

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA

---

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Matematica

**Superfici Topologiche Reali  
e  
Curve Algebriche Complesse**

Tesi di Laurea in Geometria Proiettiva

**Relatore:**  
Chiar.mo Prof.  
Alessandro Gimigliano

**Presentata da:**  
Michele Camorani

V Sessione  
Anno Accademico 2018/19



*Presentazione di uno studio  
gargantuesco.*



# Introduzione

Per molti secoli la geometria è stata studiata esclusivamente da un punto di vista metrico, considerando solo la *Geometria Euclidea* e solamente in tempi relativamente recenti ci si è accorti che esistono proprietà geometriche che possono essere formulate senza ricorrere a misure o al confronto di grandezze. Alcune di queste proprietà vengono studiate dalla **geometria proiettiva**. Questa geometria ha le sue origini nelle regole della prospettiva, che gli artisti del rinascimento (Brunelleschi, Piero Della Francesca) studiarono scientificamente e utilizzarono in modo sistematico. Tali regole sono basate sull'idea di "punti di fuga", verso cui concorrono i contorni degli oggetti così come essi appaiono da un punto di osservazione. Il primo precursore della geometria proiettiva fu Girard Desargues (1593-1650), il quale per primo considerò rette e piani paralleli come casi particolari di rette e piani incidenti.

Nella seconda metà del XIX secolo la geometria prese uno sviluppo completamente nuovo e destinato a divenire una grande forza nella matematica moderna, con lo sviluppo della *Geometria Algebrica* e di quella *differenziale*. Nel XX secolo nacque poi la **topologia**, che ha come oggetto lo studio delle proprietà delle figure geometriche che persistono anche quando le figure sono sottoposte a deformazioni così profonde da perdere tutte le loro proprietà metriche e proiettive, facendo persistere proprietà delle figure che sono più fondamentali (come connessione e compattezza). La topologia nasce con l'osservazione di proprietà fondamentali che sono anche osservabili intuitivamente, poi nel suo sviluppo e formalizzazione considera oggetti più astratti. In questo elaborato si vedranno figure geometriche in spazi proiettivi considerate sia dal punto di vista algebrico che da quello topologico.



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>1 Preliminari</b>	<b>1</b>
1.1 Morfismi Proiettivi . . . . .	2
1.2 Esempi di Spazi Proiettivi . . . . .	3
1.3 Polinomi . . . . .	5
<b>2 Varietà Topologiche</b>	<b>9</b>
2.1 Preliminari di Topologia . . . . .	10
2.2 Superfici Topologiche nel Proiettivo . . . . .	12
2.3 Primo Gruppo di Omologia . . . . .	13
2.4 Classificazione Superfici Topologiche . . . . .	17
2.4.1 Orientare una Superficie . . . . .	21
2.4.2 Triangolazioni e Poligonazioni . . . . .	24
2.4.3 Il Taglia e Incolla . . . . .	28
<b>3 Curve Algebriche</b>	<b>35</b>
3.1 Curve algebriche in $\mathbb{C}^2$ . . . . .	36
3.2 Curve algebriche in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ . . . . .	39
3.2.1 Omogeneizzazione e Disomogeneizzazione . . . . .	43
3.2.2 Proiettivo e Affine . . . . .	44
3.3 Topologia delle curve algebriche in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ . . . . .	45
3.3.1 La formula del genere . . . . .	51
<b>Bibliografia</b>	<b>53</b>



# Capitolo 1

## Preliminari

Poichè lavoreremo soprattutto nel piano proiettivo richiamiamo qui alcune nozioni di base sugli spazi proiettivi che ci serviranno per tutto il resto dell'elaborato.

**Definizione 1.1** (Spazio Proiettivo). Sia  $V$  un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale allora

$$\mathbb{P}(V) := \{W \subset V \mid W \text{ sottospazio di } V; \dim W = 1\} \cong V \setminus \{0_V\} / \mathbb{K}^* \quad (1.1)$$

è il suo spazio proiettivo, se  $\dim V = n + 1$  allora  $\dim \mathbb{P}(V) = n$ , per convenzione si pone  $\dim \mathbb{P}(\{0_V\}) = \dim \emptyset = -1$ .

Dati  $v, w \in V \setminus \{0_V\}$  allora la relazione di equivalenza

$$v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ t.c. } v = \lambda w \quad (1.2)$$

è ben definita  $\forall v, w \in V \setminus \{0_V\}$ .

Le classi di equivalenza  $[v]$ , sono i punti di  $\mathbb{P}^n(V)$ ,  $\forall v \in V$ .

**Proposizione 1.0.1** (Formula di Grassmann nel proiettivo). *Sia  $V$  un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale e  $W, U$  due suoi sottospazi, considerando la formula di Grassman:*

$$\dim(W + U) = \dim W + \dim U - \dim(W \cap U) \text{ allora:}$$

$$\dim(\mathbb{P}(W) + \mathbb{P}(U)) = \dim \mathbb{P}(W) + \dim \mathbb{P}(U) - \dim(\mathbb{P}(W \cap U)) \quad (1.3)$$

*è la loro formula di Grassmann nel proiettivo, che rimane invariata.*

*Osservazione 1.* Dato  $V$ ,  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale, e  $W$  un suo sottospazio, ricordando la formula:

$$\text{codim}W = \text{dim}V - \text{dim}W$$

e passando al proiettivo:

$$\text{codim}\mathbb{P}(W) = \text{dim}\mathbb{P}(V) - \text{dim}\mathbb{P}(W) = \text{dim}V - 1 - (\text{dim}W - 1) = \text{dim}V - \text{dim}W \quad (1.4)$$

si può osservare che anche la codimensione nel proiettivo rimane invariata.

**Definizione 1.2** (Carta Affine). Sia  $V = \mathbb{K}^{n+1}$ , dato  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$  spazio proiettivo di dimensione  $n$ , seguendo la definizione 1.1, i suoi punti si possono rappresentare come:

$$\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n := \{[x_0, \dots, x_n]; (x_0, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0), x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}\}. \quad (1.5)$$

Si può notare che  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$  contiene l'insieme:

$$\mathcal{A}_0 := \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n; x_0 \neq 0\}. \quad (1.6)$$

Considerando come sono fatte le classi di equivalenza, ovvero che  $[x_0, \dots, x_n] = [\lambda x_0, \dots, \lambda x_n]$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*$  allora è possibile moltiplicare tutti gli elementi di  $\mathcal{A}_0$  per  $\frac{1}{x_0}$  ottenendo in questo modo:

$$\mathcal{A}_0 := \left\{ \left[ 1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right] \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n; x_0 \neq 0 \right\} = \{[1, X_0, \dots, X_n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n\}. \quad (1.7)$$

Un insieme  $\mathcal{A}_j$  con  $j \in \{0, \dots, n\}$  definito in modo analogo, si dice **carta affine** di  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ .

## 1.1 Morfismi Proiettivi

**Definizione 1.3.** Data  $f : V \rightarrow V$ , applicazione lineare, si vuole associare ad essa una funzione da  $\mathbb{P}(V)$  a  $\mathbb{P}(V)$  che indicheremo con  $\bar{f} : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$  e chiameremo, se esiste, *proiettività*.

Ponendo  $\bar{f}([v]) = [f(v)]$  l'applicazione è ben definita sulle classi perchè

$$\bar{f}([\lambda v]) = [f(\lambda v)] = [\lambda f(v)] = [f(v)] = \bar{f}([v]).$$

Abbiamo che se  $v \in \mathcal{Ker}(f)$ , allora  $f(v) = 0_V$ , e quindi  $[f(v)]$  non è definita. Tale problema non si pone se  $\mathcal{Ker}(f) = \{0_V\}$ , e in questo caso l'applicazione  $\bar{f}([v]) = [f(v)]$  è ben definita.

Si può quindi concludere che:

$\bar{f}$  è una proiettività ben definita  $\iff f$  automorfismo.

*Osservazione 2.* La funzione  $\Psi : f \mapsto \bar{f}$  non è iniettiva, infatti:

$$\Psi(\lambda f) = \bar{f}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}^*.$$

*Osservazione 3.* I punti fissi della proiettività  $\bar{f}$ , ovvero  $[v] \in \mathbb{P}(V)$  tali che  $\bar{f}([v]) = [v]$ , corrispondono agli autovettori  $v$  di  $f$ .

## 1.2 Esempi di Spazi Proiettivi

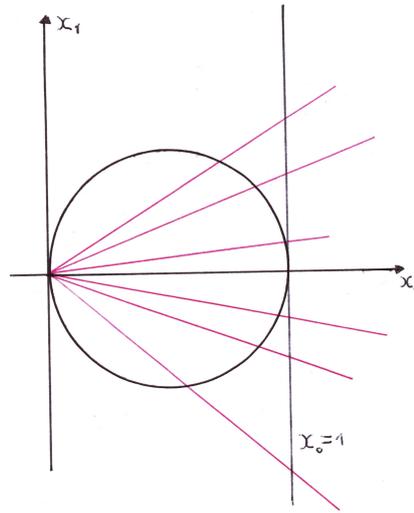
**Esempio 1.1.**  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$  viene detta **Retta Proiettiva Reale**, i suoi punti si possono rappresentare come:

$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 := \{[x_0, x_1]; (x_0, x_1) \neq (0, 0), x_0, x_1 \in \mathbb{R}\}. \quad (1.8)$$

Questo spazio contiene la carta affine:

$$\mathcal{A}_0 := \left\{ \left[ 1, \frac{x_1}{x_0} \right] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1; x_0 \neq 0 \right\} = \{[1, X]; X \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}.$$

Il punto  $\hat{P} = [0, 1]$  non appartiene ad  $\mathcal{A}_0$ , ed è chiamato punto improprio o **punto all'infinito**, per questo motivo si dice che la retta proiettiva è una retta a cui è stato aggiunto un punto che non le appartiene, lo spazio topologico  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \cong \mathbb{R} \cup \hat{P}$  risulta inoltre omeomorfo ad una circonferenza.



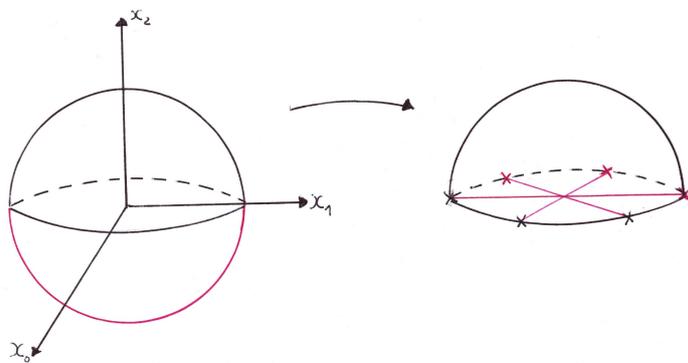
**Esempio 1.2.**  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} / \mathbb{R}^*$  è chiamato **Piano Proiettivo Reale**; prendendo la sua carta affine  $\mathcal{A}_0$  risulta che:

$$\mathcal{A}_0 := \left\{ \left[ 1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0} \right] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2; x_0 \neq 0 \right\} = \{[1, X, Y]; X, Y \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^2.$$

Adesso si vogliono guardare i punti che stanno in  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \setminus \mathcal{A}_0$ , quindi ponendo  $x_0 = 0$ :

$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \setminus \mathcal{A}_0 := \{[0, x_1, x_2]; (x_1, x_2) \neq (0, 0), x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \cong \mathbb{R} \cup \hat{P}.$$

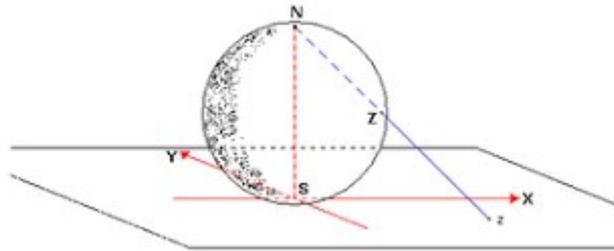
Prendendo  $S^2$  quozientata con la relazione di equivalenza antipodale  $\sim$  (ove  $P \sim Q$  se  $P = Q$  oppure  $P$  è diametralmente opposto a  $Q$ , cioè  $P = -Q$ ), si può vedere che è omeomorfa a  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ . Risulta quindi che  $S^2 / \sim$  è la calotta sferica superiore con bordo quozientato, ovvero  $[P] = P$  oppure  $[P] = \{P, -P\}$  se  $P$  appartiene al bordo.



**Esempio 1.3.** Per studiare il **proiettivo di  $\mathbb{C}^2$** , ovvero  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ , poichè

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 := \{[x_0, x_1]; (x_0, x_1) \neq (0, 0), x_0, x_1 \in \mathbb{C}\},$$

si ha un procedimento del tutto analogo all'esempio 1.1, e si ottiene che  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ; ovvero che  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  è un piano a cui è stato aggiunto un punto non appartenente al piano stesso, detto "punto all'infinito", (dal punto di vista topologico questa è detta *Compattificazione di Hausdorff*). Si può dimostrare inoltre che  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ , come spazio topologico, è omeomorfo a  $S^2$  attraverso la *Proiezione Stereografica*.



## 1.3 Polinomi

**Definizione 1.4.** Un campo  $\mathbb{K}$  si dice *algebricamente chiuso* se  $\forall f \in \mathbb{K}[x]$ , tale che  $f \notin \mathbb{K}$ ,  $f$  ha almeno una radice. In particolare, ogni polinomio di grado  $d$  ha  $d$  radici (contate con molteplicità).

**Teorema 1.3.1** (Fondamentale dell'algebra).  $\mathbb{C}$  è *algebricamente chiuso*.

*Dimostrazione.* Si può trovare ad esempio in [2].

**Teorema 1.3.2.** Sia  $F$  un polinomio omogeneo di grado  $d$  in  $\mathbb{K}[x_0, x_1]_d$ , con  $d \in \mathbb{N}_{>0}$ ,  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ , allora esistono  $(a_1, b_1) \dots (a_n, b_n) \in \mathbb{K}^2$  e  $a \in \mathbb{K}$ ,  $a \neq 0$  t.c.

$$F = a \prod_{j=0}^d (a_j x_0 - b_j x_1). \quad (1.9)$$

**N.B.** Non detto che  $(a_j, b_j)$  siano distinte.

*Dimostrazione.* Consideriamo  $f$  ottenuto raccogliendo  $x_0$  e poi dividendo  $F$  con  $x_0$  elevato al massimo esponente che compare nel polinomio, successivamente applicando un cambiamento di variabili di  $\frac{x_1}{x_0}$  con  $x$ ; in questo modo  $f \in \mathbb{K}[x]$ ,  $\deg f = n \leq d$ , e per il teorema fondamentale dell'algebra  $f$  ha  $n$  radici contate con molteplicità, ovvero:

$$f(x) = a \prod_{j=1}^n (a_j - b_j x).$$

Moltiplicando per  $x_0^d$  riottengo  $F$  nella forma:

$$F = ax_0^{d-n} \prod_{j=1}^n (a_j x_0 - b_j x_1)$$

poichè  $x_0 = (1x_0 - 0x_1)$  questo prova la tesi.  $\square$

**Esempio 1.4.** Applicando l'algoritmo usato nella dimostrazione col polinomio  $F = x_0^2 x_1^4 - x_0^6$ :

$$F = x_0^2 x_1^4 - x_0^6 = x_0^2 (x_1^4 - x_0^4) \in \mathbb{C}[x_0, x_1]_6$$

diventa:

$$f = \frac{F}{x_0^6} = \left( \frac{x_1}{x_0} \right)^4 - 1 = x^4 - 1.$$

Sapendo che  $1, -1, i, -i$  sono le radici di  $f$  in  $\mathbb{C}$ , chiamandole rispettivamente  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  allora:

$$f = \prod_{j=1}^4 (x - \alpha_j) \implies F = x_0^2 \prod_{j=1}^4 (x_1 - \alpha_j x_0).$$

**Teorema 1.3.3** (Sviluppo di Taylor per polinomi in più variabili). *Sia  $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_d$ , sia  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ , e usando come notazione per indicare la derivata  $k$ -esima del polinomio  $f$  rispetto alle variabili  $x_{j_1}, \dots, x_{j_k}$ :*

$$f_{j_1, \dots, j_k} := \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}$$

*allora:*

$$f(x_0, \dots, x_n) = f(\underline{a}) + \sum_{j=1}^n f_j(\underline{a})(x_j - a_j) + \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2=1}^n f_{j_1, j_2}(\underline{a})(x_{j_1} - a_{j_1})(x_{j_2} - a_{j_2}) +$$

$$\dots + \frac{1}{d!} \sum_{j_1, \dots, j_d=1}^n f_{j_1, \dots, j_d}(\underline{a}) \cdot (x_{j_1} - a_{j_1}) \cdot \dots \cdot (x_{j_d} - a_{j_d}). \quad (1.10)$$

**Proposizione 1.3.4** (Formula di Eulero). *Sia  $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$  un polinomio omogeneo di grado  $d \in \mathbb{N}_{>0}$  allora:*

$$d \cdot F = \sum_{j=0}^n x_j \frac{\partial F}{\partial x_j}. \quad (1.11)$$

*Dimostrazione.* Si prende  $\hat{F}(t) = F(tx_0, \dots, tx_n) \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n, t]$ , poichè  $F$  è omogeneo di grado  $d$  in  $x_0, \dots, x_n$  risulta  $\hat{F}(t) = t^d F(x_0, \dots, x_n)$ , per cui:

$$\hat{F}'(t) = d \cdot t^{d-1} F(x_0, \dots, x_n) = \frac{\partial F}{\partial t}(tx_0, \dots, tx_n) = \sum_{j=0}^n x_j \frac{\partial F}{\partial (tx_j)}(tx_0, \dots, tx_n)$$

da cui:

$$\hat{F}'(1) = d \cdot F(x_0, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^n x_j \frac{\partial F}{\partial x_j}(x_0, \dots, x_n)$$

e questo prova la tesi. □



## Capitolo 2

# Varietà Topologiche

In questo capitolo verrà data la nozione di varietà topologica, soffermandoci principalmente alle varietà di dimensione 2, dette *Superfici Topologiche*. Sarà presente una breve introduzione ai gruppi di omologia al fine di dare una buona definizione di superficie orientabile.

Le superfici che verranno considerate saranno prevalentemente quelle corrispondenti in modo univoco ad un poligono avente tutti i lati identificati nel modo opportuno, cioè le superfici *prive di bordo*.

In questo capitolo verranno date inoltre le definizioni di somma connessa e triangolazione. Saranno concetti utili per la comprensione del teorema centrale presentato in questa tesi, ovvero, quello di trovare un modo di classificare una superficie in senso topologico.

In questo capitolo considereremo superfici compatte e che siano anche prive di bordo.

Sarà interessante inoltre notare degli isomorfismi tra i primi gruppi di omologia di alcune superfici e il gruppo  $\mathbb{Z}^k$ , con un opportuno  $k$  in base alla superficie che si sta considerando.

Le dimostrazioni di molti risultati non saranno fornite in questo elaborato, in quanto non indispensabili ai suoi scopi.

## 2.1 Preliminari di Topologia

**Definizione 2.1.** Un *omeomorfismo* è una applicazione continua, biiettiva e con inversa continua. Due sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$  si dicono *omeomorfi* se esiste un omeomorfismo tra essi.

**Definizione 2.2.** Uno spazio topologico  $X$  si dice *connesso* se gli unici sottoinsiemi contemporaneamente aperti e chiusi sono  $\emptyset$  e  $X$ .

Uno spazio topologico si dice *compatto* se ogni suo ricoprimento aperto possiede un sottoricoprimento finito.

**Definizione 2.3** (Spazio di Hausdorff). Uno spazio topologico  $X$  è detto *di Hausdorff* se, per ogni coppia di punti distinti  $x, y \in X$  esistono due aperti  $U_x$  e  $U_y$  contenenti rispettivamente  $x$  e  $y$  tali che  $U_x \cap U_y = \emptyset$ .

**Definizione 2.4.** Sia  $X$  uno spazio topologico, una coppia  $(U, \varphi_U)$ , dove  $U \subset X$  è un aperto e  $\varphi_U$  è un omeomorfismo di  $U$  su un aperto di  $\mathbb{R}^n$ , si dice una *n-carta locale* oppure un *n-sistema di coordinate locali*, in  $X$ .

Due *n*-carte locali  $(U, \varphi_U)$  e  $(V, \varphi_V)$  in  $X$  si dicono *compatibili* se  $U \cap V = \emptyset$  oppure se  $U \cap V \neq \emptyset$  e l'applicazione:

$$\varphi_V \circ \varphi_U^{-1} : \varphi_U(U \cap V) \longrightarrow \varphi_V(U \cap V) \quad (2.1)$$

è un omeomorfismo.

**Definizione 2.5.** Un *n-atlante* topologico nello spazio  $X$  è una famiglia di *n*-carte locali  $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$  tale che  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  sia un ricoprimento di  $X$  e le carte locali  $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$  siano a due a due compatibili.

**Definizione 2.6** (Varietà topologica). Uno spazio topologico  $X$  di Hausdorff ed a base numerabile si dice *varietà topologica di dimensione  $n$*  (con  $n \geq 0$ ) se possiede un *n-atlante* topologico. Questo avviene se e solo se ogni punto  $x \in X$  ha un intorno aperto omeomorfo ad un aperto di  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione 2.7** (Superficie Topologica). Una varietà topologica compatta e connessa di dimensione 2 è chiamata *superficie topologica*.

**Definizione 2.8** (Genere). Data  $S$  superficie topologica, il genere di  $S$  (indicato con  $g(S)$ ) è il numero più grande di curve semplici chiuse disgiunte  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_g$  contenute nella superficie e tali che  $S \setminus \{\mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_g\}$  è ancora connessa.

**Definizione 2.9** (Somma Connessa). Siano  $M$  ed  $N$  due varietà topologiche della stessa dimensione  $n$ . Siano  $B_M$  e  $B_N$  due aperti rispettivamente in  $M$  e  $N$  le cui chiusure sono entrambe omeomorfe al disco chiuso  $n$ -dimensionale

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } |x| \leq 1\}.$$

Quindi  $B_M$  e  $B_N$  sono entrambe omeomorfe alla palla aperta

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } |x| < 1\}$$

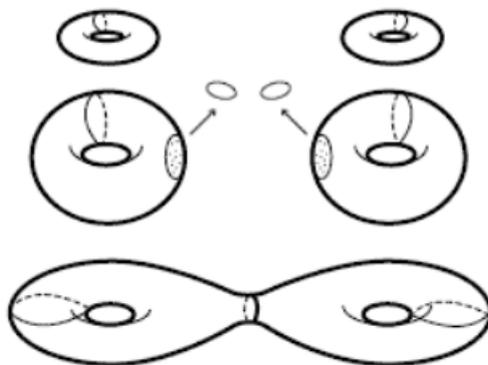
ed il loro bordo omeomorfo alla *sfera*  $(n - 1)$ -dimensionale

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } |x| = 1\}.$$

Sia quindi  $\psi$  un omeomorfismo

$$\psi : \partial B_N \longrightarrow \partial B_M \tag{2.2}$$

la *somma connessa* di  $M$  e  $N$  è definita come lo spazio che si ottiene rimuovendo le due palle aperte da  $M$  ed  $N$  ed incollando successivamente i nuovi bordi sferici tramite la mappa  $\psi$ .



Questo nuovo spazio verrà indicato con  $M\#N$  ed è anch'esso una varietà  $n$ -dimensionale. Quindi per definizione:

$$M\#N = (M \setminus B_M) \cup (N \setminus B_N) / \sim \quad (2.3)$$

dove  $\sim$  è la relazione di equivalenza che identifica ogni  $x$  in  $\partial B_M$  con l'immagine  $\psi(x)$  in  $B_N$ .

## 2.2 Superfici Topologiche nel Proiettivo

**Definizione 2.10** (Topologia nel Proiettivo). Prendendo  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ , ovvero lo spazio proiettivo di  $\mathbb{R}^n$ , sia  $P = [\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_n]$  un suo punto qualunque, poichè le coordinate di  $P$  non sono mai tutte nulle si può supporre  $\bar{x}_0 = 1$ , così da scrivere  $P = [1, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n]$ . Scegliendo  $a = (a_1, \dots, a_n)$  sequenza di numeri positivi reali, allora  $I_{P,a}$  si dice intervallo aperto se:

$$I_{P,a} = \{[1, x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \text{ t.c. } |x_i - \bar{x}_i| < a_i \forall i = 1, \dots, n\}. \quad (2.4)$$

Scegliendo come sistema fondamentale di intorni di ogni punto  $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  l'insieme di tutti gli intervalli aperti di centro  $P$  si ha una topologia su  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  detta *topologia euclidea*.

In modo analogo si definisce la topologia euclidea su  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ , considerando la carta  $z_0 = 1$  e lavorando in  $[1, z_1, \dots, z_n]$  come in  $\mathbb{R}^{2n}$ , considerando  $z_k = x_k + iy_k, \forall k = 1, \dots, n$ .

**Proposizione 2.2.1.** Consideriamo  $Q \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$  ( o  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ ), definita da:

$$[x_0, x_1, x_2, x_3] \in Q \iff x_0x_3 - x_1x_2 = 0$$

si ha che  $Q \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  ( o  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ ) attraverso l'isomorfismo:

$$\Phi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow Q \text{ t.c. } \Phi([s_0, s_1], [t_0, t_1]) := [s_0t_0, s_0t_1, s_1t_0, s_1t_1].$$

*Dimostrazione.* Si vede immediatamente che  $\Phi(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \subseteq Q$ .

$\Phi$  è ben definita sulle classi perchè  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$ :

$$\Phi([\lambda s_0, \lambda s_1], [\mu t_0, \mu t_1]) = [\mu \lambda s_0 t_0, \mu \lambda s_0 t_1, \mu \lambda s_1 t_0, \mu \lambda s_1 t_1] = \Phi([s_0, s_1], [t_0, t_1]).$$

Attraverso semplici passaggi algebrici risulta che  $\Phi$  è biiettiva e quindi

$$Q \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1.$$

□

*Osservazione 4.* Poichè il Toro  $\mathbf{T}$  è per definizione di spazio topologico  $S^1 \times S^1$ , e  $S^1 \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ , ne consegue che  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  è omeomorfo a  $\mathbf{T}$ .

## 2.3 Primo Gruppo di Omologia

Poichè non si farà una teoria dell'omologia non approfondiremo questo concetto, ma lo useremo per gli scopi strettamente inerenti alla nostra esposizione. Saranno presenti in questo capitolo teoremi riguardanti la classificazione delle superfici ma senza la dimostrazione poichè sarebbe strettamente necessario l'utilizzo di proprietà dell'omologia.

I seguenti spazi topologici:

$E_0 = \{0\}$ ,  $E_1 = [0, 1]$  e  $E_2 = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : t_1 \geq 0, t_2 \geq 0 \text{ e } t_1 + t_2 \leq 1\}$  con le topologie indotte da  $\mathbb{R}^2$  saranno detti rispettivamente *0-simplesso campione*, *1-simplesso campione* e il *2-simplesso campione*.

**Definizione 2.11.** Sia  $X$  spazio topologico, ogni applicazione continua  $s : E_q \rightarrow X$  è detta *q-simplesso continuo di  $X$*  (per  $q = 0, 1, 2$ ).

Una *q-catena continua* di  $X$  è una combinazione formale a coefficienti interi:

$$c = n_1 \cdot s_1 + \dots + n_k \cdot s_k \tag{2.5}$$

di *q-simplessi* di  $X$ .

Indichiamo con  $C_q(X)$  il *gruppo delle q-catene di  $X$* ; è il gruppo abeliano che ha per generatori i *q-simplessi* di  $X$ .

**Esempio 2.1.** Ogni poligonale orientata di un aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^n$  può essere vista come la 1-catena di  $U$  somma dei suoi segmenti orientati.

Ogni compatto connesso di un aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^2$  la cui frontiera è unione di un numero finito di poligonalie chiuse non intrecciate (una regione poligonale

di  $\mathbb{R}^2$ ), può essere triangolato, cioè coperto con un numero finito di triangoli a due due disgiunti oppure intersecantesi in un vertice comune o in un lato comune.

Considerando i triangoli (orientati tutti in verso antiorario) come dei 2-simplessi, si può vedere la regione triangolata come la 2-catena di  $U$  somma dei triangoli che la compongono.

**Definizione 2.12.** Nel 2-simplesso campione  $E_2$  parametrizziamo i lati con le seguenti applicazioni continue:

$$l_0, l_1, l_2 : [0, 1] \longrightarrow E_2 \quad (2.6)$$

definite ponendo:

$$l_0(t) = (1 - t, t), \quad l_1(t) = (0, t), \quad l_2(t) = (t, 0). \quad (2.7)$$

Per ogni 2-simplesso  $s^{(2)} : E_2 \longrightarrow X$  continuo in  $X$  diciamo *bordo di*  $s^{(2)}$  la 1-catena:

$$\partial s^{(2)} = s^{(2)} \circ l_0 - s^{(2)} \circ l_1 + s^{(2)} \circ l_2. \quad (2.8)$$

Il *bordo di una 2-catena*  $c^{(2)} = n_1 s_1^{(2)} + \dots + n_k s_k^{(2)}$  è la 1-catena:

$$\partial c^{(2)} = n_1 \cdot \partial s_1^{(2)} + \dots + n_k \cdot \partial s_k^{(2)}. \quad (2.9)$$

Per un 1-simplesso  $s^{(1)} : E_1 \longrightarrow X$  si dice *bordo di*  $s^{(1)}$  la 0-catena:

$$\partial s^{(1)} = s^{(1)}(1) - s^{(1)}(0). \quad (2.10)$$

Per ogni 1-catena  $c^{(1)} = n_1 s_1^{(1)} + \dots + n_k s_k^{(1)}$  si dice *bordo di*  $c^{(1)}$  la 0-catena:

$$\partial c^{(1)} = n_1 \cdot \partial s_1^{(1)} + \dots + n_k \cdot \partial s_k^{(1)}. \quad (2.11)$$

**Esempio 2.2.** Una poligonale orientata  $P$  di un aperto di  $\mathbb{R}^n$  con estremi  $p_0$  e  $p_1$  ha per bordo  $\partial P = p_1 - p_0$ .

In una regione poligonale triangolata  $G$  di un aperto di  $\mathbb{R}^2$  tra le poligonali chiuse che compongono la frontiera ce n'è una che contiene "al suo interno" tutte le altre; indichiamo con  $b^+$  la 1-catena associata a questa poligonale

percorsa in verso antiorario e con la suddivisione in segmenti derivante dalla triangolazione; indichiamo poi con  $b^-$  la somma delle altre poligonal (pure percorse in verso antiorario); risulta:

$$\partial G = b^+ - b^-. \quad (2.12)$$

*Osservazione 5.* Le applicazioni di bordo  $\partial^{(1)} : C_2(X) \rightarrow C_1(X)$  e  $\partial^{(0)} : C_1(X) \rightarrow C_0(X)$  sono degli omomorfismi di gruppo con la proprietà:

$$\partial^{(0)} \circ \partial^{(1)} = 0. \quad (2.13)$$

**Definizione 2.13.** Una 1-catena si dice *1-ciclo di X* se  $\partial^{(0)}c = 0$  cioè se  $c \in \text{Ker } \partial^{(0)}$ , si dice un *1-bordo di X* se esiste una 2-catena  $c^{(2)}$  tale che:

$$c = \partial^{(1)}c^{(2)}, \quad \text{cioè se } c \in \text{Im } \partial^{(1)}. \quad (2.14)$$

Poichè  $\text{Im } \partial^{(1)} \subset \text{Ker } \partial^{(0)}$ , ogni 1-bordo è un 1-ciclo. Una 1-catena  $c$  a coefficienti positivi è un 1-ciclo se e solo se si può scrivere come  $c = c_1, \dots, c_r$  dove  $c_k$  è un *circolo circolare di 1-simplessi*, cioè:  $c_k = s_{k1} + \dots + s_{ku}$  con  $s_{k1}(1) = s_{k2}(0)$ ,  $s_{k2}(1) = s_{k3}(0), \dots, s_{k(u-1)}(1) = s_{ku}(0)$  e  $s_{ku}(1) = s_{k1}(0)$ .

**Definizione 2.14.** Due 1-catene  $c$  e  $c'$  di  $X$  si diranno *omologhe* (e si scriverà  $c \sim c'$ ) se la differenza  $c - c'$  è un 1-bordo di  $X$ .

La relazione di omologia tra cicli è la relazione che definisce il gruppo quoziente  $\{ \text{1-cicli di } X \} / \{ \text{1-bordi di } X \}$ .

*Osservazione 6.* Gli 1-simplessi costanti di  $X$  sono degli 1-bordi e quindi omologhi a 0. In una regione triangolata  $G$  gli 1-cicli  $b^+$  e  $b^-$  sono omologhi in ogni aperto che contiene  $G$ . Ogni 1-bordo è il bordo di una 2-catena a coefficienti positivi.

**Definizione 2.15.** Dato  $\text{Ker } \partial^{(0)}$  il sottogruppo degli 1-cicli di  $X$  e  $\text{Im } \partial^{(1)}$  il sottogruppo degli 1-bordi, allora il gruppo quoziente:

$$H_1(X) = \text{Ker } \partial^{(0)} / \text{Im } \partial^{(1)} \quad (2.15)$$

si dice **1° gruppo di omologia** (singolare) dello spazio  $X$  e consente di determinare sotto quali condizioni un 1-ciclo di  $X$  è un 1-bordo.

Se  $X$  è costituito da un solo punto, si ha  $H_1(X) = \{0\}$ .

**Definizione 2.16.** Si dice *fiore con  $k$  petali* lo spazio topologico ottenuto da  $k$  circonferenze  $C_1, \dots, C_k$  del piano disgiunte a due a due identificando tra loro dei punti  $p_1, \dots, p_k$  (rispettivamente su  $C_1, \dots, C_k$ ).

**Teorema 2.3.1.** *Sia  $F_k$  un fiore con  $k$  petali, allora  $H_1(F_k) \cong \mathbb{Z}^k$  ed è generato dalle classi  $[C_1], \dots, [C_k]$ .*

*Siano  $p_1, \dots, p_k$  dei punti distinti di  $\mathbb{R}^2$ , allora  $H_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_k\}) \cong \mathbb{Z}^k$  ed è generato dalle classi di  $k$  circonferenze  $C_1, \dots, C_k$  scelte in modo da avere per centri rispettivamente i punti  $p_1, \dots, p_k$  e da essere a due a due esterne tra loro.*

*Dimostrazione.* Può essere consultata in [4] a pagina 149. □

**Teorema 2.3.2.** 1. *Sia  $S^n$  la superficie sferica di dimensione  $n$ , risulta  $H_1(S^n) = 0$  per  $n \geq 2$ .*

2. *Indicata con  $D^{(n)} = D(x_0, r)$  un disco aperto (o chiuso) di  $\mathbb{R}^n$ , risulta  $H_1(D^{(n)} \setminus \{x_0\}) = 0$  per  $n \geq 3$ .*

3. *Sia  $U$  un aperto connesso di  $\mathbb{R}^n$  e  $p$  un punto  $U$ , detta  $i : U \setminus \{p\} \rightarrow U$  l'inclusione naturale, l'omomorfismo  $\hat{i} : H_1(U \setminus \{p\}) \rightarrow H_1(U)$  è un isomorfismo per  $n \geq 3$ .*

*Dimostrazione.* La si può consultare in [4] a pagina 150. □

Per poter dire che un aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^n$  ha dimensione  $n$  bisogna sapere che  $U$  non può essere omeomorfo ad aperti di spazi topologici con dimensione diversa da  $n$ . Noi ne avremo bisogno solo per dimensioni 1 e 2 e ne diamo la prova per questi casi.

**Teorema 2.3.3.** *Sia  $U$  un aperto connesso di  $\mathbb{R}$  (di  $\mathbb{R}^2$ ), allora  $U$  non è omeomorfo a nessun aperto di  $\mathbb{R}^n$  con  $n \neq 1$  ( $n \neq 2$ ).*

*Dimostrazione.* ( $n = 1$ ) Un aperto connesso di  $\mathbb{R}^m$  con  $m \geq 2$  rimane connesso togliendo un punto a differenza di quanto avviene per gli aperti di  $\mathbb{R}$ .

( $n \neq 2$ ) Basta considerare il caso di un disco  $D = D(p, r)$  di  $\mathbb{R}^2$ , il disco non può essere omeomorfo ad un aperto di  $\mathbb{R}^n$  con  $n \geq 3$  perchè l'omomorfismo naturale  $H_1(D \setminus p) \rightarrow H_1(D)$  non è un isomorfismo. □

## 2.4 Classificazione Superfici Topologiche

Sia  $P$  un poligono con  $n$  lati, poichè siamo interessati a determinati spazi quozienti ottenuti da  $P$  identificando i lati di  $P$  a due a due, verrà introdotta una notazione che permette di indicare l'operazione da compiere. Fissato un vertice  $v_0$  sul perimetro di  $P$  ed un verso di percorrenza dei lati, un simbolo quale

$$a_1^{\pm 1} \cdot a_{i_2}^{\pm 1} \cdot \dots \cdot a_{i_n}^{\pm 1} \quad (2.16)$$

è da intendere nel seguente modo:

$a_1$  rappresenta il primo lato del perimetro che si incontra partendo da  $v_0$  ed andando in senso orario. Il lato  $a_1$  è da considerare percorso nel verso fissato se l'esponente di  $a_1$  è  $+1$ , altrimenti nel verso contrario.

Lo stesso vale nell'ordine per gli altri  $(n - 1)$  lati che così ricevono un verso di percorrenza.

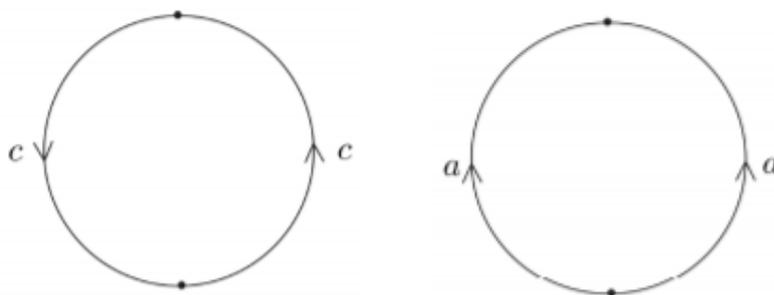
Se  $a_{i_h} = a_{i_k}$  allora il lato  $h$ -esimo e il lato  $k$ -esimo sono identificati, considerando equivalenti un punto di  $a_{i_h}$  ed un punto di  $a_{i_k}$  che si corrispondono attraverso l'unico omeomorfismo affine che porta  $a_{i_h}$  su  $a_{i_k}$  rispettando gli ordini di percorrenza stabiliti.

Tutti i poligoni sono omeomorfi tra loro e quindi il simbolo  $a_1^{\pm 1} \cdot a_{i_2}^{\pm 1} \cdot \dots \cdot a_{i_n}^{\pm 1}$  permette di determinare, a meno di omeomorfismi, il poligono con  $n$  lati ed anche lo spazio quoziente ottenuto, identificando i lati, come descritto sopra.

Per questa ragione si può indicare con  $a_1^{\pm 1} \cdot a_{i_2}^{\pm 1} \cdot \dots \cdot a_{i_n}^{\pm 1}$  sia la relazione che il relativo spazio quoziente.

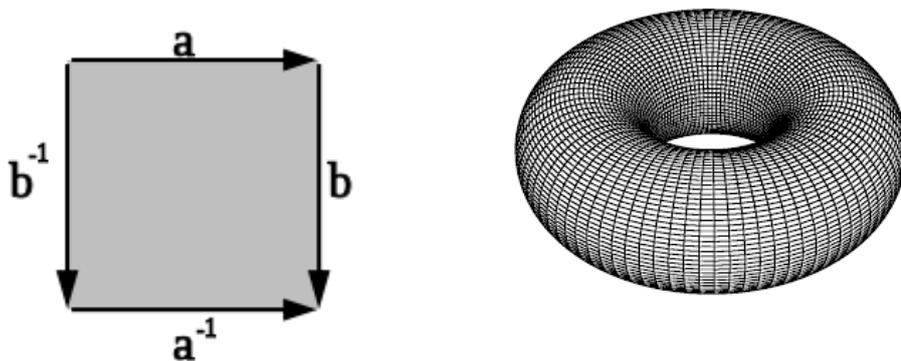
**Definizione 2.17.** Il cerchio, limitato da due semicirconferenze, sarà detto *poligono con due lati*. A partire da una circonferenza si possono definire due spazi:

$$a_1 a_1 \quad \text{e} \quad a_1 a_1^{-1}. \quad (2.17)$$



Il primo è omeomorfo al piano proiettivo reale  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ , il secondo alla superficie sferica  $S^2$ .

**Esempio 2.3.** Il simbolo  $aba^{-1}b^{-1}$  rappresenta lo spazio quoziente del quadrato  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$  in cui vengono identificati i lati opposti. Tale spazio è omeomorfo al Toro  $\mathbf{T} = S^1 \times S^1$ , ricordando che  $\mathbf{T}$  è omeomorfo alla superficie di rotazione di  $\mathbb{R}^3$  ottenuta ruotando intorno all'asse delle  $z$  una circonferenza del piano  $xz$  esterna all'asse  $z$ .



**Definizione 2.18.** Si dice **Nastro di Möbius**, la superficie  $M$  data dal quoziente del quadrato  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$  modulo la relazione di equivalenza che identifica il punto  $(0, y)$  con  $(1, -y) \forall y \in [0, 1]$ , tale relazione tra due lati di un quadrato si dice *relazione antipodale*.

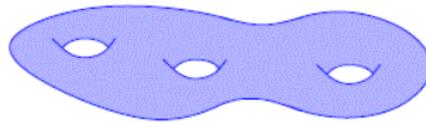


**Esempio 2.4.** Una superficie topologica  $a_1 \cdot a_{i_2}^{\pm 1} \cdot \dots \cdot a_{i_n}^{\pm 1}$  ha una coppia di lati messi nella stessa relazione di equivalenza come in 2.18, e si dice che *contiene un nastro di Möbius*.

**Definizione 2.19.** Risulterà sicuramente possibile identificare in corrispondenza biunivoca le seguenti *Superfici chiuse compatte e connesse* col monomio (2.16), scegliendo gli opportuni indici ed esponenti.

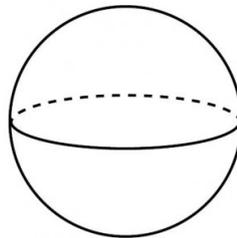
- Il Multitopo di genere  $g$  con  $g \geq 1$ , una somma connessa di  $g$  tori:

$$g \cdot \mathbf{T} = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-2} b_2^{-2} \cdot \dots \cdot a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}. \quad (2.18)$$



- La Superficie Sferica  $S^2$ , che avendo genere  $g = 0$  può essere chiamata il Multitopo di genere 0:

$$S^2 = 0 \cdot \mathbf{T} = a_1 a_1^{-1}. \quad (2.19)$$

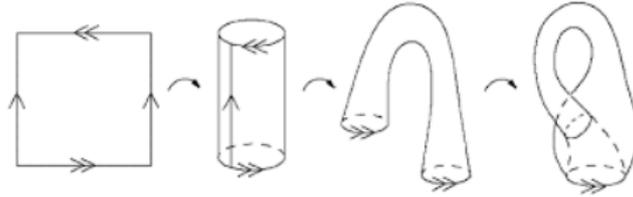


- Il Multipiano Proiettivo di genere  $g$ , che viene denotato con:

$$g \cdot \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 = a_1 a_1 \cdot \dots \cdot a_g a_g. \quad (2.20)$$

- La *Bottiglia di Klein*, superficie ottenuta dal quadrato  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$  in cui vengono identificati due lati opposti, e gli altri due tramite la relazione antipodale:

$$a_1 a_2 a_1^{-1} a_2. \quad (2.21)$$



**Teorema 2.4.1.** *Il primo gruppo di omologia di*

$g \cdot \mathbf{T} = P / (a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdot \dots \cdot a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1})$  è isomorfo a  $\mathbb{Z}^{2g}$ . Un sistema di generatori di  $H_1(g \cdot \mathbf{T})$  è dato dalle classi  $[a'_1], [b'_1], \dots, [a'_g], [b'_g]$ , dove gli  $a'_i$  e  $b'_i$  sono gli 1-cicli immagini in  $g \cdot \mathbf{T}$  dei lati  $a_i$  e  $b_i$ .

*Dimostrazione.* La si può trovare in [4] a pagina 152. □

*Osservazione 7.* Poichè  $\mathbb{Z}^{2g} \cong \mathbb{Z}^{2g'}$  se e solo se  $g = g'$ , due multitori di genere diverso non sono omeomorfi.

**Teorema 2.4.2.** *Sia  $P$  un poligono con  $4g$  lati e  $q : P \rightarrow g \cdot \mathbf{T}$  l'applicazione da  $P$  a  $g \cdot \mathbf{T} = P / (a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}) \cdot \dots \cdot a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ .*

*Siano  $x_1, \dots, x_k$  dei punti distinti di  $\mathring{P} = \text{int}(P)$ , e  $p_1 = q(x_1), \dots, p_k = q(x_k)$  le loro immagini in  $g \cdot \mathbf{T}$ .*

*Siano infine  $c_1, \dots, c_k$  delle circonferenze di  $\mathring{P}$  con centri rispettivamente in  $x_1, \dots, x_k$  a due a due esterne tra loro, ruotanti in verso antiorario e  $c'_1, \dots, c'_k$  le loro immagini in  $g \cdot \mathbf{T}$ .*

*Allora:*

1.  $H_1(g \cdot \mathbf{T} \setminus \{p_1, \dots, p_k\})$  è isomorfo a  $\mathbb{Z}^{2g+k-1}$ .
2. Un sistema di generatori per  $H_1(g \cdot \mathbf{T} \setminus \{p_1, \dots, p_k\})$  è dato dalle classi degli 1-cicli  $a'_1, b'_1, \dots, a'_g, b'_g$  immagini in  $g \cdot \mathbf{T}$  dei lati  $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$  e da  $(k-1)$  delle classi degli 1-cicli  $c'_1, \dots, c'_k$ .

$$3. c'_1 + \dots + c'_k \sim 0.$$

*Dimostrazione.* La si trova a pagina 154 di [4].  $\square$

### 2.4.1 Orientare una Superficie

**Teorema 2.4.3.** *Se in un poligono  $G$  con un numero pari di lati incolliamo a due a due tutti i lati del perimetro otteniamo una superficie topologica compatta e connessa.*

*Dimostrazione.* Il quoziente di uno spazio compatto e connesso è certamente compatto e connesso, inoltre è di Hausdorff ed a base numerabile, infine ogni punto del quoziente ha un intorno aperto omeomorfo ad un disco del piano.  $\square$

**Definizione 2.20.** Una superficie di questo tipo si può rappresentare con un monomio del tipo  $a_1^{\pm 1} \cdot a_{i_2}^{\pm 1} \cdot \dots \cdot a_{i_n}^{\pm 1}$  in cui per ogni indice  $i_h$  c'è uno ed un solo  $k \neq h$  tale che  $i_k = i_h$ . Se gli esponenti di  $a_{i_h}$  e  $a_{i_k}$  sono opposti la coppia di lati  $a_{i_h}, a_{i_k}$  è detta **coppia del 1° tipo**, se gli esponenti di  $a_{i_h}, a_{i_k}$  sono uguali la coppia si dirà **del 2° tipo**.

**Definizione 2.21.** Si dice **regione** (aperta) ogni aperto connesso non vuoto di una superficie topologica.

Sia  $f : U \rightarrow U'$  un omeomorfismo tra due aperti di  $\mathbb{R}^2$ ,  $x_0$  un punto di  $U$  e  $x'_0 = f(x_0)$ . Preso un disco aperto  $D$  di centro  $x_0$  contenuto in  $U$ , dall'omeomorfismo ristretto  $f|_D : D \setminus \{x_0\} \rightarrow f(D \setminus \{x_0\})$  si ottiene un isomorfismo tra gruppi ciclici infiniti  $f_{|*} : H_1(D \setminus \{x_0\}) \rightarrow H_1(f(D \setminus \{x_0\}))$ . Presa una circonferenza  $c^+$  contenuta in  $D \setminus \{x_0\}$  che gira una volta in senso antiorario intorno ad  $x_0$  ed una circonferenza  $c'^+$  contenuta in  $f(D \setminus \{x_0\})$  che gira una volta in senso antiorario intorno ad  $x'_0$  si ha che  $[c^+]$  e  $[c'^+]$  generano, rispettivamente,  $H_1(D \setminus \{x_0\})$  e  $H_1(f(D \setminus \{x_0\}))$ , quindi:

$$f_{|*}([c^+]) = \pm [c'^+]. \quad (2.22)$$

Il segno  $+$  o  $-$  non dipende dalla scelta del disco  $D$  o delle circonferenze  $c^+$  o  $c'^+$ ; diremo che  $f$  *rispetta l'orientazione* presso il punto  $x_0$  se sussiste il segno

+, che *non la rispetta* nel caso contrario.

Se  $f$  è un omeomorfismo tra aperti di  $\mathbb{R}^2$  ed  $f$  rispetta (non rispetta) l'orientazione in  $x_0$ , allora  $f^{-1} : U' \rightarrow U$  rispetta (non rispetta) l'orientazione in  $x'_0 = f(x_0)$ .

Se  $f : U \rightarrow U'$  rispetta (non rispetta) l'orientazione in  $x_0$ , allora  $f$  rispetta (non rispetta) l'orientazione in tutti i punti di un intorno di  $x_0$ .

Perciò se  $f : U \rightarrow U'$  è un omeomorfismo tra regioni di  $\mathbb{R}^2$  che rispetta (non rispetta) l'orientazione in un punto di  $U$  la rispetta (non la rispetta) in tutti i punti di  $U$ .

$f$  rispetta l'orientazione di  $U$  se rispetta l'orientazione in tutti i punti di  $U$ .

*Osservazione 8.* Tutti gli isomorfismi lineari tra  $\mathbb{K}$ -spazi vettoriali tali che il determinante della matrice sia  $> 0$  rispettano l'orientazione, e anche le traslazioni rispettano l'orientazione.

**Esempio 2.5.** L'omeomorfismo  $C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definito ponendo  $C(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$  non rispetta l'orientazione in nessun punto.

**Definizione 2.22.** Se  $f : U \rightarrow U'$  è un omeomorfismo tra aperti di  $\mathbb{R}^2$ , il **coniugato di  $f$**  è l'omeomorfismo  $\bar{f} : U \rightarrow U'$  definito ponendo  $\bar{f} = C(f(x))$ ,  $f$  rispetta l'orientazione  $\iff \bar{f}$  non la rispetta.

**Proposizione 2.4.4.** Se  $f : U \rightarrow U'$  e  $g : U' \rightarrow U''$  sono omeomorfismi tra regioni di  $\mathbb{R}^2$  che rispettano le orientazioni, allora l'omeomorfismo  $f \circ g : U \rightarrow U''$  rispetta l'orientazione.

**Definizione 2.23.** Se  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  è un atlante allora la famiglia  $\overline{\mathcal{A}} = \{(U_i, \bar{\varphi}_i)\}_{i \in I}$  si dice l'*atlante coniugato di  $\mathcal{A}$* .

Sia  $W$  un aperto di  $S$ , siano  $\varphi : W \rightarrow \varphi(W)$ ,  $\psi : W \rightarrow \psi(W)$  due omeomorfismi da  $W$  ad aperti  $\mathbb{R}^2$ ,  $\varphi$  e  $\psi$  sono *concordi (discordi) in un punto  $p \in W$*  se gli omeomorfismi

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(W) \rightarrow \psi(W), \text{ e } \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(W) \rightarrow \varphi(W) \quad (2.23)$$

rispettano (non rispettano) le orientazioni in  $\varphi(p)$  e  $\psi(p)$ .

*Osservazione 9.* Se  $\varphi$  e  $\psi$  sono concordi (discordi) in  $p$  lo sono anche in ogni punto della componente connessa di  $W$  contenente  $p$ . Due carte locali  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  con  $U \cap V \neq \emptyset$  si dicono concordi (discordi) se gli omeomorfismi  $\varphi$  e  $\psi$  sono concordi (discordi) in ogni punto  $p \in U \cap V$ .

**N.B.** Due carte non disgiunte possono non essere né concordi né discordi (cioè possono essere concordi su una componente dell'intersezione e discordi sull'altra).

Non è detto che se  $(U, \varphi)$ ,  $(V, \psi)$  sono concordi e anche  $(V, \psi)$ ,  $(W, \vartheta)$  lo sono, allora  $(U, \varphi)$ , e  $(W, \vartheta)$  sono concordi.

Se però  $p \in U \cap V \cap W$  allora  $\varphi$  e  $\vartheta$  sono concordi sulla componente connessa di  $U \cap W$  contenente  $p$ .

**Definizione 2.24.** Un *atlante orientato* di  $S$  è un atlante di  $S$  in cui due carte non disgiunte sono sempre concordi.

Un'orientazione su  $S$  è un atlante orientato massimale (non contenuto propriamente in un altro atlante orientato).

La superficie topologica  $S$  si dice *orientabile* se ammette almeno un'orientazione. Un aperto di una superficie orientabile è ancora orientabile.

**Lemma 2.4.5.** Sia  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  un atlante orientato di  $S$ ,  $(U_a, \varphi_a)$ ,  $(U_b, \varphi_b)$  due carte di  $\mathcal{A}$  ed  $(U, \varphi)$  una carta connessa di  $S$ ; se  $A$  e  $B$  sono due aperti connessi di  $S$  contenuti, rispettivamente, in  $U \cap U_a$  ed  $U \cap U_b$  si ha che  $\varphi$  è concorde con  $\varphi_a$  su  $A$  se e solo se  $\varphi$  è concorde con  $\varphi_b$  su  $B$ .

*Dimostrazione.* Si prova che da  $\varphi$  concorde con  $\varphi_a$  su  $A$  segue che  $\varphi$  è concorde con  $\varphi_b$  su  $B$ . Preso  $p_a \in A$  e  $p_b \in B$  siano  $H_1, \dots, H_n$  dei connessi di  $S$  ciascuno contenuto in una carta di  $\mathcal{A}$  e tali che  $p_a \in H_1$ ,  $p_b \in H_n$  e  $H_k \cap H_{k+1} \neq \emptyset$  per ogni  $k = 1, \dots, n-1$ ; sia  $(U_{i_k}, \varphi_{i_k})$  la carta che contiene  $H_k$ . Poichè  $\varphi$  è concorde con  $\varphi_a$  in  $p_a$  e  $\varphi_a$  è concorde con  $\varphi_{i_1}$  in  $p_a$ , allora  $\varphi$  è concorde con  $\varphi_{i_1}$  in  $p_a$  e quindi in tutti i punti della componente connessa di  $U \cap U_{i_1}$  contenente  $p_a$ . In particolare  $\varphi$  è concorde con  $\varphi_{i_1}$  su tutti i punti di  $H_1$  e quindi anche in un punto  $p_1 \in H_1 \cap H_2$ . Procedendo con questo ragionamento possiamo dimostrare che  $\varphi$  è concorde con  $\varphi_{i_2}$  in un punto  $p_2 \in H_2 \cap H_3$  e

continuando possiamo dimostrare che  $\varphi$  è concorde con  $\varphi_{i_n}$  su  $p_b$ . Ne segue che  $\varphi$  è concorde con  $\varphi_b$  su  $p_b$  e quindi che  $\varphi$  è concorde con  $\varphi_b$  su  $B$  che è un connesso di  $U \cap U_b$  contenente  $p_b$ .  $\square$

Perciò su una superficie topologica  $S$  dotata di un atlante orientato due carte connesse non disgiunte  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  sono concordi oppure sono discordi (ed allora  $(U, \varphi)$  e  $(V, \bar{\psi})$  sono concordi).

**Teorema 2.4.6.** *Sia  $S$  una superficie topologica,  $S$  è orientabile se e solo se ammette un atlante orientato.*

*Dimostrazione.* L'implicazione se  $S$  è orientabile allora ammette un atlante orientato è immediata.

Dimostrando l'altra implicazione, sia  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  un atlante orientato, considero gli atlanti  $\mathcal{B} = \{(U, \varphi) : (U, \varphi) \text{ è concorde con tutte le carte di } \mathcal{A}\}$  e  $\bar{\mathcal{B}} = \{(U, \bar{\varphi}) : (U, \varphi) \in \mathcal{B}\}$ ; usando il lemma 2.4.5 è facile verificare che  $\mathcal{B}$  e  $\bar{\mathcal{B}}$  sono due atlanti orientati di  $S$  disgiunti. Sono inoltre massimali e dunque delle orientazioni (connesse) di  $S$ .  $\square$

Si può facilmente verificare che  $\mathcal{B}$  e  $\bar{\mathcal{B}}$  sono le orientazioni di  $S$ . Poichè sul nastro di Möbius  $M$  è possibile trovare tre carte  $(U, \varphi)$ ,  $(V, \psi)$  e  $(W, \vartheta)$  tali che  $\varphi$  e  $\psi$  sono concordi,  $\psi$  e  $\vartheta$  sono concordi, ma  $\varphi$  e  $\vartheta$  sono discordi su  $U \cap W \neq \emptyset$ , allora  $M$  non ha atlanti orientati né orientazioni e dunque  $M$  **non è orientabile**. Così pure **non è orientabile ogni superficie**  $a_1 \cdot a_{i_2}^{\pm 1} \cdot \dots \cdot a_{i_n}^{\pm 1}$  che abbia coppie di lati del 2° tipo.

Viceversa si può verificare che una **superficie**  $a_1 \cdot a_{i_2}^{\pm 1} \cdot \dots \cdot a_{i_n}^{\pm 1}$  **senza coppie di lati del 2° tipo è orientabile**.

*Osservazione 10.* Il Multipiano Proiettivo e la Bottiglia di Klein sono due superfici non orientabili.

## 2.4.2 Triangolazioni e Poligonazioni

**Definizione 2.25.** Un *triangolo* su uno spazio topologico di Hausdorff  $X$  è una coppia  $(T, \varphi)$  dove  $T \subset X$  è un insieme compatto e  $\varphi$  un omeomorfismo

di  $T$  su un triangolo chiuso di  $\mathbb{R}^2$ .

I vertici ed i lati di  $T$  sono le controimmagini dei vertici e dei lati del triangolo del piano.

Una *triangolazione* di  $X$  è una famiglia (numerabile)  $\tau = \{T_i\}_{i \in I}$  di triangoli di  $X$  tali che:

1.  $\bigcup_{i \in I} T_i = S$ .
2. Se  $T_i \cap T_j \neq \emptyset$  per  $i \neq j$  allora  $T_i \cap T_j$  è un vertice o un lato per ambedue i triangoli.
3. Per ogni punto di  $X$  esiste un intorno dato dalla unione di un numero finito di triangoli della famiglia  $\tau$ .

*Osservazione 11.* Se  $X$  è compatto ogni sua triangolazione è necessariamente finita.

**Teorema 2.4.7.** *Sia  $S$  una superficie topologica compatta e connessa e  $\tau$  una triangolazione di  $S$ , allora:*

1. *Ogni lato di un triangolo  $T_i$  è anche lato di uno ed un solo altro triangolo  $T_j$ .*
2. *Per ogni vertice di qualche triangolo i triangoli  $T_i$  che lo contengono sono un numero finito  $\geq 3$ , e si possono ordinare circolarmente in modo che due triangoli siano consecutivi se e solo se hanno un lato in comune.*

*Dimostrazione.* La si può trovare in [4] a pagina 164. □

**Proposizione 2.4.8.** *Se  $S$  è una superficie compatta e triangolabile allora ogni sua triangolazione è finita.*

*Dimostrazione.* Sia  $\tau = \{T_i\}_{i \in I}$  una triangolazione di  $S$ . Per ogni indice  $i \in I$  scegliamo un punto  $p_i \in \overset{\circ}{T}_i$ . Poniamo:

$$U_i = S \setminus \overline{\{p_j : j \neq i\}}$$

Si ha  $T_i \subset U_i$ , per ogni  $i \in I$ , e pertanto  $\{U_i\}_{i \in I}$  è un ricoprimento aperto di  $S$ . Inoltre  $p_i \notin U_j$  per ogni  $i \neq j$ , e pertanto  $\{U_i\}_{i \in I}$  non possiede sottoricoprimenti propri. Poichè  $S$  è compatta l'unica possibilità è che il ricoprimento  $\{U_i\}_{i \in I}$  sia finito, e quindi che  $I$  sia finito.  $\square$

**Definizione 2.26.** Sia  $X$  spazio topologico di Hausdorff compatto e connesso con una triangolazione (finita)  $\tau$ . Si dice *Caratteristica di Eulero di  $X$  con  $\tau$*  il numero intero:

$$\chi(X, \tau) = \#(\text{vertici di } \tau) - \#(\text{lati di } \tau) + \#(\text{triangoli di } \tau). \quad (2.24)$$

**Definizione 2.27.** Date due triangolazioni  $\tau$  e  $\tau'$  di  $X$ , la triangolazione  $\tau'$  si dice *più fine di  $\tau$*  se valgono le seguenti proprietà:

1. Ogni vertice di  $\tau$  è un vertice di  $\tau'$ .
2. Ogni lato di  $\tau$  è unione di (un numero finito di) lati di  $\tau'$ .
3. Ogni triangolo di  $\tau$  è unione di (un numero finito di) triangoli di  $\tau'$ .

**Definizione 2.28.** Sia  $X$  uno spazio topologico con una triangolazione  $\tau$ , una *regione poligonale di  $X$  sostenuta da  $\tau$*  consiste di un compatto connesso  $P$  di  $X$ , di alcuni punti  $v_1, \dots, v_s$  di  $P$ , che saranno detti *vertici di  $P$* , e di alcuni sottoinsiemi compatti  $l_1, \dots, l_r$  di  $P$ , che saranno detti *lati di  $P$* , tali che:

1. Ogni vertice di  $P$  è un vertice di  $\tau$ .
2. Ogni lato di  $P$  è unione (finita) di lati  $\tau$ , contiene uno o due vertici di  $P$  e privato dei vertici è omeomorfo a un intervallo aperto.
3.  $P$  è unione (finita) di triangoli di  $\tau$  e privato dei lati e dei vertici è omeomorfo ad un disco aperto.

**Definizione 2.29.** Si dice *poligonazione di  $X$  sostenuta da  $\tau$*  una famiglia di regioni poligonali la cui unione dà tutto  $X$  ed in cui l'intersezione di due regioni distinte è data da unione (finita) di vertici e lati per entrambe le regioni.

Se  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{P}'$  sono due poligonazioni di  $X$  si dice che  $\mathcal{P}'$  è *più fine* di  $\mathcal{P}$  se:

1. Ogni vertice di  $\mathcal{P}$  è un vertice di  $\mathcal{P}'$ .
2. Ogni lato di  $\mathcal{P}$  è unione (finita) di lati di  $\mathcal{P}'$ .
3. Ogni regione di  $\mathcal{P}$  è unione (finita) di regioni di  $\mathcal{P}'$ .

I triangoli di  $\tau$  sono particolari poligoni su  $\tau$ , se  $\tau'$  è una triangolazione più fine di  $\tau$  allora  $\tau$  è una poligonazione sostenuta da  $\tau'$ , meno fine di  $\tau'$  in quanto poligonazioni. Se  $\mathcal{P}$  è sostenuta da  $\tau$ , allora  $\tau$  è più fine di  $\mathcal{P}$ .

**Esempio 2.6.** Se  $S = G/a_1^{\pm 1} a_{i_2}^{\pm 1} \cdot \dots \cdot a_{i_n}^{\pm 1}$  è una superficie compatta ottenuta identificando i lati a coppie in un poligono  $G$  con un numero pari di lati, è data una poligonazione di  $S$ , sostenuta da una qualche triangolazione, considerando  $S$  come poligono, le immagini dei lati di  $G$  come lati di  $S$  e le immagini dei vertici di  $G$  come vertici di  $S$ .

**Definizione 2.30.** Sia  $X$  uno spazio topologico compatto e sia  $\mathcal{P}$  una poligonazione (finita) di  $X$  sostenuta da una triangolazione (finita) di  $\tau$ , si dice *Caratteristica di Eulero di  $X$  con  $\mathcal{P}$*  il numero intero:

$$\chi(X, \mathcal{P}) = \#(\text{vertici di } \mathcal{P}) - \#(\text{lati di } \mathcal{P}) + \#(\text{regioni di } \mathcal{P}). \quad (2.25)$$

**Teorema 2.4.9.** *Sia  $X$  uno spazio topologico compatto con una poligonazione  $\mathcal{P}$  di  $X$  sostenuta da una triangolazione  $\tau$ , allora:*

$$\chi(X, \mathcal{P}) = \chi(X, \tau). \quad (2.26)$$

*Dimostrazione.* Si può passare da  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0$  a  $\tau = \mathcal{P}_n$  attraverso una successione  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{n-1}$  di poligonazioni di  $X$  sostenute da  $\tau$  via via più fini, costruendo da  $\mathcal{P}_{i+1}$  a  $\mathcal{P}_i$  attraverso uno dei tre processi seguenti, ciascuno dei quali non altera la caratteristica:

1. Si inserisce un vertice  $\tau$  all'interno di un lato di  $\mathcal{P}_i$ .
2. Si congiungono due vertici di una regione di  $\mathcal{P}_i$  con un lato di  $\tau$  e si considerano le due regioni risultanti in luogo di quella iniziale.

3. Si inserisce un vertice di  $\tau$  all'interno di una regione di  $\mathcal{P}_i$  e lo si congiunge ad un vertice della regione per mezzo di un lato di  $\tau$ .  $\square$

**Corollario 2.4.10.** *Sia  $X$  uno spazio topologico compatto,  $\tau$  e  $\tau'$  due triangolazioni di  $X$  con  $\tau$  più fine di  $\tau'$ , allora*

$$\chi(X, \tau) = \chi(X, \tau'). \quad (2.27)$$

### 2.4.3 Il Taglia e Incolla

**Teorema 2.4.11.** *Ogni superficie compatta connessa triangolabile  $S$  è omeomorfa ad una superficie ottenuta da un poligono con un numero pari di lati identificati a coppie.*

*Dimostrazione.* Siano  $T_1, \dots, T_n$  i triangoli di una triangolazione di  $S$ . La superficie  $S$  si riottiene dai triangoli incollandoli lungo i lati comuni. Poniamo  $P_1 = T_1$ , scegliamo un triangolo  $T_{i_2}$  che abbia un lato comune con  $T_1$ , otteniamo un poligono  $P_2$  in cui i lati da identificare, se ci sono, sono a coppie. Procediamo così fino ad ottenere un poligono  $P_{n-1}$  in cui alcune coppie di lati sono da identificare. Sia  $T_{i_n}$  l'ultimo triangolo rimasto, "incolliamolo" a  $P_{n-1}$  lungo un lato comune. Otteniamo un poligono  $P_n$  in cui appaiono solo lati da identificare a coppie; poichè ogni lato su  $S$  appartiene a due triangoli ogni lato di  $P_n$  appartiene ad una coppia. Da  $P_n$  si ottiene  $S$ .  $\square$

Il teorema appena dimostrato si applica a tutte le superfici compatte connesse perchè vale il seguente:

**Teorema 2.4.12.** *Ogni superficie topologica è triangolabile.*

*Dimostrazione.* Va oltre gli scopi di questo elaborato, ma la si può trovare in [5], a pagina 105.  $\square$

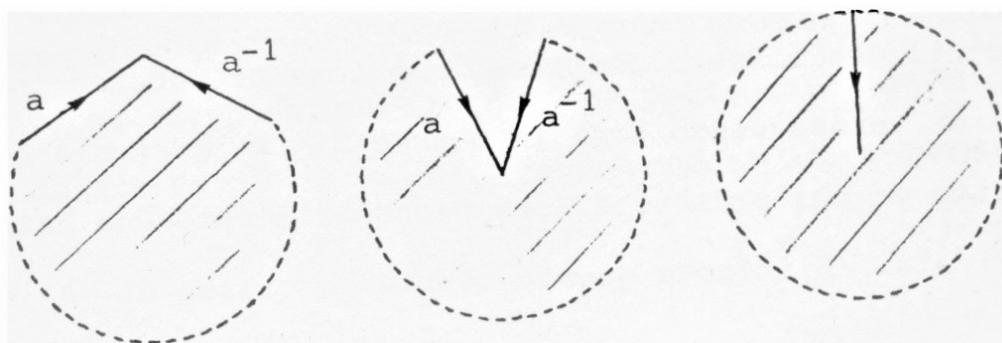
Adesso si hanno tutti gli strumenti necessari per enunciare il seguente teorema:

**Teorema 2.4.13** (di Classificazione delle Superfici Compatte Orientabili). *Sia  $S$  una superficie compatta e orientabile, e  $G$  un poligono, allora valgono le seguenti proprietà:*

1. *La superficie  $S$  è omeomorfa ad una ed una sola delle seguenti superfici:*
  - *La Superficie Sferica  $S^2 = 0 \cdot \mathbf{T} = G/a \cdot a^{-1}$ .*
  - *Un Multitopo  $g \cdot \mathbf{T} = G/(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdot \dots \cdot a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1})$ .*
2. *Assegnata una triangolazione  $\tau$  su  $S$  è possibile scegliere il poligono  $G$  in modo che  $S$ , come immagine di  $G$ , sia un poligono con 1 vertice e  $2g$  lati ( $g \geq 0$ ) sostenuto da una triangolazione  $\tau'$  più fine di  $\tau$ .*
3.  $\chi(S, \tau) = 2 - 2g$ .

*Dimostrazione.* Per dimostrare il punto 1. di questo teorema verrà utilizzato il procedimento chiamato "taglia e incolla".

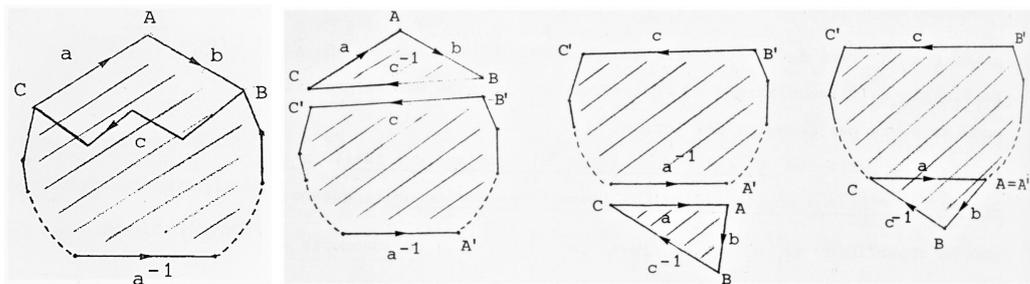
Dai teoremi 2.4.11 e 2.4.6 è stato già provato che  $S$  è omeomorfo ad un quoziente  $G_0/a_1^{\pm 1} a_{i_1}^{\pm 1} \cdot \dots \cdot a_{i_n}^{\pm 1}$  dove  $G_0$  è un poligono del piano con  $n$  lati da identificare a coppie del 1° tipo; se su  $S$  è stata fissata la triangolazione  $\tau$  i lati di  $G_0$  possono essere presi in modo da avere per immagini dei lati di  $\tau$ . Si può supporre che  $G_0$  si riduca ad un poligono con due lati:  $a \cdot a^{-1}$ , oppure non contenga coppie di lati da identificare adiacenti; questo perchè la superficie  $(a_1^{\pm 1} a_{i_2}^{\pm 1} \cdot \dots \cdot a_{i_k}^{\pm 1}) a \cdot a^{\pm 1} (a_{i_{k+1}}^{\pm 1} \cdot \dots \cdot a_{i_n}^{\pm 1})$  è omeomorfa alla superficie  $a_1^{\pm 1} a_{i_2}^{\pm 1} \cdot \dots \cdot a_{i_k}^{\pm 1} a_{i_{k+1}}^{\pm 1} \cdot \dots \cdot a_{i_n}^{\pm 1}$  come mostra la seguente figura:



Detti equivalenti due vertici  $G_0$  che hanno la stessa immagine in  $S$ , si può esprimere  $S$  come quoziente di un poligono  $G_1$  con le stesse caratteristiche possedute da  $G_0$  in cui tutti i vertici sono equivalenti.

Il procedimento che verrà esposto permette di passare da un poligono  $G_0$  ad un poligono  $G'_0$  con un minor numero di classi di vertici di  $G_0$ , oppure con lo stesso numero di classi ma con un numero inferiore di vertici in una classe fissata: se ci sono due vertici non equivalenti ce ne sono pure due adiacenti  $A$  e  $B$ ; allora, detti  $a = CA$  e  $b = AB$  i lati uscenti da  $A$ , dopo aver eventualmente resa più fine la triangolazione di  $S$  si può trovare una poligonazione  $c$  da  $B$  a  $C$  che poggi sulla nuova triangolazione.

I seguenti disegni illustrano come trasformare il poligono  $G_0$  per ottenere  $G'_0$ :



L'ultimo poligono ottenuto, privato delle eventuali coppie di lati del 1° tipo che fossero comparse, contiene un vertice in meno nella classe di  $A$ ; proseguendo così la classe di  $A$  arriva a contenere un solo elemento da cui partono allora necessariamente due lati adiacenti da identificare.

Eliminate queste coppie la classe di  $A$  sparisce.

Proseguendo si arriva ad ottenere un poligono  $G_1$  con una sola classe di vertici, che, se non si riduce ad un poligono con due soli lati, non contiene coppie di lati adiacenti da identificare ed i cui lati hanno immagini in  $S$  sostenute da una triangolazione  $\tau'$  più fine di  $\tau$ .

Si dirà che quattro lati adiacenti di un poligono sono disposti in modo canonico o che formano una *quaterna canonica* se sono del tipo  $aba^{-1}b^{-1}$ .

Dimostriamo che se  $G_1$  ha più di due lati  $c$  e  $c^{-1}$  non appartengono a nessuna delle quaterne canoniche allora ne esistono altri due  $d$  e  $d^{-1}$  pure fuori delle

quaterne canoniche disposti nel seguente ordine (ciclico):

$$\dots c \dots d \dots c^{-1} \dots d^{-1} \dots \dots \quad (2.28)$$

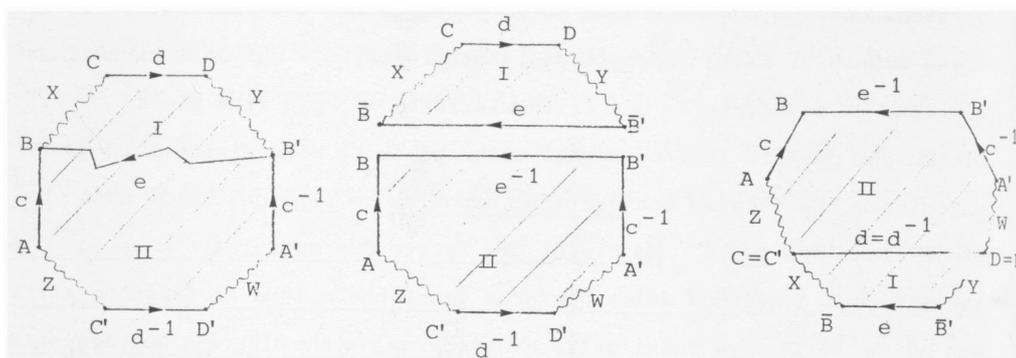
Indichiamo con  $X$  e  $Y$  le due poligonali connesse che congiungono  $c$  e  $c^{-1}$  e con  $X'$  e  $Y'$  le famiglie di lati rispettivamente di  $X$  e di  $Y$  già disposti in quaterne canoniche, deve esistere qualche lato di  $X$  non in  $X'$  e qualche lato di  $Y$  in  $Y'$ , altrimenti nessun vertice di  $X$  sarebbe equivalente ad un vertice di  $Y$  e viceversa e dunque ci sarebbero almeno due classi di vertici. Se poi un lato di  $X$  non in  $X'$  (rispettivamente di  $Y$  non in  $Y'$ ) non fosse mai equivalente ad un lato di  $Y$  (rispettivamente di  $X$ ), di nuovo avremo che i vertici di  $X$  e di  $Y$  starebbero in classi distinte.

Vogliamo a questo punto dimostrare che se  $G_1$  non ha solo due lati è possibile disporre tutti i lati in quaterne canoniche.

Siano  $\dots c \dots d \dots c^{-1} \dots d^{-1} \dots$  quattro lati di  $G_1$  nell'ordine scritto, possiamo trasformare  $G_1$  in un poligono  $G'_1$  con un numero non superiore di lati e con le stesse caratteristiche di  $G_1$ , in cui ogni quaterna canonica di  $G_1$  rimane inalterata ed in cui nel luogo dei lati  $\dots c \dots d \dots c^{-1} \dots d^{-1} \dots$  appare una quaterna canonica in più.

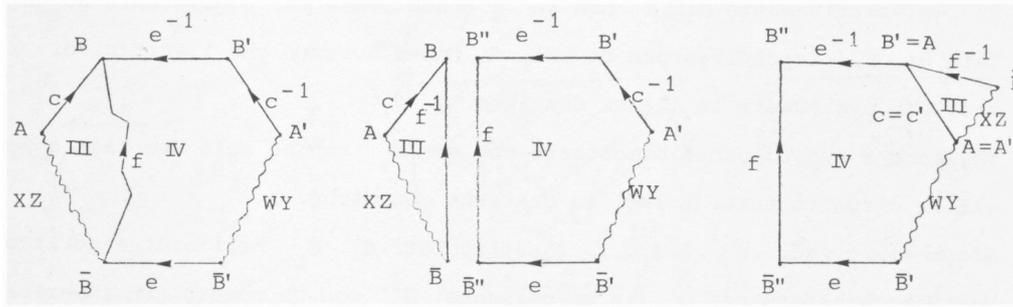
Passando eventualmente ad una triangolazione più fine di quella presente a questo punto su  $S$ , possiamo trovare una poligonale "e" che congiunge gli estremi di arrivo di  $c$  e  $c^{-1}$  mantenendosi all'interno di  $G_1$ .

Tagliando lungo "e" e ricucendo lungo "d" come mostrano la figure:



otteniamo un primo poligono; consideriamo ora una poligonale "f" da  $B$  a  $\bar{B}$  interna a questo poligono e sostenuta da una triangolazione più fine di  $\tau$ .

Tagliando lungo "f", ricucendo lungo "c" ed eliminando le eventuali coppie di lati adiacenti da identificare che fossero apparse si ottiene il poligono  $G'_1$ .



Continuando ad accostare in quaterne canoniche i lati di  $G'_1$  otterremo alla fine un poligono  $G_2$  con le stesse caratteristiche di  $G'_1$  in cui i lati sono tutti ordinati come  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdot \dots \cdot a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ ; cioè arriviamo a rappresentare  $S$  come  $G_2 / (a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdot \dots \cdot a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}) = g \cdot \mathbf{T}$ .

L'immagine  $S$  di  $G_2$  si può vedere come un poligono  $P$  con 1 vertice e  $2g$  lati sostenuto da una triangolazione  $\tau'$  più fine di  $\tau$ .

Poichè  $\chi(S, \{P\}) = 2 - 2g$  risulta:

$$\chi(S, \tau) = \chi(S, \tau') = \chi(S, \{P\}) = 2 - 2g. \tag{2.29}$$

□

**Proposizione 2.4.14.** *Una superficie compatta  $S$  orientabile è di genere 0 se è omeomorfa alla superficie sferica  $S^2 = 0 \cdot \mathbf{T}$ .*

*$S$  è di genere  $g \geq 1$  se è omeomorfa al multitoro  $g \cdot \mathbf{T}$ .*

*Dimostrazione.* Immediata da 2.4.13.

□

*Osservazione 12.* Due superfici compatte e orientabili sono omeomorfe se e solo se hanno lo stesso genere.

*Osservazione 13.* Poichè il genere  $g$  di una superficie compatta orientabile e la caratteristica di Eulero  $\chi$  sono legate dalla relazione:

$$\chi = 2 - 2g \tag{2.30}$$

risulta che *due superfici compatte orientabili sono omeomorfe se e solo se hanno la stessa caratteristica.*

Osserviamo che  $\chi > 0$  se e solo se la superficie è omeomorfa ad una superficie sferica e  $\chi = 0$  se e solo se è un toro.



# Capitolo 3

## Curve Algebriche

In questo capitolo verrà data la nozione di curva piana vista come un luogo di zeri di un polinomio non costante a coefficienti in un campo  $\mathbb{K}$ , per definizione queste sono chiamate *Curve Algebriche*.

Le curve che verranno trattate saranno prima quelle affini nel piano complesso  $\mathbb{C}^2$ , ovvero, quelle associate ad un polinomio  $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ , e successivamente quelle nel piano proiettivo complesso  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ , associate a  $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ . Si noterà che molte proprietà dimostrate in  $\mathbb{C}^2$  saranno mantenute in  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ , e chiaramente in quest'ultimo spazio ci saranno proprietà aggiuntive.

Considerando le relazioni di equivalenza di 1.1 in  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ , affinché l'equazione  $F = 0$ , con  $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$  sia ben definita, è necessario che  $F$  sia un polinomio omogeneo di grado  $d \in \mathbb{N}_{>0}$ .

Poichè si parla del campo  $\mathbb{C}$  queste curve saranno in spazi *quadri-dimensionali* dal punto di vista topologico reale.

Una curva algebrica in  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  viene vista topologicamente come una *varietà 1-dimensionale*, mentre se le coordinate sono complesse ogni coordinata è scritta nella forma  $a + ib$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ . Le curve algebriche diventano in questo modo topologicamente delle *varietà 2-dimensionali*. Una parte finale di questo capitolo mostrerà quando è possibile trovare una corrispondenza biunivoca tra i punti di una curva in  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  con quelli di una superficie topologica in  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ . Sarà possibile vedere una curva  $\mathcal{C}$  attraverso la scomposizione del suo polinomio associato  $f$  (o di  $F$  se siamo nel proiettivo) in fattori irriducibili:

$f = \prod_{j=1}^t f_j^{\alpha_j}$ , tale che  $f_j$  irriducibile  $\forall j \in \{1, \dots, t\}$ ,  $\alpha_j =$  molteplicità di  $f_j$ ,

oppure identificare  $\mathcal{C}$  come unione di un numero finito di curve:

$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1^{\alpha_1} \cup \dots \cup \mathcal{C}_t^{\alpha_t}$ , tale che  $\mathcal{C}_j^{\alpha_j}$  è la curva del polinomio  $f_j^{\alpha_j} \forall j \in \{1, \dots, t\}$ .

Se una curva  $\mathcal{C}$  è associata ad un polinomio irriducibile si dirà che la *curva* è *irriducibile*.

### 3.1 Curve algebriche in $\mathbb{C}^2$

**Definizione 3.1** (Supporto). Sia  $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$  un polinomio non costante, e sia

$$V(f) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 : f(x_1, x_2) = 0\} \quad (3.1)$$

detto l'insieme dei punti di una curva algebrica associata al polinomio  $f$  in  $\mathbb{C}^2$ , detto anche *supporto di  $\mathcal{C}(f)$* .

*Osservazione 14.* Dal Teorema Fondamentale dell'Algebra segue facilmente che il supporto di ogni curva definita da un polinomio non costante è un sottoinsieme infinito di  $\mathbb{C}^2$ .

*Osservazione 15.* Siano  $\mathcal{C}(f)$  e  $\mathcal{C}(g)$  due curve tali che  $f, g \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ , allora  $\mathcal{C}(f) = \mathcal{C}(g) \iff f = a \cdot g$ , con  $a \in \mathbb{C}$ .

**Teorema 3.1.1.** *Siano  $f, g \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$  due polinomi non costanti e primi tra loro, allora l'intersezione  $\mathcal{C}(f) \cap \mathcal{C}(g)$  è finita.*

*Dimostrazione.* In queste ipotesi esistono due polinomi  $u(x_1, x_2), v(x_1, x_2)$  tali che

$$u(x_1, x_2) \cdot f(x_1, x_2) + v(x_1, x_2) \cdot g(x_1, x_2) = a(x_1)$$

con  $a(x_1)$  polinomio non nullo.

Quindi se  $(p_1, p_2) \in \mathcal{C}(f) \cap \mathcal{C}(g)$  si ha che  $a(p_1) = 0$  e quindi  $x_1$  può assumere solo un numero finito di valori in  $\mathcal{C}(f) \cap \mathcal{C}(g)$ . Lo stesso vale per  $x_2$  e quindi  $\mathcal{C}(f) \cap \mathcal{C}(g)$  è finito.  $\square$

**Definizione 3.2.** Un polinomio  $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$  si dice *semplice* se nella fattorizzazione di  $f$  in polinomi irriducibili:

$$f = f_1 \cdot \dots \cdot f_k$$

tutti i fattori sono distinti.

Per un polinomio qualunque con fattorizzazione:

$$f = f_1^{m_1} \cdot \dots \cdot f_k^{m_k}$$

il *semplificato* di  $f$  è il polinomio semplice:

$$f_{\text{semp}} = f_1 \cdot \dots \cdot f_k.$$

**Definizione 3.3** (Sviluppo di Taylor per una curva in  $\mathbb{C}^2$ ). Sia  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(f)$  curva algebrica per  $f$ , e  $p = (p_1, p_2)$  un punto di  $\mathbb{C}^2$ ; allora partendo dallo sviluppo di Taylor scritto in 1.3.3 e raggruppando i vari termini per grado, lo sviluppo di Taylor per  $f$  di centro  $p$  può anche scriversi come:

$$f = f_p^{(0)} + \dots + f_p^{(\text{deg} f)}$$

dove,  $\forall k \in \{0, \dots, \text{deg} f\}$ ,  $f_p^{(k)}$  è la parte omogenea di grado  $k$  nelle variabili  $(x_1 - p_1)$  e  $(x_2 - p_2)$ .

**Definizione 3.4.** Data  $\mathcal{C}$  curva algebrica di  $\mathbb{C}^2$ , la sua **molteplicità** è il minimo intero positivo  $k$  tale che  $f_p^{(k)} \neq 0$ , e verrà indicata come  $m_p(\mathcal{C})$ .

**Definizione 3.5.** Un punto  $p$  si dice **semplice per  $\mathcal{C}$**  se  $m_p(\mathcal{C})=1$ , multiplo se  $m_p(\mathcal{C}) \geq 2$  (doppio se  $m_p(\mathcal{C})=2$ , triplo se  $m_p(\mathcal{C})=3$ , ecc.).

Se ogni punto  $p$  della curva  $\mathcal{C}$  è semplice la curva verrà detta **liscia**.

*Osservazione 16.* Poichè  $\mathbb{C}$  è un campo di caratteristica 0:

$$m_p(\mathcal{C}) = m \iff \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}}(p) = 0 \quad \forall k < m, \text{ e}$$

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}}(p) \neq 0 \text{ per qualche coppia } (k_1, k_2) \text{ con } k_1 + k_2 = m.$$

Dunque è possibile esprimere lo sviluppo di Taylor di  $f$  in  $p$  mediante le derivate di  $f$ .

**Definizione 3.6.** Se  $p = (p_1, p_2)$  è semplice la retta:

$$f_p^{(1)} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \cdot (x_1 - p_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) \cdot (x_2 - p_2) \quad (3.2)$$

si dice la *retta tangente* a  $\mathcal{C}$  in  $p$ .

Se invece  $p$  è un punto multiplo di molteplicità  $m$ , considerando il polinomio omogeneo  $f_p^{(m)}(x_1 - p_1, x_2 - p_2)$ , allora per il teorema 1.3.2  $f_p^{(m)}$  si può scomporre in un prodotto:

$$f_p^{(m)}(x_1 - p_1, x_2 - p_2) = l_1^{m_1}(x_1 - p_1, x_2 - p_2) \cdot \dots \cdot l_h^{m_h}(x_1 - p_1, x_2 - p_2) \quad (3.3)$$

dove ogni  $l_i$  è un polinomio lineare (di primo grado).

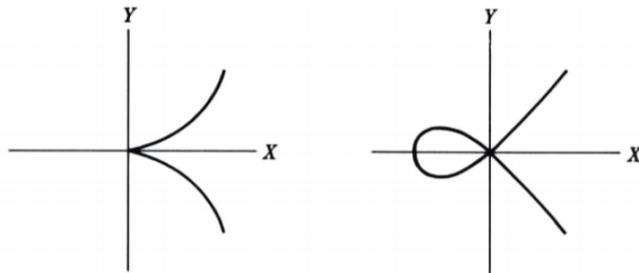
Le rette  $T_i = \mathcal{C}(l_i)$  si dicono *rette tangenti* a  $\mathcal{C}$  in  $p \forall i$ .

La curva  $\mathcal{C}(f_p^{(m)})$  si dice la *stella tangente* a  $\mathcal{C}$  in  $p$ .

**Teorema 3.1.2.** Sia  $\mathcal{C}(f)$  una curva algebrica di  $\mathbb{C}^2$ , allora se  $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$  è semplice la curva ha un numero finito di punti multipli.

*Dimostrazione.* Sia  $f$  semplice, se l'insieme dei punti multipli di  $\mathcal{C}$  è infinito lo è a maggior ragione l'insieme  $\mathcal{C}(f) \cap \mathcal{C}(\frac{\partial f}{\partial x_1})$ , (oppure  $\mathcal{C}(f) \cap \mathcal{C}(\frac{\partial f}{\partial x_2})$  se  $\mathcal{C}(\frac{\partial f}{\partial x_1})$  è costante). Perciò per il teorema 3.1.1 esiste un polinomio irriducibile  $h$  tale che  $f = a \cdot h$  e  $\frac{\partial f}{\partial x_1} = b \cdot h$ ; derivando si ha  $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial a}{\partial x_1} \cdot h + a \cdot \frac{\partial h}{\partial x_1}$  e quindi  $a \cdot \frac{\partial h}{\partial x_1} = h \cdot (b - \frac{\partial a}{\partial x_1})$ . Poichè  $\deg(\frac{\partial h}{\partial x_1}) < \deg(h)$ ,  $h$  deve dividere  $a$ ; sia  $a = g \cdot h$  allora  $f = g \cdot h^2$  contro l'ipotesi che  $f$  fosse semplice.  $\square$

**Esempio 3.1.** Consideriamo le curve  $x_1^3 - x_2^2 = 0$  e  $x_1^3 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ , guardando la loro parte reale si verifica che hanno entrambe un punto singolare doppio in  $P = (0, 0)$ , la prima con due tangenti coincidenti e la seconda con due tangenti distinte. La parte reale delle due curve si presenta nel seguente modo:



## 3.2 Curve algebriche in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$

**Definizione 3.7** (Supporto). Sia  $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$  un polinomio omogeneo non costante e sia:

$$V(F) = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 ; F(x_0, x_1, x_2) = 0\} \quad (3.4)$$

detto l'insieme dei punti di una curva algebrica associata al polinomio  $F$  in  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ , detto anche *supporto* di  $\mathcal{C}(F)$ .

**Teorema 3.2.1.** *Sia  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(F) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  curva algebrica con  $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$  omogeneo di grado  $d \in \mathbb{N}_{>0}$ , e sia  $L \subset \mathbb{P}^2$  retta, allora  $L$  e  $\mathcal{C}$  hanno dei punti in comune, e inoltre  $L \subset \mathcal{C}$  oppure  $\mathcal{C} \cap L$  è data da  $d$  punti (contati con molteplicità).*

*Dimostrazione.* Si tratta di scrivere una retta in forma parametrica e poi di vedere dove  $F$  si annulla in  $L$ :

$$\mathcal{C} \longleftrightarrow F(x_0, x_1, x_2); L : \begin{cases} x_0 = \alpha_0 s + \beta_0 t \\ x_1 = \alpha_1 s + \beta_1 t \\ x_2 = \alpha_2 s + \beta_2 t \end{cases} \quad \text{t.c. } \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2, s, t \in \mathbb{C}$$

$\mathcal{C} \cap L$  è dato dal calcolo di  $F(L) = F(x_0(s, t), x_1(s, t), x_2(s, t)) = \hat{F}(s, t)$  polinomio in  $\mathbb{C}[s, t]$ . Ci sono allora due possibilità:

- $\hat{F}(s, t) \equiv 0 \forall P \in L$ , non è restrittivo considerare  $L \longleftrightarrow \{x_0 = 0\}$  (con un cambio di coordinate), allora  $F = (0, x_1, x_2) \equiv 0$ , e quindi  $x_0 | F$ . Essendo  $x_0$  un fattore di  $F$  allora  $L$  è una componente della curva.
- $\hat{F}(s, t) \not\equiv 0$ , allora  $\hat{F} = a \prod_{i=1}^d (a_i s + b_i t)$  per 1.3.2, si ha chiaramente che le coppie  $(b_i, -a_i)$  sono radici di  $\hat{F}$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, d\}$ , non necessariamente distinte allora:

$$\{(x_0(b_i, -a_i), x_1(b_i, -a_i), x_2(b_i, -a_i)); i = 1, \dots, d\} = \mathcal{C} \cap L$$

e questo prova la tesi.  $\square$

**Esempio 3.2.** Se  $\mathcal{C} \longleftrightarrow \{x_0x_1 - x_2^2 = 0\}$ , e  $L$  invece è la retta  $\{x_0 = 0\}$  parametrizzandola:

$$L = \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = s \\ x_2 = t \end{cases} \quad \text{t.c. } s, t \in \mathbb{C}$$

per trovare  $\mathcal{C} \cap L$  si scrive  $\hat{F}(s, t) = -t^2 = 0$ , che ha come radice  $(0,1)$  con molteplicità 2, allora  $\mathcal{C} \cap L = \{[0,1,0]\}$  contato 2 volte.

Prendendo ora invece la retta  $L = \{x_2 = 0\}$  la parametrizzazione diventa:

$$L = \begin{cases} x_0 = s \\ x_1 = t \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{t.c. } s, t \in \mathbb{C}$$

quindi  $\hat{F}(s, t) = st = 0$  ha  $(1,0)$  e  $(0,1)$  come radici, e  $\mathcal{C} \cap L = \{[1,0,0], [0,1,0]\}$ .

*Osservazione 17.* Considerando quest'ultimo teorema si ricava che una cubica può avere due punti doppi solo se la retta passante per i due punti doppi è tutta contenuta nella cubica (perchè interseca la cubica con molteplicità totale almeno di 4).

*Osservazione 18.* Da 3.2.1 segue che  $\mathcal{C}(F)$  ha sempre infiniti punti, poichè prendendo un punto non appartenente a  $\mathcal{C}(F)$  passano infinite rette distinte ciascuna delle quali incontra  $\mathcal{C}(F)$ .

**Teorema 3.2.2.** *Siano  $F, G \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d$  due polinomi non costanti, primi tra loro e omogenei di grado  $d \in \mathbb{N}_{>0}$ , allora l'intersezione  $\mathcal{C}(F) \cap \mathcal{C}(G)$  ha un numero finito di punti.*

*Dimostrazione.* Si usa il fatto che è possibile trovare dei polinomi omogenei  $U(x_0, x_1, x_2)$ ,  $V(x_0, x_1, x_2)$  e  $A(x_0, x_1)$  con  $A$  non nullo tali che

$$U \cdot F + V \cdot G = A. \quad (3.5)$$

Il resto della dimostrazione segue da 3.1.1. □

*Osservazione 19.* Se  $F$  è irriducibile e  $\mathcal{C}(F) \cap \mathcal{C}(G)$  è infinita, allora  $G$  è multiplo di  $F$ , questo avviene se e soltanto se  $G$  si annulla nei punti di  $\mathcal{C}(F)$ .

**Definizione 3.8** (Sviluppo di Taylor per una curva in  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ ). Come per le curve affini, sia  $\mathcal{C}$  una curva algebrica per  $F$ , e  $p = [p_0, p_1, p_2]$  un punto di  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ ; allora partendo da 1.3.3 e raggruppando i vari termini per grado, lo sviluppo di Taylor per  $F$  di centro  $p$  si può scrivere come:

$$F = F_p^{(0)} + \dots + F_p^{(\deg F)}$$

dove  $F_p^{(k)}$  è un polinomio omogeneo di grado  $k \forall k \in \{0, \dots, \deg F\}$ .

La molteplicità di  $p$  in  $\mathcal{C}$  è il minimo intero positivo  $k$  tale che  $F_p^{(k)} \neq 0$ , e verrà indicata come  $m_p(\mathcal{C})$ .

**Definizione 3.9.** Se  $p = [p_0, p_1, p_2]$  è semplice (cioè se  $m_p(\mathcal{C}) = 1$ ), la retta:

$$F_p^{(1)} = \frac{\partial F}{\partial x_0}(p) \cdot (x_0 - p_0) + \frac{\partial F}{\partial x_1}(p) \cdot (x_1 - p_1) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(p) \cdot (x_2 - p_2) \quad (3.6)$$

si dice la *retta tangente* a  $\mathcal{C}$  in  $p$ , se ogni punto della curva  $\mathcal{C}$  è semplice,  $\mathcal{C}$  si dice liscia.

**Teorema 3.2.3.** Data  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(F)$  curva algebrica proiettiva e  $p = [p_0, p_1, p_2]$  un suo punto multiplo allora il termine  $F_p^{(m)}$  di grado più basso di quelli non nulli dello sviluppo di Taylor di  $F$  nel punto  $p$  è un prodotto di  $m$  fattori lineari.

*Dimostrazione.* Cambiando coordinate si può supporre  $p = [0, 0, 1]$ ;

$$F(x_0, x_1, x_2) = \sum_{k=0}^d F^{(k)}(x_0, x_1) \cdot x_2^{d-k}$$

con  $F^{(k)}(x_0, x_1)$  omogeneo di grado  $k$ . Si può vedere che

$$F(x_0, x_1, x_2) = \sum_{h+k \leq d} \binom{d-k}{h} F^{(k)}(x_0, x_1) \cdot (x_2 - 1)^h$$

e quindi per l'unicità dello sviluppo di Taylor di  $F$  in  $(0, 0, 1)$  si ha che:

$$F_{(0,0,1)}^{(i)}(x_0, x_1, x_2) = \sum_{h+z=i} \binom{d-k}{h} F^{(k)}(x_0, x_1) \cdot (x_2 - 1)^h$$

$\forall i = 0, \dots, d$ . Poichè  $F_{(0,0,1)}^{(i)} = 0 \forall i < m$  in particolare

$$F_{(0,0,1)}^{(i)}(x_0, x_1, 1) = F^{(i)}(x_0, x_1) = 0 \quad \forall i < m$$

quindi  $F_{(0,0,1)}^{(m)}(x_0, x_1, x_2) = F^{(m)}(x_0, x_1)$  come polinomio omogeneo in due variabili è prodotto di fattori lineari per il teorema 1.3.2. Pertanto

$$F_p^m = H_1^{m_1} \cdot H_2^{m_2} \cdot \dots \cdot H_k^{m_k} \quad (3.7)$$

dove ogni  $H_i$  è omogeneo di grado 1. □

**Definizione 3.10.** Le rette  $T_i = \mathcal{C}(H_i)$  si dicono le *rette tangenti a  $\mathcal{C}$  in  $p$* . La curva  $\mathcal{C}(F_p^{(m)})$  si dice la *stella tangente a  $\mathcal{C}$  in  $p$* .

**Teorema 3.2.4.** Sia  $\mathcal{C}(F)$  curva algebrica di  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  con  $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$  omogeneo, allora se  $F$  è semplice ha un numero finito di punti multipli.

*Dimostrazione.* Si procede come nella dimostrazione del teorema 3.1.2.

**Definizione 3.11** (Funzione Razionale). Siano  $P, Q \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$  polinomi omogenei di grado  $d \in \mathbb{N}_{>0}$ , allora ponendo  $\frac{P}{Q}[x_0, x_1, x_2] = \frac{P(x_0, x_1, x_2)}{Q(x_0, x_1, x_2)}$  la funzione:

$$\frac{P}{Q} : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus V(Q) \longrightarrow \mathbb{C} \text{ è ben definita.}$$

Data  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(F)$  curva proiettiva irriducibile e un polinomio  $Q$  che non sia multiplo di  $F$ , allora la restrizione:

$$R = \frac{P}{Q|_{\mathcal{C}}} : \mathcal{C} \setminus V(Q) \longrightarrow \mathbb{C} \quad (3.8)$$

è una funzione definita quasi ovunque su  $\mathcal{C}$ , per 3.2.2, che si dice *funzione razionale su  $\mathcal{C}$* .

*Osservazione 20.* Si può notare che  $\frac{P}{Q}|_{\mathcal{C}} \stackrel{q.o.}{=} \frac{P'}{Q'}|_{\mathcal{C}}$  se e solo se  $PQ' - P'Q$  è multiplo di  $F$ .

$\mathbb{C}(\mathcal{C})$  è l'insieme delle funzioni razionali su  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(F)$ . Se  $F$  è irriducibile allora  $\mathbb{C}(\mathcal{C})$  forma un campo.

**Definizione 3.12.** Siano ora  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$  due curve proiettive irriducibili, un'applicazione non costante definita quasi ovunque:

$$\hat{r} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$$

si dice *razionale da  $\mathcal{C}$  in  $\mathcal{C}'$*  se esistono tre polinomi omogenei  $P, Q, R$  dello stesso grado e non tutti nulli su  $\mathcal{C}$  tali che per quasi ogni  $[x_0, x_1, x_2] \in \mathcal{C}$  si ha che:

$$\hat{r}[x_0, x_1, x_2] = [P(x_0, x_1, x_2), Q(x_0, x_1, x_2), R(x_0, x_1, x_2)].$$

Se esiste, inoltre  $\hat{s} : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$  razionale e non costante e tale che:

$$\hat{s} \circ \hat{r} \stackrel{q.o.}{=} id_{\mathcal{C}} \quad \text{e} \quad \hat{r} \circ \hat{s} \stackrel{q.o.}{=} id_{\mathcal{C}'}$$

si dice che  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$  sono *birazionali*.

Una curva  $\mathcal{C}$  si dice *razionale* se è birazionale con una retta.

### 3.2.1 Omogeneizzazione e Disomogeneizzazione

Per collegare le curve affini con le curve proiettive verrà usato un procedimento simile a quello che è stato usato in 1.11 introducendo due applicazioni; la prima è detta **omogeneizzazione**:

$$(\ )^* : \mathbb{C}[x_1, x_2] \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$$

definita per  $f(x_1, x_2) = \sum_{i_1+i_2 \leq d} a_{i_1 i_2} x_1^{i_1} x_2^{i_2}$  di grado  $d \geq 0$  ponendo:

$$(f^*)(x_0, x_1, x_2) = \sum_{i_1+i_2 \leq d} a_{i_1 i_2} x_0^{d-i_1-i_2} x_1^{i_1} x_2^{i_2}. \quad (3.9)$$

L'altra è la cosiddetta **disomogeneizzazione**:

$$(\ )_* : \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2] \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}[x_1, x_2]$$

definita ponendo:

$$(F_*)(x_1, x_2) = F(1, x_1, x_2). \quad (3.10)$$

Il polinomio  $f^*$  si dice l'*omogeneizzato* di  $f$ , e  $F_*$  il *disomogeneizzato* di  $F$ .

Si possono dedurre le seguenti proprietà:

*Osservazione 21.* Poichè  $f^*$  è omogeneo, se  $\deg(f^*) = \deg f$ , allora  $x_0$  non divide  $f_*$ .

*Osservazione 22.* Se  $F$  è omogeneo non costante e diverso da  $a \cdot x_0$  (con  $a \in \mathbb{C}$ ) allora  $F_*$  non è costante.

*Osservazione 23.*  $f$  è irriducibile (semplice) se e solo se  $f^*$  è irriducibile (semplice).

*Osservazione 24.* Se  $F$  è irriducibile (semplice) anche  $F_*$  lo è; se  $F_*$  è irriducibile (semplice) ed  $F$  non è divisibile di  $x_0$ , allora  $F$  è irriducibile (semplice).

### 3.2.2 Proiettivo e Affine

**Teorema 3.2.5.** *Sia  $L$  una retta di  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ , su  $U = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus L$  si può considerare la struttura di piano affine naturale.*

1. *Per ogni curva irriducibile  $\hat{\mathcal{C}}$  di  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  diversa da  $L$  si ha che  $\hat{\mathcal{C}}_* = \hat{\mathcal{C}} \cap U$  è la più grande curva semplice di  $U$  contenuta in  $\hat{\mathcal{C}}$ ; inoltre  $\hat{\mathcal{C}}_*$  è irriducibile in  $U$ .*
2. *Per ogni curva irriducibile  $\mathcal{C}$  di  $U$  esiste una ed una sola curva  $\mathcal{C}^*$  di  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  che è la più piccola curva semplice di  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  contenente  $\mathcal{C}$ ; inoltre  $\mathcal{C}^*$  è irriducibile in  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ .*

*Dimostrazione.* Cambiando eventualmente le coordinate omogenee di  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  si può supporre  $L \longleftrightarrow \{x_0 = 0\}$ . Se  $\hat{\mathcal{C}} = \mathcal{C}(F)$ , allora la curva  $\hat{\mathcal{C}}_* = \mathcal{C}(F_*)$  verifica la prima parte del teorema per le osservazioni 22 e 24.

Se  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(f)$  la curva  $\mathcal{C}^* = \mathcal{C}(f^*)$  verifica la seconda parte del teorema tenendo conto delle osservazioni 21 e 23. □

**Teorema 3.2.6.** *Sia  $L$  una retta di  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  e  $U = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus L$ . Data una curva  $\hat{\mathcal{C}}$  ed un punto  $p \in U$  la molteplicità proiettiva di  $p$  in  $\hat{\mathcal{C}}$  coincide con la molteplicità affine di  $p$  in  $\hat{\mathcal{C}}_*$  e la stella tangente proiettiva a  $\hat{\mathcal{C}}$  in  $p$  è la chiusura proiettiva della stella tangente affine a  $\hat{\mathcal{C}}_*$  in  $p$ .*

*Dimostrazione.* Si può supporre come in 3.2.5,  $L \longleftrightarrow \{x_0 = 0\}$  e  $p = [1, 0, 0]$ .

Sia  $\hat{\mathcal{C}} = \mathcal{C}(F)$  con  $F$  omogeneo di grado  $d$ ;

indichiamo  $F = \sum_{k=0}^d x_0^{d-k} \cdot F^{(k)}(x_1, x_2)$  dove gli  $F^{(k)}$  sono polinomi omogenei in  $x_1$  e  $x_2$  di grado  $k$ . Otteniamo  $(F_*)_{(0,0)}^{(k)}(x_1, x_2) = F^{(k)}(x_1, x_2)$ . Si può vedere che

$$F(x_0, x_1, x_2) = \sum_{h+k \leq d} \binom{d-k}{h} \cdot (x_0 - 1)^h \cdot F^{(k)}(x_1, x_2)$$

e quindi per unicità dello sviluppo di Taylor di  $F$  in  $(1, 0, 0)$  si ha che

$$F_{(1,0,0)}^{(i)}(x_0, x_1, x_2) = \sum_{h+k=i} \binom{d-k}{h} \cdot (x_0 - 1)^h \cdot F^{(k)}(x_1, x_2)$$

per ogni  $i = 0, 1, \dots, d$ . In particolare si ha

$$F_{(1,0,0)}^{(i)}(1, x_1, x_2) = F^{(i)}(x_1, x_2) = (F_*)_{(0,0)}^{(k)}.$$

Perciò  $(F_*)_{(0,0)}^{(i)} = 0$  per ogni  $k \leq i$  se e solo se  $(F_*)_{(1,0,0)}^{(k)} = 0$  per ogni  $i \leq k$ .

Questo prova che  $m_{(0,0)}(F_*) = m_{(1,0,0)}(F) = m$ ;

inoltre  $(F_*)_{(0,0)}^{(m)} = F^{(m)} = F_{(1,0,0)}^{(m)}$ , perciò  $((F_*)_{(0,0)}^{(m)})^* = (F_{(1,0,0)}^{(m)})^* = F_{(1,0,0)}^{(m)}$

dato che questo polinomio è già omogeneo; quindi la chiusura della stella tangente a  $\hat{\mathcal{C}}_*$  in  $(0, 0)$  definita dal polinomio  $((F_*)_{(0,0)}^{(m)})^*$  coincide con la stella tangente a  $\hat{\mathcal{C}}$  in  $(1, 0, 0)$  definita dal polinomio  $F_{(1,0,0)}^{(m)}$ .  $\square$

### 3.3 Topologia delle curve algebriche in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$

In questa sezione, partendo da importanti esempi, si vedrà che ogni curva algebrica non singolare è topologicamente equivalente a una superficie compatta orientabile, ovvero a una sfera o una somma connessa di tori.

**Esempio 3.3.** Sia  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(F)$  una curva algebrica di  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  con  $F = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2$ , se visualizziamo  $\mathcal{C}$  nella carta affine  $\{x_2 \neq 0\}$  si vede la curva  $X^2 + Y^2 = 1$ . Sia  $X = X_1 + iX_2$  e  $Y = Y_1 + iY_2$ , allora avremo:

$$(X_1 + iX_2)^2 + (Y_1 + iY_2)^2 = 1,$$

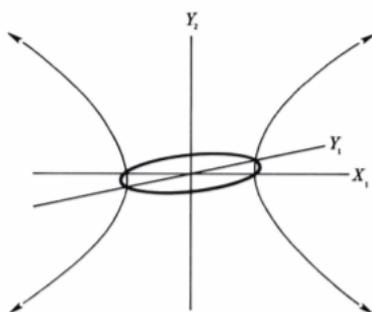
svolgendo i quadrati e uguagliando la parte reale e la parte immaginaria si hanno le equazioni:

$$X_1^2 - X_2^2 + Y_1^2 - Y_2^2 = 1, \quad X_1X_2 + Y_1Y_2 = 0. \quad (3.11)$$

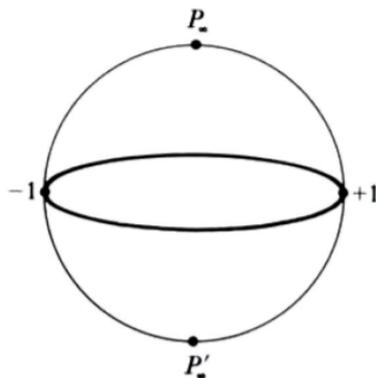
Supponiamo che  $X_2$  abbia il ruolo del tempo, e che si inizi con  $X_2 = 0$ , allora

$$X_1^2 + Y_1^2 - Y_2^2 = 1, \quad Y_1Y_2 = 0. \quad (3.12)$$

La prima equazione definisce un iperboloido a una falda, la seconda l'unione del piano  $X_1Y_1$  col piano  $X_1Y_2$ . Il luogo geometrico delle equazioni in (3.12) è l'unione della circonferenza reale  $X_1^2 + Y_1^2 = 1$  (quando  $Y_2 = 0$ ) con l'iperbole  $X_1^2 - Y_2^2 = 1$  (quando  $Y_1 = 0$ ).



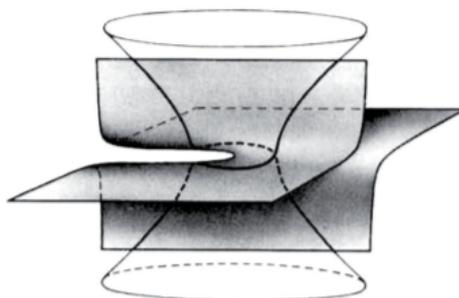
L'iperbole ha inoltre due punti all'infinito che chiamiamo  $P_\infty$  e  $P'_\infty$ . Il completamento proiettivo reale dell'iperbole è una circonferenza, quindi l'intera curva, considerando anche  $X_2 = 0$ , è l'unione di due circonferenze che si toccano in due punti distinti.



Si supponga ora che  $X_2$  cambi di poco, per esempio  $X_2 = \epsilon > 0$ . Allora si ha:

$$X_1^2 + Y_1^2 - Y_2^2 = 1 - \epsilon^2, \quad \epsilon X_1 + Y_1 Y_2 = 0. \quad (3.13)$$

La prima è ancora un iperboloide a una falda, la seconda, per  $\epsilon$  piccolo, “assomiglia” all’unione dei due piani dell’equazione (3.12). La circonferenza e l’iperbole sono in questo caso disgiunte.



Si potrebbero però disegnare e rifarlo per ogni  $X_2 > 0$  fino a riempire due quarti della sfera come mostrato in figura (per  $X_2$  negativo si riempiono invece gli altri due quarti).

Risulta così dimostrato che la circonferenza nel piano proiettivo complesso è topologicamente equivalente ad una sfera.



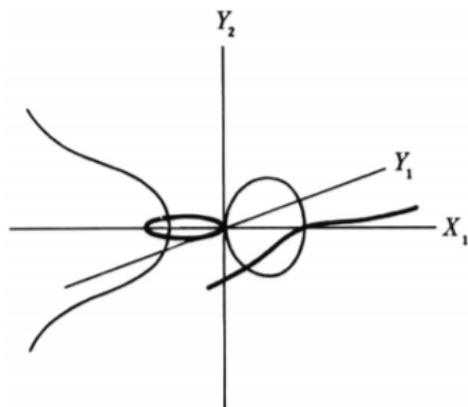
**Esempio 3.4.** Sia  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(f)$  una curva algebrica affine con  $f = Y^2 - X(X^2 - 1)$ . Siano  $X = X_1 + iX_2$  e  $Y = Y_1 + iY_2$ , svolgendo i calcoli e separando la parte reale con la parte immaginaria ponendole uguali a zero si ottengono le equazioni

$$Y_1^2 - Y_2^2 = X_1^3 - 3X_1X_2^2 - X_1, \quad 2Y_1Y_2 = 3X_1^2X_2 - X_2^3 - X_2.$$

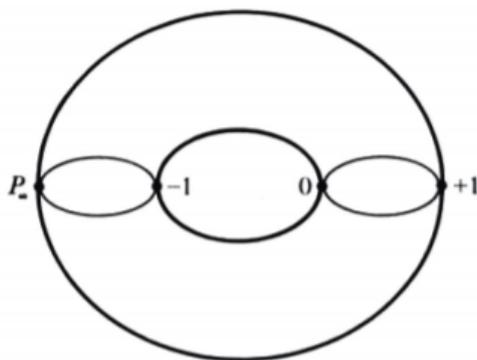
E quando  $X_2 = 0$

$$Y_1^2 - Y_2^2 = X_1^3 - X_1, \quad Y_1 Y_2 = 0.$$

Se  $Y_2 = 0$  abbiamo la curva  $Y_1^2 = X_1^3 - X_1$  nel piano  $X_1 Y_1$  e se  $Y_1 = 0$  abbiamo  $Y_2^2 = X_1 - X_1^3$  nel piano  $X_1 Y_2$  ottenendo la seguente curva.



Ognuna delle due curve avrebbe due punti all'infinito distinti in quanto i "bracci" di esse tendono alle direzioni dell'asse  $Y_1$  e  $Y_1$ , ma in  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ , si aggiunge un punto all'infinito per ogni spazio complesso di dimensione 1 e il piano  $Y_1 Y_2$  è lo spazio  $X = 0$  di dimensione 1. Quindi le due curve si incontrano in punto all'infinito  $P_{\infty}$ . Topologicamente la curva totale ottenuta quando  $X_2 = 0$  è descritta nella seguente figura.



Facendo variare  $X_2$  e applicando lo stesso procedimento dell'esempio precedente si dimostra che la curva  $f$  del piano proiettivo complesso è topologicamente equivalente a un toro.

Vediamo adesso una curva algebrica irriducibile con singolarità.

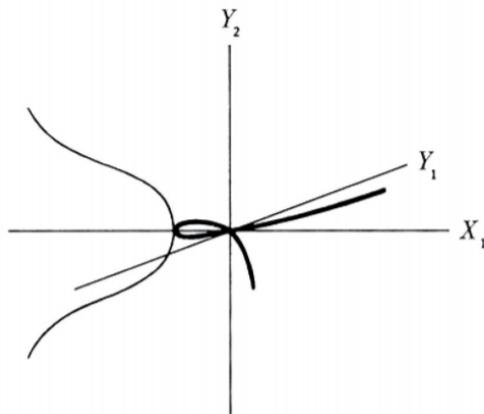
**Esempio 3.5.** Sia  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(f)$  una curva algebrica affine con  $f = Y^2 - (X^2(X + 1))$ . Siano  $X = X_1 + iX_2$  e  $Y = Y_1 + iY_2$ , svolgendo i calcoli come nell'esempio 3.4 si ha che

$$Y_1^2 - Y_2^2 = X_1^3 - 3X_1X_2^2 + X_1^2 + X_2^2, \quad 2Y_1Y_2 = 3X_1^2X_2 - X_2^3 - 2X_1X_2.$$

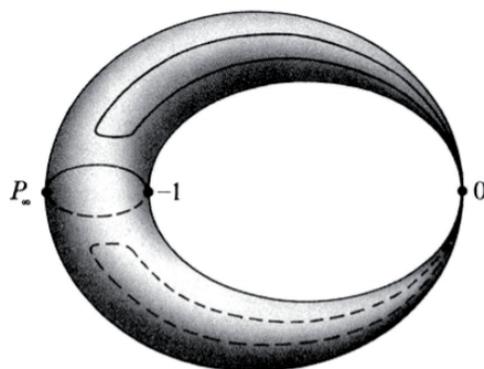
E quando  $X_2 = 0$

$$Y_1^2 - Y_2^2 = X_1^3 + X_1^2, \quad Y_1Y_2 = 0.$$

L'intera curva è descritta nella seguente curva, che quando  $Y_2 = 0$  giace nel piano  $X_1Y_1$  e rispettivamente, quando  $Y_1 = 0$ , nel piano  $X_1Y_2$ .



La curva ottenuta, insieme alle altre che si ottengono per  $X_2$  costante, vanno a riempire la seguente figura, e si prova che  $\mathcal{C} \longleftrightarrow Y^2 - (X^2(X + 1))$  è omeomorfa a un toro "strozzato", ossia ad una sfera con due punti identificati tra loro.



Dall'esempio appena concluso si nota che le singolarità generano casi particolari di superfici. Qui sarà discusso solo il caso di curve algebriche lisce e irriducibili. Vediamo una serie di risultati che ci permettono di generalizzare gli esempi visti fino ad ora.

**Lemma 3.3.1.** *Ogni curva algebrica  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  è compatta.*

*Dimostrazione.*  $\mathcal{C}$  è individuata da un polinomio omogeneo non costante  $F(x_0, x_1, x_2)$ , che può essere disomogeneizzato in tre modi diversi, quindi è individuato da tre polinomi nelle corrispondenti carte affini:

$$F(1, x_1, x_2), F(x_0, 1, x_2), F(x_0, x_1, 1), \quad (3.14)$$

ma ognuno di essi è un chiuso nel proprio spazio affine e  $\mathcal{C}$  è l'unione di quei tre chiusi, e dato che  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  è compatto allora  $\mathcal{C}$  è compatto.  $\square$

**Lemma 3.3.2.** *Sia  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  una curva algebrica irriducibile, e sia  $\Delta$  l'insieme dei punti singolari di  $\mathcal{C}$ . Allora  $\mathcal{C} \setminus \Delta$  è una superficie orientabile.*

*Dimostrazione.* La si può trovare in [6].  $\square$

**Corollario 3.3.3.** *Se  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  è liscia, allora è orientabile.*

Si può adesso enunciare il teorema principale di questa sezione.

**Teorema 3.3.4.** *Sia  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  una curva algebrica irriducibile e liscia, allora  $\mathcal{C}$  è topologicamente equivalente a una superficie compatta orientabile.*

*Dimostrazione.* Questa dimostrazione è presente in [6].  $\square$

**Proposizione 3.3.5.** *Una curva algebrica razionale  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  ha genere 0.*

*Dimostrazione.* La si può trovare in [4] a pagina 173.  $\square$

### 3.3.1 La formula del genere

Abbiamo visto che ogni curva algebrica  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  irriducibile e liscia è topologicamente equivalente a una superficie compatta orientabile. Inoltre nel secondo capitolo sono state classificate le superfici compatte a meno di omeomorfismi, e in particolare quelle orientabili sono omeomorfe a una sfera o una somma connessa di tori. Inoltre, le superfici sono caratterizzate dal genere che è un invariante topologico, e due superfici orientabili sono omeomorfe se e solo se hanno lo stesso genere. Sia  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  irriducibile e non singolare, definita da un polinomio  $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ , ci si può chiedere se esiste un modo per trovare il genere  $g$  direttamente da  $F$  senza ricorrere a complicate rappresentazioni geometriche delle curva. Il problema è risolto dalla Formula del genere. Ci limitiamo ad enunciare il teorema.

**Teorema 3.3.6** (Formula del genere). *Sia  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  curva algebrica e liscia definita dal polinomio omogeneo  $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ . Se  $\deg(F) = n$  allora il genere  $g$  di  $\mathcal{C}$  è*

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \quad (3.15)$$

*Dimostrazione.* La si può consultare in [6]. □



# Bibliografia

- [1] Edoardo Sernesi, 'Geometria 1', Bollati Boringhieri (2013).
- [2] Dispense del corso di Algebra 2 di F. Caselli.
- [3] Marco Manetti, 'Topologia', Springer (2014).
- [4] A. Cassa, 'Teoria elementare delle curve algebriche piane e delle superfici di Riemann compatte', Pitagora Editrice, Bologna (1983).
- [5] L.V Ahlfors and L.Sario, 'Riemann Surfaces' Princeton UP - Princeton (1960).
- [6] Kendig K., 'Elementary Algebraic Geometry', Springer-Verlag (1977).
- [7] Gianluca Occhetta, 'Note di topologia generale e primi elementi di topologia algebrica', Università di Trento, dispense (2009), (si veda <http://www.science.unitn.it/~occhetta/studenti/disp4fc.pdf>).



# Ringraziamenti

Vorrei porgere i miei ringraziamenti al professore Alessandro Gimigliano per la sua costante disponibilità nelle opportune correzioni di questa tesi.

Un ringraziamento particolare verso mia mamma, babbo, nonni, che hanno contribuito non poco all'arrivo di questo mio importante percorso.

Un ringraziamento al professore Valerio Fiumana per tutti i suoi consigli ricevuti.

Ringrazio i miei compagni del corso Pier, Meri, Miri e Stefano, per tutte le giornate produttive di studio svolte insieme.

Un ringraziamento ai miei insegnanti della scuola che dicevano che ero portato per questo studio, facendomi scoprire questa passione.