Alma Mater Studiorum
Università di Bologna

Dipartimento di Matematica

Tesi di Laurea Magistrale in Didattica della Matematica

Teoria della scelta razionale

Relatore:
Prof. Paolo Negrini
Correlatore:
Prof. Aljoša Volčič

Presentata da:
Roberto Ferraro
Matricola
839411

Anno Accademico 2018/2019

A chi giace sul fondo del mare

INDICE

INTRODUZIONE

La teoria della scelta razionale si occupa di studiare e definire i principi con cui un individuo sceglie, o con cui dovrebbe scegliere, tra diverse opzioni, quella a lui più vantaggiosa. Questa teoria si concentra sui principi che possono far sì che una scelta venga definita razionale e non sul modo in cui individuare questa scelta.

0.1 Problemi di scelta

L'individuazione di una scelta razionale in un particolare contesto è detto problema di scelta. Un individuo in grado di percepire il contesto, operare una scelta e agire di conseguenza viene chiamato agente. Se la scelta operata è razionale l'agente viene detto agente razionale.
I principi su cui si basa la soluzione del problema di scelta per un agente razionale dipendono dalla conoscenza che l'agente ha a disposizione. La conoscenza di nuove informazioni può modificare la scelta razionale.
Quando l'agente ha una conoscenza completa e certa dell'ambiente e degli esiti che conseguono alle scelte disponibili, la soluzione del problema risulta molto facile.
Quando invece un agente non conosce con certezza gli esiti conseguenti alle possibili scelte ma comunque è capace di stimare la probabilità che questi accadano, si parla di problema di scelta in condizione di rischio.
I problemi di scelta in condizioni di rischio risultano ben più interessanti di quelli in condizioni di certezza e subordinano la teoria della scelta razionale alla teoria della probabilità.

0.2 Problemi individuali e cooperativi

Nel XX secolo la teoria della scelta razionale si è arricchita di una nuova intuizione: l'agente razionale nell'operare le proprie scelte deve anche tenere conto delle scelte che possono prendere anche altri agenti.
La particolare branca della teoria che si occupa di queste situazioni si chiama teoria dei giochi.
I problemi di teoria dei giochi, ossia i problemi di scelta in un contesto interattivo, possono essere affrontati come problemi di scelte individuali, nel caso in cui gli agenti scelgano delle strategie che non prevedano collaborazione con gli alti agenti, oppure come problemi

di scelta cooperativa nel caso opposto.
Come verrà dimostrato nella tesi, entrambi i tipi di strategia possono presentare limiti risolutivi.

0.3 Motivazione del lavoro di tesi

Il lavoro di tesi ha inizio a seguito di alcuni seminari da me tenuti presso il Liceo Scientifico Pitagora di Rende.
Da principio l'idea era di sottoporre agli studenti dei questionari, che verranno in seguito dettagliatamente illustrati, volti ad indagare le illusioni cognitive che possono creare misconcetti probabilistici. La somministrazione dei questionari ha generato un interesse da parte dei docenti del liceo in merito alla possibilità di presentare agli studenti i concetti matematici soggiacenti ai quesiti proposti.
Per questo motivo sono stati illustrati agli studenti i fondamenti di teoria della probabilità, di teoria della scelta e di teoria del prospetto. Si è quindi deciso di creare questo documento che affronta, utilizzando anche opportuni esempi originali, elementi di:

- Teoria della probabilità
- Teoria della probabilità condizionata
- Teoria della scelta razionale in condizione di certezza
- Teoria del valore atteso
- Teoria dell'utilità attesa
- Teoria dei giochi
- Teoria del prospetto

Presentare questi elementi, come è stato fatto in questo documento, può essere utile da un punto di vista didattico per mostrare un aspetto applicativo della teoria della probabilità e per dimostrare agli studenti come l'affrontare i problemi decisionali senza l'uso della matematica porti spesso a scelte sconvenienti.
Inoltre, soffermandosi sui principi epistemologici di queste teorie, si può mostrare come alcuni concetti matematici abbiano un valore soggettivo e non oggettivo. Ciò può far apparire la matematica come qualcosa di più vicino alla vita di tutti i giorni e di meno imposto.
Infine, offrire un inquadramento storico della teoria della probabilità può essere utile a giustificare il tipo di esempi didattici generalmente affrontati nei libri di testo.

0.4 Struttura

Nel primo capitolo di questa tesi viene definito il concetto si scelta. Attraverso alcuni esempi storici si mostra come questo dipenda dal concetto di probabilità. Vengono perciò offerte diverse definizioni dello stesso e viene presentato il contesto storico in cui è nata la teoria della probabilità.
Nonostante la centralità della teoria della probabilità, questa viene spesso accolta con diffidenza. Inoltre, la teoria della probabilità genera molti paradossi che vengono illustrati nel capitolo due.
La dipendenza tra scelta e probabilità viene invece analizzata dettagliatamente nel terzo capitolo. Vengono quindi presentate le teorie della speranza matematica e dell'utilità attesa. Inoltre ho ideato una teoria della letizia, alternativa ad entrambe.
La teoria dell'utilità attesa in presenza di agenti interagenti, ovvero la teoria dei giochi, viene presentata nel capitolo quattro che ne evidenza potenzialità e limiti, tra cui le illusioni etiche.
Ulteriori tipi di illusioni, le illusioni cognitive che fanno sì che il comportamento umano non sia sempre un comportamento razionale, vengono invece affrontate nel quinto capitolo. Partendo da esse si costruisce la teoria del prospetto.
Un'analisi in merito alle illusioni cognitive viene concretizzata mediante appositi questionari somministrati a 499 individui, le cui risposte sono state analizzate nel sesto ed ultimo capitolo di questa tesi.

1. LA TEORIA DELLA SCELTA RAZIONALE E LA PROBABILITÀ

1.1 IL CONCETTO DI SCELTA

Nel 1904 il matematico e filosofo Ernst Zermelo, in un suo articolo pubblicato nei Mathematische Annalen, enuncia l'assioma della scelta. Esso afferma:

Data una famiglia non vuota di insiemi non vuoti esiste una funzione che ad ogni insieme della famiglia fa corrispondere un suo elemento.[2]

Dall'assioma della scelta conseguono importanti e fondamentali risultati dell'analisi, dell'algebra e di tutte le branche della matematica.
Possiamo quindi ritenere la *scelta* un concetto chiave della matematica.
In questa tesi verrà però trattata la scelta nel significato comune di questo termine.
Il vocabolario Treccani definisce così questo vocabolo:

Libero atto di volontà per cui, tra due o più offerte, proposte, possibilità o disponibilità, si manifesta o dichiara di preferirne una (in qualche caso anche più di una), ritenendola migliore, più adatta o conveniente delle altre, in base a criterî oggettivi oppure personali di giudizio, talora anche dietro la spinta di impulsi momentanei, che comunque implicano sempre una decisione[3]

Nella prima parte di questo capitolo verrà illustrato come il cercare di operare scelte razionalmente possa influire sul comportamento degli individui.
La scelta razionale è centrale nel delineare un comportamento razionale. Intendiamo con scelta razionale, tra più scelte possibili, la scelta o le scelte che un individuo razionale ritiene più vantaggiosa.
Nella teoria del comportamento razionale individuale si può distinguere lo studio del comportamento razionale in condizioni di certezza e del comportamento razionale in condizioni di rischio, di incertezza e di ignoranza.

Si parla di condizione di *certezza* quando l'agente che compie la scelta conosce l'esito che consegue alle possibili scelte.
Si parla di condizione di *rischio* quando una delle possibili scelte ha più esiti possibili e l'agente che compie la scelta conosce la probabilità che si verifichi ogni possibile esito che consegue ad ogni possibile scelta.
Si parla di condizione di *incertezza* quando l'agente che compie la scelta non conosce la probabilità che si verifichi ogni possibile esito che consegue ad ogni possibile scelta.

Si parla di condizione di *ignoranza* quando l'agente che compie la scelta non conosce nessuna delle probabilità che si verifichi un possibile esito che consegue ad una possibile scelta.
La condizione di ignoranza e la condizione di incertezza non verranno trattate in questa tesi.

La scelta razionale in condizioni di certezza è più facilmente definibile avendo un ordine di preferenza individuale degli esiti a cui la scelta può portare.
Nel paragrafo 1.1.3 saranno esplicitate le proprietà che deve possedere quest'ordine di preferenza.
Come detto, un problema decisionale è in condizione di certezza quando ad ogni scelta possibile consegue con certezza un particolare esito.

Definizione 1.1.1. *In un problema decisionale in condizione di certezza detto S l'insieme delle scelte possibili, $S_1 \in S$ è detto* ***scelta razionale*** *se $\forall S_i \in S$ l'esito di S_i non è preferibile all'esito di S_1.*

Si noti che non è detto che esista una sola scelta razionale.

Per definire, invece, la scelta razionale in condizioni di rischio e di incertezza, oltre l'ordine di preferenza degli esiti, è necessario costruie quella che Blaise Pascal (1623-1662) chiamava *aleae geometria*, ossia la geometria del caso.

Essendo quindi la scelta razionale subordinata alla casualità, nel secondo e nel terzo paragrafo di questo capitolo verranno dati alcuni cenni di probabilità ed, in particolar modo, veranno presentate diverse definizioni di probabilità di un evento.
Nel processo di scelta razionale in condizioni di rischio e di incertezza è quindi intrinseca la scelta di quale delle diverse definizioni di probabilità usare.

Oltre a ciò, nei problemi in condizione di incertezza, i comportamenti e le scelte razionali degli individui dipendono dalla conoscenza che gli individui possiedono. La conoscenza di nuove informazioni può modificare la scelta razionale ed è possibile calcolare il valore di ogni informazione.
L'acquisizione di informazioni può trasformare un problema di scelta in condizioni di incertezza in uno di scelta in condizioni di rischio ed un problema di scelta in condizioni di rischio in uno di scelta in condizioni di certezza ma questo non sempre è possibile.

In matematica esistono due differenti teorie che è bene non confondere: la **teoria della scelta razionale** e la **teoria delle decisioni**.
La teoria della scelta razionale si occupa di studiare e definire i principi con cui un individuo sceglie, o con cui dovrebbe scegliere, tra diverse opzioni quella a lui più vantaggiosa.
La teoria delle decisioni o ricerca operativa, invece, studia i processi decisionali e le metodologie di scelta in problemi in condizioni di incertezza e costruisce modelli matematici

utili a supportare questi processi.
La prima teoria quindi si concentra sui principi che possono far sì che una scelta venga definita razionale, la seconda invece sposta il focus sul modo in cui individuare questa scelta.
In questa tesi verrà introdotta solo la prima teoria.

Molti filosofi, fin dall'antichità, si sono soffermati sul concetto si scelta.
I più influenti tra questi sono stati: Aristotele (383 a.C-322 a.C.), Platone (427 a.C.-348 a.C.), Tommaso d'Aquino (1225-1274), Immanuel Kant (1724-1804), Soren Kierkegaard (1813-1855).

Anche la teologia cristiana ha molto studiato la scelta intesa come esercizio del libero arbitrio. Oltre il già citato Tommaso d'Aquino, tra gli altri, hanno scritto sul libero arbitrio: Agostino d'Ippona (354-430), Guglielmo di Ockham (1245-1347), Martin Lutero (1483-1546), Erasmo da Rotterdam (1467-1536), Giovanni Calvino (1509-1564).

In questa tesi, volendo studiare particolarmente i processi di scelta razionale, presentiamo in questo capitolo due racconti scritti uno da Platone, padre della filosofia occidentale e maestro del logico Aristotele, ed un altro dal logico Giovanni Buridano, allievo del teologo Guglielmo di Ockham.

1.1.1 PLATONE ED IL MITO DI ER

Platone, figlio del nobile Aristone ed allievo di Socrate, è stato uno dei più grandi filosofi della storia. Nel 387 a.C. fonda l'Accademia nella quale si impegna a formare nuovi filosofi ed a costruire una conoscenza certa, la scienza.
A tale scopo scrive molti dialoghi e tra questi anche *La Repubblica*.

Al termine dell'ultimo libro de *La Repubblica* il filosofo presenta la storia del mito di Er.
Er era un soldato morto in battaglia che si risvegliò dopo dodici giorni, poco prima che il suo corpo fosse bruciato. Er racconta cosa è accaduto tra la sua morte ed il suo risveglio.
Dopo essere state al giudizio per il bene ed il male commesso, le anime, in un ordine casuale, dovevano scegliere in quale vita reincarnarsi.

L'ordine casuale ed il ventaglio delle scelte possibili erano stabilite da un messaggero divino.
Il messaggero aveva preso da Lachesi (letteralmente "destino") "*le sorti e vari tipi di vita*" ed aveva lanciato le *sorti* tra le anime. Ognuno aveva raccolto la *sorte* caduta più vicina a lui ed in questo modo vedeva chiaramente il numero da lui sorteggiato.
Nell'ordine così stabilito ognuno poteva scegliere il *tipo di vita* in cui reincarnarsi tra quelli che ancora non erano stati scelti da nessuno.
Prima di fare tutto ciò, il messaggero aveva spiegato alle anime cosa stava per accadere con queste parole:

Non sarà un dèmone a scegliere voi, ma sarete voi a sceglervi il dèmone. Il primo che la sorte designi scelga per primo la vita cui sarà poi irrevocabilmente legato. La virtú non ha padrone; secondo che la onori o a spregi, ciascuno ne avrà piú o meno. La responsabilità è di chi sceglie, il dio non è responsabile.[4]

Con questo mito Platone presenta due elementi fondamentali per l'argomento di questa tesi: la scelta, appunto, e la sorte che rappresenta le condizioni di incertezza nei problemi decisionali.

Nel mito di Er le anime compivano la loro scelta in modo platonico cioè tenendo conto della loro conoscenza passata per garantisi il tipo di vita migliore tra quelli possibili. Anche questo è fondamentale per la Teoria della scelta razionale in cui, come detto, viene anche calcolato il valore di ogni informazione per un particolare processo decisionale.

1.1.2 GIOVANNI BURIDANO ED IL PARADOSSO DELL'ASINO

≪*Asino sì, ma mai come l'autore del paragone*≫ - A. Campanile

Il *magister artium* Giovanni Buridano (1295-1361) è stato un filosofo ed un logico francese. È stato magnifico rettore dell'università di Parigi dal 1328 al 1340.
Oltre che di logica si interessò anche di filosofia naturale, ossia di fisca, e riuscì a confutare alcune delle teorie di Aristotele.

Sostenitore della dottrina nominalista, si occupò anche dell'intelletto umano e della volontà.
Buridano fù allievo di Guglielmo di Ockham, padre del principio del rasoio di Ockham. Il principio definito dal maestro è alla base del pensiero scientifico moderno e suggerisce quali ipotesi *scegliere* in un processo dimostrativo.

Giovanni Buridano riteneva che gli uomini dovessero subordinare le proprie scelte alle valutazioni compiute dal proprio intelletto. Il filosofo medievale si accorse che qualora l'intelletto valutasse indifferenti gli esiti di differenti scelte e non ci fossero scelte preferibili a queste, non saprebbe quale suggerire all'individuo che deve prendere la decisione.

Una banalizzazione di questo concetto è espressa in una breve storia conosciuta con il nome di "Asino di Buridano".
Voltaire (1694-1778) la presenta così:

Conoscete quella frivola storiella
di un certo asino di cui si discute a scuola?
Nella stalla gli vennero portate
per il suo pasto due quantità di fieno uguali,
della stessa qualità, per molte volte;

dai due mucchi l'asino si vide tentato
ugualmente, e, drizzando le orecchie,
proprio in mezzo ai due mucchi uguali,
concretizzando le leggi dell'equilibrio,
morì di fame, per timore di fare una scelta.[5]

Il paradosso dell'asino venne poi esaminato e discusso dal filosofo Baruch Spinoza (1632-1677) e dal matematico e filosofo Gottfried W. von Leibniz (1646-1716). Il primo non trovò modo di uscire dal paradosso mentre il secondo, sfruttando la complessità di aspetti non descritti nella storia, ipotizzò che ci fosse comunque una scelta preferibile all'altra.

Nella nostra teoria, chiamata S_1 la scelta di dirigersi ad un particolare mucchio ed S_2 la scelta di dirigersi all'altro, essendo gli esiti delle scelte indifferenti e non essendoci scelte con esiti preferibili a questi, sia S_1 che S_2 sono scelte razionali.
Tutti i problemi che prevedono più scelte razionali presentano lo stesso paradosso dell'asino di Buridano.

1.1.3 ASSIOMI DELLA PREFERENZA E DELL'INDIFFERENZA

All'inizio del capitolo, nella definizione di scelta razionale in condizioni di certezza 1.1.1 abbiamo fatto riferimento ad un ordine di preferenza degli esiti.
Un ordine di preferenza individuale degli esiti di una scelta è razionale se la preferenza tra esiti è una relazione di ordine stretto e l'indifferenza una relazione di equivalenza.
Detto E l'insieme degli esiti derivanti dalle possibili alternative di scelta, l'ordine di preferenza individuale degli esiti deve quindi rispettare i seguenti assiomi[1]:

- Se E_1 è preferibile ad E_2, allora E_2 non è preferibile ad E_1, $\forall E_1, E_2 \in E$
- Se E_1 è preferibile ad E_2, allora E_1 non è indifferente ad E_2, $\forall E_1, E_2 \in E$
- Se E_1 è indifferente ad E_2, allora E_1 non è preferibile ad E_2 ed E_2 non è preferibile ad E_1, $\forall E_1, E_2 \in E$
- O E_1 è indifferente ad E_2, o E_1 è preferibile ad E_2 oppure E_2 è preferibile ad E_1, $\forall E_1, E_2 \in E$
- Se E_1 è preferibile ad E_2 e E_2 è preferibile ad E_3 allora E_1 è preferibile ad E_3, $\forall E_1, E_2, E_3 \in E$
- Se E_1 è preferibile ad E_2 e E_1 è indifferente ad E_3 allora E_3 è preferibile ad E_2, $\forall E_1, E_2, E_3 \in E$
- Se E_1 è preferibile ad E_2 e E_2 è indifferente ad E_3 allora E_1 è preferibile ad E_3, $\forall E_1, E_2, E_3 \in E$
- Se E_1 è indifferente ad E_2 e E_2 è indifferente ad E_3 allora E_1 è indifferente ad E_3, $\forall E_1, E_2, E_3 \in E$

1.2 SOTRIA DELLA PROBABILITÀ

Come abbiamo visto grazie al mito di Er, la consapevolezza della casualità di alcuni eventi è sempre stata contrapposta al definire processi decisionali razionali.
Per questo motivo, i matematici si sono occupati dello studio del caso; in questo paragrafo verranno presentate le prime scoperte compiute grazie a questa disciplina.
Più di un secolo dopo la morte di Giovanni Buridano, esattamente nel 1494, l'italiano fra Luca Pacioli (1445-1517) pubblica un'opera dal titolo "*Summa de arithmetica, geometria, proportioni, et proportionalità*".
Nella *Summa* Pacioli espone i primi esempi della storia di calcolo della probabilità.
Però, è solo dal XVI secolo che lo studio del caso diventa sistematico e rigoroso.
I primi passi compiuti da questa scienza possono essere utili per spiegare agli studenti delle scuole medie superiori perché molti esercizi proposti riguardano il gioco dei dadi.

1.2.1 GEROLAMO CARDANO ED IL GIOCO DEI DADI

Gerolamo Cardano (1501-1576) è stato uno scienziato eclettico; medico, matematico, filosofo, astrologo, ha anche compiuto invenzioni ingegneristiche.
Prima di morire, dopo aver già pubblicato 131 libri su svariati argomenti, incendiò 170 manoscritti inediti[6]. Ciò nonostante, dopo la sua morte ne vennero ritrovati altri 111.[7]
Uno di questi venne pubblicato nel 1663 col titolo *Liber de ludo aleae.*

Gerolamo Cardano nacque da Fazio, esperto di geometria ed amico di Leonardo da Vinci, e da Chiara de Micheriis che non si erano mai sposati. Fin da bambino Gerolamo fu costretto ad aiutare il padre ma, non amando questa sorte, cercò di emanciparsi per studiare medicina a Pavia.
Per mantenersi agli studi, prima a Pavia e dopo a Padova, iniziò a giocare d'azzardo. Per il suo vizio del gioco morì in povertà, lui stesso nella sua autobiografia ha scritto "*Così ho dilapidato contemporaneamente la mia reputazione, il mio tempo e il mio denaro*".
Nonostante la sua chiara fama come professore dell'università di Pavia e dell'università di Bologna, oltre che povero, Cardano morì anche in esilio a causa di una serie di comportamenti dei figli.[7]

Nel 1545 Cardano pubblicò un opera intitolata *Ars magna* in cui era contenuta la formula risolutiva delle equazioni di terzo grado, fino ad allora sconosciuta.
Nel 1539 il matematico Niccolò Fontana (1499-1557), conosciuto col nome di Tartaglia perché balbuziente, dopo molte insistenze aveva scritto a Cardano il suo metodo risolutivo delle equazioni di terzo grado.[8]

Quando chel cubo con le cose appresso
Se agguaglia à qualche numero discreto
Trouan dui altri differenti in esso.

Dapoi terrai questo per consueto
Che'llor produtto sempre sia eguale
Al terzo cubo delle cose neto,

El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi ben sottratti
Varra la tua cosa principale.

In el secondo de cotesti atti
Quando che'l cubo restasse lui solo
Tu osseruarai quest'altri contratti,

Del numer farai due tal part'à uolo
Che l'una in l'altra si produca schietto
El terzo cubo delle cose in stolo

Delle qual poi, per commun precetto
Torrai li lati cubi insieme gionti
Et cotal somma sara il tuo concetto.

El terzo poi de questi nostri conti
Se solue col secondo se ben guardi
Che per natura son quasi congionti.

Questi trovai, et non con passi tardi
Nel mille cinquecentè, quatro e trenta
Con fondamenti ben sald'è gagliardi

Nella citta dal mar'intorno centa.

Dopo la pubblicazione dell'Ars Magna, Tartaglia convinse Aldo Cardano, il figlio di Gerolamo, a diffamare il padre in cambio della nomina ufficiale a torturatore e boia della città di Bologna. [7]
L'accusa del figlio costò l'esilio a Gerolamo.

Nel suo studio del gioco dei dadi, Cardano scoprì la regola per le probabilità congiunte ed una prima intuitiva versione della legge dei grandi numeri. Inoltre introdusse le nozioni di spazio campionario, da lui chiamato "circuito", e di equiprobabilità.[9][10]

La regola per le probabilità congiunte afferma che la probabilità che si verifichino due eventi indipendenti tra loro è pari al prodotto delle probabilità che si verifichino i singoli eventi. Detti A e B due eventi indipendenti:

$$P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B)$$

Il *Liber de ludo aleae* è diviso in 32 brevi capitoli; 9 trattano considerazioni su vari aspetti del gioco, 6 il gioco dei dadi, 16 il gioco delle carte ed 1 il gioco deli astragali.
La teoria della probabilità viene affrontata per la prima volta nella storia per cercare metodi per barare efficacemente in questi giochi d'azzardo.

1.2.2 GALILEO GALILEI ED IL GRAN DUCA DI TOSCANA

Prima che fosse pubblicato il libro di Cardano anche Galileo Galilei (1564-1652) scrisse un piccolo libro in cui si dissertava sul gioco dei dadi.

Galilei è uno dei più importanti scienziati di tutti i tempi, è considerato il padre del metodo scientifico e della scienza moderna, spinto dalla sua curiosità è stato fisico, filosofo, astronomo e matematico ed ha contribuito al progresso di molti campi scientifici ma non fu per suo interesse che si occupò di probabilità.
Gerolamo Cardano aveva iniziato lo studio del calcolo delle probabilità per il suo vizio del gioco d'azzardo mentre Galilei non si avvicinò mai a questi ambienti.
Fu il gran duca di Toscana, il suo mecenate, a dilettarsi nel gioco dei dadi ed a commissionargli uno studio sugli esiti più probabili.

Per questo motivo nel 1596 Galilei scrisse *Sopra le scoperte dei dadi*, un libretto in cui analizzava il gioco della Zara.
Il gioco della Zara consisteva nel lanciare contemporaneamente tre dadi. Tutti i partecipanti potevano scommettere su quale sarebbe stata la somma dei valori usciti.
Come Cardano anche Galilei si accorse che le sei "scoperte" di un dado sono "indifferenti" cioè equiprobabili.
Scrisse poi che le "triplicità", ovvero le terne disordinate dei risultati, possono essere di tre tipi:
quelle che si compongono da 3 numeri eguali, che si possono ottenere in un modo solo, quelle che nascono da 2 numeri eguali e dal terzo differente che si producono in 3 maniere (es.: la triplicità: 1.1.2 si può ottenere anche con: 1.2.1 e con 2.1.1) e quelle che nascono da 3 numeri tutti differenti che si formano in 6 maniere (es.: 1.2.3; 1.3.2; 2.1.3; 2.3.1; 3.1.2; 3.2.1).[11]
Con queste considerazioni di carattere combinatorio si accorse che le "triplicità" non sono equiprobabili tra loro. Galilei poi calcola se, nel gioco della zara, è più conveniente puntare sul 9 o sul 10. Entrambi i valori si possono ottenere con sei diverse "triplicità".
La somma 9 si può ottenere con (6,2,1), con (5,2,2), con (5,3,1), con (4,3,2), con (4,4,1) e con (3,3,3).
La somma 10 si può ottenere con (6,3,1), con (6,2,2), con (5,4,1), con (5,3,2), con (4,4,2) e con (4,3,2).
Tra le "triplicità" per ottenere 9 due nascono da 2 numeri uguali, una è composta da 3 numeri uguali e le restanti tre hanno tutti numeri diversi, mentre tra quelle per ottenere 10 ce ne sono tre che nascono da 2 numeri uguali e tre hanno numeri tutti diversi.
Complessivamente esistono $(2\cdot3)+(1\cdot1)+(3\cdot6)$ ovvero 25 modi di ottenere 9 e $(3\cdot3)+(3\cdot6)$

ovvero 27 modi di ottenere 10.
È quindi conveniente puntare sempre sul 10.

A prova del fatto che anche i valori da 3 a 8 sono più sconvenienti del 9 e del 10, Galilei costruisce una tabella con le "triplicità" utili per ottenere questi valori, che non superano mai le 5, e con le combinazioni, che non superano mai le 21.
Probabilmente già il gran duca si era accorto che i risultati vincenti erano spesso alti ma l'osservazione del tavolo da gioco, senza un accurato calcolo delle probabilità, non gli aveva permesso di capire se convenisse puntare sul 10, sul 9 o se la scelta fosse indifferente.

1.2.3 BLAISE PASCAL E LA GEOMETRIA DEL CASO

Cardano e Galilei nei loro brevi trattati sul gioco d'azzardo hanno per primi scritto come approcciarsi a particolari e specifici problemi probabilistici ma affinché la comunità scientifica si interessi alla teoria della probabilità bisogna aspettare il XVII secolo e spostarsi dall'Italia alla Francia.

Il frate minimo Marin Mersenne (1588-1648) fu un filosofo e matematico francese; ha avuto corrispondenza coi più noti matematici del suo tempo come René Descartes (1596-1650), noto in Italia come Cartesio, e Pierre de Fermat (1601-1655) ma è ricordato principalmente per aver studiato i numeri primi di Mersenne e per aver fondato l'Académie Mersenne.

Nel 1736 fu ammesso a questa scuola il giovanissimo Blaise Pascal(1623-1662) matematico, fisico, teologo e filosofo.
Alla sua morte venne ritrovata tra le sue carte una riflessione nota come la *scommessa di Pascal.*
La scommessa del filosofo riguardava l'esistenza o meno di Dio e la scelta lasciata agli uomini di credere in questa esistenza o meno. In pratica un problema decisionale in condizione di incertezza.

Se c'è un Dio, è infinitamente incomprensibile, perché, non avendo né parti né limiti, non ha nessun rapporto con noi. Siamo, dunque, incapaci di conoscere che cos'è, né se esista...
..."Dio esiste o no?" Ma da qual parte inclineremo? La ragione qui non può determinare nulla: c'è di mezzo un caos infinito. All'estremità di quella distanza infinita si gioca un giuoco in cui uscirà testa o croce. Su quale delle due punterete? Secondo ragione, non potete puntare né sull'una né sull'altra; e nemmeno escludere nessuna delle due.
Non accusate, dunque, di errore chi abbia scelto, perché non ne sapete un bel nulla. "No, ma io li biasimo non già di aver compiuto quella scelta, ma di avere scelto; perché, sebbene chi sceglie croce e chi sceglie testa incorrano nello stesso errore, sono tutte e due in errore: l'unico partito giusto è di non scommettere punto".
Sì, ma scommettere bisogna: non è una cosa che dipenda dal vostro volere, ci siete impegnato. Che cosa sceglierete, dunque? Poiché scegliere bisogna, esaminiamo quel che v'interessa meno. Avete due cose da perdere, il vero e il bene, e due cose da impegnare nel

giuoco: la vostra ragione e la vostra volontà, la vostra conoscenza e la vostra beatitudine; e la vostra natura ha da fuggire due cose: l'errore e l'infelicità. La vostra ragione non patisce maggior offesa da una scelta piuttosto che dall'altra, dacché bisogna necessariamente scegliere. Ecco un punto liquidato. Ma la vostra beatitudine? Pesiamo il guadagno e la perdita, nel caso che scommettiate in favore dell'esistenza di Dio. Valutiamo questi due casi: se vincete, guadagnate tutto; se perdete, non perdete nulla. Scommettete, dunque, senza esitare, che egli esiste.
"Ammirevole! Sì, bisogna scommettere, ma forse rischio troppo". Vediamo. Siccome c'è eguale probabilità di vincita e di perdita, se aveste da guadagnare solamente due vite contro una, vi converrebbe già scommettere. Ma, se ce ne fossero da guadagnare tre, dovreste giocare (poiché vi trovate nella necessità di farlo); e, dacché siete obbligato a giocare, sareste imprudente a non rischiare la vostra vita per guadagnarne tre in un giuoco nel quale c'è eguale probabilità di vincere e di perdere. Ma qui c'è un'eternità di vita e di beatitudine. Stando così le cose, quand'anche ci fosse un'infinità di casi, di cui uno solo in vostro favore, avreste pure sempre ragione di scommettere uno per avere due; e agireste senza criterio, se, essendo obbligato a giocare, rifiutaste di arrischiare una vita contro tre in un giuoco in cui, su un'infinità di probabilità, ce ne fosse per voi una sola, quando ci fosse da guadagnare un'infinità di vita infinitamente beata. Ma qui c'è effettivamente un'infinità di vita infinitamente beata da guadagnare, una probabilità di vincita contro un numero finito di probabilità di perdita, e quel che rischiate è qualcosa di finito.[12]

Pascal, non avendo motivo di ritenere più probabile l'esistenza di Dio dell'inesistenza, stima pari a $\frac{1}{2}$ entrambe. È però incerto sulle conseguenze della scelta in caso di esistenza e non esclude che il premio in cambio delle fede sia infinito.
Scegliendo di credere si può quindi avere, qualora Dio non esistesse, con probabilità $\frac{1}{2}$ una perdita finita, ossia i sacrifici compiuti in nome della fede, e si può avere, qualora Dio esistesse, con probabilità $\frac{1}{2}$ un guadagno finito o infinito. Scegliere di credere è quindi un opzione molto vantaggiosa.
Scegliendo di non credere invece, senza neanche valutare le possibili perdite in caso di esistenza di Dio, non si ha nessun guadagno neanche in caso di inesistenza di Dio.
Per Pascal credere in Dio è quindi una scelta razionale.

Nel 1651 morì il matematico Étinne Pascal (1588-1651), padre di Blaise che quindi ereditò i beni del genitore e si dedicò alla vita mondana ed al gioco.
Nel 1654 il Cavaliere de Mèrè Antoine Gombaud (1607 - 1684) gli pose una questione sui dadi che portò il filosofo ad interessarsi di calcolo delle probabilità.
In quegli anni andava di moda un gioco d'azzardo che consisteva nel lanciare 4 volte un dado ed in cui si vinceva se almeno una volta usciva 6. Il gioco sembrava vantaggioso ad Antoine Gombaud che ne ideò un altro: bisognava lanciare per 24 volte due dadi e si vinceva se almeno una volta usciva una coppia di 6. Il cavaliere pensava che una coppia di 6 fosse sei volte meno probabile di un solo 6 e che quindi aumentando di sei volte il numero di lanci la sorte si sarebbe dovuta riequilibrare. Suo malgrado però si accorse che questo gioco era invece svantaggioso e scrisse a Pascal in cerca di una spiegazione.

Per trovarla può essere utile calcolare la probabilità di perdere nei due giochi. Usan-

do solo le scoperte di Cardano e Galileo sappiamo che la probabilità che lanciando un dado non esca 6 è $\frac{5}{6}$ mentre che lanciandone due non esca una coppia di 6 è $\frac{35}{36}$.
Al primo gioco si perde se per 4 volte non esce 6 e la probabilità P di questo evento è

$$P = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 48\%$$

La probabilità di vincere al primo gioco è quindi maggiore del 50% ed è quindi vantaggioso giocarci.
Al secondo gioco si perde se per 24 volte non esce una coppia di 6 e la probabilità P di questo evento è

$$P = \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 51\%$$

La probabilità di vincere al secondo gioco è quindi minore del 50% ed è quindi svantaggioso giocarci.

Per giungere a queste conclusioni Pascal iniziò una corrispondenza epistolare con Fermat dove oltre a questo problema ne venne affrontato un altro posto da fra Luca Pacioli nel *Summa* noto come il problema delle parti. Nella versione originale il problema chiedeva il giusto modo in cui due giocatori avrebbero dovuto dividersi un premio in denaro se avessero dovuto interrompere un gioco in cui vince chi per primo arriva a 6 punti ed in cui il primo ne ha totalizzati 5 ed il secondo 3.
Per risolvere il problema dobbiamo prima definire la probabilità che accada un evento E_1 oppure un evento E_2.
Siano E_1 ed E_2 due eventi **incompatibili** allora:

$$P(E_1 \vee E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

Chiamiamo E_1 l'evento "il primo giocatore conquista un altro punto" ed E_2 l'evento "il secondo giocatore conquista un altro punto".
Non avendo motivo di preferire un evento all'altro fissiamo $P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2}$
Il primo giocatore vince se capita una delle seguenti successioni (incompatibili tra loro) di eventi:

- E_1 che ha probabilità $\frac{1}{2}$
- E_2, E_1 che ha probabilità $\frac{1}{4}$
- E_2, E_2, E_1 che ha probabilità $\frac{1}{8}$

Complessivamente il primo giocatore ha probabilità $\frac{7}{8}$ di vincere.
Il secondo giocatore invece vince soltanto se scapita la successione di eventi E_2, E_2, E_2 che ha probabilità $\frac{1}{8}$.
La giusta divisone del montepremi è quindi di $\frac{7}{8}$ al primo e $\frac{1}{8}$ al secondo.
Dopo che Pascal rese noto il suo carteggio con Cartesio, parlando di geometria del caso,

altri matematici iniziarono ad interessarsi della teoria della probabilità. Il primo trattato sulla materia verrà pubblicato nel 1657 da Christiaan Huygens (1629-1695) col titolo *De ratiociniis in ludo aleae.* [9]

Pascal rimase entusiasta delle scoperte compiute per rispondere alle domande del Cavaliere de Mèrè tanto da scrivere:

La materia [il trattamento degli eventi casuali] fino ad ora non era stata risolta ma oggi essa, che si era opposta all'esperimento, non poté sfuggire al dominio della ragione. L'abbiamo ridotta per mezzo della geometria con tanta sicurezza a scienza che [...] ormai può procedere spavalda. Così questa scienza, unendo le dimostrazioni della matematica con le incertezze del caso e conciliando cose che sembrano contrarie, prende il suo nome dall'una e dall'altro e rivendica con diritto questo titiolo stupefacente: **la geometria del caso**.[13]

1.2.4 THOMAS BAYES E LA PROBABILITÀ CONDIZIONATA

La geometria del caso costruita nel XVII secolo si fondava sulla conoscenza aprioristica della probabilità di un evento. I matematici assumevano che lanciando una moneta la probabilità che uscisse testa fosse $\frac{1}{2}$ così come lanciando un dado la probabilità che uscisse 4 fosse $\frac{1}{6}$.
Questa teoria della probabilità ci permette di risolvere problemi decisionali in condizione di rischio ma non di incertezza.

In un problema in condizione di incertezza potrebbe capitare di non sapere se una moneta sia truccata (ovvero la probabilità che esca testa è diversa da $\frac{1}{2}$)o perfettamente bilanciata (ovvero la probabilità che esca testa è $\frac{1}{2}$). In tal caso potrebbe esserci concesso di osservare dei fenomeni, ossia fare degli esperimenti, per stimare la probabilità soggiacente. Ma come fare?

Diede una risposta a questa domanda il prete britannico Thomas Bayes (1702-1761). Bayes non era un matematico di professione e quindi non pubblicò la sua scoperta. Fortunatamente lasciò i suoi appunti in eredità al filosofo e matematico Richard Price (1723-1791) che non conosceva molto bene, riferendosi a lui nel testamento come "un predicatore di Newington Green, almeno credo".[7][14]

Bayes ideò questo esperimento. Si fa rotolare su un tavolo una pallina senza guardare dove si ferma ed in modo da non poter prevedere in quale punto si fermi. Il punto dell'asse destra-sinistra in cui la pallina si è fermata è metaforicamente una probabilità da stimare.
Si lancia poi ripetutamente una seconda pallina sul tavolo ed un assistente ad ogni lancio ci dice se la pallina si è fermata più a destra o più a sinistra della prima.
Naturalmente dopo molti esperimenti se la maggior parte delle volte la seconda pallina si ferma a sinistra della prima, possiamo dedurre che la prima pallina si trova sulla parte

destra dell'asse; se la maggior parte delle volte la seconda pallina si ferma a destra della prima, possiamo dedurre che la prima pallina si trova sulla parte sinistra dell'asse; se il numero di volte che la seconda pallina è a destra si discosta di poco dal numero di volte che la seconda pallina è a sinistra, possiamo dedurre che la prima pallina si trova circa al centro del tavolo.[7][14]
In questo modo la stima che diamo alla probabilità che la prima pallina si sia fermata in una regione del tavolo sarà condizionata dal risultato dell'esperimento.
Grazie a Thomas Bayes lo studio della probabilità si arricchisce della teoria della probabilità condizionata.
La definizione formale di probabilità condizionata ed il teorema di Bayes, centrale per questa teoria, verranno descritti nel paragrafo 1.3.4.

1.3 COS'É LA PROBABILITÀ

Il concetto di probabilità è il più importante della scienza moderna, soprattutto perché nessuno ha la più pallida idea del suo significato - B. Russel, 1929

Per affrontare pienamente la teoria della scelta razionale è necessario saper dominare le condizioni di rischio e di incertezza. Ciò rende necessario capire esattamente cosa sia la probabilità che un evento incerto si realizzi.
Abbiamo più volte assunto che la probabilità che lanciando una moneta esca testa è $\frac{1}{2}$ ma esattamente questo cosa vuol dire?
Certo non vuol dire che lanciando due volte una moneta siamo sicuri che testa esca esattamente una volta. E come affrontare la possibilità che in un lancio la moneta caschi sul fianco non facendo uscire nè testa nè croce? Possiamo esser certi che ciò sia impossibile?
La difficoltà nel capire cosa sia la probabilità diventa ancora più plastica parlando di eventi più complessi. Qual è la probabilità che un particolare partito vinca le elezioni? Diversi sondaggi stimano in modo differente questa probabilità. Qual è la stima giusta tra quelle date? Solo un sondaggio ha trovato la stima giusta e gli altri ne danno una sbagliata? Ne hanno data una sbagliata tutti quanti? Forse sono giuste tutte le stime? Possono essere considerate giuste stime diverse tra loro? Chi può dare una risposta definitiva a queste domande?
Non essendoci certezze quando si parla di probabilità, non ci sono neanche certezze su cosa sia la probabilità di un evento e per questo motivo ne esistono più definizioni.

1.3.1 DEFINIZIONE FREQUENTISTA

Definizione 1.3.1. *Sia E il possibile esito di un esperimento. Se compiendo n volte l'esperimento, l'esito E si realizza n_E volte, il valore $\frac{n_E}{n}$ viene detto **frequenza** di E e si indica con $F(E)$*

Il matematico Richard von Mises (1883-1953) propose di definire la probabilità di E come

$$P(E) = \lim_{n->+\infty} \frac{n_E}{n}$$

ovvero come il limite della frequenza.

La definizione di von Mises rende impossibile il calcolo preciso di $P(E)$ ma ne permette un calcolo approssimato ripetendo un esperimento per un numero sufficientemente alto di volte.
Con questa definizione non si assume aprioristicamente che la probabilità che lanciando una moneta esca testa è $\frac{1}{2}$ ma si calcola una stima lanciando la moneta molte volte.
Il primo problema di questa definizione è che anche per gli eventi più semplici bisogna stabilire quante volte ripetere l'esperimento per essere soddisfatti della stima.
Infatti lanciando una moneta 1000 volte è possibile che le prime 500 volte esca testa e

le seconde 500 esca croce. Un osservatore che si limita a osservare i primi 500 risultati stimerà 1 la probabilità che esca testa mentre uno che ne osserva 1000 dimezzerà la stima. Inoltre esistono molti eventi che non si possono ripetere o che si possono ripetere difficilmente per cui questa definizione diventa poco pratica.

1.3.2 DEFINIZIONE ASSIOMATICA

La definizione assiomatica della probabilità venne data dal matematico sovietico Andrej Nikolaevič Kolmogorov (1903-1987). Kolmogorov non dice cosa sia la probabilità che accada un evento, nè come calcolarla ma fornisce degli assiomi che la probabilità deve rispettare.
Prima di elencare gli assiomi definiamo:

- Ω l'evento certo
- $\emptyset$ l'evento impossibile
- $E^c = \Omega \setminus E$

Gli assiomi sono:

- $E \subseteq \Omega$, $\forall E$ e formano una classe additiva
- $P(E) \geq 0$, $\forall E$
- $P(\Omega) = 1$
- $(E_1 \wedge E_2) = \emptyset \Rightarrow P(E_1 \vee E_2) = P(E_1) + P(E_2)$
- $A_n \subseteq A_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n->+\infty} \bigwedge_{i \leq n} A_n = \emptyset \Rightarrow \lim_{n->+\infty} P(A_n) = 0$

Da cui segue:

- $P(\emptyset) = 0$
- $1 \geq P(E) \geq 0$, $\forall E$
- $E \wedge E^c = \emptyset$, $\forall E$
- $E \vee E^c = \Omega$, $\forall E$
- $P(E_1 \vee E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \wedge E_2)$

DEFINIZIONE CLASSICA

Poiché gli assiomi non definiscono cosa sia, sono state date più interpretazioni della probabilità di un evento.
La più conosciuta è la definizione classica che afferma che la probabilità che un evento si realizzi è data dal rapporto tra il numero di casi favorevoli all'evento ed il numero di casi possibili.

Ad esempio, lanciando una moneta, se si presume che i casi possibili siano solo l'uscita della testa e l'uscita della croce, essendoci solo un caso favorevole all'uscita della croce, la probabilità che esca croce è $\frac{1}{2}$.
Si potrebbe includere tra i casi possibili anche il caso in cui non esca ne testa ne croce e, nel senso classico, la probabilità diventerebbe $\frac{1}{3}$. La ragione però induce a pensare che la probabilità che esca croce non può essere equivalente alla probabilità che non esca ne testa ne croce.

Una giusta lettura della definizione classica deve essere:
la probabilità che un evento si realizzi è dato dal rapporto tra il numero di casi favorevoli all'evento ed il numero di casi possibili, qualora tutti i casi siano equiprobabili.

Abbiamo quindi paradossalmente subordinato la definizione di probabilità a quella di equiprobabilità.
Commenta Bruno de Finetti (1906-1985):

Tale giudizio di equiprobabilità [...] rispecchia una situazione di simmetria che viene spesso precisata obiettivamente dicendo che le palline debbono essere uguali, la moneta ed il dado perfetti, simmetrici fisicamente, etc.; il criterio rimane tuttavia fondamentalmente soggettivo perché la scelta più o meno vaga di requisiti più o meno oggettivi da includere o no in tale concetto di "uguaglianza" non può che riflettere la distinzione soggettiva di ciascuno tra le circostanze che influiscono o non influiscono sulla sua opinione.[15]

1.3.3 BRUNO DE FINETTI E LA DEFINIZIONE SOGGETTIVA

Per la nostra teoria della scelta razionale possiamo refutare sia la definizione classica che la definizione frequentista. Non avendo l'ambizione di avere stime di probabilità universalmente riconosciute ma utili ad un singolo agente a individuare la scelta razionale, possiamo avvalerci di una definizione soggettiva.

Prima di proporre la definizione di De Finetti riportiamo una riflessione della filosofa Franca D'Agostini esposta a Paolo Angoli:

Chi dice che le due facce della moneta "hanno" la stessa probabilità? E cosa vuol dire "hanno"? Siamo noi che, giudicando i possibili esiti, i quali devono essere distinguibili *(altrimenti ogni ragionamento su di essi è vano), non abbiamo alcun motivo per ritenere un esito più "probabile" dell'altro (ovvero "probabile" è un nostro giudizio, una nostra "credenza", credenza scientifica, razionale, ma sempre credenza - quella che gli inglesi chiamano "belief"). E le credenze scientifiche possono - devono! - essere modificate dalle osservazioni sperimentali. Quindi se lanciamo una moneta e abbiamo ragione di credere che essa non sia perfettamente simmetrica, a mano a mano che la lanciamo modifichiamo la probabilità del prossimo esito. Questo aggiornamento può essere effettuato in modo rigoroso usando le regole della probabilità, e più precisamente il famoso teorema di Bayes.*[7]

La definizione soggettiva non esclude che esista una probabilità intrinseca agli eventi di natura divina, piuttosto si prefigge di individuare in contrapposizione a questa una stima di natura umana.
La razionalità dell'agente che nella nostra teoria deve compiere la scelta viene garantita dal rispetto degli assiomi di Kolmogorov nello stimare le probabilità degli eventi. Un individuo che compie delle stime soggettive che non rispettano gli assiomi non viene considerato razionale.

La probabilità di un evento per un individuo razionale è quindi la misura del grado di fiducia che quell'evento accada.

De Finetti formalizza questo concetto così:
La probabilità di un evento è il prezzo che un individuo ritiene equo pagare per ricevere 1 se l'evento si verifica, 0 se l'evento non si verifica.
Le probabilità degli eventi devono essere attribuite in modo tale che non sia possibile ottenere una vincita o una perdita certa.

Da questa semplice definizione si possono ricavare facilmente i primi tre dei quattro assiomi sulle probabilità di Kolmogorov (il primo riguarda il concetto di evento).

Proposizione 1.3.2. *Nella probabilità soggettivista sono validi:*

1. $P(E) \geq 0, \forall E$

2. $P(\Omega) = 1$

3. $(E_1 \wedge E_2) = \emptyset \Rightarrow P(E_1 \vee E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

Dimostrazione.

1. Se $P(E) < 0$, si avrebbe un guadagno sia in caso E non si verifichi, esattamente pari a $-P(E)$ sia in caso si verifichi, pari a $1 - P(E)$. Si avrebbe quindi un guadagno certo.

2. Se $P(\Omega) \neq 1$ allora $1 - P(\Omega) \neq 0$, si avrebbe quindi un guadagno o una perdita certa scommettendo sull'evento certo

3. Se E_1 ed E_2 sono incompatibili allora l'evento certo si può ripartire in E_1, E_2, $(E_i \vee E_2)^c$, scommettendo su tutti e tre gli eventi si è quindi certi di avere un

guadagno pari a 1.
Ne segue che $P(E_1) + P(E_2) + P(E_i \vee E_2)^c = 1$. Anche $(E_i \vee E_2)$ e $(E_i \vee E_2)^c$ sono una ripartizione dell'evento certo e quindi $P(E_i \vee E_2) + P(E_i \vee E_2)^c = 1$.
Da ciò $P(E_1 \vee E_2) = P(E_1) + P(E_2)$.

□

UN CASO DI EQUIPROBABILITÀ

Le riflessioni filosofiche di de Finetti e D'Agostini non devono far pensare che sia impossibile definire degli eventi equiprobabili.

Si consideri, rispetto al lancio di una moneta che non sappiamo se sia perfettamente bilanciata, l'evento E "esce testa" e l'evento E^c "non esce testa". Si noti che non abbiamo contrapposto all'uscita delle testa l'uscita della croce in modo da non escludere altri possibili esiti.
Per compiere il nostro esperimento ci premuriamo di avere un piano molto grande su cui far cadere la moneta e di un materiale per cui la caduta della moneta non ammacchi ne il piano ne la moneta stessa.
Con questa accortezza ci garantiamo che $P(E)$ e $P(E^c)$ non cambino da lancio a lancio.
Naturalmente $P(E^c) = 1 - P(E)$. L'esperimento consiste nel lanciare la moneta due volte e si possono osservare 4 diversi esiti:

- A: accade E al primo lancio ed E al secondo lancio
- B: accade E al primo lancio ed E^c al secondo lancio
- C: accade E^c al primo lancio ed E al secondo lancio
- D: accade E^c al primo lancio ed E^c al secondo lancio

Sia l'evento B che l'evento C hanno probabilità pari a $P(E) \cdot (1 - P(E))$ e sono quindi equiprobabili tra loro, qualsiasi sia la probabilità che esca testa.

1.3.4 DEFINIZIONE DI PROBABILITÁ CONDIZIONATA E TEOREMA DI BAYES

Definizione 1.3.3. *Siano A e B due eventi.*
*La **probabilità condizionata** di A rispetto a B è la probabilità che accada l'evento A sapendo che è già accaduto l'evento B e si indica con $P(A|B)$.*

$$P(A|B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)}$$

Teorema 1.3.4. *Siano A e B eventi.*
Allora:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)}$$

Dimostrazione. Per definizione:

$$P(B|A_i) = \frac{P(B \wedge A_i)}{P(A_i)}$$

quindi:

$$P(B \wedge A_i) = P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

Essendo

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \wedge B)}{P(B)}$$

e sostituendo $P(B \wedge A_i)$ si ottiene

$$P(A|B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)}$$

□

Corollario 1.3.5. *Siano $A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n, B$ eventi tali che A_i è incompatibile ad A_j, $\forall i, j \in 1, ..., n$, e $(A_1 \vee A_2 \vee .. \vee A_{n-1} \vee A_n) = \Omega$.*
Allora:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(B|A_j) \cdot P(A_j)}$$

Dimostrazione.

$$B = (B \wedge \Omega)$$

quindi:

$$P(B) = P(B \wedge \Omega) = P(B \wedge (A_1 \vee A_2 \vee .. \vee A_{n-1} \vee A_n))$$

$$P(B) = P((B \wedge A_1) \vee (B \wedge A_2) \vee .. \vee (B \wedge A_{n-1}) \vee (B \wedge A_n)) \tag{1.1}$$

Essendo $(A_i \wedge A_j) = \emptyset$, $\forall i, j \in 1, ..., n$, ne segue $((B \wedge A_i) \wedge (B \wedge A_j)) = \emptyset$, $\forall i, j \in 1, ..., n$.
Da cui:

$$P((B \wedge A_i) \vee (B \wedge A_j)) = P(B \wedge A_i) + (B \wedge A_j)$$

Sostituendo nella (1.1) otteniamo:

$$P(B) = P(B \wedge A_1) + P(B \wedge A_2) + .. + P(B \wedge A_{n-1}) + P(B \wedge A_n) \tag{1.2}$$

Per definizione:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \wedge B)}{P(B)}$$

quindi:

$$P(A_i \wedge B) = P(A_i|B) \cdot P(B)$$

Sostituendo nella (1.2) otteiamo:

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(B|A_j) \cdot P(A_j)$$

Sostituendo questo risultato al teorema precedente si dimostra la tesi.

□

2. PARADOSSI PROBABILISTICI

La nascita della teoria della probabilità e lo studio della geometria del caso ha permesso la costruzione di modelli matematici utili e indispensabili per il progresso della scienza.
Il marchese Pierre Simon Laplace (1749-1827), il 20 gennaio 1795, nella sua prima lezione di matematica alla scuola di formazione per insegnanti di scuola secondaria, l'École Normale Supérieure, descrisse così l'importanza di questa teoria:

Infine, si esporranno i principi del calcolo delle probabilità. In tempi in cui tutti i cittadini sono chiamati a decidere delle sorti dei loro simili, a loro importa conoscere i principi di una scienza che fa apprezzare, nel modo più esatto possibile, la probabilità delle testimonianze, e quella che risulta dalle circostanze che accompagnano i fatti; a loro importa soprattutto imparare a non fidarsi delle intuizioni, anche delle più verosimili; e niente è più adatto a questo scopo che la teoria delle probabilità, dove spesso i risultati rigorosi contraddicono queste intuizioni. D'altra parte, le numerose applicazioni di questa teoria, alla natalità, alla mortalità, alle elezioni e alle assicurazioni, applicazioni che fa comodo conoscere, e che occorre perfezionare ed estendere ad altri aspetti della società, la rendono una delle parti più utili delle conoscenze umane.[16]

Nonostante la centralità della teoria delle probabilità, questa viene spesso accolta con diffidenza. La probabilità, infatti, si basa su concetti spesso controintuitivi. L'equiprobabilità tra un evento più tipico e uno meno tipico, come l'estrazione di una cinquina disordinata ed una ordinata nel gioco del lotto, è difficile da accettare.
Inoltre, la teoria della probabilità e, ancor di più, quella della probabilità condizionata generano molti paradossi.

2.1 PRIMO PARADOSSO DI BERTRAND

Il **principio dell'indifferenza**, detto da Laplace della ragione insufficiente, dice che se tra più eventi non c'è motivo di ritenere più credibile il realizzarsi di uno rispetto agli altri, a tutti gli eventi va assegnata la stessa probabilità.

Il matematico Joseph Bertrand (1822-1900) nel suo lavoro del 1889, *Calcolo delle probabilità*, mostra attraverso un paradosso i limiti del principio dell'indifferenza applicato al caso del continuo.

Si prenda un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza e si scelga casualmente una corda del cerchio. Qual è la probabilità che la corda sia più lunga di un lato del triangolo?

La difficoltà nel rispondere a questa domanda risiede nella parola "casualmente" che non specifica come si debba scegliere la corda.
Bertrand mostra tre diversi metodi di compiere casualmente la scelta che generano probabilità differenti.

Metodo 1:
Si scelgono casualmente due punti sulla circonferenza. Si può definire una corrispondenza biunivoca che associa ad una coppia di punti la corda che ha gli estremi su quei punti della circonferenza.
In questo modo la probabilità che la corda sia più lunga di un lato del triangolo è $\frac{1}{3}$.

Metodo 2:
Si sceglie casualmente un raggio della circonferenza e poi casualmente un punto di tale raggio. Si può definire una corrispondenza biunivoca che associa alla coppia, raggio e suo punto, la corda perpendicolare al raggio e passante per quel punto.
In questo modo la probabilità che la corda sia più lunga di un lato del triangolo è $\frac{1}{2}$.

Metodo 3:
Si sceglie casualmente un punto del cerchio delimitato dalla circonferenza. Si può definire una corrispondenza biunivoca che associa al punto la corda che ha quel punto come punto medio.
In questo modo la probabilità che la corda sia più lunga di un lato del triangolo è $\frac{1}{4}$.

2.2 SECONDO PARADOSSO DI BERTRAND

In *Calcolo delle probabilità*, Joseph Bertrand mostra anche un'applicazione della probabilità condizionata che risulta paradossale.

Si prendono tre scatole indistinguibili tra loro. In una scatola vengono messe due monete d'oro, in un'altra due monete d'argento e nella terza una moneta d'oro ed una d'argento. Viene poi scelta casualmente una delle tre scatole e, dalla scatola scelta, viene estratta casualmente una moneta al suo interno che risulta essere d'oro.
Qual è la probabilità che anche la seconda moneta nella scatola sia d'oro?

Intuitivamente si è portati a pensare che, essendoci solo due possibilità (o l'altra moneta è d'oro o è d'argento), la risposta sia $\frac{1}{2}$.

Applicando il corollario del teorema di Bayes (1.3.5), si trova che la risposta è diversa.

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(B|A_j) \cdot P(A_j)}$$

Siano:

- A_1 l'evento "viene scelta casualmente la scatola che contiene due monete d'oro"
- A_2 l'evento "viene scelta casualmente la scatola che contiene due monete d'argento"
- A_3 l'evento "viene scelta casualmente la scatola che contiene una moneta d'oro ed una moneta d'argento"
- B l'evento "viene estratta una moneta d'oro"

Si conoscono le seguenti probabilità

- $P(B|A_1) = 1$
- $P(B|A_2) = 0$
- $P(B|A_3) = \frac{1}{2}$
- $P(A_1) = \frac{1}{3}$
- $P(A_2) = \frac{1}{3}$
- $P(A_3) = \frac{1}{3}$

Il quesito di Bertrand chiede quale sia la probabilità che estratta una moneta d'oro anche l'altra sia della stessa lega. Questo capita solo e soltanto se si realizza l'evento A_1. Per trovare la risposta dobbiamo allora trovare quanto vale $P(A_1|B)$.
Applicando il corollario del teorema risulta:

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{(P(B|A_1) \cdot P(A_1)) + (P(B|A_2) \cdot P(A_2)) + (P(B|A_3) \cdot P(A_3))}$$

$$P(A_1|B) = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{(1 \cdot \frac{1}{3}) + (0 \cdot \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3})} = \frac{2}{3}$$

La risposta risulta meno paradossale se si nota che la procedura descritta nel problema rende equiprobabile l'estrazione di ognuna delle sei monete. L'informazione che la prima moneta sia d'oro limita lo spazio delle possibilità a sole tre monete. Di queste una "è compagna" di una moneta d'argento e due "sono compagne" di una moneta d'oro.
Analizzando in questo modo il problema ed usando la definizione classica di probabilità, risulta che il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili è $\frac{2}{3}$.

2.3 PARADOSSO DI WEAVER

Il paradosso di Bertrand è stato riscoperto indipendentemente negli anni '50 da Warren Weaver (1894-1978) e ripreso da Martin Gardner. Lo stesso Weaver però nel suo bel libro Lady Luck, che è del 1963, attribuisce l'idea a Bertrand e presenta il suo gioco delle tre carte come una scenografia alternativa.[17]

Il paradosso di Bertrand mostra come la teoria della probabilità condizionata aiuta a prevenire intuizioni fallaci. L'esempio che propone però risulta un po' macchinoso e di difficile attuazione. Se, ad esempio, estraendo la prima moneta questa risultasse d'argento si dovrebbe ricominciare da capo tutta la procedura.
Per questo motivo può essere interessante, specialmente in un contesto didattico o divulgativo, proporre il paradosso sotto forma del gioco di Weaver.

Si organizza un gioco con tre carte ed un sacco nero. Una carta è bianca su entrambe le facce, una è rossa su entrambe le facce e una è bianca da un lato e rossa dall'altro. Il sacco viene rivoltato più volte per mostrare che non nasconde nulla. Le carte vengono mostrate ai giocatori e vengono mescolate, avendo cura di cambiare anche il loro verso, dentro al sacco nero in modo che i giocatori non vedano.
Viena estratta una carta e se ne mostra solo una faccia. Chi vuole partecipare può puntare qualsiasi cifra e ne riceverà il doppio della puntata (la vincita è quindi del 100%) se la faccia nascosta della carta ha il colore diverso da quella visibile.
Il banco quindi incasserà se la faccia nascosta ha lo stesso colore di quella visibile.

La stessa intuizione fallace del problema di Bertrand può far credere che ci sia, per un giocatore, una probabilità di $\frac{1}{2}$ di vincere.
Vediamo che non è così. Siano:

- A_1 l'evento "viene scelta casualmente la carta con entrambe le facce bianche"
- A_2 l'evento "viene scelta casualmente la carta con entrambe le facce rosse"
- A_3 l'evento "viene scelta casualmente la carta che ha una faccia bianca ed una rossa"
- B_1 l'evento "la faccia visibile è bianca"
- B_2 l'evento "la faccia visibile è rossa"

Si conoscono le seguenti probabilità:

- $P(B_1|A_1) = 1$
- $P(B_1|A_2) = 0$
- $P(B_1|A_3) = \frac{1}{2}$

- $P(B_2|A_1) = 0$
- $P(B_2|A_2) = 1$
- $P(B_2|A_3) = \frac{1}{2}$
- $P(A_1) = \frac{1}{3}$
- $P(A_2) = \frac{1}{3}$
- $P(A_3) = \frac{1}{3}$

Facilmente si calcola:

- $P(B_1) = \frac{1}{2}$
- $P(B_2) = \frac{1}{2}$

Il giocatore vince se capita l'evento A_3.
Usando un ragionamento analogo a quello fatto nella dimostrazione del corollario 1.3.5, risulta:

$$P(A_3) = (P(A_3|B_1) \cdot P(B_1)) + (P(A_3|B_2) \cdot P(B_2))$$

Calcoliamo quindi $P(A_1|B_1)$ e $P(A_1|B_2)$.

$$P(A_3|B_1) = \frac{P(B_1|A_3) \cdot P(A_3)}{(P(B_1|A_1) \cdot P(A_1)) + (P(B_1|A_2) \cdot P(A_2)) + (P(B_1|A_3) \cdot P(A_3))}$$

$$P(A_3|B_1) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{(1 \cdot \frac{1}{3}) + (0 \cdot \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3})} = \frac{1}{3}$$

$$P(A_3|B_2) = \frac{P(B_2|A_3) \cdot P(A_3)}{(P(B_2|A_1) \cdot P(A_1)) + (P(B_2|A_2) \cdot P(A_2)) + (P(B_2|A_3) \cdot P(A_3))}$$

$$P(A_3|B_1) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{(0 \cdot \frac{1}{3}) + (1 \cdot \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3})} = \frac{1}{3}$$

Risulta quindi:

$$P(A_3) = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

Il gioco così organizzato è conveniente per il banco e, contrariamente all'intuizione, è sconveniente giocarci.

2.4 TAXI VERDI E TAXI BLU

Come accennato nella descrizione dei precedenti paradossi, il calcolo delle probabilità può risultare controintuitivo. Un problema analogo ai paradossi di Bertrand e Weaver venne formulato dagli psicologi israeliani Daniel Kahneman (1934) e Amos Tversky (1937-1996) interessati allo studio dell'economia comportamentale.
La scoperta della fallacia sistematica dell'intuito umano ha fatto vincere a Kahneman il premio Nobel per l'economia.

Kahneman e Tversky sottoposero ai loro intervistati, tra gli altri, un problema noto come "paradosso dei taxi" o "sofisma del giurato".
Il problema era così presentato:

In una città americana, di sera, un uomo viene investito da un'automobile mentre attraversa la strada. L'auto non si ferma a soccorrerlo ma scappa via. L'uomo non riesce a leggere la targa ma vede distintamente che si tratta di un taxi.
Nella città ci sono due compagnie di taxi, una si serve di autoveicoli verdi ed una di autoveicoli blu.
L'avvocato dell'uomo gli consiglia di fare causa e chiedere un risarcimento alla compagnia dei taxi verdi che è la più grande della città e possiede l'85% dei mezzi.
Al processo si fa avanti un testimone che dichiara di aver visto che il taxi che ha investito l'uomo è blu. Trattandosi di un anziano signore, il giudice si accerta che il testimone sia in buona fede ma fa fare una perizia sulle capacità visive del testimone.
Dalla perizia risulta che il testimone, nelle particolari condizioni di visibilità della sera dell'incidente, individua correttamente l'80% dei taxi verdi e l'80% dei taxi blu.
Tenendo conto che in un processo civile, in America, basta una "preponderanza delle prove" per condannare qualcuno, gli psicologi chiedevano agli intervistati se, facendo parte della giuria del processo, avrebbero condannato ugualmente la compagnia dei taxi verdi.[18][7]

Usando il teorema di Bayes si può facilmente scoprire che, nonostante la testimonianza, è comunque più probabile che ad aver investito l'uomo sia stato un taxi verde.
Per arrivare a questa conclusione affrontiamo un ragionamento privo di formule matematiche che può risultare utile nello spiegare il paradosso in contesti didattici o divulgativi.
Nel ragionamento useremo le stime probabilistiche come dati certi.

Supponiamo che il testimone nell'arco di una serata veda passare 100 taxi. L'85% dei 100 taxi, quindi 85, saranno verdi e solo 15 saranno blu.
Degli 85 taxi verdi il testimone ne vedrà, erroneamente, di colore blu il 20%, quindi 17.
Dei 15 taxi blu invece ne vedrà blu solo l'80%, ovvero 12.
Il testimone avrà quindi creduto di vedere 29 taxi blu ma di questi la maggior parte (17) sarà effettivamente verde.

La "preponderanza delle prove" dovrebbe spingere i giurati a votare per una condanna alla compagnia dei taxi verdi.

Si può dimostrare che, se ci fosse un secondo testimone, con la stessa attendibilità del primo, che dichiarasse, indipendente dal primo, che il taxi colpevole fosse blu, sarebbe giustificato un voto contrario alla condanna [18].

2.5 PARADOSSO DEI FIGLI MASCHI

Nel XX secolo, l'esistenza di paradossi probabilistici venne usata dai matematici per palesare anche ai non esperti di probabilità come lo studio della probabilità condizionata sia indispensabile per il calcolo di stime probabilistiche.

Nel 1959, il matematico statunitense Martin Gardner (1914-2010) formulò sulla rivista di divulgazione scientifica Scientific American un problema noto come *Boy or Girl paradox*.
Il problema è suddiviso in due domande:

- Il signor Smith ha due bambini. Almeno uno dei due è un maschio. Qual è la probabilità che entrambi i bambini siano maschi?
- Sapendo che una famiglia ha esattamente due bambini, dei quali il primo è un maschio, quant'è la probabilità che anche l'altro sia maschio?

Intuitivamente si è portati a credere che si possa usare lo stesso modello matematico per trovare la risposta ad entrambe le domande e che quindi le due risposte siano identiche.
La risposta alla prima domanda si può trovare usando il teorema di Bayes ma qui cerchiamo la risposta usando la teoria classica della probabilità.

Assumiamo, con buona approssimazione, che la probabilità che un particolare bambino sia maschio è $\frac{1}{2}$ e che sia $\frac{1}{2}$ la probabilità che un particolare bambino sia femmina.
Assumiamo anche che il sesso di figli diversi sia indipendente tra loro. Senza l'informazione che il signor Smith abbia almeno un figlio maschio, la probabilità che entrambi i figli siano maschi è quindi $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ ovvero $\frac{1}{4}$. Analogamente vale $\frac{1}{4}$ anche la probabilità che entrambi i figli siano femmine. Ne consegue che la probabilità che il signor Smith abbia un figlio maschio ed una figlia femmina è $\frac{1}{2}$.
La probabilità P_1 di avere un figlio maschio ed una femmina è quindi doppia di quella di avere due figli maschi (P_2): $P_1 = 2 \cdot P_2$. L'informazione che il signor Smith abbia almeno un figlio maschio limita i casi possibili a questi due soli e quindi $P_1 + P_2 = 1$.

$$2 \cdot P_2 + P_2 = 1 \Rightarrow P_2 = \frac{1}{3}$$

La risposta controintuitiva alla prima domanda è dovuta al fatto che avere un figlio maschio ed uno femmina include tanto la possibilità di avere il primogenito maschio e la secondogenita femmina quanto la possibilità di avere la primogenita femmina ed il secondogenito maschio. Entrambe le possibilità hanno la stessa probabilità di avere primogenito e secondogenito maschio.

La risposta alla seconda domanda è invece $\frac{1}{2}$ come si è portati intuitivamente a pensare.

Un lettore della rivista però si accorse che la prima domanda era ambigua [17]. La risposta poteva cambiare in base al modo in cui si era venuti a conoscenza dell'informazione che almeno un figlio fosse maschio.
Sfruttando questa osservazione possiamo proporre una coppia di domande che renda il paradosso ancora più spettacolare.

- La moglie del signor Valitutti informa il marito di avere fatto visita ai nuovi vicini di casa: i signori Rossi, una fantastica coppia con due figli. La moglie accenna al marito anche il fatto che uno dei due figli della coppia è maschio.
  Razionalmente quanto è giusto che il signor Valitutti stimi la probabilità che i signori Rossi abbiano due figli maschi?

- La moglie del signor Valitutti informa il marito di avere fatto visita ai nuovi vicini di casa: i signori Rossi, una fantastica coppia con due figli. Il signor Valitutti allora va a bussare alla porta dei vicini per farne la conoscenza e ad aprirgli la porta è un figlio della coppia: un maschio.
  Razionalmente quanto è giusto che il signor Valitutti stimi la probabilità che i signori Rossi abbiano due figli maschi?

Il ragionamento da affrontare per rispondere alla prima domanda è quello esposto precedentemente e quindi la risposta corretta è $\frac{1}{3}$.
Per rispondere alla seconda domanda definiamo:

- A_1 l'evento "i signori Rossi hanno due figli maschi"
- A_2 l'evento "i signori Rossi hanno un figlio maschio ed una femmina"
- A_3 l'evento "i signori Rossi hanno due figlie femmine"
- B l'evento "il figlio che apre la porta è un maschio"

Conosciamo:

- $P(A_1) = \frac{1}{4}$
- $P(A_2) = \frac{1}{2}$
- $P(A_3) = \frac{1}{4}$
- $P(B|A_1) = 1$

- $P(B|A_2) = \frac{1}{2}$
- $P(B|A_3) = 0$

Usando il corollario del teorema di Bayes risulta:

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{(P(B|A_1) \cdot P(A_1)) + (P(B|A_2) \cdot P(A_2)) + (P(B|A_3) \cdot P(A_3))}$$

$$P(A_1|B) = \frac{1 \cdot \frac{1}{4}}{(1 \cdot \frac{1}{4}) + (\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}) + (0 \cdot \frac{1}{4})} = \frac{1}{2}$$

Nella prima domanda la scelta veniva fatta esclusivamente sul tipo di famiglia. Nella seconda domanda invece bisognava scegliere a caso anche il bambino.

In *La passeggiata dell'ubriaco*, Leonard Mlodinow propone una seconda domanda ancora diversa. Una riformulazione è:

- Il signor Smith ha due figlie. Una figlia si chiama Luisiana. Qual è la probabilità che abbia due figlie femmine?[7]

Mlodinow stima pari a $\frac{1}{1000000}$ la probabilità che una bambina si chiami Luisiana e quindi considera impossibile che due sorelle si chiamino entrambe Luisiana.
La probabilità che la primogenita sia Luisiana è $\frac{1}{2}$, la probabilità che la secondogenita sia una femmina è $\frac{1}{2}$ e quindi la probabilità che Luisiana sia primogenita ed abbia una sorella più piccola è $\frac{1}{4}$.
La probabilità che la secondogenita sia Luisiana è $\frac{1}{2}$, la probabilità che la primogenita sia una femmina è $\frac{1}{2}$ e quindi la probabilità che Luisiana sia secondogenita ed abbia una sorella più grande è $\frac{1}{4}$.
La risposta alla domanda è quindi $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ ovvero $\frac{1}{2}$.

Paradossalmente, l'informazione sul nome di un figlio fa comunque aumentare la probabilità che entrambi i figli abbiano lo stesso sesso, anche senza ritenere impossibile che entrambi abbiano lo stesso nome.

Sia P la probabilità che una bambina si chiami Luisiana con

$$0 < P < 1 \tag{2.1}$$

e siano

- A_1 l'evento "il signor Smith ha due figli maschi"
- A_2 l'evento "il signor Smith ha un figlio maschio ed una femmina"
- A_3 l'evento "il signor Smith ha due figlie femmine"

- B l'evento "il signor Smith ha una figlia di nome Luisiana"

Conosciamo:

- $P(A_1) = \frac{1}{4}$
- $P(A_2) = \frac{1}{2}$
- $P(A_3) = \frac{1}{4}$
- $P(B|A_1) = 0$
- $P(B|A_2) = P$
- $P(B|A_3) = P + (1 - P) \cdot P = 2 \cdot P - P^2$

Usando il corollario del teorema di Bayes risulta:

$$P(A_3|B) = \frac{P(B|A_3) \cdot P(A_3)}{(P(B|A_1) \cdot P(A_1)) + (P(B|A_2) \cdot P(A_2)) + (P(B|A_3) \cdot P(A_3))}$$

$$P(A_3|B) = \frac{(2 \cdot P - P^2) \cdot \frac{1}{4}}{(0 \cdot \frac{1}{4}) + (P \cdot \frac{1}{2}) + ((2 \cdot P - P^2) \cdot \frac{1}{4})} = \frac{2 - P}{4 - P}$$

Per la 2.1

$$\frac{1}{3} < P(A_3|B) < \frac{1}{2}$$

2.6 PARADOSSO DI SIMPSON

Abbiamo visto che lo studio della probabilità genera sia paradossi epistemologici (il primo paradosso di Bertrand) sia paradossi numerici.
I paradossi numerici visti finora sono tutti dovuti al confondere $P(A|B)$ con $P(B|A)$.
Vediamo ora come l'esistenza di "variabili nascoste" in un problema di calcolo della probabilità possa generare altri tipi di paradossi.

Alice e Bob si esercitano a giocare a pallacanestro. Entrambi provano a fare 30 tiri. Alice riesce a centrare il canestro 12 volte e Bob 14 volte.
$P_F(A)$, la probabilità (frequentista) che Alice faccia canestro, è pari a $\frac{12}{30}$ ossia al 40%.
$P_F(B)$, la probabilità (frequentista) che Bob faccia canestro, è pari a $\frac{14}{30}$, circa il 47%.
Essendo $P_F(B) > P_F(A)$, si ritiene che Bob sia più bravo di Alice nella pallacanestro.

Cerchiamo ora delle variabili nascoste. Alice ha fatto 10 tiri dentro "la linea dei 3 punti", chiamiamoli tiri "facili", e tra questi ha totalizzato 8 canestri. Ha poi fatto 20 tiri "difficili" e tra questi ha totalizzato 4 canestri.
Bob invece ha fatto 20 tiri "facili", totalizzando 13 canestri, e solo 10 tiri "difficili", totalizzando 1 canestro.

$P_F(A_f)$, la probabilità (frequentista) che Alice faccia canestro in un tiro "facile", è pari a $\frac{8}{10}$ ossia all'80%.
$P_F(A_d)$, la probabilità (frequentista) che Alice faccia canestro in un tiro "difficile", è pari a $\frac{4}{20}$ ossia al 20%.
$P_F(B_f)$, la probabilità (frequentista) che Bob faccia canestro in un tiro "facile", è pari a $\frac{13}{20}$ ossia al 65%.
$P_F(B_d)$, la probabilità (frequentista) che Bob faccia canestro in un tiro "difficile", è pari a $\frac{1}{10}$ ossia al 10%.
Quindi $P_F(A_f) > P_F(B_f)$ e $P_F(A_d) > P_F(B_d)$. Questa analisi ci spinge a credere che sia Alice ad essere più brava di Bob nella pallacanestro.

Paradossalmente

$$P_F(A_f) > P_F(B_f), P_F(A_d) > P_F(B_d) \nRightarrow P_F(A) > P_F(B)$$

Questo tipo di paradosso era noto fin dal XIX secolo ma venne per la prima volta evidenziato da George Udny Yule (1871-1951) nel 1903 in un articolo dal titolo *Notes on the theory of association of attributes in Statistics* sulla rivista Biometrika. L'articolo di Udny Yule venne poi ripreso da Edward Hugh Simpson (1922) [19].

Il paradosso si può formalizzare usando la probabilità condizionata:

$$P(E|A \wedge B) > P(E|A^c \wedge B), P(E|A \wedge B^c) > P(E|A^c \wedge B^c) \nRightarrow P(E|A) > P(E|A^c)$$

Nel nostro caso:

- E è l'evento "fare canestro"
- Ω può essere partito nei due eventi "Tira Bob" e "Tira Alice"
- Ω può essere partito nei due eventi "il tiro è facile" e "il tiro è difficile"
- A è l'evento "Tira Alice"
- B è l'evento "il tiro è facile"

3. LA SPERANZA MATEMATICA E L'UTILITÁ ATTESA

Nel paragrafo 1.3 abbiamo presentato la teoria della probabilità ma non abbiamo ancora visto come questa possa essere utile a trovare i principi con cui definire una scelta razionale in condizione di rischio.

Per definire cosa sia una scelta razionale in condizione di certezza, nel paragrafo 1.1.3, abbiamo dato alcuni assiomi che devono rispettare i criteri di preferenza ed indifferenza degli esiti delle scelte.

Per risolvere problemi decisionali in condizioni di rischio abbiamo bisogno, oltre che di criteri di preferenza ed indifferenza, di definire cosa sia il **valore** di un possibile esito.

3.0.1 VALORE DI UN ESITO

Definizione 3.0.1. *Sia E l'insieme degli esiti derivanti dalle possibili alternative di scelta e sia $v : E \longrightarrow \mathbb{R}$.*
v è detta funzione valore.
$v(E_1)$ è detto valore di $E_1 \in E$

Un agente razionale deve definire una funzione valore v che rispetti i seguenti assiomi

- $v(E_1) > v(E_2) \Leftrightarrow E_1$ è preferibile ad E_2
- $v(E_1) = v(E_2) \Leftrightarrow E_1$ è indifferente ad E_2
- E_1 è "non succede nulla" $\Rightarrow v(E_1) = 0$

In problemi economici espressi in una valuta \$, generalmente, all'evento E_1 "si ha un guadagno di x\$" si attribuisce il valore x; all'evento E_2 "si ha una perdita di x\$" si attribuisce il valore $-x$.

3.1 SPERANZA MATEMATICA DI UNA SCELTA

Definizione 3.1.1. *Sia S_j una possibile scelta in un problema decisionale in condizione di rischio;*

Siano $E_i^{(j)}$, con $i \in \mathbb{N}$, i possibili esiti derivanti da S_j;
Viene detta speranza matematica di S_j il valore $E(S_j)$, con

$$E(S_j) = \sum_{i=1}^{\infty} v(E_i^{(j)}) \cdot P(E_i^{(j)})$$

La speranza matematica di una scelta è il valore atteso derivante da quella scelta.
Ad esempio. calcoliamo la speranza matematica, ovvero il valore atteso, della scelta S di scommettere 1€ che lanciando una moneta esca testa sapendo che la vincita prevista è di 2€.
Partizioniamo l'evento certo nei due esiti E_1 ed E_2. E_1 è l'evento "vinciamo la scommessa e quindi guadagniamo 1€", E_2 è l'evento "perdiamo la scommessa e quindi perdiamo 1€".
Quindi $v(E_1) = 1$ e $v(E_2) = -1$.
L'esito E_1 si realizza solo se esce testa e gli attribuiamo la probabilità $P(E_1) = \frac{1}{2}$.
L'esito E_2 si realizza solo se non esce testa e gli attribuiamo la probabilità $P(E_2) = \frac{1}{2}$.
La speranza matematica di S è quindi

$$E(S) = v(E_1) \cdot P(E_1) + v(E_2) \cdot P(E_2) = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Scegliere di giocare a questo gioco ha quindi speranza nulla.

Vediamo ora quanto vale la speranza matematica della scelta S di scommettere 1€ che alla roulette francese (con 37 numeri, da 0 a 36) esca il numero 5 sapendo che la vincita prevista è di 36€.
Partizioniamo l'evento certo nei due esiti E_1 ed E_2. E_1 è l'evento "vinciamo la scommessa e quindi guadagniamo 35€", E_2 è l'evento "perdiamo la scommessa e quindi perdiamo 1€".
Quindi $v(E_1) = 35$ e $v(E_2) = -1$.
L'esito E_1 si realizza solo se esce il numero 5 e gli attribuiamo la probabilità $P(E_1) = \frac{1}{37}$.
L'esito E_2 si realizza solo se non esce il numero 5 e gli attribuiamo la probabilità $P(E_2) = \frac{36}{37}$.
La speranza matematica di S è quindi

$$E(S) = v(E_1) \cdot P(E_1) + v(E_2) \cdot P(E_2) = 35 \cdot \frac{1}{37} + (-1) \cdot \frac{36}{37} = -\frac{1}{37}$$

Scegliere di giocare a questo gioco ha quindi speranza negativa.

Definizione 3.1.2. *In un problema decisionale in condizione di rischio detto S l'insieme delle scelte possibili, $S_j \in S$ è detto* ***scelta razionale*** *se $\forall S_i \in S$ $E(S_j) \geq E(S_i)$.*

Si noti che non è detto che esista una sola scelta razionale.

Se bisogna scegliere tra giocare o non giocare a testa o croce, nei limiti dell'esempio precedente, consideriamo razionale sia una scelta che l'altra.
Se invece, sempre nei limiti dell'esempio precedente, bisogna scegliere tra giocare o meno alla roulette francese, riteniamo razionale non giocarci e irrazionale giocarci.

3.2 PARADOSSO DELLE DUE BUSTE

L'uso della speranza matematica per definire cos'è un comportamento razionale rende paradossale la risoluzione di alcuni problemi.
Nel 1982, Martin Gardner pubblicò nel libro *Aha! Gotcha* questo quesito formulato nel 1953 da Maurice Kraitchik:

Due persone, ugualmente ricche, arrivano a confrontare il contenuto dei loro portafogli, di cui nessuno dei due conosce il contenuto esatto.
Impostano il gioco in questi termini: chi ha meno denaro nel portafoglio riceverà tutto il denaro del portafoglio dell'altro (niente accade se i due valori sono uguali).
Uno dei due può così ragionare: Supponiamo che ho una quantità A nel mio portafoglio: questo è il massimo che potrei perdere. Se invece vinco (probabilità 0,5), alla fine avrò nel mio portafoglio un valore certamente maggiore di 2A. Quindi il gioco è favorevole a me.
L'altro può ragionare esattamente allo stesso modo. In effetti, per simmetria, il gioco è pari. Dov'è dunque l'errore nel ragionamento di ciascun uomo? [19]

Nel 1989 il problema venne ripreso da Barry Nalebuff che lo presentò sotto la forma del paradosso delle due buste.

Un uomo viene invitato a partecipare ad un gioco in cui ci sono due buste chiuse. In ogni busta è scritto il valore di un premio e l'uomo viene informato che uno dei due premi è esattamente il doppio dell'altro.
Dopo che ha scelto una busta e viene aperta scopre di aver vinto 500€. A questo punto gli viene offerto di cambiare il premio con quello scritto nell'altra busta. L'uomo non ha idea se, per quel tipo di gioco, 500€ siano un premio alto o un premio basso, per questo motivo stima $\frac{1}{2}$ la probabilità che nell'altra busta ci siano 1000€ e $\frac{1}{2}$ la probabilità che nell'altra busta ci siano 250€.
Scegliendo di cambiare busta in un caso l'uomo guadagnerebbe 500€ e nell'altro ne perderebbe 250.
I valori associati agli esiti della scelta di cambiare sono quindi 500 e -250.
La speranza matematica di questa scelta è quindi $+125$.
La speranza matematica nel non farlo è invece 0.

È dunque razionale scegliere di cambiare busta.

Supponiamo che nel momento di cambiare busta l'uomo non abbia sentito quanto valga il premio che ha vinto. Sia quindi questo premio pari a x euro.
Cambiando avrebbe un possibile guadagno di altri x euro ed una possibile perdita di $\frac{x}{2}$ euro.
La speranza matematica della scelta di cambiare sarebbe pari a $\frac{x}{4}$ e quindi all'uomo converrebbe lo stesso cambiare.

La generalizzazione del problema genera un paradosso.

Presentiamo così il problema:

Un uomo viene invitato a partecipare ad un gioco in cui ci sono due buste chiuse. In ogni busta è scritto il valore di un premio e l'uomo viene informato che uno dei due premi è esattamente il doppio dell'altro.
Dopo che ha scelto una busta, prima che questa venga aperta, gli viene offerto di cambiare il premio con quello scritto nell'altra busta. Gli conviene farlo?
In caso di cambio gli viene offerto di cambiare nuovamente. Gli conviene farlo?
In caso di un secondo cambio gli viene offerto di cambiare nuovamente. Gli conviene farlo?
Gli converrà cambiare all'infinito?

In realtà. come nel caso del paradosso dei figli maschi, non aver sentito ciò che è scritto in una busta è diverso dal far restare le buste chiuse.
L'uomo sa che in una busta c'è un premio di x euro e nell'altra un premio $2 \cdot x$ euro.
Scegliere di abbandonare il gioco senza mai cambiare, gli comporta un guadagno di x euro o del doppio.
È quindi una scelta con speranza di $\frac{3}{2}x$.
Cambiando un qualunque numero di volte, abbandona il gioco comunque con un guadagno di x euro o del doppio.
Il cambio quindi non fa aumentare la speranza matematica.

3.3 DANIEL BERNOULLI ED IL PARADOSSO DI SAN PIETROBURGO

Il paradosso delle due buste, per quanto interessante, non mette in luce nulla di irragionevole e non presenta nulla che metta in crisi l'uso della speranza matematica come strumento utile alla teoria della scelta razionale.

Un altro paradosso, molto più antico, evidenza i limiti di questo strumento. Il 9 settembre 1713 Nicolaus Bernoulli (1687-1759) scrive una lettera a Pierre Rémond de Montmort (1678-1719) in cui gli sottopone alcuni problemi:

Quarto problema. A promette di dare una moneta a B se con un dado onesto farà uscire 6 al primo lancio, due monete se farà uscire 6 al secondo lancio, tre monete se otterrà questo punteggio al terzo, quattro monete se il risultato sarà raggiunto al quarto e così via. Ci si chiede: quale è il valore aspettato di B?

Quinto problema. Ci si chiederà la stessa cosa se A prometterà a B di dargli delle monete nella progressione 1, 2, 4, 8, 16, etc. o 1, 3, 9, 27, etc. o 1, 8, 27, 64, invece che nella progressione 1, 2, 3, 4, 5, etc. come precedentemente trattato. Sebbene per la maggior parte questi problemi non siano di difficile risoluzione, vi scoprirete tuttavia qualcosa di molto curioso.[20]

Calcoliamo la speranza matematica (il valore aspettato) se B prende la scelta S di giocare al gioco del problema 4

$$E(S) = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \cdot i = 5$$

Questo calcolo ci dice che B ha convenienza a giocare contro A se il prezzo per partecipare al gioco è minore di 5 monete.
Gli è sconveniente giocare se il prezzo per partecipare è maggiore di 5 monete.
È razionale sia giocare che non giocare se il prezzo è 5 monete.

Calcoliamo ora la speranza nel caso la promessa di vincita è di 1, 2, 4, 8, 16, etc.

$$E(S) = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \cdot 2^{i-1} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^{i-1} = \infty$$

Il calcolo è analogo anche nei casi in cui le successioni di vincita sono 1, 3, 9, 27, etc. e 1, 8, 27, 64, etc.. Per B è quindi razionale decidere di partecipare al gioco a prescindere dal prezzo che gli viene chiesto per poterlo fare.

Il 21 maggio 1728 Gabriel Cramer (1704-1752), allievo dello zio di Nicolaus, Johann Bernoulli(1667-1748), scrive al nipote del maestro:

Non so se mi sbaglio, ma credo di avere la soluzione del singolare caso che Lei ha proposto al Signor de Montmort nella Sua lettera del 9 settembre 1713, Prob. 5, pagina 402. Al fine di semplificare il caso supporrò che A lanci in aria una moneta, B si impegni a dargli una moneta se uscirà testa al primo lancio, 2 se uscirà al secondo, 4 se uscirà al terzo, 8 se uscirà al quarto e così via. Il paradosso sta nel fatto che il calcolo darà come risultato che A dovrà dare a B una somma infinita, il che sembrerebbe assurdo poiché nessuna persona di buon senso darebbe 20 monete. Ci si chiede la ragione della differenza tra il calcolo matematico e quello elaborato dalla gente comune. Credo che derivi dal fatto che i matematici valutano il denaro in proporzione alla sua quantità, mentre gli uomini di buon senso in proporzione all'uso che ne fanno.[20]

Il paradosso nasce dal fatto che il gioco così pensato prevede premi molto grandi in caso di eventi molto rari.
Scegliere di giocare una moneta e vincerne 2^{1000} se lanciando una moneta esce croce per $2^{1000} - 1$ volte di fila e poi testa, per quanto razionale va contro il buon senso.

Daniel Bernoulli (1700-1782), figlio di Johann, nel 1731 formulò una teoria in grado di uscire dal paradosso che venne poi pubblicata 7 anni più tardi in una memoria intitolata *Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis* contenuta nel volume dei *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae.*

All'interno della memoria, Bernoulli presenta l'esempio di un povero che entra in possesso di un biglietto della lotteria che con eguale probabilità può fargli vincere 20000

ducati oppure nulla. Bernoulli ritiene razionale per il povero vendere il biglietto per 9000 ducati nonostante così facendo diminuisce la sua speranza matematica.
L'idea che propone è che ogni vincita economica ha un'utilità, per l'agente razionale, proporzionale al valore della vincita ma inversamente proporzionale al valore del patrimonio complessivo dell'agente.

Per la nostra teoria della scelta razionale, non volendoci limitare solo a decisioni in ambito economico, ci riferiremo al valore patrimoniale del benessere complessivo dell'agente.
Ogni agente ha un patrimonio di benessere B a cui si associa un valore $v(B)$.
Sia $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la **funzione utilità**.
Il valore del patrimonio ha, per l'agente, un'utilità $u(v(B)) = u(B))$.
Una variazione dB del benessere genera una variazione du dell'utilità (del valore del benessere):

$$du(B) = k \cdot \frac{dB}{B}$$

con k positivo.
Ne segue

$$u(B) = c + k \cdot log(B)$$

ovvero

$$u(B) = k \cdot log\left(\frac{B}{a}\right)$$

Definizione 3.3.1. *Sia S_j una possibile scelta in un problema decisionale in condizione di rischio;*
Siano $E_i^{(j)}$, con $i \in \mathbb{N}$, i possibili esiti derivanti da S_j;
Sia $B_i^{(j)}$ il patrimonio di benessere se si realizza $E_i^{(j)}$. Viene detta utilità di S_j il valore $u(S_j)$, con

$$u(S_j) = \sum_{i=1}^{\infty} u(B_i^{(j)}) \cdot P(E_i^{(j)})$$

Definizione 3.3.2. *In un problema decisionale in condizione di rischio detto S l'insieme delle scelte possibili, $S_j \in S$ è detto* ***scelta sensata*** *se $\forall S_i \in S$ $u(S_j) \geq u(S_i)$.*

Risolviamo ora il quinto problema di Nicolaus Bernoulli limitando il patrimonio del benessere al solo patrimonio economico.

Sia B il patrimonio di B. Scegliere di non giocare contro A ha un'utilità pari a $k \cdot log(\frac{B}{a})$.
La scelta S di spendere x monete per partecipare al gioco ha un'utilità

$$u(S) = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \cdot k \cdot log\left(\frac{B + 2^{i-1} - x}{a}\right)$$

Per B è sensato giocare se e solo se x è tale che:

$$\frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \cdot log(B + 2^{i-1} - x) \geq log(B)$$

L'uso dell'utilità attesa (o della speranza matematica) permette di trasportare tutte le proprietà assiomatiche dell'ordine di preferenza degli esiti sull'ordine di preferenza delle scelte.
S_1 si dice preferibile ad S_2 se $u(S_1) > u(S_2)$.
S_1 si dice razionalmente preferibile ad S_2 se $E(S_1) > E(S_2)$.
S_1 si dice indifferente ad S_2 se $u(S_1) = u(S_2)$.
S_1 si dice razionalmente indifferente ad S_2 se $E(S_1) = E(S_2)$.

Proposizione 3.3.3. *Detto S l'insieme delle scelte possibili in un problema decisionale in condizioni di rischio, allora:*

- *Se S_1 è preferibile (razionalmente preferibile) ad S_2, allora S_2 non è preferibile (razionalmente preferibile) ad S_1, $\forall S_1, S_2 \in S$*
- *Se S_1 è preferibile (razionalmente preferibile) ad S_2, allora S_1 non è indifferente (razionalmente indifferente) ad S_2, $\forall S_1, S_2 \in S$*
- *Se S_1 è indifferente (razionalmente indifferente) ad S_2, allora S_1 non è preferibile (razionalmente preferibile) ad S_2 ed S_2 non è preferibile (razionalmente preferibile) ad S_1, $\forall S_1, S_2 \in S$*
- *O S_1 è indifferente (razionalmente indifferente) ad S_2, o S_1 è preferibile (razionalmente preferibile) ad S_2 oppure S_2 è preferibile (razionalmente preferibile) ad S_1, $\forall S_1, S_2 \in S$*
- *Se S_1 è preferibile (razionalmente preferibile) ad S_2 e S_2 è preferibile (razionalmente preferibile) ad S_3 allora S_1 è preferibile (razionalmente preferibile) ad S_3, $\forall S_1, S_2, S_3 \in S$*
- *Se S_1 è preferibile (razionalmente preferibile) ad S_2 e S_1 è indifferente (razionalmente indifferente) ad S_3 allora S_3 è preferibile (razionalmente preferibile) ad S_2, $\forall S_1, S_2, S_3 \in S$*
- *Se S_1 è preferibile (razionalmente preferibile) ad S_2 e S_2 è indifferente (razionalmente indifferente) ad S_3 allora S_1 è preferibile (razionalmente preferibile) ad S_3, $\forall S_1, S_2, S_3 \in S$*
- *Se S_1 è indifferente (razionalmente indifferente) ad S_2 e S_2 è indifferente (razionalmente indifferente) ad S_3 allora S_1 è indifferente (razionalmente indifferente) ad S_3, $\forall S_1, S_2, S_3 \in S$*

3.4 LA LETIZIA DI SAN FRANCESCO D'ASSISI

La teoria dell'utilità attesa non è conciliabile con il concetto di perfetta letizia espresso da San Francesco D'Assisi (1181-1226) a Frate Leone (1195-1271).

L'esperienza di Francesco D'Assisi, come quella di altri uomini di fede, contrasta col principio economico che asserisce che ad un maggiore patrimonio corrisponde una maggiore utilità.

Si può pensare che questo problema sia risolvibile con la definizione individuale della funzione valore. Nel definirla infatti si può dare meno peso ai beni materiali ed attribuirne di più a beni immateriali che comunque contribuiscono al benessere.
La descrizione della perfetta **letizia** (da noi interpretabile come utilità), però, contrasta anche con questo principio.

Quando saremo arrivati a Santa Maria degli Angeli e saremo bagnati per la pioggia, infreddoliti per la neve, sporchi per il fango e affamati per il lungo viaggio busseremo alla porta del convento. E il frate portinaio chiederà:
"Chi siete voi?"
E noi risponderemo:
"Siamo due dei vostri frati."
E Lui non riconoscendoci, dirà che siamo due impostori, gente che ruba l'elemosina ai poveri, non ci aprirà lasciandoci fuori al freddo della neve, alla pioggia e alla fame mentre si fa notte.
Allora se noi a tanta ingiustizia e crudeltà sopporteremo con pazienza ed umiltà senza parlar male del nostro confratello (...) scrivi che questa è perfetta letizia. E se noi costretti dalla fame, dal freddo e dalla notte, continuassimo a bussare piangendo e pregando per l'amore del nostro Dio il frate portinaio perché ci faccia entrare, e lui ci dirà:
"Vagabondi insolenti, la pagherete cara."
E uscendo con un grosso e nodoso bastone ci piglierebbe dal cappuccio e dopo averci fatto rotolare in mezzo alla neve, ci bastonerebbe facendoci sentire uno ad uno i singoli nodi. Se noi subiremo con pazienza ed allegria pensando alle pene del Cristo benedetto e che solo per suo amore bisogna sopportare, caro frate Leone, annota che sta in questo la perfetta letizia. Ascolta infine la conclusione, frate Leone: fra tutte le grazie dello Spirito Santo e doni che Dio concede ai suoi fedeli, c'è quella di superarsi proprio per l'amore di Dio per subire ingiustizie, disagi e dolori.

La letizia, per San Francesco, può crescere facendo diminuire il benessere e facendo aumentare la fede.
Ogni uomo può avere un benessere B limitato. Entrato in possesso di tutti i beni materiali ed appagati tutti i propri desideri il benessere non può crescere. Quindi:

$$0 < v(B) \leq \bar{B}$$

con $\bar{B} > 1$.
D'altro canto, ogni uomo può avere una fede, a cui associamo un valore f, illimitata. Quindi

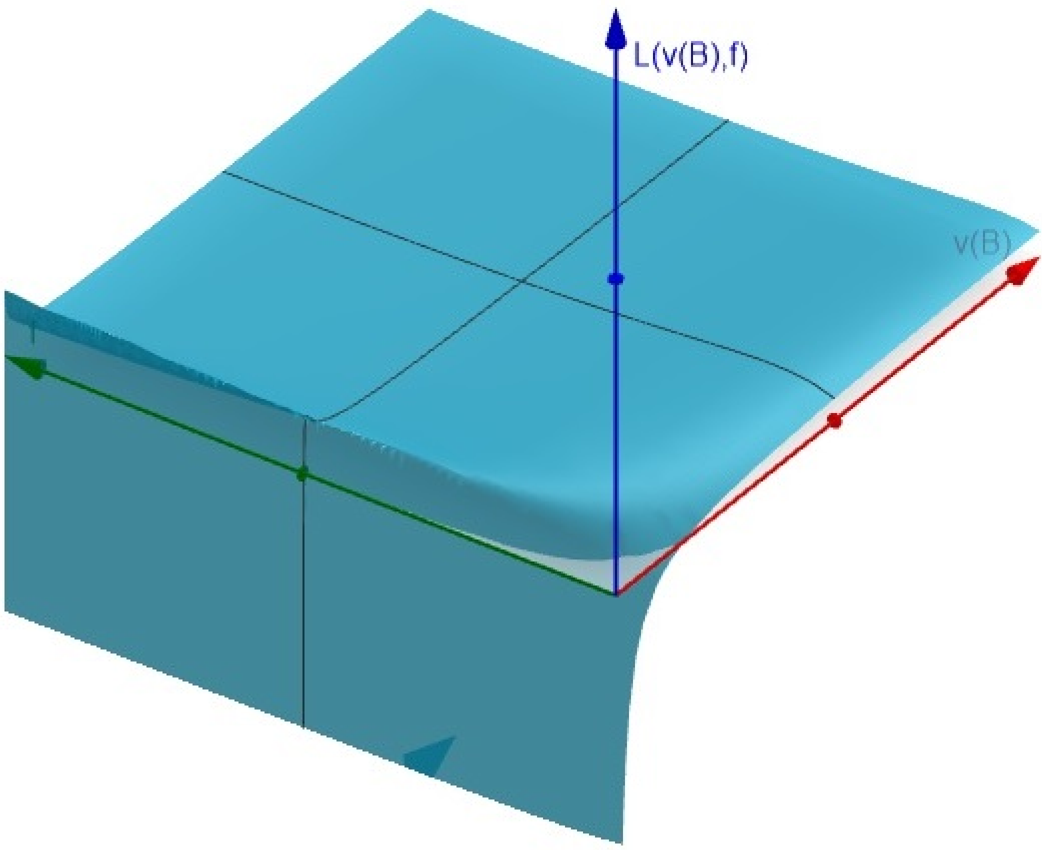
$$0 \leq f < +\infty$$

La letizia deve essere una funzione del valore del benessere e della fede, chiamiamola $L(v(B), f)$.

In assenza di fede ($f = 0$), la letizia aumenta al crescere del benessere.
Per valori bassi di fede e di benessere l'aumento del valore del benessere o della fede porta ad una crescita della letizia.
Il voto di povertà dei confratelli di Francesco implica che per livelli alti di fede e non troppo bassi di benessere far diminuire il benessere fa aumentare la letizia.
La titubanza di frate Leone implica che anche a livelli alti di fede e bassi di benessere far diminuire il benessere fa diminuire anche la letizia.
La rivelazione di san Francesco implica che anche a livelli molto bassi di benessere, se la fede è molto alta, una diminuzione del benessere porta ad un aumento della letizia.
Un possibile modello della letizia può essere:

$$L(v(B), f) = \frac{1}{\sqrt[\alpha]{v(B)} \cdot (f+1)} - \left(\frac{1}{\sqrt[\alpha]{v(B)} \cdot (f+1)} \right)^{f+2}$$

con $\alpha > log_2 \bar{B}$.



Ad un livello fissato f di fede, la perfetta letizia si ha quanto $\frac{\partial L(v(B),f)}{\partial v(B)} = 0$ ovvero quando

$$v(B) = \left(\frac{\sqrt[f+1]{f+2}}{f+1} \right)^{\alpha}$$

La perfetta letizia L_p in funzione della fede è quindi:

$$L_p(f) = \frac{1}{\sqrt[f+1]{f+2}} - \left(\frac{1}{f+2}\right)^{\frac{f+2}{f+1}}$$

$L_p(f)$ è una funzione strettamente crescente quindi al crescere della fede aumenta la letizia (utilità) massima realizzabile.
Sia $B(f)$ il valore del benessere in condizione di perfetta letizia in funzione della fede.

$$B(f) = \left(\frac{\sqrt[f+1]{f+2}}{f+1}\right)^{\alpha}$$

$B(f)$ è una funzione strettamente decrescente e quindi, se $B(f) < \bar{B}$, al crescere della fede diminuisce il livello di benessere necessario per trovarsi in una condizione di perfetta letizia.
Imponendo un limite massimo alla fede che un uomo può avere, $\bar{f}$, avremo un valore L_p di perfetta letizia assoluta.
Se $B(\bar{f}) < \bar{B}$ allora:

$$L_p = \frac{1}{\sqrt[\bar{f}+1]{\bar{f}+2}} - \left(\frac{1}{\bar{f}+2}\right)^{\frac{\bar{f}+2}{\bar{f}+1}}$$

Se $B(\bar{f}) \geq \bar{B}$ allora:

$$L_p = \frac{1}{\sqrt[\alpha]{\bar{B}} \cdot (\bar{f}+1)} - \left(\frac{1}{\sqrt[\alpha]{\bar{B}} \cdot (\bar{f}+1)}\right)^{\bar{f}+2}$$

4. LA TEORIA DEI GIOCHI

Il fascino della fisica, la regina delle scienze, è sempre stato forte presso gli economisti. Fu un fisico di origine ungherese, John von Neumann (1903-1957), in un denso articolo passato all'epoca inosservato (von Neumann, 1928), a costruire un modello preciso della razionalità economica individuale. Un agente intelligente, normalmente versato nel ragionamento, normalmente animato dal suo interesse particolare, pienamente informato delle possibilità di azione disponibili e delle loro conseguenze, si trova a interagire con un "ambiente" in cui operano uno o più agenti in tutto simili a lui. L'intelligenza, il ragionamento, le strategie, proprie e degli avversari, e il calcolo — che ciascuno ragionevolmente e ricostruibilmente farà — delle conseguenze sulle proprie "utilità" diventano parte del "mondo" circostante. Molti anni più tardi, con l'economista Oskar Morgenstern (1902-1977), questo suo modello matematico — la teoria dei giochi e il comportamento economico (von Neumann e Morgenstern, 1944) — verrà completato e alimenterà un intero settore di ricerca, ancora in pieno vigore, testimoniato dal Nobel, peraltro tardivo, assegnato a John Nash (1928-2015), John Harsanyi (1920-2000) e Reinhard Selten (1930-2016). [21]

Nel XX secolo la teoria della scelta razionale si è arricchita di una nuova intuizione: l'agente razionale nell'operare le proprie scelte deve anche tenere conto delle scelte che possono prendere anche altri agenti.
La particolare branca della teoria che si occupa di queste situazioni si chiama teoria dei giochi.

La sequenza (o la successione) di scelte che un individuo, o giocatore, può prendere si chiama strategia e questa è finalizzata a vincere ovvero avere la massima utilità.
L'interazione tra più giocatori viene chiamata gioco.
In un gioco ogni giocatore dopo aver messo in atto una strategia riceve un premio ovvero una variazione del proprio capitale (di benessere).

Alcuni giochi vengono detti a *informazione perfetta e completa.* Sono i giochi in cui, in ogni momento, è nota a tutti i giocatori la strategia applicata fino a quel momento dagli altri giocatori.
Appartengono a questa categoria giochi come gli scacchi o la dama.

4.1 IL DILEMMA DEL PRIGIONIERO

Un interessante gioco a informazione perfetta e completa è il dilemma del prigioniero.

Alice e Bob vengono arrestati mentre sono intenti a realizzare un furto. La polizia sospetta che uno di loro abbia commesso l'omicidio di una donna poco distante dalla casa che stavano svaligiando.
La polizia non ha prove di questo secondo reato e rischia di condannarli solo per il furto.
Se i due finissero in carcere per il solo furto dovrebbero scontare una pena di 2 anni ciascuno.
La polizia allora li interroga in due stanze diverse, spiega ad entrambi la situazione e propone questo accordo. Se un ladro accusa l'altro di omicidio, ammesso che non sia accusato a sua volta, non farà neanche un giorno di carcere mentre l'altro finirà in prigione per 14 anni.
Se però si accuseranno vicendevolmente finiranno entrambi in carcere per 10 anni.

Consideriamo questa situazione come un gioco non cooperativo.
Sia Alice che Bob sono agenti razionali ed ognuno vuole avere la vincita massima.
Alice considera che ci sono due casi:

- **Bob l'accusa**: in tal caso se lei accusa Bob finirà in galera per 10 anni, se non lo fa finirà in galera per 14 anni. *Le conviene accusare Bob*
- **Bob non l'accusa**: in tal caso se lei accusa Bob finirà in galera per 0 anni, se non lo fa finirà in galera per 2 anni. *Le conviene accusare Bob*

Ad Alice conviene comunque accusare Bob, a prescindere dalla scelta di Bob, e viceversa a Bob conviene accusare comunque Alice.
Se entrambi operano la scelta egoisticamente conveniente finiranno entrambi in galera per 10 anni.
Se entrambi operano la scelta egoisticamente sconveniente finiranno entrambi in galera per 2 anni.

La stranezza di questo gioco è dovuta al fatto che la somma delle vincite del gioco non è pari a zero come nei problemi che abbiamo fin ora affrontati.

4.2 IL GIOCO DEL POLLO E LA STRATEGIA DEL PAZZO

Non sempre, nei giochi i cui la somma delle vincite è diversa da zero, le strategie di gioco egoisticamente convenienti portano uno svantaggio ai giocatori.
Nel film *Gioventù bruciata* del 1955 due ragazzi, Jim e Buzz, corrono con le loro auto verso un burrone.
Se per paura di cadere nel burrone un ragazzo sterza prima dell'altro fa una figuraccia coi

propri amici e verrà considerato un pollo.
D'altro canto se, per non essere considerato un pollo, non sterza, prima o poi finisce nel burrone.
Questo è sempre un gioco *non a somma zero* perché, in valore assoluto, morire e vincere la gara non hanno lo stesso peso. In questo caso non c'è una scelta egoisticamente conveniente che prescinda dalla strategia dell'avversario.

- Se **Jim sterza presto** a Buzz conviene aspettare a sterzare così da vincere la gara
- Se **Jim tarda a sterzare** a Buzz conviene sterzare prima di lui così da non morire

La strategia folle per Buzz è, se Jim tarda a sterzare, continuare dritto contando sul fatto che Jim debba sterzare prima o poi.
Scegliere di farsi credere pazzo e disposto a morire pur di vincere incuterà timore in Jim. Così l'avversario sarà costretto a sterzare e lo lascerà vincere.
L'applicazione di questa strategia da parte di entrambi i concorrenti porterà però conseguenze nefaste.

La strategia del pazzo è stata adottata nei primi anni 70 dagli Stati Uniti d'America per gestire le controversie di politica estera.
La prima potenza mondiale lasciava far credere di essere disposta ad intervenire con attacchi incredibilmente spropositati per mantenere sotto controllo le altre nazioni.

4.3 L'EQUILIBRIO DI NASH

Gli ultimi due esempi mostrano come individuare le scelte razionali in un gioco, ovvero in un contesto in cui si interagisce con altri agenti, non sia semplice.

Per circa due secoli le teorie economiche si sono basate sul ritenere razionali le strategie (ovvero le sequenze di scelte) egoistiche, che siano cooperative o meno.
Il filosofo Adam Smith (1723-1790) scriveva:

Nessuno ha mai visto un cane con un suo simile fare uno scambio deliberato e leale di un osso contro un altro osso. Nessuno ha mai visto un animale, coi suoi gesti o le sue grida naturali, far capire a un altro animale: 'Questo è mio, quello è tuo, io darei volentieri questo in cambio di quello'. Quando un animale ha bisogno di ottenere qualcosa, da un uomo o da un altro animale, non ha altri mezzi di persuasione oltre quello di guadagnarsi il favore di colui di cui ricerca i servizi. Il cucciolo lecca la madre; lo spaniel tenta con mille scodinzolamenti di attirare l'attenzione del padrone che sta pranzando per farsi dare da mangiare. Anche l'uomo usa qualche volta con i suoi simili le stesse arti e, quando non ha altri mezzi per indurli ad agire secondo i suoi desideri, tenta di ottenere la loro benevolenza profondendosi in gentilezze servili e striscianti. Ma l'uomo non ha tempo per comportarsi così in tutte le circostanze. In una società incivilita egli ha bisogno in ogni momento della cooperazione e dell'assistenza di moltissima gente, mentre tutta la vita gli *basta appena per assicurarsi l'amicizia di poche persone. In quasi tutte le altre razze di animali l'individuo giunto a maturità è del tutto indipendente, e nel suo stato naturale non ha bisogno dell'assistenza di altri esseri viventi. L'uomo ha invece quasi sempre bisogno dell'aiuto dei suoi simili e lo aspetterebbe invano dalla sola benevolenza; avrà molta più probabilità di ottenerlo volgendo a suo favore l'egoismo altrui e dimostrando il vantaggio che gli altri otterrebbero facendo ciò che egli chiede (...) Non è certo dalla benevolenza del macellaio, del birraio o del fornaio che ci aspettiamo il nostro pranzo, ma dal fatto che essi hanno cura del loro interesse. Noi non ci rivolgiamo alla loro umanità ma al loro egoismo e con loro non parliamo mai delle nostre necessità, ma dei loro vantaggi. Nessuno che non sia un mendicante sceglie mai di dipendere soprattutto dalla benevolenza dei suoi concittadini, e persino un mendicante non dipende esclusivamente da essa.* [22]

La mente brillante di John Nash (1928-2015) nel 1949 gettò le basi per comprendere che si possono individuare strategie migliori e più convenienti per tutti i giocatori se nel prendere le proprie scelte si tiene conto del vantaggio di un gruppo e non solo di quello personale.

Definizione 4.3.1. *Dette $s_1, ...s_N$ le strategie adottate dagli N giocatori all'interno di un gioco,*
indichiamo con $B_i(s_1, ..., s_N)$ il patrimonio di benessere che l'i-esimo giocatore ha alla fine del gioco.

Definizione 4.3.2. *Sia $S_i = (s_{i,1}, s_{i,2}, ..., s_{i,m_i})$ l'insieme delle strategie che può adottare l'i-esimo giocatore in un gioco ad N giocatori.*
*Si chiama **equilibrio di Nash** una combinazione di strategie*

$$s_{1,j_1}, ..., s_{i,j_i}, ..., s_{N,j_N}$$

tale che

$$u(B_i(s_{1,j_1}, ..., s_{i,j_i}, ..., s_{N,j_N})) \geq u(B_i(s_{1,j_1}, ..., s_{i,j}, ..., s_{N,j_N}))$$

per ogni $1 \leq i \leq N$ e per ogni $1 \leq j \leq m_i$.

Un equilibrio di Nash è una situazione in cui ogni giocatore non può avere un premio maggiore modificando la propria strategia a meno che anche un altro giocatore non modifichi la propria.
Se si affronta un problema in modo non cooperativo, in una situazione di equilibrio di Nash razionalmente nessun giocatore modificherà la sua strategia.
Questo vuol dire che nel dilemma del prigioniero dovremmo considerare razionale l'equilibrio di Nash che porta sia Alice che Bob in prigione per 10 anni.
Scegliendo di cooperare, i due, potranno invece ottenere un premio ottimale.

Definizione 4.3.3. *Si chiama **ottimo paretiano** una combinazione di strategie*

$$s_{1,j_1}, ..., s_{i,j_i}, ..., s_{N,j_N}$$

tale che non esiste

$$s_{1,k_1}, ..., s_{i,k_i}, ..., s_{N,k_N}$$

con

$$u(B_i(s_{1,k_1}, ..., s_{i,k_i}, ..., s_{N,k_N})) \geq u(B_i(s_{1,j_1}, ..., s_{i,j_i}, ..., s_{N,j_N}))$$

per ogni $1 \leq i, \leq N$, *e*

$$u(B_{\bar{i}}(s_{1,k_1}, ..., s_{\bar{i},k_{\bar{i}}}, ..., s_{N,k_N})) \geq u(B_{\bar{i}}(s_{1,j_1}, ..., s_{\bar{i},j_{\bar{i}}}, ..., s_{N,j_N}))$$

per un certo $\bar{i}$.

Un ottimo paretiano è un situazione in cui se un giocatore riceve un premio maggiore sicuramente qualcun altro ne riceve uno peggiore.

Nel dilemma del prigioniero la strategia non cooperativa è l'unico equilibrio di Nash. La strategia in cui sia Alice che Bob non accusano l'altro invece è un ottimo paretiano.

Nel gioco del pollo le due strategie in cui un giocatore sterza e l'altro va dritto sono sia ottimi paretiani che equilibri di Nash.
Nessuno ha vantaggio a cambiare individualmente strategia ed anche coordinandosi non c'è modo di portare un miglioramento ad entrambi.

Esistono giochi che hanno più di un ottimo paretiano di cui nessuno è un equilibrio di Nash. Per ottimizzare le vincite in questi giochi è opportuno che i giocatori si adoperino affinché le scelte vengano prese dalla collettività.
I processi decisionali, come visto, presentano alcuni limiti se affrontati individualmente in un contesto in cui gli agenti interagiscono tra loro.
D'altro canto anche i processi decisionali collettivi non sono perfetti.

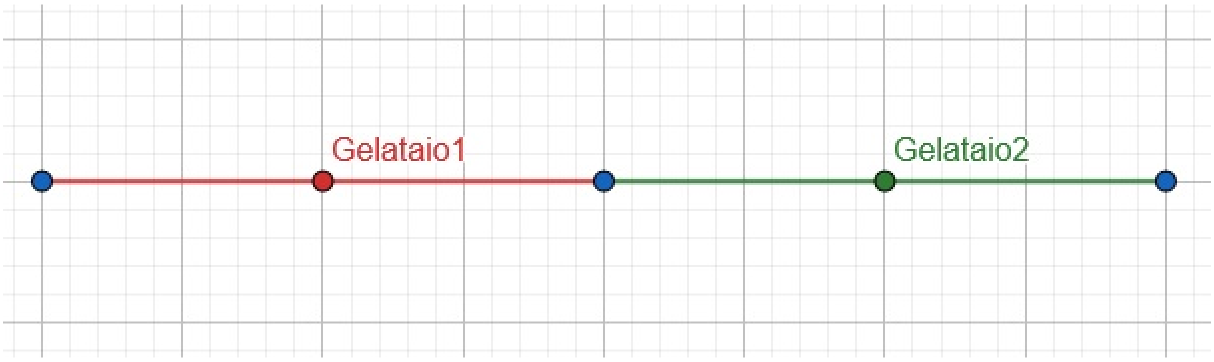
4.4 PARADOSSO DEI DUE GELATAI e TEOREMA DI ARROW

In questo paragrafo verranno presentati l'enunciato del Teorema di Arrow, che dimostra l'impossibilità nel definire regole di aggregazione per prendere scelte collettive, ed un paradosso che mostra i limiti della rappresentanza partitica.

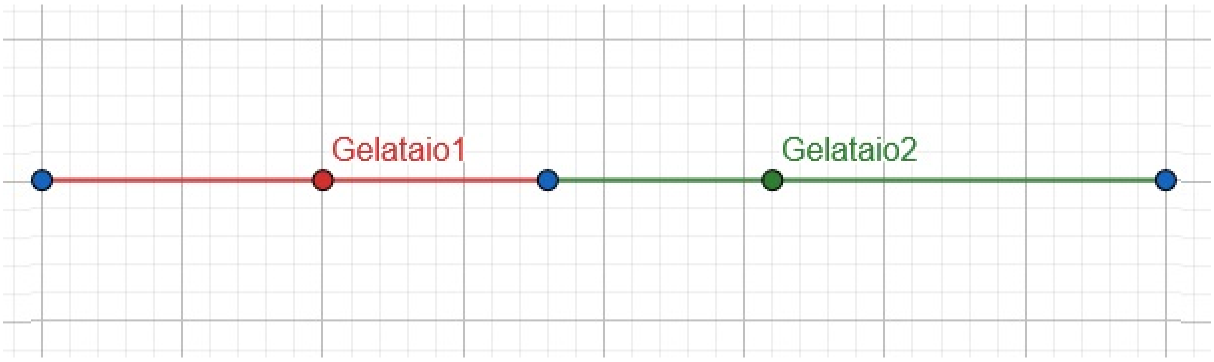
4.4.1 PARADOSSO DEI DUE GELATAI

Nella nostra teoria i partiti vengono visti come difensori e propositori dei differenti ottimi paretiani sociali.
Nel paradosso dei due gelatai, i gelatai rappresentano i partiti, la spiaggia la distribuzione dei diversi ottimi paretiani sociali, i bagnanti invece rappresentano gli agenti sociali ossia gli elettori.

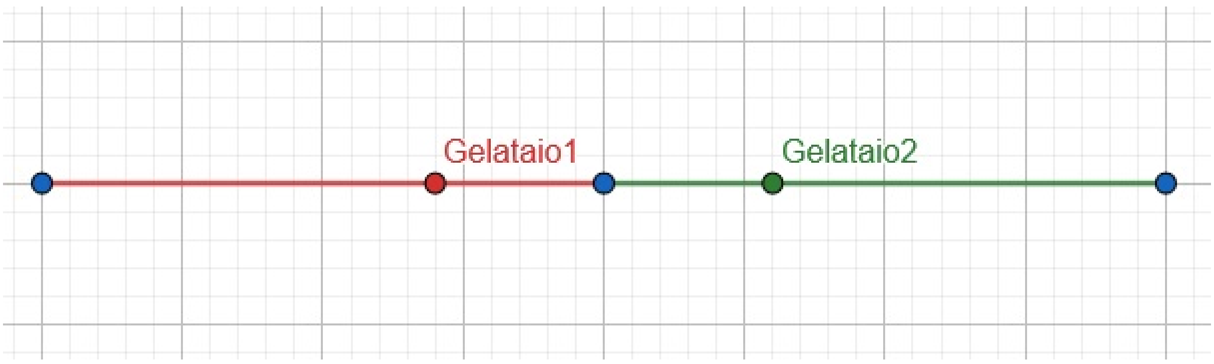
Su una spiaggia lunga un chilometro si trovano due gelatai. Naturalmente ognuno dei due si sistema a 250 metri da uno degli estremi. In questo modo, ogni bagnante non dovrà percorrere più di 250 metri per comprare un gelato.



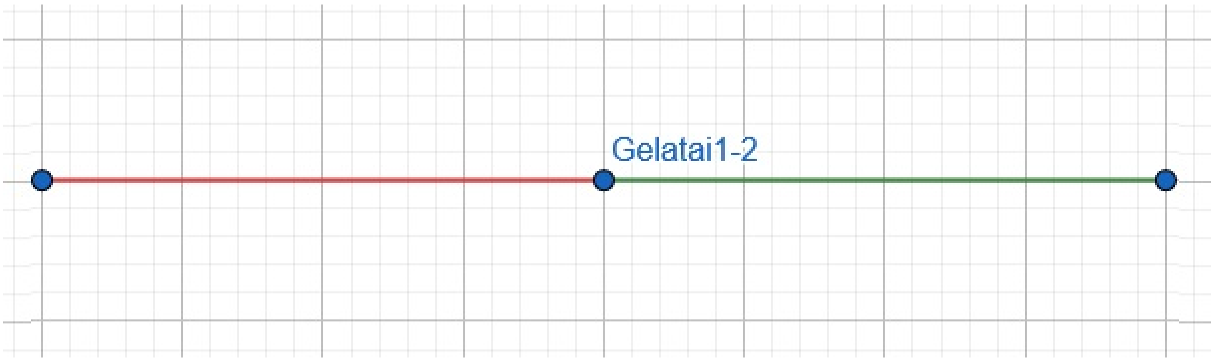
Il gelataio di destra pensa che spostandosi di 100 metri verso sinistra non perderà nessuno dei clienti sulla destra, che comunque avranno lui come punto di riferimento, ed inoltre avrà più clienti che vengono da sinistra.



Anche il gelataio di sinistra pensa che spostandosi verso destra avrà solo vantaggi.



Così facendo entrambi i gelatai si troveranno al centro della spiaggia. Nessuno dei due avrà più clienti rispetto alla situazione iniziale e i bagnanti che si trovano verso gli estremi o dovranno percorrere molta più strada o rinunceranno a comprare un gelato.



4.4.2 TEOREMA DI ARROW

Non esiste alcuna regola di aggregazione di scelta collettiva che soddisfi assieme le seguenti condizioni:

- **universalità** (o dominio non ristretto): la funzione di scelta sociale deve creare un ordinamento delle preferenze sociali deterministico e completo, a partire da qualsiasi insieme iniziale di preferenze individuali;
- **indipendenza dalle alternative irrilevanti**: la preferenza collettiva rispetto a due alternative dipende solo dalle scelte degli individui rispetto a queste alternative e non rispetto a come queste sono ordinate rispetto ad altre (irrilevanti);
- **non-dittatorialità**: la funzione di scelta sociale non deve semplicemente seguire l'ordinamento delle preferenze di un singolo individuo o un sottoinsieme di individui e al contempo ignorare le preferenze degli altri;
- **unanimità** (o condizione di Pareto): se tutti gli individui preferiscono un'alternativa ad un'altra, anche la società deve ordinare la propria funzione di benessere sociale in questo modo;
- **transitività**: le preferenze collettive devono essere transitive.

[19]

4.5 L'ETICA

Il Teorema di Arrow dimostra l'impossibilità pratica di definire un ordinamento delle preferenze collettive in funzione delle preferenze individuali.

Nel vocabolario Treccani l'etica viene definita come:

Nel linguaggio filosofico, ogni dottrina o riflessione speculativa intorno al comportamento *pratico dell'uomo, soprattutto in quanto intenda indicare quale sia il vero bene e quali i mezzi atti a conseguirlo, quali siano i doveri morali verso sé stessi e verso gli altri, e quali i criterî per giudicare sulla moralità delle azioni umane.*[3]

Una delle interpretazioni del teorema è che non è possibile stabilire un'etica universale.
In realtà nei problemi etici è difficile individuare una scelta razionale anche in modo individuale.

Nel 1967 Philippa Ruth Foot (1920-2010) propose il problema di un treno che sta per investire 5 persone legate ai binari. Tra il treno e le 5 persone c'è uno scambio di binari. Sull'altro binario è legato un uomo grasso. Un agente razionale si trova vicino alla leva dello scambio. Può scegliere di non fare nulla e restare innocente rispetto alla morte delle 5 persone oppure azionare lo scambio. In questo caso 5 persone si salveranno ma l'azione dell'agente razionale avrà causato la morte dell'uomo grasso.
Quale scelta dovrebbe prendere l'agente razionale?[23]

Nel 1976 Judith Jarvis Thomson (1929) propose una seconda versione del problema. L'agente razionale si trova su un ponte sopra la leva dello scambio. Questa volta l'uomo grasso è affianco a lui e non è quindi legato sul secondo binario. Il treno sta sempre per investire le stesse 5 persone della versione precedente. L'agente razionale può decidere di non far nulla o buttare l'uomo grasso giù dal ponte. Il peso dell'uomo grasso azionerebbe la leva e salverebbe la vita delle 5 persone legate ma l'uomo morirebbe per la caduta. L'agente razionale reputa certe tutte queste cose ed inoltre sa che se si buttasse lui, essendo molto magro, non riuscirebbe ad azionare la leva.
Quale scelta dovrebbe prendere l'agente razionale?[24]

I due quesiti rappresentano lo stesso problema etico. Bisogna scegliere tra lasciare morire le 5 persone legate o causare la morte dell'uomo grasso. Ogni agente razionale dovrebbe operare la stessa scelta in entrambi i problemi. Molte persone, nonostante si rendano conto che il "gioco" è lo stesso, ritengono che prendere la scelta nel secondo caso è più difficile.

5. LA TEORIA DEL PROSPETTO

L'irrazionalità delle decisioni prese dagli uomini non si limita solo a problemi etico-morali ma si estende anche alle scelte di natura economica.

IL PARADOSSO DI ALLAIS

Maurice Allais (1911-2010), nel 1953, propose a 78 intervistati questi due problemi.

Primo problema:
In quale situazione è preferibile trovarsi?

- S_1: vincere 2500€ con probabilità 0.33, vincere 2400€ con probabilità 0.66, non vincere nulla con probabilità 0.01.
- S_2: vincere con certezza 2400€.

Secondo problema:
In quale situazione è preferibile trovarsi?

- S_3: vincere 2500€ con probabilità 0.33, non vincere nulla con probabilità 0.67.
- S_4: vincere 2400€ con probabilità 0.34, non vincere nulla con probabilità 0.66.

L'82% degli intervistati ha ritenuto preferibile, nel primo problema, trovarsi nella situazione S_2 e l'83% ha ritenuto preferibile, nel secondo problema, trovarsi nella situazione S_3.
Almeno 51 intervistati hanno dato la coppia di risposte S_2 ed S_3.[25]

Chiamiamo:

- B_1 il valore del benessere se si vincono 2500€.
- B_2 il valore del benessere se si vincono 2400€.
- B_3 il valore del benessere se non si vince nulla.

Scegliere di preferire S_2 ad S_1 è **sensato** se:

$$0.33 \cdot u(B_1) + 0.66 \cdot u(B_2) + 0.01 \cdot u(B_3) < u(B_2)$$

Questo implica:

$$0.33 \cdot u(B_1) + 0.67 \cdot u(B_2) < 0.34 \cdot u(B_2) + 0.67 \cdot u(B_3)$$

Quindi è sensato preferire S_4 ad S_3.
Viceversa se è sensato preferire S_3 ad S_4 allora lo è anche preferire S_1 ad S_2.
I 51 che hanno dato le risposte S_2 ed S_3 hanno compiuto almeno una scelta (individualmente) insensata.

5.1 *ILLUSIONI COGNITIVE*

La scoperta di errori, sistematici e comuni a molti, nella soluzione di problemi di scelta ha portato alla creazione di una teoria euristica delle decisioni.
La teoria euristica ovviamente non riesce a definire la scelta razionale ma ha il vantaggio di prevedere le scelte che prenderanno gli agenti economici.

Le euristiche decisionali sono ragionamenti fallaci compiuti dalle mente umana. La mente tende a semplificare i problemi complessi per trovarne più velocemente una soluzione ma semplificare troppo dà origine ad errori sistematici detti bias o illusioni cognitive.

I già citati Daniel Kahneman (1934) e Amos Tversky (1937-1996) formularono la teoria del prospetto partendo da bias cognitivi ed euristiche decisionali.

5.1.1 *EURISITCA DELLA RAPPRESENTATIVITÀ*

Questa euristica porta a interpretare la probabilità come tipicità. La domanda *"Quanto è probabile che A appartenga a B?"* viene interpretata come *"Quanto A è rappresentativo di B?"*.
Di seguito sono riportati alcuni bias dovuti a questa euristica:

TRASCURARE LA PROBABILITÀ A PRIORI

Uno studente universitario che sta svolgendo uno studio di funzione è più rappresentativo della classe "studenti iscritti al corso di laurea in matematica" che della classe "studenti non iscritti al corso di laurea in matematica".
É però molto probabile che uno studente che sta svolgendo uno studio di funzione non sia iscritto a matematica. Questo perché gli studenti iscritti a matematica sono molti meno di quelli iscritti in un altro qualsiasi corso di laurea ovvero la probabilità a priori di essere iscritti a matematica è bassa.

CONFONDERE FREQUENZA E PROBABILITÀ

Sia A ”Lanciando quattro volte un dado esce sempre 6”.
Sia B ”Lanciando 12 volte una moneta le prime sei volte esce testa e le seconde sei croce”.
A è più probabile di B ma è ritenuto meno tipico.
Erroneamente si crede che anche per brevi sequenze di eventi aleatori le frequenze sperimentali devono avvicinarsi alle probabilità teoriche.

CREDERE CASI PARTICOLARI PIÙ PROBABILI DI CASI GENERALI

Sia A ”una particolare squadra vincerà la prossima partita 4-0”.
Sia B ”una particolare squadra acquista un nuovo campione che nella la prossima partita farà 3 gol e così la partita terminerà 4-0”.
B è una caso particolare di A ed è quindi meno probabile ma appare più tipico.

TRASCURARE LA GRANDEZZA DEL CAMPIONE

Prendere tutti 27 nel primo anno di università è tanto atipico quanto prendere tutti 27 in 5 anni di università ma molto più probabile.
Il campione nel secondo caso è molto più grande perché in 5 anni si dovranno affrontare circa il quintuplo degli esami affrontati nel primo anno.

5.1.2 EURISITCA DELL’ANCORAGGIO

Questa euristica consiste nel non allontanarsi molto da una prima stima data al valore di una grandezza.

A due gruppi di intervistati sono state date due stime della percentuale di nazioni Africane nelle Nazioni Unite. Ogni gruppo doveva decidere se la stima iniziale era giusta, troppo alta o troppo bassa ed in caso indicarne una ritenuta più credibile.
Il gruppo a cui era stata data una stima iniziale del 10% ha indicato il 25%.
Il gruppo a cui era stata data una stima iniziale del 65% ha indicato il 45%.[9]

5.1.3 EURISITCA DELLA DISPONIBILITÀ

Questa euristica consiste nel credere che ciò di cui si riesce facilmente a disporre di un’immagine mentale sia più probabile di ciò per cui questo è più difficile.

In uno studio dell’Oregon Research Institute è stato chiesto a dei volontari di stimare le probabilità di morte dovute a diverse cause. Lo studio ha mostrato che si sovrastimano le cause di morte a cui solitamente è associata una maggiore visibilità mediatica.[25]

L'euristica è causata, oltre che da errori dovuti alla reperibilità di esempi, anche da errori dovuti dalla difficoltà dell'immaginabilità.

5.2 FORMULAZIONE DELLA TEORIA

Queste euristiche decisionali portano a deformare il valore di una probabilità P in un valore $\pi(P)$.
Vari studi hanno dimostrato che gli agenti sovrastimano i valori bassi di probabilità e sottostimano quelli alti.
Inoltre, detta $\pi(\cdot)$ la funzione percezione della probabilità, per valori x molto bassi $\pi(2x) < 2 \cdot \pi(x)$ e $[1-\pi(1-2x)] < [1-2\cdot\pi(1-2x)]$.
Questo vuol dire che il passare dalla probabilità 0% alla probabilità 1% è considerato più influente che passare dalla probabilità 1% alla probabilità 2%.
Analogamente, passare dalla probabilità 99% alla probabilità 100% è considerato più influente che passare dalla probabilità 98% alla probabilità 99%.
Infine, evento certo ed evento impossibile sono considerati tali, quindi $\pi(1) = 1$ e $\pi(0) = 0$.
La funzione $\pi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ deve avere un grafico di questo tipo:

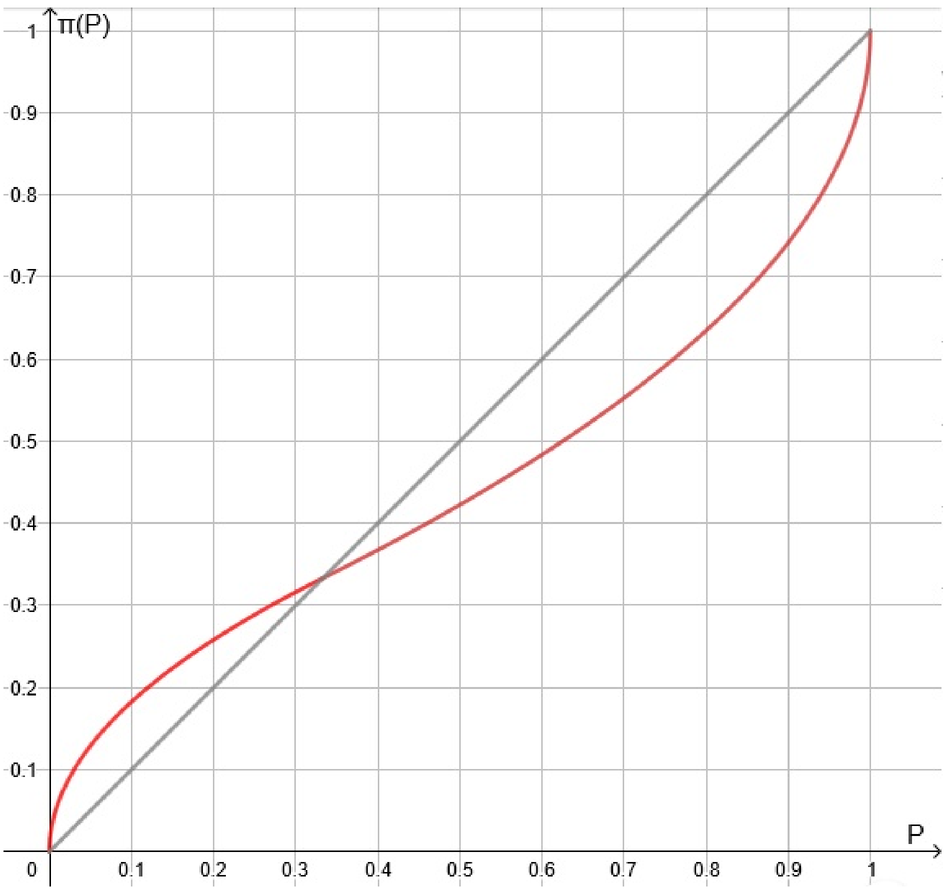


Fig. 5.1: percezione della probabilità

L'euristica dell'ancoraggio, in accordo con la teoria dell'utilità, porta a ritenere il passaggio da 1000€ a 900€ differentemente dal passaggio da 200€ a 100€.

Nel grafico seguente si può vedere che, nella teoria dell'utilità, l'utilità di una perdita è, in modulo, maggiore dell'utilità di un guadagno equivalente. La teoria del prospetto conserva questa caratteristica.

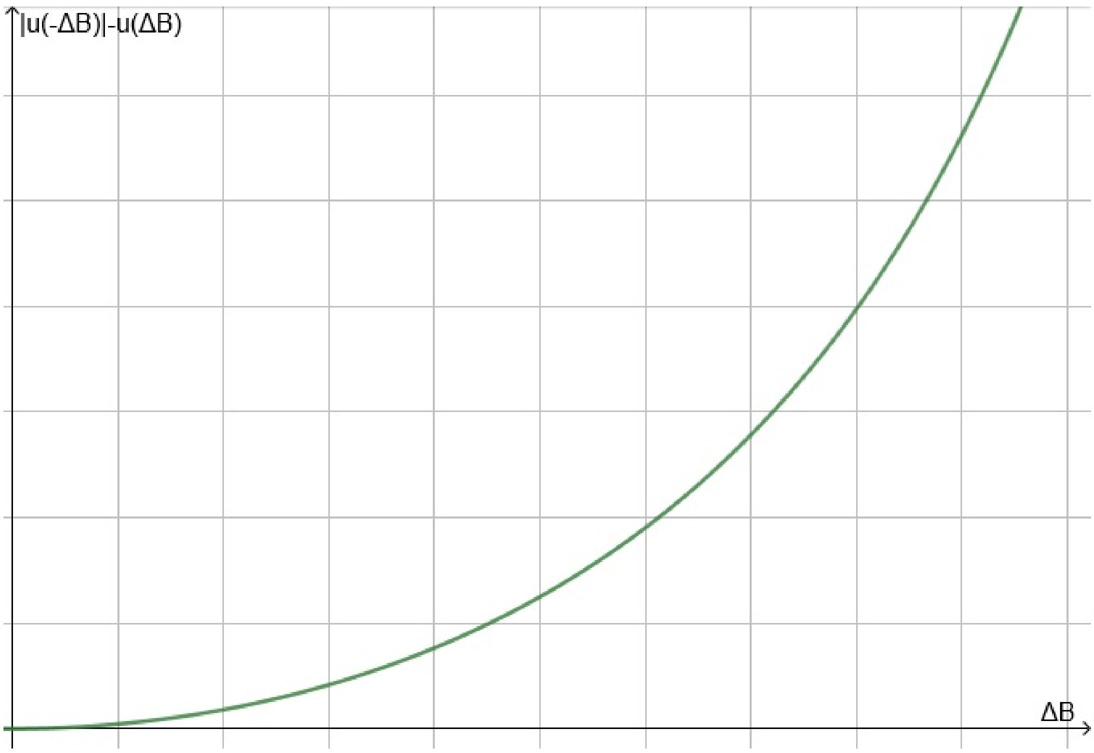


Fig. 5.2: distanza tra l'utilità di una perdita e di un guadagno

La teoria tiene inoltre conto di altri 3 fattori

- Effetto contesto: gli agenti prendono decisioni in relazione al contesto in cui si trovano. In particolare sono influenzati dal modo in cui un problema decisionale viene presentato.
- Effetto riflessione: gli agenti attribuiscono valori a perdite e guadagni e non al patrimonio in se. In caso di soli possibili guadagni si ha una minore propensione al rischio, in caso di sole possibili perdite una maggiore.
- Effetto isolamento: gli agenti tendono ad isolare probabilità consecutive. la realizzazione di un evento che capita con probabilità $P_1 \cdot P_2$ è ritenuta più incerta della realizzazione di due eventi indipendenti, uno con probabilità P_1 e l'altro con probabilità P_2.

Proviamo a costruire una funzione $\Pi_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ che associa al valore ΔB di un guadagno o di una perdita l'utilità percepita dall'agente in una certa prospettiva p. Chiamiamo questa funzione **utilità percepita**.
Per l'euristica dell'ancoraggio Π_p deve essere concava nella parte positiva del dominio e convessa in quella negativa. La funzione così costruita è in accordo con l'effetto riflessione, non conciliabile con la teoria dell'utilità attesa.
La maggiore sensibilità alle perdite che ai guadagni, così come nella teoria dell'utilità attesa, fa si che

$$\dot{\Pi}_p(-\Delta B) > \dot{\Pi}_p(\Delta B)$$

per ogni $\Delta B > 0$.
Il grafico dell'utilità percepita deve assumere questa forma

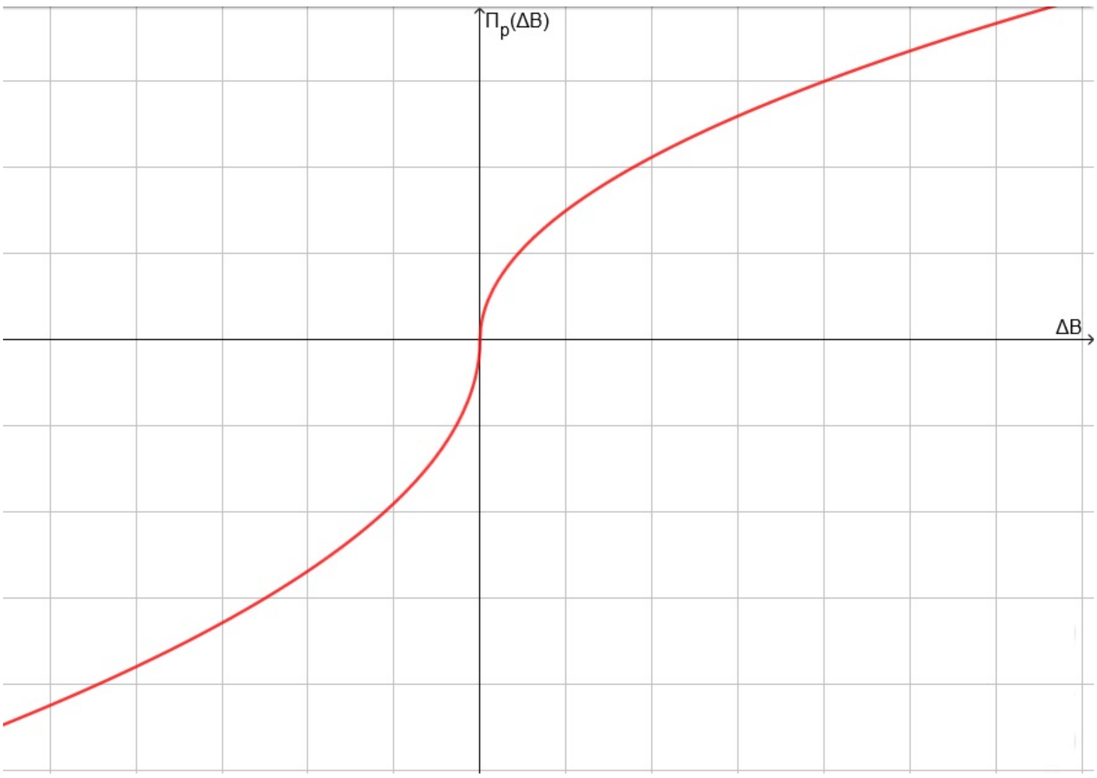


Fig. 5.3: utilità percepita

Costruita la funzione dell'utilità percepita non ci resta che delineare la scelta che la mente umana ritiene più vantaggiosa.
Per farlo è opportuno evocare una semplificazione che viene adoperata quando gli esiti di una particolare scelta comportano tutti dei guadagni o tutti delle perdite.
Una situazione in cui si possono guadagnare 100€ con probabilità $\frac{1}{2}$ e 200€ con probabilità $\frac{1}{2}$ viene percepita come una situazione in cui si è certi di guadagnare 100€ e c'è probabilità $\frac{1}{2}$ di guadagnarne altri 100.

Definizione 5.2.1. *Sia S_j una possibile scelta in un problema decisionale dalla prospettiva p in condizione di rischio;*
Siano $E_i^{(j)}$, con $i \in \mathbb{N}$, i possibili esiti derivanti da S_j;
Sia $\Delta B_i^{(j)}$ la variazione del patrimonio di benessere se si realizza $E_i^{(j)}$.

- *Se $\Delta B_i^{(j)} \geq 0, \forall i \in \mathbb{N}$ allora:*

$$\Pi_p(S_j) = \min_i(\Pi_p(\Delta B_i^{(j)})) + \sum_{i=1}^{\infty}[\Pi_p(\Delta B_i^{(j)}) - \min_i(\Pi_p(\Delta B_i^{(j)}))] \cdot \pi(P(E_i^{(j)}))$$

- *Se $\Delta B_i^{(j)} \leq 0, \forall i \in \mathbb{N}$ allora:*

$$\Pi_p(S_j) = \max_i(\Pi_p(\Delta B_i^{(j)})) + \sum_{i=1}^{\infty}[\Pi_p(\Delta B_i^{(j)}) - \max_i(\Pi_p(\Delta B_i^{(j)}))] \cdot \pi(P(E_i^{(j)}))$$

- *Se $\exists i, k \in \mathbb{N}$ tali che $\Delta B_i^{(j)} \cdot \Delta B_k^{(j)} < 0$ allora:*

$$\Pi_p(S_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pi_p(\Delta B_i^{(j)}) \cdot \pi(P(E_i^{(j)}))$$

$\Pi_p(S_j)$ viene detto utilità percepita di S_j.

Definizione 5.2.2. *In un problema decisionale in condizione di rischio dalla prospettiva p detto S l'insieme delle scelte possibili, $S_j \in S$ è detta* ***scelta percepita sensata*** *se $\forall S_i \in S$ $\Pi_p(S_j) \geq \Pi_p(S_i)$.*

Ovviamente una scelta percepita sensata non è detto che sia una scelta sensata. Per almeno 51 intervistati da Allais, le risposte S_2 ed S_3 sono percepite sensate ma, come detto, non possono essere entrambe sensate. Il cambiare la domanda muta la prospettiva dell'intervistato e, per questo motivo, la teoria del prospetto può spiegare il paradosso.

6. QUESTIONARI E ANALISI DELLE RISPOSTE

Per indagare sull'esistenza di euristiche decisionali ed illusioni cognitive, è stato realizzato un questionario con problemi decisionali e di calcolo delle probabilità. Il questionario è stato stilato in due diverse tipologie.

Entrambe le tipologie erano formate da nove quesiti a risposte multiple, due dei quali comuni a tutti i questionari.
I restanti sette quesiti erano diversi tra loro ma formulati con l'idea di confrontare le risposte date ad una tipologia di questionario con quelle date all'altra.

In ogni questionario erano presenti cinque domande di probabilità che proponevano una risposta corretta ed una, o due, errate. Di queste cinque una era di probabilità bayesiana ed era comune a tutti i questionari.
Le restanti quattro domande erano di teoria delle decisioni. Una era identica in entrambe le tipologie e due proponevano, nei diversi questionari, le stesse situazioni con formulazioni differenti.

I questionari, realizzati con Google Moduli, sono stati diffusi maggiormente attraverso la condivisione dei link su social-network come "Instagram", "Facebook" e "WhatsApp". Con questa modalità sono pervenute 455 risposte.

Sono state inoltre realizzate delle copie cartacee del questionario e sono state distribuite a 17 studenti del IV-G del Liceo Scientifico-Linguistico "Pitagora" di Rende (CS), a 17 studenti del V-G ed a 10 del V-B della stessa scuola. Le due classi della sezione G hanno la stessa docente di matematica che aveva già introdotto nozioni di calcolo delle probabilità agli studenti della classe quinta ma non a quelli della classe quarta.
La classe V-B ha invece una docente diversa che aveva già introdotto nozioni di calcolo combinatorio ma non di probabilità. Si segnala inoltre che a questa classe il questionario è stato somministrato il giorno della fiera cittadina per cui c'erano molti assenti.

Tutte e tre le classi afferiscono all'indirizzo scientifico della scuola.
Complessivamente il questionario ha ricevuto 499 riposte così suddivise: 262 alla prima tipologia di test; 237 alla seconda.
Qui di seguito sono riportati i due questionari con le domande riordinate in modo da essere confrontabili.

6.1 QUESTIONARI

6.1.1 Questionario 1

Età:

Titolo di studio:

Hai mai studiato probabilità?

- Sì
- No

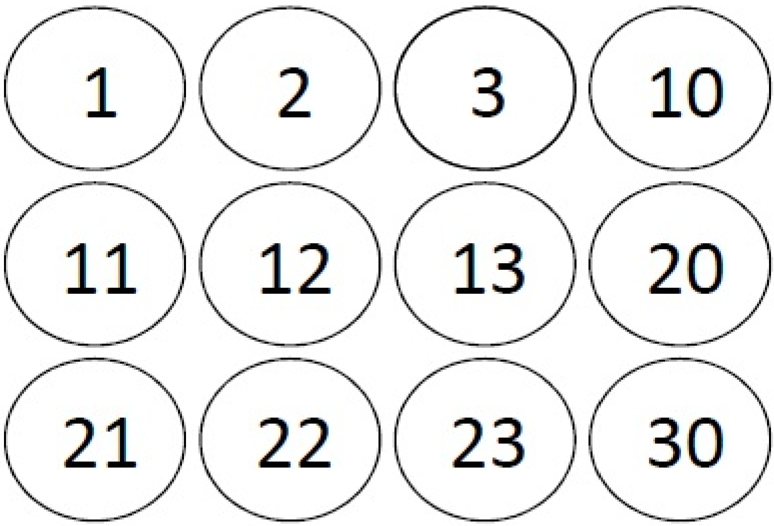
Quesito 1 di 9

In una città ci sono due cliniche con reparto maternità. Una è nettamente più grande dell'altra. Nella prima si registrano in media 45 nascite al giorno, nella seconda, sempre in media, 15 nascite al giorno. Si decide di annotare scrupolosamente, in ciascuna clinica, su un albo speciale, i giorni in cui i nati appartengono per oltre il 60% allo stesso sesso. Quale delle due cliniche registrerà il maggior numero di tali giorni?

- La clinica più grande
- La clinica più piccola

Quesito 2 di 9

Un'urna contiene queste 12 palline:



Vengono estratte tre palline consecutivamente una dopo l'altra, senza rimettere le palline estratte nell'urna. Ritieni più probabile che siano state estratte:

- le palline 1 , 2 , 3
- le palline 2 , 11 , 30
- È egualmente probabile

Quesito 3 di 9

Un dado regolare ha cinque facce blu ed una sola rossa. Ritieni più probabile:

- che lanciandolo 9 volte esca per 8 volte il rosso
- che lanciandolo 10 volte esca per 8 volte il rosso

Quesito 4 di 9

Un dado, regolare e non truccato, con sei facce numerate da 1 a 6 viene lanciato due volte Ritieni più probabile che esca:

- 5 al primo lancio e 5 al secondo lancio
- 3 al primo lancio e 5 al secondo lancio
- È egualmente probabile

Quesito 5 di 9

Il signor Rossi ha letto dell'esistenza di una malattia molto rara che, in Italia, trai maschi della sua età, colpisce l'1% della popolazione. Intimorito dall'idea di poterla avere decide quindi di fare un test affidabile al 79% a cui risulta positivo. Tenendo conto di queste informazioni, secondo te

- È estremamente probabile che sia malato
- È molto probabile che sia malato
- È improbabile che sia malato

Quesito 6 di 9

Un agente della compagnia telefonica a cui pensavi di passare ti ferma in un centro commerciale e ti regala una ricarica di 50€. Dopo di che ti dice che il passaggio alla sua compagnia costa 10€. Ti propone di scegliere tra le due possibilità scritte sotto. Quale preferisci?

- Scelta A) Gettare in aria una moneta e giocare a testa o croce; se vinci il passaggio alla compagnia sarà gratis; se perdi dovrai pagare il passaggio 20€
- Scelta B) Pagare i 10€

Quesito 7 di 9

Un paese del Sud-Est dell'Asia è minacciato da una grave epidemia che mette in pericolo la vita di 600persone. Sono in fase di elaborazione due possibili tipi di interventi sanitari. Quale dei due adotteresti?

- Programma A per cui è certo che moriranno esattamente 400 persone
- Programma B per cui c'è una probabilità di un terzo che nessuno muoia e una probabilità di due terzi che muoiano 600 persone

Quesito 8 di 9

Hai appena giocato alla roulette, scommettendo 5€ sul rosso, che è uscito. Hai, quindi, vinto 10€. Saresti disposto a giocare di nuovo 5€?

- Sì, punterei sul rosso
- Sì, punterei sul nero
- No

Quesito 9 di 9

Hai appena giocato alla roulette in un'altra stanza, scommettendo 5€ sul rosso. Il numero è già uscito quindi o hai vinto ed il croupier sta tenendo da parte i tuoi 10€ oppure hai perso ma tu non sai cos'è successo. Saresti disposto a giocare ora altri 5€ prima di sapere cos'è successo nell'altra stanza?

- Sì
- No

6.1.2 Questionario 2

Età:

Titolo di studio:

Hai mai studiato probabilità?

- Sì
- No

Quesito 1 di 9

In una città ci sono due cliniche con reparto maternità. Una è nettamente più grande dell'altra. Nella prima si registrano in media 45 nascite al giorno, nella seconda, sempre in media, 15 nascite al giorno. Si decide di annotare scrupolosamente, in ciascuna clinica, su un albo speciale, i giorni in cui i nati hanno lo stesso sesso. Quale delle due cliniche registrerà il maggior numero di tali giorni?

- La clinica più grande
- La clinica più piccola

Quesito 2 di 9

Un'urna contiene queste 12 palline:

Vengono estratte tre palline consecutivamente una dopo l'altra, senza rimettere le palline estratte nell'urna. Ritieni più probabile che siano state estratte:

- le palline Pistola , Casa , Automobile
- le palline Corda , Soldi , Mano
- È egualmente probabile

Quesito 3 di 9

Un dado regolare ha cinque facce blu ed una sola rossa. Ritieni più probabile:

- che lanciandolo 9 volte escano nell'ordine: R-R-B-R-R-R-R-R-R (R indica la faccia rossa; B le facce blu)
- che lanciandolo 10 volte escano nell'ordine: R-R-B-R-R-R-R-R-R-B (R indica la faccia rossa; B le facce blu)

Quesito 4 di 9

Due dadi, regolari, non truccati e indistinguibili, con sei facce numerate da 1 a 6 vengono lanciati insieme Ritieni più probabile che esca:

- 4 su entrambi i dadi
- 2 su un dado e 5 sull'altro
- È egualmente probabile

Quesito 5 di 9

Il signor Rossi ha letto dell'esistenza di una malattia molto rara che, in Italia, trai maschi della sua età, colpisce l'1% della popolazione. Intimorito dall'idea di poterla avere decide quindi di fare un test affidabile al 79% a cui risulta positivo. Tenendo conto di queste informazioni, secondo te

- È estremamente probabile che sia malato
- È molto probabile che sia malato
- È improbabile che sia malato

Quesito 6 di 9

Un agente della compagnia telefonica a cui pensavi di passare ti ferma in un centro commerciale e ti regala una ricarica di 30€. Dopo di che ti i propone di scegliere tra le due possibilità scritte sotto. Quale preferisci?

- Scelta A) Gettare in aria una moneta e giocare a testa o croce; se vinci ti regala un'altra ricarica da 20€; se perdi non ricevi nient'altro
- Scelta B) Ricevere con certezza un'altra ricarica da 10€

Quesito 7 di 9

Un paese del Sud-Est dell'Asia è minacciato da una grave epidemia che mette in pericolo la vita di 600persone. Sono in fase di elaborazione due possibili tipi di interventi sanitari. Quale dei due adotteresti?

- Programma A per cui è certo che si salveranno esattamente 200 persone
- Programma B per cui c'è una probabilità di un terzo di salvare 600 vite umane e una probabilità di due terzi di non salvare nessuna vita umana

Quesito 8 di 9

Hai appena giocato alla roulette, sommettendo 5€ sul nero ed hai perso. Saresti disposto a giocare di nuovo 5€?

- Sì, punterei sul rosso
- Sì, punterei sul nero
- No

Quesito 9 di 9

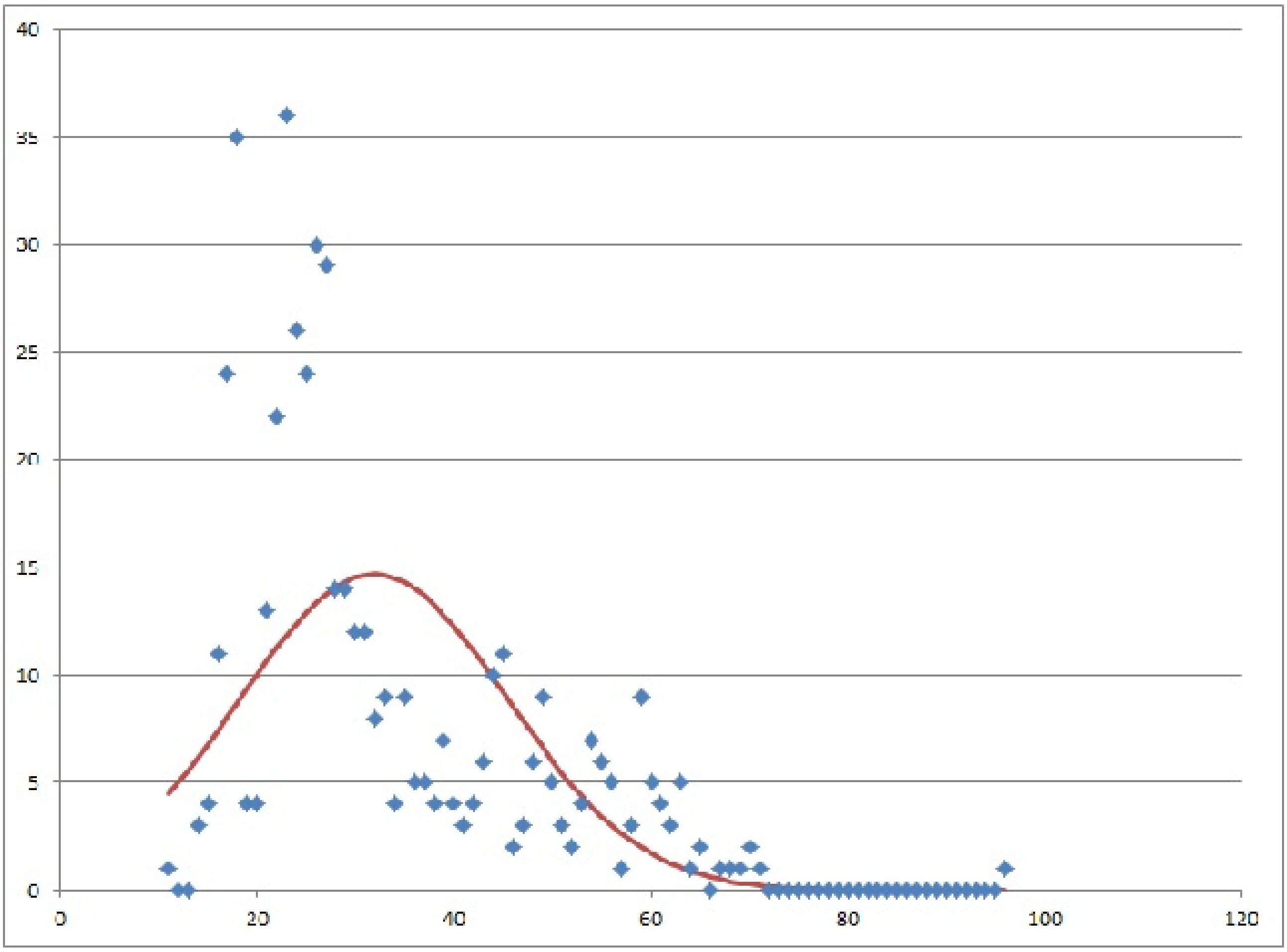
Hai appena giocato alla roulette in un'altra stanza, scommettendo 5€ sul rosso. Il numero è già uscito quindi o hai vinto ed il croupier sta tenendo da parte i tuoi 10€ oppure hai perso ma tu non sai cos'è successo. Saresti disposto a giocare ora altri 5€ prima di sapere cos'è successo nell'altra stanza?

- Sì
- No

6.2 ANALISI DELLE RISPOSTE

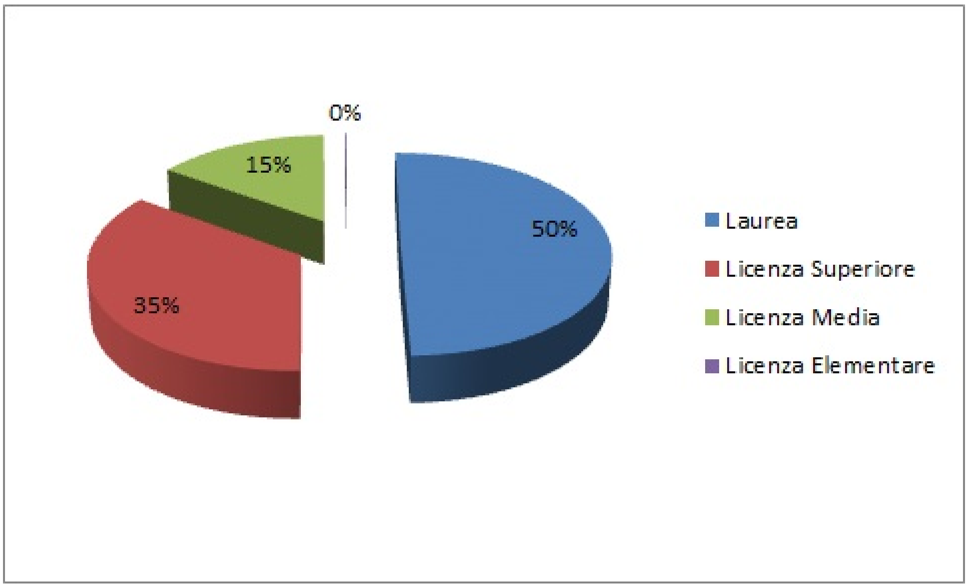
6.2.1 Età

Il partecipante più giovane aveva 11 anni mentre il più anziano 96. I dati dell'età hanno una media di 31,88 ed una varianza di 183,93.
Molti tra coloro che hanno risposto al questionario (il 29,06%) avevano un età compresa tri 23 ed i 27 anni.
Qui sotto è riportato in blu il grafico con il numero di partecipanti per ogni età; in rosso la distribuzione normale con media e varianza dei dati raccolti.



6.2.2 Titolo di Studio

Molti dei partecipanti al test hanno dichiarato di essere laureati. Il 50% contro una media nazionale del 14%.



6.2.3 Studio della Probabilità

Più della metà dei partecipanti, il 57%, ha studiato probabilità

Il campione esaminato è quindi mediamente giovane, con un titolo di studio elevato e con una qualche conoscenza di probabilità. Nell'analisi delle risposte verranno esaminati, parallelamente al campione generale, anche quelli delle tre classi del Liceo Scientifico Linguistico considerati campioni più omogenei.

6.2.4 Quesito 1

Questo quesito è la traduzione di un problema realizzato da Maya Bar-Hillel.[26]
Considerando il 50% sia la probabilità che un bambino nasca maschio, sia che nasca femmina ed indipendenti tra loro tutte le nascite, la probabilità che tra 45 nati tutti abbiano lo stesso sesso risulta essere $2 \times (0,5)^{45} \approx 0,00000000001\%$. Invece la probabilità che ciò accada tra 15 nati è $2 \times (0,5)^{15} \approx 0,05\%$ ed è quindi 5.000.000.000 di volte superiore.
Calcoliamo ora la probabilità dell'evento E_1 che tra 45 nati oltre il 60% appartenga allo stesso sesso, ovvero che almeno 28 siano maschi o che almeno 28 siano femmine.

$$P(E_1) = 2 \cdot \sum_{n=28}^{45} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{45-n} \binom{n}{45} = \frac{1}{2^{44}} \cdot \sum_{n=28}^{45} \binom{n}{45}$$

$P(E_1)$ ammonta a circa 13,5%. Calcoliamo invece la probabilità dell'evento E_2 che tra 15 nati oltre il 60% appartenga allo stesso sesso.

$$P(E_2) = 2 \cdot \sum_{n=10}^{15} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{15-n} \binom{n}{15} = \frac{1}{2^{14}} \cdot \sum_{n=10}^{15} \binom{n}{15}$$

$P(E_2)$ ammonta a circa 30,2%, oltre il doppio di $P(E_1)$.
La risposta corretta al quesito in entrambi i test è, quindi, che sarà la clinica più piccola a registrare il maggior numero di giornate "anomale".
Il ragionamento, qualitativo e non quantitativo, da affrontare in entrambe le formulazioni del test, è identico e menti razionali e prive di illusioni cognitive darebbero la stessa risposta ad entrambe le domande.
Aprioristicamente si ritiene però più probabile che il *Questionario 1* riceva più riposte corrette del *Questionario 2*. Questo sia perché quantitativamente c'è una grande differenza tra la probabilità che l'evento "anomalo" accada nella clinica grande e la probabilità che accada nella clinica piccola, sia perché la stessa domanda posta dalla psicologa Maya Bar-Hillel ha ricevuto circa l'80% delle risposte corrette nel caso di fluttuazione estrema e solo il 30% nel caso di una piccola fluttuazione.
Due studenti che hanno compilato il *Questionario 2* in forma cartacea, ed hanno dato la risposta errata, hanno appuntato di fianco alla domanda questi due calcoli:

$$45 \times 60\% = 27$$

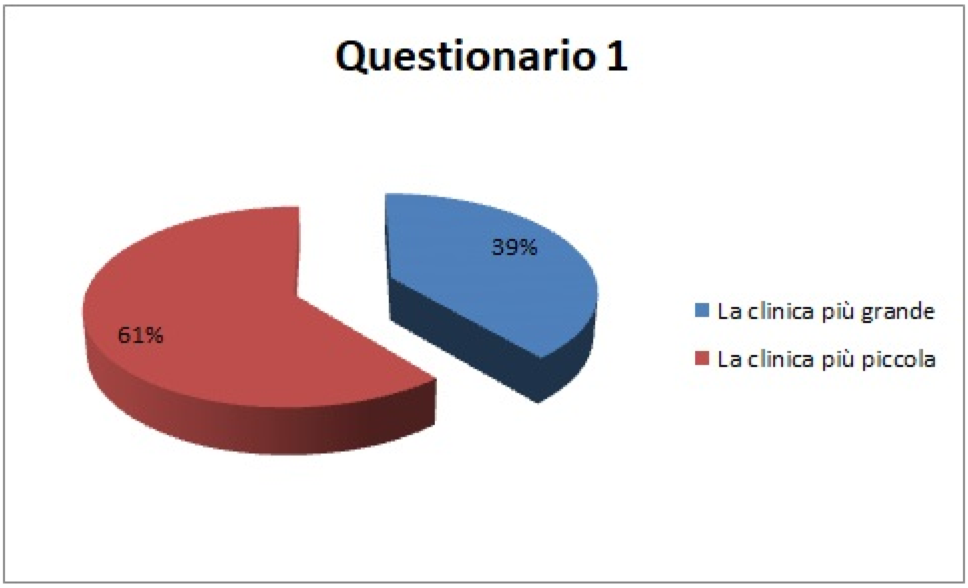
$$15 \times 60\% = 9$$

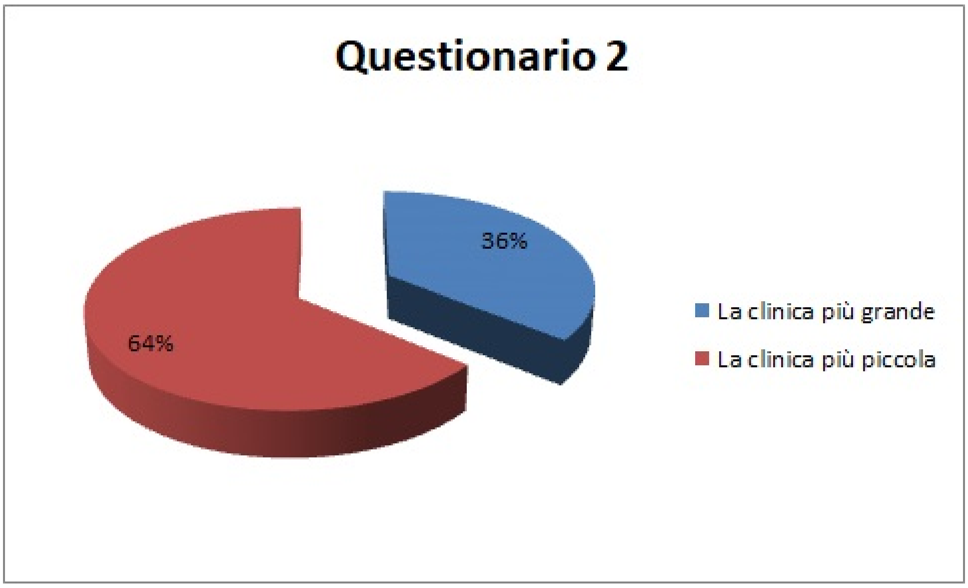
Uno studente che ha compilato sempre il *Questionario 2* ed ha dato la risposta sbagliata ha scritto sotto il quesito queste due frazioni:

$$\frac{1}{45} \quad , \quad \frac{1}{15}$$

Il bias di trascurare la grandezza del campione dovuto all'euristica della rappresentatività può indurre a pensare che la probabilità di una fluttuazione sia uguale in entrambe le cliniche. Ciò, di conseguenza, può portare a rispondere casualmente alla domanda.

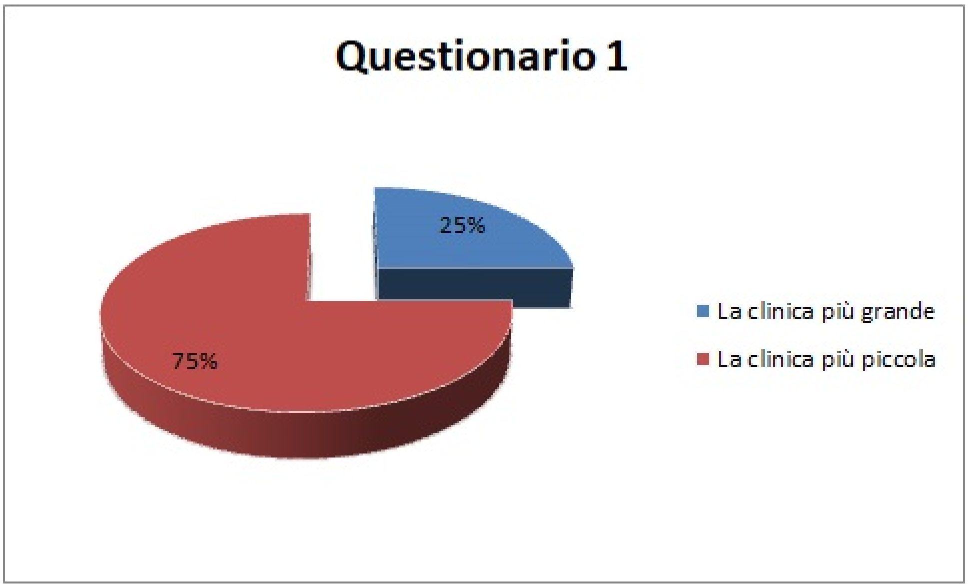
Risposte ricevute su tutti i 499 questionari:

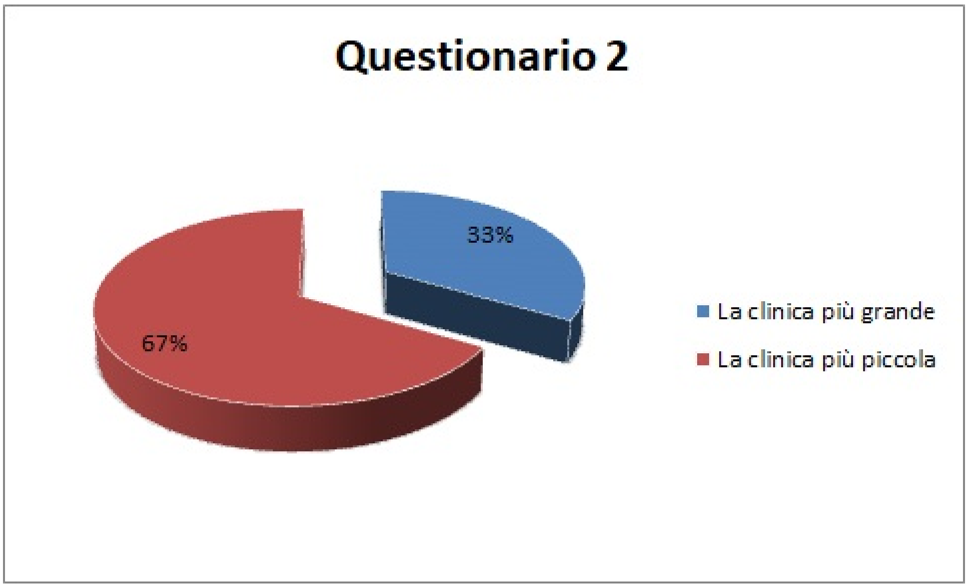




Anche se la differenza nelle risposte è molto piccola, si nota che la domanda del primo questionario induce i partecipanti al test più frequentemente in errore.
Le risposte corrette sono infatti il 61% contro il 64% del secondo questionario.
Come si è detto, nel problema del primo questionario i giorni "anomali" saranno estremamente più frequenti nella clinica piccola. Ciò nonostante oltre un terzo dei 262 individui che hanno risposto a questa domanda hanno stimato che questi siano più frequenti nella grande.
I dati raccolti sono quindi molto distanti da quelli che ci si aspettava.

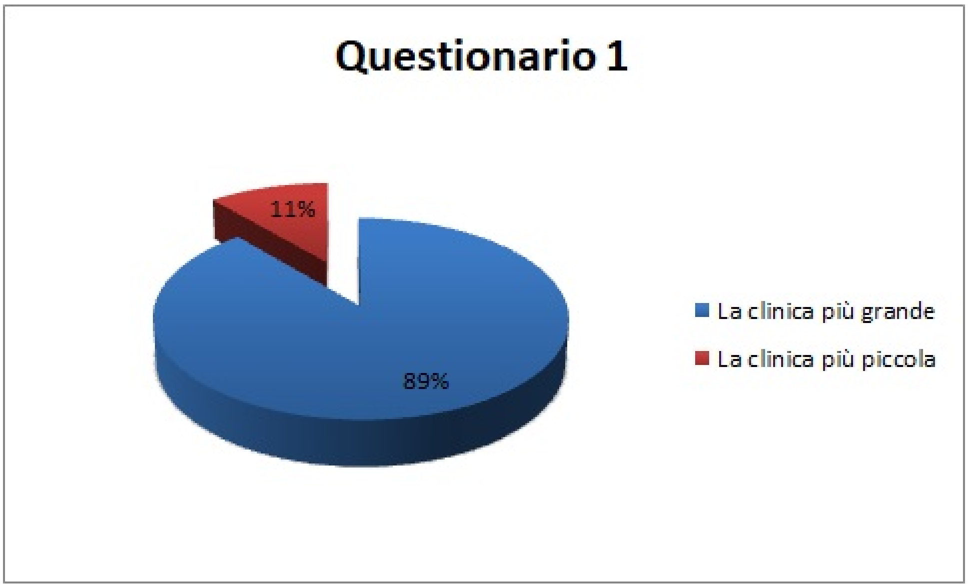
Risposte ricevute solo sui questionari della classe IV-G:

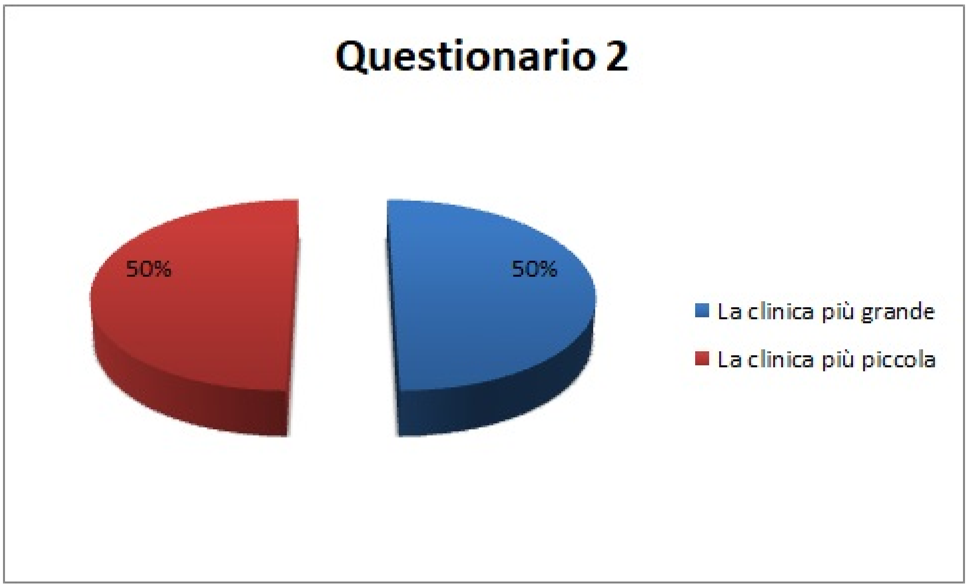




I dati raccolti in questa classe tra chi ha risposto al *Questionario 1* si avvicinano molto a quelli previsti.
Viceversa tra le risposte ricevute al *Questionario 2* ce ne sono più corrette di quanto non previste.
In questo piccolo campione, a differenza del campione generale e come previsto da M. Bar -Hillel, il secondo quesito è risultato più ingannevole del primo.

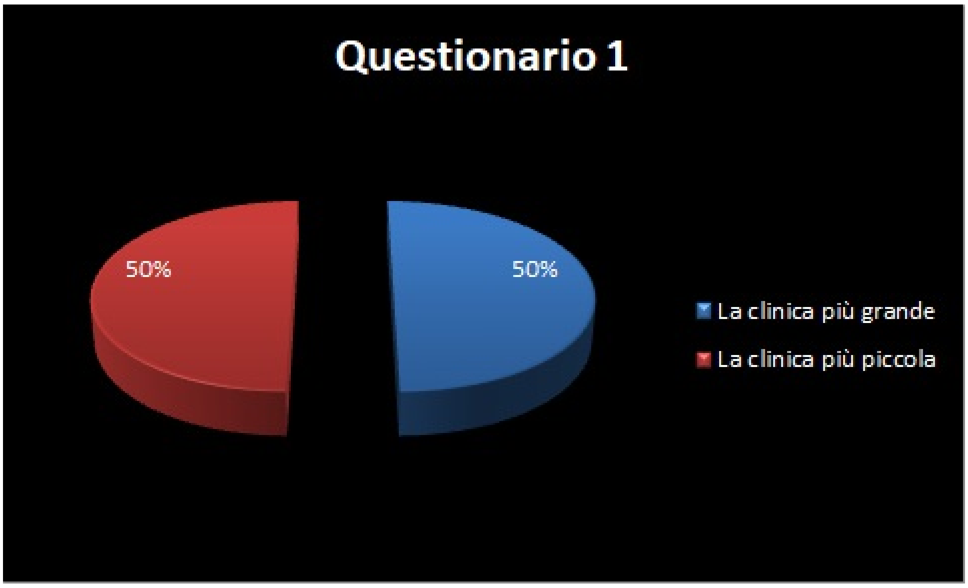
Risposte ricevute solo sui questionari della classe V-G:

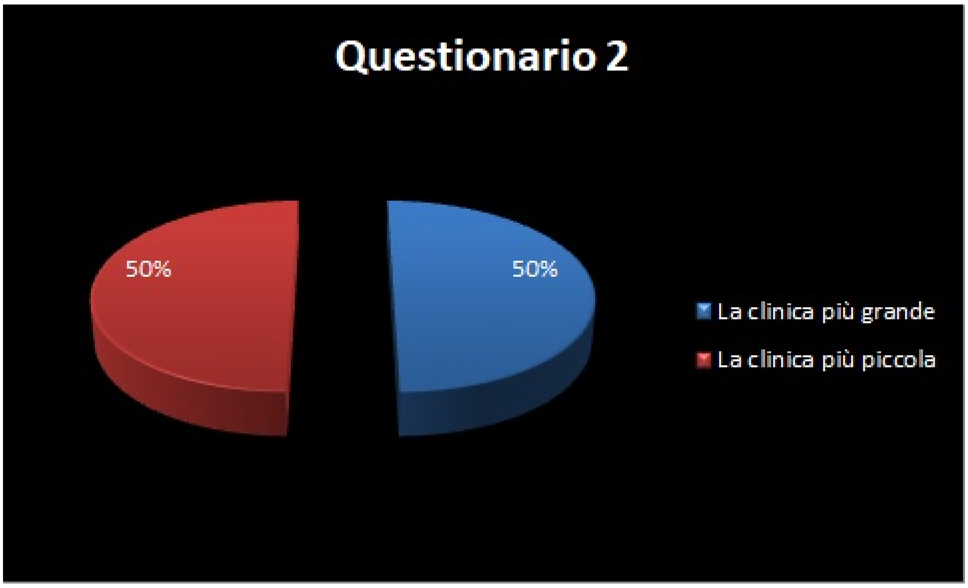




Questo piccolo campione, per quanto omogeneo, ha ricevuto risposte molto diverse da quelle previste.
Non solo il quesito del *Questionario 1* è risultato più ingannevole del quesito del *Questionario 2* ma ha anche ricevuto una sola risposta corretta quando si prevedeva che la maggioranza degli intervistati non avrebbe sbagliato.
Si ricorda che questa classe, a differenza della precedente, ha già affrontato lo studio del calcolo delle probabilità.

Risposte ricevute solo sui questionari della classe V-B:





In questa classe sia il *Questionario 1* che il *Questionario 2* hanno ricevuto metà delle risposte corrette e metà errate.
Come nel campione generale, si può notare che non c'è differenza tra il tipo di previsione fatta dagli intervistati in entrambe le formulazioni del quesito.

6.2.5 Quesito 2

Questo quesito è stato formulato per indagare una ben nota misconcezione probabilistica: il ritenere che in giochi come il lotto la probabilità che venga estratta una cinquina di palline numerate con numeri consecutivi sia più bassa rispetto alla probabilità che venga estratta una cinquina di palline numerate con numeri tra cui è difficile trovare una correlazione.

Per semplificare il problema si è scelto di usare, invece che la consueta urna contente 90 palline del gioco del lotto, un'urna con solo 12 palline. Altresì si è proposta l'estrazione di sole 3 palline invece che 5.
Nel *Questionario 1* le palline sono state contraddistinte con dei simboli numerici mentre nel *Questionario 2* con delle immagini.

L'idea aprioristica era che spesso si scambiano i simboli numerici presenti sulle palline con dei veri numeri e che quindi si trasferiscono le caratteristiche dei numeri sulle palline. L'attesa era che scegliendo invece palline segnate con disegni, per quanto proposte con un preciso ordine, si fosse meno propensi a ritenere improbabili terzine ordinate.

Essendo proposte in entrambi i quesiti 12 palline differenti, la probabilità P che ad essere estratta sia una qualsiasi particolare terzina è equivalente.

$$P = \frac{3! \times 9!}{12!} = 0,\overline{15}\%$$

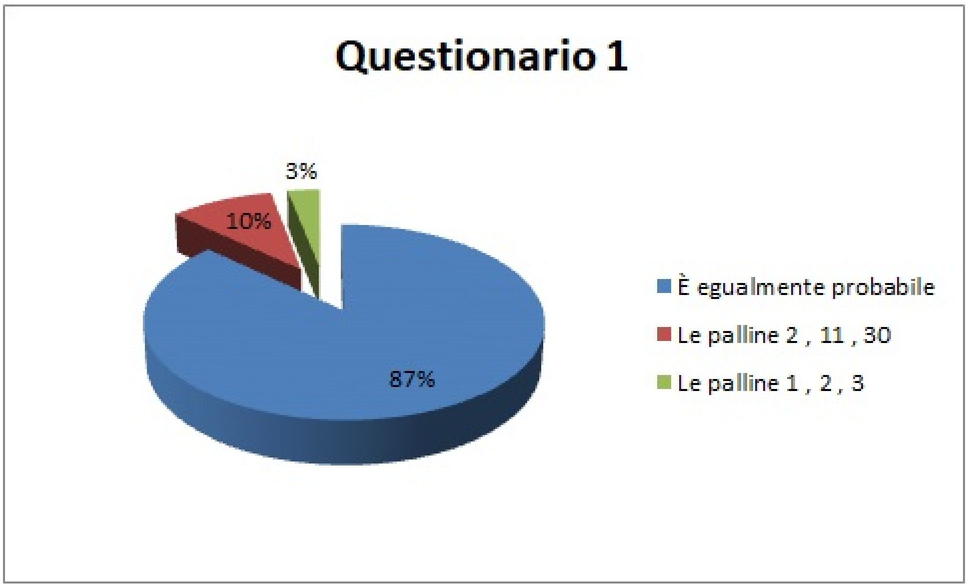
Nella domanda del *Questionario 1* possono indurre in errore due diverse euristiche: l'euristica della rappresentatività e l'euristica della disponibilità.

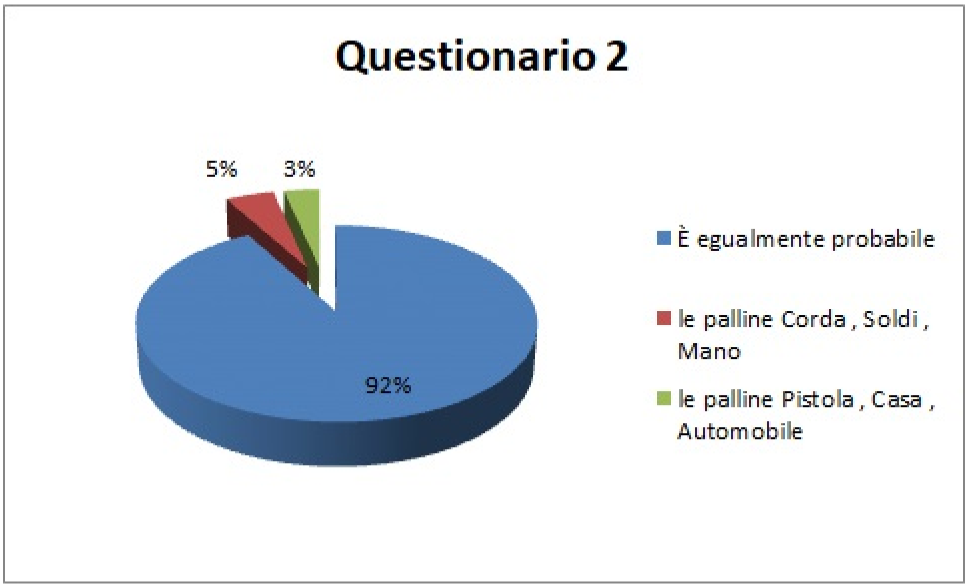
- **L'euristica della rappresentatività** induce a preferire la terna disordinata perché terne di questo tipo sono più tipiche.

- **L'euristica della disponibilità** induce a preferire la terna disordinata perché si ha ricordo di molte estrazioni del lotto di sequenze disordinate e, probabilmente, di nessuna di sequenze ordinate.

Nella domanda del *Questionario 2* l'ordine con cui vengono presentate le palline potrebbe indurre ad una risposta sbagliata per l'euristica della rappresentatività ma non per quella della disponibilità.

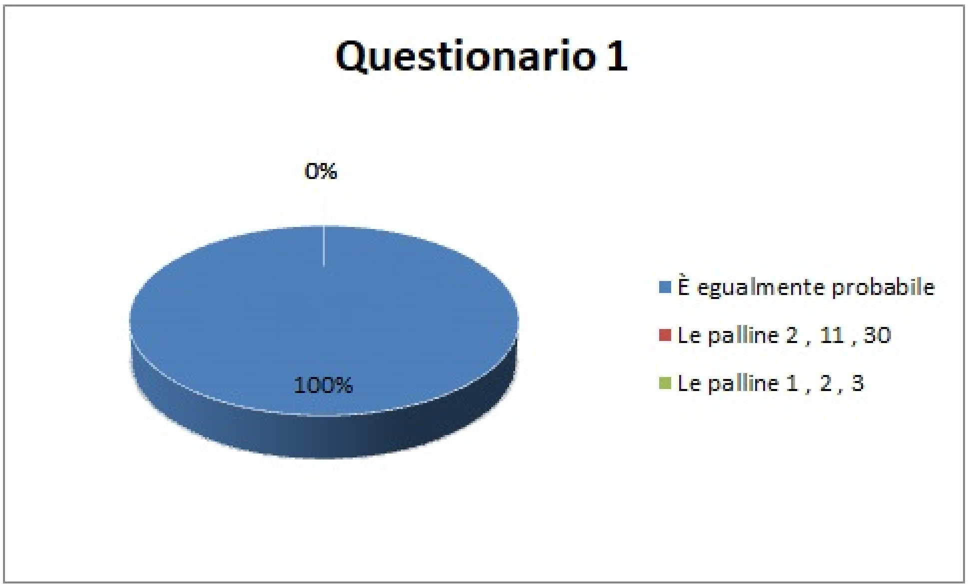
Risposte ricevute su tutti i 499 questionari:

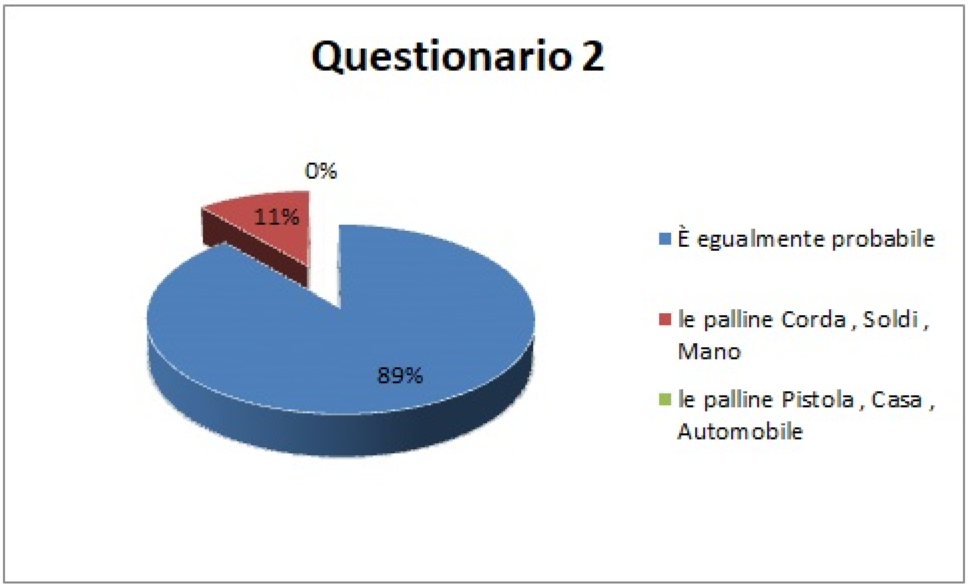




Si nota come una grande maggioranza degli intervistati, circa nove decimi, hanno dato la risposta corretta e, in entrambe le formulazioni della domanda non si è rilevata una presenza significativa di risposte influenzate dal misconcetto indagato.
Si può comunque notare che, tra chi ha dato una risposta errata, al *Questionario 1* quelli che hanno ritenuto più probabile la terna disordinata sono circa il triplo di quelli che hanno ritenuto più probabile la terna ordinata, 26 i primi ed 8 i secondi. Invece al *Questionario 2* quelli che hanno ritenuto più probabile la terna disordinata sono circa lo stesso numero di chi ha ritenuto più probabile la terna ordinata, 11 i primi e 8 i secondi. Si può quindi ritenere che la scelta di usare simboli non numerici per contrassegnare le palline abbia mitigato la sottostima della probabilità che venga estratta una terna ordinata.

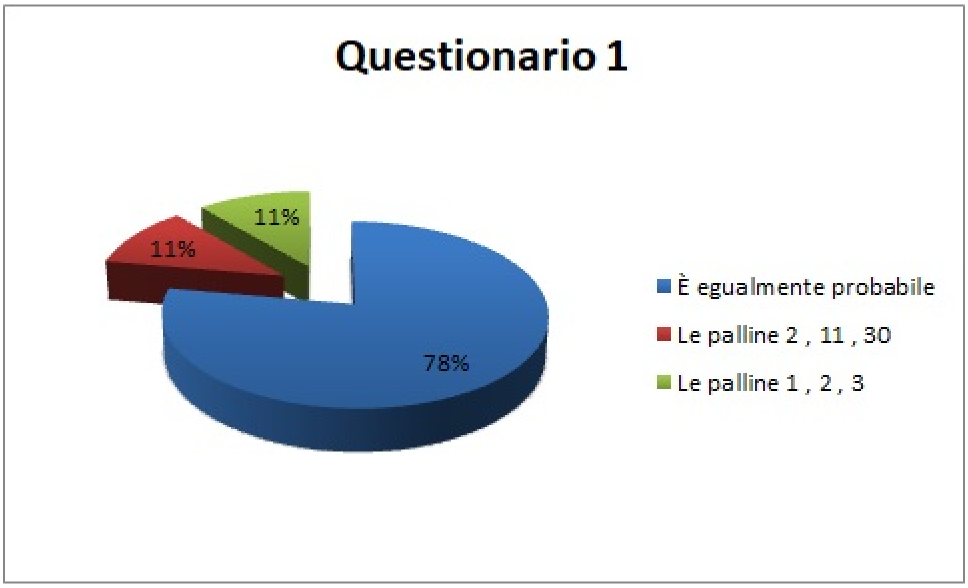
Risposte ricevute solo sui questionari della classe IV-G:

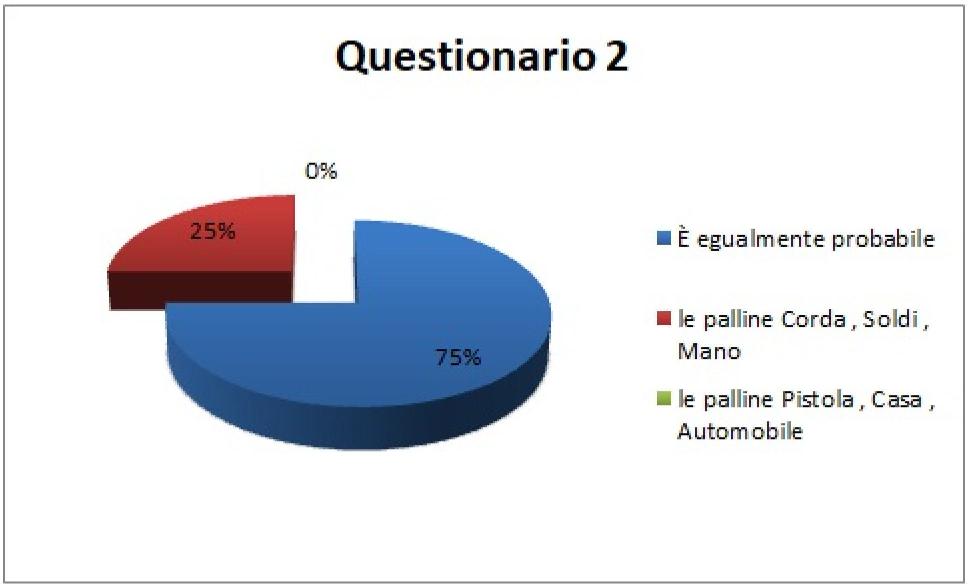




In questa particolare classe tutti gli intervistati tranne uno hanno dato la risposta corretta.
L'unico ad aver sbagliato è stato uno studente che ha compilato il *Questionario 2* a cui mediamente, nel campione generale ed anche nelle previsioni, hanno sbagliato meno persone che nel *Questionario 1*.
Questo studente ha ritenuto più probabile l'estrazione della terna non ordinata.

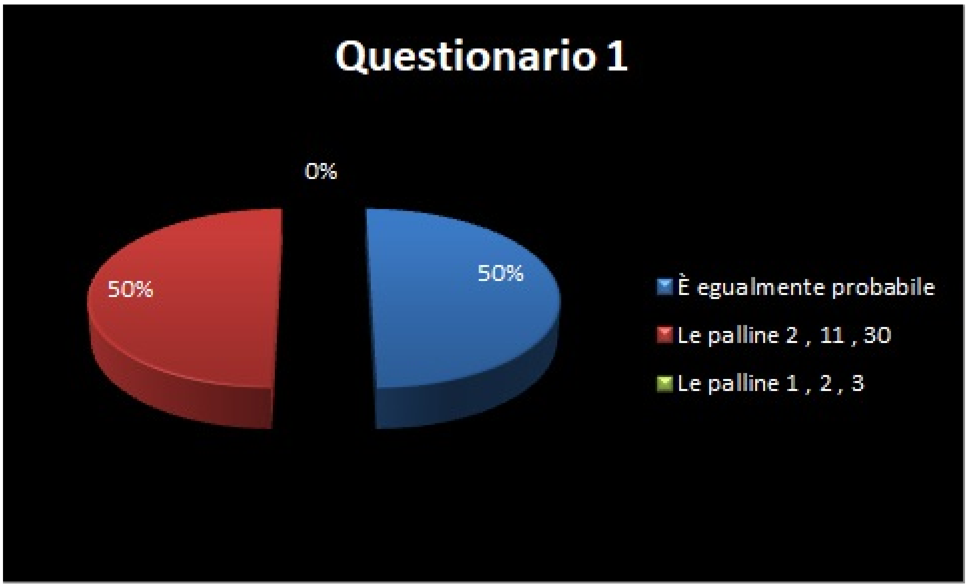
Risposte ricevute solo sui questionari della classe V-G:

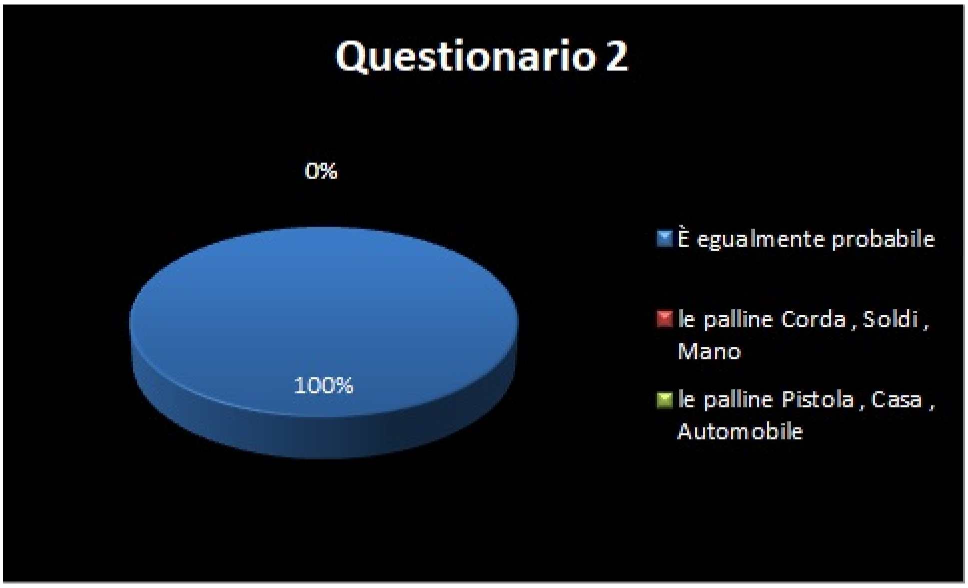




Nella classe quinta G le risposte sbagliate sono state 4 e questo è un dato più elevato sia di quello registrato nella classe quarta sia di quello analizzato nel campione generale. Hanno sbagliato due studenti che hanno compilato il *Questionario 1* e due che hanno compilato il *Questionario 2*. Tra gli studenti che hanno sbagliato il *Questionario 1* uno ha ritenuto più probabile la terzina ordinata ed uno quella disordinata, invece quelli che hanno sbagliato il *Questionario 2* hanno ritenuto più probabile che venisse estratta una terzina disordinata.

Risposte ricevute solo sui questionari della classe V-B:





Tra le 10 risposte raccolte in questa classe 2 risultano sbagliate.
La percentuale di errore è circa il doppio di quella del campione generale ma si mantiene più bassa di quella della classe V-G.
Entrambi gli studenti che hanno sbagliato hanno compilato il *Questionario 1*, aprioristicamente ritenuto più difficile.

6.2.6 Quesito 3

Questo quesito è stato ispirato ad un analogo quesito tratto da *L'illusione di sapere* scritto dal linguista Massimo Piattelli Palmarini.[27]
La domanda vuole indagare l'illusione cognitiva per cui si confonde ciò che è più tipico con ciò che è più probabile.

Il quesito che genera questa illusione è quello formulato nel *Questionario 2* in cui vengono proposte due sequenze di lanci del dado, una più probabile ma meno tipica e l'altra meno probabile ma più tipica.
Essendo le due sequenze una di 9 lanci in cui la faccia rossa è uscita 8 volte e l'altra di 10 lanci in cui la faccia rossa è uscita sempre 8 volte, si è pensato di formulare il quesito del *Questionario 1* in cui viene data solo questa informazione e non le precise successioni.

Aprioristicamente si è supposto che molti intervistati avrebbero percepito equivalentemente le due domande e che quindi le percentuali di risposta sarebbero state simili.
Calcoliamo ora le probabilità dei 4 eventi.

Questionario 1:

$$P(8\,rossi\,tra\,9\,lanci) = 9 \times (\frac{1}{6})^8 \times \frac{5}{6} \approx 0,00045\%$$

$$P(8\,rossi\,tra\,10\,lanci) = \frac{10!}{8! \times 2!} \times (\frac{1}{6})^8 \times (\frac{5}{6})^2 \approx 0,00186\%$$

Questionario 2:

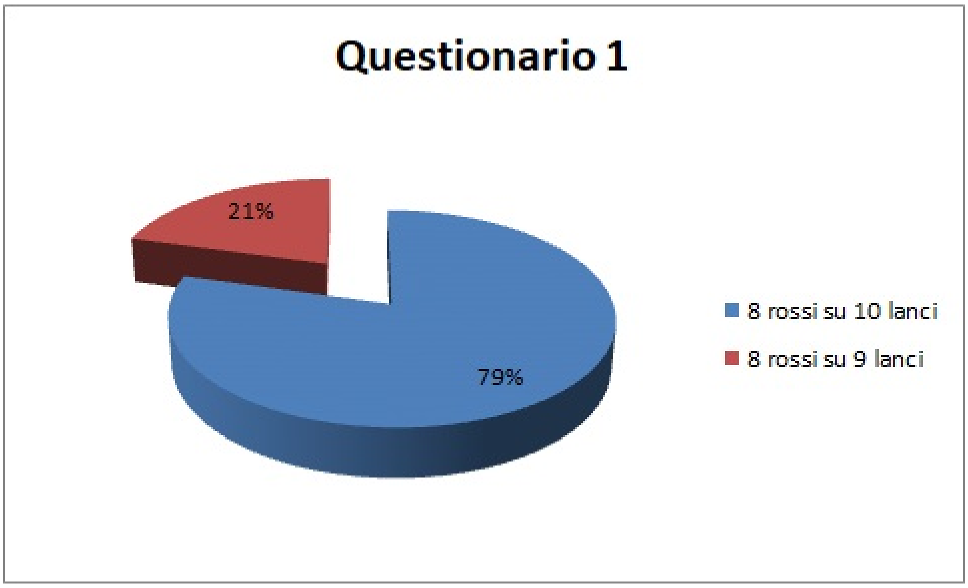
$$P(R-R-B-R-R-R-R-R-R) = (\frac{1}{6})^8 \times \frac{5}{6} \approx 0,00005\%$$

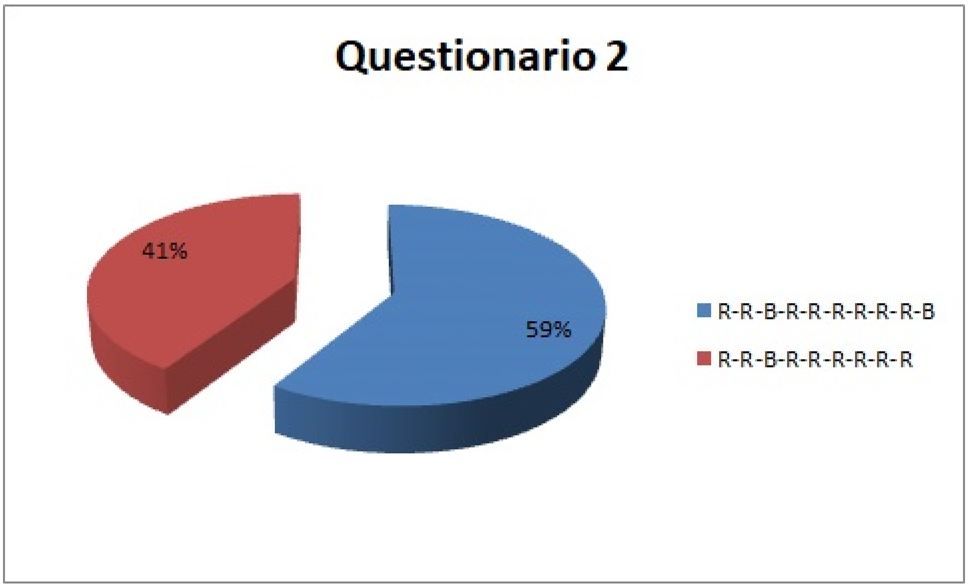
$$P(R-R-B-R-R-R-R-R-R-B) = (\frac{1}{6})^8 \times (\frac{5}{6})^2 \approx 0,00004\%$$

Nel *Questionario 1* la probabilità del secondo evento è venticinque sesti la probabilità del primo ed è quindi maggiore. Nel *Questionario 2* la probabilità del secondo evento è cinque sesti la probabilità del primo ed è quindi minore. Difatti, in questo questionario, il secondo evento è un caso particolare del primo e si può giungere alla risposta esatta senza alcun calcolo poiché è così a prescindere dal numero di facce rosse e di facce blu sul dado.

Nel *Questionario 1* per esser certi della risposta è necessario fare il calcolo poiché la risposta dipende dal numero di facce di ogni colore. Ad esempio se ci fosse una sola faccia blu e cinque rosse la risposta corretta cambierebbe.

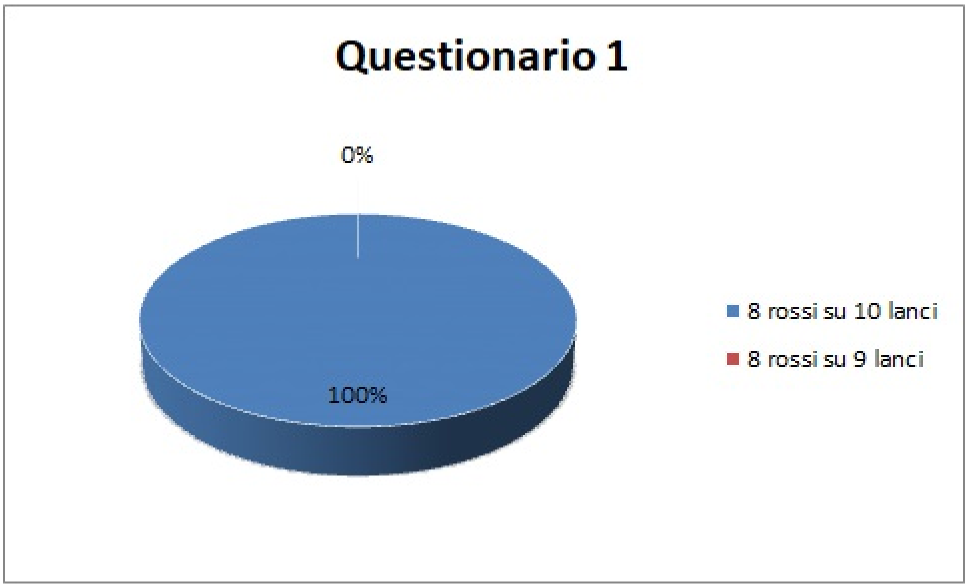
Risposte ricevute su tutti i 499 questionari:

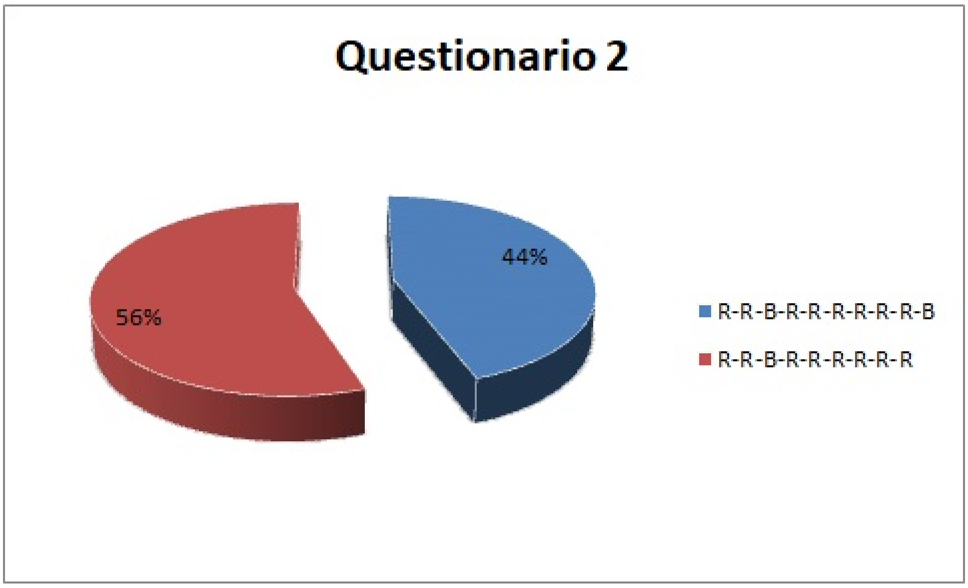




Al *Questionario 1* la maggioranza degli intervistati ha dato la risposta corretta.
Nel *Questionario 2* il rapporto tra risposte giuste e sbagliate non si è capovolto ma a questa domanda la maggioranza degli intervistati è caduta in errore.
Risulta evidente, come ipotizzato, che in molti abbiano confuso l'evento più tipico con quello più probabile. Si manifesta l'applicazione di quella che Kahneman chiama *legge dei piccoli numeri*. Gli intervistati cercano un bilanciamento tra le uscite del rosso e le uscite del blu in sequenze di lanci molto brevi mentre questo accade solo per successioni infinite.

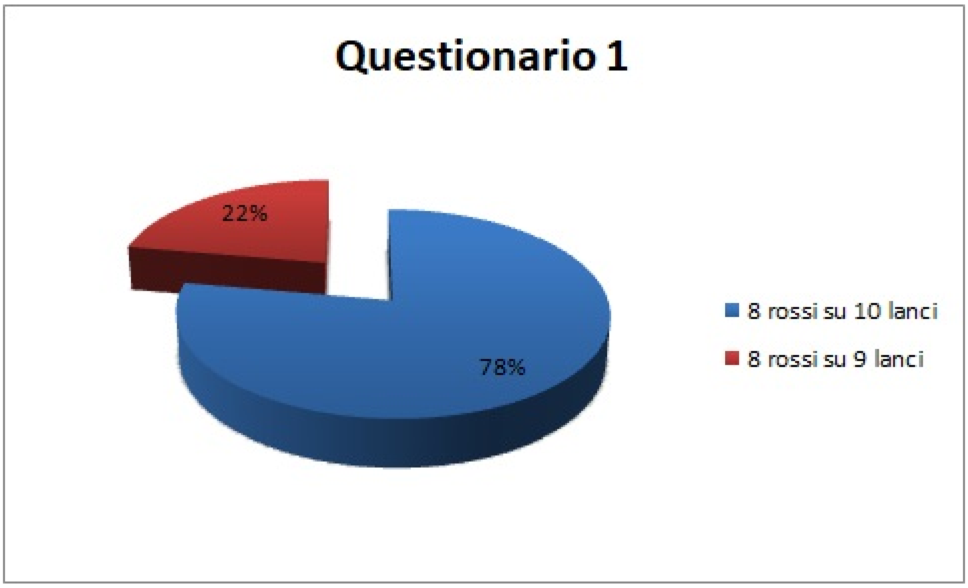
Risposte ricevute solo sui questionari della classe IV-G:

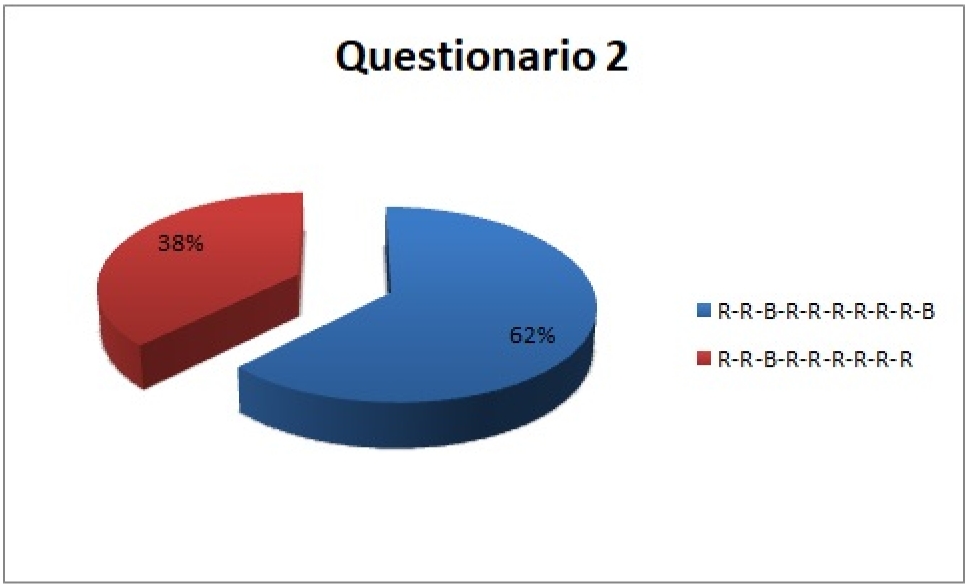




Nella classe quarta al quesito del *Questionario 1* hanno risposto tutti correttamente.
Il quesito del *Questionario 2* ha comunque ricevuto una maggioranza di risposte corrette ma anche alcune scorrette.
Anche in questo campione più ristretto si conferma una maggiore difficoltà a rispondere alla domanda del *Questionario 2*.

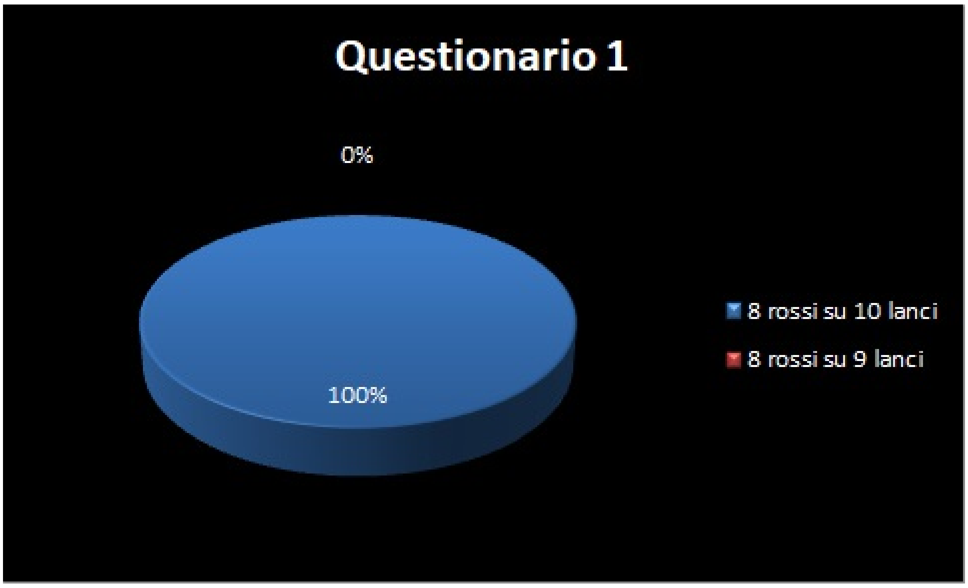
Risposte ricevute solo sui questionari della classe V-G:

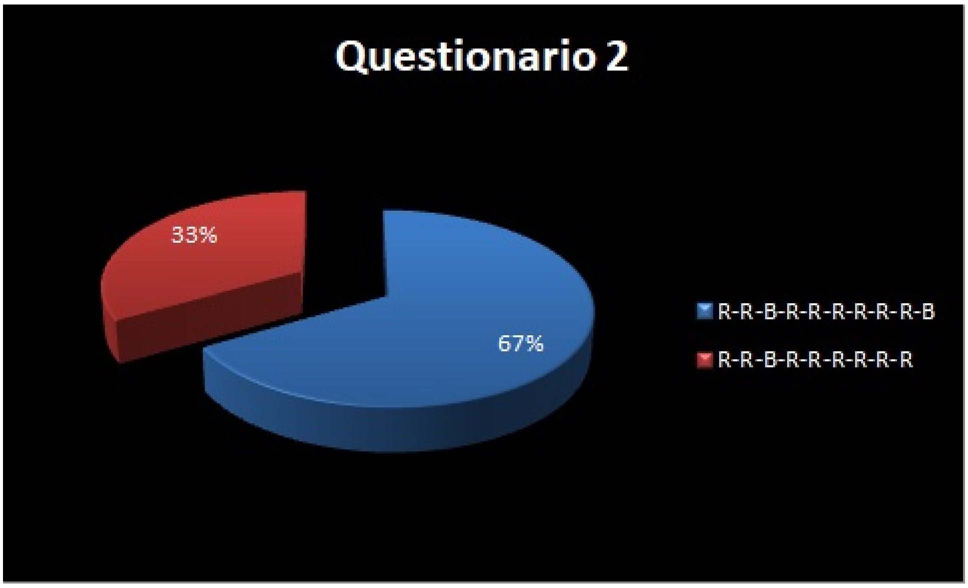




I dati raccolti in questa classe sono perfettamente sovrapponibili ai dati del campione generale.

Risposte ricevute solo sui questionari della classe V-B:





I questa classe il *Questionario 1* ha ricevuto solo risposte corrette.
Il *Questionario 2*, come da previsione, è risultato più difficile e solo 2 dei 6 studenti ha risposto correttamente.

6.2.7 Quesito 4

Questo quesito è stato formulato per indagare l'influenza che le intuizioni primarie e le intuizioni secondarie hanno nella soluzione di problemi di probabilità.
Coi termini "intuizioni primarie" ed "intuizioni secondarie" ci riferiamo alle definizioni date da E. Fischbein, I. Barbat e I. Minzar.[28][29]

Intuizioni primarie: le intuzioni che esistono prima, ed indipendentemente, da qualsiasi sistema di insegnamento.
Intuizioni secondarie: le intuizioni che sono sistematicamente costruite durante il processo di insegnamento-apprendimento.

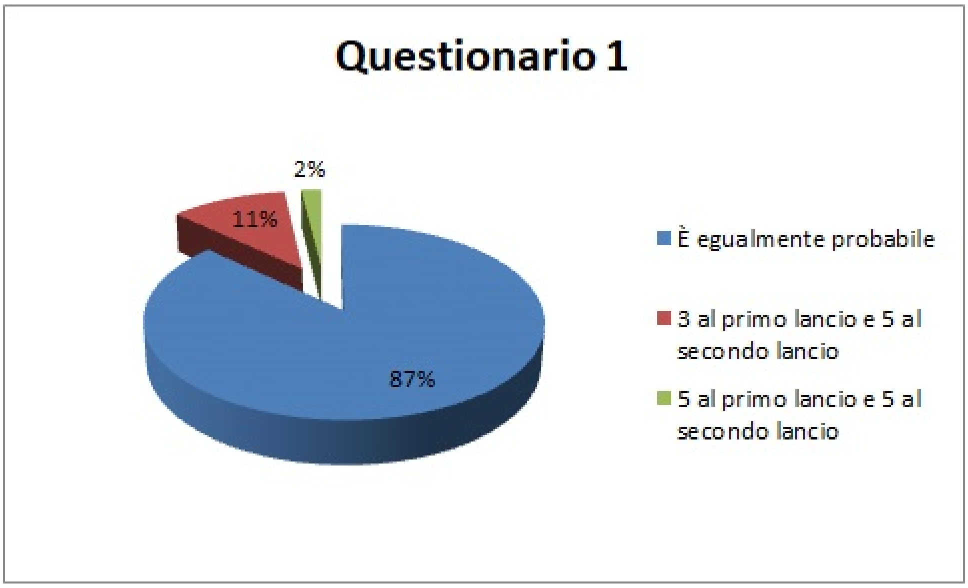
La prima formulazione del quesito propone due lanci di uno stesso dado a sei facce. Gli esiti di cui valutare la probabilità sono l'uscita del 5 in entrambi i lanci e l'uscita del 3 al primo e del 5 al secondo (si nota che viene specificato l'ordine).
I due eventi sono equiprobabili ed, in particolare, hanno entrambi probabilità di accadere pari a $\frac{1}{36}$. In questo quesito un'intuizione primaria può indurre a credere che l'uscita della faccia 5 in entrambi i casi sia meno probabile dell'uscita di due facce diverse.

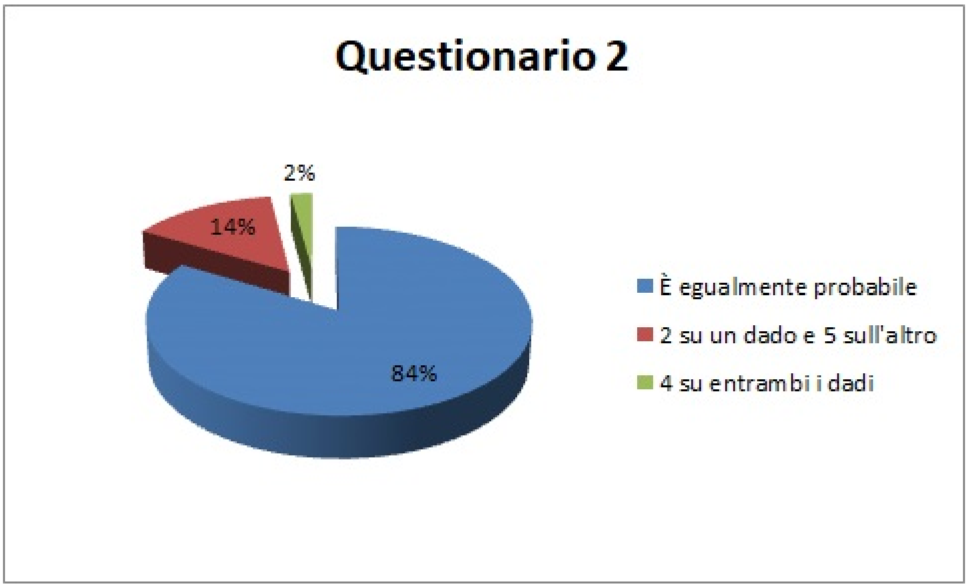
La seconda formulazione del quesito, invece, propone un solo lancio di due dadi.
Questa volta gli esiti di cui valutare la probabilità sono l'uscita del 4 su entrambi i dadi e l'uscita del 2 su un dado e del 5 sull'altro (si nota che non c'è modo di distinguere i due dadi).
In questa formulazione i due eventi non sono equiprobabili ed hanno il primo probabilità $\frac{1}{36}$ ed il secondo $\frac{1}{18}$.
In questo quesito è l'intuizione secondaria, dovuta all'affrontare spesso problemi in cui tutti gli eventi sono equiprobabili, che può indurre in errore.

Uno dei modi che può essere utile a capire l'errore è l'immaginare i due dadi di colore diverso, ad esempio uno rosso ed uno blu. Risulta evidente che il primo esito accade quando esce la faccia 4 sia sul dado rosso che sul dado blu mentre il secondo esito accade sia quando esce la faccia 2 sul dado rosso e la faccia 5 sul dado blu, sia quando esce la faccia 2 sul dado blu e la faccia 5 sul dado rosso.

Non distinguere la differenza del problema nelle due diverse formulazioni può essere causato dall'euristica della rappresentatività.
L'uscita di una particolare coppia di facce diverse tra loro è egualmente tipica sia nel lanciare due dadi insieme (senza ordine), sia nel lanciare prima un dado e poi l'altro (con ordine). Come visto gli eventi non hanno però la stessa probabilità e, confondendo questa con la tipicità, si cade in errore.

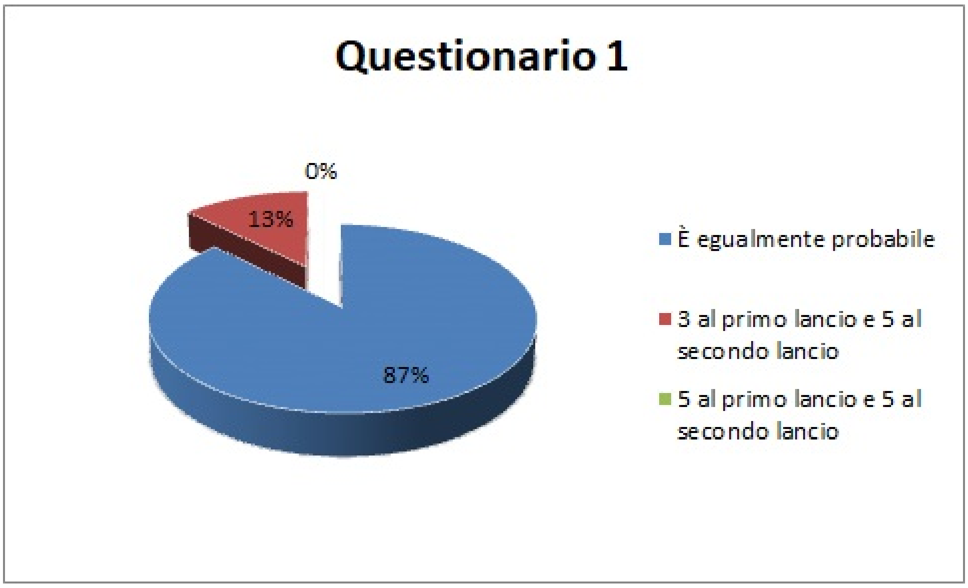
Risposte ricevute su tutti i 499 questionari:

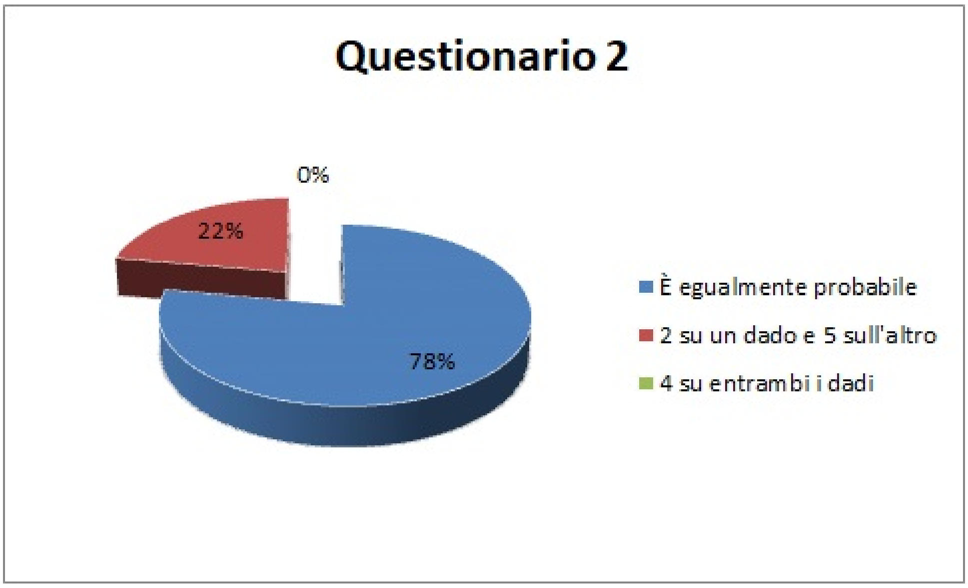




Dai dati raccolti risulta evidente che le due diverse formulazioni del quesito sono sembrate identiche agli intervistati.
Al *Questionario 1* l'87% degli intervistati ha risposto correttamente e l'11% ha dato la risposta a cui ci si aspettava che l'intuizione primaria portasse.
Al *Questionario 2* solo il 14% degli intervistati ha risposto correttamente e ben l'84% ha dato la risposta a cui ci si aspettava che l'intuizione secondaria portasse.
Analizzando i dati di chi ha dichiarato di aver studiato probabilità e di chi ha dichiarato di non aver studiato probabilità non si sono riscontrare differenze significative tra le percentuali delle risposte date.

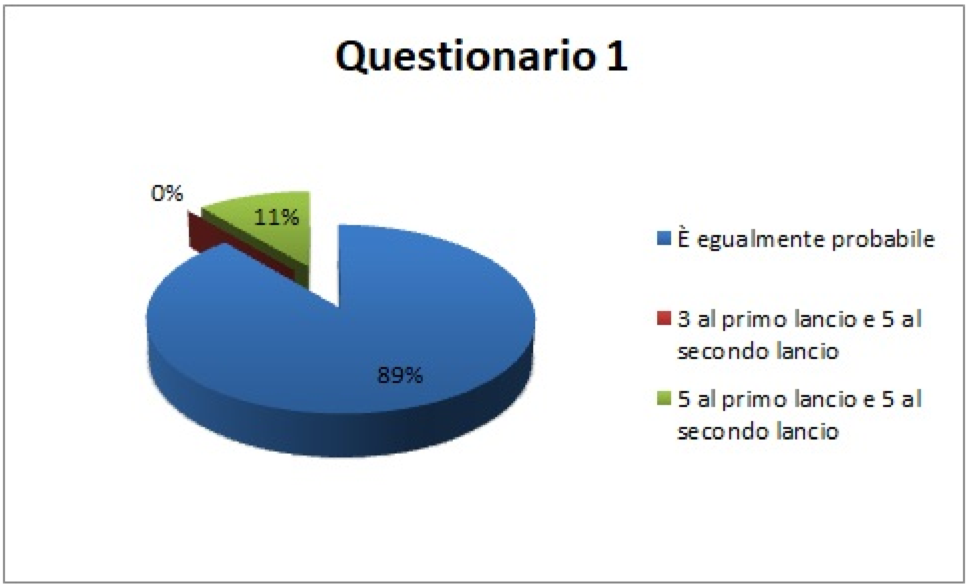
Risposte ricevute solo sui questionari della classe IV-G:

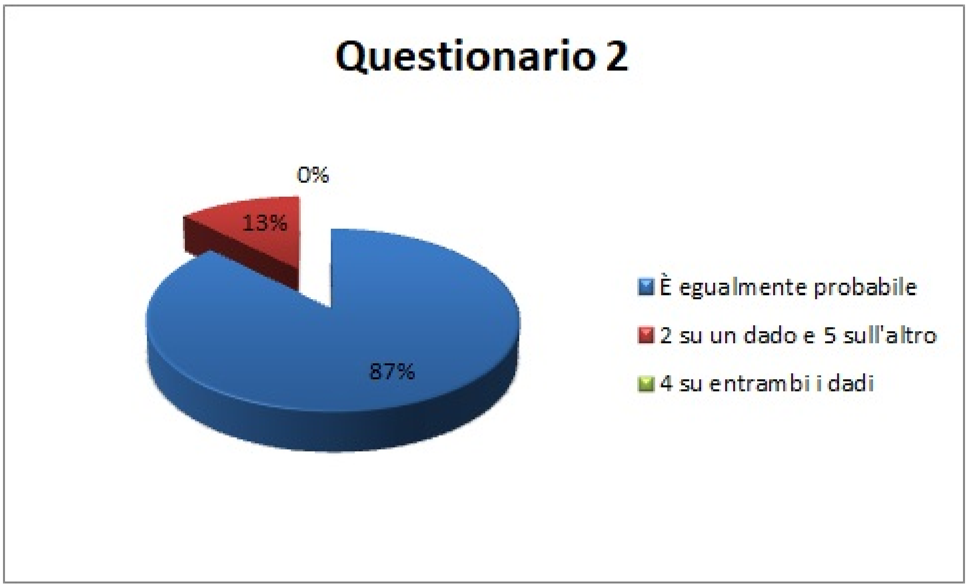




I dati raccolti in questa classe sono perfettamente sovrapponibili ai dati del campione generale.

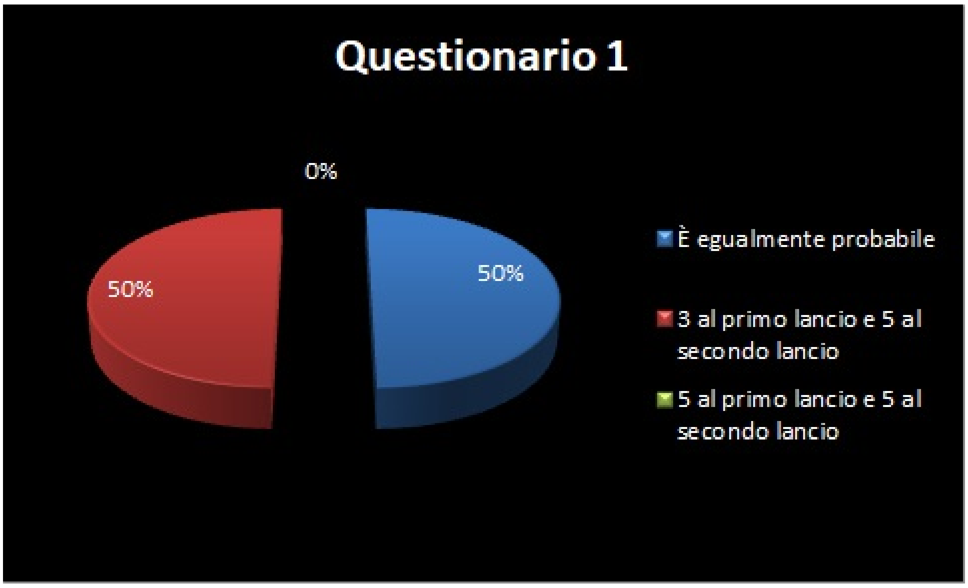
Risposte ricevute solo sui questionari della classe V-G:

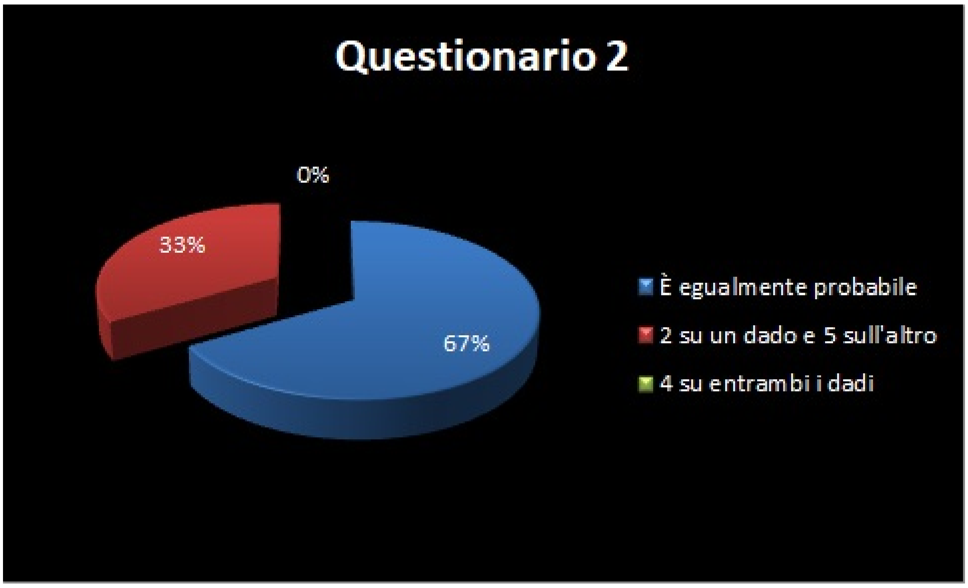




I dati raccolti relativamente al *Questionario 2* sono sovrapponibili al campione generale.
Al *Questionario 1* nessuno ha dato la risposta a cui ci si aspettava che l'intuizione primaria portasse. Uno studente invece ha dato l'altra risposta sbagliata.

Risposte ricevute solo sui questionari della classe V-B:





Nel piccolo campione di questa classe, solo due dei quattro studenti che hanno compilato il *Questionario 1* hanno risposto correttamente.
Un terzo dei sei studenti che hanno compilato il *Questionario 2* ha dato la risposta corretta.

6.2.8 Quesito 5

Questo quesito era identico sia nel *Questionario 1* che nel *Questionario 2*.
Era l'unico quesito di statistica bayesiana.
Usando il corollario del teorema di Bayes (1.3.5), trovare la soluzione al quesito è molto facile.

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j) \cdot P(A_j)}$$

Siano:

- A_1 l'evento "il signor Rossi è malato"
- A_2 l'evento "il signor Rossi è sano"
- B l'evento "il signor Rossi risulta positivo al test"

Si conoscono le seguenti probabilità

- $P(B|A_1) = 0.79$
- $P(B|A_2) = 0.21$
- $P(A_1) = 0.01$
- $P(A_2) = 0.99$

Applicando il corollario del teorema risulta:

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{(P(B|A_1) \cdot P(A_1) + (P(B|A_2) \cdot P(A_2))} = \frac{0.79 \cdot 0.01}{(0.79 \cdot 0.01) + (0.21 \cdot 0.99)} \approx 0.037$$

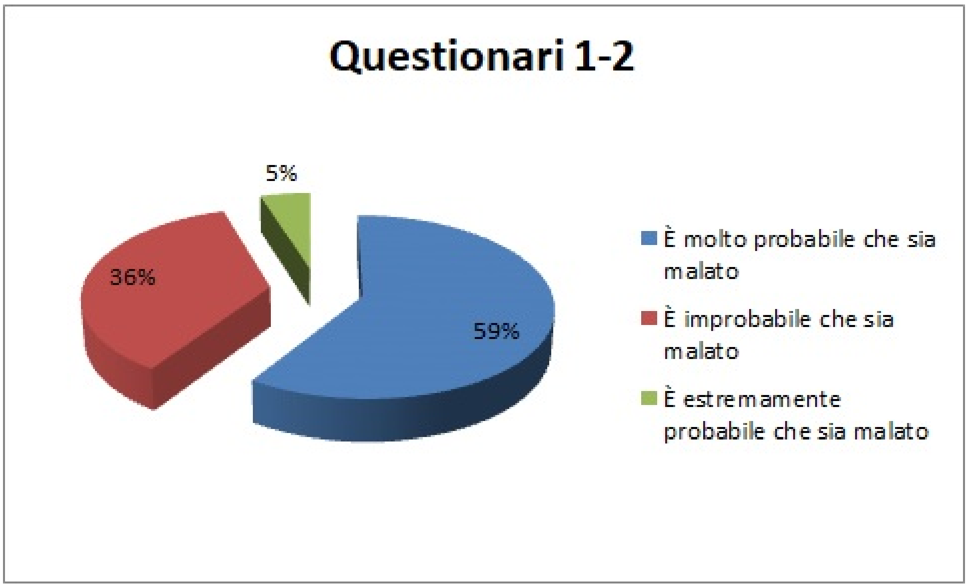
Dopo aver letto l'esito positivo del test il signor Rossi ha circa il 3.7% di probabilità di essere effettivamente malato. È quindi improbabile che sia malato.

Aprioristicamente ci si aspettava che gli intervistati avrebbero scambiato $P(B|A_1)$ con $P(A_1|B)$ e che quindi molti avrebbero ritenuto molto o estremamente probabile che il signor Rossi fosse malato.

Anche questo quesito è stato tratto da *L'illusione di sapere* scritto dal linguista Massimo Piattelli Palmarini.

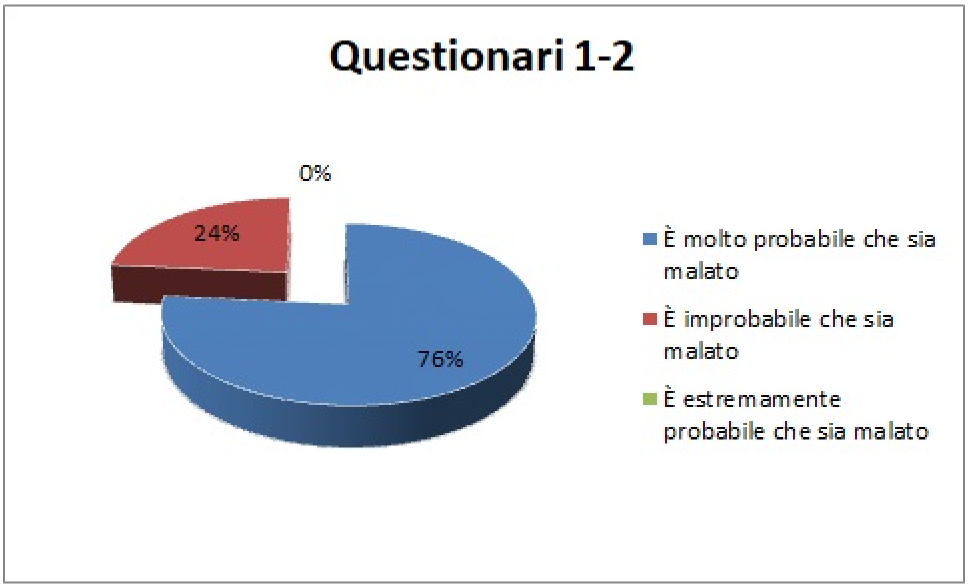
Nella soluzione di questo quesito possono influire sia l'euristica della rappresentatività sia quella dell'ancoraggio.
La prima porta a trascurare la probabilità a priori che il signor Rossi sia malato.
La seconda a non volersi allontanare dal valore 79%.

Risposte ricevute su tutti i 499 questionari:



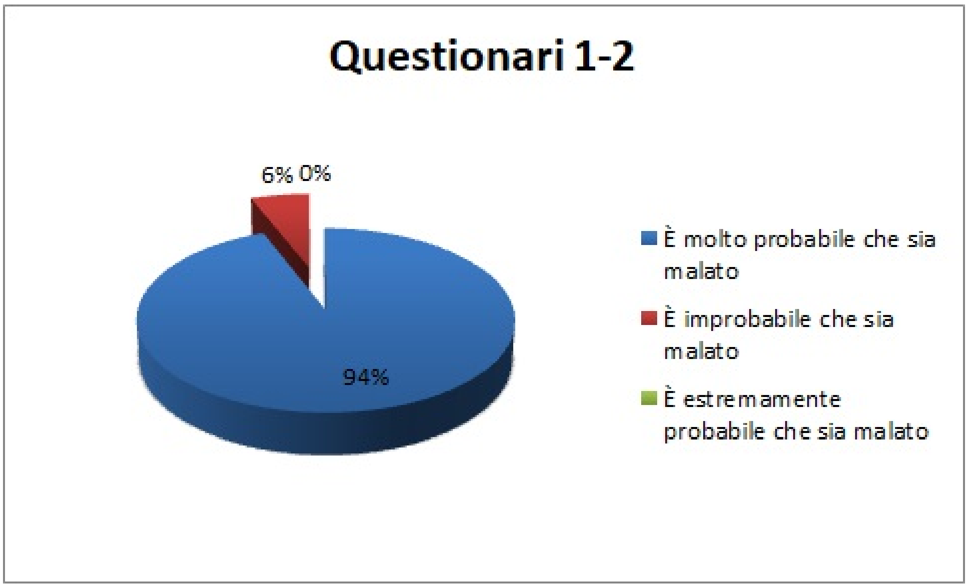
Il campione generale ha mostrato una propensione a credere che sia molto probabile che il signor Rossi sia malato.
Solo il 5% lo ha ritenuto estremamente probabile.
Oltre un terzo degli intervistati ha risposto correttamente.

Risposte ricevute solo sui questionari della classe IV-G:

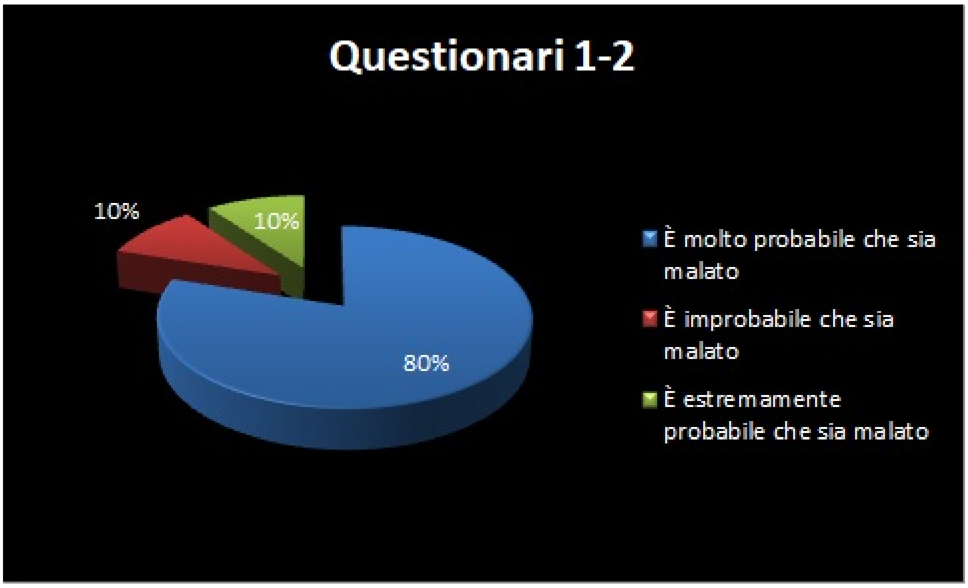


In questa classe 4 studenti hanno risposto correttamente mentre 13 hanno sbagliato.
È comunque il dato migliore tra quelli raccolti nella scuola.

Risposte ricevute solo sui questionari della classe V-G:



Risposte ricevute solo sui questionari della classe V-B:



Nelle due classi quinte la percentuale di risposte sbagliate è molto elevata.
Si è registrata una sola risposta corretta in ogni classe.
Nella quinta della sezione B uno studente ha ritenuto estremamente probabile che il signor Rossi fosse malato. Tutti gli altri che fosse molto probabile.
Nella classe V-G erano già stati introdotti alcuni concetti di probabilità condizionata ma non erano stati approfonditi.
Complessivamente gli studenti di scuola sono risultati più propensi all'errore degli intervistati del campione generale.

6.2.9 Quesito 6

Questo quesito, come tutti i successivi, non voleva presentare un problema di calcolo delle probabilità ma proponeva un problema di teoria delle decisioni.

A differenza di tutte quelle poste fin ora, non c'era un modo giusto o un modo sbagliato di rispondere alla domanda.

Le due diverse formulazioni del quesito nascondevano la stessa domanda ma da una differente prospettiva.
In entrambi i casi la scelta A portava ad avere in tasca, con una probabilità del 50%, 50€ in più della situazione iniziale oppure, sempre con una probabilità del 50%, 30€ in più.
Analogamente, la scelta B portava, in entrambe la formulazioni, ad avere in tasca, con certezza, 40€ in più della situazione iniziale.

La formulazione del quesito proposta nel *Questionario 1* poneva l'intervistato in una prospettiva in cui l'azzardo da affrontare era solo tra possibili perdite.
La formulazione del quesito proposta nel *Questionario 2*, invece, proponeva un azzardo solo tra possibili vincite.

Il quesito è stato ispirato ad uno formulato da Kahneman e Trasky. Nella loro indagine con la prima formulazione la maggioranza degli intervistati preferiva rischiare mentre, con la seconda, la maggioranza preferiva una vincita sicura.[27]

Per la teoria dell'utilità attesa le due diverse formulazioni del problema non fanno cambiare l'utilità della scelta A e della scelta B.
Questa teoria prevede quindi una stessa propensione a prendere un tipo di scelta a prescindere dal modo in cui il problema venga posto.

La teoria del prospetto, invece, prevede una maggiore propensione al rischio quando gli esiti delle scelte sono possibili perdite rispetto a quando gli esiti sono possibili guadagni.

Siano:

- $E_1^{(1)}$ l'esito "pagare 20€".
- $\Delta B_1^{(1)} = -20$
- $E_1^{(2)}$ l'esito "guadagnare 20€".
- $\Delta B_1^{(2)} = 20$
- E_2 l'esito "non pagare ne guadagnare nulla".
- $\Delta B_2 = 0$
- $E_3^{(1)}$ l'esito "pagare 10€".

- $\Delta B_3^{(1)} = -10$
- $E_3^{(2)}$ l'esito "guadagnare 10€".
- $\Delta B_3^{(2)} = 10$
- V l'evento "vinci a testa o croce".
- S l'evento "perdi e testa o croce".
- A_1 la scelta A nella prospettiva del questionario 1.
- A_2 la scelta A nella prospettiva del questionario 2.
- B_1 la scelta B nella prospettiva del questionario 1.
- B_2 la scelta B nella prospettiva del questionario 2.

Essendo

- $\Pi(A_1) = \Pi(\Delta B_1^{(1)}) \cdot \pi(P(S)) + \Pi(\Delta B_2) \cdot \pi(P(V))$, per definizione.
- $\Pi(B_1) = \Pi(\Delta B_3^{(1)})$, per definizione.
- $\Pi(A_2) = \Pi(\Delta B_1^{(2)}) \cdot \pi(P(S)) + \Pi(\Delta B_2) \cdot \pi(P(V))$, per definizione.
- $\Pi(B_2) = \Pi(\Delta B_3^{(2)})$, per definizione.
- $\Pi(\Delta B_2) - \Pi(\Delta B_3^{(1)}) > \Pi(\Delta B_3^{(1)}) - \Pi(\Delta B_1^{(1)})$, per la concavità di Π nella parte negativa del dominio.
- $\Pi(\Delta B_1^{(2)}) - \Pi(\Delta B_3^{(2}) < \Pi(\Delta B_3^{(2}) - \Pi(\Delta B_2)$, per la convessità di Π nella parte positiva del dominio.

Dalla prima disuguaglianza possiamo ricavare:

$$0 - \Pi(-10) > \Pi(-10) - \Pi(-20)$$

ossia

$$\Pi(-20) > 2\Pi(-10) \tag{6.1}$$

Dalla seconda:

$$\Pi(20) - \Pi(10) < \Pi(10) - 0$$

ossia

$$\Pi(20) < 2\Pi(10) \tag{6.2}$$

Proposizione 6.2.1. *Da una stessa prospettiva, se A_2 è una scelta percepita sensata allora lo è anche A_1.*

Dimostrazione. A_2 è una scelta percepita sensata se

$$\Pi(20) \cdot \pi(V) > \Pi(10)$$

Dalla (6.2) deriva

$$\Pi(10) > \frac{1}{2} \cdot \Pi(20)$$

e quindi

$$\Pi(20) \cdot \pi(V) > \frac{1}{2} \cdot \Pi(20)$$

da cui segue

$$\pi(V) > \frac{1}{2} \tag{6.3}$$

Essendo tutti valori positivi, moltiplichiamo membro a membro la (6.1) e la (6.3) :

$$\Pi(-20) \cdot \pi(V) > \Pi(-10)$$

Per cui A_1 è una scelta percepita sensata. □

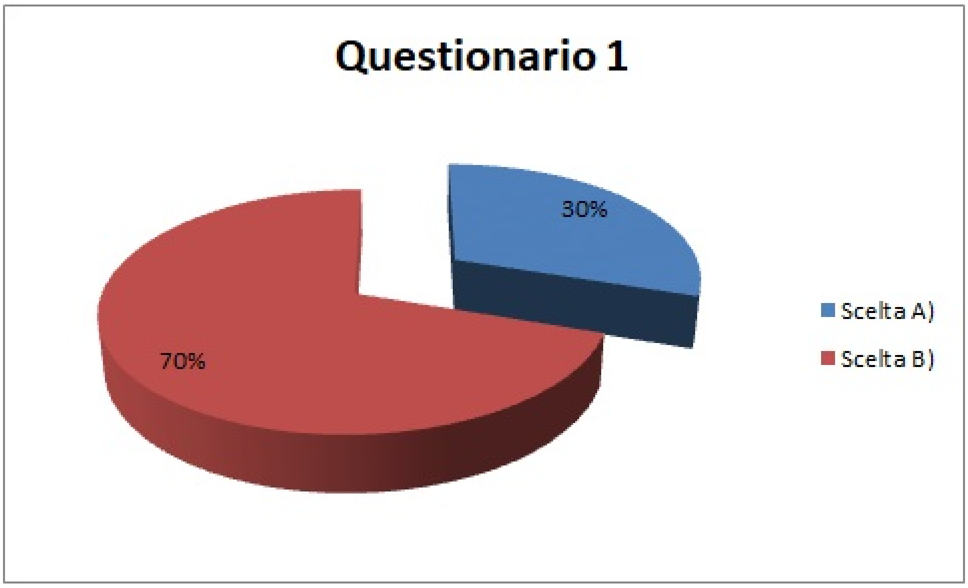
Analogamente si può dimostrare che se B_1 è una scelta percepita sensata allora lo è anche B_2.

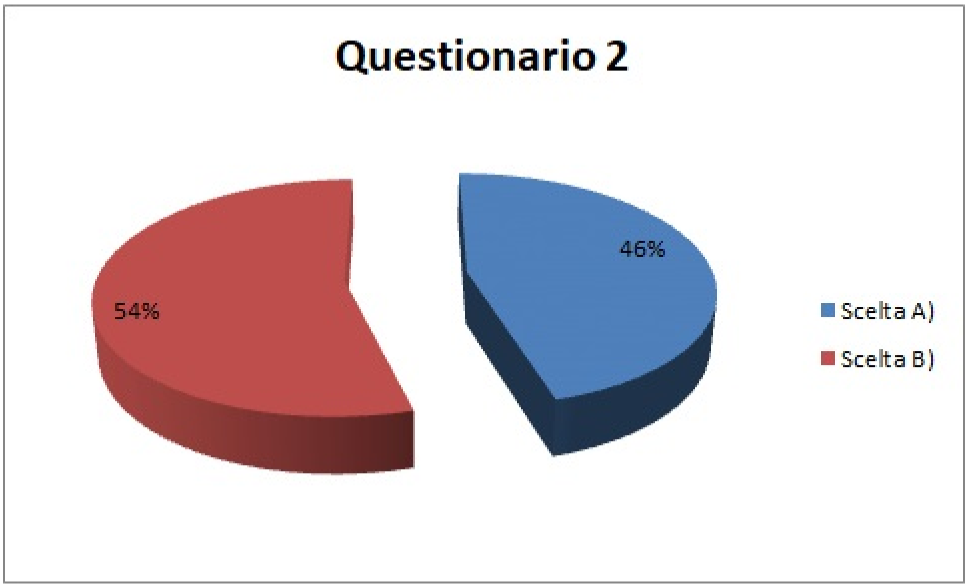
Ciò vuol dire che se si è propensi al rischio nella formulazione del quesito del *Questionario 2* lo si deve essere anche nella formulazione del *Questionario 1*.

Alla luce di tutto ciò ci si aspetta una maggiore propensione al rischio nel *Questionario 1* a prescindere dai risultati ottenuti da Kahneman e Trasky.

Nella formulazione del quesito non si è tenuto conto dell'euristica dell'ancoraggio. Ipotizzando di avere 50€ in tasca la possibilità di averne solo 30 è considerata troppo distante.

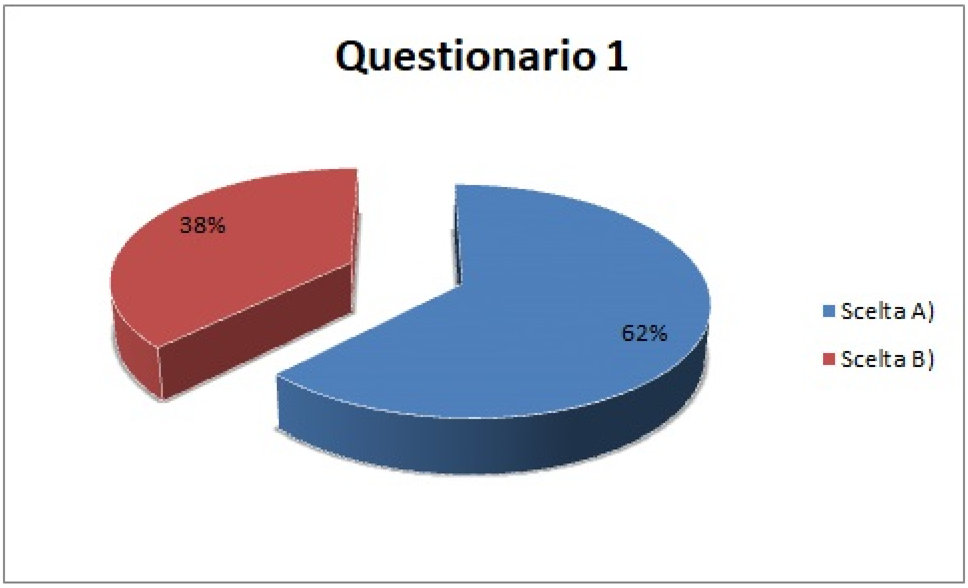
Risposte ricevute su tutti i 499 questionari:

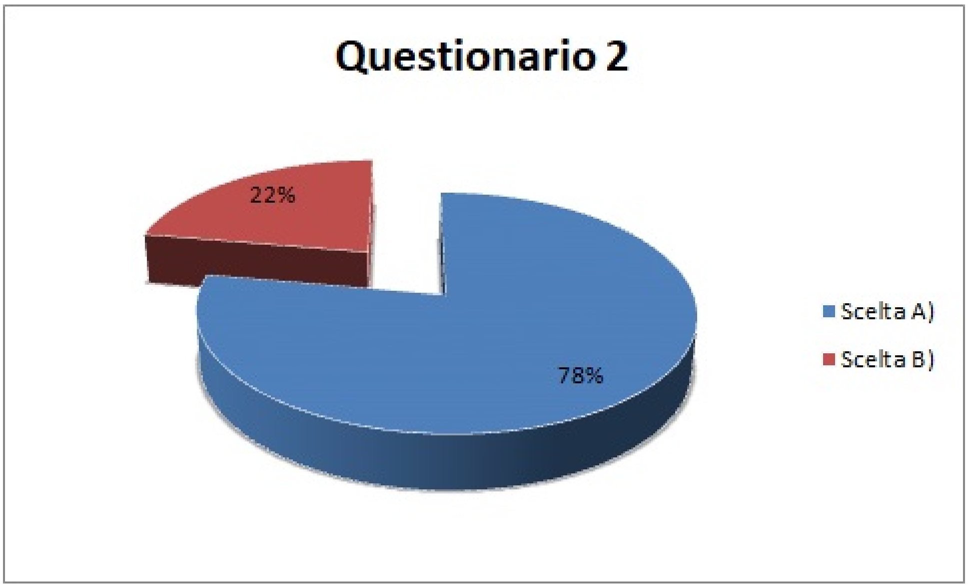




Nei dati raccolti sul campione generale il *Questionario 1* ha avuto una maggioranza di risposte che sottendono un'avversione al rischio. Aprioristicamente ci saremmo aspettati il contrario.
Anche il *Questionario 2* ha avuto una maggioranza di risposte che sottendono un'avversione al rischio. Questa volta il dato è concorde con ciò che ci aspettavamo.
Inoltre va notato che l'avversione al rischio è maggiore tra gli intervistati a cui è stata sottoposta la prima formulazione del quesito. Questo, oltre a non concordare coi risultati ottenuti da Kahneman e Trasky, contrasta anche con la teoria del prospetto come dimostrato nelle pagine precedenti. Probabilmente la fase di codifica del problema pone gli intervistati in una prospettiva differente.

Risposte ricevute solo sui questionari della classe IV-G:

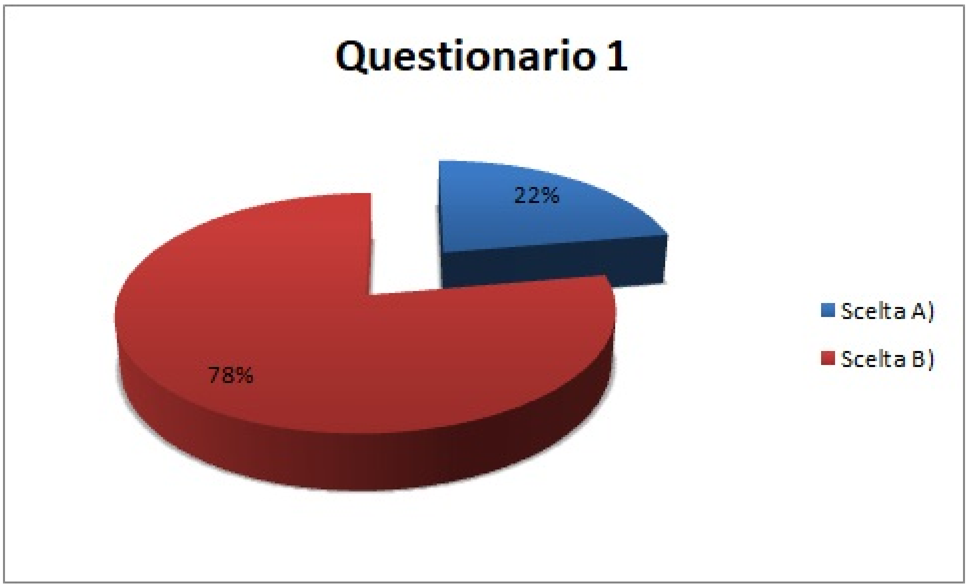


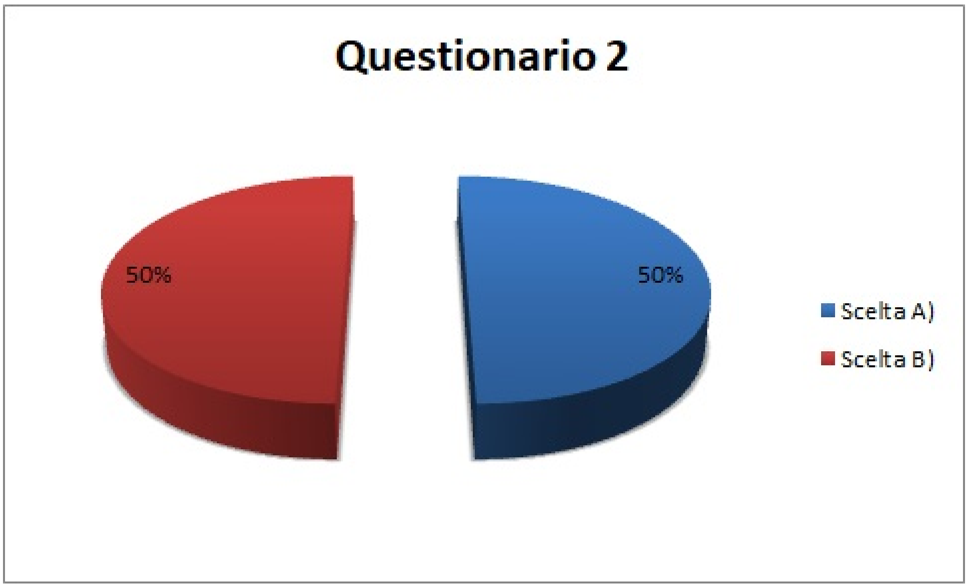


Gli studenti di questa classe hanno mostrato una particolare propensione al rischio.
In questo campione gli intervistati a cui è stato sottoposto il *Questionario 1* hanno risposto in maggioranza di voler rischiare per avere una perdita minore. Questa volta il dato concorda con quello riscontrato da risultati ottenuti da Kahneman e Trasky.

Anche gli intervistati che hanno risposto alla seconda formulazione del quesito hanno in prevalenza deciso di lanciare la moneta invece di garantirsi una ricarica sicura. Questo dato contrasta con ciò che ci si aspettava a priori. Inoltre il *Questionario 2* ha registrato più risposte di propensione al rischio del *Questionario 1*.

Risposte ricevute solo sui questionari della classe V-G:

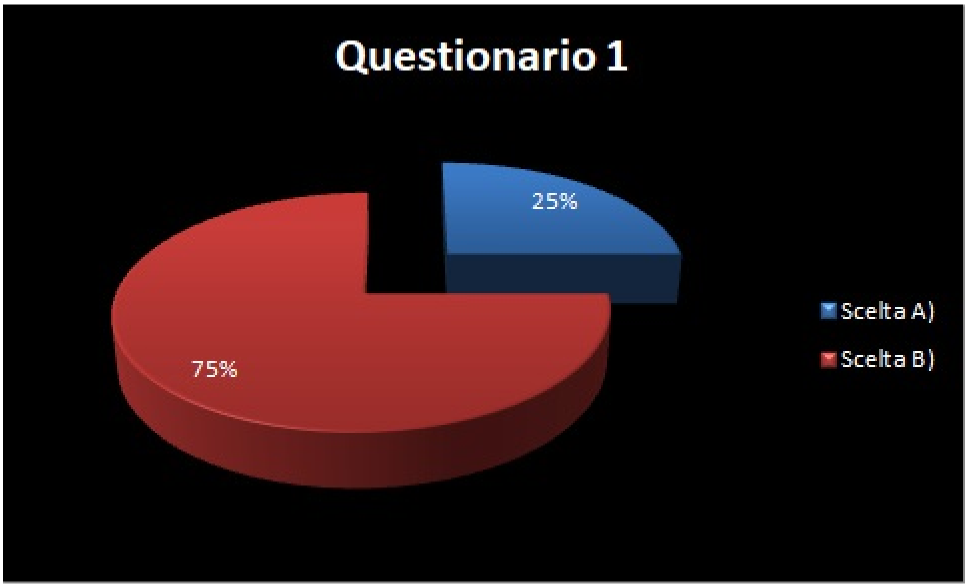


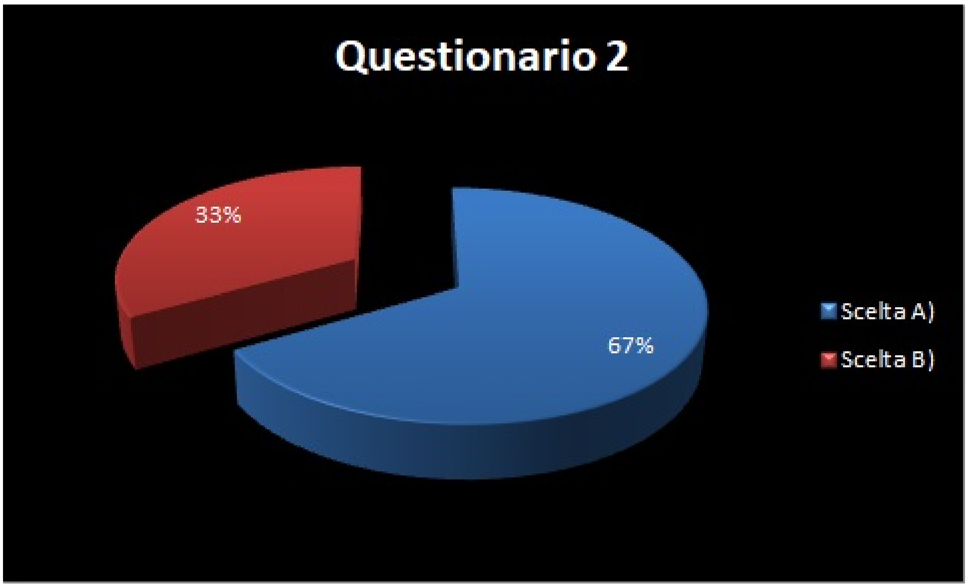


Come il campione generale, anche gli studenti della classe quinta G hanno preferito essere prudenti nella situazione proposta dal *Questionario 1*.

Le risposte al problema, nella formulazione del *Questionario 2*, invece si sono perfettamente divise tra la scelta A e la scelta B.

Risposte ricevute solo sui questionari della classe V-B:





I dati registrati in questa classe contrastano totalmente con ciò che si prevedeva con la teoria del prospetto.

Non solo il *Questionario 2* ha mostrato una maggiore propensione al rischio del *Questionario 1*. La prima formulazione del quesito ha registrato per la maggior parte risposte che nascondono un avversione al rischio e la seconda formulazione per la maggior parte risposte che nascondono un propensione al rischio.

6.2.10 Quesito 7

Questo quesito è un celebre problema inventato da Tversky e Kahneman [30] noto come *problema della malattia asiatica*.

Il quesito, come il precedente, è stato presentato in due diverse formulazioni che descrivono la stessa situazione effettiva.
A differenza del problema della ricarica telefonica il punto di vista del problema è identico in entrambe le formulazioni.
Prima di prendere la decisione ci si trova nella medesima condizione: 600 persone rischiano la vita.

I due programmi proposti sono i medesimi:

- Programma A: con certezza si salvano 200 persone e 400 muoiono.
  Nel *Questionario 1* è posta l'attenzione sulla morte dei 400.
  Nel *Questionario 2* è posta l'attenzione sulla salvezza dei 200.

- Programma B: con probabilità un terzo si salvano tutti e non muore nessuno, con probabilità due terzi non si salva nessuno e muoiono tutti.
  Nel *Questionario 1* è posta l'attenzione sulla possibile morte di tutti o di nessuno.
  Nel *Questionario 2* è posta l'attenzione sulla possibile salvezza di tutti o di nessuno.

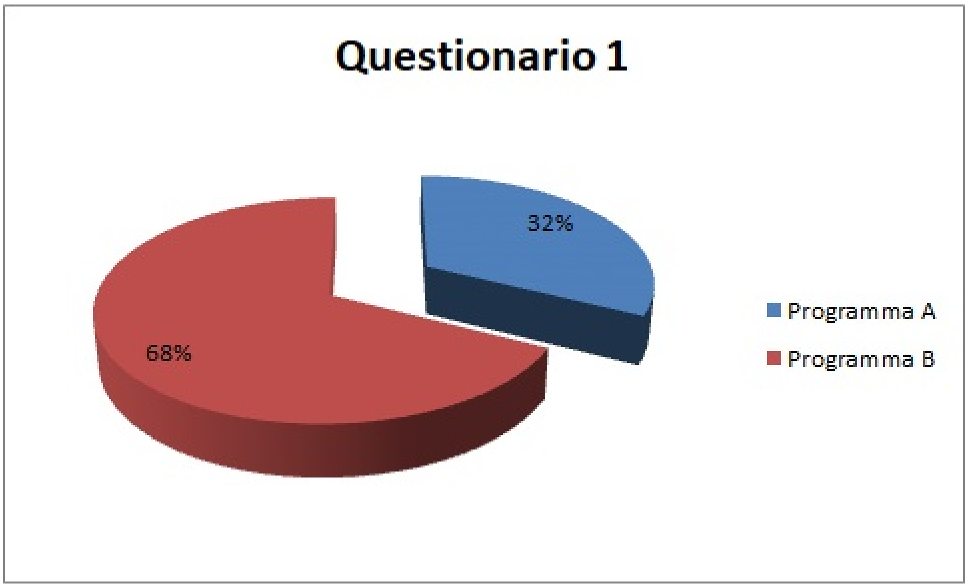
Si può notare che la speranza matematica delle vite salvate è la stessa sia nel programma A che nel programma B.
Tutte le scelte sono quindi scelte razionali.

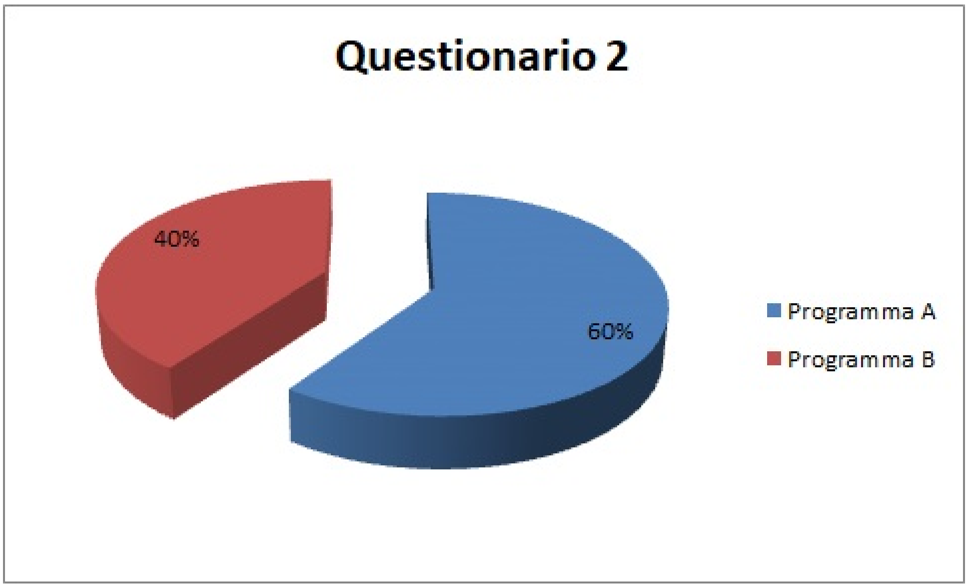
Per la teoria dell'utilità attesa solo la scelta di uno dei due programmi è sensata. Quale scelta lo sia dipende dalla propensione al rischio individuale. Comunque, se è sensato scegliere un particolare programma in una formulazione lo deve essere anche nell'altra.

La teoria del prospetto invece prevede una maggiore propensione al rischio quando la formulazione del quesito pone l'accento sulle morti ed una minore quando lo fa sulle vite salvate.

Nelle indagini condotte da Tversky e Kahneman il 78% degli intervistati a cui è stato posto il primo quesito si è mostrato propenso al rischio. Quando è stato proposto il secondo quesito la percentuale è scesa al 28.

Risposte ricevute su tutti i 499 questionari:

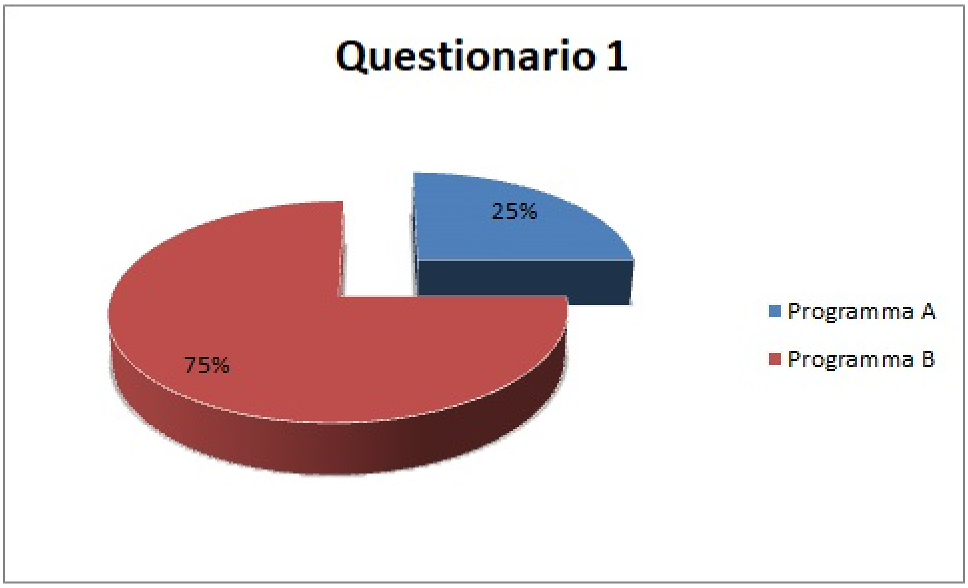


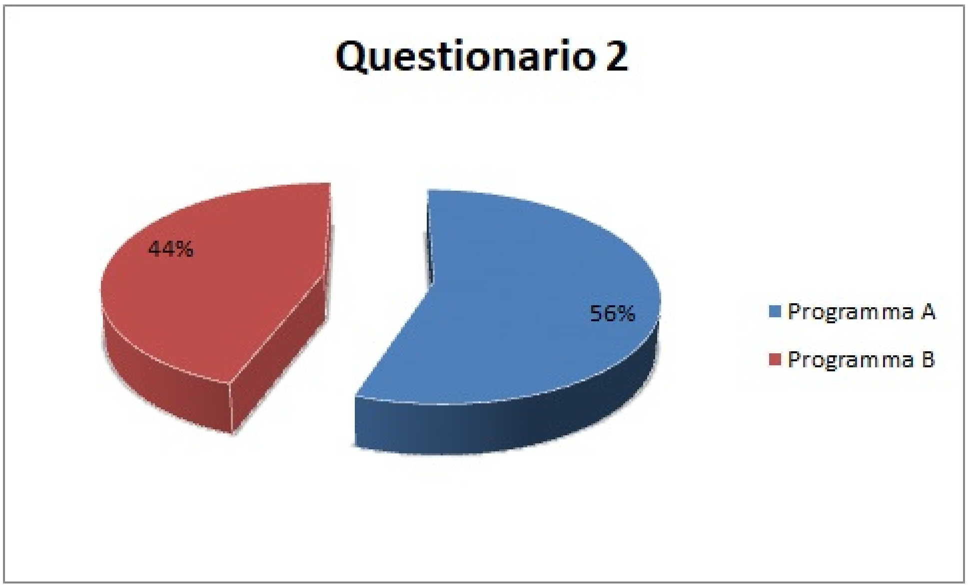


I dati raccolti tra le risposte ricevute nel campione generale hanno confermato le aspettative aprioristiche.
La maggioranza degli intervistati che hanno risposto alla domanda con la formulazione negativa si è mostrata propensa al rischio.
Quando invece la formulazione del quesito è stata posta in positivo solo il 40% degli intervistati ha preferito scegliere il programma rischioso.

I dati sono leggermente meno disomogenei di quelli raccolti da Kahneman e Tversky.
Il 32% e 68% nel *Questionario 1* contro il 22% e 78% rilevato dagli studiosi israeliani.
Il 60% e 40% nel *Questionario 2* contro il 72% e 28% rilevato dagli stessi.

Risposte ricevute solo sui questionari della classe IV-G:

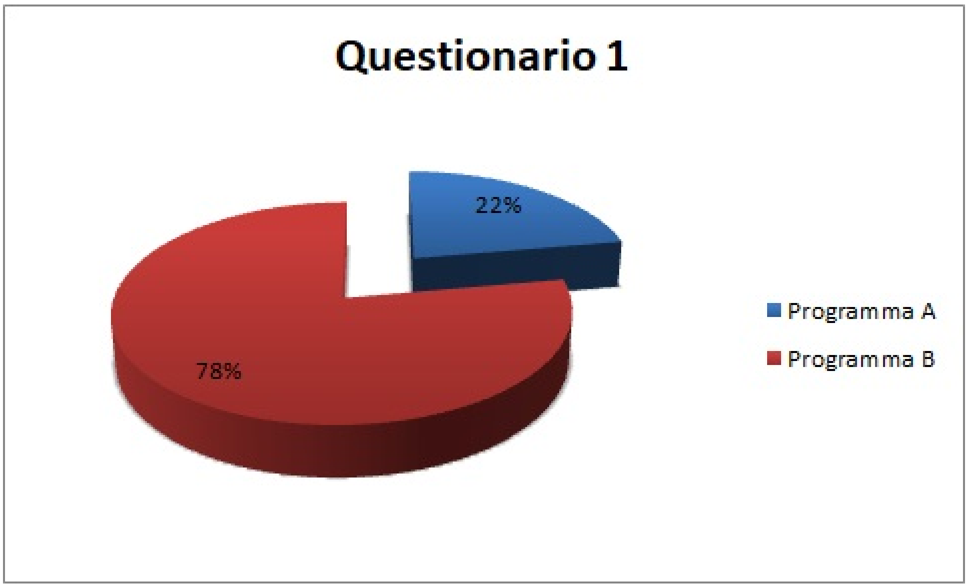


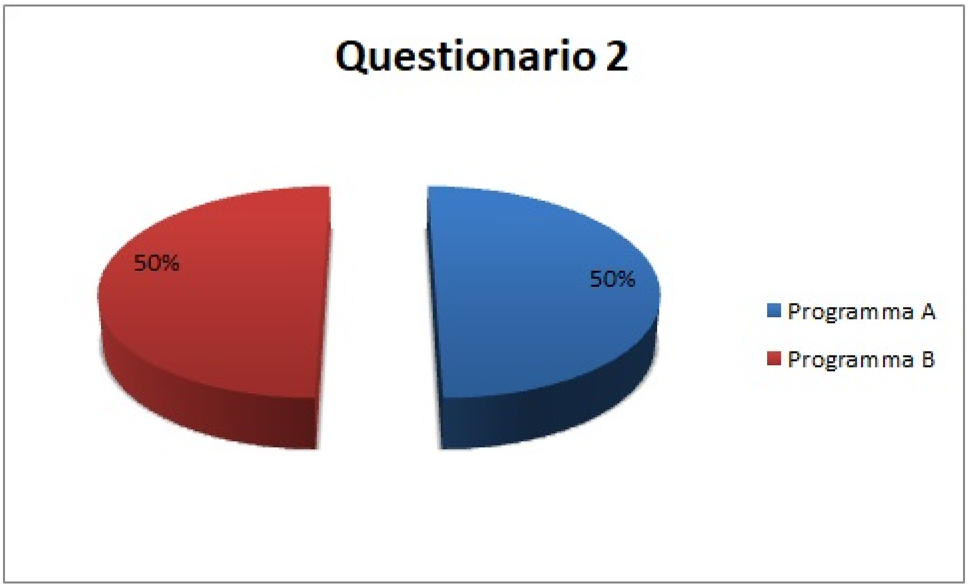


Nella classe quarta i dati sono concordi a quelli del campione generale.

Le percentuali riscontrate nelle risposte date con la prima formulazione si avvicinano di più a quelle trovate da Tversky e Kahneman.
Invece, le percentuali riscontrate nelle risposte date con la prima formulazione si allontanano di più da quelle trovate da Tversky e Kahneman.

Risposte ricevute solo sui questionari della classe V-G:

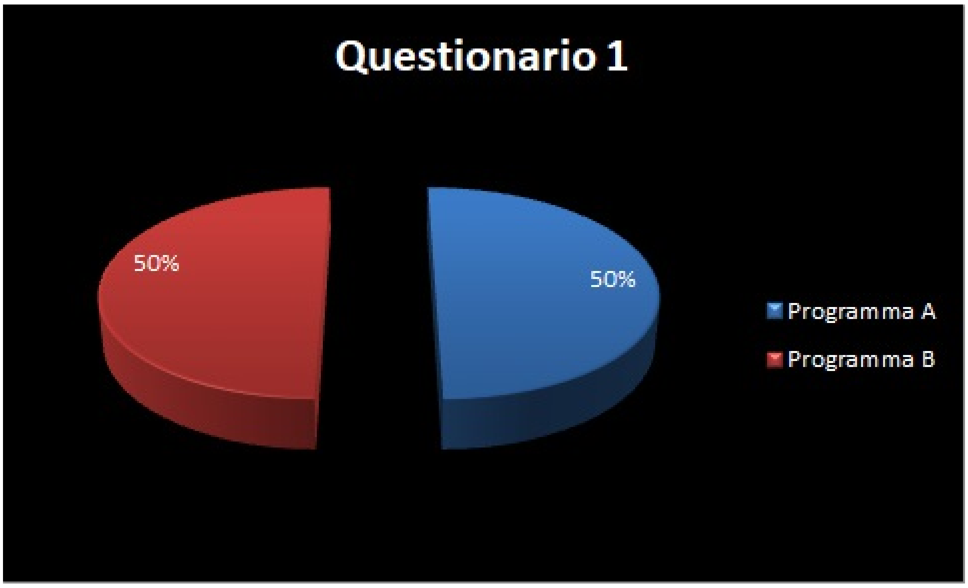


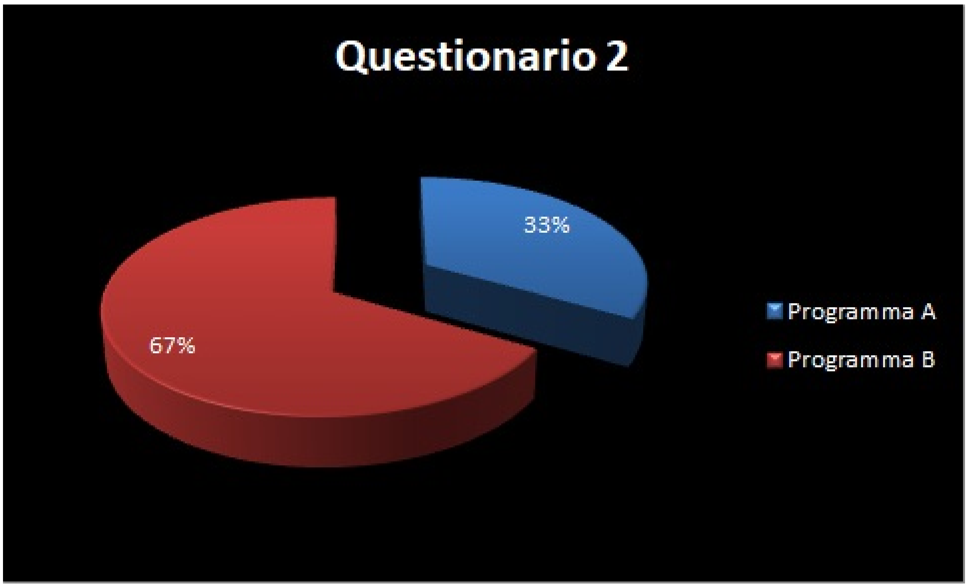


In questa classe le risposte ricevute al *Questionario 1*, in percentuale, coincidono esattamente con le aspettative aprioristiche.

Tra chi ha risposto al *Questionario 2* solo la metà ha preferito non rischiare ed ha scelto il programma A.

Risposte ricevute solo sui questionari della classe V-B:





Nella classe quinta B si sono registrate risposte in contrasto con la teoria del prospetto.

Formulando la domanda in modo negativo solo la metà degli studenti ha preferito rischiare.

Inoltre formulando positivamente la domanda si è rilevato che solo un terzo degli intervistati ha scelto il programma A per non rischiare di salvare meno vite.

6.2.11 Quesito 8

Questo quesito è un problema decisionale in condizioni di rischio.
La scelta da prendere è la medesima in entrambe la formulazioni del quesito.
Giocare o meno 5€ al gioco della roulette puntando su un colore e non su un numero.

La prospettiva del problema è però differente tra il *Questionario 1* ed il *Questionario 2*.
Nel primo questionario viene specificato all'intervistato che, prima di prendere la scelta, ha già fatto una partita nella quale ha vinto.
Nel secondo questionario la prospettiva è differente poiché si dice che nella partita precedente si è perso.

Se non si facesse questa premessa gli esiti possibili sarebbero solo "vincere 5€" e "perdere 5€".
Per simmetria la scelta sarebbe solo influenzata dalla propensione al rischio individuale e non ci sarebbe motivo di ritenere più probabile che gli intervistati avessero scelto di giocare o meno.

Razionalmente, se si sa che nel gioco della roulette il prodotto tra la probabilità di vincita e la vincita stessa è minore della posta di gioco, si dovrebbe scegliere di non giocare.
Se ciò si ignora e si crede che il prodotto eguagli la posta, razionalmente si potrebbe sia giocare che non giocare.

Le premesse fatte, invece, si presume modifichino la prospettiva del giocare.

Nella prima formulazione il problema viene percepito come:

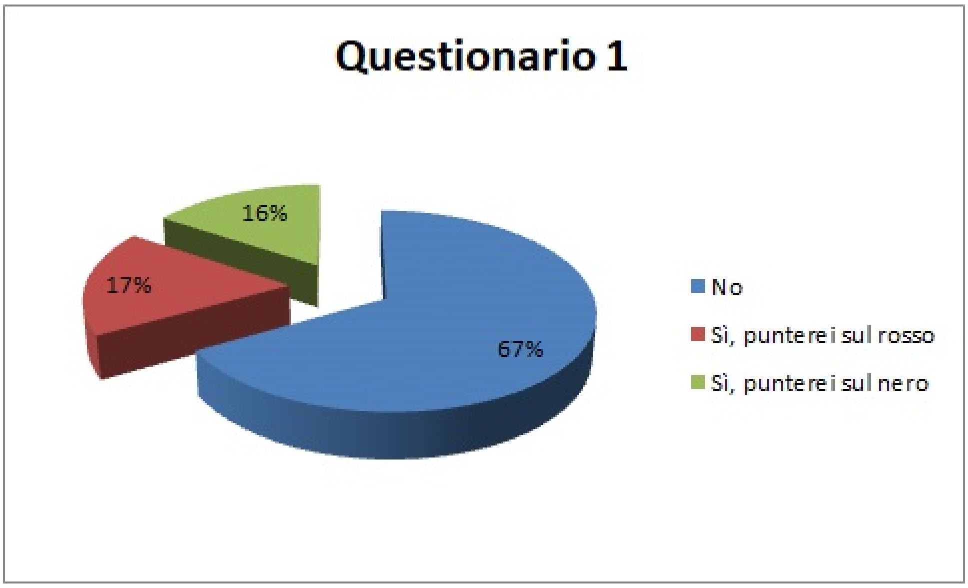
- Vincere 5€ con certezza
- Vincere 10€ o non vincere nulla

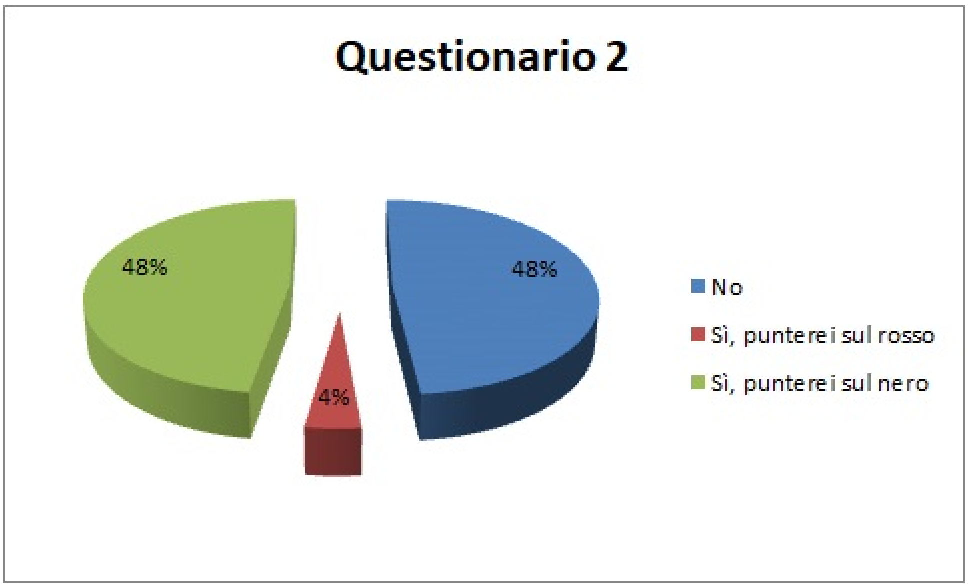
Nella seconda formulazione il problema viene percepito come:

- Perdere 5€ con certezza
- Perdere 10€ o non perdere nulla

Nella teoria del prospetto, nei giochi con tutte vincite negative si ha una maggiore propensione al rischio che nei giochi con solo vincite positive.

Risposte ricevute su tutti i 499 questionari:





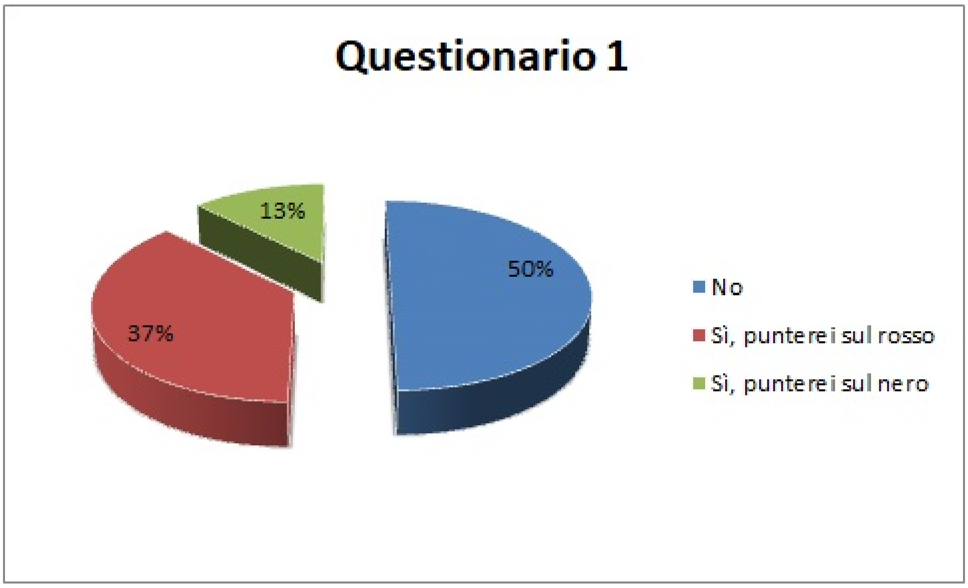
I dati raccolti tra le risposte del campione generale confermano le aspettative aprioristiche.

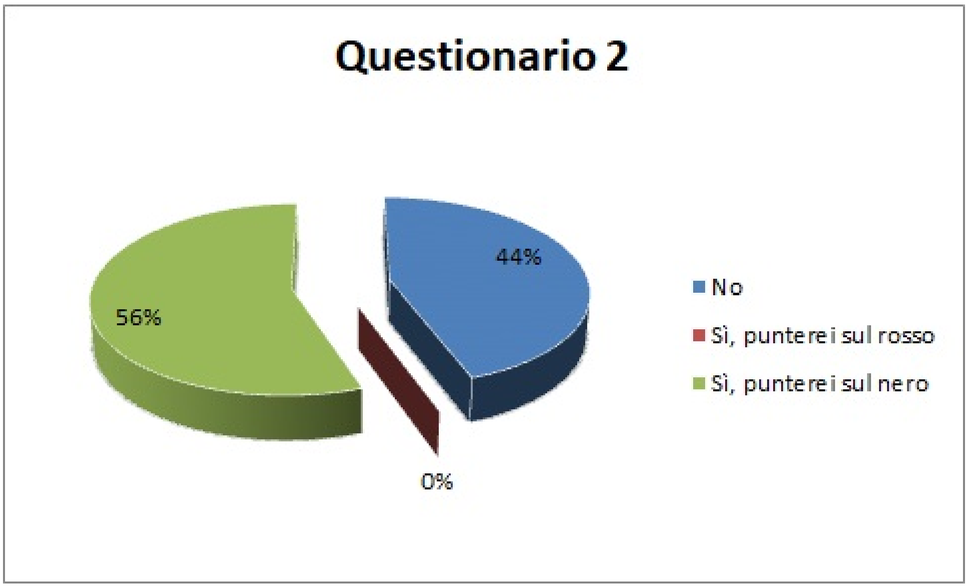
Tra gli intervistati al *Questionario 1* due terzi hanno preferito non giocare e garantirsi la prima vincita avuta.
Tra chi ha scelto di giocare non si è registrata nessuna particolare preferenza tra il puntare sul nero ed il puntare sul rosso.

Tra gli intervistati al *Questionario 2* meno della metà ha scelto di non giocare per garantirsi di non avere altre perdite.
La quasi totalità di chi ha preferito giocare ha scelto di puntare sul nero, lo stesso colore

cui si era detto di avere puntato quando si è perso.
Probabilmente l'euristica della rappresentatività ha spinto a pensare che se un certo colore non è uscito al giro precedente è più probabile che esca al giro successivo. È interessante che questa stessa illusione cognitiva non abbia influenzato le risposte del *Questionario 1*.

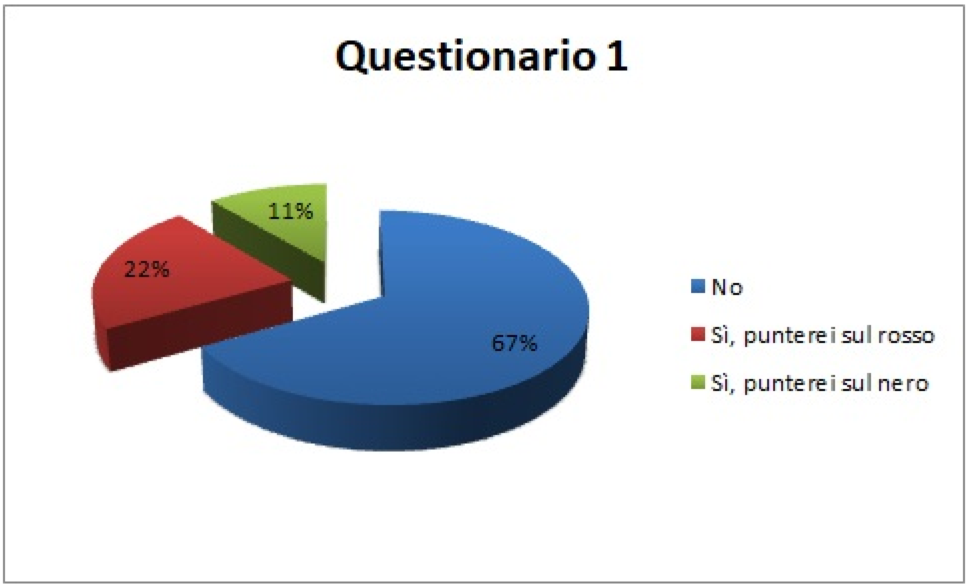
Risposte ricevute solo sui questionari della classe IV-G:

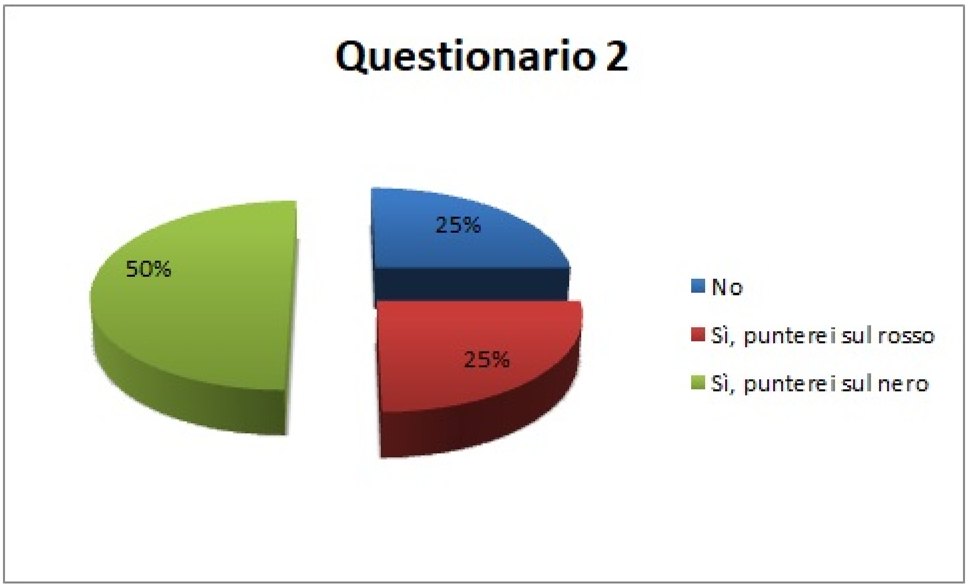




La classe quarta G ha mostrato, come negli altri quesiti, una propensione al rischio maggiore del campione generale. In 3 hanno scelto di giocare puntando sul rosso, dopo aver vinto con lo stesso colore, mentre solo uno ha scelto di puntare sul nero nella stessa situazione. Si può pensare che il rosso sia stato visto come un colore fortunato.

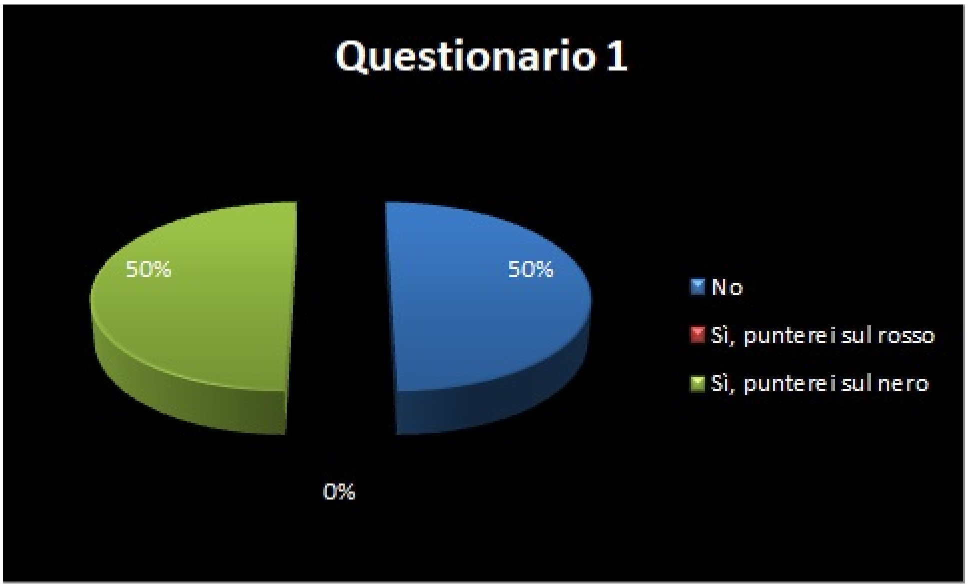
Risposte ricevute solo sui questionari della classe V-G:

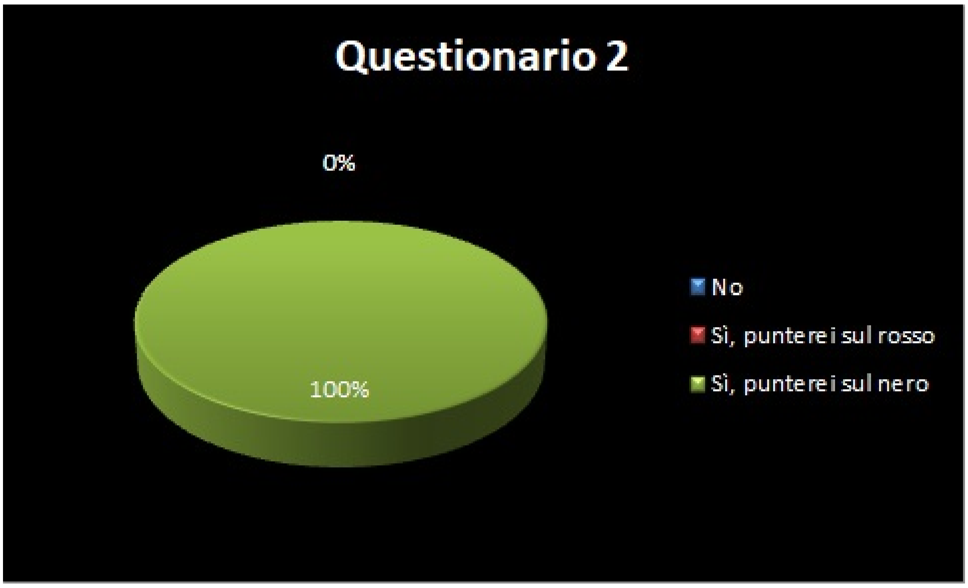




I pochi dati raccolti in questa classe sono sovrapponibili con quelli rilevati nel campione generale.

Risposte ricevute solo sui questionari della classe V-B:





Nella classe quinta della sezione B sono stati registrati dati parzialmente in contrasto con quelli del campione generale.
La propensione al rischio è assoluta nel *Questionario 2* e comunque rilevante nel *Questionario 1*.

I due studenti che hanno scelto di giocare di nuovo dopo una prima sconfitta hanno scelto di cambiare il colore su cui puntare.

6.2.12 Quesito 9

Questo quesito pone un problema decisionale in condizione di rischio. È molto simile al quesito precedente e viene posto con la stessa formulazione in entrambi i questionari.

L'incertezza sull'esito della prima giocata, secondo la teoria del prospetto, condiziona la percezione di probabilità degli intervistati.
Infatti per l'effetto isolamento, detta $P(V)$ la probabilità di vincere alla roulette, la percezione della probabilità di vincere per due volte consecutive risulta minore di $\pi(P(V)) \cdot \pi(P(V))$.
Analogamente, detta $P(P)$ la probabilità di perdere alla roulette, la percezione della probabilità di perdere per due volte consecutive risulta minore di $\pi(P(P)) \cdot \pi(P(P))$.

Chiamiamo la percezione della probabilità di vincere due volte $\pi(V, V)$ e quella di perdere due volte $\pi(P, P)$.
Il problema decisionale si può modellizzare col confronto tra

$$\Pi(10) \cdot \pi(V, V) + \Pi(-10) \cdot \pi(P, P)$$

e

$$\Pi(5) \cdot \pi(P(V)) + \Pi(-5) \cdot \pi(P(P))$$

I dati rilevati col quesito precedente ci dicono che:

- per il 67% degli intervistati

$$\Pi(10) \cdot \pi(P(V)) < \Pi(5)$$

- per il 33% degli intervistati

$$\Pi(10) \cdot \pi(P(V)) > \Pi(5)$$

- per il 48% degli intervistati

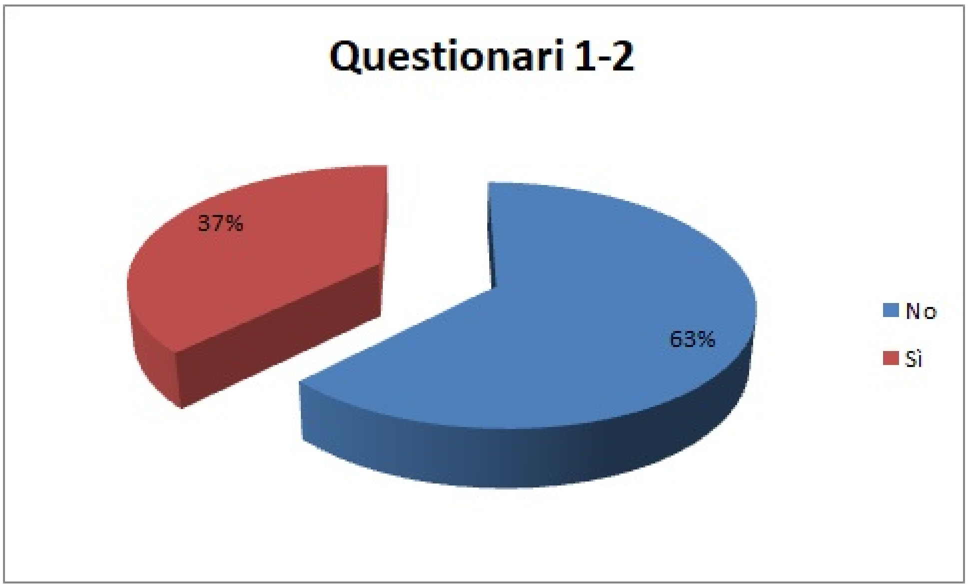
$$\Pi(-10) \cdot \pi(P(V)) < \Pi(-5)$$

- per il 52% degli intervistati

$$\Pi(-10) \cdot \pi(P(V)) < \Pi(-5)$$

La possibilità di avere sia perdite che guadagni dovrebbe far rilevare una propensione al rischio compresa tra quella al gioco con sole perdite e quella al gioco con soli guadagni.
L'effetto isolamento, d'altro canto, dovrebbe far diminuire la propensione al rischio.

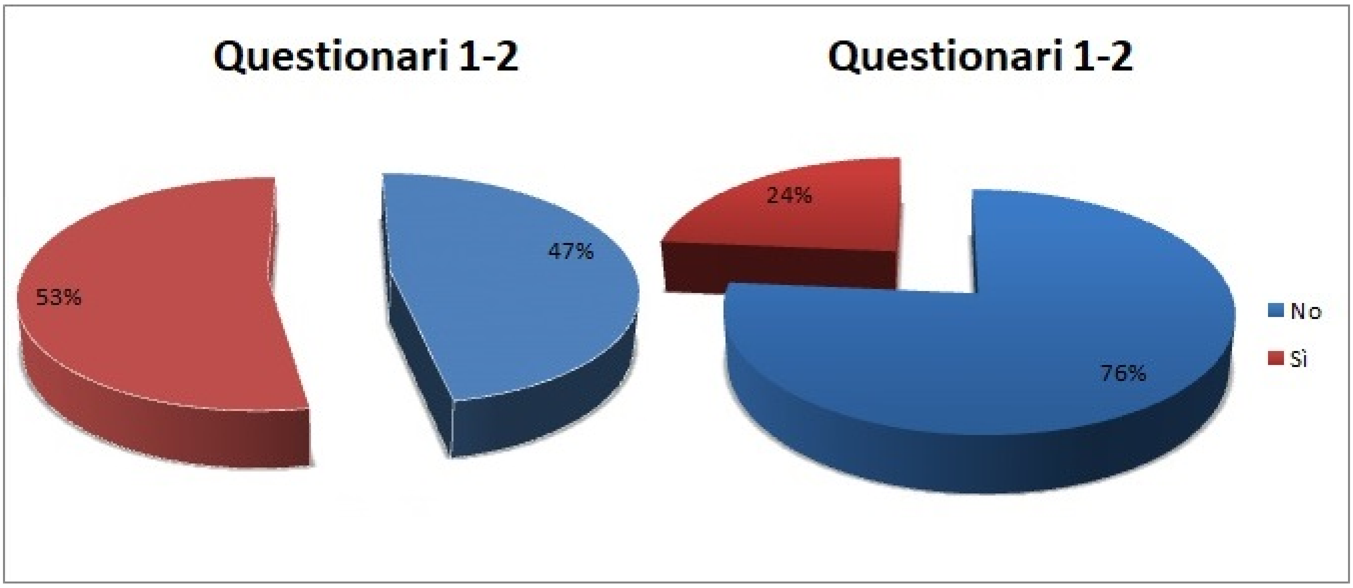
Risposte ricevute su tutti i 499 questionari:



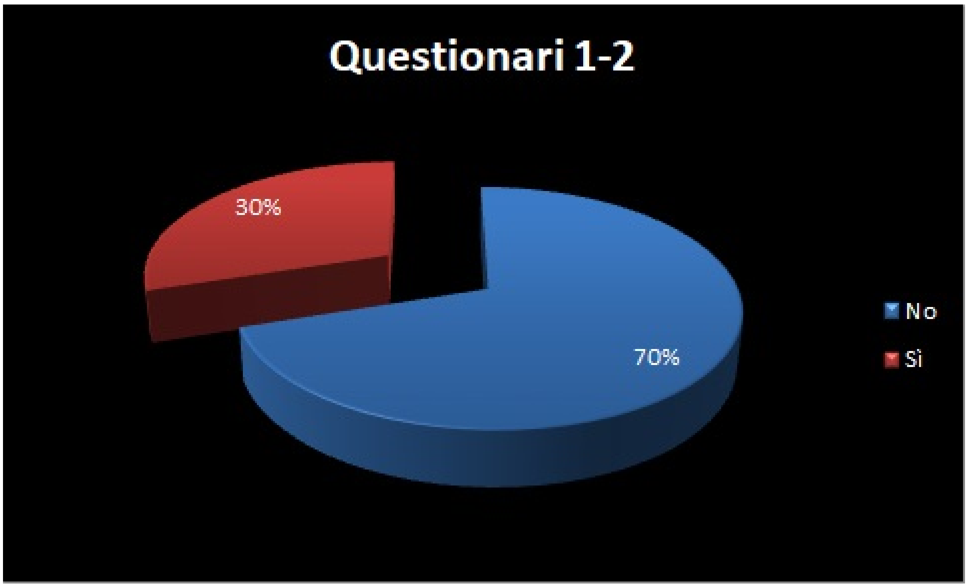
I dati raccolti tra le risposte ricevute dal campione generale mostrano che questa situazione genera una propensione al rischio di poco superiore a quella della vincita certa. Si segnala:

- Tra chi ha giocato in questa situazione: circa il 48% ha giocato anche in caso di prima vincita sicura; circa il 66% ha giocato anche in caso di prima perdita sicura.
- Tra chi non ha giocato in questa situazione: circa il 75% non ha giocato neanche in caso di prima vincita sicura; circa il 58% non ha giocato neanche in caso di prima perdita sicura.
- Tra chi ha giocato in caso di prima vincita sicura, circa il 50% ha giocato anche in questa situazione.
- Tra chi ha giocato in caso di prima perdita sicura, il 50% ha giocato anche in questa situazione.
- Tra chi non ha giocato in caso di prima vincita sicura, il 72% non ha giocato neanche in questa situazione.
- Tra chi non ha giocato in caso di prima perdita sicura, circa il 72% non ha giocato neanche in questa situazione.

Risposte ricevute solo sui questionari delle classi IV-G e V-G:



Risposte ricevute solo sui questionari della classe V-B:



La propensione al rischio nelle due classi quinte è leggermente inferiore a quella del campione generale.

Nella classe quarta, come per i quesiti precedenti, si è riscontrata un'alta propensione al rischio.

CONCLUSIONI

In questo lavoro di tesi si è trattato il tema di problemi decisionali in matematica. In particolare, sono stati approfonditi in maniera teorica e pratica i concetti di scelta, probabilità, razionalità, valore ed utilità.
Dopo aver dato la definizione di scelta razionale si è mostrato come individuarla in problemi decisionali in condizione di certezza.
Attraverso un esempio storico si è mostrato come la scelta sia legata al concetto di probabilità in tutti quei problemi privi di certezza.
Si sono quindi fornite ed analizzate diverse definizioni di probabilità e si è illustrato come tutte dipendano da criteri soggettivi.
Attraverso vari esempi paradossali si è voluto evidenziare come la teoria della probabilità e quella della probabilità condizionata, per quanto indispensabili per la soluzione di molti problemi pratici, vengano difficilmente comprese e quindi ignorate.
Sfruttando la teoria della probabilità sono stati mostrati tre diversi modelli matematici utili a risolvere problemi di scelta, uno originale e due noti in letteratura. Per quanto riguarda questi ultimi, si tratta del modello del valore atteso, che tende a massimizzare il patrimonio di benessere dell'agente che prende la scelta, e del modello dell'utilità attesa che, invece, attribuisce pesi diversi a differenti patrimoni in funzione dell'utilità che questi possono avere per l'agente.
Il modello originale, invece, è stato chiamato modello della Letizia ed è stato ideato considerando fattori non comuni rispetto a quelli generalmente utilizzati nei modelli economici. A differenza di questi ultimi, il modello della Letizia presuppone un valore di sup di ciò che si vuole massimizzare nei problemi di scelta.
Si sono poi definiti i giochi, ossia i problemi decisionali, incorniciati nel modello dell'utilità attesa, in cui intervengono più agenti. All'interno della teoria dei giochi si è mostrato come strategie individuali inducano gli agenti a compiere scelte che portano il gioco in situazioni di equilibrio non ottimali.
Si è quindi spiegato che in alcuni giochi è utile applicare una strategia cooperativa evidenziando che non è possibile stabilire alcun criterio di scelta comunitario universalmente valido, ossia un'etica collettiva.
Attraverso alcuni esempi, sono state presentate le illusioni etiche che pongono ulteriori limiti pratici al processo di individuazione di scelte razionali.
Infine il problema delle illusioni è stato generalizzato con le illusioni cognitive e le euristiche decisionali che condizionano tanto il ragionamento umano da non poterlo considerare razionale.
Per poter quindi prevedere le scelte compiute dagli uomini, partendo da queste euristiche, è stata formulata la teoria del prospetto.

I concetti enunciati sono stati messi in pratica attraverso la stesura e la somministrazione di un questionario, in due differenti formulazioni, atto ad indagare le illusioni cognitive. Le risposte fornite dagli intervistati sono state perciò analizzate riscontrando un'effettiva controanalisi dell'esistenza delle euristiche decisionali.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. Rolle, *I limiti della Teoria della Scelta Razionale, in annali del dipartimento di filosofia, università degli studi di Firenze*, 2001.

[2] E. Zermelo, *Neuer Beweis, dass jede Menge Wohlordnung werden kann (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe), in Mathematische Annalen, vol. 59*, 1904.

[3] *Vocabolario Treccani*

[4] Platone *Opere, vol. II*, Laterza 1967

[5] Voltaire, *La Pucelle d'Orléansin Œuvres complètes de Voltaire, Paris*, 1784.

[6] Oystein Ore, Cardano, *The Fambling Scholar, Princeton University Press, N. J.*, 1953, con una traduzione del Liber de ludo aleae di Cardano a cura di S. H. Gould.

[7] L. Mlodibow, *La passeggiata dell'ubriaco, Rizzoli*, 2009.

[8] M. Malvaldi, *Le due teste del tiranno, Rizzoli*, 2017.

[9] L. Casadei, G. Bolondi *Apprendimento della probabilità, Università di Bologna*, tesi non pubblicata, 2016.

[10] S. Borlengo, M. Lucchini *Pensare il caso, Egea*, 2017.

[11] G. Galilei *"Sopra le scoperte de i dadi", Le Opere di Galileo Galilei, Edizione Nazionale (E.N.) di A. Favaro, Tipografia La Barbera* , 1897.

[12] B.Pascal *Pensieri, Edizione Studio Tesi* , 1986.

[13] P. Agnoli, F. Piccoo, *Probabilità e scelte razionali, Armando Editore*, 2008.

[14] S. M. Stigler, *The History of Statistics, Belknap Pr*, 1990.

[15] B. de Finetti, *Teoria delle probabilità, il Saggiatore*, 1970.

[16] A. Cattabriga, *Lezioni del corso "Didattica della matematica", università di Bologna*, 2018.

[17] A. Volcic, *Convegno "su alcuni paradossi della probabilità", Firenze*, 2015.

[18] A. Volcic, *Taxi verdi e taxi blu, Archimede*, 2015.

[19] A. Pupo, L. Grilli, *Il Paradosso di Simpson nell'analisi statistica: Profilo storico e casi di studio , Università di Firenze*, tesi, 2013.

[19] https://it.wikipedia.org (visitato il 23/04/2019)

[20] P.Agnoli, F. Piccolo, *Presentazione di una nuova teoria sulla valutazione del rischio, ovvero traduzione, con breve introduzione, del saggio (1738) Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis di Daniel Bernoulli*, 2008.

[21] M.Motterlini, M. Piattelli Palmarini , *Intruduzione di Critica della ragione economica, il Saggiatore*, di D. Kahneman, D. McFadden, V. L. Smith, 2005.

[22] A. Smith , *La ricchezza delle nazioni, Newton Compton*, 1776.

[23] Philippa Foot, *The Problem of Abortion and the Doctrine of the Double Effect, Oxford Review, Number 5*, 1967.

[24] udith Jarvis Thomson, *Killing, Letting Die, and the Trolley Problem, The Monist 204-17*, 1976.

[25] A. Ferrari, L. Rocco, *Dalla teoria dell'utilità attesa alla teoria del prospetto: un focus sul ruolo dei framing effect nelle decisioni degli agenti , Università di Padova*, tesi, 2016.

[26] M. Bar-Hillel, *Studies of representativeness. In D. Kahneman, P. Slovic, A. Tversky (Eds.), Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases*, Cambridge University Press 1982.

[27] M. Piattelli Palmarini, *L'illusione di sapere*, Mondadori 1993.

[28] E. Fischbein, I. Barbat, I., I. Minzat, *Primary and secondary intuitions in the introduction of probability. In E. Fischbein, The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*, Springer 1975.

[29] E. Fischbein, *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*, Springer 1975.

[30] , A Tversky, D Kahneman *The framing of decisions and the psychology of choice*, Science, 1981.