

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Matematica

IL FENOMENO DI GIBBS

Relatore:
**Chiar.ma Prof.ssa Annamaria
Montanari**

Presentata da:
Lorenzo Farina

Anno Accademico 2018/2019

“La matematica è l’alfabeto con cui Dio ha scritto l’Universo”

Galileo Galilei

Introduzione

Questa trattazione ha lo scopo di fornire una spiegazione matematica del fenomeno di Gibbs. Il fenomeno di Gibbs si verifica quando sono presenti forti oscillazioni nei polinomi di Fourier di una funzione con discontinuità di prima specie. Osserviamo che queste peculiarità, che si trovano vicino ai punti di discontinuità della funzione, non diminuiscono aumentando il grado del polinomio, tanto che la serie sembra non convergere alla funzione sviluppata. Vedremo che un modo per far scomparire questo fenomeno è quello di utilizzare un altro tipo di polinomi trigonometrici, cioè quelli di Fejér, al posto di quelli di Fourier. Di solito però si preferisce utilizzare comunque il polinomio di Fourier per la rappresentazione della funzione, anche se può portare a queste anomalie, perché è il polinomio trigonometrico che meglio approssima la funzione in norma quadratica.

Lo studio di questo fenomeno è molto attuale, perché in tutti i processi di approssimazione, quali per esempio la ricostruzione o il filtraggio di immagini e segnali, bisogna in ogni modo tenere controllate queste particolari oscillazioni descritte sopra, cercando di eliminarne il più possibile.

Il fenomeno di Gibbs in realtà non fu analizzato e scoperto per primo dal fisico inglese Josiah Willard Gibbs, del quale questo fenomeno porta il nome, bensì il primo che lo notò fu il matematico Henry Wilbraham nel 1849. Infatti solo dopo cinquant'anni nel 1898 Gibbs ne diede una descrizione precisa sulla rivista *Nature*, anche se solo nel 1906 le affermazioni fatte da Gibbs su questo fenomeno furono dimostrate e generalizzate dal matematico statunitense Maxime Bocher.

Questa illustrazione è divisa in quattro capitoli. Nel primo capitolo descriveremo i polinomi e le serie trigonometriche, dando un'idea generale di quello su cui andremo a lavorare, analizzando nello specifico i polinomi e le serie di Fourier. Cercheremo, quindi, di dare condizioni sufficienti per la convergenza di quest'ultime, utilizzando il principio di localizzazione di Riemann. Riusciremo a dire che anche funzioni con discontinuità di prima specie, con particolari condizioni, riescono ad essere sviluppabili in serie di Fourier; osserveremo poi che i polinomi di Fourier riescono a minimizzare l'errore in norma quadratica. Nel secondo capitolo analizzeremo in dettaglio il fenomeno di Gibbs, esaminando due esempi emblematici, da cui svilupperemo un'analisi qualitativa del caso generale del suddetto fenomeno. Il primo caso preso in questione è quello dell'onda quadra, in cui quantificheremo le sovraoscillazioni vicine ai suoi punti di discontinuità di prima specie. Il secondo caso è quello dell'onda semitriangolare, in cui vedremo come il fenomeno di Gibbs si comporta quando si ha una funzione con discontinuità di prima specie ed un punto angoloso; osservando che tale fenomeno si ma-

nifesta nell'intorno di punti in cui la funzione non è derivabile ma continua. Utilizzando tutti questi dati, dimostreremo che l'effetto Gibbs si presenta ogni volta in cui viene troncata una funzione periodica, regolare a tratti e con discontinuità di prima specie. Nel terzo capitolo definiremo la convergenza secondo Cesaro e le somme di Fejér, provando che con quest'ultime si riesce ad eliminare l'effetto Gibbs. Nel quarto e ultimo capitolo analizzeremo i grafici dei polinomi di Fourier dell'onda quadra e quelli dell'onda semitriangolare, facendo vedere l'attenuazione delle oscillazioni delle serie di Fourier tramite l'approssimazione delle funzioni con le serie di Fejér. Daremo poi qualche esempio sulle loro applicazioni in cui bisogna tenere in considerazione il fenomeno di Gibbs. Nell'appendice riporteremo il programma Matlab per sviluppare i grafici 3D.

Indice

Introduzione	i
1 Alcuni risultati dell'analisi di Fourier	1
1.1 Polinomi e serie trigonometriche	1
1.2 Polinomi e serie di Fourier	2
1.3 Convergenza della serie di Fourier	5
2 Il Fenomeno di Gibbs	10
2.1 Due esempi preliminari	10
2.1.1 Onda quadra	10
2.1.2 Onda semitriangolare	14
2.2 Analisi quantitativa del fenomeno di Gibbs	17
2.2.1 Il caso dell'onda quadra	17
2.2.2 Il caso generale	20
3 Una soluzione al Fenomeno di Gibbs	23
3.1 Convergenza secondo Cesaro e Teorema di Fejér	23
3.2 Eliminazione del Fenomeno di Gibbs	28
4 Conclusioni	31
Appendice	35

Capitolo 1

Alcuni risultati dell'analisi di Fourier

In questo capitolo vedremo alcuni risultati utili per la convergenza della serie di Fourier ricavati dal teorema di localizzazione di Riemann, per arrivare ad affermare che una funzione con discontinuità di prima specie, sotto opportune ipotesi, è sviluppabile in serie di Fourier. In particolare osserveremo che i polinomi di Fourier riescono a minimizzare l'errore in norma quadratica, proprietà di cui godono solo questi particolari polinomi trigonometrici.

1.1 Polinomi e serie trigonometriche

Le serie trigonometriche sono specifiche serie di funzioni, costruite a partire dalle funzioni trigonometriche elementari cioè $\{\sin nx, \cos nx\}$, che si rivelano particolarmente utili nell'analisi dei fenomeni periodici.

Introduciamo la nozione di polinomio trigonometrico:

Definizione 1.1.1. *Si dice polinomio trigonometrico ogni funzione $s_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ con $n \in \mathbb{N}$ della forma*

$$\begin{aligned} s_n(x) &:= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \\ &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx \end{aligned} \tag{1.1}$$

I numeri complessi a_0 e a_k, b_k ($1 \leq k \leq n$) sono i coefficienti del polinomio trigonometrico.

Quest'ultimo si dice *reale* se tutti i suoi coefficienti sono reali.

Grazie alle proprietà di ortogonalità, si ricava che i coefficienti di s_n dati dalla forma (1.1) sono determinati dalle seguenti formule:

$$\begin{cases} a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x) \cos kx \, dx & \text{per } k = 0, 1, \dots, n \\ b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x) \sin kx \, dx & \text{per } k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (1.2)$$

Passiamo di conseguenza alla considerazione delle *serie trigonometriche*, cioè serie di funzioni della forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (1.3)$$

Dove i coefficienti a_k, b_k sono della forma (1.2) con $n = +\infty$.

1.2 Polinomi e serie di Fourier

Passando ora al caso specifico dei polinomi e delle serie di Fourier vediamo come sono definiti:

Definizione 1.2.1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione 2π -periodica q.o. tale che $f \in L^1(] - \pi, \pi[)$. Chiamiamo il polinomio di Fourier di grado $n \in \mathbb{N}$ della funzione f il polinomio trigonometrico reale della forma (1.1)

$$s_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

dove i coefficienti sono della forma (1.2) e vengono chiamati *costanti di Fourier* di f rispetto al sistema delle funzioni trigonometriche

$$\begin{cases} a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx \, dx & \text{per } k = 0, 1, \dots, n \\ b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx \, dx & \text{per } k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (1.4)$$

La serie di Fourier associata ad f invece è definita secondo la forma (1.3)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Vediamo che i coefficienti a_k, b_k sono legati ad f dalle equazioni (1.4) e sono ben definiti, in quanto $|\cos kx| \leq 1, |\sin kx| \leq 1$ e la funzione f è sommabile su $] - \pi, \pi[$.

In generale si tratta di dare condizioni su f affinché esistano i coefficienti

tali che la serie sia convergente, e converga proprio ad $f(x)$. Quando questo accade, f è sviluppabile in serie di Fourier, quindi i coefficienti della serie trigonometrica sono determinati in modo univoco da f , il che autorizza a definire tale serie come la serie di Fourier.

Osservazione 1.2.1. Siano $I =]-\pi, \pi[$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica tale che $f \in L^2(I)$. Allora

$$\|s_n(f) - f\|_{L^2(I)} \leq \|p - f\|_{L^2(I)}$$

dove p è un qualsiasi polinomio trigonometrico di grado minore o uguale a n .

Dimostrazione. Consideriamo la norma quadratica $\|p\|_{L^2}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} p^2(x) dx$. Sia T_n lo spazio dei polinomi trigonometrici di grado al più n di dimensione $2n+1$ e

$$\{e_0, \dots, e_{2n}\} := \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{2\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{2\pi}}, \dots, \frac{\sin nx}{\sqrt{2\pi}} \right\}$$

sia una base ortonormale rispetto alla norma quadratica. Di conseguenza qualsiasi polinomio trigonometrico $p \in T_n$ può essere scritto come

$$p = \sum_{k=0}^{2n} c_k e_k$$

dove

$$c_k = \int_{-\pi}^{\pi} p(x) e_k(x) dx \quad \forall k = 0, \dots, 2n$$

In particolare il polinomio di Fourier di f di grado n risulterà essere

$$s_n(f) = \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k e_k$$

dove

$$\hat{f}_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e_k(x) dx \quad \forall k = 0, \dots, 2n$$

Vale che

$$\|s_n(f) - f\|_{L^2(I)}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (s_n(f, x) - f(x))^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx + \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k^2 - 2 \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k^2$$

Mentre

$$\|p - f\|_{L^2(I)}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (p(x) - f(x))^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx + \sum_{k=0}^{2n} c_k^2 - 2 \sum_{k=0}^{2n} c_k \hat{f}_k$$

Dunque

$$\|p-f\|_{L^2(I)} - \|s_n(f)-f\|_{L^2(I)} = \sum_{k=0}^{2n} c_k^2 - 2 \sum_{k=0}^{2n} c_k f_k + \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k^2 = \sum_{k=0}^{2n} (c_k - \hat{f}_k)^2 \geq 0$$

Quindi è così verificata la tesi □

Notiamo che tra tutti i polinomi trigonometrici di grado al più n , quelli di Fourier minimizzano l'errore in norma quadratica; motivo per cui si preferisce usarli nelle applicazioni per rappresentare una funzione.

Vediamo ora una famiglia di funzioni ausiliaria per fornire una rappresentazione integrale dei polinomi di Fourier.

Definizione 1.2.2. $\forall n \in \mathbb{N}$ si indica con D_n l' n -esimo nucleo di Dirichlet il polinomio trigonometrico di grado n

$$D_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx = \begin{cases} n + \frac{1}{2} & \text{se } x = 2k\pi \\ \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} & \text{se } x \neq 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Il nucleo di Dirichlet gode di alcune proprietà

1. È una funzione pari,
2. È una funzione 2π -periodica;
3. Vale che $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = 1$

Lemma 1.2.1. $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \neq 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, risulta

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} \quad (1.5)$$

$$\sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} \quad (1.6)$$

Dimostrazione. Partendo dall'identità

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos kx = \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)x$$

Sommando per k da 1 a n si ottiene:

$$2 \sin \frac{x}{2} \sum_{k=1}^n \cos kx = \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x - \sin \frac{x}{2}$$

da cui deriva (1.5).

Analogamente, dall'identità

$$2 \sin \frac{x}{2} \sin kx = \cos \left(k - \frac{1}{2} \right) x - \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) x$$

Si ottiene che

$$2 \sin \frac{x}{2} \sum_{k=1}^n \sin kx = \cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x$$

Quindi (1.6) □

Possiamo scrivere quindi $s_n(f)$ per il lemma 1.2.1 in forma integrale

$$s_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] D_n(t) dt \quad (1.7)$$

1.3 Convergenza della serie di Fourier

Definizione 1.3.1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica tale che $f \in L^1(\cdot - \pi, \pi)$ allora

- La serie di Fourier di f converge puntualmente in $x \in \mathbb{R}$ se

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(f, x) \in \mathbb{R}$$
- f è sviluppabile in serie di Fourier nel punto $x \in \mathbb{R}$ se

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(f, x) = f(x)$$

In questo paragrafo vogliamo far notare che il problema della convergenza della serie di Fourier, quindi quello dell'esistenza del limite di s_n , è diverso dal problema della sviluppabilità di f , cioè quello che tale limite, se esiste, sia uguale a $f(x)$. Infatti notiamo che i coefficienti di Fourier di f non variano modificando la funzione su un insieme di misura nulla secondo Lebesgue, perché definiti come integrali di Lebesgue; di conseguenza anche la successione di polinomi di Fourier rimane invariata. Può succedere, quindi, che la serie converga in un punto, il quale però non coincida con la funzione calcolata nel punto stesso.

Cerchiamo di ricavare delle condizioni che garantiscano la convergenza della serie di Fourier.

Lemma 1.3.1 (di Riemann-Lebesgue). $\forall f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f \in L^1(]a, b[)$ con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ allora

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin(\lambda x) dx = \lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos(\lambda x) dx = 0$$

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga per le due relazioni. Prendiamo in considerazione la prima relazione:

Se $f = c \in \mathbb{R}$ costante in un sottointervallo $]\alpha, \beta[$ di $]a, b[$ tale che $f \equiv 0$ su $]a, b[\setminus]\alpha, \beta[$, allora

$$\left| \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx \right| = \left| -\frac{c}{\lambda} [\cos \lambda x]_a^b \right| \leq \frac{2|c|}{|\lambda|}$$

da cui la tesi.

Se f è una funzione a scala su $]a, b[$ la tesi è ovvia.

Se f è una funzione generica, fissato $\epsilon > 0$ arbitrario allora $\exists \varphi$ a scala tale che $\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}$ per come abbiamo visto sopra; esiste anche λ_ϵ tale che $\forall \lambda > \lambda_\epsilon$ si ha che $\left| \int_a^b \varphi(x) \sin \lambda x dx \right| < \frac{\epsilon}{2}$, allora

$$\left| \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx \right| \leq \left| \int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx \right| + \left| \int_a^b \varphi(x) \sin \lambda x dx \right| < \epsilon$$

cioè la tesi □

Osservazione 1.3.1. Dati $S_0 \in \mathbb{C}, x_0 \in \mathbb{R}, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione 2π -periodica tale che $f \in L^1(]-\pi, \pi])$ per (1.7) risulta che

$$s_n(f, x_0) - S_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x_0 + t) - S_0] D_n(t) dt$$

Quando $n \rightarrow +\infty$ la funzione $D_n(t)$ non ammette limite per nessun $t \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$, quindi non possiamo pensare di valutarne il limite usando i teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Teorema 1.3.1 (di Dini). Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione 2π -periodica in \mathbb{R} tale che $f \in L^1(]-\pi, \pi])$. Se in corrispondenza al punto $x_0 \in \mathbb{R}$, esiste $S_0 \in \mathbb{C}$ tale che sia verificata la seguente condizione: $\exists \delta > 0$ tale che

$$\int_0^\delta \frac{|f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2S_0|}{t} < +\infty \quad (\text{condizione generalizzata di Dini})$$

Allora $s_n(f, x_0) = S_0$, quindi la serie di Fourier di f converge puntualmente a S_0 in x_0

Dimostrazione. Vediamo che

$$\begin{aligned} s_n(f, x_0) - S_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 [f(x_0 + t) - S_0] D_n(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x_0 + t) - S_0] D_n(t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2S_0}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt \end{aligned}$$

Supponiamo $\delta < \pi$ e sia $\varphi(t) := \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0}{2 \sin \frac{t}{2}}$. Allora in $]0, \delta[$ si ha $2 \sin \frac{t}{2} \geq \frac{2}{\pi} t$, quindi

$$|\varphi(t)| \leq \frac{\pi |f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2S_0|}{2t}$$

Perciò per la condizione generalizzata di Dini $\varphi \in L^1(]0, \delta[)$. Vediamo che nell'intervallo $]0, \delta[$ risulta che

$$|\varphi(t)| \leq \left(2 \sin \frac{\delta}{2} \right)^{-1} [|f(x_0 + t)| + |f(x_0 - t)| + 2|S_0|]$$

Allora $\varphi \in L^1(]0, \delta[)$ e in definitiva $\varphi \in L^1(]0, \pi[)$. La tesi allora è dimostrata per il 1.3.1 \square

Teorema 1.3.2 (Principio di localizzazione di Riemann). *Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ due funzioni 2π -periodiche tali che $f, g \in L^1(]-\pi, \pi[)$. Se le due funzioni coincidono in un intervallo $]a, b[$ (non è limitativo supporre $] - \pi, \pi[$) di ampiezza piccola, allora*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n(f, x) - s_n(g, x)) = 0 \quad \forall x \in]a, b[$$

Dimostrazione. Osserviamo che $s_n(f, x) - s_n(g, x) = s_n(f - g, x)$. La funzione $f - g$ verifica la condizione generalizzata di Dini con $S_0 = 0 \forall x \in]a, b[$.

Quindi la tesi è verificata. \square

Osservazione 1.3.2. *Il comportamento della serie di Fourier di f nel punto x_0 ha quindi un carattere locale, ovvero comunque si modifichino i valori di f fuori dall'intervallo $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$ con $\epsilon > 0$, le serie di Fourier di f, g prese come sopra hanno lo stesso carattere (o entrambe convergenti, divergenti o indeterminate) in x_0 . Inoltre se sono convergenti la loro somma in x_0 è la stessa, anche se i coefficienti rispettivi delle serie sono completamente diversi.*

Per capire quando la condizione generalizzata di Dini vale in ogni punto della funzione, introduciamo la seguente definizione

Definizione 1.3.2. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice regolare a tratti in $[a, b]$ se esiste una partizione finita $\theta_0 = a < \theta_1 < \dots < \theta_n = b$ dell'intervallo $[a, b]$ tale che $\forall k \in \{1, \dots, n\}$:

1. f è di classe C^1 negli intervalli $]\theta_{k-1}, \theta_k[$
2. Esistono e sono finiti: $\lim_{h \rightarrow 0^+} f'(\theta_{k-1} + h)$ e $\lim_{h \rightarrow 0^+} f'(\theta_k - h)$, ma può risultare che questi siano diversi per qualche $k \in \{1, \dots, n-1\}$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice regolare a tratti in \mathbb{R} se lo è in ogni intervallo limitato $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Teorema 1.3.3. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica e regolare a tratti in \mathbb{R} . $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ la serie di Fourier di f converge e si ha

$$s_n(f, x_0) = \frac{1}{2} \left[\lim_{h \rightarrow 0^+} f(x_0 + h) + \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x_0 - h) \right]$$

In particolare la serie di Fourier di una funzione f regolare a tratti converge ad $f(x_0) \forall x_0$ in cui la funzione è continua.

Dimostrazione. Applicando il Teorema di Lagrange, vediamo che sotto queste condizioni esistono e sono anche finiti

$$\begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0^+} f(\theta_k + h) & \forall k \in \{1, \dots, n-1\} \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} f(\theta_k - h) & \forall k \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

ma non è detto siano uguali.

La funzione può presentare quindi:

Punti angolosi

Quando $\lim_{h \rightarrow 0^+} f(\theta_k - h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(\theta_k + h)$ e $\lim_{h \rightarrow 0^+} f'(\theta_k - h) \neq \lim_{h \rightarrow 0^+} f'(\theta_k + h)$

Punti di discontinuità di prima specie

Quando $\lim_{h \rightarrow 0^+} f(\theta_k - h) \neq \lim_{h \rightarrow 0^+} f(\theta_k + h)$

Se f è regolare a tratti in \mathbb{R} , lo è anche in ogni intervallo limitato $[a, b]$ di \mathbb{R} .

Quindi $\forall x_0 \in [a, b]$ e preso $\tau > 0$ tale che $x_0 \mp \tau \in [a, b]$, i rapporti incrementali

$$\begin{cases} \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t} \\ \frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{t} \end{cases} \quad \text{con } t > 0$$

sono limitati per 2. della definizione 1.3.2. In particolare $\forall x_0 \in [a, b]$ è soddisfatta la condizione generalizzata di Dini, con

$$S_0 = \frac{1}{2} \left[\lim_{h \rightarrow 0^+} f(x_0 + h) + \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x_0 - h) \right]$$

□

Capitolo 2

Il Fenomeno di Gibbs

Per cercare di comprendere meglio il Fenomeno di Gibbs, cominceremo ad esaminare due casi particolari, per poi effettuare un'analisi quantitativa del caso generale.

2.1 Due esempi preliminari

Esaminiamo ora in dettaglio il comportamento dei polinomi di Fourier di due casi emblematici. Il primo caso riguarda una funzione periodica con discontinuità di prima specie, il cui studio però può essere esteso al caso generale. Il secondo caso è quello di una funzione periodica con discontinuità di prima specie ed un punto angoloso, che suggerisce che il comportamento anomalo delle ridotte della serie di Fourier si manifesti solo in presenza di elementi di discontinuità della funzione e non, ad esempio, della sua derivata.

2.1.1 Onda quadra

Per prima cosa ora definiamo la funzione *onda quadra*, sia $n \in \mathbb{N}$

$$q(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } 2n - 1 \leq x < 2n \\ 1 & \text{se } 2n \leq x < 2n + 1 \end{cases}$$

Il suo grafico è rappresentato nella figura 2.1

Siccome la funzione $q(x)$ è sommabile, possiamo calcolare i suoi coefficienti di Fourier. Si ha che:

$$s(q, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos n\pi x + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\pi x$$

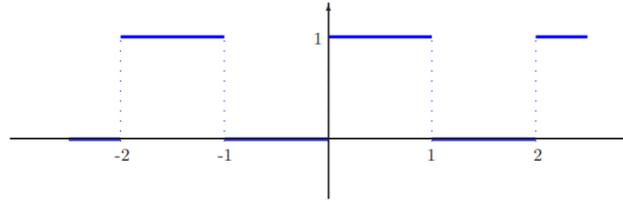


Figura 2.1: Onda quadra

Allora si determina immediatamente:

$$a_0 = \int_0^1 dx = 1 \quad e \quad \begin{cases} a_n = \int_0^1 \cos n\pi x dx = 0 \\ b_n = \int_0^1 \sin n\pi x dx = \frac{1-(-1)^n}{n\pi} \end{cases}$$

Di conseguenza risulta:

$$s(q, x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin \pi x + \frac{\sin 3\pi x}{3} + \dots + \frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1} \right)$$

Osservazione 2.1.1.

$$s_{2n}(q, x) = s_{2n-1}(q, x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)\pi x}{2k-1}$$

Questo segue immediatamente dal fatto che per k pari entrambi i coefficienti a_k e b_k sono nulli.

In particolare

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad s_n(q, k) = \frac{1}{2} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Riportiamo i grafici delle ridotte N -sime della serie di Fourier di $s(q, x)$, per $N = 10$ nella figura 2.2; $N = 20$ nella figura 2.3; $N = 50$ nella figura 2.4

Esaminando i grafici, osserviamo che la convergenza a $q(x)$ è buona all'interno degli intervalli $(k, k+1)$, mentre, avvicinandosi ai punti $x_k = k$ di ascissa intera, che corrispondono ai salti di $q(x)$, si presenta l'anomalia del Fenomeno di Gibbs.

In particolare ogni ridotta presenta vicino a x_k un massimo assoluto, la cui ascissa tende a x_k ma l'ordinata è maggiore di 1 e sembra non tendere a 1, anche se si aumenta l'ordine della ridotta. Allo stesso modo sempre vicino a x_k , presenta un minimo assoluto negativo, la cui ascissa sembra tendere a x_k , mentre l'ordinata sembra assumere un valore negativo sostanzialmente costante.

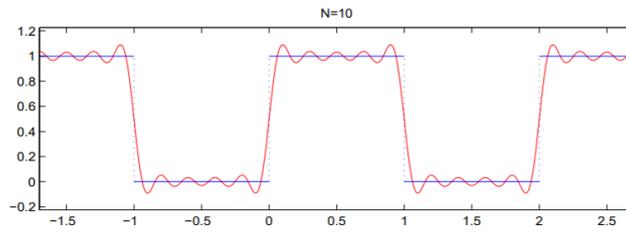


Figura 2.2: Onda quadra con $N=10$

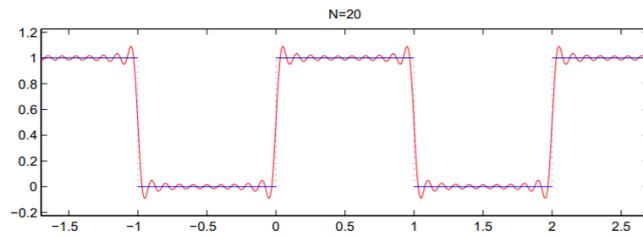


Figura 2.3: Onda quadra con $N=20$

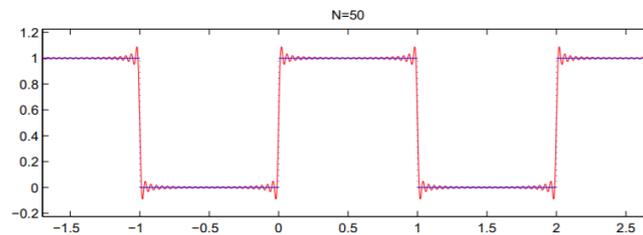


Figura 2.4: Onda quadra con $N=50$

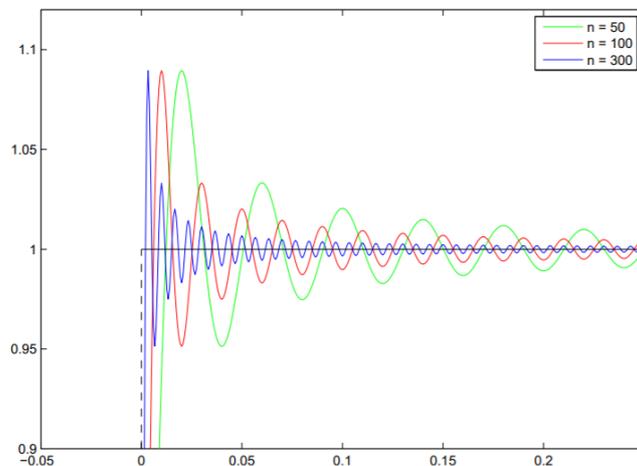


Figura 2.5: Onde quadre a confronto

Osserveremo in seguito che questa anomalia si presenta sempre nell'intorno di un punto di salto di una funzione, quando la si approssima con una ridotta della sua serie di Fourier.

Per una migliore comprensione di tale fenomeno, riportiamo nella figura 2.5 un ingrandimento dei grafici di $s_n(q, x)$ per $n = 50, 100, 300$ vicino al punto $(0, 1)$ e nella figura 2.6 i grafici delle funzioni $s_n(q, x)$ per $x \in [-1.8, 1.8]$ e $n = 1, \dots, 50$

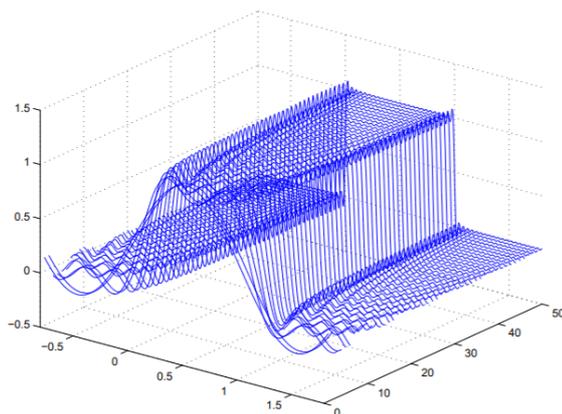


Figura 2.6: Onda quadra 3D

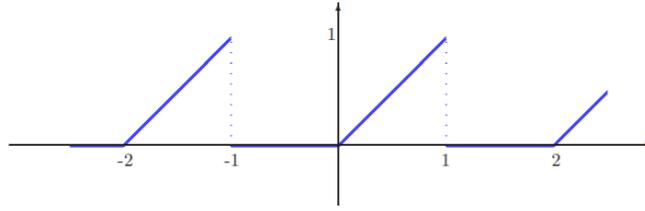


Figura 2.7: Onda semitriangolare

2.1.2 Onda semitriangolare

Definiamo ora la funzione onda semitriangolare, sia $n \in \mathbb{Z}$

$$t(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } 2n - 1 \leq x < 2n \\ x - 2n & \text{se } 2n \leq x < 2n + 1 \end{cases}$$

Il suo grafico è rappresentato dalla figura 2.7

Come nel caso dell'onda quadrata vediamo che la funzione t è sommabile, cerchiamo quindi le sue costanti di Fourier. Si ha

$$a_0 = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \int_0^1 x \cos n\pi x \, dx = \frac{1}{n\pi} [x \sin n\pi x]_0^1 - \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \sin n\pi x \, dx = \frac{1}{n^2 \pi^2} [x \cos n\pi x]_0^1 = \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi^2}$$

$$b_n = \int_0^1 x \sin n\pi x \, dx = -\frac{1}{n\pi} [x \cos n\pi x]_0^1 - \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \cos n\pi x \, dx = -\frac{1}{n\pi} [x \sin n\pi x]_0^1 = -\frac{(-1)^n}{n\pi}$$

La serie di Fourier di $t(x)$ è data da:

$$s(t, x) = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin n\pi x}{n}$$

Riportiamo i grafici delle ridotte N -sime della serie di Fourier di $s(t, x)$, per $N = 10$ nella figura 2.8; $N = 20$ nella figura 2.9; $N = 50$ nella figura 2.10

Anche in questo caso, notiamo il Fenomeno di Gibbs in un intorno dei punti $x_n = 2n - 1$.

Riportiamo ancora nella figura 2.11 un ingrandimento dei grafici di $s_n(t, x)$ per $n = 50, 100, 300$ vicino al punto $(0, 1)$ e nella figura 2.12 i grafici delle funzioni $s_n(t, x)$ per $x \in [-1.8, 1.8]$ e $n = 1, \dots, 50$

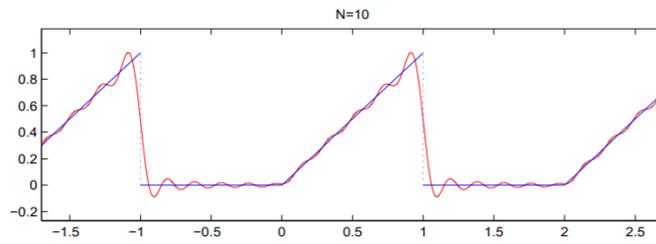


Figura 2.8: Onda semitriangolare con $N=10$

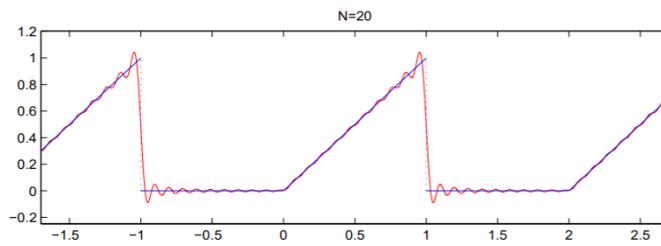


Figura 2.9: Onda semitriangolare con $N=20$

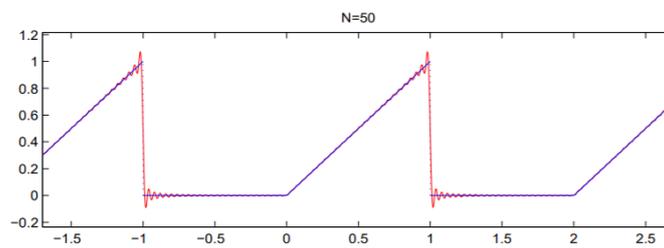


Figura 2.10: Onda semitriangolare con $N=50$

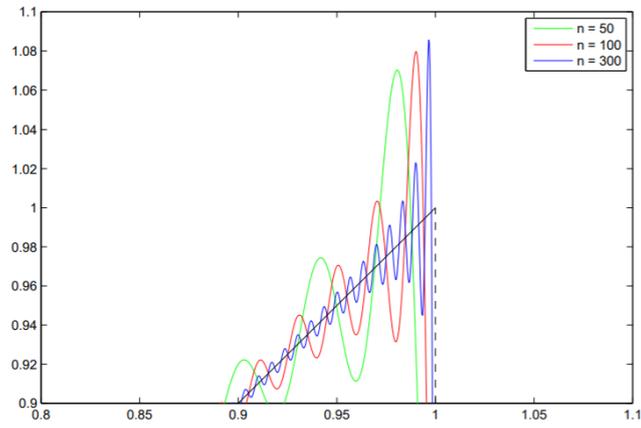


Figura 2.11: Onde semitriangolari a confronto

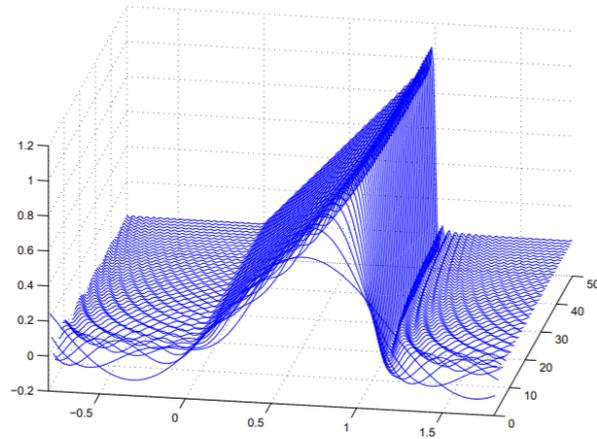


Figura 2.12: Onda semitriangolare 3D

Si noti che l'approssimazione sembra buona nell'intorno dei punti di ascissa $x_n = 2n$, in cui la funzione non è derivabile, ma è continua in un intorno dell'origine.

2.2 Analisi quantitativa del fenomeno di Gibbs

2.2.1 Il caso dell'onda quadra

Abbiamo osservato precedentemente che le ridotte della serie di Fourier dell'onda quadra $q(x)$ hanno espressione

$$s_{2n}(q, x) = s_{2n-1}(q, x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)\pi x}{2k-1}$$

Osservazione 2.2.1. $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vale che:

1. $s_{2n}(q, -x) = 1 - s_{2n}(q, x)$
2. $s_{2n}(q, 1-x) = s_{2n}(q, x)$

Dimostrazione. Ovvie conseguenze delle proprietà delle funzioni seno □

Osservazione 2.2.2. $s_{2n}(q, x)$ è 2-periodica ed è quindi sufficiente studiare la funzione nell'intervallo $[-1, 1]$, perciò si ha

$$\begin{cases} s_{2n}(q, x) > \frac{1}{2} & \text{se } x \in (0, 1) \\ s_{2n}(q, x) < \frac{1}{2} & \text{se } x \in (-1, 0) \end{cases}$$

Per determinare il massimo e il minimo di $s_{2n}(q, x)$ in $[-1, 1]$, quindi in tutto \mathbb{R} , è funzionale semplificare l'espressione della sua derivata:

$$s'_{2n}(q, x) = 2 \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)\pi x$$

Lemma 2.2.1. Per $n = 1, 2, \dots$ ed ogni x non intero vale

$$2 \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)\pi x = \frac{\sin 2n\pi x}{\sin \pi x}$$

Dimostrazione. Sfruttando la formula $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ si ottiene

$$\sin 2k\pi x - \sin 2(k-1)\pi x = 2 \sin \pi x \cos(2k-1)\pi x$$

Sommando ora per $k = 1, \dots, n$ si ha

$$\sin 2n\pi x = 2 \sin \pi x \sum_{k=1}^n \cos (2k - 1)\pi x$$

da cui la tesi □

Osservazione 2.2.3. Definiamo ora $x_h^{(n)} := \frac{h}{2n}$ con $h = 1, 2, \dots, 2n - 1$, allora le ascisse degli estremi relativi di $s_{2n}(q, x)$ nell'intervallo $(-1, 1)$, coincidenti con gli zeri di $s'_{2n}(q, x)$, sono i punti $\mp x_h^{(n)}$.

Nello specifico vediamo che i punti $x_h^{(n)}$ sono di massimo relativo per $h = 1, 3, \dots, 2n - 1$ mentre sono di minimo relativo per $h = 2, 4, \dots, 2n - 2$, basta verificare che

$$\begin{aligned} s_{2n}''\left(q, \frac{2h-1}{2n}\right) &< 0 \\ s_{2n}''\left(q, \frac{h}{2n}\right) &> 0 \end{aligned}$$

Allora per simmetria i punti $-x_k^{(n)}$ e $-1 + x_k^{(n)}$ sono di massimo relativo se k è pari oppure sono di minimo relativo se k è dispari.

Osservazione 2.2.4. Il massimo assoluto di $s_{2n}(q, x)$ in $[-1, 1]$, quindi in tutto \mathbb{R} , è raggiunto nei punti $x_1^{(n)} = \frac{1}{2n}$ e $x_{2n-1}^{(n)} = 1 - \frac{1}{2n}$, mentre il minimo assoluto è raggiunto nei punti $x_2^{(n)} = -\frac{1}{2n}$ e $x_{2n-2}^{(n)} = -1 + \frac{1}{2n}$.

Dimostrazione. Siccome abbiamo che

$$s_{2n}\left(q, \frac{2h+1}{2n}\right) = \frac{1}{2} + \int_0^{\frac{2h+1}{2n}} \frac{\sin 2n\pi x}{\sin \pi x} dx = s_{2n}\left(q, \frac{1}{2n}\right) + \sum_{j=1}^h \int_{\frac{2j-1}{2n}}^{\frac{2j+1}{2n}} \frac{\sin 2n\pi x}{\sin \pi x} dx$$

Si deve verificare che tutti gli integrali facenti parte della sommatoria sono negativi quando $1 \leq h < \frac{n}{2}$.

Infatti calcoliamo

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{2j-1}{2n}}^{\frac{2j+1}{2n}} \frac{\sin 2n\pi x}{\sin \pi x} dx &= \int_{\frac{2j-1}{2n}}^{\frac{j}{n}} \frac{\sin 2n\pi x}{\sin \pi x} dx + \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{2j+1}{2n}} \frac{\sin 2n\pi x}{\sin \pi x} dx = \\
&= \int_{\frac{2j-1}{2n}}^{\frac{j}{n}} \frac{\sin 2n\pi x}{\sin \pi x} dx + \int_{\frac{2j-1}{2n}}^{\frac{j}{n}} \frac{\sin 2n\pi(y + \frac{1}{2n})}{\sin \pi(y + \frac{1}{2n})} dy = \\
&= \int_{\frac{2j-1}{2n}}^{\frac{j}{n}} \left(\frac{1}{\sin \pi x} - \frac{1}{\sin(\pi x + \frac{\pi}{2n})} \right) dx = \\
&= \frac{1}{2n\pi} \int_{(2j-1)\pi}^{2j\pi} \left(\frac{1}{\sin \frac{y}{2n}} - \frac{1}{\sin \frac{y+\pi}{2n}} \right) \sin y dy
\end{aligned}$$

Basta notare che quando y varia nell'intervallo $((2j-1)\pi, 2j\pi)$, abbiamo che:

1. $\sin y < 0$
2. $0 < \frac{y+\pi}{2n} \leq \frac{2h+1}{2n}\pi \leq \frac{\pi}{2}$ e quindi $\sin \frac{y}{2n} < \sin \frac{y+\pi}{2n}$

L'integrando di conseguenza è sempre negativo. □

Osservazione 2.2.5. Il valore del massimo di $s_{2n}(q, x)$ è dato da

$$\max_x s_{2n}(q, x) = s_{2n}\left(q, \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \sin \frac{2k-1}{2n}\pi$$

Mentre il valore del minimo di $s_{2n}(q, x)$ è

$$\min_x s_{2n}(q, x) = s_{2n}\left(q, -\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \sin \frac{2k-1}{2n}\pi$$

Definizione 2.2.1. Chiamiamo costante di Wilbraham-Gibbs¹ il numero $G \approx 1.178980\dots$ dato da

$$G := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \int_0^1 \frac{\sin \pi x}{\pi x} dx$$

Teorema 2.2.1.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\max_x s_{2n}(q, x)) = \frac{1}{2}(1+G) \quad e \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\max_x s_{2n}(q, x) - \min_x s_{2n}(q, x)) = G$$

Dimostrazione. Abbiamo che

$$\max_x s_{2n}(q, x) = s_{2n}\left(q, \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \tau}{\tau} \frac{\tau/2n}{\sin(\tau/2n)} d\tau \right)$$

Dove le funzione del tipo $\tau \rightarrow \frac{\tau/2n}{\sin(\tau/2n)}$ sono minori di $\frac{\pi}{2}$ nell'intervallo $[0, \pi]^2$, perciò applicando il Teorema sulla convergenza dominata di Lebesgue

¹A volte con tale nome viene indicato il numero $\frac{\pi}{2}G \approx 1.851937\dots$

²Perché nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$ si ha $\sin t \geq \frac{2t}{\pi}$

otteniamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\max_x s_{2n}(q, x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\max_x s_{2n-1}(q, x) \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \right) = \frac{1}{2}(1+G)$$

Siccome $s_{2n}(q, -\frac{1}{2n}) = 1 - s_{2n}(q, \frac{1}{2n})$, basta notare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\min_x s_{2n}(q, x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(s_{2n-1} \left(q, -\frac{1}{2n} \right) \right) = \frac{1}{2}(1 - G)$$

Da cui il risultato cercato □

Nel caso appena esaminato, si vede quindi che il salto effettivo della funzione $q(x)$, in corrispondenza ai punti di ascissa intera, viene enfatizzato di quasi il 18% quando si approssima la funzione con una ridotta della sua trasformata di Fourier.

Questo risultato non riguarda strettamente il caso dell'onda quadra ma è di carattere del tutto generale.

2.2.2 Il caso generale

Analizziamo adesso il comportamento delle ridotte della serie di Fourier di una generica funzione periodica e regolare a tratti, nell'intorno di un punto di salto.

Sfruttiamo un risultato per le successioni uniformemente convergenti di funzioni continue.

Lemma 2.2.2. *Siano $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue su un intervallo $[a, b]$ in cui converge uniformemente ad una funzione g continua, $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione contenuta in $[a, b]$ che tende a c . Allora la successione $\{g_n(c_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $g(c)$.*

Dimostrazione. Per la convergenza uniforme di $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, fissato $\epsilon > 0$ arbitrario, esiste un $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\epsilon$ e $|g_n(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ per ogni $x \in [a, b]$.

In particolare $|g_n(c) - g(c)| < \frac{\epsilon}{2}$. Siccome c_n tende a c e g è continua, allora esiste $\delta > 0$ tale che $|x - c| < \delta$ e quindi $|g(x) - g(c)| < \frac{\epsilon}{2}$. Di conseguenza anche $|c_n - c| < \delta$, dunque definitivamente abbiamo che $|g_n(c_n) - g(c)| \leq |g_n(c_n) - g(c_n)| + |g(c_n) - g(c)| < \epsilon$. □

Teorema 2.2.2. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione regolare a tratti e $2L$ -periodica. Sia x_0 un punto tale in cui f presenta una discontinuità di prima specie, con un salto definito da $\Delta(x_0) := f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$. Sia $x_n := \frac{L}{2n}$, allora*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n(f, x_0 \pm x_n)) = \frac{1}{2}(f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)) \pm \frac{\Delta(x_0)}{2}G \quad (2.1)$$

Inoltre posto

$$M_n(f) := \limsup_{x \rightarrow x_0} (s_n(f, x)) = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} (\sup\{s_n(f, x) \mid 0 < |x - x_0| < \sigma\})$$

$$m_n(f) := \liminf_{x \rightarrow x_0} (s_n(f, x)) = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} (\inf\{s_n(f, x) \mid 0 < |x - x_0| < \sigma\})$$

Si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (M_n(f) - m_n(f)) = |\Delta(x_0)|G \quad (2.2)$$

Dimostrazione. ³Poniamo $\tilde{q}(x) := q\left(\frac{x-x_0}{L}\right)$ e $\varphi(x) := f(x) - \Delta(x_0)\tilde{q}(x)$ tale che sia una funzione regolare a tratti, $2L$ -periodica e continua in x_0 ⁴, allora

$$\varphi(x_0 + 0) = f(x_0) - \Delta(x_0) = f(x_0 - 0) = \varphi(x_0 - 0) = \varphi(x_0)$$

Fissiamo un intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ in cui l'unica discontinuità di f è quella in x_0 , allora $\varphi(x)$ è continua e $s_n(\varphi, x)$ tende a $\varphi(x)$ uniformemente su quest'intervallo.

Notiamo che $s_n(f, x_0 \pm x_n) = s_n(\varphi, x_0 \pm x_n) + \Delta(x_0)s_n(q, \pm x_n)$, dunque per il Lemma 2.2.2 risulta

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(f, x_0 \pm x_n) &= \varphi(x_0) + \Delta(x_0) \frac{1 \pm G}{2} = \\ &= f(x_0 - 0) + \frac{1}{2}(f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)) \pm \frac{\Delta(x_0)}{2}G \end{aligned}$$

Da cui la (2.1).

Supponiamo ora $\Delta(x_0) > 0$, siccome $s_n(f, x) = s_n(\varphi, x) + \Delta(x_0)s_n(q, \frac{x-x_0}{L})$ risulta che

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow x_0} (s_n(f, x)) &\leq \limsup_{x \rightarrow x_0} (s_n(\varphi, x)) + \Delta(x_0) \limsup_{x \rightarrow x_0} \left(s_n\left(q, \frac{x - x_0}{L}\right) \right) \\ &= s_n(\varphi, x_0) + \Delta(x_0) s_n\left(q, \frac{1}{2n}\right) \end{aligned}$$

³Non è limitativo supporre f continua da destra, basta ridefinire $f(x_0)$

⁴Perché $\tilde{q}(x_0 + 0) = \tilde{q}(x_0) = 1$ e $\tilde{q}(x_0 - 0) = 0$

$$\begin{aligned}\liminf_{x \rightarrow x_0}(s_n(f, x)) &\geq \liminf_{x \rightarrow x_0}(s_n(\varphi, x)) + \Delta(x_0) \liminf_{x \rightarrow x_0}\left(s_n\left(q, \frac{x - x_0}{L}\right)\right) \\ &= s_n(\varphi, x_0) + \Delta(x_0)s_n\left(q, -\frac{1}{2n}\right)\end{aligned}$$

Quindi

$$\limsup_{x \rightarrow x_0}(s_n(f, x)) - \liminf_{x \rightarrow x_0}(s_n(f, x)) \leq \Delta(x_0) \left[s_n\left(q, \frac{1}{2n}\right) - s_n\left(q, -\frac{1}{2n}\right) \right]$$

Dai risultati dell'*onda quadra* visti precedentemente, si ottiene che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\limsup_{x \rightarrow x_0}(s_n(f, x)) - \liminf_{x \rightarrow x_0}(s_n(f, x)) \right) \leq \Delta(x_0)G$$

Ma evidentemente la (2.1) implica la disuguaglianza opposta, quindi deriva la (2.2).

Il caso $\Delta(x_0) < 0$ si riduce a quello precedente, prendendo $-f$. \square

Capitolo 3

Una soluzione al Fenomeno di Gibbs

In questo capitolo cercheremo di definire un nuovo tipo di convergenza di successioni trigonometriche, che permetta di eliminare l'effetto Gibbs. Quello che ci siamo prefissati di fare è estendere il concetto di convergenza secondo Cesaro delle serie numeriche alle serie di funzioni.

3.1 Convergenza secondo Cesaro e Teorema di Fejér

Definizione 3.1.1. Siano $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione numerica, $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la successione delle sue somme parziali, dove $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Diciamo che $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge secondo Cesaro al numero reale s , se la successione delle medie aritmetiche delle somme parziali $\sigma_n = \frac{s_1 + \dots + s_n}{n}$ converge ad s .

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = s$$

Questa definizione di convergenza è più debole di quella usuale, infatti vale la seguente osservazione

Osservazione 3.1.1. Sia $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione numerica reale. Se la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge ad $s \in \mathbb{R}$, allora la serie converge anche secondo Cesaro al numero reale s .

Dimostrazione. Siccome $s_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} s$ allora

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tale che } |s_n - s| < \epsilon \quad \forall n > n_\epsilon$$

Quindi

$$|\sigma_n - s| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |s_k - s| = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n |s_k - s| + \sum_{k=n_\epsilon+1}^n |s_k - s| \right) \leq \frac{1}{n} (c + n\epsilon) \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

Vediamo che $\forall \epsilon' > \epsilon \exists N$ tale che $\frac{1}{N}(c + N\epsilon) \leq \epsilon'$, di conseguenza $|\sigma_n - s| \leq \epsilon'$ con ϵ arbitrario e perciò anche ϵ' arbitrario. Non vale però l'implicazione contraria. \square

La definizione di convergenza secondo Cesaro si estende in modo naturale alla convergenza di successioni o di serie di funzioni; in particolare, nelle serie di Fourier, le medie aritmetiche

$$\sigma_n(f, x) = \frac{s_0(f, x) + \cdots + s_{n-1}(f, x)}{n}$$

si chiamano *somme di Fejér*, ed anch'esse sono rappresentabili in forma integrale e introduciamo così i nuclei di Fejér.

Definizione 3.1.2. Sia $s \in \mathbb{R}$ definiamo il nucleo di Fejér la funzione

$$\Phi_n(s) = \begin{cases} \frac{1}{n \sin \frac{s}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) s \right) & \text{se } s \neq 2k\pi \\ \frac{n}{2\pi} & \text{se } s = 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Osservazione 3.1.2. Per $s \in]-\pi, \pi[$ vale la seguente uguaglianza

$$\Phi_n(s) = \frac{\sin^2 \frac{ns}{2}}{n \sin^2 \frac{s}{2}}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \Phi_n(s) &= \frac{1}{n \sin \frac{s}{2}} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) s \right) \\ &= \frac{1}{n \sin^2 \frac{s}{2}} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) s \right) \sin \frac{s}{2} \\ &= \frac{1}{n \sin^2 \frac{s}{2}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} \left(\cos \left((k-1)s \right) - \cos ks \right) \\ &= \frac{1}{2n \sin^2 \frac{s}{2}} \left(1 - \cos \frac{n}{2} \right) \\ &= \frac{\sin^2 \frac{ns}{2}}{n \sin^2 \frac{s}{2}} \end{aligned}$$

\square

Teorema 3.1.1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica tale che $f \in L^1(] - \pi, \pi[)$. Siano $s_n(f, x)$ il polinomio di Fourier di f di grado n nel punto $x \in]\pi, \pi[$ e $\sigma_n(f, x) = \frac{s_0(f, x) + \dots + s_{n-1}(f, x)}{n}$ le sue somme di Fejér. Allora vale la seguente uguaglianza:

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+s) + f(x-s)}{2} \Phi_n(s) ds$$

Dimostrazione. Sapendo che per il Lemma 1.2.1 e l'uguaglianza (1.7) osserviamo che

$$s_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+s) + f(x-s)}{2} \frac{\sin((n + \frac{n}{2})s)}{\sin \frac{s}{2}} ds$$

Quindi abbiamo che

$$\begin{aligned} \sigma_n(f, x) &= \frac{s_0(f, x) + \dots + s_{n-1}(f, x)}{n} \\ &= \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+s) + f(x-s)}{2 \sin \frac{s}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \sin((k + \frac{1}{2})s) ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+s) + f(x-s)}{2} \Phi_n(s) ds \end{aligned}$$

□

Vediamo alcune proprietà del nucleo di Fejér:

1. Vale la seguente uguaglianza

$$\pi = \int_0^\pi \Phi_n(s) ds \quad (3.1)$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione costante $f \equiv 1$. I suoi coefficienti di Fourier sono quindi $a_0 = 2, a_k = b_k = 0 \forall k \geq 1$. Così vale $\forall n \geq 0 s_n(1, x) = 1$, allora $\sigma_n(1, x) = 1 = s_n(1, x)$. Di conseguenza

$$1 = \sigma_n(1, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi_n(s) ds$$

□

2. Il nucleo di Fejér è pari

3. Il nucleo di Fejér è non negativo

4. $\forall \delta > 0$ fissato, abbiamo che $\Phi_n(f, x)$ tende uniformemente a zero per $\delta \leq |t| \leq \pi$

Dimostrazione. Notiamo che per $0 < x < \frac{\pi}{2}$ vale $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$, allora

$$0 \leq \Phi_n(f, x) \leq \frac{\sin^2 \frac{ns}{2}}{n \sin^2 \frac{ns}{2}} \leq \frac{\pi^2}{n\delta^2}$$

□

Se si confrontano i nuclei di Fejér con le loro proprietà e i nuclei di Dirichlet, notiamo alcune analogie; ma l'osservazione più significativa sono le loro differenze. Infatti le proprietà iii. e iv. dimostrate sopra, sono proprie solo dei nuclei di Fejér e non dei nuclei di Dirichlet. Queste differenze sono fondamentali per la comprensione del diverso comportamento delle relative somme σ_n e s_n , che, come vedremo in seguito, comportano l'eliminazione del Fenomeno di Gibbs e garantiscono il seguente Teorema.

Teorema 3.1.2 (Teorema di Fejér). *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodica e sommabile in $]-\pi, \pi[$. Sia $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la successione delle somme di Fejér. Sia $x \in \mathbb{R}$ tale che esiste $f^*(x)$. Allora vale*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f, x) = f^*(x) \quad (3.2)$$

Inoltre se f continua in $[-\pi, \pi]$, la successione $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f in $[-\pi, \pi]$

$$\sigma_n \xrightarrow{\rightarrow} f \text{ per } n \rightarrow +\infty \quad (3.3)$$

Dimostrazione. Cominciamo dimostrando la (3.2). Sia $x \in \mathbb{R}$ tale che esiste $f^*(x)$, siccome vale la (3.1) allora ricaviamo la seguente uguaglianza

$$\sigma_n(f, x) - f^*(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{f(x+s) + f(x-s)}{2} - f^*(x) \right) \Phi_n(s) ds$$

Definiamo ora la funzione

$$g_x(s) = \frac{f(x+s) + f(x-s)}{2} - f^*(x)$$

Allora per definizione vale che $g_x(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0^+} 0$, quindi

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \text{tale che } |g_x(s)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall s \in]0, \delta[\quad (3.4)$$

dove δ dipende sia da x che da ϵ . Avendo visto che il nucleo di Fejér è sempre positivo, otteniamo che

$$|\sigma_n(f, x) - f^*(x)| \leq \int_0^\pi |g_x(s)| \Phi_n(s) ds = \int_0^\delta |g_x(s)| \Phi_n(s) ds + \int_\delta^\pi |g_x(s)| \Phi_n(s) ds$$

Ora per la (3.4) abbiamo che

$$\int_0^\delta |g_x(s)| \Phi_n(s) ds \leq \frac{\epsilon}{2} \int_0^\pi \frac{\Phi_n(s)}{\pi} ds = \frac{\epsilon}{2}$$

Mentre

$$\int_\delta^\pi |g_x(s)| \Phi_n(s) ds \leq \frac{1}{\pi} \frac{1}{n \sin^2 \frac{\delta}{2}} \int_\delta^\pi |g_x(s)| ds \leq \frac{\int_0^\pi |g_x(s)|}{n \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

Scegliamo N^1 tale che $\frac{1}{N\pi \sin^2 \frac{\delta}{2}} \leq \frac{\epsilon}{2}$, allora ne segue che

$$\forall n > N \quad |\sigma_n(f, x) - f^*(x)| \leq \int_0^\delta |g_x(s)| \Phi_n(s) ds + \int_\delta^\pi |g_x(s)| \Phi_n(s) ds \leq \epsilon$$

Abbiamo quindi provato la convergenza puntuale delle somme di Fejér.

Dimostriamo ora la seconda affermazione.

La funzione f è continua su $[-\pi, \pi]$, che è un sottoinsieme compatto di \mathbb{R} , quindi per il Teorema di Heine-Cantor è uniformemente continua su tale intervallo. Infatti abbiamo che

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \tau > 0 \quad \text{tale che } |g_x(s)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall s \in]0, \tau[\quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

Tramite calcoli analoghi a quelli svolti sopra si ha

$$|\sigma_n(f, x) - f^*(x)| \leq \int_0^\tau |g_x(s)| \Phi_n(s) ds + \int_\tau^\pi |g_x(s)| \Phi_n(s) ds$$

Come prima notiamo che

$$\int_0^\tau |g_x(s)| \Phi_n(s) ds \leq \frac{\epsilon}{2} \int_0^\pi \frac{\Phi_n(s)}{\pi} ds = \frac{\epsilon}{2}$$

Siccome $g_x(s)$ è continua e limitata su $[-\pi, \pi]$ e anche 2π -periodica, allora $g_x(s)$ è limitata su tutto \mathbb{R} , quindi $\sup_{x,s \in \mathbb{R}} |g_x(s)| \leq M$.

Scegliamo N^2 tale che $\frac{M}{N\pi \sin^2 \frac{\delta}{2}} \leq \frac{\epsilon}{2}$, allora ne segue che

$$\forall n > N \quad |\sigma_n(f, x) - f^*(x)| \leq \int_0^\tau |g_x(s)| \Phi_n(s) ds + \int_\tau^\pi |g_x(s)| \Phi_n(s) ds \leq \epsilon$$

Converge quindi uniformemente □

¹ x è fissato, quindi N dipende sia da ϵ che da x

²In questo caso N dipende solo da ϵ

3.2 Eliminazione del Fenomeno di Gibbs

Cerchiamo ora di comprendere come le somme di Fejér riescano ad eliminare l'effetto Gibbs.

Osservazione 3.2.1. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica tale che $f \in L^1(\cdot - \pi, \pi]$. Se esistono $c, C \in \mathbb{R}$ tali che $c \leq f(x) \leq C$ per quasi ogni $x \in [-\pi, \pi]$, allora*

$$c \leq \sigma_n(f, x) \leq C \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

Dimostrazione.

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+s) + f(x-s)}{2} \Phi_n(s) ds$$

Visto che $c \leq f(x) \leq C$ per quasi ogni $x \in [-\pi, \pi]$, allora

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{2c}{2} \Phi_n(s) ds \leq \sigma_n(f, x) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{2C}{2} \Phi_n(s) ds$$

Da cui segue la tesi, per l'uguaglianza (3.1) □

Teorema 3.2.1. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione regolare a tratti, $2L$ -periodica tale che x_0 sia un suo punto di discontinuità di prima specie con un salto $|\Delta(x_0)|$. Prendiamo $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una qualsiasi successione di numeri reali tale che $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0$. Allora non si presenta il Fenomeno di Gibbs e vale che*

$$\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f, x_n) - \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f, x_n) \right) \leq |\Delta(x_0)|$$

Dimostrazione. Usando le stesse notazioni del Teorema 2.2.2, però considerando le somme di Fejér otteniamo

$$\sigma_n(f, x_0 \pm x_n) = \sigma_n(\varphi, x_0 \pm x_n) + f^*(x_0) + \frac{\Delta(x_0)}{2} \sigma_n\left(g, \frac{\pm x_n}{L}\right)$$

Dall'Osservazione 3.2.1 invece sappiamo che $-1 \leq q(x_0) \leq 1$, quindi

$$-1 \leq \sigma_n(f, x) \leq 1 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Allora

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} (\sigma_n(f, x_n)) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} (\sigma_n(\varphi, x_n) + f^*(x_0) + \frac{\Delta(x_0)}{2} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left(\sigma_n\left(g, \frac{x_n - x_0}{2} \pi\right) \right))$$

Per la (3.3)

$$\begin{aligned}
&\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} (\varphi(x_n)) + f^*(x_0) + \frac{\Delta(x_0)}{2} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left(\sigma_n \left(q, \frac{x_n - x_0}{2} \pi \right) \right) \\
&\leq \varphi(x_0) + f^*(x_0) + \frac{\Delta(x_0)}{2} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left(\sigma_n \left(q, \frac{x_n - x_0}{2} \pi \right) \right) \\
&\leq \varphi(x_0) + f^*(x_0) + \frac{\Delta(x_0)}{2} (1) = f^*(x_0) + \frac{\Delta(x_0)}{2}
\end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}
\liminf_{n \rightarrow +\infty} (\sigma_n(f, x_n)) &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} (\sigma_n(\varphi, x_n)) + f^*(x_0) + \frac{\Delta(x_0)}{2} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(\sigma_n \left(q, \frac{x_n - x_0}{2} \pi \right) \right) \\
&\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} (\varphi(x_n)) + f^*(x_0) + \frac{\Delta(x_0)}{2} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(\sigma_n \left(q, \frac{x_n - x_0}{2} \pi \right) \right) \\
&\geq \varphi(x_0) + f^*(x_0) + \frac{\Delta(x_0)}{2} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(\sigma_n \left(q, \frac{x_n - x_0}{2} \pi \right) \right) \\
&\geq \varphi(x_0) + f^*(x_0) + \frac{\Delta(x_0)}{2} (-1) = f^*(x_0) - \frac{\Delta(x_0)}{2}
\end{aligned}$$

Allora si ottiene

$$\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f, x_n) - \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f, x_n) \right) \leq |\Delta(x_0)|$$

□

Tornando agli esempi fatti nel **Capitolo 2**, riportiamo nelle figure 3.1 e 3.2 i grafici delle somme di Fejèr relative alla funzione *onda quadra* e alla funzione *onda semitriangolare*.

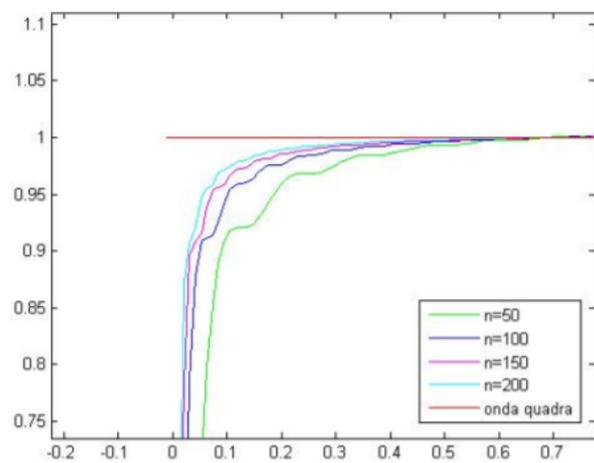


Figura 3.1: particolare delle somme di Fejér per l'onda quadra

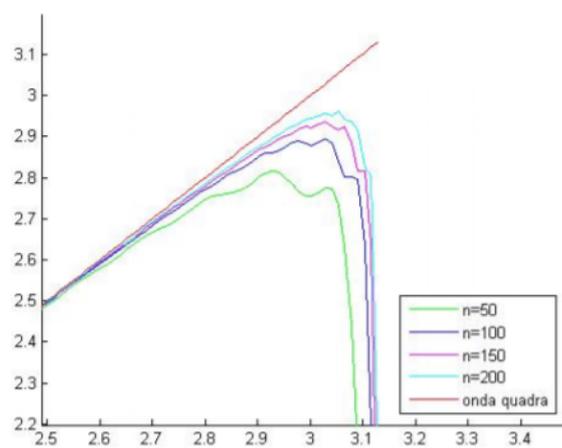


Figura 3.2: Particolare delle somme di Fejér per l'onda semitriangolare

Capitolo 4

Conclusioni

Quello che possiamo notare nei grafici precedenti, che rappresentano un particolare delle somme di Fejér dell'*onda quadra* e dell'*onda semitriangolare*, è che effettivamente non presentano le sovraoscillazioni del Fenomeno di Gibbs, vicino al punto di discontinuità.

Osserviamo adesso le figure 4.1 e 4.2, che rappresentano tridimensionalmente il confronto tra i primi 50 polinomi di Fourier e le prime 50 somme di Fejér, rispettivamente nei casi dell'*onda quadra* e nell'*onda semitriangolare*.

Quindi la caratteristica delle somme di Fejér di attenuare le oscillazioni delle ridotte delle serie di Fourier è qua ben chiara. Nonostante questa capacità delle somme di Fejér, nelle applicazioni si usano comunque i polinomi di Fourier, perché meglio approssimano la norma quadratica della funzione stessa.

Infatti le onde quadre vengono anche utilizzate nel progetto e nello studio degli amplificatori e per la verifica delle loro prestazioni. Tra le caratteristiche tecniche di questi apparecchi è importante lo slew rate che indica la

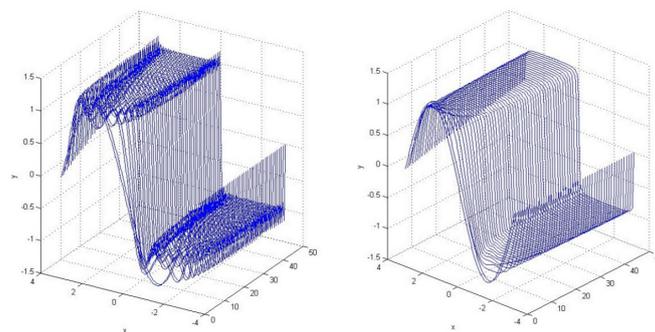


Figura 4.1: Confronto tra onde quadre con Fourier e Fejér

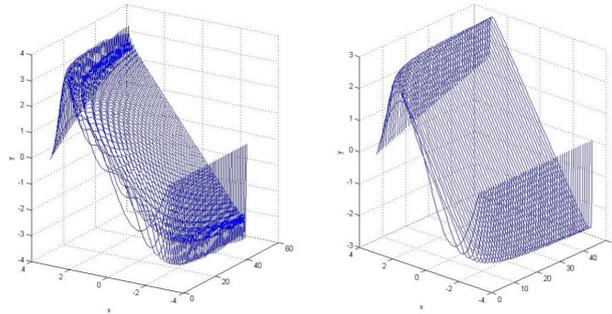


Figura 4.2: Confronto tra onde semitriangolari con Fourier e Fejér

velocità del fronte di salita e di discesa di un'onda quadra sull'uscita del circuito finale, espressa in volt per microsecondo; quindi la capacità di reazione di un dispositivo sollecitato da un impulso di tensione.

L'onda quadra è utilizzata anche per la verifica e la calibrazione degli amplificatori verticali degli oscilloscopi, delle sonde di corrente ad effetto Hall, dei frequenzimetri e di altri strumenti durante la progettazione di circuiti. Nelle telecomunicazioni la grande ampiezza di banda dello spettro occupata dall'onda quadra, la rende svantaggiosa nelle comunicazioni specie se la banda passante del canale è piuttosto limitata. Infatti nelle radiocomunicazioni l'onda quadra, siccome limita l'efficienza della modulazione in frequenza di più segnali, limita l'efficienza spettrale del sistema.

L'onda semitriangolare è, invece, la forma dei segnali di deflessione verticale e orizzontale usati per generare un'immagine sui televisori o monitor a tubo catodico.

Vediamo come avviene la deflessione:

Deflessione orizzontale Quando lo scalino della funzione sale lentamente, il campo magnetico prodotto trascina il fascio elettronico da un estremo all'altro del tubo catodico, creando una linea di scansione orizzontale. Il campo magnetico passa da un valore negativo a sinistra allo stesso valore positivo a destra. In assenza di campo magnetico il fascio luminoso si posiziona al centro dello schermo. Quando l'onda torna bruscamente al valore minimo, il campo magnetico ritorna rapidamente al valore iniziale e il fascio elettronico alla posizione di partenza. La tensione applicata alla deflessione è controllata con vari sistemi (trasformatori, condensatori, trasformatori con presa centrale), in modo che il valore medio dell'onda corrisponda ad un campo magnetico nullo. Questo significa che una tensione positiva dell'onda semitriangolare piega il fascio elettronico in una direzione, mentre la stessa tensione negati-

va lo sposta nella posizione simmetrica rispetto al centro dello schermo.

Deflessione verticale Il sistema di deflessione verticale funziona nello stesso modo di quello orizzontale illustrato, ma con una frequenza diversa dell'onda semitriangolare (60 Hz per NTSC, 50 Hz per PAL e SECAM).

In generale la rampa ascendente dell'onda deve essere il più possibile lineare, altrimenti il campo magnetico prodotto sposta il fascio elettronico in modo non lineare, l'immagine sullo schermo viene deformata e la luminosità risulta non uniforme, in quanto percorre parti dello schermo a velocità diverse.

Appendice

Scriviamo di seguito il programma MatLab usato per disegnare i grafici 3D

```
clc

clear

close all

n=input('Scegli il grado della funzione: ')

choice=menu('scegli la funzione onda','quadra','semitriangolare')

points=200;

h=2*pi/points;

for i=1:points
    ascisse(i)=-pi+(i-1)*h;
end

for i=1:n
    Xs(:,i)=ascisse;
    z(:,i)=i*ones(1,points);
end

if choice==1:
    for i=1:n
```

```

        yGibbs(:,i)=q(ascisse,i);
    end
else
    for i=1:n
        yGibbs(:,i)=t(ascisse,i);
    end
end

box=yGibbs;
yFejer=yGibbs;

for i=2:n
    for j=1:i-1
        yFejer(:,i)=yFejer(:,i)+yGibbs(:,j);
    end
    yFejer(:,i)=yFejer(:,i)./i;
end

%plot
figure(1)

```

```

subplot(1,2,1)

plot3(z,Xs,yGibbs,'b','LineWidth',1);

xlabel('deg polinomio');

ylabel('x');

zlabel('y');

grid on;

```

```

subplot(1,2,2)

plot3(z,Xs,yFejer,'b','LineWidth',1);

xlabel('deg polinomio');

ylabel('x');

zlabel('y');

grid on;

```

Riportiamo ora il programma per disegnare le funzioni q e t

```

function [y]=q(x,n)

y=zeros(1,lenght(x));

for i=1:n

    if mod(i,2)==1

        y=y+4*sin(i*x)/(pi*i);

    end

end

end

```

```
end
```

```
function [y]=t(x,n)
```

```
y=zeros(1,length(x));
```

```
for i=1:n
```

```
    if mod(i,2)==1
```

```
        y=y+2*sin(i*x)/(i);
```

```
    else
```

```
        y=y-2*sin(i*x)/(i);
```

```
    end
```

```
end
```

```
end
```


Bibliografia

- [1] Tom Mike Apostol. *Mathematical analysis*. Addison-Wesley, 1974.
- [2] Giulio Cesare Barozzi. *Matematica per l'ingegneria dell'informazione*. Zanichelli, 2004.
- [3] H. S. Carslaw. "A trigonometrical sum and the Gibbs' phenomenon in Fourier's series". *American Journal of Mathematics*, Vol.39:185–198, Aprile 1917.
- [4] Edwin Hewitt and Hewitt Robert E. "The Gibbs-Wilbraham phenomenon: an episode in Fourier Analysis". *Archive for History of Exact Sciences*, Vol.21:129–160, 1979.
- [5] Ermanno Lanconelli. *Lezioni di analisi matematica 2*. Pitagora Editrice, 1997.
- [6] Gianni A. Pozzi. Cenni sulle serie di Fourier. 2007. <http://www-dimat.unipv.it/giulio/linkmaterial/camb08/fourier-pozzi.pdf>.
- [7] Elena Prestini. *Applicazioni dell'analisi armonica*. Hoepli, 1996.
- [8] <https://www.britannica.com/ondaquadra/ondaadentedisega>.

Ringraziamenti

Siamo giunti alla fine di questo primo percorso e devo ammettere che non sempre è stato facile, ci sono stati momenti di crisi, ma quello che è rimasto e non è mai scemato è la passione per la Matematica. La Matematica può aprire mondi che non si potevano immaginare e dare nuove interpretazioni di mondi già conosciuti.

Desidero ringraziare quindi la Professoressa Annamaria Montanari, che mi ha dedicato tempo e pazienza, ha saputo consigliarmi con gentilezza aiutandomi a comprendere al meglio la materia e ha sempre cercato di farci incuriosire a questi aspetti dell'Analisi durante le lezioni.

Grazie Mamma, perché hai sempre creduto in me, hai cercato di comprendermi e aiutarmi, mi hai alzato quando cadevo e so che sei stata, sei e sarei sempre al mio fianco.

Grazie Papà, perché sei sempre stato forte, mi hai insegnato che nella vita la pazienza è una grande dote e porta sempre a dei risultati.

Grazie Zia, perché fin da piccolo mi hai ascoltato, hai sempre cercato di consigliarmi facendomi vedere la direzione della mia strada.

Grazie Zio, perché mi hai insegnato che saranno le difficoltà che mi si sono presentate a portarmi avanti e che non tutto viene per nuocere.

Grazie Elisa, perché è da una vita che ci supportiamo, ridiamo e sappiamo di esserci sempre quando abbiamo bisogno.

Grazie Federico, perché sei sempre quello che ragiona, che mi aiuta saggiamente nelle difficoltà e so dove ti posso trovare.

Grazie a tutte le mie compagne di avventura, ci siamo presi in giro, ci siamo detti la verità, ci siamo ascoltati, qualcuno ci può allontanare ma ritorneremo sempre. Grazie Leti, Agne, Ila, Niki, Fede, Clodi, Chri, Eli, Vicky, Gaia e Mati.

Grazie Lorenza, perché in questi anni di università e in quelli che verranno ci daremo sempre una mano e condivideremo gioie e fatiche.

Ringrazio anche tutti i miei compagni che ho conosciuto.

Infine voglio ringraziarti, perché sono sicuro che non sarei come sono adesso, mi prometti ogni giorno la tua fiducia e il tuo amore, mi comprendi nelle mie fragilità e mi travolgi semplicemente essendo te stessa, mi insegni ogni giorno che tutto si può fare quando si è come noi. Grazie Chiara.