ipercicloide a tre cuspidi. Tale congettura nel caso convesso fu dimostrata da Pal nel 1921 e divenne nota come problema di Kakeya. Poco dopo aver lasciato la Russia nel 1924, Besicovitch si rese conto che una semplice modifica al suo insieme forniva una soluzione al problema di Kakeya di misura arbitrariamente piccola.

Fu lui nuovamente, nel 1964, ad apportare uno tra gli sviluppi successivi più significativi trovando una relazione fondamentale tra gli insiemi di Besicovitch e la teoria geometrica della misura. Sfruttò le tecniche della reciprocità polare per dimostrare che l'esistenza di tali insiemi segue come un semplice duplice risultato dai teoremi di proiezione per insiemi misurabili linearmente irregolari.

Negli anni successivi sono stati scritti numerosi articoli che descrivono varianti del problema di Kakeya, i quali hanno trovato applicazione nella risoluzioni di alcuni quesiti di

analisi armonica. Sono stati, ad esempio, costruiti insiemi piani di misura zero contenenti copie di tutti i poligoni o cerchi di tutti i raggi e si è cercata la soluzione anche in dimensioni superiori.

Il seguente elaborato di tesi si propone di analizzare il problema di Kakeya, cercando di trovare una risposta alla seguente domanda: "Qual è la figura più piccola possibile in cui si può ruotare un ago di  $180^\circ$ ?"

Viene trattato inizialmente il caso bidimensionale, cercando di analizzare la scoperta di Besicovitch: è possibile ruotare un ago in un'area piccola a piacere. Consideriamo due rette parallele, abbiamo dimostrato che per spostare un ago da una retta parallela all'altra ricoprendo sempre la minima area possibile è necessario comporre due rotazioni con una traslazione; tale movimento presenta la straordinaria proprietà di essere in grado di allungarsi all'infinito, consentendo una riduzione illimitata dell'area occupata.

Cercando di risolvere il problema di Kakeya, viene naturale porsi due domande:

- esistono una o più soluzioni?
- se sì, quali sono?

I primi matematici che lavorarono al problema supposero vera l'esistenza di tale figura, preoccupandosi di determinarne l'area. In che modo Besicovitch ha fatto scoprire figure la cui piccolezza è illimitata ma nelle quali è possibile ruotare l'ago? Da qua deriva la costruzione di Besicovitch analizzata nel primo capitolo di questo elaborato di tesi; partendo da una semplice figura, spezzettandola e poi sovrapponendone i pezzi, Besicovitch dimostrò che la piccolezza dell'area è illimitata. Se consideriamo un caso particolare di domini convessi il problema di Kakeya ammette soluzione: nel 1921 Julius Pal dimostrò che non esiste un dominio convesso più piccolo del triangolo equilatero di altezza unitaria e che consente di ruotare l'ago. Nel contesto invece dei domini stellati il problema non è stato ancora risolto, viene solo dimostrato nel 1971 da Cunningham che l'area deve essere maggiore di  $\frac{\pi}{8}$ .

A sostegno della tesi di Besicovitch troviamo un'importante scoperta dovuta allo studio matematico del moto browniano: su un piano una traiettoria browniana forma una superficie senza area. Possiamo, quindi, riformulare il problema di Kakeya nel modo seguente: esiste una figura di area nulla in cui è possibile ruotare l'ago di  $180^\circ$ ?

Si dimostra che la risposta è affermativa, tuttavia, per come vengono costruite le figure, dividendole in un numero di pezzi e poi sovrapponendoli, sembrano occupare uno spazio sempre più denso. Per questa ragione non parliamo più di area ma di dimensione frattale (di Hausdorff).

La trattazione segue con l'intento di trovare una risposta alle seguenti domande:

- Qual è l'oggetto finale della successione di Besicovitch?
- Qual è la sua dimensione frattale?

Occorre innanzitutto apporre una modifica al problema di Kakeya, in modo tale da renderlo più debole: all'ago non viene più richiesto di muoversi all'interno della figura ma semplicemente di poter essere posizionato in tutte le direzioni possibili al suo interno. Infatti si possono trovare figure all'interno delle quali l'ago può occupare tutte le direzioni del piano senza che sia possibile il pieno movimento rotatorio. In questo modo, togliendo l'ipotesi di continuità, la figura che risolve il problema rimane confinata in un'area ben definita e non si estende all'infinito; si dimostra che la dimensione frattale di tale figura è 2.

Quindi la figura è quella che si definisce "una superficie senza area".

Si passa poi ad analizzare il caso di dimensione maggiore di due. Nello spazio tridimensionale il problema di Kakeya equivale a considerare oggetti tridimensionali che contengono l'ago in tutte le direzioni dello spazio. La formulazione in tre dimensioni del problema è dunque la seguente: esiste un oggetto che contiene l'ago in tutte le direzioni dello spazio di volume minore? La risposta, come nel caso bidimensionale, è che tale oggetto esiste e il suo volume è zero. Anche in questo caso si vuole determinarne la dimensione frattale, che si congetture essere uguale a tre. Pertanto, tra figure solide di volume zero, quelli che verificano la condizione di Kakeya sono necessariamente i più densi possibili. Tale congettura non è mai stata convalidata e il risultato più avanzato che conosciamo, dovuto ai matematici Katz, Laba e Tao, è il seguente: la dimensione frattale di un tale oggetto è necessariamente maggiore di 2,5 (risultato pubblicato nel 1999). Un ragionamento analogo nel caso di dimensione maggiore di tre, porta alla conclusione che la dimensione frattale non può essere ridotta.

In generale la congettura di Kakeya risulta essere che: Nello spazio  $n$ -dimensionale, la dimensione frattale di un oggetto che contiene l'ago in tutte le direzioni è  $n$ . In sintesi, potrebbe esserci una riduzione del "volume" fino a quando non viene annullata, ma la dimensione rimane incomprimibile.

# Richiami

Per lo studio del problema di Kakeya sono richieste alcune conoscenze di base. Riporto di seguito alcune nozioni fondamentali.

**Definizione 1.** *Un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  è un insieme di misura nulla secondo Lebesgue se per ogni  $\epsilon > 0$  può essere coperto con un insieme numerabile di prodotti di  $n$  intervalli il cui volume totale è al massimo  $\epsilon$ .*

*Osservazione.* Si definisce  $\mathcal{L}^n$  come la misura di Lebesgue  $n$ -dimensionale e  $\mathcal{H}^s$  come la misura di Hausdorff  $s$ -dimensionale.

*Osservazione.* Si definisce il limite superiore di una sequenza di insiemi  $\{E_j\}$  come  $\lim_{j \rightarrow \infty} \bar{E}_j = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j$

**Definizione 2. MISURA DI HAUSDORFF ESTERNA:** *Sia  $C$  la classe di tutti i sottoinsiemi di  $X$ , per ogni numero reale  $s$  sia  $p_s$  la funzione  $A \mapsto \text{diam}(A)^s$  su  $C$ . La misura di Hausdorff esterna di dimensione  $s$ , indicata con  $H^s$  è la misura esterna corrispondente alla funzione  $p_s$  su  $C$ . Quindi per ogni sottoinsieme  $E$  di  $X$*

$H_\delta^s(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(A_i)^s \right\}$  *dove l'estremo inferiore è preso sulle successioni  $\{A_i\}_i$  che ricoprono  $E$  con insiemi di diametro  $\leq \delta$ .*

*Allora  $H^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(E)$ . Quindi la dimensione di Hausdorff si definisce come l'estremo inferiore di tutti gli  $h > 0$  tali che, per ogni  $\delta > 0$ ,  $E$  può essere coperto da una quantità numerabile di insiemi chiusi di diametro  $\leq \delta$ , e la somma di tutte le potenze  $s$ -esime di questi diametri è minore o uguale a  $h$ .*

*Osservazione.* Esistono insiemi la cui dimensione di Hausdorff non è intera. Per questo motivo si parla di dimensione frattale.

Nella teoria geometrica della misura le dimensioni frattali, spesso indicata con  $D$  sono una quantità statistiche che danno un'indicazione di quanto un insieme riempie lo spazio. La definizione di dimensione frattale non è unica, infatti vi sono diverse specifiche definizioni. Le più importanti sono la dimensione di Hausdorff, la dimensione di Minkowski-Bouligand, la dimensione di Rényi e la dimensione packing. In questo elaborato di tesi useremo la dimensione di Hausdorff.

**Definizione 3.** *L'insieme di Nikodym è un sottoinsieme del quadrato unitario in  $\mathbb{R}^2$  con misura di Lebesgue nulla, tale che, dato un qualsiasi punto dell'insieme, esiste una retta che interseca l'insieme solo in quel punto.*

*Osservazione.* Un insieme di Nikodym esiste.

**Teorema 0.0.1. TEOREMA DI FUBINI:** *Siano  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  e  $(Y, \mathcal{F}, \lambda)$  due spazi di misura  $\sigma$ -finiti. Ad ogni funzione  $f(x, y)$  che sia  $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ -misurabile su  $X \times Y$  e ad ogni  $x \in X$  si può associare una funzione  $f_x$  definita in  $Y$  nel modo seguente:  $f_x(y) = f(x, y)$ . Analogamente si definisce per ogni  $y \in Y$  la funzione  $f_y$  tale che  $f_y(x) = f(x, y)$ . Entrambe le funzioni sono  $\mathcal{B}$ -misurabile e  $\mathcal{F}$ -misurabile. A questo punto possiamo enunciare il Teorema di Fubini, che afferma che:*

- *Se la funzione  $f$  è positiva e se:  $\phi(x) = \int_Y f_x d\lambda$  e  $\psi(y) = \int_X f_y d\mu$  allora  $\phi$  è  $\mathcal{F}$ -misurabile e  $\psi$  è  $\mathcal{B}$ -misurabile, inoltre:  $\int_X \phi d\mu = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \lambda) = \int_Y \psi d\lambda$ .*
- *Se la funzione  $f$  è complessa e se:  $\phi^*(x) = \int_Y |f_x| d\lambda$  e  $\int_X \phi^* d\mu < \infty$  allora  $f \in \mathcal{L}^1(\mu \times \lambda)$*
- *Se la funzione  $f \in \mathcal{L}^1(\mu \times \lambda)$  allora  $f_x \in \mathcal{L}^1(\lambda)$  per quasi tutti  $x \in X$  e  $f_y \in \mathcal{L}^1(\mu)$  per quasi tutti  $y \in Y$ . Inoltre, per le funzioni definite in precedenza quasi ovunque si ha che  $\phi(x) \in \mathcal{L}^1(\mu)$  e  $\psi(y) \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ .*

# Capitolo 1

## Costruzione dell'insieme di Besicovitch e Kakeya

In questo primo capitolo si costruisce un insieme di misura arbitrariamente piccola dove un segmento unitario si possa muovere liberamente.

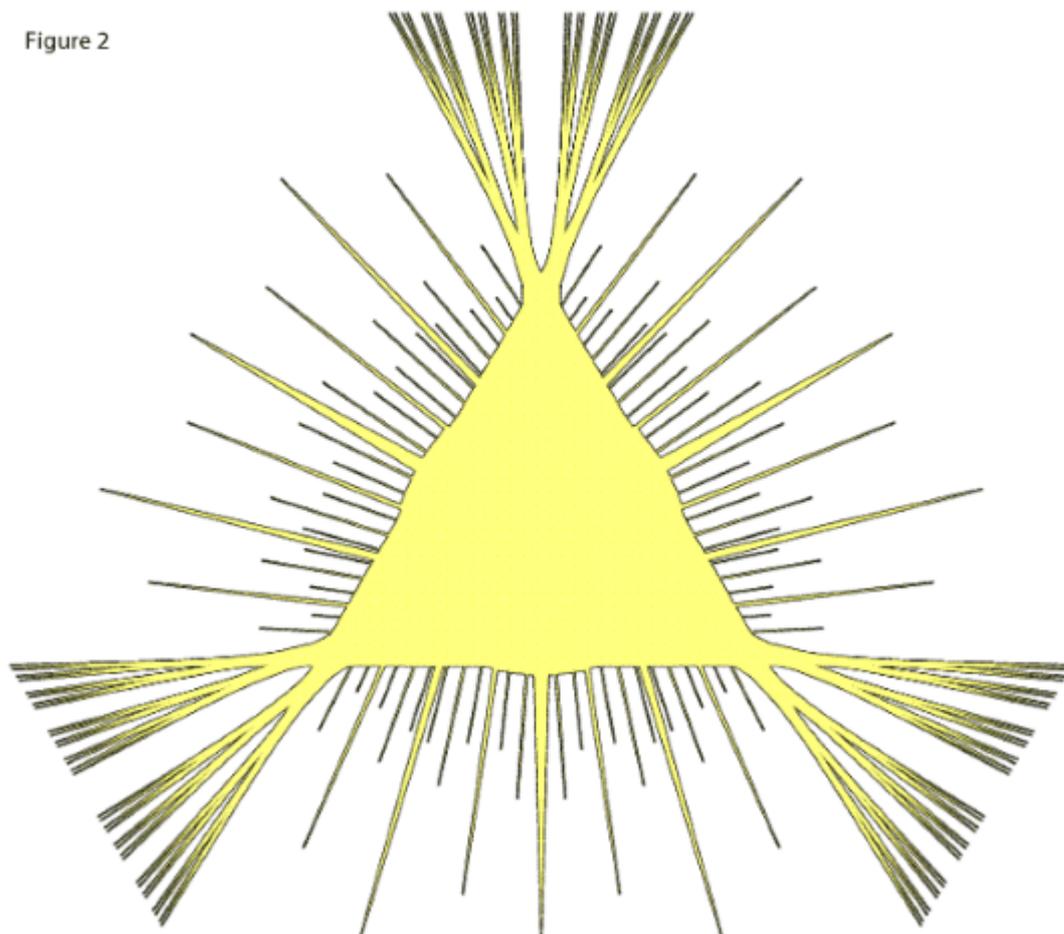
### 1.1 Insieme di Besicovitch

**Problema 1.1.0.1.** *Esiste un insieme di misura nulla contenente un segmento in ogni direzione?*

**Problema 1.1.0.2.** *esiste un insieme di misura arbitrariamente piccola in cui muovere un segmento unitario ruotandolo di  $180^\circ$ ?*

*Osservazione.* L'idea di base è quella di formare un "albero di Perron", una figura ottenuta dalla suddivisione di un triangolo equilatero di altezza unitaria in tanti piccoli triangoli, della stessa altezza, dividendo la base e facendo scorrere questi triangoli variando le distanze lungo la base  $L$ . Tale figura contiene segmenti di lunghezza unitaria in tutte le direzioni con angoli di almeno  $60^\circ$  rispetto a  $L$ . La difficoltà è mostrare che un insieme di misura arbitrariamente piccola si possa ottenere in questo modo.

Figure 2



**Lemma 1.1.1.** *Considero un triangolo  $T$  di base  $L$ . Divido la base in due segmenti uguali in modo da ottenere due triangoli  $T_1$  e  $T_2$  di base  $b$  e altezza  $h$ . Sia  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ . Se  $T_2$  viene fatto scorrere di una distanza  $2(1 - \alpha)b$  lungo  $L$  per sovrapporlo a  $T_1$  la figura risultante  $S$  consiste in un triangolo  $T'$  simile al triangolo  $T$  con*

$$|T'| = \alpha^2 |T| \quad (1.1)$$

*e due triangoli ausiliari  $A_1$  e  $A_2$ . Da questa costruzione l'area di  $S$  è data da:*

$$|S| = (\alpha^2 + 2(1 - \alpha)^2) |T| \quad (1.2)$$

*Dimostrazione.* Calcoliamo l'area dei triangoli  $A_1$  e  $A_2$  e  $T'$ , dove

$$|S| = |A_1| + |A_2| + |T'| \quad (1.3)$$

$T'$  è simile a  $T$  e la base di  $T'$  ha lunghezza  $2b - 2(1 - \alpha)b = 2b\alpha$  perciò  $|T'| = \alpha^2|T|$ . Per calcolare l'area di  $A_1$  e  $A_2$  disegniamo una retta parallela alla base  $L$  che passa attraverso il punto di intersezione di  $A_1$  e  $A_2$ , ottenendo quattro triangoli  $A_{1u}$ ,  $A_{1l}$ ,  $A_{2u}$ ,  $A_{2l}$ . Si osserva che  $A_{1u}$  è simile a  $T_1$  in rapporto  $(1 - \alpha)$  e  $A_{2u}$  è simile a  $T_2$  sempre in rapporto  $(1 - \alpha)$ . Inoltre,  $A_{2l}$  è congruente a  $A_{1u}$ , e  $A_{1l}$  è congruente a  $A_{2u}$ . Allora tutti e quattro i triangoli hanno base di lunghezza  $(1 - \alpha)b$  e altezza  $(1 - \alpha)h$ , quindi:

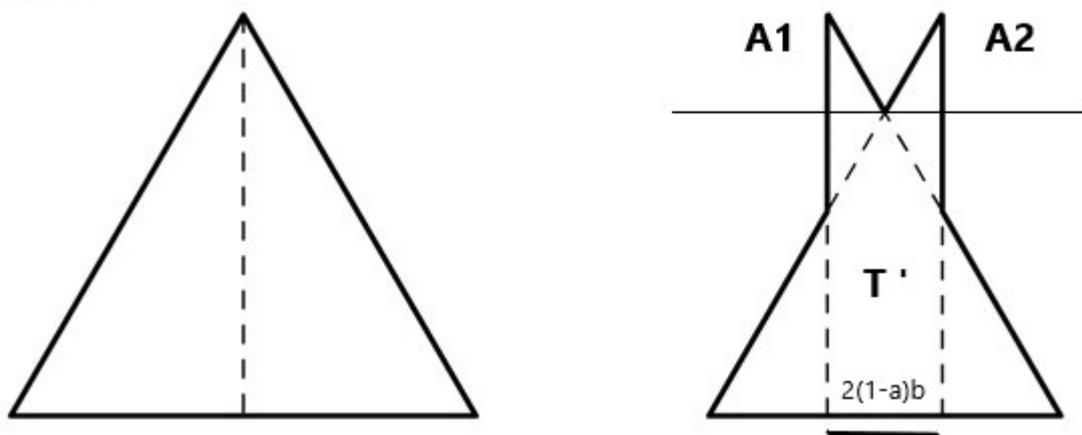
$$|A_{1u}| = |A_{1l}| = |A_{2u}| = |A_{2l}| = \frac{1}{2}(1 - \alpha)^2|T| \quad (1.4)$$

allora:

$$|S| = |T'| + |A_1| + |A_2| = (\alpha^2 + 2(1 - \alpha)^2)|T| \quad (1.5)$$

□

Figure 1

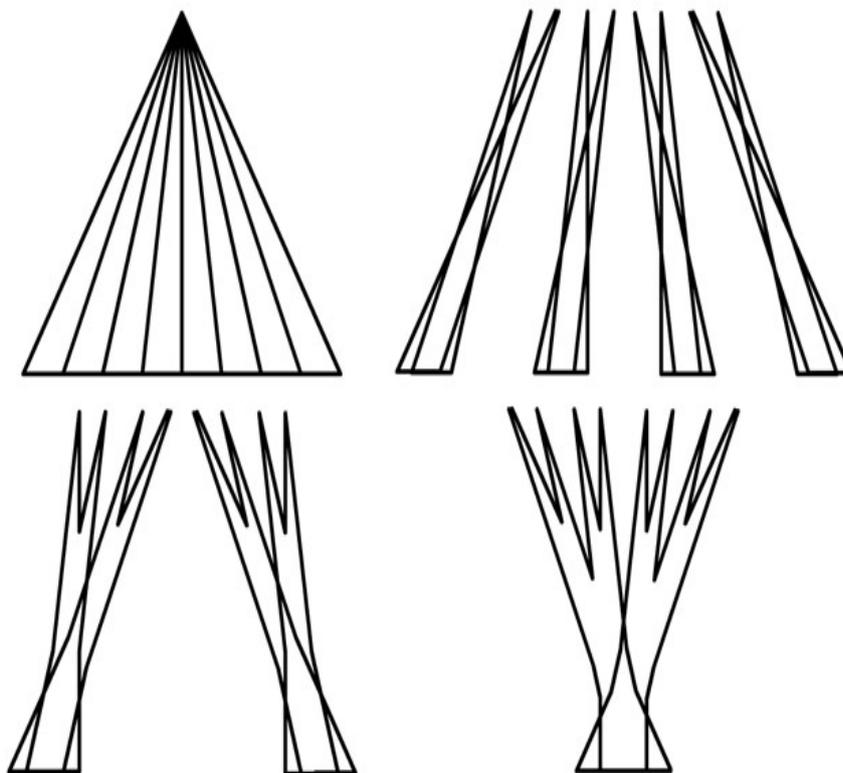


*Osservazione.* Una analogia formulazione del lemma precedente: Siano  $T_1$  e  $T_2$  triangoli adiacenti con base su  $L$ , di base  $b$  e altezza  $h$ . Sia  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ . Se  $T_2$  viene fatto scorrere lungo  $L$  di una distanza  $2(1-\alpha)b$ , sovrapponendolo a  $T_1$ , la figura risultante  $S$  consiste in un triangolo  $T$  omotetico al triangolo  $T_1 \cup T_2$  con  $\mathcal{L}^2(T) = \alpha^2 \mathcal{L}^2(T_1 \cup T_2)$  e due triangoli ausiliari. Allora ottengo una riduzione d'area data da:

$$\mathcal{L}^2(T_1 \cup T_2) - \mathcal{L}^2(S) = \mathcal{L}^2(T_1 \cup T_2)(1 - \alpha)(3\alpha - 1) \quad (1.6)$$

Nel seguente teorema dimostriamo la generalizzazione del lemma precedente:

**Teorema 1.1.2.** *Sia  $T$  un triangolo di base  $L$ . Divido la base di  $T$  in  $2^k$  segmenti uguali in modo da ottenere  $2^k$  triangoli elementari  $T_1, \dots, T_{2^k}$ . Scegliendo  $k$  abbastanza grande è possibile traslare i triangoli lungo  $L$  in modo tale che l'area della figura risultante  $S$  sia piccola quanto desiderato. Inoltre, se  $V$  è un insieme aperto contenente  $T$ , tale risultato può essere ottenuto con  $S \subset V$*



*Dimostrazione.* Fissato un valore di  $\alpha$ , la dimostrazione segue dal lemma precedente ripetuto un numero di volte. Innanzitutto lavoriamo con coppie consecutive di triangoli elementari. Per ogni  $i$  ( $1 \leq i \leq 2^{k-1}$ ) facciamo scorrere  $T_{2i}$  lungo  $L$  rispetto a  $T_{2i-1}$ , in questo modo si ottiene una figura  $S_i^1$  formata da un triangolo  $T_i^1$  (omotetico a  $T_{2i-1} \cup T_{2i}$ ) e due triangoli ausiliari. Dal lemma precedente ciò implica che  $\mathcal{L}^2(T_i^1) = \alpha^2 \mathcal{L}^2(T_{2i-1} \cup T_{2i})$  con riduzione di area  $(1 - \alpha)(3\alpha - 1)\mathcal{L}^2(T_{2i-1} \cup T_{2i})$  (confrontando  $S_i^1$  con  $T_{2i-1} \cup T_{2i}$ ). Successivamente consideriamo  $S_i^1$ . Per ogni  $1 \leq i \leq 2^{k-2}$  traslo  $S_{2i}^1$  rispetto a  $S_{2i-1}^1$  per ottenere  $S_i^2$ . Poiché un lato di  $T_{2i-1}^1$  è parallelo e uguale al lato opposto di  $T_{2i}^1$  possiamo farlo, dal lemma precedente, in modo che  $S_i^2$  includa un triangolo  $T_i^2$  con  $\mathcal{L}(T_{2i}^1) = \alpha^2[\mathcal{L}(T_{2i-1}^1) + \mathcal{L}(T_{2i}^1)]$ . Allora la sovrapposizione di  $T_{2i-1}^1$  e  $T_{2i}^1$  si traduce in una riduzione dell'area di almeno:

$$(1 - \alpha)(3\alpha - 1)[\mathcal{L}^2(T_{2i-1}^1) + \mathcal{L}^2(T_{2i}^1)] = (1 - \alpha)(3\alpha - 1)\alpha^2 \mathcal{L}^2(T_{4i-3} \cup T_{4i-2} \cup T_{4i-1} \cup T_{4i}) \quad (1.7)$$

Continuando in questo modo, al  $(r + 1)$ -esimo passaggio otteniamo  $S_i^{r+1}$  spostando  $S_{2i}^r$  rispetto a  $S_{2i-1}^r$  ( $1 \leq i \leq 2^{k-r}$ ), in modo che la sovrapposizione dei triangoli  $T_{2i-1}^r$  e  $T_{2i}^r$  comporti una riduzione dell'area di almeno  $(1 - \alpha)(3\alpha - 1)\alpha^{2r}$  volte l'area totale dei triangoli elementari spostati per formare  $S_{2i-1}^r$  e  $S_{2i}^r$ . Finiamo con una singola figura  $S_1^k$  che prendiamo come  $S$ . Confrontando l'area di  $\bigcup_i S_i^r$  per i successivi valori di  $r$ , si può notare che:

$$\mathcal{L}^2(S) \leq \mathcal{L}^2(T) - (1 - \alpha)(3\alpha - 1)(1 - \alpha^2 + \dots + \alpha^{2(k-1)})\mathcal{L}^2(T) = \left(1 - \frac{(3\alpha - 1)(1 - \alpha^{2k})}{(1 + \alpha)}\right)\mathcal{L}^2(T) \quad (1.8)$$

Scelto  $\alpha$  abbastanza vicino a 1 (in modo tale che  $(3\alpha - 1)(\alpha + 1)$  sia vicino a 1) e scelto  $k$  abbastanza grande, possiamo prendere  $\mathcal{L}^2(S)$  piccolo quanto richiesto. Per concludere, se la lunghezza della base di  $T$  è  $b$ , quindi fissando  $T_1$  e posizionando gli altri triangoli elementari rispetto a  $T_1$ , nessun triangolo sarà stato spostato di una distanza maggiore di  $b$  durante la costruzione. Allora, dividendo il triangolo originale in sotto-triangoli con base al massimo  $\epsilon$ , ed eseguendo l'operazione descritta sopra su ciascuno di questi sotto-triangoli, possiamo ottenere una figura di un'area arbitrariamente piccola spostando i triangoli elementari non più di  $\epsilon$ . Se  $\epsilon$  è scelto abbastanza piccolo, tale figura sarà contenuta nell'insieme aperto  $V$ .  $\square$

*Osservazione.* Schoenberg mostrò che la più piccola area ottenuta facendo scorrere i triangoli lungo la base quando  $T$  è diviso in  $m$  triangoli è  $A_m = O(1/\log(m))$ .  $A_m$  però non è detto che decresca in modo monotono con  $m$ , l'unica ipotesi necessaria per far funzionare la dimostrazione è che  $\lim_{m \rightarrow 0} A_m = 0$ . Per costruire l'insieme di Besicovitch utilizziamo il teorema precedente 1.1.2.

**Teorema 1.1.3.** *Esiste un insieme piano con misura di Lebesgue nulla che contiene un segmento unitario in ogni direzione.*

*Dimostrazione.* Costruiamo un insieme  $F$  di misura nulla contenente segmenti unitari in ogni direzione in un settore di  $60^\circ$ . Prendendo l'unione di  $F$  con copie congruenti ad  $F$  ruotate di  $60^\circ$  e  $120^\circ$ , si ottiene un insieme con le proprietà richieste. Tale costruzione dell'insieme consiste in applicazioni ripetute del teorema 1.1.2.

Sia  $S_1$  un triangolo equilatero con altezza unitaria e base su una retta  $L$  e sia  $V_1$  un insieme aperto contenente  $S_1$  tale che  $\mathcal{L}^2(\bar{V}_1) \leq 2\mathcal{L}^2(S_1)$  (dove  $\bar{V}_1$  denota la chiusura di tale insieme).

Dal teorema 1.1.2 possiamo dividere  $S_1$  in un numero di triangoli elementari di altezza unitaria e con base su  $L$ , e traslare i triangoli elementari lungo  $L$  per formare una figura chiusa  $S_2$  contenuta in  $V_1$  con  $\mathcal{L}^2(S_2) \leq 2^{-2}$ . Poiché  $S_2$  è un'unione finita di triangoli, possiamo trovare un insieme aperto  $V_2$  tale che  $S_2 \subset V_2 \subset V_1$  e  $\mathcal{L}^2(\bar{V}_2) \leq 2\mathcal{L}^2(S_2)$ .

Allo stesso modo, possiamo dividere ogni triangolo elementare di  $S_2$  in ulteriori triangoli elementari che potrebbero spostarsi lungo  $L$  in modo tale che la figura risultante  $S_3$  sia contenuta in  $V_2$  con  $\mathcal{L}^2(S_3) \leq 2^{-3}$ . Allora  $S_3$  è contenuto in un insieme aperto  $V_3$  con  $\mathcal{L}^2(\bar{V}_3) \leq 2\mathcal{L}^2(S_3)$ , e proseguo in modo analogo.

Otteniamo una sequenza  $\{S_i\}$ , dove ciascun elemento è un'unione finita di triangoli elementari con base su  $L$  e altezza unitaria, e una sequenza di insiemi aperti  $\{V_i\}$  tale che  $\forall i, S_i \subset V_i \subset V_{i-1}$  e  $\mathcal{L}^2(\bar{V}_i) \leq 2\mathcal{L}^2(S_i) \leq 2^{-i+1}$ .

Sia  $F$  l'insieme chiuso  $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{V}_i$ . Mostriamo che  $F$  ha le proprietà desiderate. Ovviamente  $\mathcal{L}^2(F) = 0$ . Dalla costruzione si evince che, ogni  $S_i$ , e quindi ogni  $\bar{V}_i$ , contiene un segmento unitario in qualsiasi direzione formando un angolo di  $60^\circ$  o più con  $L$ . Dimostriamo che questo è vero anche per  $F$ . Sia  $\theta$  una tal direzione, e  $\forall i$  sia  $M_i$  un segmento unitario con direzione  $\theta$  con  $M_i \subset \bar{V}_i$ . Da un argomento di compattezza standard possiamo ipotizzare, prendendo una sotto-sequenza se necessario, che  $\{M_i\}$  convergono a

$M$ , un segmento unitario nella direzione  $\theta$ . Dato che  $\{\bar{V}_i\}$  è una sequenza decrescente,  $M_i \subset \bar{V}_j$  se  $i \geq j$ , essendo  $\bar{V}_j$  chiuso,  $M \subset \bar{V}_j \forall j$ . Allora  $M \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{V}_i = F$ , come richiesto.  $\square$

*Osservazione.* È stato dimostrato che esistono altri metodi per costruire l'insieme di Besicovitch:

per esempio Kahane notò che tale insieme poteva essere ottenuto unendo i punti di un insieme di Cantor nell'asse  $x$  con i punti di un insieme parallelo simile a quello di Cantor. Un ulteriore metodo, usando la dualità, sarà descritto nel capitolo 2.

Lo stesso tipo di costruzione può essere usato per formare un insieme di Nikodym, cioè un sottoinsieme  $F$  con  $\mathcal{L}^2(F) = 1$  tale che  $\forall x \in F$  esiste una retta attraverso  $x$  che interseca  $F$  nel singolo punto  $x$  (diciamo che ogni punto di  $F$  è linearmente accessibile). La complicata costruzione di Nikodym venne semplificata da Davies, il quale dimostrò che era possibile trovare tale insieme con rette non numerabili attraverso ogni punto dell'insieme. Davies usò idee simili per ottenere il seguente risultato, citato qui senza dimostrazione.

*Osservazione.* Un altro modo per costruire l'insieme di Besicovitch, come accennato nell'osservazione precedente, è grazie al teorema di Kahane basata sullo studio di insiemi  $E + \lambda E$ , dove  $E$  è un insieme di Cantor. Sia  $E$  l'insieme dei punti  $x = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{4^n}$ , dove  $\epsilon_n = 0$  oppure 1, costruito sul segmento  $[0, 1]$ . Nel piano cartesiano, dove le coordinate sono indicate con  $x, y$ , consideriamo gli insiemi

$$E_0 : y = 0, x \in E$$

$$E_1 : y = 1, 2(x - \xi) \in E \text{ (dove } \xi \text{ è un dato reale).}$$

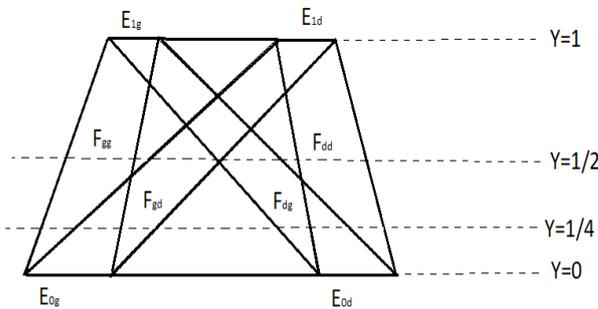
Sia  $F$  l'unione dei segmenti del piano basati su  $E_0$  e  $E_1$  (ovvero hanno un'estremità su  $E_0$  e l'altra su  $E_1$ ). Indichiamo con  $I_0$  e  $I_1$  tali segmenti rispettivamente di  $E_0$  e  $E_1$ . Possiamo allora stabilire che:

- $F$  contiene almeno una traslazione (e al massimo due) di ogni segmento che si basa su  $I_0$  e  $I_1$
- $F$  è un insieme compatto di area nulla

Queste proposizioni non sono altro, verificheremo rapidamente, che l'espressione geometrica di quanto segue:

- qualsiasi numero compreso tra 0 e  $\frac{3}{2}$  è scritto almeno in un modo, e al massimo in due modi, nella forma  $x + \frac{x'}{2}$  con  $x \in E$  e  $x' \in E$ . In particolare  $E + \frac{1}{2}E = [0, \frac{3}{2}]$ ;
- per quasi ogni  $\lambda$ , l'insieme  $E + \lambda E$  ha misura nulla;

Il terzo punto è ovvio: tutti i numero tra 0 e  $\frac{3}{2}$  si scrivono secondo la forma  $\frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\epsilon_n + \epsilon'_n}{4^n}$ , dove  $\epsilon_n = 0$  oppure 1 e  $\epsilon'_n = 0$  oppure 1. La dimostrazione del primo punto non dipende dalla scelta di  $\xi$ . I punti di  $F$  sull'ordinata  $\mu$  ( $0 \leq \mu \leq 1$ ) hanno ascissa  $(1 - \mu)x + \mu x'$  ( $x \in E, 2(x' - \xi) \in E$ ). Affermare che  $F$  ha area nulla è analogo dire che per quasi tutte le  $\mu$  in  $[0, 1]$  l'insieme  $(1 - \mu)E + \frac{1}{2}\mu E$  ha misura nulla. Il punto due e il punto quattro sono quindi equivalenti. Indichiamo con  $E_i^g$  e  $E_i^d$  rispettivamente la metà sinistra e la metà destra di  $E$ . Indichiamo con  $F^{\alpha\beta}$  (con  $\alpha = d$  o  $g$  e  $\beta = g$  o  $d$ ) l'unione dei segmenti su  $E_0^\alpha$  e  $E_1^\beta$ .  $F$  è l'unione dei quattro insiemi  $F^{\alpha\beta}$ . Ogni  $F^{\alpha\beta}$  è ottenuto mediante una trasformazione del tipo:  $(x, y) \rightarrow (x', y')$  della forma  $x' = x'_0 + \frac{x}{4} + y$  e  $y' = y$ . Le aree di  $F^{\alpha\beta}$  sono quindi tutte uguali a un quarto di quella di  $F$  e le parti comuni a due  $F^{\alpha\beta}$  sono quindi di area nulla. In particolare  $F^{gg} \cap F^{dg} \cap F^{gd} \cap F^{dd}$  sono di area nulla. Allora ne consegue che la parte di  $f$  situata sotto la retta  $y = \frac{1}{4}$  ha area nulla. Per quasi ogni  $\mu$  in  $[0, \frac{1}{4}]$  l'insieme  $(1 - \mu)E + \frac{1}{2}\mu E$  ha misura nulla. In altre parole, per quasi i  $\lambda$  in  $[0, \frac{1}{6}]$ ,  $E + \lambda E$  ha misura nulla. In modo analogo si può affermare che per tutti i  $\lambda > 0$  e per tutti i numeri interi  $n > 0$ ,  $E + \lambda E$  ha misura nulla per quasi tutti i  $\lambda$  positivi, allora abbiamo dimostrato il secondo e il quarto punto.



**Teorema 1.1.4.** *Dato un qualsiasi insieme piano  $G$  di misura  $\mathcal{L}^2$  finita, esiste un insieme  $F$  costituito da un'unione di rette tale che  $G \subset F$  e  $\mathcal{L}^2(G) = \mathcal{L}^2(F)$ .*

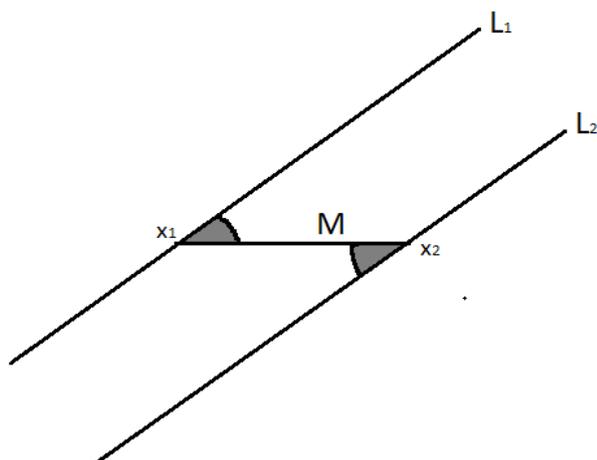
Anche Larman utilizzò tali tecniche per costruire questo "insieme impossibile". Egli considerò un insieme compatto  $F$  costituito dall'unione disgiunta di segmenti chiusi in  $\mathbb{R}^n$  con  $n \geq 3$  tale che  $\mathcal{L}^n(F) > 0$  ma  $\mathcal{L}^n(G) = 0$ , dove  $G$  è l'unione dei corrispondenti segmenti aperti. Pertanto la misura di  $F$  è concentrata negli estremi dei segmenti. (Tali costruzioni sono impossibili in  $\mathbb{R}^2$ .)

## 1.2 Problema di Kakeya

Durante gli stessi anni della scoperta di Besicovitch (1917), il matematico giapponese Kakeya si pose una domanda simile a quella di Besicovitch: *qual è l'area più piccola di una regione planare all'interno della quale un segmento unitario può essere ruotato continuamente di  $180^\circ$ , tornando alla sua posizione originale ma con orientamento invertito?* Kakeya ipotizzò che il più piccolo insieme convesso che soddisfacesse tale proprietà fosse un triangolo equilatero di altezza unitaria. Tale risultato venne dimostrato solo pochi anni dopo da Julius Pal. Nel caso senza convessità all'inizio si era pensato al deltoide a tre punte di area  $\frac{\pi}{8}$ , mentre l'area del triangolo è  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . Tuttavia, il problema è rimasto irrisolto. A causa dell'isolamento della Russia dal mondo occidentale a Besicovitch non arrivò la notizia del problema dell'ago di Kakeya fino a quando non lasciò la Russia. Quando scoprì cosa Kakeya avesse dimostrato si accorse che una modifica della sua costruzione originale insieme a un'osservazione di Pal potevano fornire la risposta al problema: per qualsiasi  $\epsilon > 0$ , esiste una regione planare di area inferiore a  $\epsilon$  all'interno della quale un ago può essere ruotato di  $180^\circ$ . Per poter risolvere tale problema è necessario però dimostrare il seguente lemma.

**Lemma 1.2.1.** *Siano  $L_1$  e  $L_2$  due rette parallele nel piano. Posto  $\epsilon > 0$  esiste un insieme  $E$  contenente  $L_1$  e  $L_2$  con  $\mathcal{L}^2(E) < \epsilon$  tale che un segmento unitario può essere spostato in modo continuo da  $L_1$  a  $L_2$  senza lasciare l'insieme  $E$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $x_1$  e  $x_2$  due punti rispettivamente su  $L_1$  e  $L_2$  e sia  $E$  l'insieme formato da  $L_1$  e  $L_2$ . Considero  $M$ , il segmento formato unendo  $x_1$  e  $x_2$  e i settori unitari centrati su  $x_i$  contenuti tra  $L_i$  e  $M$  ( $i = 1, 2$ ). È facile vedere che l'area totale di  $E$  può essere piccola quanto desiderato prendendo  $x_1$  e  $x_2$  sufficientemente distanti. Inoltre, un segmento unitario può essere spostato da  $L_1$  a  $L_2$  attraverso una rotazione nel primo settore, una traslazione lungo  $M$  e una rotazione nel secondo settore.  $\square$



**Teorema 1.2.2.** *Sia  $\epsilon > 0$ , esiste un insieme  $E$  con  $\mathcal{L}^2(E) < \epsilon$  all'interno del quale un segmento unitario può muoversi continuamente fino a trovarsi nella sua posizione originale ma ruotato di  $180^\circ$ .*

*Dimostrazione.* Costruiamo un insieme  $E_0$  con  $\mathcal{L}^2(E_0) < \frac{1}{3}\epsilon$  all'interno del quale è possibile spostare un segmento unitario di un angolo di  $60^\circ$  rispetto alla sua direzione originale.

Prendendo tre copie di questa costruzione possiamo ottenere l'insieme  $E$  richiesto. (Potremmo aver bisogno del lemma precedente se sono necessarie traslazioni tra i tre insiemi di componenti.) Se  $T$  è un triangolo equilatero di altezza unitaria e base sulla retta  $L$ , possiamo dividere  $T$  in  $m = 2^k$  triangoli elementari e farli scorrere lungo  $L$  nelle posizioni  $T'_1, \dots, T'_m$  in modo tale che  $\mathcal{L}^2(\bigcup_{i=1}^m T'_i) < \frac{\epsilon}{6}$  (segue dal teorema 1.1.2). Sia  $E_1 = \bigcup_{i=1}^m T'_i$ ,  $\forall i$  un lato di  $T'_i$  è parallelo al lato opposto di  $T'_{i+1}$ . Allora dal lemma precedente,  $\forall i$ , potremmo aggiungere un insieme di misura non superiore al valore  $\frac{\epsilon}{6m}$  a  $E_1$  per permettere a un segmento unitario di muoversi da  $T'_i$  a  $T'_{i+1}$ . Da ciò deriva un insieme  $E_0$  di misura, al massimo,  $\frac{1}{6}\epsilon + \frac{1}{6}(m-1)\frac{\epsilon}{m} < \frac{1}{2}\epsilon$  all'interno del quale un segmento unitario può essere ruotato di  $60^\circ$ , come richiesto.  $\square$

# Capitolo 2

## Il doppio approccio

L'idea che sta alla base di questo capitolo consiste nel parametrizzare le rette per punti in modo tale che la proiezione di un insieme di punti di  $E$ , dove  $E$  è un insieme linearmente misurabile, in una certa direzione sia geometricamente simile all'intersezione delle rette parametrizzate da  $E$  fissata una retta. Si potrebbe esaminare l'insieme formato come l'unione delle rette proiettando  $E$  in varie direzioni.

Besicovitch utilizza la tecnica della reciprocità polare in questo modo: Sia  $L(x)$  la retta a distanza  $\frac{1}{|x|}$  dall'origine e perpendicolare al raggio vettore  $x$ ; così  $L(x)$  è la retta polare di  $x$  rispetto al cerchio unitario  $C$ . La proprietà fondamentale della reciprocità polare è:  $x \in L(y)$  se e solo se  $y \in L(x)$ .

Si osserva che se  $proj_\theta$  denota la proiezione sulla retta  $L_\theta$  passante per l'origine e con direzione  $\theta$ , allora, per ogni insieme  $E$ , l'intersezione dell'insieme  $\{L(x) : x \in E\}$  con  $L_\theta$  è semplicemente l'inverso geometrico dell'insieme  $proj_\theta E$  rispetto a  $C$ . Per motivi tecnici introduciamo una forma alternativa di dualità, sebbene le idee fondamentali siano le stesse.

Per il momento lavoriamo sul piano con  $(x, y)$  che indicano le coordinate cartesiane. Considero  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  sia  $L(a, b)$  l'insieme dei punti sulla retta  $y = a + bx$ . Se  $E$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  sia  $L(E)$  l'insieme delle rette  $\bigcup_{(a,b) \in E} L(a, b)$ . Se  $c$  è una costante e  $L_c$  è la retta  $x = c$ , allora:

$$L(a, b) \cap L_c = (c, a + bc) = (c, (a, b) * (1, c)) \quad (2.1)$$

(dove "\*" denota il prodotto scalare in  $\mathbb{R}^2$ ). Quindi se  $E \subset \mathbb{R}^2$ ,

$$L(E) \cap L_c = \{(c, (a, b) * (1, c)) : (a, b) \in E\} \quad (2.2)$$

in modo tale che l'insieme  $L(E) \cap L_c$  è geometricamente simile a  $proj_\theta E$  con un rapporto di similitudine di  $(1 + c^2)^{\frac{1}{2}}$ , dove  $c = \tan\theta$ . In particolare,

$$\mathcal{L}^1(L(E) \cap L_c) = 0 \iff \mathcal{L}^1(proj_\theta E) = 0 \quad (2.3)$$

Inoltre, considerando le proiezioni sull'asse  $y$ , si può notare che se  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , allora  $proj_{\frac{\pi}{2}}(a, b) = b$  è semplicemente il gradiente della retta  $L(a, b)$ . Quindi se  $E$  è un insieme qualsiasi di punti e  $b \in proj_{\frac{\pi}{2}} E$ , allora  $L(E)$  contiene una retta con gradiente  $b$ .

## 2.1 Relazione tra insiemi di Lebesgue misurabili e insiemi di rette

Per poter dimostrare il teorema successivo è necessario enunciare il seguente lemma e i seguenti teoremi:

**Lemma 2.1.1.** *Sia  $E$  un qualsiasi sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $\Pi$  un qualsiasi sottospazio allora:  $\mathcal{H}^s(proj_\Pi E) \leq \mathcal{H}^s(E)$*

**Teorema 2.1.2.** *Sia  $E$  un insieme linearmente misurabile irregolare di  $\mathbb{R}^2$ . Allora  $\mathcal{L}^1(proj_\theta E) = 0$  per quasi tutti  $\theta \in [0, \pi)$*

**Teorema 2.1.3.** *Sia  $E$  un insieme linearmente misurabile regolare di  $\mathbb{R}^2$ . Allora  $\mathcal{L}^1(proj_\theta E) > 0$  per tutti ma al massimo un valore di  $\theta$ .*

**Teorema 2.1.4.** *Sia  $E$  un insieme linearmente misurabile in  $\mathbb{R}^2$ . Allora  $L(E)$  è un sottoinsieme  $\mathcal{L}^2$ -misurabile di  $\mathbb{R}^2$ . Se  $E$  è irregolare allora  $\mathcal{L}^2(L(E)) = 0$ , se  $E$  è regolare allora  $\mathcal{L}^2(L(E)) > 0$ .*

## 2.1. Relazione tra insiemi di Lebesgue misurabili e insiemi di rette 22

*Dimostrazione.* Verifichiamo innanzitutto la misurabilità di  $L(E)$ . Si osserva che  $L(E)$  è aperto se  $E$  è un insieme aperto ed è chiuso se  $E$  è un insieme chiuso. Quindi se  $E$  è un insieme  $G_\delta$  (un'intersezione numerabile di insiemi aperti) o un insieme  $F_\sigma$  (un'unione numerabile di insiemi chiusi), allora  $L(E)$  è dello stesso tipo.

Supponiamo  $\mathcal{H}^1(E) = 0$ . Dalla regolarità di  $\mathcal{H}^1$  possiamo trovare un insieme  $G_\delta$  che denotiamo con  $E_0$ , tale che  $E_0 \subset E$  e  $\mathcal{H}^1(E_0) = 0$ . Per il lemma 2.1.1  $\forall \theta \mathcal{L}^1(proj_\theta(E_0)) = 0$  allora  $\mathcal{L}^1(L(E_0) \cap L_c) = 0 \forall c$ . Ma essendo  $L(E_0)$  è un insieme  $G_\delta$  allora è un piano misurabile. Dal Teorema di Fubini allora segue che  $\mathcal{L}^2(L(E_0)) = 0$ , dove  $L(E) \subset L(E_0)$  è  $\mathcal{L}^2$ -misurabile con  $\mathcal{L}^2(L(E)) = 0$ .

Sia  $E$  un insieme linearmente misurabile. Dalla regolarità segue che  $E = E_0 \cup F$ , dove  $E_0$  è un insieme  $F_\sigma$  e  $\mathcal{H}^1(F) = 0$ . Quindi  $L(E) = L(E_0) \cup L(F)$  è  $\mathcal{L}^2$ -misurabile, essendo unione di due insiemi misurabili.

Se  $E$  è un insieme irregolare, allora  $\mathcal{L}^1(proj_\theta E) = 0$  per quasi tutti i  $\theta$  dal teorema 2.1.2. Allora  $\mathcal{L}^1(L(E) \cap L_c) = 0$  per quasi tutte le  $c$ . Dato che  $L(E)$  è  $\mathcal{L}^2$ -misurabile, il teorema di Fubini implica che  $\mathcal{L}^2(L(E)) = 0$ .

Se  $E$  è un insieme regolare, allora  $\mathcal{L}^1(proj_\theta E) > 0$  per quasi tutti i  $\theta$  dal teorema 2.1.3. Quindi  $\mathcal{L}^1(L(E) \cap L_c) > 0$  per quasi tutte le  $c$ . In questo caso la misurabilità di  $L(E)$ , insieme al teorema di Fubini, implica che  $\mathcal{L}^2(L(E)) > 0$ .  $\square$

*Osservazione.* Besicovitch ha inoltre dimostrato che se  $E$  è un insieme linearmente misurabile regolare, allora  $L(E)$  ha la misura del piano infinito, purché si tenga conto della molteplicità della copertura per l'insieme di rette. Tuttavia, Davies fu in grado di costruire un insieme  $E$  regolare con  $\mathcal{L}^2(L(E)) < \infty$ , mostrando l'importanza dell'assunzione della molteplicità.

## 2.2 Costruzione dell'insieme di Besicovitch utilizzando la dualità

**Teorema 2.2.1.** *Esiste un sottoinsieme del piano di Lebesgue di misura nulla contenente una retta in ogni direzione.*

*Dimostrazione.* Sia  $E$  un insieme linearmente misurabile irregolare in  $\mathbb{R}^2$  tale che la proiezione di  $E$  sull'asse  $y$ ,  $\text{proj}_{\frac{\pi}{2}}E$ , contenga il segmento  $-1 \leq y \leq 1$ . Considero l'insieme di rette  $L(E)$  e dal teorema 2.1.4 segue che  $\mathcal{L}^2(L(E)) = 0$ , allora  $L(E)$  contiene tutte le rette con i gradienti compresi tra -1 e 1. Prendendo l'unione di  $L(E)$  con una copia congruente ad esso ruotato di  $\frac{\pi}{2}$  otteniamo un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  con le proprietà richieste.  $\square$

Un'altra applicazione della dualità scoperta da Davies nel 1971, mostra che gli insiemi di Besicovitch sono necessariamente piuttosto grandi. Prima di enunciare e dimostrare tale teorema è necessario dare la definizione di insieme di Souslin ed enunciare i seguenti teoremi.

**Definizione 4.** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico, gli insiemi di Souslin sono insiemi della forma  $E = \bigcup_{i_1, i_2, \dots} \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{i_1, \dots, i_k}$  dove  $E_{i_1, \dots, i_k}$  è un insieme chiuso per ogni sequenza finita  $\{i_1, \dots, i_k\}$  di interi positivi.*

**Teorema 2.2.2.** *Sia  $E$  un sottoinsieme Souslin di  $\mathbb{R}^2$  con  $\dim(E) = s$ , se  $s \leq 1$  allora la  $\dim(\text{proj}_{\theta}E) = s$  per quasi tutti  $\theta \in [0, \pi)$*

**Teorema 2.2.3.** *Sia  $E$  un insieme di piani e sia  $A$  un qualsiasi sottoinsieme dell'asse  $x$ . Supponiamo che se  $x \in A$ , allora  $\mathcal{H}^1(E_x) > c$  per una qualche  $c$  costante. Allora:*

$$\mathcal{H}^{s+t}(E) \geq bc\mathcal{H}^s(A) \quad (2.4)$$

dove  $b$  dipende solo da  $s$  e  $t$ .

Siamo in grado ora di dimostrare questo importante risultato:

**Teorema 2.2.4.** *Sia  $F$  un sottoinsieme del piano contenente una retta in ogni direzione. Allora  $F$  ha dimensione di Hausdorff uguale a 2.*

*Dimostrazione.* Ogni insieme è contenuto in un insieme  $G_\delta$  della stessa dimensione, in questo modo non perdiamo generalità nell'assumere  $F$  come  $G_\delta$ . Quindi se consideriamo l'insieme  $E = \{(a, b) : L(a, b) \subset F\} = \bigcap_{r=1}^{\infty} \{(a, b) : L(a, b) \cap B_r(0) \subset F \cap B_r(0)\}$  è anch'esso  $G_\delta$ , allora è Borel misurabile. Poiché  $F$  contiene rette in ogni direzione,  $\text{proj}_{\frac{\pi}{2}} E$  coincide con l'asse  $y$  e  $\mathcal{H}^1(E) = \infty$  per il lemma 2.1.1. Dal teorema 2.2.2 segue che  $\dim(\text{proj}_\theta E) = 1$  per quasi tutti  $\theta$ , allora per il principio della dualità  $\dim(L(E) \cap L_c) = 1$  per quasi tutte le  $c$ . Allora  $\dim(L(E)) = 2$  e dato che  $L(E) \subset F$ , allora per il teorema 2.2.3  $\dim F = 2$ .  $\square$

*Osservazione.* Una leggera modifica della dimostrazione mostra che se  $F$  contiene un segmento in ogni direzione, allora  $\dim(F) = 2$ . Infatti, risulta vero un risultato ancora più forte, cioè che se  $\dim(F) < 2$  allora  $F$  interseca tutte le rette in quasi tutte le direzioni in un insieme di misura nulla 1-dimensionale.

## 2.3 Problema di Besicovitch e Kenney

Besicovitch e Kenney cercarono di risolvere il problema in un altro modo, ovvero considerando la costruzione di insiemi piani di misura nulla contenenti cerchi di ogni raggio. Fu Davies però a realizzare che questo problema si può prestare all'approccio duale.

**Teorema 2.3.1.** *Esiste un sottoinsieme del piano di Lebesgue con misura nulla che contiene un cerchio di ogni raggio.*

*Dimostrazione.* Sia  $E$  un insieme linearmente misurabile irregolare limitato con proiezione sull'asse  $x$ ,  $\text{proj}_\theta E$ , contenente l'intervallo  $0 \leq x \leq 1$ .

Definiamo una funzione  $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che  $\psi(x, y) = (x(1 + y^2)^{\frac{1}{2}}, y)$ .  $\forall x$ , con  $0 \leq x \leq 1$ , esiste  $y$  tale che  $(x, y) \in E$ . Allora per tale valore di  $x$  possiamo trovare un punto della forma  $(x(1 + y^2)^{\frac{1}{2}}, y)$  in  $\psi(E)$ , cioè un punto  $(a, b) \in \psi(E)$  tale che

$a^2 - x^2b^2 = x^2$  oppure  $x = |a|(1 + b^2)^{-\frac{1}{2}}$ . Questo risultato però è la distanza perpendicolare della retta  $L(a, b)$  dall'origine, allora possiamo concludere che l'insieme delle rette  $L(\psi(E))$  contiene rette a tutte le distanze tra 0 e 1 dall'origine. Inoltre, poiché  $\psi$  è una vera funzione analitica,  $\psi(E)$  è un insieme irregolare ( $\psi$  funzione da una curva rettificabile a una curva rettificabile), allora dal teorema 2.1.4 segue che  $\mathcal{L}^2(L(\psi(E))) = 0$ .

Ora sia  $F$  l'insieme ottenuto invertendo  $L(\psi(E))$  rispetto all'origine (in altre parole  $F$  è l'immagine di  $L(\psi(E))$  usando la trasformazione in coordinate polari  $(r, \theta) \rightarrow (\frac{1}{r}, \theta)$ ).

Si osserva che le funzioni inverse da insiemi di misura nulla a insiemi di misura nulla, trasformano le rette a distanza  $x$  dall'origine in cerchi di raggio  $\frac{1}{2x}$  rispetto all'origine. Allora  $F$  ha misura nulla e contiene cerchi di tutti i raggi maggiori di  $\frac{1}{2}$ . Prendendo un'unione numerabile di insiemi simili a  $F$  con rapporti di somiglianza tendenti a zero, otteniamo un insieme con le proprietà richieste.  $\square$

*Osservazione.* Una domanda che si erano posti i matematici in quegli anni era se fosse possibile o meno che un insieme piano di misura nulla contenesse cerchi con centri in ogni punto. Tale quesito però rimane tutt'ora irrisolto.

**Teorema 2.3.2.** *Sia  $G_\delta$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R} \forall \theta \in [0, \pi)$  e sia l'insieme  $\{(\theta, y) : y \in G_\delta\}$  un piano di Lebesgue misurabile. Allora esiste un insieme  $E \subset \mathbb{R}^2$  tale che per quasi tutti i  $\theta$  si ha  $\{u\theta' : u \in G_\delta\} \subset \text{proj}_\theta E$  e  $\mathcal{L}^1(G_\theta) = \mathcal{L}^1(\text{proj}_\theta E)$ , dove  $\theta'$  è il vettore unitario in direzione  $\theta$ .*

*Dimostrazione.* Sia

$$G = \{(c, y) : (1 + c^2)^{-\frac{1}{2}}y \in G_\theta, \text{dove } c = \tan\theta\}. \quad (2.5)$$

Dal teorema 1.1.4 possiamo trovare un insieme di rette  $L(E)$  contenente  $G$  e tale che  $\mathcal{L}^2(G) = \mathcal{L}^2(L(E))$ . Dato che  $G$  è un piano misurabile, dal teorema di Fubini segue che  $\mathcal{L}^1(G \cap L_c) = \mathcal{L}^1(L(E) \cap L_c)$  per quasi tutte le  $c$ , con  $G \cap L_c \subset L(E) \cap L_c$ . Secondo il principio di dualità, l'insieme  $L(E) \cap L_c$  è simile a  $\text{proj}_\theta E$ , dove  $c = \tan\theta$ , con un rapporto di similitudine di  $(1 + c^2)^{\frac{1}{2}}$ . Allora segue che  $\text{proj}_\theta E$  e  $G_\theta$  differiscono di una misura nulla per quasi tutti i  $\theta$ .  $\square$

## 2.4 Insieme di Besicovitch in dimensione maggiore

**Teorema 2.4.1.** *Un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  con  $\mathcal{L}^3$ -misura nulla non può contenere una traslazione di ogni piano.*

*Dimostrazione.* Applicando una opportuna parametrizzazione dei piani in  $\mathbb{R}^3$ , la dimostrazione è molto simile a quella del teorema 2.2.4.

Consideriamo  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , sia  $\Pi(a, b, c)$  l'insieme dei punti nel piano  $z = a + bx + cy$ , se  $E \subset \mathbb{R}^3$  sia  $\Pi(E) = \bigcup_{(a,b,c) \in E} \Pi(a, b, c)$ . Prendiamo  $d, e$  costanti e  $L_{d,e}$  è la retta  $x = d, y = e$ , allora:

$$\Pi(a, b, c) \cap L_{d,e} = (d, e, a + bd + ce) = (d, e, (a, b, c) * (1, d, e)), \quad (2.6)$$

dove "\*" indica il prodotto scalare in  $\mathbb{R}^3$ . Quindi, se  $E \subset \mathbb{R}^3$ ,

$\Pi(E) \cap L_{d,e} = \{(d, e, (a, b, c) * (1, d, e)) : (a, b, c) \in E\}$ , tale che  $\Pi(E) \cap L_{d,e}$  è geometricamente simile a  $proj_{\theta} E$ , ovvero la proiezione di  $E$  sulla retta nella direzione  $\theta'$  di  $(1, d, e)$ .

Allora

$$\mathcal{L}^1(\Pi(E) \cap L_{d,e}) = 0 \iff \mathcal{L}^1(proj_{\theta} E) = 0. \quad (2.7)$$

Ora supponiamo che l'insieme  $F \subset \mathbb{R}^3$  contenga una traslazione di ogni piano. Senza perdere di generalità possiamo assumere che  $F$  sia un insieme  $G_{\delta}$ , in questo caso si nota che l'insieme  $E = \{(a, b, c) : \Pi(a, b, c) \subset F\}$  è un insieme di Borel. Se  $F$  contiene piani perpendicolari a tutti i vettori unitari e  $\Pi$  è il piano  $x = 0$ , allora  $proj_{\Pi} E$  è l'intero di  $\Pi$  e dal lemma 2.1.1 segue che  $\mathcal{H}^2(E) = \infty$ . Per quasi tutti  $\theta'$   $\mathcal{L}^1(proj_{\theta} E) > 0$ , quindi  $\mathcal{L}^1(\Pi(E) \cap L_{d,e}) > 0$  per quasi tutti  $(d, e) \in \mathbb{R}^2$  dal (2.7). Come nel teorema 2.2.4 la misurabilità di  $E$  implica che  $\Pi(E)$  è  $\mathcal{L}^3$ -misurabile, allora dal teorema di Fubini segue che  $\mathcal{L}^3(\Pi(E)) > 0$ . Dato che  $\Pi(E) \subset F$ , l'insieme  $F$  deve avere una misura positiva.  $\square$

*Osservazione.* È possibile modificare la dimostrazione sopra per dimostrare che qualsiasi sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  di misura nulla interseca tutti i piani perpendicolari in quasi tutte le direzioni in insiemi di misura piana nulla.

Ora consideriamo l'esistenza degli insiemi di Besicovitch con dimensione maggiore analoghi: chiamiamo un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  come  $(n, k)$ -insieme di Besicovitch se: ha una misura di Lebesgue nulla  $n$ -dimensionale e tuttavia contiene una traslazione in ogni sottospazio di  $\mathbb{R}^n$   $k$ -dimensionale.

Mostriamo la forma più generale di questo risultato:

**Teorema 2.4.2.** *Supponiamo  $2 \leq k \leq n - 1$ , e sia  $F$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  di misura di Lebesgue nulla  $n$ -dimensionale. Allora, per quasi tutti i sottospazi  $k$ -dimensionali  $\Pi$  di  $\mathbb{R}^n$ , ogni traslazione di  $\Pi$  interseca  $F$  in un insieme di misura nulla  $k$ -dimensionale.*

## 2.5 Conseguenze delle costruzioni di Besicovitch e Kakeya

In questo paragrafo verranno esaminate alcune delle molte generalizzazioni e variazioni che sono state ispirate dalle costruzioni di Besicovitch e Kakeya. Riprendiamo la forma generale del problema: Data una famiglia di figure geometriche, è possibile trovare un insieme piano di misura nulla contenente una traslazione, o anche solo una copia congruente, di ogni figura in tale famiglia?

Come abbiamo dimostrato durante questo elaborato di tesi l'insieme di Besicovitch fornisce una risposta nel caso di traslazioni di tutte le rette.

Kinney nel 1968 osserva che, poiché l'insieme di Cantor  $E$  è un insieme di Lebesgue di misura nulla e contiene tutte le distanze nell'intervallo  $(0, 1)$ , il "Cantor Tartan"  $(E \times [0, 1]) \cap ([0, 1] \times E)$  ha misura piana nulla e contiene una copia congruente di ogni rettangolo con lato inferiore alla lunghezza unitaria. Prendendo un'unione numerabile di insiemi simili otteniamo un insieme di misura nulla contenente copie di tutti i rettangoli. Una generalizzazione di questo risultato è stata dimostrata da Ward, ovvero che insiemi di misura nulla contengono copie congruenti di tutti i poligoni. Egli infatti ha costruito un insieme di Hausdorff di dimensione  $2 - \frac{1}{n}$  che contiene una copia congruente di ogni poligono con  $n$ -lati.

Nel teorema 2.2.4 Davies ha modificato l'originale costruzione di Besicovitch ottenendo un insieme di misura nulla contenente una traslazione di ogni arco poligonale, di dimensione Hausdorff uguale a 2. Marstrand nel 1972 dimostra un risultato più forte di questo tipo applicabile a qualsiasi spazio di misura topologica, mostrando che esiste un insieme di misura nulla contenente una traslazione di ogni unione numerabile di rette e inoltre che esiste un insieme di dimensione Hausdorff piccola (per esempio di dimensione 1) contenente una copia congruente di ciascuna di tali unione.

Nel paragrafo precedente abbiamo dimostrato che esistono insiemi di misura nulla contenenti cerchi per ogni raggio, e abbiamo menzionato il problema irrisolto per i cerchi con centro in ogni punto. A queste considerazioni si collega un quesito di cui non abbiamo ancora trovato soluzione, ovvero se un insieme di misura nulla può contenere copie di tutte le ellissi, coniche, o curve piane di grado  $k$  per ogni  $k > 1$ . Anche se in generale

sembra che tali insiemi non possano esistere, questi problemi presentano notevoli difficoltà, anche a causa delle non linearità coinvolte, e nulla è stato ancora dimostrato.

Lo sviluppo più significativo in quest'area è dovuto a Marstrand, il quale dimostra che per ogni sottoinsieme  $F$  di  $\mathbb{R}^n$  di misura nulla  $n$ -dimensionale, con  $n \geq 2$ , esiste una curva liscia ( $C^\infty$ ) di lunghezza unitaria che non ha una copia congruente contenuta in  $F$ . La dimostrazione è complicata e usa l'idea di entropia di uno spazio metrico totalmente limitato, ovvero una stima del numero di insiemi di diametro  $\epsilon$  necessari per coprire lo spazio per un  $\epsilon$  piccola.

Si dovrebbe aprire anche una piccola parentesi sul problema opposto: esistono insiemi con misure positive che non contengono copie congruenti di determinati insiemi specifici? Il risultato più importante è quello di Steinhaus (1920), cioè che qualsiasi sottoinsieme della retta con misura positiva contiene tutte le distanze nell'intervallo  $(0, c)$  per qualche  $c$  positiva.

Il problema di trovare l'insieme convesso più piccolo contenente copie di tutte le figure di determinati tipi appartiene alla convessità piuttosto che alla teoria della misura geometrica. Nel documento di Pál, scritto nel 1921, è stato dimostrato che il triangolo equilatero è l'insieme convesso piano più piccolo contenente un segmento unitario in ogni direzione; se consideriamo il problema analogo ma in dimensione maggiore, esso rimane tutt'ora irrisolto.

La soluzione conclusiva del problema di Kakeya viene dimostrata da Cunningham (1971), il quale costruisce un insieme di Kakeya semplicemente connesso di misura arbitrariamente piccola contenuta in un disco unitario. Lo stesso articolo considera l'insieme di Kakeya a forma di stella minimale, e mostra che il limite inferiore per la sua area è compreso tra  $\frac{\pi}{180}$  e  $(5 - 2\sqrt{2})\frac{\pi}{24}$ . L'insieme di Kakeya convesso minimale è di nuovo il triangolo equilatero con altezza unitaria, tuttavia l'analogo insieme tridimensionale è ancora sconosciuto.

# Capitolo 3

## Analisi armonica

Per ottenere un approccio più quantitativo della congettura di Kakeya è utile formulare il problema in termini di analisi armonica. Da un lato è possibile ottenere risultati da limiti di norma più generali per determinati integrali. Dall'altro, la costruzione di Kakeya è stata utilizzata per fornire controesempi ad alcune importanti congetture nell'analisi armonica. Si usa la frase "analisi armonica" per descrivere una vasta area della matematica, compresa l'analisi di Fourier e le teorie della differenziazione, degli operatori massimali e dei moltiplicatori. Per mostrare la relazione proponiamo un paio di esempi:

- Il primo esempio segue dal teorema 2.4.1, supponendo che  $f(x)$  sia una funzione misurabile definita su  $\mathbb{R}^3$ .

Scriviamo  $\|f\|_p = [\int_{\mathbb{R}^3} |f|^p dx]^{\frac{1}{p}}$ , dove  $1 \leq p < \infty$ . Sia  $F(t, \theta)$  l'integrale di  $F$  sul piano perpendicolare al vettore unitario  $\theta$  e distanza  $t$  dall'origine.  $F(t, \theta)$  esiste per quasi tutte le  $t$  e per tutti i  $\theta$  da una semplice applicazione del teorema di Fubini. Non è difficile mostrare che, integrando la Trasformata di Fourier di  $F$  rispetto a  $t$  su tutti i vettori unitari  $\theta$  e usando il fatto che la trasformazione di una funzione integrabile è limitata, allora:

$$\int_{\theta} \text{ess sup}_t |F(t, \theta)| d\theta \leq c(\|f\|_1 + \|f\|_2) \quad (3.1)$$

per qualche  $c$  costante indipendente da  $F$ . Consideriamo un insieme di misura nulla  $E$ , e scriviamo  $F_0(\theta)$  come l'estremo superiore della misura esterna del piano

dell'intersezione di  $E$  con i piani perpendicolari a  $\theta$ . Si osserva che  $F_0$  è misurabile rispetto alla misura sferica. Grazie alla regolarità della misura di Lebesgue possiamo trovare un insieme aperto  $V$  contenente  $E$  e di misura inferiore a  $\epsilon$ , quindi se  $f$  è la funzione caratteristica di  $V$ , allora  $\|f\|_1 = \|f\|_2 < \epsilon$ . Dato che  $V$  è aperto,  $F_0(\theta) \leq \text{ess sup}_t F(t, \theta)$ , allora:  $\int F_0(\theta) d\theta \leq 2\epsilon c$ . Sia  $\epsilon$  arbitraria e  $F_0(\theta)$  non negativo, allora possiamo concludere che  $F_0(\theta) = 0$  per quasi tutti i  $\theta$ , ovvero tutti i piani in quasi tutte le direzioni intersecano  $E$  in insiemi di piani con misura nulla.

*Osservazione.* Viceversa, sappiamo che esiste un insieme di piani di misura nulla contenente una retta in ogni direzione, quindi se una stima dell'equazione (3.1) dovesse valere per le funzioni su  $\mathbb{R}^2$  (dove  $\theta$  indica un vettore unitario del piano) un discorso simile al precedente porterebbe a una contraddizione. Quindi l'insieme di Besicovitch fornisce un controesempio alla plausibile congettura che (3.1) sia valida per le funzioni del piano.

Come abbiamo visto nel teorema 2.4.2 e nelle osservazioni precedenti, non esiste  $(n, k)$ -insieme di Besicovitch se  $k > 1$  ed è interessante notare che si potrebbe fare lo stesso discorso supponendo  $k > \frac{1}{2}n$ . Da tale considerazione deriva che se  $2 \leq k \leq \frac{1}{2}n$ , allora la non esistenza di  $(n, k)$ -insiemi di Besicovitch è una proprietà intrinsecamente geometrica.

- Sia  $f$  una funzione misurabile di  $\mathbb{R}^n$ , sia  $F_r(x)$  la media di  $f$  sulla superficie sferica di centro  $x$  e raggio  $r$ , ovvero l'integrale di  $f$  su questa superficie divisa per l'area della superficie  $(n - 1)$ -dimensionale della sfera. Sia

$$F(x) = \sup_{r>0} F_r(x) \quad (3.2)$$

Stein nel 1976 dimostrò che:

$$\|F\|_p \leq c\|f\|_p, \quad (3.3)$$

con la condizione che  $\frac{n}{n-1} < p$  e  $n \geq 3$ .

Riprendendo l'argomento trattato nell'esempio precedente e considerando l'equazione (3.3), si deduce che se  $n \geq 3$  e  $E$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  con misura di Lebesgue nulla  $n$ -dimensionale, allora, per quasi tutte le  $x \in \mathbb{R}^n$ , tutte le sfere di

centro in  $x$  intersecano  $E$  in insiemi di superficie  $(n - 1)$ -dimensionale con misura nulla. Se l'equazione (3.3) fosse stata dimostrata per  $n = 2$  e qualche valore di  $p$ , allora un insieme piano di misura nulla non avrebbe potuto contenere un cerchio centrato in ogni punto, risolvendo in questo modo il problema menzionato in precedenza.

D'altra parte se fosse stato costruito un tale insieme di cerchi con misura nulla, l'equazione (3.3) non sarebbe stata valida per tutti i  $p$  e non solo per  $p \leq 2$ , osservazione nota in  $\mathbb{R}^2$  invece.

La dimostrazione dell'equazione (3.3) dipende fondamentalmente dalla presenza della curvatura della sfera, valgono risultati simili per superfici "ben curve", mentre falliscono per esempio se consideriamo un cubo. Molte generalizzazioni del teorema di densità di Lebesgue riguardano insiemi diversi dalle palle. Una congettura plausibile (certamente vera per le funzioni continue) potrebbe essere che se consideriamo una determinata funzione  $f$ , allora:

$$\inf \left\{ \frac{1}{\mathcal{L}^2(R)} \int_R f d\mathcal{L}^2 : R \text{ è un rettangolo centrato in } x \text{ con } 0 < |R| \leq r \right\} \quad (3.4)$$

converge a  $f(x)$ , poiché  $r$  tende a 0 per quasi tutte le  $x$ , con un risultato simile per l'estremo superiore. Tuttavia, una conseguenza dell'esistenza degli insiemi Nikodym, discusso nell'osservazione successiva il Teorema 1.1.3, consiste nel fatto che tali risultati non valgono per la funzione caratteristica degli insiemi (la classe di tutti i rettangoli non costituisce una base di differenziazione). Vogliamo dimostrare che  $E$  sia un insieme di Nikodym, per regolarità possiamo trovare un sottoinsieme chiuso  $F$  di  $E$  con le stesse proprietà e tale che  $\mathcal{L}^2(F) > 0$ . Sia  $f$  la funzione caratteristica di  $F$ , poiché il complemento di  $F$  è aperto, è facile vedere che l'estremo inferiore di (3.4) tende a zero poiché  $r$  tende a zero per tutte le  $x$  in  $F$ .

- L'insieme di Besicovitch ha fornito un controesempio importante nella teoria dei moltiplicatori di Fourier. Sia  $T$  la trasformazione lineare nello spazio delle funzioni integrabili di potenza  $p$ -esima su  $\mathbb{R}^2$  definita nella notazione della trasformata di Fourier da  $\widehat{(Tf)}(d) = \chi_B(d)\widehat{f}(d)$ , dove  $\chi_B$  è la funzione caratteristica del disco unitario. Si osserva anche che

$$\|Tf\|_p \leq c\|f\|_p \quad (3.5)$$

per  $p = 2$ , e per  $\frac{4}{3} < p < 4$ . Tuttavia, Fefferman nel 1971 ha utilizzato l'insieme di Besicovitch per dimostrare che la disequazione (3.5) non vale se  $p \neq 2$ . Un risultato simile dimostrato da Mitjagin e Nikisin (1973) afferma che si può ottenere, con  $p < 2$ , una funzione  $f$  con potenza  $p$ -esima integrabile sul quadrato unitario con le somme parziali di Fourier illimitate quasi ovunque, ovvero che:

$\lim_{r \rightarrow \infty} \overline{\lim} \left| \sum_{k^2 + j^2 < r} a_{kj} \exp(2\pi i(xk + yj)) \right| = \infty$  per quasi tutti  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , dove  $\{a_{kj}\}$  sono i coefficienti di Fourier di dimensione 2 di  $f$ . Tale risultato è in netto contrasto con il caso monodimensionale in cui il teorema di Carleson-Hunt afferma che se  $f$  è la  $p$ -esima potenza integrabile per qualche  $p$  con  $1 < p < \infty$ , allora la serie di Fourier di  $f$  converge in senso puntuale quasi ovunque.

- Infine, citiamo un'applicazione all'analisi funzionale:  $T$  è un operatore iponormale su uno spazio di Hilbert (cioè:  $T^*T - TT^* \geq 0$  e nessuna riduzione dello spazio non banale di  $T$  normale), se e solo se lo spettro di  $T$  ha una misura positiva in tutti i dintorni di tutti i suoi punti. Putnam (1974) utilizza quindi l'insieme di Nikodym per dimostrare un risultato positivo piuttosto che solo per fornire un controesempio.

*Osservazione.* Si osserva che la teoria della misura geometrica e l'analisi armonica continueranno a influenzarsi a vicenda.

# Bibliografia

- [1] K.J.Falconer, *The geometry of fractal sets*, Cambridge University Press 1985
- [2] Debashis Chatterjee, *The kekeya Needle Problem and Besikovitch Set*, Indian Statistical Institute, Kolkate, 2013
- [3] Vincent Borrelli, Jean-Luc Rullière, *En cheminant avec Kekeya: Voyage au coeur des mathématiques*, 2014
- [4] J.-P.Kahane, *Trois notes sur les ensembles parfaits linéaires*, 1969