

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Matematica

**LA DINAMICA DEL CORPO RIGIDO:  
DALLE EQUAZIONI CARDINALI DELLA  
DINAMICA  
ALLE EQUAZIONI DI EULERO**

Tesi di Laurea in Fisica Matematica

Relatore:

Chiar.ma Prof.ssa  
EMANUELA CALICETI

Presentata da:

ALESSANDRO CARAVITA

Sessione Unica

Anno Accademico 2018-2019

*A mio nonno Raffaele...*

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>iii</b>
<b>1 La cinematica del corpo rigido</b>	<b>1</b>
1.1 Notazioni e nozioni preliminari . . . . .	1
1.2 Generalità del corpo rigido . . . . .	3
1.2.1 Gli assi solidali con un corpo rigido . . . . .	4
1.2.2 Le formule di Poisson . . . . .	6
1.3 Moti e stati cinetici del corpo rigido . . . . .	8
1.3.1 Moto di traslazione . . . . .	9
1.3.2 Moto di rotazione . . . . .	10
1.3.3 Moto di rototraslazione . . . . .	11
<b>2 Il momento e l'ellissoide d'inerzia</b>	<b>12</b>
2.1 Definizioni e proprietà principali . . . . .	12
2.2 Il momento d'inerzia . . . . .	15
2.3 L'ellissoide d'inerzia . . . . .	16
2.3.1 Interpretazione geometrica . . . . .	18
2.3.2 Il momento della quantità di moto e l'energia cinetica . . . . .	22
2.4 Il teorema di Huygens . . . . .	23
<b>3 Le equazioni cardinali della dinamica e le equazioni di Eulero</b>	<b>26</b>
3.1 Forze, sistemi di forze e leggi della dinamica . . . . .	26
3.2 Il teorema della quantità di moto . . . . .	29
3.3 Il teorema del momento delle quantità di moto . . . . .	30
3.3.1 Prime applicazioni . . . . .	32
3.4 Il moto di un corpo rigido con un punto fisso e di un corpo rigido libero . . . . .	33

---

3.4.1	Gli angoli di Eulero . . . . .	33
3.4.2	Relazione fra velocità angolare e angoli di Eulero . . . . .	34
3.4.3	Equazioni di Eulero . . . . .	35
3.5	Esempio di applicazione . . . . .	38
<b>Bibliografia</b>		<b>43</b>

# Introduzione

Scopo di questa tesi è lo studio della dinamica di un corpo rigido che, nel contesto della meccanica classica, consiste nel determinare l'evoluzione temporale conoscendo le condizioni iniziali, le forze agenti sul corpo e i vincoli a cui è soggetto. Trattandosi di un sistema meccanico costituito da infiniti punti materiali, la legge di Newton che governa la dinamica di un singolo punto dà origine in questo caso a un sistema costituito da un numero infinito di equazioni e pertanto non risulta idoneo dal punto di vista operativo a risolvere il problema del moto dell'intero sistema. Si rende pertanto necessario individuare strumenti alternativi, tenendo conto del fatto che il vincolo di rigidità che lega fra loro i punti di un corpo rigido fa sì che siano sufficienti sei parametri (coordinate Lagrangiane) per descrivere la configurazione del corpo in ogni istante: il *grado di libertà*  $n$  è esattamente sei se il corpo rigido è libero; se è vincolato  $n$  si riduce.

L'obiettivo, pertanto, è quello di determinare delle equazioni che leghino fra loro gli  $n$  parametri Lagrangiani, risolvendo le quali si possa determinare la configurazione del corpo in ogni istante successivo a quello iniziale. Tali equazioni risultano essere le equazioni cardinali della dinamica, valide per un qualunque sistema meccanico, ma particolarmente efficaci nel caso del corpo rigido, giacché, nel caso libero corrispondono esattamente a sei equazioni differenziali in  $\mathbb{R}$  di secondo ordine nei sei parametri Lagrangiani, che possono essere identificati con le tre coordinate del baricentro e i tre angoli di Eulero. Questi ultimi consentono di determinare la configurazione di una terna di assi cartesiani solidale al corpo rigido.

Più precisamente la prima equazione cardinale della dinamica, è un'equazione vettoriale (in  $\mathbb{R}^3$ ) detta anche *equazione della quantità di moto*, e ammette una formulazione equivalente detta *equazione del moto del baricentro*, secondo la quale il baricentro  $G$  del corpo si muove come se tutta la massa del corpo fosse in esso concentrata e tutte le forze esterne fossero applicate in  $G$ . Inoltre il moto di  $G$  non risulta influenzato dall'azione di eventuali forze interne.

La seconda equazione cardinale invece fa intervenire il momento angolare del corpo come grandezza centrale. Pertanto vengono illustrate delle tecniche per rappresentare le varie componenti,

in relazione all'energia cinetica del corpo e alle componenti del vettore di Poisson (velocità angolare) rispetto alla terna solidale col corpo. In questo contesto risultano fondamentali il teorema di König per la rappresentazione dell'energia cinetica e il teorema di Huygens per il calcolo del momento d'inerzia rispetto a una retta; quest'ultima grandezza scalare interviene sia nel calcolo dell'energia cinetica che in quello del momento angolare.

Particolarmente interessante risulta il caso del corpo rigido con punto fisso  $O$ . In questo caso molto utile risulta la nozione di *ellissoide d'inerzia*, rappresentato dalla matrice d'inerzia, noto il quale è possibile determinare il momento d'inerzia rispetto a qualunque retta passante per  $O$ . Ritornando al caso generale, una volta espresse le componenti del momento angolare in termini delle componenti del vettore di Poisson  $(p, q, r)$ , le equazioni cardinali della dinamica, nel caso libero, si configurano come sei equazioni scalari nelle sei incognite  $(p, q, r)$  e  $(x_G, y_G, z_G)$ , dove queste ultime sono le tre coordinate del baricentro. Poiché in realtà nel conoscere il moto del corpo, ovvero la sua configurazione in ogni istante, occorre conoscere oltre alle coordinate di  $G$  anche gli altri tre parametri Lagrangiani rappresentati dagli angoli di Eulero  $(\varphi, \psi, \theta)$ , si rende necessario individuare delle relazioni che leghino le incognite  $(p, q, r)$  alla terna  $(x_G, y_G, z_G)$ . Tali relazioni sono rappresentate appunto dalle *equazioni di Eulero* che rendono così il problema completamente determinato.

Il caso di corpo rigido vincolato a priori si configura più complesso poiché fra le incognite compaiono anche le reazioni vincolari che devono essere introdotte in numero non ridondante per evitare che il sistema di equazioni risulti indeterminato. Va tuttavia notato che in questo caso si presentano anche delle semplificazioni in relazione al fatto che i vincoli riducono il grado di libertà e quindi il numero di incognite fra i parametri Lagrangiani. Pertanto risulta difficile fornire delle indicazioni generali, ma è necessario analizzare i singoli casi volta per volta in relazione alle loro specificità.

Per la trattazione delle tematiche fin qui illustrate sinteticamente, la tesi è strutturata in tre capitoli. Nel primo capitolo vengono illustrate le proprietà cinematiche del corpo rigido a partire dalle formule di Poisson fino alla formula fondamentale della cinematica rigida e alla descrizione degli stati cinetici fondamentali (traslazione, rotazione, rototraslazione). Nel secondo capitolo viene sviluppato il tema del momento d'inerzia, in tutti i suoi aspetti, includendo l'ellissoide d'inerzia e il teorema di Huygens. Infine nel terzo capitolo si ricavano e illustrano le equazioni cardinali della dinamica e le equazioni di Eulero, con particolare riguardo al caso del corpo rigido libero e al caso del corpo rigido con punto fisso. La tesi si conclude con l'illustrazione di un'importante applicazione, rappresentata dal cosiddetto *moto alla Poincot*: in particolare vengono studiati tre possibili casi affinché il corpo sia soggetto a rotazioni permanenti.

Per la stesura di questa tesi si è fatto riferimento a più testi indicati nella bibliografia [1, 2, 3], in particolare al trattato di Dario Graffi [2], al quale si rimanda il lettore per ulteriori approfondimenti. Per l'esempio finale di applicazione è stato consultato il sito [4].

# Capitolo 1

## La cinematica del corpo rigido

In questo primo capitolo verranno trattate una serie di nozioni elementari della meccanica razionale, le quali saranno necessarie per poter sviluppare e comprendere tutti gli argomenti della seguente tesi. Oltre a concetti elementari della fisica-matematica, saranno enunciati, ed in alcuni casi dimostrati, anche alcuni risultati di carattere puramente matematico, quest'ultimi saranno necessari per alcune dimostrazioni proposte.

### 1.1 Notazioni e nozioni preliminari

Richiamiamo innanzitutto la nozione di vettore dello spazio euclideo tridimensionale, quale ente matematico caratterizzato da una direzione, da un verso e da un valore numerico (positivo).

Un vettore può essere rappresentato da un segmento orientato, cioè da un segmento munito di una freccia. La lunghezza del segmento è il valore numerico (positivo) che caratterizza il vettore e viene definito *modulo* del vettore; la direzione della retta che contiene il segmento è la *direzione* del vettore; il *verso* è dato dal verso della freccia. La notazione adottata per rappresentare un vettore consiste in una lettera latina sormontata da una freccia; in tale modo la scrittura  $\vec{v}$  rappresenterà un vettore. Se  $A$  e  $B$  sono gli estremi del segmento che rappresenta il vettore  $\vec{v}$ , con verso da  $A$  a  $B$ , il vettore può anche essere indicato con  $B - A$  oppure  $\vec{AB}$ . Il modulo di tale vettore si indicherà con  $v$  oppure con  $|\vec{v}|$ .

In generale un vettore è dunque una classe di equivalenza di segmenti orientati, aventi stesso modulo, direzione e verso.



Introduciamo un sistema di riferimento cartesiano  $(O, x, y, z)$  in  $\mathbb{R}^3$ . In tale modo ogni vettore  $\vec{v}$  può essere rappresentato in maniera univoca da un segmento orientato con origine in  $O$ . Se  $P$  è il secondo estremo di tale segmento di avrà  $\vec{v} = \vec{OP} = P - O$  e si potrà identificare  $\vec{v}$  con il punto  $P$  e con la terna  $(x, y, z)$  delle sue coordinate cartesiane. Indicando con  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  rispettivamente i vettori componenti della base canonica di  $\mathbb{R}^3$ , ovvero  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ , il generico vettore  $\vec{v}$  potrà essere così rappresentato:

$$\vec{v} = P - O = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Un vettore di modulo unitario verrà detto versore.

Infine richiamiamo le nozioni di prodotto scalare e prodotto vettoriale fra vettori.

**Definizione 1.1.** Si chiama prodotto scalare (o prodotto interno) fra due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  (e verrà indicato con il simbolo  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ) il seguente numero reale

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos(\alpha), \quad (1.1)$$

dove  $\alpha$  è l'angolo formato dai due vettori.

Ricordiamo che se dei due vettori si conoscono le coordinate cartesiane  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , si ha

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

**Definizione 1.2.** Si chiama prodotto vettoriale (o prodotto esterno) fra due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  (e verrà indicato con il simbolo  $\vec{a} \times \vec{b}$ ) un vettore  $\vec{c}$  di modulo  $ab \sin(\alpha)$  (se  $\alpha$  è l'angolo compreso fra i due vettori), di direzione normale al piano fra i due vettori e con senso tale che un osservatore, disposto lungo  $\vec{c}$  e che guardi  $\vec{b}$ , veda  $\vec{a}$  alla sua destra

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}. \quad (1.2)$$

Ricordiamo che il prodotto vettoriale non è commutativo, si ha infatti  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ , e che in termini di coordinate cartesiane è dato dal seguente determinante

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

## 1.2 Generalità del corpo rigido

**Definizione 1.3.** *Un corpo rigido  $\mathcal{C}$  è un sistema meccanico costituito da un numero finito o infinito di punti materiali tale che la distanza fra due suoi punti qualunque si mantiene costante nel tempo*

$$|P - Q| = \text{cost}, \quad \forall P, Q \in \mathcal{C}. \quad (1.3)$$

La formula (1.3) è definita *vincolo di rigidità* del corpo rigido  $\mathcal{C}$ .

Conoscere il moto di un corpo rigido significa conoscere in ogni istante di tempo  $t \in \mathbb{R}$  la configurazione nello spazio di ogni punto  $P$  che verrà denotata con  $P(t)$ . L'equazione

$$P = P(t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

è detta equazione vettoriale del moto del punto  $P$  ed equivale alle tre equazioni scalari

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), \end{cases} \quad (1.5)$$

che forniscono le coordinate del punto  $P$  all'istante  $t$ .

Per conoscere la configurazione del corpo  $\mathcal{C}$  ad un istante  $t \geq t_0$ , successivo all'istante iniziale  $t \in \mathcal{R}$ , occorre dunque conoscere la (1.4) e (1.5), per ogni punto  $P \in \mathcal{C}$ . A tale riguardo, tenendo conto del vincolo di rigidità che lega i punti di  $\mathcal{C}$ , è facile dimostrare il seguente teorema.

**Teorema 1.4.** *Assegnata la posizione del corpo rigido  $\mathcal{C}$ , ossia di ogni suo punto, in un istante che si può assumere come iniziale  $t_0$ , e nota, all'istante  $t$ , la posizione di tre punti di esso non allineati, per esempio  $A, B, C$ , risulta determinata la posizione di ogni punto  $P$  all'istante  $t$ .*

*Dimostrazione.* Per ipotesi, conosciamo la posizione iniziale di ogni punto del corpo all'istante iniziale  $t_0$  ed il moto di tre suoi punti non allineati  $A, B, C$ . Sia  $P$  un generico punto del corpo di cui vogliamo determinare la posizione in un istante  $t \geq t_0$ . Essendo note le posizioni iniziali  $A_0 = A(t_0), B_0 = B(t_0), C_0 = C(t_0), P_0 = P(t_0)$  di  $A, B, C, P$ , queste costituiscono i vertici di un tetraedro, il quale è rigido e garantisce il mantenimento costante della distanza tra i punti del corpo nel tempo. Quindi sovrapponendo i vertici  $A_0, B_0, C_0$  ai vertici  $A(t), B(t), C(t)$  all'istante  $t$ , sarà automaticamente individuata la posizione  $P(t)$  del punto  $P$  all'istante  $t$  del quarto vertice del tetraedro.  $\square$

**Osservazione 1.5.** Per conoscere il moto di un generico punto in ogni istante sono necessari tre parametri, le sue tre coordinate. Per quanto appena dimostrato, per conoscere il moto di un corpo rigido, è dunque sufficiente conoscere il moto di tre suoi punti, e quindi conoscere nove coordinate. Per il vincolo di rigidità (1.3) si ha che la distanza fra i tre punti rimane invariata e pertanto le loro coordinate non sono indipendenti ma legate da tre relazioni. Ne consegue che di tali nove parametri solo sei sono indipendenti, e dunque necessari e sufficienti per conoscere in ogni istante la configurazione del corpo  $\mathcal{C}$ . Per tale motivo, si ha che il corpo rigido è un *sistema meccanico a sei gradi di libertà*. Inoltre i sei parametri che di volta in volta vengono scelti per rappresentare il moto del corpo vengono definiti *parametri Lagrangiani*.

### 1.2.1 Gli assi solidali con un corpo rigido

Consideriamo un corpo rigido  $\mathcal{C}$  e un sistema di riferimento cartesiano  $(O, x, y, z)$ , rispetto al quale viene riferito il moto di tale corpo, per convenzione detto *sistema fisso*. Introduciamo un nuovo sistema di riferimento cartesiano  $(O_1, x_1, y_1, z_1)$  solidale con il corpo:  $O_1$  è un punto del corpo e gli assi di tale sistema solidali  $\mathcal{C}$ , sono tale che rispetto a  $(O, x, y, z)$  il corpo risulta fermo. Questo sistema solidale dunque risulta mobile, essendo trascinato dal corpo rigido nel suo moto.

Indicheremo con  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  i versori orientati come gli assi solidali  $x_1, y_1, z_1$ .

**Osservazione 1.6.** Ogni punto  $P$  del corpo avrà coordinate  $(x, y, z)$  rispetto al sistema fisso, le quali saranno variabili nel tempo; invece le coordinate  $(x_1, y_1, z_1)$  di tale punto rispetto al sistema mobile saranno invariabili nel tempo, poichè le distanze dei punti del corpo rigido dai piani coordinati non possono variare con il tempo.

Quello che ora andremo a trovare è una trasformazione di coordinate, la quale ci permetterà di individuare le coordinate  $(x, y, z)$  di un punto  $P \in \mathcal{C}$ , conoscendo la posizione del sistema  $(O_1, x_1, y_1, z_1)$  rispetto a  $(O, x, y, z)$ .

Per tale scopo è necessario conoscere:

1. Le coordinate del punto  $O_1$  rispetto a  $(O, x, y, z)$ , cioè  $O_1 = O_1(t) = (a(t), b(t), c(t))$ ;
2. I coseni direttori delle rette  $O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1$ , ovvero le componenti della base solidale rispetto a quella fissa:  $\vec{i}_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ;  $\vec{j}_1 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ ;  $\vec{k}_1 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ ;

Essendo  $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$  una base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$ , si ha

$$\vec{i}_1 \cdot \vec{i}_1 = \vec{j}_1 \cdot \vec{j}_1 = \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_1 = 1, \quad (1.6)$$

$$\vec{i}_1 \cdot \vec{j}_1 = \vec{i}_1 \cdot \vec{k}_1 = \vec{j}_1 \cdot \vec{k}_1 = 0. \quad (1.7)$$

Da (1.6) ricaviamo

$$\begin{cases} \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0 \\ \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3 = 0 \\ \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0, \end{cases}$$

e, da (1.7) ricaviamo

$$\begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1 \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \end{cases}$$

Quindi abbiamo che i nove coseni direttori si possono esprimere in funzione di tre parametri indipendenti (ad esempio con gli angoli di Eulero). Per il seguente motivo, per determinare la configurazione del sistema solidale del corpo rigido sono necessari e sufficienti sei parametri: le tre coordinate dell'origine  $O_1$  e i tre parametri per i coseni direttori.

Abbiamo ritrovato che per determinare il moto di un corpo rigido occorre conoscere sei parametri Lagrangiani.

Con queste premesse, possiamo determinare le coordinate  $(x, y, z)$  di un generico punto  $P$  del corpo rigido. A partire dalla seguente identità vettoriale:

$$P - O = P - O_1 + O_1 - O. \quad (1.8)$$

Più precisamente, utilizzando le seguenti rappresentazioni

$$\begin{cases} P - O = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ P - O_1 = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1 \\ O_1 - O = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}, \end{cases} \quad (1.9)$$

dalla (1.8) otteniamo

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1 + a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}. \quad (1.10)$$

Moltiplicando scalarmente la (1.10) per  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , si ha

$$\begin{cases} x = a + \alpha_1x_1 + \beta_1y_1 + \gamma_1z_1 \\ y = b + \alpha_2x_1 + \beta_2y_1 + \gamma_2z_1 \\ z = c + \alpha_3x_1 + \beta_3y_1 + \gamma_3z_1. \end{cases}$$

Tali equazioni permettono di determinare le coordinate del generico punto  $P$  rispetto al sistema fisso, a patto di conoscere il moto del punto  $O_1 \in \mathcal{C}$  e la configurazione dei tre assi solidali.

### 1.2.2 Le formule di Poisson

Da quanto visto al punto precedente, per conoscere il moto del corpo rigido, ovvero la sua configurazione ad ogni istante  $t \geq t_0$ , occorre conoscere come variano nel tempo i tre versori solidali  $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$  del sistema mobile, cioè del sistema ancorato al corpo rigido.

Poichè  $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$  sono costanti in modulo, le loro derivate sono perpendicolari agli stessi vettori. Si ha quindi che

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt} \perp \vec{i}_1, \quad \frac{d\vec{j}_1}{dt} \perp \vec{j}_1, \quad \frac{d\vec{k}_1}{dt} \perp \vec{k}_1; \quad (1.11)$$

A questo proposito risulta utile la seguente

**Proposizione 1.7.** *Siano  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$  ortogonali. Allora esiste  $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$  tale che*

$$\vec{b} = \vec{c} \times \vec{a}. \quad (1.12)$$

*Il vettore  $\vec{c}$  non è unico, infatti la componente nella direzione di  $\vec{a}$ ,  $\vec{c} \cdot \vec{a}$ , può essere presa arbitrariamente.*

*Dimostrazione.* Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano  $(O, x, y, z)$  con gli assi  $x$  e  $y$  rispettivamente paralleli e nello stesso verso di  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ . Si ha allora che  $\vec{a} = a\vec{i}$  e  $\vec{b} = b\vec{j}$  con  $a = |\vec{a}|$  e  $b = |\vec{b}|$ . Ponendo  $\vec{c}_0 := \frac{b}{a}\vec{k}$  si ha

$$\vec{c}_0 \times \vec{a} = \frac{b}{a}\vec{k} \times a\vec{i} = b\vec{k} \times \vec{i} = b\vec{j} = \vec{b}.$$

Ciò prova l'esistenza di almeno un vettore  $\vec{C}_0$  che soddisfa la (1.12). È immediato verificare che non è unico. Infatti per ogni  $\vec{h} \in \mathbb{R}^3$  parallelo ad  $\vec{a}$ , sia  $\vec{c} := \vec{c}_0 + \vec{h}$ . Si ha allora

$$\vec{c} \times \vec{a} = (\vec{c}_0 + \vec{h}) \times \vec{a} = \vec{c}_0 \times \vec{a} + \vec{h} \times \vec{a} = \vec{b}.$$

□

Ora enunciamo e dimostriamo "le formule di Poisson".

**Teorema 1.8 (Formule di Poisson).** *Sia  $\mathcal{C}$  un corpo rigido e siano  $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$  i vettori fondamentali di un sistema mobile solidale a tale corpo rigido. Allora  $\exists! \vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$  tale che*

$$\begin{cases} \frac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}_1 \\ \frac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}_1 \\ \frac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}_1. \end{cases} \quad (1.13)$$

*In particolare definiamo  $\vec{\omega}$  vettore di Poisson della terna  $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$  del corpo rigido  $\mathcal{C}$ .*

*Dimostrazione.* Utilizzando la (1.11) e la Proposizione 1.7, otteniamo:

- $\exists \vec{\omega}_1 : \frac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{\omega}_1 \times \vec{i}_1$ , con  $\vec{\omega}_1 \cdot \vec{i}_1$  arbitrario;
- $\exists \vec{\omega}_2 : \frac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{\omega}_2 \times \vec{j}_1$ , con  $\vec{\omega}_2 \cdot \vec{j}_1$  arbitrario;
- $\exists \vec{\omega}_3 : \frac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{\omega}_3 \times \vec{k}_1$ , con  $\vec{\omega}_3 \cdot \vec{k}_1$  arbitrario.

Scegliamo  $\vec{\omega}_1 \cdot \vec{i}_1 = \vec{\omega}_2 \cdot \vec{i}_1$  e  $\vec{\omega}_2 \cdot \vec{j}_1 = \vec{\omega}_1 \cdot \vec{j}_1$ . Con questa scelta si può dimostrare che  $\vec{\omega}_1 \cdot \vec{k}_1 = \vec{\omega}_1 \cdot \vec{k}_1$  e pertanto  $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2$ . Infatti, derivando rispetto al tempo l'equazione  $\vec{i}_1 \cdot \vec{j}_1 = 0$  otteniamo

$$0 = \frac{d(\vec{i}_1 \cdot \vec{j}_1)}{dt} = \frac{d\vec{i}_1}{dt} \cdot \vec{j}_1 + \vec{i}_1 \cdot \frac{d\vec{j}_1}{dt}.$$

Utilizzando la (1.13) abbiamo

$$0 = \vec{\omega}_1 \times \vec{i}_1 \cdot \vec{j}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{j}_1 \cdot \vec{i}_1. \quad (1.14)$$

Ricordiamo ora che in un prodotto misto fra tre vettori si possono scambiare i simboli di prodotto scalare e prodotto vettoriale, ossia

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}, \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3.$$

La (1.14) allora può essere riscritta

$$0 = \vec{\omega}_1 \cdot \vec{i}_1 \times \vec{j}_1 + \vec{\omega}_2 \cdot \vec{j}_1 \times \vec{i}_1$$

e poichè  $\vec{i}_1 \times \vec{j}_1 = \vec{k}_1$ , otteniamo il risultato cercato, e possiamo porre  $\vec{\omega} := \vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2$ .

Infine possiamo scegliere  $\vec{\omega}_3 = \vec{\omega}$ .

Per dimostrare quest'ultima affermazione, poniamo  $\vec{\omega}_3 \cdot \vec{k}_1 = \vec{\omega} \cdot \vec{k}_1$ ; procedendo in modo analogo a quanto fatto precedentemente a partire dalle equazioni  $\vec{i}_1 \cdot \vec{k}_1 = 0$  e  $\vec{j}_1 \cdot \vec{k}_1 = 0$ , otteniamo che

- $\vec{\omega}_3 \cdot \vec{i}_1 = \vec{\omega} \cdot \vec{i}_1$ ;
- $\vec{\omega}_3 \cdot \vec{j}_1 = \vec{\omega} \cdot \vec{j}_1$ ;

Abbiamo in tale modo dimostrato l'esistenza del vettore di Poisson  $\vec{\omega}$ . Infine dimostriamone l'unicità. Supponiamo per assurdo che esista  $\vec{\omega}'$  tale da soddisfare le ipotesi del teorema e tale che  $\vec{\omega}' \neq \vec{\omega}$ . Allora dalla prima di (1.13) supposta valida anche per  $\vec{\omega}'$  si avrà

$$\vec{\omega} \times \vec{i}_1 = \vec{\omega}' \times \vec{i}_1$$

cioè

$$(\vec{\omega} - \vec{\omega}') \times \vec{i}_1 = 0$$

per assurdo abbiamo supposto che  $\vec{\omega} \neq \vec{\omega}'$ , allora  $\vec{\omega} - \vec{\omega}'$  dovrà essere parallelo a  $\vec{i}_1$ .

Procedendo in modo analogo, utilizzando la seconda delle (1.13), otterremo che  $\vec{\omega} - \vec{\omega}'$  dovrà essere parallelo anche a  $\vec{j}_1$ , ma ciò è assurdo, essendo  $\vec{i}_1$  e  $\vec{j}_1$  ortogonali. Quindi dovrà essere  $\vec{\omega} = \vec{\omega}'$ .  $\square$

### 1.3 Moti e stati cinetici del corpo rigido

Prima di definire i moti e gli stati cinetici caratteristici del corpo rigido, andiamo a ricavare la *formula fondamentale della cinematica del corpo rigido*. A tale scopo è opportuno richiamare la notazione di velocità per un generico punto  $P$ , rispetto a un fissato sistema di riferimento  $(O, x, y, z)$ . Più precisamente la velocità di  $P$  all'istante  $t$ , indicata con  $\vec{v}(P)$ , segue dalla seguente derivata temporale

$$\vec{v}(P) = \frac{dP}{dt} = \frac{d(P - O)}{dt}. \quad (1.15)$$

In termini di coordinate cartesiane, posto  $P - O = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , si ha

$$\vec{v}(P) = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}, \quad (1.16)$$

dove  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ,  $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ ,  $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$ .

Analogamente l'accelerazione di  $P$ , denotata  $\vec{a}(P)$ , è definita come la seguente derivata seconda rispetto al tempo

$$\vec{a}(P) = \frac{d^2P}{dt^2} = \frac{d\vec{v}(P)}{dt} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}, \quad (1.17)$$

dove  $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$ ,  $\ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}$ . Sia dato un corpo rigido  $\mathcal{C}$  e sia  $(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$  un sistema solidale associato ad esso. Consideriamo  $P \in \mathcal{C}$  e di tale generico punto vogliamo determinare la velocità. Dalla relazione

$$P - O_1 = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1, \quad (1.18)$$

utilizzando l'identità

$$P - O = (P - O_1) + (O_1 - O)$$

e le formule di Poisson (1.13), otteniamo

$$\begin{aligned}\vec{v}(P) &= \frac{d(P-O)}{dt} = \\ &= \frac{d(P-O_1)}{dt} + \frac{d(O_1-O)}{dt} = \\ &= x_1 \frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1 \frac{d\vec{j}_1}{dt} + z_1 \frac{d\vec{k}_1}{dt} + \frac{dO_1}{dt} = \\ &= x_1 \vec{\omega} \times \vec{i}_1 + y_1 \vec{\omega} \times \vec{j}_1 + z_1 \vec{\omega} \times \vec{k}_1 + \frac{dO_1}{dt}\end{aligned}$$

ovvero

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(O_1) + \vec{\omega} \times (P - O_1). \quad (1.19)$$

La (1.19) è detta **formula fondamentale della cinematica del corpo rigido**. Essa permette di calcolare la velocità di un punto  $P$  del corpo rigido rispetto al sistema di riferimento fisso, conoscendo la velocità di  $O_1$  rispetto a quest'ultimo sistema e il vettore di Poisson  $\vec{\omega}$ . È facile dimostrare che il vettore  $\vec{\omega}$  è indipendente dalla scelta del sistema di riferimento solidale con  $\mathcal{C}$ , e viene detto pertanto *vettore di Poisson del corpo rigido  $\mathcal{C}$* . Per i dettagli si veda [2].

### 1.3.1 Moto di traslazione

**Definizione 1.9.** *Si dice che in un intervallo di tempo  $[t_1, t_2]$  un corpo rigido  $\mathcal{C}$  si muove di moto di traslazione se e solo se tutti i punti del corpo hanno velocità uguale a quella del punto  $O_1$ , cioè*

$$\forall t \in [t_1, t_2] : \vec{v}(P) = \vec{v}(O_1), \quad \forall P, O_1 \in \mathcal{C}. \quad (1.20)$$

**Proposizione 1.10.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché il moto sia di traslazione è che*

$$\vec{\omega}(t) = 0, \quad \forall t \in [t_1, t_2]. \quad (1.21)$$

*Dimostrazione.* Supponendo che il moto sia di traslazione, confrontando (1.19) e (1.20) otteniamo che

$$\vec{\omega} \times (P - O_1) = 0, \quad \forall P, O_1 \in \mathcal{C}.$$

Scegliamo  $P, O_1 \in \mathcal{C} : P - O_1 \neq 0$  e  $P - O_1$  non sia parallelo a  $\vec{\omega}$ . Allora si ha necessariamente  $\vec{\omega} = 0$ .

Viceversa se  $\vec{\omega} = 0$  dalla (1.19) si ha banalmente la (1.20). □

**Definizione 1.11.** *Se (1.20) è soddisfatta in un certo istante  $t \in \mathbb{R}$ , si dice che in quell'istante il corpo rigido  $\mathcal{C}$  passa per uno stato cinetico di traslazione.*



### 1.3.2 Moto di rotazione

**Definizione 1.12.** Si dice che in un intervallo di tempo  $[t_1, t_2]$  un corpo rigido  $\mathcal{C}$  si muove di moto di rotazione se e solo se esistono due punti  $A$  e  $B$  del corpo, i quali restano fissi durante il moto, cioè

$$\forall t \in [t_1, t_2], \quad \exists A, B \in \mathcal{C} : v(\vec{A}) = v(\vec{B}) = 0. \quad (1.22)$$

**Osservazione 1.13.** Nel moto di rotazione, se  $A$  e  $B$  sono fissi per il vincolo di rigidità tutta la retta  $AB$  è fissa e quest'ultima viene definita **asse di rotazione** e verrà indicata con  $r$ ; quindi i punti del corpo rigido ruotano intorno a tale retta.

Ora vogliamo vedere come la legge fondamentale della cinematica rigida (1.19) si semplifica nel caso di rotazione. Poichè  $O_1$  può essere scelto in modo arbitrario, prendiamo  $O_1 \in r$  in modo che  $\vec{v}(O_1) = 0$ . Sostituendo tale risultato in (1.19), otteniamo che

$$\vec{v}(P) = \vec{\omega} \times (P - O_1), \quad \forall P \in \mathcal{C}. \quad (1.23)$$

**Proposizione 1.14.** Nel moto di rotazione  $\vec{\omega}$  è parallelo all'asse di rotazione  $r$ .

*Dimostrazione.* Prendiamo  $P \in r$  tale che  $\vec{v}(P) = 0$  e  $P \neq O_1$ . Sostituiamo tale risultato in (1.23) ed otteniamo

$$\vec{\omega} \times (P - O_1) = 0, \quad \forall P \in r.$$

Allora dovrà essere  $\vec{\omega}$  parallelo a  $(P - O_1)$  e pertanto alla retta  $r$ . □

**Proposizione 1.15.** Condizione necessaria e sufficiente affinché il moto sia di rotazione è che esiste un punto  $O_1 \in \mathcal{C}$  tale che

$$v(\vec{P}) = \vec{\omega} \times (P - O_1), \quad \forall P \in \mathcal{C}, \quad (1.24)$$

o equivalentemente se e solo se  $\exists O_1 \in \mathcal{C}$  tale che

$$v(\vec{O}_1) = 0.$$

*Dimostrazione.* La condizione necessaria è già stata verificata (prendendo  $O_1 \in r$ ).

Per la condizione sufficiente, prendiamo  $r$  passante per  $O_1$  e parallela a  $\vec{\omega}$ . Allora si ha che

$$\forall P \in r, \quad \vec{v}(P) = \vec{\omega} \times (P - O_1) = 0,$$

essendo  $\vec{\omega}$  parallelo a  $r$  e quindi a  $(P - O_1)$ . □

**Osservazione 1.16.** Siamo passati dalla definizione (1.23), per la quale è sufficiente che vi siano due punti fissi alla seguente proposizione, nella quale è richiesto che vi sia un solo punto fisso.

**Definizione 1.17.** *Se (1.23) è soddisfatta in un certo istante  $t \in \mathbb{R}$ , si dice che in quell'istante il corpo rigido  $\mathcal{C}$  passa per uno **stato cinetico di rotazione**.*

### 1.3.3 Moto di rototraslazione

**Definizione 1.18.** *Si dice che in un intervallo di tempo  $[t_1, t_2]$  il corpo rigido  $\mathcal{C}$  si muove di moto di rototraslazione se esiste una retta  $l$  solidale al corpo, la quale scorre su una retta  $l_1$  fissa nello spazio, cioè quando esiste almeno una retta solidale al corpo che, durante il moto, scorre su se stessa. Chiamiamo tale retta **asse di rototraslazione**.*

**Proposizione 1.19.** *Nel moto di rototraslazione la velocità di un punto  $P$  del corpo è la somma di una velocità di un moto di traslazione  $\vec{v}_1$  con una velocità di un moto di rotazione con velocità angolare  $\vec{\omega}$  parallela a  $\vec{v}(O_1)$ , cioè*

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(O_1) + \vec{\omega} \times (P - O_1). \quad (1.25)$$

**Definizione 1.20.** *Se (1.25) è soddisfatta in un certo istante  $t \in \mathbb{R}$ , si dice che in quell'istante il corpo rigido  $\mathcal{C}$  passa per uno **stato cinetico di rototraslazione**.*

Concludiamo questo capitolo ricordando l'importante Teorema di Mozzi, per la cui dimostrazione, così come quella della Proposizione 1.25, si rinvia a [2].

**Teorema 1.21** (di Mozzi). *Ad ogni istante un corpo rigido passa per uno stato cinetico di rototraslazione, che può ridursi in particolare ad una pura traslazione, se  $\vec{\omega} = 0$ , o a una pura rotazione.*

## Capitolo 2

# Il momento e l'ellissoide d'inerzia

Consideriamo, per semplicità, un corpo rigido  $\mathcal{C}$  costituito da  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  aventi rispettivamente masse  $m_1, \dots, m_N$  e velocità  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N$ . Tutte le definizioni e i teoremi dati potranno essere estesi facilmente al caso di un corpo rigido formato da infiniti punti. In particolare alcune definizioni e teoremi potranno essere applicati a un sistema meccanico qualunque, ma per il nostro fine ultimo, consideriamo sempre un corpo rigido.

### 2.1 La quantità di moto, il momento della quantità di moto e l'energia cinetica di un corpo rigido

**Definizione 2.1.** *Definiamo la quantità di moto del corpo rigido  $\mathcal{C}$  come il vettore*

$$\vec{Q} = \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s. \quad (2.1)$$

*Dato  $O \in \mathbb{R}^3$ , definiamo il momento delle quantità di moto del corpo rigido  $\mathcal{C}$  rispetto a  $O$  (o momento angolare) come il vettore*

$$\vec{K}(O) = \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \times (O - P_s). \quad (2.2)$$

*L'energia cinetica del corpo rigido  $\mathcal{C}$  è definita come la quantità*

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s v_s^2. \quad (2.3)$$

**Definizione 2.2.** Si chiama *baricentro* o *centro di massa* del corpo rigido  $\mathcal{C}$ , il punto  $G$  individuato da

$$G - O = \frac{1}{M} \sum_{s=1}^N m_s (P_s - O), \quad (2.4)$$

con  $M = \sum_{s=1}^N m_s$  è la massa totale del corpo  $\mathcal{C}$ .

Consideriamo le formule (2.1), (2.2), (2.3) nel caso particolare in cui il corpo rigido  $\mathcal{C}$  passa per uno stato cinetico di traslazione. In tale situazione si ha, dalla (1.20), che tutti i punti hanno la stessa velocità  $\vec{v}$ . Allora otteniamo

$$\begin{aligned} \vec{Q} &= \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s = M\vec{v}, \\ \vec{K}(O) &= \vec{v} \times \sum_{s=1}^N m_s (O - P_s) = \vec{v} \times M(O - G), \\ T &= \sum_{s=1}^N \frac{m_s v_s^2}{2} = \frac{1}{2} M v^2. \end{aligned}$$

Ottenuti tali risultati, andiamo ad enunciare e dimostrare una proposizione, la quale ci fornisce un importante risultato sulla quantità di moto di un corpo rigido  $\mathcal{C}$ .

**Proposizione 2.3.** Si ha

$$\vec{Q} = M\vec{v}_G,$$

dove  $\vec{v}_G$  è la velocità del baricentro  $G$ .

*Dimostrazione.* Derivando la (2.4) si ottiene immediatamente

$$\sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s = M\vec{v}_G,$$

ovvero, dalla (2.1)  $\vec{Q} = M\vec{v}_G$ . □

**Osservazione 2.4.** La quantità di moto del corpo rigido  $\mathcal{C}$  è uguale alla massa totale di tale corpo per la velocità del rispettivo baricentro, cioè la quantità di moto che il corpo avrebbe se tutta la massa del corpo fosse concentrata nel baricentro.

**Definizione 2.5.** Si chiama momento delle quantità di moto  $K_z$  del corpo rigido  $\mathcal{C}$  rispetto a un'asse, che si può sempre fare coincidere con l'asse  $z$ , la proiezione del momento rispetto a un punto dell'asse sull'asse stesso, cioè

$$K_z = \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \times (O - P_s) \cdot \vec{k}. \quad (2.5)$$

Infine enunciamo e dimostriamo un importante risultato il teorema di König, che vale per un qualunque sistema meccanico, la cui energia cinetica è definita sempre dalla (2.3) come nel caso del corpo rigido. Nel paragrafo seguente, tale teorema verrà applicato nel caso particolare di corpo rigido.

**Teorema 2.6** (Teorema di König). Per un qualunque sistema meccanico si ha

$$T = \frac{1}{2} M v_G^2 + T_G, \quad (2.6)$$

dove  $T_G$  è l'energia cinetica del corpo rispetto al sistema di riferimento baricentrico, avente origine in  $G$  e tale da traslare rispetto al sistema fisso  $(O, x, y, z)$ .

*Dimostrazione.* Indichiamo brevemente con  $(O)$  il sistema fisso  $(O, x, y, z)$  e con  $(G)$  il sistema di riferimento baricentrico. Inoltre useremo la seguente notazione

- $\vec{v}_s$ : velocità di  $P_s$  rispetto a  $(O)$ ,  $\forall s = 1, \dots, N$
- $\vec{v}_{1s}$ : velocità di  $P_s$  rispetto a  $(G)$ ,  $\forall s = 1, \dots, N$ .

Si avrà allora

$$T_G = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s v_{1s}^2. \quad (2.7)$$

Per stabilire la relazione fra la "velocità assoluta"  $\vec{v}_s$  e la "velocità relativa"  $\vec{v}_{1s}$  del generico punto  $P_s$ , ricordiamo la formula di composizione della velocità nella cinematica relativa del punto (per i dettagli si veda [2]). In particolare si ha

$$\vec{v}_s = \vec{v}_{1s} + \vec{v}_{\tau s}, \quad \forall s = 1, \dots, N \quad (2.8)$$

dove  $\vec{v}_{\tau s}$  è la "velocità di trascinamento" di  $P_s$ , ovvero la velocità che  $P_s$  avesse se fosse rigidamente connesso al sistema baricentrico  $(G)$  e da esso trascinato nel suo moto. Poichè  $(G)$  trasla, dalla Definizione 1.9 segue che tutti i punti vincolati con  $(G)$  hanno tutti la stessa velocità. Pertanto si avrà

$$\vec{v}_{\tau s} = \vec{v}_G, \quad s = 1, \dots, N$$

e la (2.8) potrà essere riscritta come

$$\vec{v}_s = \vec{v}_{1s} + \vec{v}_G, \quad \forall s = 1, \dots, N. \quad (2.9)$$

Combinando la (2.3) con la (2.9) otteniamo

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \cdot \vec{v}_s \\ &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s (\vec{v}_{1s} + \vec{v}_G) \cdot (\vec{v}_{1s} + \vec{v}_G) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s v_{1s}^2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s v_G^2 + \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_{1s} \cdot \vec{v}_G \\ &= T_G + \frac{1}{2} M v_G^2 + \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_{1s} \cdot \vec{v}_G. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Osserviamo che la sommatoria nell'ultimo membro di (2.10) rappresenta la quantità di moto  $\vec{Q}_1 = \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_{1s}$  del corpo rispetto al sistema  $(G)$ . Dalla Proposizione 2.3 si ha che  $\vec{Q}_1 = M \vec{v}_{1G}$ , dove  $\vec{v}_{1G} = 0$ , essendo la velocità di  $G$  rispetto al sistema baricentrico. Dalla (2.10) si ha quindi

$$T = \frac{1}{2} M v_G^2 + T_G.$$

□

**Osservazione 2.7.** L'energia cinetica di un corpo vale l'energia cinetica che esso avrebbe se la massa fosse tutta concentrata nel baricentro, sommata con l'energia cinetica del corpo rispetto al baricentro.

## 2.2 Il momento d'inerzia

Per il calcolo delle grandezze dinamiche introdotte nel paragrafo precedente risultata fondamentale la nozione di momento d'inerzia che ora andiamo a introdurre.

**Definizione 2.8.** Si dice momento d'inerzia  $J$  di un corpo rigido  $\mathcal{C}$  rispetto ad un asse, la somma dei prodotti delle singole masse dei punti del corpo per i quadrati della loro distanza dall'asse stesso, cioè

$$J = \sum_{s=1}^N m_s (r_s)^2, \quad (2.11)$$

essendo  $r_s$  la distanza di  $P_s$  dall'asse,  $\forall s = 1, \dots, N$ .

**Osservazione 2.9.**  $J$  è una quantità sempre maggiore o uguale a zero.

Sia dato un corpo rigido  $\mathcal{C}$  nell'istante in cui passa per uno stato cinetico di rotazione, con velocità angolare  $\vec{\omega}$ , intorno a un certo asse. La distanza  $r_s$  di un punto  $P_s$  del corpo dall'asse di rotazione si mantiene costante, per il vincolo di rigidità. In particolare avremo che  $\overline{P_s M} = r_s$ , dove  $M$  è il centro della circonferenza percorsa da  $P_s$ . Allora uguagliando i moduli di (1.24) e facendo coincidere  $O_1$  con  $M$ , avremo che  $v_s = \omega r_s$ .

Considerando (2.3) e (2.11), l'energia cinetica del corpo rigido  $\mathcal{C}$  vale

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s v_s^2 = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s \omega^2 r_s^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{s=1}^N m_s r_s^2 = \frac{1}{2} J \omega^2, \quad (2.12)$$

cioè l'energia cinetica di un corpo rigido in uno stato cinetico di rotazione vale il semiprodotto del momento d'inerzia, rispetto all'asse di rotazione, per il quadrato della velocità angolare.

Ora possiamo applicare il Teorema di König al caso particolare di un corpo rigido  $\mathcal{C}$  in un generico stato cinetico di rototraslazione. Infatti, poichè il sistema baricentrico ha origine nel baricentro  $G$  del corpo, rispetto a tale sistema  $G$  è fisso e pertanto lo stato cinetico di  $\mathcal{C}$  rispetto a  $(G)$  è di rotazione. Per quanto appena ottenuto, l'energia cinetica  $T_G$  rispetto a  $(G)$  sarà dunque del tipo

$$T_G = \frac{1}{2} J_G \omega^2, \quad (2.13)$$

essendo  $\vec{\omega}$  il vettore di Poisson e  $J_G$  il momento d'inerzia di  $\mathcal{C}$  rispetto all'asse istantaneo di rotazione passante per  $G$ , rispetto a  $(G)$ .

Possiamo così riassumere il risultato ottenuto nel seguente

**Corollario 2.10.** *Per l'energia cinetica di un corpo rigido in moto generico si ha*

$$T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} J_G \omega^2,$$

*ossia l'energia cinetica di un corpo rigido vale l'energia cinetica che esso avrebbe se fosse tutto concentrato nel baricentro, sommata con l'energia cinetica di rotazione intorno al baricentro stesso.*

## 2.3 L'ellissoide d'inerzia

In questo paragrafo consideriamo un corpo rigido  $\mathcal{C}$  con un punto fisso  $O$ , allora dalla proposizione (1.15), si ha che tale corpo passa in ogni istante per uno stato cinetico di rotazione. La sua energia cinetica sarà rappresentata da (2.12). Quello che ora andremo a mostrare, sono una

serie di risultati, i quali ci permetteranno di calcolare  $J$  in un modo più agevole rispetto alla definizione.

Siano  $(x_s, y_s, z_s), \forall s = 1, \dots, N$  le coordinate del generico punto  $P_s$  rispetto a un sistema cartesiano con origine in  $O$  e  $(v_{sx}, v_{sy}, v_{sz})$  quelle della sua velocità  $\vec{v}_s$ ; siano inoltre  $(p, q, r)$  le componenti del vettore  $\vec{\omega}$  rispetto allo stesso sistema.

Usando la formula fondamentale della cinematica del corpo rigido (1.24) poichè  $O$  è fisso, otteniamo con opportuni calcoli, che le componenti della velocità del punto  $P_s$  sono:

$$\begin{cases} v_{sx} = qz_s - ry_s \\ v_{sy} = rx_s - pz_s \\ v_{sz} = py_s - qx_s. \end{cases}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} v_s^2 &= v_{sx}^2 + v_{sy}^2 + v_{sz}^2 = (qz_s - ry_s)^2 + (rx_s - pz_s)^2 + (py_s - qx_s)^2 = \\ &= p^2(y_s^2 + z_s^2) + q^2(x_s^2 + z_s^2) + r^2(x_s^2 + y_s^2) - 2pqx_sy_s - 2prx_sz_s - 2qry_sz_s. \end{aligned}$$

Allora per (2.3), l'energia cinetica del corpo rigido vale

$$T = \frac{1}{2} \left[ \sum_{s=1}^N m_s p^2 (y_s^2 + z_s^2) + \sum_{s=1}^N m_s q^2 (x_s^2 + z_s^2) + \sum_{s=1}^N m_s r^2 (x_s^2 + y_s^2) - \right. \\ \left. - 2pq \sum_{s=1}^N m_s x_s y_s - 2pr \sum_{s=1}^N m_s x_s z_s - 2qr \sum_{s=1}^N m_s y_s z_s \right]$$

e, posto

$$\begin{aligned} A &= \sum_{s=1}^N m_s (y_s^2 + z_s^2), & B &= \sum_{s=1}^N m_s (x_s^2 + z_s^2), & C &= \sum_{s=1}^N m_s (x_s^2 + y_s^2); \\ A' &= \sum_{s=1}^N m_s x_s y_s, & B' &= \sum_{s=1}^N m_s x_s z_s, & C' &= \sum_{s=1}^N m_s y_s z_s, \end{aligned}$$

otteniamo

$$T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2A'pq - 2B'pr - 2C'qr). \quad (2.14)$$

**Osservazione 2.11.** La (2.14) consente di calcolare l'energia cinetica di un corpo rigido con punto fisso a patto di conoscere i sei parametri  $A, B, C, A', B', C'$ . Il significato dei primi tre ( $A, B, C$ ) è evidente dalla Definizione (2.14), essendo rispettivamente i momenti d'inerzia do



$\mathcal{C}$  rispetto ai tre assi coordinati  $x, y, z$ . I restanti tre  $(A', B', C')$  vengono detti momenti di deviazione o centrifughi (o anche prodotti d'inerzia) rispetto agli assi  $xy, xz$  e  $yz$ .

I sei suddetti parametri dipendono dalla forma del corpo, dalla disposizione delle masse e dalla posizione degli assi, ma non dal moto del corpo stesso.

Confrontando ora (2.12) e (2.14) si ha

$$J\omega^2 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2A'pq - 2B'pr - 2C'qr.$$

Indicando con  $\alpha, \beta, \gamma$  i coseni che  $\vec{\omega}$  forma con gli assi coordinati, si ottiene  $p = \omega\alpha, q = \omega\beta, r = \omega\gamma$ , da cui

$$J = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2A'\alpha\beta - 2B'\alpha\gamma - 2C'\beta\gamma. \quad (2.15)$$

**Osservazione 2.12.** Per quanto affermato nel capitolo precedente, data una retta passante per  $O$  di coseni direttori  $\alpha, \beta, \gamma$  rispetto agli assi  $(O, x, y, z)$ , si può sempre ottenere uno stato cinetico di rotazione con asse istantaneo coincidente con quella retta. La (2.15) esprime, mediante solo sei costanti  $A, B, C, A', B', C'$ , il momento d'inerzia del corpo rispetto a un qualunque asse passante per un punto  $O$  e determinato dai suoi coseni direttori.

### 2.3.1 Interpretazione geometrica

In questo paragrafo daremo un'interpretazione geometrica della (2.15) introducendo l'*ellissoide d'inerzia*.

Iniziamo definendo la matrice d'inerzia associata al corpo rigido  $\mathcal{C}$  con centro fisso  $O$  e considerandone le proprietà principali.

**Definizione 2.13.** Si definisce matrice d'inerzia del corpo rigido  $\mathcal{C}$  relativa al punto fisso  $O$  la seguente matrice

$$I = \begin{bmatrix} A & -C' & -B' \\ -C' & B & -A' \\ -B' & -A' & C \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

**Osservazione 2.14.** La matrice d'inerzia è simmetrica e definita positiva, quindi tale matrice risulterà essere diagonalizzabile, avrà autovalori reali positivi e gli autovettori determineranno una base di  $\mathbb{R}^3$ .

Ad ogni matrice simmetrica definita positiva è possibile associare una quadrica il cui centro coincide con l'origine degli assi ai quali si riferisce la matrice, come segue:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2A'xy - 2B'xz - 2C'yz = 1. \quad (2.17)$$

Si intersechi la quadrica con la retta  $r$  passante per l'origine e di coseni direttori  $\alpha, \beta, \gamma$ , la quale avrà equazione

$$\begin{cases} x = \alpha u \\ y = \beta u \\ z = \gamma u \end{cases}, \quad (2.18)$$

dove  $u$  è un parametro reale.

Sostituendo tale retta (2.18) in (2.17), otterremo i valori di  $u$  per cui la retta interseca tale superficie; ricordando la (2.15), avremo che

$$\begin{aligned} 1 &= Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2A'xy - 2B'xz - 2C'yz = \\ &= A\alpha^2 u^2 + B\beta^2 u^2 + C\gamma^2 u^2 - 2A'\alpha\beta u^2 - 2B'\alpha\gamma u^2 - 2C'\beta\gamma u^2 = \\ &= Ju^2. \end{aligned}$$

da cui otteniamo che

$$u = \pm \frac{1}{\sqrt{J}}. \quad (2.19)$$

Quindi la retta  $r$  interseca la superficie in due punti  $L = (\frac{\alpha}{\sqrt{J}}, \frac{\beta}{\sqrt{J}}, \frac{\gamma}{\sqrt{J}})$  e  $L_1 = (-\frac{\alpha}{\sqrt{J}}, -\frac{\beta}{\sqrt{J}}, -\frac{\gamma}{\sqrt{J}})$ .

**Osservazione 2.15.** I punti  $L$  e  $L_1$  sono opposti rispetto al punto fisso  $O$ .

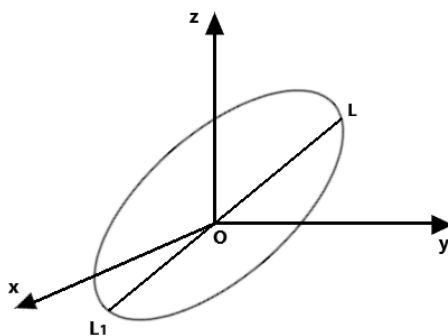


Figura 2.1: Ellissoide centrato in  $O$

Calcoliamo la distanza  $\overline{OL}$ , cioè la distanza di  $L$  e  $L_1$  dall'origine  $O$ . Si ha che

$$\overline{OL} = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{J}} = \frac{1}{\sqrt{J}}. \quad (2.20)$$

**Osservazione 2.16.** Dall'osservazione (2.9) si ha che  $J$  è sempre positivo, quindi qualunque siano  $\alpha, \beta, \gamma$ , si ha che  $\overline{OL}$  è sempre definito. La quadrica non ha punti d'infinito ed è pertanto un ellissoide.

**Definizione 2.17.** (2.17) *si definisce ellissoide d'inerzia rispetto al punto  $O$ .*

Quindi per quando ottenuto fino ad ora, abbiamo che un semidiametro dell'ellissoide d'inerzia vale l'inverso della radice quadrata del momento d'inerzia rispetto al semidiametro stesso. Perciò l'ellissoide d'inerzia rappresenta geometricamente i momenti d'inerzia di un corpo rispetto ad assi concorrenti nello stesso punto.

Mediante un'opportuna trasformazione geometrica, è possibile riferire l'ellissoide d'inerzia relativo al punto  $O$  ai suoi assi, i quali definiremo *assi principali d'inerzia* rispetto ad  $O$ . I termini in  $xy, yz, zx$  saranno tali da scomparire e l'ellissoide avrà equazione

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 \quad (2.21)$$

e la matrice d'inerzia del corpo rigido  $\mathcal{C}$  relativa al punto fisso  $O$  sarà del tipo

$$I = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

In questo caso i parametri  $A, B, C$  sono detti momenti principali d'inerzia, mentre i momenti di deviazione rispetto agli assi principali sono nulli ( $A' = B' = C' = 0$ ).

Inoltre da (2.14) otteniamo che l'energia cinetica del corpo rigido, è data da

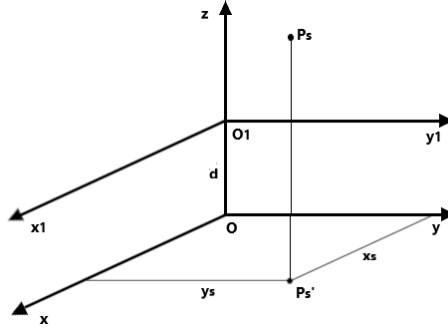
$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2). \quad (2.23)$$

**Osservazione 2.18.** Per quanto detto, l'ellissoide d'inerzia di un corpo rigido  $\mathcal{C}$  dipende dalla scelta dell'origine  $O$  degli assi dell'ellissoide, allora si avrà che un asse principale di inerzia rispetto a uno dei suoi punti non lo sarà rispetto ad altri punti.

A tale proposito enunciamo e dimostriamo il seguente

**Teorema 2.19.** *Una retta è asse principale di inerzia rispetto a tutti i suoi punti se e solo se la retta contiene il baricentro  $G$  del corpo.*

*Dimostrazione.* Sia  $z$  la retta in esame e siano  $O$  e  $O_1$  due suoi punti. Introduciamo due sistemi di riferimento  $(O, x, y, z)$  e  $(O_1, x_1, y_1, z_1)$  tali che l'asse  $z_1$  sia coincidente con  $z$ ,  $x$  e  $y$  paralleli rispettivamente a  $x_1$  e  $y_1$ ; sia  $d$  la distanza tra  $O$  e  $O_1$ , come nella Figura 2.2.

Figura 2.2: Due sistemi di riferimento centrati in  $O$  e  $O_1$ 

Allora avremo che

$$\begin{cases} x_s = x_{1s} \\ y_s = y_{1s} \\ z_s = z_{1s} + d \end{cases}, \quad (2.24)$$

dove  $(x_s, y_s, z_s)$  sono le coordinate di un punto  $P_s$  del corpo,  $\forall s = 1, \dots, N$ , rispetto al sistema  $(O, x, y, z)$  e analogamente  $(x_{1s}, y_{1s}, z_{1s})$  rispetto a  $(O_1, x_1, y_1, z_1)$ .

Indichiamo con  $B'$  e  $C'$ ,  $B_1'$  e  $C_1'$  i momenti di deviazione rispetto a  $xy, yz, x_1z_1$  e  $y_1z_1$ . Dalla formula del baricentro (2.4), si ha direttamente che le componenti di esso rispetto gli assi  $x$  e  $y$  sono rispettivamente

$$x_G = \frac{1}{M} \sum_{s=1}^N m_s x_s \quad \text{e} \quad y_G = \frac{1}{M} \sum_{s=1}^N m_s y_s.$$

Si ottiene pertanto

$$B' = \sum_{s=1}^N m_s x_s z_s = \sum_{s=1}^N m_s x_s (z_{1s} + d) = \sum_{s=1}^N m_s x_{1s} z_{1s} + d \sum_{s=1}^N m_s x_s = B_1' + M x_G d, \quad (2.25)$$

$$C' = \sum_{s=1}^N m_s y_s z_s = \sum_{s=1}^N m_s y_s (z_{1s} + d) = \sum_{s=1}^N m_s z_{1s} y_{1s} + d \sum_{s=1}^N m_s y_s = C_1' + M y_G d. \quad (2.26)$$

Supponiamo ora che  $z$  sia asse principale d'inerzia per tutti i suoi punti. Allora si deve avere che  $B' = B_1' = 0$  e  $C' = C_1' = 0$ . Da (2.25) e (2.26) si ha che  $x_G = 0$  e  $y_G = 0$ , quindi il baricentro si trova sull'asse  $z$ .

Viceversa se il baricentro si trova sull'asse  $z$ , il quale è l'asse principale d'inerzia rispetto al punto  $O$ , si ha che  $B' = C' = 0$  e  $x_G = y_G = 0$ , da cui  $B_1' = C_1' = 0$ . Pertanto l'asse  $z$  è principale d'inerzia anche per qualunque altro suo punto  $O_1$ .  $\square$

### 2.3.2 Il momento della quantità di moto e l'energia cinetica

L'obiettivo di questo paragrafo è quello di ottenere una nuova espressione per il momento della quantità di moto di un corpo rigido con un punto fisso  $O$ , utile nelle applicazioni successive. In modo coerente con le notazioni dei paragrafi precedenti, ricordiamo che la velocità  $\vec{v}(s)$  del punto  $P_s$  è data da

$$\vec{v}_s = \vec{\omega} \times (P_s - O) = (p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}) \times (P_s - O), \quad \forall s = 1, \dots, N. \quad (2.27)$$

Deriviamo parzialmente la (2.27) rispetto a  $r$  ed otteniamo

$$\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial r} = \vec{k} \times (P_s - O). \quad (2.28)$$

Ricordando la formula dell'energia cinetica (2.3), derivandola rispetto alla variabile  $r$  ed usando (2.28), si ottiene:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \cdot \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial r} = \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \cdot \vec{k} \times (P_s - O) = \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \times (O - P_s) \cdot \vec{k}$$

dalla quale, ricordando la (2.5) e la (2.2), si ha l'espressione finale

$$K_z = \frac{\partial T}{\partial r}, \quad (2.29)$$

che esprime la componente del momento angolare  $\vec{K}(O)$  lungo l'asse  $z$ .

Procedendo in modo analogo, ma scambiando  $z$  con  $x$  e  $y$ , si ottengono analogamente  $K_x$  e  $K_y$ .

In sintesi le componenti di  $\vec{K}(O)$  sono date da

$$\begin{cases} K_x = \frac{\partial T}{\partial p} \\ K_y = \frac{\partial T}{\partial q} \\ K_z = \frac{\partial T}{\partial r}. \end{cases} \quad (2.30)$$

**Osservazione 2.20.** Le componenti del momento della quantità di moto di un corpo rigido lungo gli assi, sono le derivate parziali dell'energia cinetica rispetto alle componenti della velocità angolare lungo gli assi.

Applicando (2.30) a (2.14), si ha

$$\begin{cases} K_x = Ap - A'q - B'r \\ K_y = -A'p + Bq - C'r \\ K_z = -B'p - C'q + Cr. \end{cases} \quad (2.31)$$

In particolare, se  $x, y, z$  coincidono con gli assi principali d'inerzia, per quanto affermato nel paragrafo precedente, si ha che i momenti centrifughi sono nulli, e allora le (2.31) possono essere così riscritte

$$\begin{cases} K_x = Ap \\ K_y = Bq \\ K_z = Cr. \end{cases} \quad (2.32)$$

Se supponiamo inoltre che  $\vec{\omega}$ , che sappiamo avere la direzione dell'asse di rotazione del corpo, sia parallelo all'asse principale d'inerzia  $z$ , allora avremo che  $p = q = 0$ , quindi  $\vec{\omega} = r\vec{k}$  e  $K_x = K_y = 0, K_z = Cr$ . Indicando con  $J$  il momento d'inerzia  $C$  rispetto all'asse di rotazione, avremo che

$$\vec{K} = J\vec{\omega}. \quad (2.33)$$

**Osservazione 2.21.** Quindi, quando l'asse istantaneo di rotazione è parallelo ad un asse principale di inerzia, il momento della quantità di moto di un corpo è parallelo alla velocità angolare, in particolare vale tale vettore moltiplicato per il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione.

Infine otteniamo una nuova espressione dell'energia cinetica del corpo rigido  $\mathcal{C}$ . Utilizzando (2.23) e (2.32), avremo il seguente risultato

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \\ &= \frac{1}{2}(K_x p + K_y q + K_z r) = \\ &= \frac{1}{2}\vec{K} \cdot \vec{\omega}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

## 2.4 Il teorema di Huygens

Infine concludiamo il presente capitolo con un teorema molto importante, il quale ci permette di esprimere la relazione che vi è tra i momenti di inerzia relativi ad assi paralleli. In particolare si ha che il seguente teorema vale per un qualunque corpo e non solo per un corpo rigido.

**Teorema 2.22** (Teorema di Huygens). *Il momento di inerzia  $J$  di un corpo rispetto ad un asse vale il momento di inerzia  $J_G$  rispetto ad un asse parallelo passante per il baricentro, sommato con il momento di inerzia, rispetto al primitivo asse, di tutta la massa  $M$  del corpo concentrata nel baricentro, cioè*

$$J = J_G + Md^2, \quad (2.35)$$

dove  $d$  è la distanza fra i due assi.

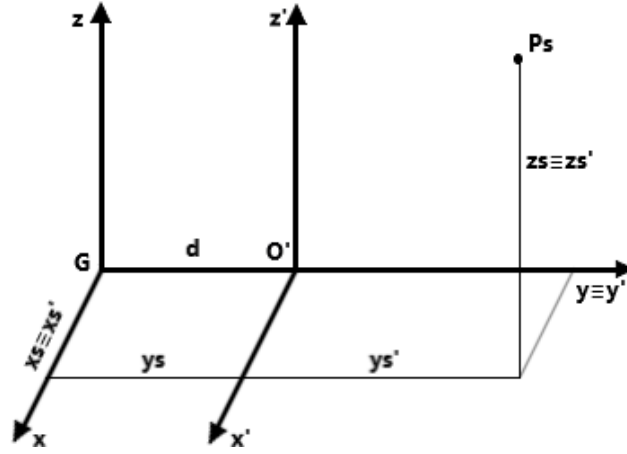


Figura 2.3: Due sistemi di riferimento, di cui uno centrato nel baricentro G

*Dimostrazione.* Consideriamo due sistemi di riferimento  $(O, x, y, z)$  e  $(O', x', y', z')$  tali che  $O$  coincide con il baricentro  $G$  e gli assi  $z$  e  $z'$  sono paralleli e coincidenti rispettivamente con le due rette rispetto a cui si calcolano  $J_G$  e  $J$ . Inoltre prendiamo  $x$  e  $x'$  paralleli, e  $y$  coincidente con  $y'$ , come in Figura 2.3. Allora avremo che le coordinate  $(x_s, y_s, z_s)$  e  $(x'_s, y'_s, z'_s)$  di un punto  $P_s$  del corpo,  $\forall s = 1, \dots, N$ , soddisfano le relazioni

$$\begin{cases} x_s = x'_s \\ y_s = y'_s + d \\ z_s = z'_s. \end{cases}$$

Il momento d'inerzia  $J$  rispetto all'asse  $z'$  sarà allora dato da

$$\begin{aligned} J &= \sum_{s=1}^N m_s (x_s'^2 + y_s'^2) = \\ &= \sum_{s=1}^N m_s [x_s^2 + (y_s - d)^2] = \\ &= \sum_{s=1}^N m_s (x_s^2 + y_s^2) + d^2 \sum_{s=1}^N m_s - 2d \sum_{s=1}^N m_s y_s. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Poichè  $O \equiv G$  e dalla definizione di baricentro (2.4) si ricava che  $M y_G = \sum_{s=1}^N m_s y_s$ , si ha che l'ultimo termine di (2.36) è nullo; inoltre il primo termine è il momento d'inerzia rispetto all'asse

z. Si ha dunque

$$J = J_G + Md^2,$$

come enunciato. □

**Osservazione 2.23.** Dal teorema di Huygens si ha direttamente che  $J > J_G$ , poichè  $Md^2 > 0$ . Tale osservazione ci mostra che il minimo momento di inerzia rispetto a un fascio di assi paralleli è quello dell'asse baricentrico.

**Definizione 2.24.** *Si chiama ellissoide centrale d'inerzia di un corpo quello relativo al suo baricentro.*

**Osservazione 2.25.** Noto l'ellissoide centrale di inerzia di un corpo è noto il momento di inerzia del corpo rispetto ad un qualunque asse dello spazio. Infatti con l'ellissoide centrale si riesce a determinare il momento di inerzia rispetto ad un qualsiasi asse baricentrico ed applicando infine il teorema di Huygens si ottiene il momento di inerzia rispetto ad un qualunque asse non baricentrico.



## Capitolo 3

# Le equazioni cardinali della dinamica e le equazioni di Eulero

L'obiettivo di questo capitolo è quello di enunciare e dimostrare le equazioni cardinali della dinamica e le equazioni di Eulero. L'importanza di queste equazioni è di semplificare la descrizione del moto di un sistema meccanico. In particolare mediante le condizioni iniziali, che determinano la posizione e la velocità iniziale del sistema, permetteranno di conoscerne il moto, se il sistema ha un grado di libertà non superiore a sei, come nel caso del corpo rigido. Per poter descrivere questi risultati, è opportuno premettere alcune nozioni di base della dinamica che richiameremo nel primo paragrafo.

### 3.1 Forze, sistemi di forze e leggi della dinamica

Introduciamo la nozione di forza. Dal punto di vista fisico, una forza è un ente fisico in grado di alterare lo stato di quiete o di moto di un corpo, alterandone la velocità, ovvero di produrre accelerazione. Dal punto di vista matematico, si ha la seguente

**Definizione 3.1.** *Una forza è un vettore applicato  $(\vec{F}, P)$ , dove  $\vec{F}$  è detto vettore della forza e  $P$  è il punto di applicazione della forza.*

**Definizione 3.2.** *Il vincolo è qualunque condizione che impedisce a un corpo di passare da una configurazione a un'altra geometricamente possibile; in tale caso il corpo si definisce vincolato. I vincoli si dividono in:*

- *vincoli interni ad un sistema: sono dovuti all'azione di punti del sistema stesso;*

- *vincoli esterni ad un sistema: sono dovuti all'azione di punti o corpi esterni al sistema.*

Riguardo ai vincoli si ha il seguente *Postulato delle reazioni vincolari*:

**Postulato 3.3.** *Senza alterare la quiete o il moto di un corpo o di un sistema di corpi, si possono sopprimere alcuni o tutti i vincoli che agiscono sul corpo purchè si applichino al corpo opportune forze, dette reazioni vincolari.*

**Osservazione 3.4.** Da questo postulato segue immediatamente, che ogni corpo o punto materiale vincolato si può considerare come libero, purchè si applichino al corpo, o sul punto, tutte le reazioni vincolari.

Allora si possono suddividere le forze in:

- reazioni vincolari: dovute all'azione dei vincoli, denotate solitamente con  $(\vec{\Phi}, P)$ ;
- forze attive: non dovute all'azione dei vincoli, denotate con  $(\vec{F}, P)$ .

Un'ulteriore distinzione può essere fatta in:

- forze interne: dovute all'azione di punti interni al corpo;
- forze esterne: dovute all'azione di punti o corpo esterni al sistema meccanico.

**Definizione 3.5.** *Data la forza  $(\vec{F}, P)$  si definisce linea di azione della forza la retta passante per  $P$  e parallela a  $\vec{F}$ .*

**Definizione 3.6.** *Data una forza  $(\vec{F}, P)$  e un punto  $O \in \mathbb{R}^3$ , si chiama momento della forza rispetto al polo  $O$  il vettore*

$$\vec{\Omega}(O) = \vec{F} \times (O - P). \quad (3.1)$$

Risulta evidente che il momento di una forza rispetto a un polo  $O$  appartenente alla linea d'azione è nullo, poichè in questo caso i vettori  $\vec{F}$  e  $O - P$  sono paralleli.

**Definizione 3.7.** *Dato un sistema di forze*

$$(S) : (\vec{F}_1, P_1), \dots, (\vec{F}_n, P_n),$$

*si definisce il vettore risultante del sistema di forze il vettore*

$$\vec{R} = \sum_{s=1}^N \vec{F}_s; \quad (3.2)$$

fissato un polo  $O \in \mathbb{R}^3$ , si definisce momento risultante del sistema rispetto al polo  $O$  il vettore

$$\vec{\Omega}(O) = \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \times (O - P_s). \quad (3.3)$$

In generale il momento  $\vec{\Omega}(O)$  dipende dal polo  $O$ ; un criterio che garantisce l'indipendenza di  $\vec{\Omega}(O)$  dal polo è espresso nella seguente proposizione, per la cui semplice dimostrazione si rinvia al trattato [2].

**Proposizione 3.8.** *Il momento risultante di un sistema di forze non dipende dalla scelta del polo se e solo se  $\vec{R} = 0$ . In questo caso, è possibile indicare il momento semplicemente come  $\vec{\Omega}$ .*

Un caso particolare di sistema con momento risultante delle forze indipendente dal polo è dato dalle forze interne di un dato sistema. Questa affermazione è conseguenza del terzo principio della dinamica che qui richiamiamo.

**Principio 3.9** (Principio di azione e reazione). *Se su un punto  $A$  agisce una forza di vettore  $\vec{F}$  da parte di un punto  $B$ , allora sul punto  $B$  agisce da parte di  $A$  una forza di vettore  $-\vec{F}$ , avente la stessa linea di azione, la retta  $AB$ .*

Si ha pertanto l'importantissimo teorema

**Teorema 3.10.** *Il sistema delle forze interne di un corpo ha vettore risultante e momento risultante nullo, cioè*

$$\begin{cases} \vec{F}^{(i)} + \vec{\Phi}^{(i)} = 0 \\ \vec{\Omega}^{(i)} + \vec{\Psi}^{(i)} = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

dove  $\vec{F}^{(i)}$  e  $\vec{\Phi}^{(i)}$  indicano rispettivamente il vettore risultante delle forze attive interne e delle reazioni vincolari interne agenti sul corpo. Analogamente  $\vec{\Omega}^{(i)}$  e  $\vec{\Psi}^{(i)}$  denotano rispettivamente il momento risultante delle forze attive e delle reazioni vincolari interne che, per la 3.8 sono indipendenti dalla scelta del polo.

Infine concludiamo questo paragrafo con la legge fondamentale della dinamica di Newton.

**Principio 3.11** (Legge fondamentale della dinamica). *Se rispetto a un osservatore posto in  $O \in \mathbb{R}^3$ , su un punto  $P$  di massa  $m$  agisce una forza di vettore  $\vec{F}$ , allora l'accelerazione  $\vec{a}$  di  $P$  rispetto a  $O$  è data dalla relazione*

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (3.5)$$

detta legge di Newton.

## 3.2 Il teorema della quantità di moto

In questo paragrafo determiniamo la prima equazione cardinale della dinamica, o anche detta *il teorema della quantità di moto*.

Consideriamo un sistema meccanico costituito da  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  aventi rispettivamente masse  $m_1, \dots, m_N$  e velocità  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N$ . Suddividiamo, come nel paragrafo precedente, le forze attive agenti sul punto  $P_s$  in interne ed esterne, denotate rispettivamente con  $\vec{F}_s^{(i)}$  e  $\vec{F}_s^{(e)}$ ,  $\forall s = 1, \dots, N$ . In modo analogo suddividiamo le reazioni vincolari in interne  $\vec{\Phi}_s^{(i)}$  ed esterne  $\vec{\Phi}_s^{(e)}$ .

Si ha allora, per la legge fondamentale della dinamica Principio 3.11 applicata al generico punto  $P_s$ ,

$$m_s \frac{d\vec{v}_s}{dt} = \vec{F}_s^{(i)} + \vec{F}_s^{(e)} + \vec{\Phi}_s^{(i)} + \vec{\Phi}_s^{(e)}, \quad \forall s = 1, \dots, N. \quad (3.6)$$

Sommando le equazioni di (3.6) rispetto ad  $s$  da 1 a  $N$  e ricordando che, secondo la (3.4) il vettore risultante delle forze attive interne e quello delle reazioni vincolari interne è nullo, si ha

$$\sum_{s=1}^N m_s \frac{d\vec{v}_s}{dt} = \vec{F}^{(e)} + \vec{\Phi}^{(e)}, \quad (3.7)$$

dove  $\vec{F}^{(e)}$  è il vettore risultante delle forze attive esterne e  $\vec{\Phi}^{(e)}$  quello delle reazioni vincolari esterne agenti sul sistema. Per la linearità della derivata rispetto al tempo e supponendo che le masse  $m_s$ ,  $s = 1, \dots, N$ , siano costanti, si ricava

$$\frac{d \left( \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \right)}{dt} = \vec{F}^{(e)} + \vec{\Phi}^{(e)}, \quad (3.8)$$

da cui, utilizzando la (2.1), si ottiene

$$\frac{d(\vec{Q})}{dt} = \vec{F}^{(e)} + \vec{\Phi}^{(e)}, \quad (3.9)$$

detta *prima equazione cardinale della dinamica*.

La (3.9) esprime il seguente teorema

**Teorema 3.12** (Teorema della quantità di moto). *La derivata della quantità di moto di un sistema di punti vale il vettore risultante delle forze attive esterne sommato con il vettore risultante delle reazioni vincolari esterne.*

Il teorema della quantità di moto si può formulare in una forma equivalente, ma molto significativa. Infatti ricordando la Proposizione 2.3, si immediatamente che

$$M \frac{d^2 G}{dt^2} = \vec{F}^{(e)} + \vec{\Phi}^{(e)}. \quad (3.10)$$

Allora denotando con  $\vec{a}_G$  l'accelerazione del baricentro  $G$  e sapendo che  $\frac{d^2 G}{dt^2} = \frac{d\vec{v}(G)}{dt} = \vec{a}_G$ , si ottiene

$$M \vec{a}_G = \vec{F}^{(e)} + \vec{\Phi}^{(e)}, \quad (3.11)$$

che rappresenta l'equazione del moto del baricentro. Si ha quindi il seguente teorema

**Teorema 3.13** (Teorema del moto del baricentro). *Il baricentro di un sistema si muove come se in esso fosse concentrata la massa del sistema e ad esso fossero applicate tutte le forze e reazioni vincolari esterne. Inoltre il moto del baricentro non è influenzato dalle forze interne agenti sul corpo.*

### 3.3 Il teorema del momento delle quantità di moto

In questo paragrafo determiniamo la seconda legge cardinale della dinamica, o anche detta *teorema del momento delle quantità di moto*.

Ricordiamo la definizione di momento delle quantità di moto rispetto a un polo  $O \in \mathbb{R}^3$  (si veda (2.2)):

$$\vec{K}(O) = \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \times (O - P_s).$$

Derivando questa quantità rispetto al tempo si ha

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{K}(O)}{dt} &= \sum_{s=1}^N m_s \vec{a}_s \times (O - P_s) + \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \times \frac{d(O - P_s)}{dt} = \\ &= \sum_{s=1}^N m_s \vec{a}_s \times (O - P_s) + \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \times \vec{v}_O - \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \times \vec{v}_s \end{aligned} \quad (3.12)$$

dove  $\vec{v}_O$  denota la velocità di  $O$ .

Allora ricordando che

$$m_s \vec{a}_s = \vec{F}_s + \vec{\Phi}_s, \quad \forall s = 1, \dots, N$$

e osservando che l'ultimo termine nel membro di destra della (3.12) è nullo, essendo nullo il prodotto vettoriale di vettori paralleli,

$$\sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \times \vec{v}_s = 0,$$

si ottiene

$$\frac{d\vec{K}(O)}{dt} = \sum_{s=1}^N (\vec{F}_s + \vec{\Phi}_s) \times (O - P_s) + \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \times \vec{v}_O. \quad (3.13)$$

Utilizzando la definizione di quantità di moto (si veda (2.1)), si ha

$$\frac{d\vec{K}(O)}{dt} = \sum_{s=1}^N (\vec{F}_s + \vec{\Phi}_s) \times (O - P_s) + \vec{Q} \times \vec{v}_O. \quad (3.14)$$

Il primo termine nel membro di destra della (3.14) rappresenta il momento risultante rispetto a  $O$  di tutte le forze agenti sul sistema. Esso può essere scomposto in momento risultante delle forze attive,  $\vec{\Omega}(O)$ , e in quello delle reazioni vincolari,  $\vec{\psi}(O)$ . Ricordando la (3.4) si ha che il momento delle forze interne è nullo. Si ha dunque

$$\sum_{s=1}^N (\vec{F}_s + \vec{\Phi}_s) \times (O - P_s) = \vec{\psi}^{(e)}(O) + \vec{\Omega}^{(e)}(O), \quad (3.15)$$

dove  $\vec{\Omega}^{(e)}(O)$  e  $\vec{\psi}^{(e)}(O)$  indicano rispettivamente il momento risultante delle forze attive esterne e delle reazioni vincolari esterne rispetto a  $O$ . Consideriamo ora il secondo membro della (3.14) e ricordando la Proposizione 2.3, otteniamo che

$$\vec{Q} \times \vec{v}_O = M \vec{v}_G \times \vec{v}_O. \quad (3.16)$$

Sostituendo le (3.15) e (3.16) nella (3.14), si ha

$$\frac{d\vec{K}(O)}{dt} = \vec{\psi}^{(e)}(O) + \vec{\Omega}^{(e)}(O) + M \vec{v}_G \times \vec{v}_O. \quad (3.17)$$

Ora se  $O$  è fisso, o coincide con il baricentro  $G$ , o la velocità di  $G$  è parallela a quella di  $O$  si ha  $\vec{v}_G \times \vec{v}_O = 0$ , la (3.17) diventa

$$\frac{d\vec{K}(O)}{dt} = \vec{\psi}^{(e)}(O) + \vec{\Omega}^{(e)}(O), \quad (3.18)$$

detta *equazione del momento angolare* o *seconda equazione cardinale della dinamica*.

Questa relazione esprime il cosiddetto

**Teorema 3.14** (Teorema del momento della quantità di moto). *La derivata del momento della quantità di moto di un sistema di punti, calcolato rispetto a un punto fisso o coincidente con il baricentro o con velocità parallela a quella del baricentro, vale il momento delle forze attive esterne e delle reazioni vincolari esterne rispetto a quel punto.*

Combinando la (3.9) e la (3.18) otteniamo *le equazioni cardinali della dinamica*

$$\begin{cases} \frac{d\vec{K}(O)}{dt} = \vec{\psi}^{(e)}(O) + \vec{\Omega}^{(e)}(O) \\ \frac{d(\vec{Q})}{dt} = \vec{R}^{(e)} + \vec{\Phi}^{(e)}. \end{cases} \quad (3.19)$$

**Osservazione 3.15.** Le equazioni cardinali della dinamica costituiscono un sistema di sei equazioni differenziali di secondo ordine. Le incognite sono i parametri lagrangiani che forniscono la configurazione del sistema all'istante  $t$ . Hanno il vantaggio di non contenere le forze interne e permettono di ottenere informazioni sulle reazioni vincolari in regime dinamico. Infatti nel caso particolare del corpo rigido, in assenza di vincoli vi sono esattamente sei equazioni in sei incognite, quindi il sistema risulta essere determinato. Mentre se il corpo rigido è vincolato, si ha che fra le incognite compaiono anche delle reazioni vincolari, ma il grado di libertà si riduce. Sarà quindi necessario in questo caso introdurre un opportuno sistema di reazioni vincolari, in modo che il sistema risulti determinato.

### 3.3.1 Prime applicazioni

Vediamo alcune applicazioni dei teoremi ora ottenuti.

Se il sistema di punti non ha vincoli esterni, allora si ha che la derivata del momento della quantità di moto rispetto ad un punto fisso o al baricentro vale il momento delle forze attive esterne rispetto a quel punto o al baricentro. Se inoltre anche le forze esterne sono nulle, come per esempio accade in un sistema isolato, quella derivata è nulla e il momento della quantità di moto è costante. Scrivendo le componenti di questo vettore che sono costanti, si ottengono tre integrali primi del sistema. Per esempio, il momento delle quantità di moto dei corpi del sistema solare è un vettore costante. Il piano passante per il baricentro del sistema e normale al momento della quantità di moto rimane invariato (rispetto ad un sistema con origine in quel baricentro e orientato con le stelle fisse) e si chiama *piano invariabile di Laplace*.

Se il sistema di punti, ha come unico vincolo esterno, un punto fisso  $O$ , l'unica reazione vincolare esterna è applicata in  $O$  ed ha momento nullo, quindi la derivata del momento della quantità di moto di un sistema rispetto ad  $O$  vale il momento delle forze attive rispetto allo stesso punto  $O$ . Si ha così la possibilità di eliminare la reazione vincolare esterna, in generale incognita, e la (3.18) diventa

$$\frac{d\vec{K}(O)}{dt} = \vec{\Omega}^{(e)}. \quad (3.20)$$

Se poi il sistema ha come unico vincolo un asse fisso, che si può fare coincidere per esempio con l'asse  $z$ , conviene calcolare la (3.20) rispetto a un punto dell'asse, poi proiettarla sull'asse

stesso. Si ottiene, ricordando che  $\vec{K} \cdot \vec{k} = K_z$  e  $\vec{\Omega}^{(e)} \cdot \vec{k} = \dot{\Omega}_z^{(e)}$ :

$$\frac{dK_z(O)}{dt} = \Omega_z, \quad (3.21)$$

cioè per un sistema che ha solo un asse fisso come vincolo esterno, la derivata del momento delle quantità di moto rispetto all'asse vale il momento delle forze attive rispetto all'asse stesso. Questo teorema si chiama *teorema del momento delle quantità di moto rispetto a un asse*.

Vediamo un'applicazione del risultato appena ottenuto. Si consideri una piattaforma mobile intorno ad un asse verticale e una persona sulla piattaforma. Le uniche forze attive applicate al sistema sono il peso della persona e quello della piattaforma, il cui momento risultante rispetto all'asse di rotazione è nullo. Quindi, per la (3.21),  $K_z$  è costante e se, inizialmente sia la persona che la piattaforma sono ferme,  $K_z$  è sempre nulla. Ma  $K_z$  sarà la somma del momento della persona e della piattaforma, che valgono  $J_1\dot{\theta}_1, J_2\dot{\theta}_2$  essendo  $J_1$  e  $J_2$ ,  $\dot{\theta}_1$  e  $\dot{\theta}_2$  i momenti di inerzia e le velocità angolari della persona e della piattaforma. Quindi si ha

$$J_1\dot{\theta}_1 + J_2\dot{\theta}_2 = 0, \quad (3.22)$$

cioè se la persona si muove, essa assume come velocità angolare  $\dot{\theta}_1$  e affinché (3.22) sia soddisfatta, la piattaforma deve assumere una velocità angolare di segno opposto. In particolare la piattaforma deve muoversi in verso opposto a quello della persona con velocità  $\dot{\theta}_2$  uguale, per la (3.22), a  $-\frac{J_1}{J_2}\dot{\theta}_1$ . Questo fenomeno si manifesta più facilmente quanto più il momento  $J_1$  della persona è paragonabile a quello  $J_2$  della piattaforma.

## 3.4 Il moto di un corpo rigido con un punto fisso e di un corpo rigido libero

### 3.4.1 Gli angoli di Eulero

Sia  $(O_1, x_1, y_1, z_1)$  un sistema di assi collegato con il corpo rigido, con il punto fisso  $O_1$ , e  $(O, x, y, z)$  il sistema di assi a cui si riferisce il moto. Supponiamo che  $O$  coincida con  $O_1$ . Come è stato dimostrato nel primo capitolo, per determinare l'orientamento del sistema fisso rispetto a quello mobile sono necessari tre parametri. A tale scopo si introducono gli *angoli di Eulero*.

**Definizione 3.16** (Angoli di Eulero). *Sia  $OL$  la retta d'intersezione fra il piano  $(O, x, y)$  e  $(O, x_1, y_1)$ , in tale modo  $OL$  è normale sia a  $Oz$  che a  $Oz_1$ ;  $OL$  (detta linea nodale) deve essere*



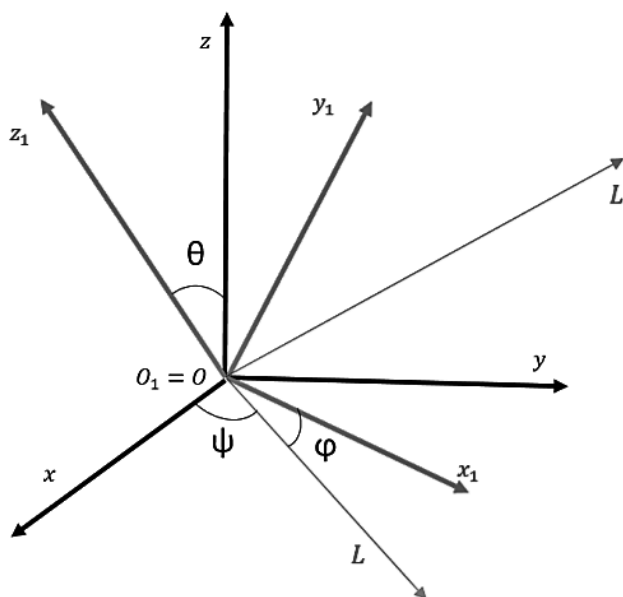


Figura 3.1: Angoli di Eulero

orientata in modo che un osservatore diretto secondo  $OL$  e che guardi  $Oz$  veda  $Oz_1$  alla sua sinistra. Sia  $\psi$  l'angolo formato fra  $Ox$  e  $OL$ ,  $\varphi$  l'angolo tra  $OL$  e  $Ox_1$  e  $\theta$  quello tra  $Oz$  e  $Oz_1$ . Inoltre assumiamo che  $\theta$  sia compresa tra  $0$  e  $\pi$ ,  $\varphi$  e  $\psi$  tra  $0$  e  $2\pi$ . Gli angoli  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  si chiamano rispettivamente la nutazione, la longitudine della linea nodale e l'azimut.

**Osservazione 3.17.** Noti i tre angoli di Eulero resta determinata la posizione della terna  $(O, x_1, y_1, z_1)$  rispetto alla terna  $(O, x, y, z)$ . Infatti con una rotazione intorno all'asse  $z$  di ampiezza  $\psi$  si può portare l'asse  $Ox$  coincidente con  $OL$ , con una rotazione di ampiezza  $\theta$  intorno ad  $OL$  si porta  $Oz$  a coincidere con  $Oz_1$ , infine con una rotazione di ampiezza  $\varphi$  intorno a  $Oz_1$  si porta  $Ox$  su  $Ox_1$ .

### 3.4.2 Relazione fra velocità angolare e angoli di Eulero

Risulta molto utile esprimere le coordinate della velocità angolare  $\vec{\omega}$  di un corpo rigido in stato cinetico di rotazione mediante gli angoli di Eulero e le loro derivate temporali.

Scomponiamo innanzitutto  $\vec{\omega}$  secondo le tre rette  $OL$ ,  $Oz$  e  $Oz_1$ ; ciò è equivalente a dire che lo stato cinetico di rotazione del corpo può essere scomposto in tre stati cinetici di rotazione intorno a questi assi come suggerito nell'osservazione 3.17. Consideriamo la rotazione intorno

ad  $OL$ , essa viene definita dall'angolo  $\theta$ , poichè è  $\theta$  l'angolo di cui risultata ruotato l'asse  $Oz_1$  intorno a  $OL$  partendo da  $Oz$ . Nominato  $\vec{l}$  il versore della retta  $OL$ , la velocità angolare del moto di rotazione a cui risulta tangente lo stato cinetico attorno ad  $OL$  è  $\dot{\theta}\vec{l}$ . In modo analogo si dimostra che le rotazioni intorno ad  $Oz$  e  $Oz_1$  hanno velocità angolare espressa da  $\dot{\psi}\vec{k}$  e da  $\dot{\varphi}\vec{k}_1$ .

Si ha dunque che

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{l} + \dot{\psi}\vec{k} + \dot{\varphi}\vec{k}_1. \quad (3.23)$$

Si può osservare che la retta  $OL$  forma con il sistema  $(O, x_1, y_1, z_1)$  gli angoli  $\varphi, \frac{\pi}{2} + \varphi, \frac{\pi}{2}$ ; quindi le componenti del termine  $\dot{\theta}\vec{l}$  secondo questi assi sono

$$\dot{\theta} \cos \varphi, \quad -\dot{\theta} \sin \varphi, \quad 0.$$

Sia  $OL'$  la retta d'intersezione tra il piano  $Ozz_1$  e il piano  $Ox_1y_1$  orientata in modo che un osservatore disposto lungo essa veda  $Oz_1$  alla sinistra di  $Oz$ . La retta  $OL'$ , per la sua appartenenza al piano  $Ox_1y_1$ , sarà normale ad  $Oz_1$  e, per la sua appartenenza al piano  $Ozz_1$ , sarà normale alla linea dei nodi  $OL$ , per tale motivo con gli assi  $Oz, Ox_1, Oy_1$  formerà rispettivamente gli angoli

$$\frac{\pi}{2} - \theta, \quad \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad \varphi.$$

Allora che termine  $\dot{\psi}\vec{k}$  ha componenti  $\dot{\psi} \cos \theta$  secondo l'asse  $Oz_1$  e  $\dot{\psi} \sin \theta$  secondo la retta  $OL'$ . Questa ultima componente si può scomporre a sua volta secondo gli assi  $Ox_1$  e  $Oy_1$  ottenendo rispettivamente

$$\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi, \quad \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi.$$

Si osserva immediatamente che il termine  $\dot{\varphi}\vec{k}_1$  ha componente solo sull'asse  $Oz_1$ .

Da questi risultati e indicando nuovamente con  $p, q, r$  le componenti del vettore  $\vec{\omega}$  sul sistema  $(O, x_1, y_1, z_1)$ , si ha che

$$\begin{cases} p = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ q = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}, \end{cases} \quad (3.24)$$

che esprimono la relazione indicata fra la velocità angolare  $\vec{\omega}$  e gli angoli di Eulero.

### 3.4.3 Equazioni di Eulero

In questo paragrafo verrà studiato il moto di un corpo rigido con un punto fisso  $O$  e poi quello di un corpo rigido libero.

Sia dato un sistema di riferimento fisso  $(O, x, y, z)$  e un corpo rigido  $\mathcal{C}$  con il punto fisso in  $O$  e con il rispettivo sistema di riferimento mobile  $(O, x_1, y_1, z_1)$  diretto secondo gli assi principali d'inerzia del corpo passanti per  $O$ . Il moto del corpo sarà noto quando è nota, in ogni istante, la posizione del sistema di riferimento mobile rispetto a quello fisso, conoscendo ad esempio gli angoli di Eulero  $\theta, \varphi, \psi$  fra i due sistemi.

Il corpo rigido  $\mathcal{C}$  passa in ogni istante per uno stato cinetico di rotazione, allora consideriamo il vettore della velocità angolare  $\vec{\omega}$  che ne definisce la rotazione. Per le componenti  $p, q, r$  di  $\vec{\omega}$  rispetto a  $(O, x_1, y_1, z_1)$  valgono le (3.24); mentre le componenti, su questi assi, del momento della quantità di moto del corpo  $\vec{K}(O)$ , rispetto a  $O$ , sono  $Ap, Bq, Cr$  (si veda (2.32)).

Pertanto la derivata di  $\vec{K}(O)$  rispetto a un osservatore  $(O_1)$  collegato con il sistema mobile vale

$$\left(\frac{d\vec{K}(O)}{dt}\right)_1 = A\dot{p}\vec{i}_1 + B\dot{q}\vec{j}_1 + C\dot{r}\vec{k}_1. \quad (3.25)$$

Ricordiamo la relazione che si ha fra le derivate di un vettore rispetto a due osservatori.

Siano  $u_{x_1}, u_{y_1}, u_{z_1}$  le componenti di un vettore  $\vec{u}$  sugli assi  $(O_1, x_1, y_1, z_1)$  tale che

$$\vec{u} = u_{x_1}\vec{i}_1 + u_{y_1}\vec{j}_1 + u_{z_1}\vec{k}_1. \quad (3.26)$$

Deriviamo questa equazione rispetto all'osservatore  $(O)$ . In questo caso dobbiamo considerare variabili anche  $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$  e le loro derivate verranno espresse dalle formule di Poisson (1.13). Si ha allora

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{du_{x_1}}{dt}\vec{i}_1 + \frac{du_{y_1}}{dt}\vec{j}_1 + \frac{du_{z_1}}{dt}\vec{k}_1 + u_{x_1}\vec{\omega} \times \vec{i}_1 + u_{y_1}\vec{\omega} \times \vec{j}_1 + u_{z_1}\vec{\omega} \times \vec{k}_1. \quad (3.27)$$

I primi tre termini di (3.27) si ottengono derivando (3.26), considerando però  $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$  come costanti. La loro somma allora sarà tale da coincidere con la derivata di  $\vec{u}$  rispetto all'osservatore  $(O_1)$ , denotata  $\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_1$ . Gli ultimi tre termini valgono  $\vec{\omega} \times \vec{u}$ , raccogliendo  $\vec{\omega}$  e usando la (3.26). Quindi si avrà

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_1 + \vec{\omega} \times \vec{u}. \quad (3.28)$$

Da questa relazione si ottiene che la derivata di  $\vec{K}(O)$  rispetto all'osservatore a cui è riferito il moto vale

$$\frac{d\vec{K}(O)}{dt} = \left(\frac{d\vec{K}(O)}{dt}\right)_1 + \vec{\omega} \times \vec{K}(O). \quad (3.29)$$

Per il teorema del momento delle quantità di moto (3.18) applicato a un corpo rigido con un punto fisso, si ha

$$\left(\frac{d\vec{K}(O)}{dt}\right)_1 + \vec{\omega} \times \vec{K}(O) = \vec{\Omega}^{(e)}, \quad (3.30)$$

dove  $\vec{\Omega}^{(e)} = \vec{\Omega}^{(e)}(O)$  è il momento delle forze attive esterne calcolato rispetto al punto fisso  $O$ . Consideriamo le componenti della (3.30) sugli assi  $(O, x_1, y_1, z_1)$ . Ricordando la (3.25) e le componenti del prodotto vettoriale  $\vec{\omega} \times \vec{k}$  si ha

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = \Omega_x \\ B\dot{q} + (A - C)pr = \Omega_y \\ C\dot{r} + (B - A)pq = \Omega_z, \end{cases} \quad (3.31)$$

dove  $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ , sono le componenti sugli assi  $(O, x_1, y_1, z_1)$  del momento delle forze e dipenderanno dal tempo, dalla posizione e velocità del corpo, cioè da  $t$ , dagli angoli di Eulero  $\theta, \varphi, \psi$  e dalle loro derivate.

Tali equazioni sono dette *equazioni di Eulero*.

**Osservazione 3.18.** Le (3.31) associate con le (3.24) formano un sistema di equazioni differenziali di primo ordine nelle sei incognite  $\theta, \varphi, \psi, p, q, r$ . Esse, mediante le condizioni iniziali  $\theta_0, \varphi_0, \psi_0, p_0, q_0, r_0$ , che determinano la posizione e la velocità iniziale, permettono di conoscere il moto del corpo, cioè la sua configurazione in ogni istante.

Consideriamo ora il caso di un corpo rigido libero. Come sappiamo ha sei gradi di libertà e perciò la sua posizione si può determinare mediante le coordinate  $x_g, y_g, z_g$  del baricentro  $G$  rispetto a un sistema di assi fissi  $x, y, z$  e gli angoli di Eulero  $\theta, \varphi, \psi$  che gli assi principali  $(G, x_1, y_1, z_1)$  dell'ellissoide centrale d'inerzia formano con un sistema di assi con origine in  $G$  e parallelo ad  $(O, x, y, z)$ . Detto  $\vec{F}^{(e)}$  il vettore risultante delle forze attive esterne esterne,  $\vec{\Omega}^{(e)}$  il momento di queste forze rispetto a  $G$  (tali grandezze dipendono dal tempo  $t$  e da  $x_G, y_G, z_G, \theta, \varphi, \psi$  e dalle loro derivate esprimibili, per le (3.31), mediante  $p, q, r$ ), per la (3.9) e la (3.18), avremo

$$M \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{F}^{(e)} \quad (3.32)$$

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{\Omega}^{(e)} \quad (3.33)$$

dove  $M$  è la massa del corpo,  $\vec{K}$  è il momento della quantità di moto rispetto a  $G$  e  $\vec{v}_G$  è la velocità del baricentro.

Proiettiamo la (3.33) sugli assi  $x_1, y_1, z_1$  ed associamo alle equazioni così ottenute le equazioni (3.31). Proiettando anche la (3.32) sugli assi fissi, otteniamo un sistema di tre equazioni nelle

componenti  $v_x, v_y, v_z$  di  $\vec{v}_G$  a cui assoceremo il sistema

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx_G}{dt} \\ v_y = \frac{dy_G}{dt} \\ v_z = \frac{dz_G}{dt}. \end{cases} \quad (3.34)$$

Si ottiene così un sistema di dodici equazioni del primo ordine nelle incognite  $x_G, y_G, z_G, v_x, v_y, v_z, \theta, \varphi, \psi, p, q, r$ . Lo studio di questo sistema è molto complicato.

Ci limiteremo solo ad osservare che in certi casi (per esempio quando sul corpo agisce solo il peso)  $\vec{F}^{(e)}$  non dipende dall'orientamento del corpo ossia dipende solo dalla posizione e dalla velocità di  $G$ . Allora la ricerca del moto del baricentro si riduce ad un problema di punto materiale libero. Se poi  $\vec{\Omega}^{(e)}$  dipende solo dall'orientamento del corpo, le equazioni nelle  $p, q, r, \theta, \varphi, \psi$  non dipendono dalla posizione del baricentro; il moto del corpo intorno a  $G$  avviene come se questo punto fosse fermo.

**Osservazione 3.19.** Quanto qui argomentato nel caso del corpo libero può estendersi al generico caso vincolato con le seguenti variazioni: si riduce il grado di libertà che riduce il numero di incognite fra i parametri lagrangiani individuati (coordinate del baricentro  $G$  e angoli di Eulero); al contempo si introducono nuove incognite rappresentate dalle reazioni vincolari. Queste ultime dovranno essere opportunamente individuate in modo da rendere determinato il sistema delle equazioni differenziali rappresentato dalle (3.19) e dalle (3.31), ovvero in modo che il numero totale di incognite (parametri lagrangiani e reazioni vincolari) corrisponda al numero totale di equazioni.

### 3.5 Esempio di applicazione

Concludiamo questo capitolo con un'applicazione delle equazioni cardinali della dinamica tratto da [4]. Introduciamo innanzitutto alcune definizioni, le quali saranno necessarie per l'esempio proposto.

**Definizione 3.20.** Diciamo che un corpo rigido compie un moto alla Poinsot o per inerzia se si verifica una delle seguenti condizioni:

- il corpo è dotato di un punto fisso  $O$  rispetto al quale il momento delle forze attive esterne agenti sul corpo è nullo ( $\vec{\Omega}^{(e)}(O) = 0$ );

- il momento delle forze attive esterne agenti sul corpo rispetto al baricentro  $G$  è nullo ( $\vec{\Omega}^{(e)}(G) = 0$ ).

**Osservazione 3.21.** Nel caso di moto alla Poinot le equazioni di Eulero diventano

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = 0 \\ B\dot{q} + (A - C)pr = 0 \\ C\dot{r} + (B - A)pq = 0. \end{cases} \quad (3.35)$$

**Definizione 3.22.** Un corpo è detto a struttura giroscopica rispetto ad  $O$  se il suo ellissoide d'inerzia di centro  $O$  è un ellissoide di rotazione (ellissoide rotondo). Si può anche dire che un corpo ha struttura giroscopica nel caso in cui la sua matrice di inerzia rispetto ad  $O$  ha due dei tre autovalori coincidenti.

**Definizione 3.23.** Si dice rotazione permanente una rotazione in cui la velocità angolare  $\vec{\omega}$  è costante nel tempo.

Consideriamo un corpo rigido libero di massa  $M$  soggetto solo alla propria forza peso. Scegliamo l'asse  $z$  diretto lungo la verticale verso l'alto, il vettore  $\vec{P}$  della forza peso sarà dato da  $\vec{P} = -Mg\vec{k}$ . È immediato che il momento delle forze attive esterne agenti sul corpo rispetto al baricentro  $G$  sia nullo, quindi siamo nel caso di un corpo soggetto a un moto alla Poinot.

La risultante delle forze esterne applicate al baricentro si scrive facilmente

$$\vec{R}^{(e)} = -Mg\vec{k} \quad (3.36)$$

e la prima equazione cardinale diventa

$$\begin{cases} M\ddot{x}_G = 0 \\ M\ddot{y}_G = 0 \\ M\ddot{z}_G = -Mg. \end{cases} \quad (3.37)$$

Come condizioni iniziali assumiamo che il baricentro  $G$  sia nell'origine, abbia velocità iniziale  $\vec{v}_0$  e che il moto stia nel piano  $x, z$ . Il sistema (3.37) diventa

$$\begin{cases} \ddot{x}_G = 0 \\ \ddot{y}_G = 0 \\ \ddot{z}_G = -g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_G = v_{0,x} \\ \dot{y}_G = 0 \\ \dot{z}_G = -gt + v_{0,z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G(t) = v_{0,x}t \\ y_G(t) = 0 \\ z_G(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0,z}t. \end{cases}$$

Ricavando il tempo  $t$  dalla prima equazione e sostituendolo nella terza, otteniamo l'equazione della traiettoria

$$z_G(x) = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_{0,x}^2} x^2 + \frac{v_{0,z}}{v_{0,x}}, \quad (3.38)$$

corrispondente ad una parabola nel piano  $x, z$ .

Ora consideriamo la seconda equazione cardinale e prendiamo come polo il baricentro  $G$  e per quanto già osservato abbiamo che  $\vec{\Omega}^{(e)}(O) = 0$ . Allora si ha che

$$\frac{d\vec{K}(G)}{dt} = 0, \quad (3.39)$$

ossia

$$\vec{K}(G) = \text{costante}. \quad (3.40)$$

Le equazioni di Eulero sono date dalla (3.35) con  $x_1, y_1$  e  $z_1$  assi principali di inerzia relativi a  $G$ .

In questo caso particolare di moto alla Poincot, vediamo una caratterizzazione delle rotazioni permanenti. Distinguiamo tre casi:

**Caso 1)** Supponiamo che il corpo rigido abbia una struttura giroscopica, in particolare che la matrice d'inerzia rispetto a  $G$  abbia tutti gli autovalori coincidenti, cioè  $A = B = C = I$ . In questo caso particolare si parla di simmetria sferica ed ogni asse è principale d'inerzia. Abbiamo che

$$\begin{aligned} \vec{K}(G) &= Ap\vec{i}_1 + Bq\vec{j}_1 + Cr\vec{k}_1 = \\ &= I(p\vec{i}_1 + q\vec{j}_1 + r\vec{k}_1) = \\ &= I\vec{\omega}. \end{aligned}$$

Poichè  $\vec{K}(G)$  è costante, segue che  $\vec{\omega}$  è costante. In questo caso si hanno rotazioni permanenti e  $\vec{K}(G)$  è parallelo a  $\vec{\omega}$ .

Se la simmetria non è sferica, in generale  $\vec{\omega}$  non è costante. Vediamo, in quest'ultimo caso, quando è possibile ottenere una rotazione permanente.

Derivando rispetto al tempo  $t$  la relazione  $\vec{\omega} = p\vec{i}_1 + q\vec{j}_1 + r\vec{k}_1$  otteniamo

$$\dot{\vec{\omega}} = \dot{p}\vec{i}_1 + \dot{q}\vec{j}_1 + \dot{r}\vec{k}_1 + p\frac{d\vec{i}_1}{dt} + q\frac{d\vec{j}_1}{dt} + r\frac{d\vec{k}_1}{dt}.$$

Usando le formule di Poisson (1.13) otteniamo

$$\begin{aligned}
 \dot{\vec{\omega}} &= \dot{p}\vec{i}_1 + \dot{q}\vec{j}_1 + \dot{r}\vec{k}_1 + p(\vec{\omega} \times \vec{i}_1) + q(\vec{\omega} \times \vec{j}_1) + r(\vec{\omega} \times \vec{k}_1) = \\
 &= \dot{p}\vec{i}_1 + \dot{q}\vec{j}_1 + \dot{r}\vec{k}_1 + \vec{\omega} \times (p\vec{i}_1 + q\vec{j}_1 + r\vec{k}_1) = \\
 &= \dot{p}\vec{i}_1 + \dot{q}\vec{j}_1 + \dot{r}\vec{k}_1 + \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \\
 &= \dot{p}\vec{i}_1 + \dot{q}\vec{j}_1 + \dot{r}\vec{k}_1.
 \end{aligned}$$

Quindi

$$\dot{\vec{\omega}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{p} = 0 \\ \dot{q} = 0 \\ \dot{r} = 0. \end{cases} \quad (3.41)$$

Quindi se le componenti di  $\vec{\omega}$  sulla terna principale d'inerzia sono costanti allora  $\vec{\omega}$  è costante e viceversa. Perciò le rotazioni permanenti si hanno se e solo se  $p = q = r = \text{costante}$ . È immediato osservare che le rotazioni permanenti semplificano il sistema delle equazioni di Eulero (3.35) nel seguente sistema

$$\begin{cases} (C - B)qr = 0 \\ (A - C)pr = 0 \\ (B - A)pq = 0. \end{cases} \quad (3.42)$$

**Caso 2)** Supponiamo, ancora, che il corpo rigido abbia una struttura giroscopica con  $A = B \neq C$ . Allora la terza equazione di (3.42) è un'identità e le prime due diventano

$$\begin{cases} qr = 0 \\ pr = 0, \end{cases} \quad (3.43)$$

da cui otteniamo che le soluzioni del sistema sono

$$\begin{cases} r = 0 \\ p \neq 0 \text{ e } q \neq 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} r \neq 0 \\ p = q = 0. \end{cases} \quad (3.44)$$

**Osservazione 3.24.** Il caso in cui  $p = q = 0$  dice che ogni asse del piano  $x, y$  è asse principale d'inerzia. Inoltre sia il caso  $p = q = 0$  che  $r = 0$  dicono che l'asse di rotazione permanente è un asse principale d'inerzia.



**Caso 3)** Se  $A, B, C$  sono tutti diversi fra loro, per avere rotazioni permanenti è necessario che

$$\begin{cases} qr = 0 \\ pr = 0 \\ pq = 0, \end{cases} \quad (3.45)$$

ovvero almeno due delle componenti di  $\vec{\omega}$  secondo la terna principale d'inerzia devono essere nulle. Questo implica che  $\vec{\omega}$  deve essere diretto come uno degli assi della terna principale d'inerzia.

# Bibliografia

- [1] Arnold V.I., *Metodi matematici della meccanica classica*, Roma, Editori Riuniti, 1988
- [2] Graffi D., *Elementi di meccanica razionale*, Bologna, Pàtron, 1954
- [3] Strumia A., *Meccanica razionale*, Parte prima, Bologna, Nautilus, 1996
- [4] <http://wwwdata.unibg.it/dati/corsi/208409/10411-Dinamica.pdf>