

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

**GEOMETRIA PROIETTIVA:
I TEOREMI DI PAPPO E
DESARGUES
IN UNA PROSPETTIVA STORICA**

Tesi di Laurea in Geometria III

Relatore:
Chiar.ma Prof.
Fioresi Rita

Presentata da:
Rampazzo Silvia

Sessione III
Anno Accademico 2009/2010

Introduzione

L'Età ellenistica, considerata nel senso più ampio del termine, dal IV secolo a.C. al VI secolo d.C., fu un periodo storico-culturale nel quale la civiltà greca si diffuse dal mediterraneo all'oriente, fondendosi con le culture locali. Fu un periodo denso e fecondo di nuove idee, nel quale si potenziarono e ampliarono molte discipline, come la filosofia, la letteratura, l'arte e la scienza. Uno dei centri culturali dell'Ellenismo fu senz'altro la città di Alessandria, città nella quale visse il matematico Pappo nel 300 d.C.. Prima di lui lo precedettero i grandi matematici come Euclide, Archimede e Apollonio, ma Pappo fu considerato l'ultimo dei grandi matematici greci. È da qui che inizieremo il nostro percorso storico-matematico che ci condurrà nello studio delle opere di alcuni matematici che hanno dato origine alla geometria proiettiva.

L'opera di Pappo viene considerata tra le più innovative di quel periodo, e la sua inclinazione alla generalizzazione matematica lo portò molto vicino ai principi fondamentali della geometria analitica e proiettiva. Ma ciò che approfondiremo in questa tesi sarà un altro importante risultato di Pappo: il teorema che porta il suo nome, al tempo non coronato dal successo dovuto, verrà ripreso da Desargues nel XVII secolo. Dopo Keplero, anche Desargues dovette accogliere l'idea che due rette parallele si incontravano in un "punto all'infinito", e che la teoria della prospettiva rendeva plausibile le sue nuove idee. Nacquero così le prime intuizioni di geometria proiettiva, alla quale si dedicò anche Pascal, allievo di Desargues. Il nome "geometria proiettiva" venne però definito nel XIX secolo, quando iniziò uno studio sistematico di

questo tipo di geometria, soprattutto ad opera di Poncelet.

È sorprendente e avvincente osservare come un pensiero si possa evolvere nel tempo, ampliandosi man mano, e coinvolgendo sempre più studiosi. Vogliamo esporre i teoremi ed i concetti non soltanto da un punto di vista matematico rigoroso, ma insieme ad un approfondimento storico, affinché il lettore possa capire che molte idee e concetti che noi oggi studiamo e che ci sembrano scontati, siano invece il frutto dell'evoluzione di pensiero, avvenuta in più di mille anni.

Ma vediamo più in dettaglio come si sviluppa la nostra tesi.

Il primo capitolo sarà dedicato interamente alla descrizione storica in cui si è sviluppata la geometria proiettiva. Parleremo della matematica greca, una delle più feconde di tutta l'antichità, a partire dai grandi matematici come Euclide, Archimede e Apollonio, fino ad arrivare al 300 d.C. quando visse Pappo di Alessandria. Successivamente studieremo la matematica del XVII secolo, e in particolare le figure di Desargues e Pascal. Infine il XIX secolo, periodo della rinascita della geometria proiettiva, ci condurrà nell'approfondimento dell'opera di Poncelet.

Nel secondo capitolo daremo una definizione matematica rigorosa di spazio proiettivo e di sottospazio, e infine studieremo la dualità; sono premesse che ci serviranno per capire meglio i teoremi di Pappo e Desargues che studieremo nel capitolo successivo.

Nel terzo capitolo, entreremo nel vivo dei due teoremi che danno il nome alla presente tesi, Pappo e Desargues, analizzandoli nella loro versione affine e in quella proiettiva, mettendo in evidenza le particolarità e le differenze. Prima di concludere l'ultimo capitolo parleremo brevemente del teorema di Pascal, che può essere considerato una generalizzazione del teorema di Pappo. Infine vedremo un ulteriore legame tra il teorema di Pappo e quello di Desargues; essi infatti possono essere adoperati nel dare una definizione assiomatica alla geometria proiettiva piana, proprio come fece Euclide per la geometria affine negli *Elementi*.

Indice

Introduzione	i
1 Introduzione storica	1
1.1 La matematica greca	1
1.2 L'Età aurea della matematica greca	5
1.3 L'Età argentea della matematica greca	8
1.4 Il XVII secolo: origine della geometria proiettiva	13
1.5 La rinascita della geometria proiettiva	17
2 Lo Spazio Proiettivo	21
2.1 Lo spazio proiettivo e i sistemi di coordinate	21
2.1.1 Il piano proiettivo	23
2.2 Sottospazi proiettivi	27
2.3 Dualità	33
3 I teoremi di Pappo e Desargues	39
3.1 La versione affine	39
3.2 La versione proiettiva	45
3.3 Il teorema di Pascal	49
3.4 Definizione assiomatica della geometria proiettiva	51
Bibliografia	53

Elenco delle figure

1.1	Il Faro di Alessandria	4
1.2	Il Colosso di Rodi	4
1.3	Le sezioni coniche di Apollonio	7
1.4	Collezioni di Matematica	9
1.5	Le curve lineari.	14
1.6	Girard Desargues	15
1.7	Blaise Pascal	16
1.8	Jean-Victor Poncelet	18
2.1	Proiezione stereografica del polo Nord	25
2.2	Le coppie di punti antipodali di \mathbf{S}^n	27
3.1	Teorema di Talete	41
3.2	Le diverse versioni del teorema di Pappo.	42
3.3	Teorema di Pappo, versione affine.	43
3.4	Teorema di Desargues, versione affine.	44
3.5	Teorema di Pappo, versione proiettiva.	46
3.6	Teorema di Desargues, versione proiettiva.	49
3.7	Teorema di Pascal.	50

Al Professor Serra Alberto

Capitolo 1

Introduzione storica

In questo capitolo introduciamo il contesto storico in cui si è sviluppata la matematica greca ed in particolare quella dell'età ellenistica. Dopo di essa tratteremo la matematica del XVII secolo per arrivare infine al XIX secolo. Il filo conduttore del nostro percorso storico, sarà la geometria, e in particolare la nascita e lo sviluppo delle idee che fondarono la geometria proiettiva.

1.1 La matematica greca

La matematica del mondo greco coprì un'intervallo di tempo che si estese, all'incirca, dal 600 a.C. al 600 d.C e si diffuse in diverse regioni del Mediterraneo, dall'Italia Meridionale, ad Atene e Alessandria; ma l'ampio intervallo di tempo e l'enorme estensione nello spazio, causarono modi diversi di approfondimento e sviluppo dell'attività matematica. Per esempio, Roma antica, durante la sua lunga storia, diede scarsi contributi alla scienza o alla filosofia, e tanto meno alla matematica: i romani erano privi di intuito matematico, mentre nutrivano un certo interesse per le arti pratiche come la medicina e l'agricoltura dove la matematica trova scarsa applicazione. Naturalmente non si può non tener conto dei grandiosi progetti di ingegneria volti alla costruzione degli immensi monumenti che ancora oggi sono conosciuti in tutto il mondo, ma essi coinvolgevano soltanto semplici aspetti delle scienze, nien-

te a che vedere con la vasta conoscenza del grande insieme di dottrine del pensiero greco. Inoltre, molto spesso gli ideatori di tali opere si avvalevano della collaborazione di architetti e ingegneri greci, e non pochi trattati di ingegneri “romani” provengono da traduzioni di analoghi trattati greci ora andati perduti. Dunque la matematica dei romani era ad un livello decisamente inferiore a quello della matematica greca degli stessi anni.

Ai greci viene attribuito il merito di aver reso astratta la matematica: il fatto, oggi scontato, che il triangolo astratto o l'equazione algebrica possano essere usati in centinaia di situazioni fisiche si è rivelato il segreto della potenza della matematica. Un altro vanto della civiltà greca fu quello di concepire l'idea che si potessero stabilire delle conclusioni esclusivamente sulla base del ragionamento deduttivo. La dimostrazione deduttiva rappresenta un superamento di tutti gli altri metodi, quali l'esperienza, la sperimentazione, l'induzione e il ragionamento per analogia, utilizzati fino ad allora dall'uomo. I greci si accorsero che per giungere a verità dovevano partire da altre verità, assicurandosi che non venisse assunto alcun fatto che non fosse stato prima verificato; ecco perchè, all'inizio di ogni opera o trattato, enunciavano tutti i loro assiomi, di modo che potessero essere analizzati nel loro insieme. Un esempio importantissimo di questo modo di procedere è rappresentato dagli *Elementi* di Euclide, opera che ancora oggi è considerata un modello di rigore. Euclide dà l'enunciato di tutti gli assiomi all'inizio della sua trattazione, ed enuncia esplicitamente tutte le definizioni. Dopodichè procede alla concatenazione ordinata dei teoremi, in modo da andare dai più semplici a quelli sempre più complessi, ottenendo così 467 proposizioni derivandole dai 10 assiomi¹

Un altro contributo alla matematica fu la concezione greca della natura, vista come la verità ultima della matematica. La matematica per i greci era un'arte, nella quale si intrecciavano bellezza, armonia, semplicità, ordine e

¹Esistono diverse edizioni dell'opera di Euclide, ricordiamo *Euclidis Opera Omnia* (testo greco e traduzione latina) di J. L. Heiberg e H. Menge [10], e la traduzione italiana in quattro volumi degli *Elementi*, curata da F. Enriques [11].

chiarezza; la geometria, l'aritmetica e l'astronomia erano considerate l'arte della mente e la musica dell'anima.

Il cuore della civiltà ellenistica (323 a.C.-529 d.C.), che vide il maggior sviluppo della matematica, divenne Alessandria; la sua fondazione (332-331 a.C.) avvenne per opera di Alessandro Magno, allo scopo di dare all'Egitto una nuova capitale e all'Oriente un porto. Alessandria divenne in poco tempo una città cosmopolita, il crogiolo in cui uomini di razze e idee diverse si incontrarono a creare una nuova civiltà. E' dunque in questo luogo che si svilupparono, accanto alle attività commerciali, artigianali e manifatturiere, anche le attività artistiche insieme a quelle tecniche e scientifiche. Due grandi istituzioni stimolarono l'incremento di tali studi e ricerche: la Biblioteca e il Museo. La Biblioteca fu fondata da Tolomeo II Filadelfo nel 284 a.C. (ma già sotto Tolomeo I, Demetrio Falereo ne aveva dato l'idea e gettato le basi) e s'ingrandì tanto da contenere fino a 400.000 volumi. Accanto a questa biblioteca, detta del Museo, fu presto fondata una seconda biblioteca, il Serapeo. Nel I secolo a.C. le due biblioteche si stima contenessero 700.000 volumi.

Ricordiamo inoltre che tra le sette meraviglie del mondo, due sono opera di ingegneri greci ellenistici: il Faro di Alessandria e il Colosso di Rodi. Il primo fu costruito sull'isola di Pharos, di fronte al porto di Alessandria, verso il 280 a.C. e rimase funzionante fino al XIV secolo, quando venne distrutto da due terremoti. Si stima che la torre fosse alta 95 metri, una delle più alte costruzioni per l'epoca, e che potesse esser visto a 48 km di distanza, cioè fino al limite consentito dalla curvatura della superficie terrestre.

Il Faro era costruito su diversi piani, il primo, a base quadrata, giungeva circa a metà altezza; poi la costruzione proseguiva a pianta ottagonale e alla sommità vi era un contenitore cilindrico per la lanterna, che costituiva la vera "meraviglia". Sappiamo ben poco della tecnologia utilizzata poichè le sole descrizioni rimasteci del Faro risalgono a storici arabi che lo visitarono quando da tempo non era più in funzione. Tuttavia possiamo facilmente immaginare che il riflettore fosse ottenuto, come si fa oggi, con uno specchio



Figura 1.1: Il Faro di Alessandria

parabolico. Non è stato storicamente dimostrato che gli scienziati partecipassero alla progettazione dell'opera, ma non può essere casuale che il primo riflettore della storia sia stato costruito ad Alessandria nella prima metà del III secolo a.C., proprio dove e quando per la prima volta vi furono scienziati interessati sia alla teoria delle coniche sia alla catottrica, “teoria scientifica” elaborata per progettare oggetti del genere.

Il Colosso di Rodi invece, era un'enorme statua del dio Helios, situata nel porto di Rodi, costruita nel III secolo a.C.



Figura 1.2: Il Colosso di Rodi

La statua era alta 32 metri, e per costruirla furono necessari 12 anni, i lavori terminarono nel 282 a.C.. Dal racconto di Filone di Bisanzio riguardante la costruzione della statua, si apprende che l'artista, dopo aver infisso solidamente con grossi perni di ferro i piedi di bronzo della statua in una base di

marmo, elevò il resto del corpo a strati avendo cura di preparare, nell'interno della statua, un'intelaiatura di ferro, formata da barre orizzontali e di montanti, che seguivano la forma della statua e che erano fissati con perni alle pareti di essa. Lo scheletro di ferro era stabilizzato da un riempimento fatto con blocchi di pietra. Per la fusione, sul posto, delle parti bronzee era stato elevato tutto intorno un terrapieno. Ma nel 226 a.C. Rodi fu colpita da un terremoto e la statua crollò.

1.2 L'Età aurea della matematica greca

Il periodo compreso tra il 300 e il 200 a.C. è detto "Età aurea" della matematica greca, ed ha prodotto i tre eccelsi matematici: Euclide, Archimede e Apollonio.

Sappiamo poco della vita personale di Euclide, la notizia più importante è un breve cenno del più importante dei suoi numerosi commentatori greci, Proclo (V secolo d.C.) dal suo *Commentario*; questi ci dice che Euclide visse "al tempo del primo Tolomeo" (che morì nel 283 a.C.) e che era "più giovane degli allievi di Platone ma più vecchio di Eratostene e Archimede". Dal tono che usa lo scrittore si evince che anche egli stesso non avesse una precisa informazione sulla data e il luogo di nascita di Euclide. È comunque probabile che lo scienziato fosse attivo intorno al 300 a.C.; non sappiamo se egli nacque ad Alessandria, ma molte fonti lo pongono in relazione con questa città. Pappo ricorda che Apollonio trascorse molto tempo ad Alessandria con gli allievi di Euclide, e da ciò possiamo dedurre che quest'ultimo insegnò nella città.

Archimede di Siracusa fu uno dei più grandi matematici della scienza greca; sappiamo che egli morì quando Siracusa fu presa e saccheggiata dai romani condotti da Marcello, nel 212 a.C.; secondo alcune notizie, Archimede in quel momento aveva 75 anni, dunque egli sarebbe nato nel 287 a. C.. Dalle fonti storiche si evince inoltre che Archimede fece visita ad Alessandria e conobbe Eratostene e fu in rapporti epistolari con lui; ma la maggior parte della sua

vita la trascorse nella sua città natale. Archimede era dotato di un'elevata intelligenza, e di una grande ampiezza di interessi, sia pratici sia teorici, e di un'eccellente abilità meccanica. I suoi risultati matematici comprendono la determinazione di aree e volumi mediante il metodo di esaustione, il calcolo di π e un nuovo schema per rappresentare numeri molto grandi. In meccanica trovò i baricentri di molte figure piane e solide, ed enunciò i teoremi sulle leve. La parte dell'idrostatica che tratta dell'equilibrio dei corpi galleggianti nell'acqua fu fondata da lui. Godette anche della reputazione di essere un buon astronomo: in giovinezza costruì un planetario che simulava i moti del Sole, della Luna e dei pianeti. Molte fonti indirette ci riferiscono del suo talento di ingegnere: inventò una pompa (vite di Archimede) per sollevare l'acqua da un fiume, insegnò come usare la leva per spostare grandi pesi, usò delle carrucole composte per varare una galera per Erone, re di Siracusa, e inventò delle macchine militari e delle catapulte per proteggere Siracusa dall'assedio dei romani. Ad esempio, sfruttando le proprietà focali di uno specchio a forma di paraboloide, concentrò i raggi del Sole sulle navi romane che assediavano Siracusa e le bruciò. Nella stima popolare le sue invenzioni oscurarono i suoi risultati matematici, sebbene egli sia considerato, insieme a Newton e a Gauss, come uno dei più grandi matematici di tutti i tempi. Apollonio era poco più giovane di Archimede e il periodo della sua attività cade tra il 220 e il 190 a.C. Nacque a Perga in Panfilia e si recò ad Alessandria dove svolse gran parte della sua ricerca. Le fonti ricordano molti suoi lavori di matematica e astronomia, ma la più importante tra le opere che ci sono rimaste è il trattato sulle coniche, *Coniques*. Tale trattato si articolava in otto libri: i primi quattro ci sono pervenuti in greco, il quinto, il sesto e il settimo in una traduzione araba, mentre l'ottavo è andato perduto, sebbene nel XVIII secolo ne sia stata fatta una ricostruzione sulla base delle indicazioni fornite da Pappo. Nel 1710 Edmund Halley fornì una traduzione latina dei sette libri, e da allora in poi ne sono state pubblicate varie edizioni in diverse lingue².

²Si veda [12] per maggiori dettagli.

Lo studio delle sezioni coniche ha origine precedente ad Apollonio: Menecmo le scoprì nel 350 a. C., ma dopo di lui vi si dedicarono anche Euclide e Archimede. Apollonio fu tuttavia il primo a studiare i fondamenti della teoria di tutte e tre le sezioni coniche (ellisse, parabola e iperbole) come sezioni di un unico cono circolare. Egli fu anche il primo a riconoscere che l'iperbole è una curva composta da due rami.

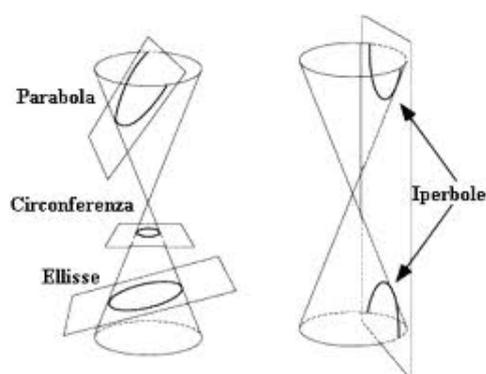


Figura 1.3: Le sezioni coniche di Apollonio

I risultati di Apollonio vennero studiati da molti matematici in seguito e furono ripresi, quasi duemila anni dopo, da Keplero e Newton, per lo studio delle proprietà delle orbite dei pianeti.

Il periodo che interessa per la presente tesi viene più avanti: dopo il tempo glorioso e di massimo sviluppo vi furono momenti di declino dove furono pochi i teoremi originali. I geometri del tempo si dedicarono per la maggior parte allo studio e al chiarimento delle opere dei grandi matematici che li avevano preceduti, per esempio fornendo dimostrazioni che erano state omesse dagli autori originali.

Alcuni³ attribuiscono questo primo declino della cultura greca all'avvento dei Romani. In particolare, nonostante le fonti siano imprecise, nel 47 a.C., l'esercito di Giulio Cesare diede fuoco alla città di Alessandria e bruciò in gran parte la Biblioteca, che conservava due secoli e mezzo di cultura e gran

³Si veda [3, vol. I, p. 210-211] per maggiori dettagli.

parte dei manoscritti. Fortunatamente un'eccedenza di libri che non erano sistemati nella biblioteca bensì nel tempio di Serapide, si salvarono dall'incendio, e permisero una parziale conservazione della cultura greca. Tuttavia è bene osservare che dalle fonti è possibile ricostruire quattro occasioni dove sarebbe potuta succedere una distruzione parziale o totale della Biblioteca:

- L'incendio del 47 a.C. di Giulio Cesare;
- L'attacco di Aureliano intorno al 270 d.C.;
- Il decreto di Teodosio I del 391 d.C.;
- La conquista araba del 642 d.C.

Il primo avvenimento, quello che interessa il periodo storico che stiamo trattando, non è oggetto di una semplice verifica delle fonti, infatti risulta piuttosto difficile fare una ricostruzione condivisa dell'episodio. Dei sedici scrittori che hanno tramandato notizie sull'accaduto, dieci di essi, tra cui lo stesso Giulio Cesare, non riportano notizie relative all'incendio della Biblioteca. Gli altri sei invece, tra cui Plutarco e Seneca, scrivono di un numero, anch'esso impreciso, di libri bruciati, dai 40.000, ai 70.000, o perfino, come scrive Aulo Gellio, 700.000 volumi. Di tutti questi, solo Plutarco collega direttamente la distruzione della biblioteca alla venuta di Giulio Cesare.

È quindi riduttivo, e in parte poco fondato, attribuire il declino del pensiero greco a questo avvenimento particolare, ma sicuramente, la mentalità ristretta dei romani che iniziarono ad espandersi verso l'Egitto a partire dal 30 a.C. con Ottaviano Augusto, influenzò la decadenza della cultura greca.

1.3 L'Età argentea della matematica greca

Dopo l'*Almagesto* di Tolomeo (150 d.C.), dal 250 al 350 d.C. comincia la così detta "Età argentea", i cui protagonisti furono Diofanto e Pappo.

L'*Arithmetica* di Diofanto, il più grande algebrista greco, non riscosse un gran successo al tempo, in quanto l'algebra si prestava più alla soluzione di problemi e non tanto al pensiero deduttivo, come invece la geometria. Pappo nacque intorno al 290 d.C. ad Alessandria, durante il regno di Diocleziano

(284-305 d.C.), e ivi rimase per gran parte della sua esistenza. Si conosce ben poco della sua vita ma era un geometra greco della cosiddetta seconda scuola alessandrina.

Verso il 320 Pappo compose la sua opera più importante, *Collezioni di Matematica*, considerata l'ultimo trattato matematico veramente significativo dell'antichità; la prima edizione stampata risale al 1588 ed è scritta in latino; fu curata da Federico Commandino e pubblicata più tardi da Del Monte⁴.



Figura 1.4: Collezioni di Matematica

Pappo di Alessandria è l'ultima figura significativa della matematica greca: diede una svolta al passato, ma decretò anche la fine dei grandi successi greci. Dopo di lui si continuarono a scrivere opere matematiche in greco, in forma di commenti a trattati anteriori, per un millenio circa, ma i matematici greci che vennero dopo di lui non raggiunsero mai il suo livello.

Le *Collezioni*, l'opera che lo ha reso famoso, risale al 320 d.C., ed è importante

⁴Non esiste una traduzione inglese della *Collezione* di Pappo, ma ampie esposizioni ed estratti se ne possono trovare in *History of Greek Mathematics* di Heath [13], e in *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics* di Ivor Thomas [14].

Una traduzione francese dell'opera di Pappo è *La collection mathématique* a cura di Paul Ver Eecke [15].

per varie ragioni. Fornisce innanzitutto una preziosissima documentazione storica riguardante alcuni aspetti della matematica greca che erano andati perduti e che altrimenti sarebbero rimasti sconosciuti. Per esempio alcune scoperte di Archimede sono arrivate a noi soltanto attraverso l'opera di Pappo: è dal libro V delle *Collezioni* che siamo venuti a sapere della scoperta di Archimede dei tredici poliedri semiregolari, noti come "solidi archimedei".

Le *Collezioni* contengono inoltre dimostrazioni alternative a teoremi di Euclide, Archimede, Apollonio e Tolomeo, oltre a nuovi risultati mai visti prima di allora. Il trattato in questione comprendeva in origine otto libri, ma il primo e la prima parte del secondo sono andati perduti.

Dei libri rimasti è sicuramente il settimo il più importante per la storia della matematica perchè in esso si enuncia il famoso teorema di Pappo che si può definire il teorema che anticipò la geometria proiettiva, e che sarà Girard Desargues (1561-1661) a riprendere, dando vita alla vera e propria geometria proiettiva.

Ma prima di avanzare nella storia per più di un millennio, vediamo di capire i limiti della matematica greca, e i motivi anche storici che decretarono la fine di essa. Anzitutto la prima incrinatura della matematica greca fu l'incapacità di cogliere a fondo il concetto di numero irrazionale, che comportava una restrizione dell'aritmetica e dell'algebra, e di conseguenza la preferenza della geometria; tale restrizione alla geometria comportò però uno svantaggio: man mano che la matematica si estendeva, l'uso dei metodi geometrici condusse a dimostrazioni sempre più complicate, soprattutto nel campo della geometria solida. Di certo Archimede, Erone e Tolomeo cominciarono a lavorare con gli irrazionali come numeri, ma non in modo sufficientemente ampio da modificare il pensiero greco. L'incapacità di definire, accettare e concettualizzare l'irrazionale come numero portò alla distinzione tra numero e grandezza e di conseguenza l'algebra e la geometria vennero considerate discipline totalmente prive di legami tra loro. È bene però approfondire quanto detto sul numero irrazionale andando indietro nella storia di qualche secolo, fino ai Pitagorici (585 a.C.). Per i Pitagorici numero significava soltanto

numero intero; un rapporto di due numeri interi non era una frazione e dunque non un altro tipo di numero come in epoca moderna. Le vere frazioni, che esprimono parti di un'unità monetaria e di misura, venivano usate nel commercio, ma tali usi non rientravano del dominio della matematica greca vera e propria. Sicchè i Pitagorici furono infastiditi e allarmati alla scoperta che alcuni rapporti, come per esempio il rapporto della diagonale con il lato di un quadrato, non potessero essere espressi da numeri interi. I rapporti di numeri interi erano detti *commensurabili*, mentre quelli che non potevano essere espressi in tal modo venivano detti *incommensurabili*. Perciò quello che noi indichiamo con $\sqrt{2}/2$ era un rapporto incommensurabile. Inoltre il rapporto di grandezze incommensurabili era detto inesprimibile. La dimostrazione del fatto che $\sqrt{2}$ è incommensurabile venne data dai Pitagorici stessi, ed è la stessa che ancora oggi viene utilizzata per dimostrare che $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale, ma allora i Pitagorici non accettarono tali numeri. Questo pose un problema centrale nella matematica greca. Il numero era identificato con la geometria, ma la scoperta dei rapporti incommensurabili mandò in frantumi questa identificazione. Dopo di loro neanche i Babilonesi e gli Egiziani riconobbero il carattere distintivo dei numeri irrazionali, così anche i matematici greci del III secolo d.C..

Torniamo ora ai limiti della matematica greca. I greci, oltre che restringere la matematica alla geometria, ridussero quest'ultima alle figure che potevano essere ottenute a partire dalla retta e dal cerchio. La classificazione che fece Pappo nel libro III e IV delle sue *Collezioni*, condivisa da altri autori che lo precedettero, fu quella di distinguere le curve in curve piane, coniche e curve lineari. Le curve piane erano costruite attraverso l'uso di rette e cerchi, mentre le coniche, traevano origine dalle sezioni del cono. Infine le curve lineari avevano un'origine più complicata o meno naturale delle altre, come la quadratrice, la concoide, la cissoide e la spirale. Analogamente egli fece un'altra distinzione tra i problemi "piani", "solidi" e "lineari": i primi risolvibili mediante le curve piane, i secondi mediante una o più sezioni coniche e gli ultimi attraverso le curve lineari. Quindi, per fare un esempio, secondo

Pappo non si dovevano utilizzare luoghi geometrici lineari per risolvere un problema solido.

L'inadeguatezza greca di accettare il numero irrazionale lasciò aperta l'estensione dell'algebra, continuando da dove l'aveva lasciata Diofanto. Ma se da un lato i greci lasciarono ai posteri il compito di estendere l'aritmetica empirica ed euristica all'algebra, dall'altra c'era l'opportunità di ampliare la geometria rigorosa e deduttiva.

Tuttavia dal punto di vista della storia della matematica, l'avvento del cristianesimo rese difficile l'espansione della matematica; dopo la persecuzione dei Romani, il cristianesimo si diffuse e l'Imperatore Teodosio I, che proscrisse le religioni pagane, nel 392 ordinò la distruzione dei templi greci tra cui quello di Serapide, che conteneva l'unica grande raccolta di opere greche, circa 300.000 manoscritti. Fu in questo periodo che Ipatia, matematica alessandrina, e figlia di Teone di Alessandria (attivo verso il 365 d.C.), si rifiutò di abbandonare la religione greca, e così i cristiani fanatici la condussero a una morte crudele nel 415 d.C.. La forte impressione che la sua morte suscitò ad Alessandria, indusse alcuni ad assumere tale anno come la fine della matematica greca; tuttavia sarebbe più appropriato farla concludere qualche secolo più tardi.

Dopo il 529, quando vennero chiuse tutte le scuole filosofiche greche per mano dell'imperatore Giustiniano, ci fu la conquista dell'Egitto per mano dei musulmani, 640 d.C., che distrussero i libri rimasti perchè in disaccordo con il Corano, e così per mesi i bagni di Alessandria vennero riscaldati bruciando rotoli di pergamena.

I matematici greci furono spazzati via, ma i frutti delle loro opere raggiunsero l'Europa, anche se per la loro maturazione si dovette aspettare quasi un millennio.

1.4 Il XVII secolo: origine della geometria proiettiva

Il XVII secolo fu un secolo molto intenso per il crescere del pensiero matematico, in particolare in Francia, che divenne il centro dell'attività matematica. Tra le figure più importanti ricordiamo René Descartes (Cartesio, 1596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665), Gilles Persone de Roberval (1602-1675), Girard Desargues (1591-1661) e Blaise Pascal (1623-1662).

Descartes e Fermat diedero un enorme contributo alla geometria analitica e al calcolo infinitesimale. Ma soprattutto, le *Coniques* di Apollonio, furono oggetto di grande interesse. Dopo la traduzione latina dei libri I-IV di Federico Commandino apparsa nel 1566, altri studiosi tradussero i libri V-VII, e intrapresero il lavoro di ricostruzione dell'ottavo volume. Un gran numero di opere del tempo riguardava lo studio delle coniche, in quanto ampliava la possibilità per la scienza, di risolvere nuovi problemi in risposta alle necessità pratiche del tempo. Ad esempio nel 1609, nell'opera di Keplero, *Astronomia nova*, le sezioni coniche vennero analizzate per la loro importanza nell'astronomia; anche l'ottica, che suscitò l'interesse dei greci, venne ripresa dopo l'invenzione del cannocchiale, avvenuta all'inizio del Seicento. In seguito alle esplorazioni geografiche si sentì il bisogno di creare nuove carte, e poichè era necessaria una rappresentazione sulla sfera terrestre, si sviluppò lo studio delle curve che tuttavia era anche utile per lo studio del moto della Terra e delle traiettorie degli oggetti mobili, come ad esempio i proiettili. Vennero pertanto riprese le opere greche, vennero studiate nuovamente le "curve lineari", la conoide di Nicomede, la quadratrice di Ippia, la cissoide di Diocle e la spirale di Archimede.

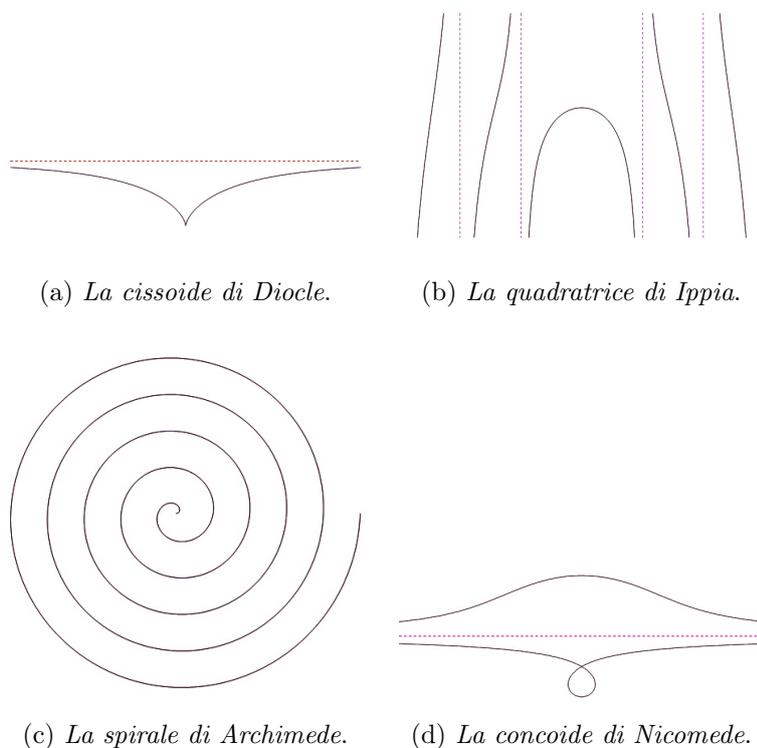


Figura 1.5: Le curve lineari.

Alla fine del Cinquecento i matematici cominciarono a rendersi conto che le dimostrazioni greche mancavano della generalità necessaria ai loro problemi. Ciononostante, tutti questi accorgimenti non portarono alla formulazione di nuovi teoremi, o nuovi metodi di dimostrazione, ma soltanto al diffondersi delle opere greche, che erano state dimenticate per oltre un millennio.

Il problema della prospettiva e le ricerche geometriche incidentali degli artisti rinascimentali, trovarono risposta soltanto nel Seicento, attraverso lo studio rigoroso delle proiezioni e delle sezioni. Le soluzioni dei geometri del XVII secolo a tali problemi si pensavano all'interno della geometria euclidea, e tuttavia diedero origine a una nuova geometria, che soltanto nel XIX secolo venne chiamata *proiettiva*.

Il primo studioso che introdusse nuovi metodi per dimostrare i teoremi sulle coniche, sempre però a partire dall'opera di Apollonio, fu Girard Desargues

(1561-1661). Desargues era un architetto e ingegnere militare più interessato alle attività pratiche pur essendo tuttavia dotato di una grande immaginazione teorica.



Figura 1.6: Girard Desargues

L'opera *Brouillon projet d'une atteinte aux événemens des rencontres d'un icone avec un plane* (Prima stesura del tentativo di studiare gli effetti dell'incontro di un cono con un piano), venne stampata da Desargues nel 1639, in soltanto circa 50 copie, e distribuita agli amici, cosicché in poco tempo, andò perduta. Per quasi due secoli i principi fondanti della geometria proiettiva rimasero nascosti; fu una copia del manoscritto fatta da Philippe de La Hire, trovata per caso nel 1845 da Michel Chasles e poi riprodotta da Poudra nel 1864, che permise la diffusione delle opere di Desargues [16]. Una copia dell'edizione originale del 1639 venne in seguito scoperta intorno al 1950 da Pierre Moisy nella Bibliothèque Nationale di Parigi ed è stata ristampata; quest'ultima copia, trovata recentemente, contiene un'appendice e un'errata-corrige di mano dell'autore [17].

Nell'opera di Desargues le coniche vengono trattate in modo elegante ma con parole desuete: egli scriveva i suoi trattati con un linguaggio per meccanici, e non per gli scienziati di professione, tant'è che i suoi contemporanei non accettarono i metodi da lui proposti per trattare la sua nuova geometria. Tali contrasti furono anche dovuti al fatto che Desargues studiava le coniche senza ricorrere all'algebra, materia che si era notevolmente sviluppata e che

incontrava il favore di molti matematici.

Tuttavia il famoso teorema che porta il suo nome e che viene considerato uno dei fondamenti della geometria proiettiva nel XIX secolo, fu pubblicato per la prima volta nel 1648 da un amico di Desargues, Abraham Bosse (1611-1678), nell'appendice di un suo libro.

L'allievo più importante di Desargues è senz'altro Blaise Pascal (1623-1662), figlio di Etienne Pascal. Blaise dimostrò, come il padre, una particolare inclinazione alla matematica, e i suoi contributi sia alla geometria proiettiva sia alla matematica in generale, si possono definire assolutamente fondamentali.



Figura 1.7: Blaise Pascal

Etienne avrebbe preferito tenere lontano il figlio dalla matematica, almeno fino a quando egli non avesse raggiunto un'età tale da poterne comprendere la sua grandezza fino in fondo; ma non appena Blaise iniziò ad interessarsi di geometria immediatamente iniziò la sua attività di ricerca in matematica, e questo all'età di soli dodici anni. Blaise, insieme al padre, partecipava alle sedute settimanali dell'Accadémie Mersenne, che divenne nel 1666 Accadémie des Sciences, e che contava tra i propri membri anche Desargues; Pascal divenne suo allievo e dedicò gran parte dei suoi primi studi alla geometria proiettiva.

Il suo maestro lo guidò nello studio nei metodi di proiezione e sezione, così all'età di sedici anni, nel 1639, Pascal scrisse un'opera sulle coniche utilizzando i metodi propri della geometria proiettiva. Anche questo scritto andò

perduto, ma Leibniz lo vide nel 1676 e ne parlò al nipote di Pascal; così nel 1779 venne ritrovato [18]. *Essai pour les coniques* era composto da poche pagine, ma era talmente brillante che in molti, compreso Descartes, rimasero stupiti dal fatto che fosse stato scritto da un autore così giovane. Il teorema più famoso che compare nell'opera, è quello che oggi porta il suo nome e che successivamente approfondiremo.

Oltre alla geometria, Pascal fu uno degli inventori del calcolo infinitesimale, del calcolo delle probabilità, e a diciannove anni creò la prima macchina calcolatrice utile al padre nel suo lavoro di agente delle tasse.

Pascal fu grande in molti campi, tuttavia se da un lato si dedicava alle ricerche scientifiche, dall'altro, dall'età di ventiquattro anni, la teologia dominava i suoi pensieri. Cercò di conciliare la fede con la scienza, ma si rese conto che i misteri della fede non possono essere spiegati dalla ragione, ma soltanto accettati sulla base della fede, infatti condannò coloro che usavano la propria autorità nel campo della scienza e della ragione nel campo della teologia. Come dice Pascal in uno dei suoi detti più famosi: "Il cuore ha le sue ragioni che la ragione non può comprendere".

Così, per la seconda volta, la geometria proiettiva venne trascurata, e i risultati di Desargues e Pascal vennero dimenticati e ripresi soltanto nell'Ottocento, quando nuove creazioni e punti di vista permisero la rinascita delle grandi idee che stavano alla base di essa.

1.5 La rinascita della geometria proiettiva

Nella Grecia antica la geometria aveva raggiunto il suo apice, per poi subire un tracollo con la caduta dell'Impero Romano. Una parte delle conoscenze furono recuperate dagli arabi e nell'Europa del Rinascimento. Nel XVII secolo la geometria sembrava essere sul punto di una svolta, ma i matematici dell'epoca preferirono l'analisi, e così venne messa ancora in ombra per oltre due secoli. Grazie a Monge e Carnot, vi furono riviviscenze di geometria pura nel periodo della Rivoluzione Francese, ma la rinascita esplosiva della

geometria come parte vitale della matematica avvenne all'inizio del XIX secolo.

Il fondatore effettivo della geometria proiettiva fu Jean-Victor Poncelet (1788-1867), che nacque a Metz da una famiglia povera; grazie a una borsa di studio riuscì a studiare e ad accedere all'École Polytechnique, una delle più celebri scuole militari e università di ingegneria francesi, fondata nel 1794 da Jacques-Elie Lamblardie, Gaspard Monge e Lazare Carnot.



Figura 1.8: Jean-Victor Poncelet

Prese parte alla campagna di Russia di Napoleone nel 1812, ma creduto morto e abbandonato alla battaglia di Krasnoy, fu fatto prigioniero e passò due anni in prigione a Mosca (1812-1814); durante questo periodo scrisse un trattato di geometria analitica, *Applications d'analyse et de géométrie*, basato sui principi che aveva appreso all'École Polytechnique. Quest'opera però venne pubblicata in due volumi soltanto nel 1862 e nel 1864.

Quando tornò a Parigi compose la sua opera più celebre: *Traité des propriétés projectives des figures* del 1822. Egli si rese conto che, come per la geometria analitica, i vantaggi della geometria proiettiva consistevano nella sua generalità, così diede ad essa una formulazione che fosse la più generale possibile. Egli ebbe per primo l'idea di studiare in modo sistematico le proprietà proiettive delle figure, cioè le proprietà che si conservano eseguendo proiezioni e sezioni. Formulò così il “principio di continuità” o “principio di

permanenza delle relazioni matematiche”, che consente di stabilire proprietà di una figura deducendole da quelle di un’altra figura (più particolare o più semplice) quando questa si ottenga da quella attraverso una deformazione continua:

Le proprietà metriche scoperte in rapporto a una figura originaria rimangono applicabili, senza altre modificazioni che quelle del cambiamento di segno, a tutte le figure correlative che si possono considerare originate dalla prima.

In un certo senso, possiamo dire che il principio era già stato enunciato da Carnot [19], ma solo Poncelet riuscì ad estenderlo sino a includere i punti all’infinito che erano già stati suggeriti da Keplero e da Desargues. Così si poteva dire che due rette nel piano si intersecano sempre, o in un punto proprio, oppure, nel caso di due rette parallele, in un “punto all’infinito”, chiamato *punto improprio*.

Un’altra idea fondamentale delle ricerche di Poncelet è la nozione di polo e di polare rispetto a una conica; il concetto risale ad Apollonio e fu usato da Desargues nel corso delle ricerche compiute nel Seicento sulla geometria proiettiva. Poncelet, a differenza di molti suoi contemporanei, utilizzò il concetto di polarità come metodo per stabilire nuovi teoremi, come per esempio il principio di dualità, che descriveremo nel prossimo capitolo. Gli studiosi di geometria proiettiva si accorsero che con le tecniche moderne, i teoremi riguardanti le figure piane restavano ugualmente validi se veniva sostituita alla parola “retta” la parola “punto”, e alla parola “punto” la parola “retta”. Poncelet pensava che il motivo di questo risultato stesse nella relazione tra polo e polare. Anche Gergonne, intorno al 1825-26, fece degli studi sul principio di dualità e scrisse il teorema di Desargues con il suo duale [20], tuttavia la sua formulazione di tale principio risultava piuttosto vaga e in parte imprecisa. La diatriba su chi per primo scoprì il principio di dualità fu motivo di scontro tra Poncelet e Gergonne. Nonostante il fatto che il principio generale di dualità non fu dimostrato in quel periodo, Poncelet fu il primo a introdurre il termine “dualità” per denotare la relazione che intercorre tra

un teorema e l'enunciato da esso ottenuto per "dualità", cioè sostituendo la parola "punto" con "retta" e viceversa. Osservò inoltre che nello spazio il punto e il piano sono duali, mentre la retta è duale di se stessa.

In realtà il *Traité* non incontrò tra i contemporanei il successo che Poncelet sperava, sicchè egli nel suo tempo, fu maggiormente considerato come studioso di meccanica applicata, disciplina alla quale portò in effetti importanti contributi: migliorò i progetti di turbine e ruote idrauliche, studiò il lavoro e l'energia cinetica e alcuni gli attribuiscono la definizione del lavoro come prodotto di forza e traslazione.

Poncelet lascia Metz nel 1835 e diventa professore di meccanica alla Sorbona nel 1838. Dal 1848 è a capo della *École Polytechnique* con il grado di generale, fino al 1850, quando si ritira per dedicarsi completamente alla ricerca matematica. Muore a Parigi nel 1867.

Capitolo 2

Lo Spazio Proiettivo

In questo capitolo introduciamo i concetti di spazio e sottospazio proiettivo, e la dualità; sono premesse che ci serviranno nel capitolo successivo per capire e dimostrare i teoremi di Pappo e Desargues.

2.1 Lo spazio proiettivo e i sistemi di coordinate

Gli spazi proiettivi furono inizialmente introdotti come “ampliamenti” di spazi affini, ottenuti aggiungendo ad essi certi “punti impropri”; ciò causò il passaggio dalla geometria analitica a quella proiettiva. Sostituendo infatti le coordinate cartesiane con le coordinate omogenee, lo spazio si arricchisce di alcuni “punti all’infinito”, che la geometria proiettiva considera punti a tutti gli effetti, come i punti “finiti”. Iniziamo dunque col definire lo spazio proiettivo a partire da uno spazio vettoriale come l’insieme delle rette, cioè dei sottospazi di dimensione uno.

Definizione 2.1. Sia \mathbf{V} uno spazio vettoriale di dimensione $n + 1$ su un campo \mathbb{K} . Lo *spazio proiettivo* $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ ad n dimensioni associato a \mathbf{V} è lo spazio quoziente

$$\mathbb{P}(\mathbf{V}) := (\mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\})/\sim$$

dove $\mathbf{0}$ è l'identità rispetto alla struttura di gruppo di \mathbf{V} e la relazione di equivalenza \sim è così definita:

$\mathbf{v} \sim \mathbf{w}$ in \mathbf{V} se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{K}^*$, dove $\mathbb{K}^* := \mathbb{K} \setminus \{0\}$, tale che $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{w}$, e cioè se \mathbf{v} e \mathbf{w} appartengono allo stesso sottospazio uno-dimensionale di \mathbf{V} .

In altre parole, le classi di equivalenza di questa relazione sono le rette per l'origine.

Indicheremo con $[\mathbf{v}]$ il punto di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ costituito dalla classe di equivalenza del vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

La *dimensione di* $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ è definita come $\dim(\mathbf{V}) - 1$ e si denota con $\dim(\mathbb{P}(\mathbf{V}))$. Se $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ ha dimensione 1 (rispettivamente dimensione 2), $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ è detta *retta proiettiva* (rispettivamente *piano proiettivo*).

Se la dimensione dello spazio vettoriale \mathbf{V} è uguale a 1, allora $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ possiede un solo punto corrispondente a \mathbf{V} stesso, e $\dim(\mathbb{P}(\mathbf{V})) = 0$. Dunque uno spazio proiettivo di dimensione 0 consiste di un solo punto.

Se $\dim(\mathbf{V}) = 0$, cioè $\mathbf{V} = \{\mathbf{0}\}$, si ha $\mathbb{P}(\mathbf{V}) = \emptyset$, perchè \mathbf{V} non possiede sottospazi di dimensione 1. Quindi per definizione, \emptyset è uno spazio proiettivo di dimensione 1.

Se $\mathbf{V} = \mathbb{K}^{n+1}$, lo spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$ si denota con $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, o semplicemente \mathbb{P}^n , e si dice l'*n-spazio proiettivo* di dimensione n , sul corpo \mathbb{K} .

Per ogni $(x_0, x_1, \dots, x_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ denoteremo con $[x_0, x_1, \dots, x_n]$ il punto corrispondente di \mathbb{P}^n , cioè la classe di equivalenza del vettore (x_0, x_1, \dots, x_n) .

Si ha che

$$[x_0, x_1, \dots, x_n] = [y_0, y_1, \dots, y_n]$$

se e solo se esiste $\lambda \neq 0$ in \mathbb{K} tale che $y_i = \lambda x_i$, $i=0, \dots, n$.

Definizione 2.2. Sia $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ uno spazio proiettivo e sia $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ una base ordinata di \mathbf{V} . Diremo che $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ definisce in $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ un *sistema di coordinate omogenee* o un *riferimento proiettivo*. Tale sistema verrà denotato con $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. Sia

$$\mathbf{v} = x_0 \mathbf{e}_0 + x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$$

gli scalari x_0, x_1, \dots, x_n si dicono *coordinate omogenee* del punto $P = [\mathbf{v}] \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$ rispetto al riferimento $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$.

Scriveremo $P[x_0, x_1, \dots, x_n]$ per denotare il punto $P \in \mathbb{P}$ di coordinate omogenee x_0, x_1, \dots, x_n .

I punti

$$F_0[1, 0, \dots, 0] = [\mathbf{e}_0], \quad \dots, \quad F_n[0, 0, \dots, 1] = [\mathbf{e}_n],$$

$$U[1, \dots, 1] = [\mathbf{e}_0 + \dots + \mathbf{e}_n]$$

si diranno rispettivamente *punti fondamentali* e *punto unità* del riferimento $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$.

Le coordinate omogenee di $[\mathbf{v}]$ sono definite a meno di un fattore di proporzionalità non nullo appartenente a \mathbb{K} , poichè $[\mathbf{v}] = [\lambda\mathbf{v}]$ e

$$\lambda\mathbf{v} = \lambda x_0\mathbf{e}_0 + \lambda x_1\mathbf{e}_1 + \dots + \lambda x_n\mathbf{e}_n$$

per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\lambda \neq 0$.

Fissare dunque un sistema di coordinate omogenee su $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ equivale pertanto a scegliere una base di \mathbf{V} , osservando che si considerano identici due sistemi di coordinate omogenee se sono definiti da basi proporzionali di \mathbf{V} proporzionali; in simboli

$$(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = ((\mu\mathbf{e}_0), (\mu\mathbf{e}_1), \dots, (\mu\mathbf{e}_n))$$

Se $\mathbf{V} = \mathbb{K}^{n+1}$ e la base ordinata $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ è quella canonica, il sistema di riferimento ad essa associato $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ si dirà *sistema di riferimento proiettivo canonico*.

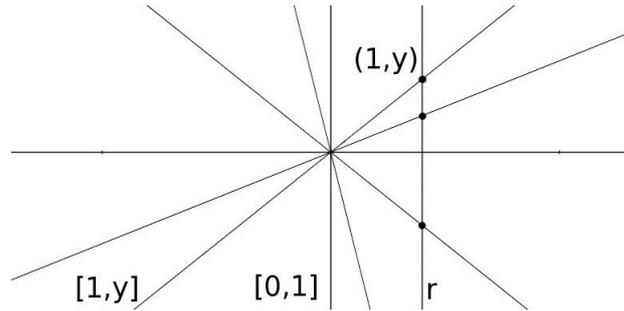
2.1.1 Il piano proiettivo

Vediamo ora, nello specifico, come si costruisce il piano proiettivo $\mathbb{P}(\mathbb{K}^2) = \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$, visto come l'insieme delle rette di \mathbb{K}^2 passanti per l'origine.

Abbiamo visto che $\mathbb{P}^1 := \mathbb{K}^2 \setminus \{0\} / \sim$ cioè

$$\mathbb{P}^1 = \{[x_0, x_1]\}$$

dove il punto $(\lambda_0 x_0, \lambda_1 x_1)$ descrive, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, la corrispondente retta per l'origine in \mathbb{K}^2 .



Definiamo l'aperto

$$U_0 = \{[x_0, x_1] | x_0 \neq 0\} = \left\{ \left[1, \frac{x_1}{x_0} \right] \mid x_0 \neq 0 \right\} = \{[1, y] \mid y \in \mathbb{K}\}$$

e osserviamo che ad U_0 appartengono tutte le rette tranne quella che corrisponde al punto $H_0 = [0, 1] \in \mathbb{P}^1$, cioè alla retta di equazione $x = 0$.

Consideriamo ora la sua retta r parallela a $x = 0$ di equazione $x = 1$, e notiamo che per ogni $[x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1 \setminus \{H_0\}$, la corrispondente retta di \mathbb{K}^2 non è parallela a r e la interseca nell'unico punto $\left(1, \frac{x_1}{x_0}\right)$. D'altra parte ogni $(1, y) \in r$ appartiene a un'unica retta per l'origine, cioè quello che corrisponde al punto $[1, y] \in \mathbb{P}^1 \setminus \{H_0\}$. Si ha quindi una corrispondenza biunivoca tra r e $\mathbb{P}^1 \setminus \{H_0\}$ ovvero tra $r \cup \{H_0\}$ e \mathbb{P}^1 .

Dunque possiamo pensare H_0 come il “punto all'infinito” o “punto improprio” che viene aggiunto a r per ottenere $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$. Questa costruzione geometrica, risalente a Desargues, si può ripetere utilizzando, invece del punto H_0 e della retta r , un qualsiasi punto $H \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ e una retta di \mathbb{K}^2 non passante per l'origine e avente direzione H .

Esempio 2.1 ($\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$). Un modello geometrico di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ può essere ottenuto per mezzo di un'applicazione chiamata “proiezione stereografica”.

Consideriamo in \mathbb{C}^3 , con coordinate x, y, z , il piano \mathcal{P} di equazione $z = 0$ e la sfera \mathbf{S}^2 di centro l'origine e raggio unitario, e denotiamo con N il punto $(0, 0, 1) \in \mathbf{S}^2$ chiamato anche "Polo Nord".

Per ogni $P' = (x', y', z') \in \mathbf{S}^2 \setminus \{N\}$ denotiamo con $f(P')$ il punto di \mathcal{P} allineato con N e con P' .

Così, per ogni $P' \in \mathbf{S}^2 \setminus \{N\}$, la *proiezione stereografica* f del polo Nord sul piano equatoriale \mathcal{P} , è l'applicazione

$$f : \mathbf{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathcal{P}$$

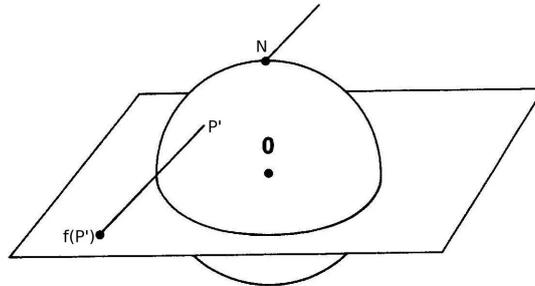


Figura 2.1: Proiezione stereografica del polo Nord

La retta passante per $N = (0, 0, 1)$ e $P' = (x', y', z')$, $\overline{NP'}$, ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = tx' \\ y = ty' \\ z = (z' - 1)t + 1 \end{cases}$$

pertanto

$$f(x', y', z') = \mathcal{P} \cap \overline{NP'} = \left(\frac{x'}{1 - z'}, \frac{y'}{1 - z'}, 0 \right).$$

f è un'applicazione continua biunivoca con inversa:

$$f^{-1}(u, v, 0) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right).$$

L'applicazione f consente di vedere la sfera \mathbf{S}^2 come il piano \mathcal{P} cui è stato aggiunto il punto N , che si può interpretare come "punto all'infinito" di \mathcal{P} . Se ora identifichiamo \mathcal{P} con il piano complesso, facendo corrispondere al punto $(u, v, 0)$ il numero complesso $z = u + iv$, otteniamo un'applicazione biunivoca

$$f : \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

in cui $f(N) = \infty$ e

$$f(x', y', z') = \frac{x'}{1 - z'} + i \frac{y'}{1 - z'} = \frac{x' + iy'}{1 - z'}$$

se $z' \neq 1$.

La sfera fornisce dunque un modello geometrico di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, chiamato *sfera di Riemann*, o *retta proiettiva complessa*, o *piano complesso esteso*.

Esempio 2.2 ($\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$). Una descrizione geometrica degli spazi $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ può essere data nel seguente modo. Identifichiamo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ come l'insieme delle rette passanti per l'origine di \mathbb{R}^{n+1} , e consideriamo la sfera $\mathbf{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, di centro l'origine e raggio 1. Definiamo un'applicazione

$$k : \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$$

ponendo

$$k(\mathbf{x}) = \text{retta per l'origine che contiene } \mathbf{x}.$$

Ogni retta passante per l'origine, incontra \mathbf{S}^n in due punti simmetrici rispetto ad essa, cioè *antipodali*, $\{\mathbf{x}, -\mathbf{x}\}$. L'applicazione k è dunque suriettiva e tale che $k^{-1}(r)$ consiste di due punti per ogni $r \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Dunque k fa corrispondere biunivocamente $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ all'insieme i cui elementi sono le coppie di punti antipodali $\{\mathbf{x}, -\mathbf{x}\}$ di \mathbf{S}^n ; in altri termini possiamo rappresentare \mathbb{P}^n come lo spazio quoziente:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \cong \mathbf{S}^n / \sim_*$$

dove $x \sim_* y \Leftrightarrow x = \pm y$.

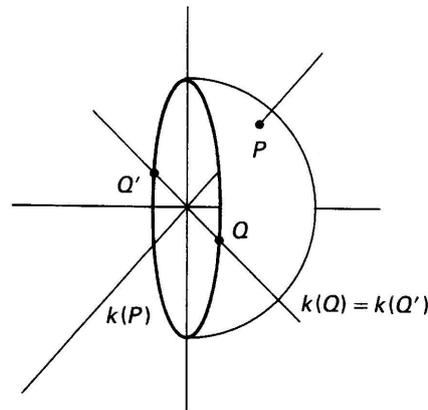


Figura 2.2: Le coppie di punti antipodali di S^n

2.2 Sottospazi proiettivi

I sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale \mathbf{V} ci permettono di definire in modo naturale i sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$.

Definizione 2.3. Definiamo *sottospazio proiettivo* di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbf{W})$ con \mathbf{W} sottospazio vettoriale di \mathbf{V} .

Poichè la dimensione di un sottospazio $\mathbb{P}(\mathbf{W})$ è data da

$$\dim \mathbb{P}(\mathbf{W}) := \dim \mathbf{W} - 1$$

si ottiene

$$\dim(\mathbb{P}(\mathbf{V})) - \dim(\mathbb{P}(\mathbf{W})) = \dim(\mathbf{V}) - \dim(\mathbf{W});$$

il numero $\dim(\mathbb{P}(\mathbf{V})) - \dim(\mathbb{P}(\mathbf{W}))$ è detto *codimensione* di $\mathbb{P}(\mathbf{W})$ in $\mathbb{P}(\mathbf{V})$.

I sottospazi di codimensione uno, cioè di dimensione $n - 1$, si dicono *iperpiani*.

Se $\mathbf{W} = \mathbf{V}$, si ha che $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ è l'unico sottospazio di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ di dimensione $\dim \mathbf{V} - 1$; e, se $\mathbf{W} = \{\mathbf{0}\}$, si ha che l'insieme vuoto è l'unico sottospazio di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ di dimensione minore di zero.

Supponiamo assegnato nello spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ un sistema di coordinate

omogenee $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, e sia

$$a_0X_0 + \dots + a_nX_n = 0 \quad (2.1)$$

un'equazione lineare omogenea nelle indeterminate X_0, \dots, X_n , $a_j \in \mathbb{K}$, $j = 0, 1, \dots, n$ tale che $(a_0, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$. Questa equazione definisce, rispetto alla base $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, un sottospazio vettoriale $\mathbf{H} \subset \mathbf{V}$ di codimensione uno. I punti $P = [\mathbf{v}] \in \mathbb{P}$ le cui coordinate omogenee soddisfano la (2.8) sono quelli tali che $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, e quindi la (2.8) è soddisfatta da tutti e soli i punti dello spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbf{H})$ di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$.

La (2.8) è detta *equazione cartesiana dell'iperpiano* $\mathbb{P}(\mathbf{H})$. Se $0 \leq i \leq n$, l'iperpiano di \mathbb{P} di equazione cartesiana $X_i = 0$ è detto *i-esimo iperpiano coordinato* e consiste di tutti i punti la cui *i-esima* coordinata omogenea è uguale a 0; si ha quindi

$$H_i = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}(\mathbf{V}) : x_i = 0\}.$$

Nel caso generale se consideriamo un sistema di t equazioni lineari omogenee

$$\begin{cases} a_{10}X_0 + \dots + a_{1n}X_n = 0 \\ \vdots \\ a_{t0}X_0 + \dots + a_{tn}X_n = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

L'insieme dei punti $P \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$ le cui coordinate omogenee sono soluzioni di tutte le equazioni del sistema (2.2), escludendo la soluzione nulla $x_0 = x_1 = \dots = x_n = 0$, è $\mathbb{P}(\mathbf{W})$, con \mathbf{W} sottospazio vettoriale di \mathbf{V} di cui le (2.2) sono equazioni cartesiane nella base $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. Le (2.2) si dicono pertanto *equazioni cartesiane del sottospazio proiettivo* $\mathbb{P}(\mathbf{W})$ nel riferimento $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$.

Sia $A = (a_{ij})$ la matrice dei coefficienti di (2.2), ed $r = \text{rg}(A)$, si ha

$$\dim(\mathbb{P}(\mathbf{W})) = \dim(\mathbf{W}) - 1 = \dim(\mathbf{V}) - r - 1 = \dim(\mathbb{P}(\mathbf{V})) - r = n - r$$

ovvero $\mathbb{P}(\mathbf{W})$ ha codimensione r in $\mathbb{P}(\mathbf{V})$.

È ben chiaro che ogni sottospazio proiettivo si ottiene in questo modo.

Intersezione di sottospazi

Siano $\mathbb{P}(\mathbf{W}_1)$ e $\mathbb{P}(\mathbf{W}_2)$ due sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, aventi come equazioni cartesiane, nel riferimento $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, rispettivamente i sistemi

$$A_1 \mathbf{X} = \mathbf{0}, \quad (2.3)$$

$$A_2 \mathbf{X} = \mathbf{0}, \quad (2.4)$$

dove A_1, A_2 sono matrici rispettivamente $t \times (n+1)$ ed $s \times (n+1)$, a elementi in \mathbb{K} e $\mathbf{X} = {}^t(X_0 \dots X_n)$.

L'intersezione $\mathbb{P}(\mathbf{W}_1) \cap \mathbb{P}(\mathbf{W}_2)$ è ancora un sottospazio proiettivo, e precisamente

$$\mathbb{P}(\mathbf{W}_1) \cap \mathbb{P}(\mathbf{W}_2) = \mathbb{P}(\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2).$$

In particolare si ha che $\mathbb{P}(\mathbf{W}_1) \cap \mathbb{P}(\mathbf{W}_2) = \emptyset$ se e solo se $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \langle \mathbf{0} \rangle$, il sottospazio vettoriale nullo di \mathbf{V} , cioè se e solo se il sistema delle (2.3) e (2.4) non possiede soluzioni non banali.

Se $\mathbb{P}(\mathbf{W}_1) \cap \mathbb{P}(\mathbf{W}_2) = \emptyset$ (rispettivamente $\mathbb{P}(\mathbf{W}_1) \cap \mathbb{P}(\mathbf{W}_2) \neq \emptyset$) allora $\mathbb{P}(\mathbf{W}_1)$ e $\mathbb{P}(\mathbf{W}_2)$ si dicono *sghembi* (rispettivamente *incidenti*). In particolare un punto P e un sottospazio $\mathbb{P}(\mathbf{W})$ sono incidenti se $P \in \mathbb{P}(\mathbf{W})$.

In generale quindi diciamo che, considerata una famiglia qualunque di sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, $\{\mathbb{P}(\mathbf{W}_i)\}_{i \in I}$, con \mathbf{W}_i associato alla soluzione del sistema lineare omogeneo $A_i \mathbf{X} = \mathbf{0}$, l'intersezione è ancora un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$.

Infatti tale intersezione corrisponde al sistema

$$\begin{cases} A_1 \mathbf{X} = \mathbf{0} \\ A_2 \mathbf{X} = \mathbf{0} \\ \vdots \\ A_i \mathbf{X} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Ed inoltre si ha subito che:

$$\bigcap_{i \in I} \mathbb{P}(\mathbf{W}_i) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{i \in I} \mathbf{W}_i \right).$$

dove $\cap_{i \in I} \mathbb{P}(\mathbf{W}_i)$ ha per elementi i sottospazi vettoriali di dimensione uno di \mathbf{V} che sono contenuti in ognuno dei \mathbf{W}_i .

Definizione 2.4. Se J è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, l'intersezione di tutti i sottospazi proiettivi che lo contengono, denotata con $L(J)$, si dice *sottospazio generato da J* : $L(J)$ è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e per definizione è il più piccolo sottospazio che contiene J . Da questo segue che $L(S) = S$ se e solo se S è un sottospazio proiettivo.

Se $J = \{P_1, \dots, P_t\}$, diremo che P_1, \dots, P_t *generano* $L(P_1, \dots, P_t)$.

Se $P_1 = [\mathbf{v}_1], P_2 = [\mathbf{v}_2], \dots, P_t = [\mathbf{v}_t]$, allora

$$L(P_1, \dots, P_t) = \mathbb{P}(\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t \rangle),$$

e la dimensione del sottospazio vettoriale $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t \rangle$ è inferiore o uguale a t . Per questo segue che

$$\dim(L(P_1, \dots, P_t)) \leq t - 1.$$

Definizione 2.5. Se $\dim(L(P_1, \dots, P_t)) = t - 1$, i punti P_1, \dots, P_t si dicono *linearmente indipendenti*; altrimenti si dicono *linearmente dipendenti*.

Questa definizione dipende dal fatto che i punti sono linearmente indipendenti se e solo se lo sono i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t$.

Due punti sono linearmente indipendenti se e solo se sono distinti, ed in questo caso generano una retta proiettiva che è l'unica che li contiene.

Tre punti sono linearmente indipendenti se e solo se non sono allineati, e in tal caso generano un piano proiettivo, che è l'unico piano che li contiene.

Poichè ogni sottospazio vettoriale di \mathbf{V} possiede una base con $\dim(\mathbf{V})$ elementi, allora *ogni sottospazio proiettivo S di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ può essere generato da un numero finito, pari a $\dim(S) + 1$, di suoi punti linearmente indipendenti*.

Vediamo ora di trovare le equazioni parametriche di un sottospazio proiettivo S . Supponiamo che $\dim(S) = k$, e che $[\mathbf{v}_0], [\mathbf{v}_1], \dots, [\mathbf{v}_k] \in S$ siano linearmente indipendenti. Per ogni $P \in S$, poiché $[\mathbf{v}_0], [\mathbf{v}_1], \dots, [\mathbf{v}_k]$ generano S , si ha

$$P = [\lambda_0 \mathbf{v}_0 + \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k]$$

per opportuni $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ non tutti uguali a zero, e definiti univocamente da $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ e da P a meno di un comune fattore di proporzionalità. Se rispetto alla base ordinata $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ di \mathbf{V} , le coordinate dei precedenti vettori sono

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_0 &= (p_{00}, p_{01}, \dots, p_{0n}), \\ \mathbf{v}_1 &= (p_{10}, p_{11}, \dots, p_{1n}), \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_k &= (p_{k0}, p_{k1}, \dots, p_{kn}),\end{aligned}$$

e $P = [x_0, x_1, \dots, x_n]$, allora si ha

$$\begin{aligned}x_0 &= \lambda_0 p_{00} + \lambda_1 p_{10} + \dots + \lambda_k p_{k0} \\ x_1 &= \lambda_0 p_{01} + \lambda_1 p_{11} + \dots + \lambda_k p_{k1} \\ &\vdots = \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ x_n &= \lambda_0 p_{0n} + \lambda_1 p_{1n} + \dots + \lambda_k p_{kn}.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Le (2.5) si dicono *equazioni parametriche del sottospazio S* di dimensione k , e dipendono dalla scelta dei punti $[\mathbf{v}_0], [\mathbf{v}_1], \dots, [\mathbf{v}_k]$ che generano S , dai vettori $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ e dalla scelta delle coordinate omogenee di $[\mathbf{v}_0], [\mathbf{v}_1], \dots, [\mathbf{v}_k]$, cioè x_0, x_1, \dots, x_n .

Esempio 2.3. Consideriamo ora lo spazio $\mathbb{P}(\mathbb{K}^3) = \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ che ha dimensione 2. Vogliamo ora scrivere l'equazione di una retta r in tale spazio, che unisce due punti distinti $P = [p_0, p_1, p_2]$ e $Q = [q_0, q_1, q_2]$. L'*equazione cartesiana* della retta r è

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{vmatrix} = 0$$

Infatti questa equazione è lineare ed omogenea ed è ovviamente soddisfatta dalle coordinate dei punti P e Q , dunque r contiene P e Q .

Siano ora $[\mathbf{v}_0], [\mathbf{v}_1]$ due punti appartenenti ad r linearmente indipendenti.

Se rispetto alla base canonica $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ di \mathbb{K}^3 le coordinate dei precedenti vettori sono rispettivamente (p_{00}, p_{01}, p_{02}) , (p_{10}, p_{11}, p_{12}) allora ogni punto $P = P[x_0, x_1, x_2] \in r$ si scrive:

$$x_0 = \lambda_0 p_{00} + \lambda_1 p_{10}$$

$$x_1 = \lambda_0 p_{01} + \lambda_1 p_{11}$$

$$x_2 = \lambda_0 p_{02} + \lambda_1 p_{12}$$

per opportuni $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{K}$ non tutti uguali a zero, e sono dette *equazioni parametriche* della retta r in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$.

Unione di sottospazi

Definizione 2.6. Se S_1 ed S_2 sono due sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, il sottospazio $L(S_1 \cup S_2)$, generato dalla loro unione è il *sottospazio somma di S_1 ed S_2* , e si denota con $L(S_1, S_2)$.

Se $S_1 = \mathbb{P}(\mathbf{W}_1)$ ed $S_2 = \mathbb{P}(\mathbf{W}_2)$, si ha

$$L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2).$$

Per ogni coppia di sottospazi proiettivi S_1 ed S_2 di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ esiste la seguente identità, chiamata *formula di Grassmann proiettiva*:

$$\dim[L(S_1, S_2)] = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2), \quad (2.6)$$

la cui dimostrazione segue immediatamente dalla formula di Grassmann per gli spazi vettoriali.

Facciamo qualche esempio: se consideriamo una retta r e un punto $P \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$, allora $L(r, P)$ è un piano se $P \notin r$, oppure è la retta r se $P \in r$.

Se r_1 ed r_2 sono due rette, $L(r_1, r_2)$ ha dimensione 3, se r_1 ed r_2 sono sghembe, ha dimensione 2 se sono incidenti e distinte, e infine ha dimensione 1 se sono coincidenti.

Si osservi infine che, poichè $\dim[L(S_1, S_2)] \leq \dim(\mathbb{P}(\mathbf{V}))$, dalla (2.6) segue

che

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{P}(\mathbf{V})) &\geq \dim[L(S_1, S_2)] = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2), \\ \dim(S_1 \cap S_2) &\geq \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(\mathbb{P}(\mathbf{V})). \end{aligned} \tag{2.7}$$

In particolare se $\dim(S_1) + \dim(S_2) \geq \dim(\mathbb{P}(\mathbf{V}))$, i sottospazi S_1 ed S_2 sono incidenti perchè ciò significa che $\dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(\mathbb{P}(\mathbf{V})) \geq 0$ e cioè, dalla (2.7), che $\dim(S_1 \cap S_2) \geq 0$, e ciò avviene se e solo se $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$. D'altra parte ho che due sottospazi sghembi in $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ hanno dimensioni la cui somma non supera $\dim(\mathbb{P}(\mathbf{V})) - 1$. Abbiamo dunque la seguente proposizione:

Proposizione 2.2.1.

1. *In un piano proiettivo due rette qualsiasi si incontrano.*
2. *In uno spazio proiettivo di dimensione 3 una retta e un piano qualsiasi si incontrano, e due piani distinti qualsiasi hanno in comune una retta.*

Perciò in un piano proiettivo non ha senso parlare di parallelismo tra rette, perchè si incontrano sempre, e analogamente in uno spazio proiettivo non ha senso parlare di parallelismo tra piani o tra rette e piani.

2.3 Dualità

Vogliamo stabilire in questo paragrafo l'importante principio di dualità per spazi proiettivi. Cominciamo con l'introdurre lo spazio proiettivo duale.

Definizione 2.7 (Spazio proiettivo duale). Sia \mathbf{V} un \mathbb{K} -spazio vettoriale di dimensione finita. Lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^\vee(\mathbf{V}) = \mathbb{P}(\mathbf{V}^\vee)$, dove $\mathbf{V}^\vee = \text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbb{K})$ è lo spazio vettoriale duale di \mathbf{V} , si dice *spazio proiettivo duale di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$* .

Dato che $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{V}^\vee$, anche $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e $\mathbb{P}^\vee(\mathbf{V})$ hanno la stessa dimensione.

Per definizione, due funzionali $F, F' : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{K}$, entrambi non nulli, definiscono lo stesso elemento di $\mathbb{P}^\vee(\mathbf{V})$, in simboli $[F] = [F']$, se e solo se $F' = \lambda F$ per qualche $\lambda \neq 0$. In tal caso si ha che i nuclei di F ed F' coincidono, cioè $\text{Ker}(F) = \text{Ker}(F')$. Si osserva allora che l'iperpiano $\text{Ker}(F)$ di \mathbf{V} dipende solo dal punto $[F] \in \mathbb{P}^\vee(\mathbf{V})$.

Possiamo pertanto definire un'applicazione δ , detta *di dualità*,

$$\delta : \mathbb{P}^\vee \rightarrow \{\text{iperpiani di } \mathbb{P}(\mathbf{V})\}$$

ponendo $\delta([F]) = \mathbb{P}(\text{Ker}(F))$. Osserviamo che δ è una funzione biunivoca: δ è iniettiva perchè due funzionali non nulli che hanno lo stesso nucleo sono proporzionali e quindi definiscono lo stesso punto di $\mathbb{P}^\vee(\mathbf{V})$; δ è suriettiva perchè ogni iperpiano di \mathbf{V} è il nucleo di un funzionale lineare. Dunque δ permette di identificare in modo intrinseco, cioè dipendente solo da $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, l'insieme degli iperpiani di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ con lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^\vee(\mathbf{V})$. In particolare δ permette di considerare l'insieme degli iperpiani di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ come uno spazio proiettivo.

Definizione 2.8. Un numero finito di iperpiani H_1, H_2, \dots, H_t di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ sono *linearmente indipendenti* (rispettivamente *linearmente dipendenti*), se i punti $\delta^{-1}(H_1), \delta^{-1}(H_2), \dots, \delta^{-1}(H_t)$ di $\mathbb{P}^\vee(\mathbf{V})$ sono linearmente indipendenti (rispettivamente linearmente dipendenti).

Sia $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ una base ordinata di \mathbf{V} , e sia $(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n)$ una base di \mathbf{V}^\vee duale di $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, definita da

$$\mu_i(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad \text{con } 0 \leq i, j \leq n.$$

Il riferimento proiettivo $(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n)$ di $\mathbb{P}^\vee(\mathbf{V})$ si dice *riferimento proiettivo duale* del riferimento $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. I due sistemi di coordinate omogenee si dicono *duali l'uno dell'altro*.

Sia $H \subset \mathbb{P}(\mathbf{V})$ un iperpiano di equazione

$$a_0X_0 + a_1X_1 + \dots + a_nX_n = 0.$$

Allora $H = \mathbb{P}(\text{Ker}(F))$, dove $F \in \mathbf{V}^\vee$ è il funzionale

$$F(x_0\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) = a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n,$$

e quindi $H = \delta([F])$. Gli scalari a_0, a_1, \dots, a_n sono coordinate omogenee di $[F]$ rispetto al riferimento proiettivo $(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n)$ di $\mathbb{P}^\vee(\mathbf{V})$ e vengono anche chiamati *coordinate omogenee dell'iperpiano H*. Denoteremo H con $H[a_0, a_1, \dots, a_n]$.

Con questa notazione gli iperpiani coordinati del riferimento $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ sono le immagini tramite δ dei punti fondamentali del riferimento duale $(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n)$. Si ha quindi

$$\begin{aligned} H_0 &= H_0[1, 0, \dots, 0] = \delta([\mu_0]), \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ H_n &= H_n[0, 0, \dots, 1] = \delta([\mu_n]). \end{aligned}$$

Definizione 2.9. Sia S un sottospazio di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ di dimensione $k \leq n - 1$. L'insieme $\Lambda_1(S)$ i cui elementi sono gli iperpiani di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ che contengono S si dice il *sistema lineare di iperpiani di centro S*. Se $k = n - 2$, $\Lambda_1(S)$ si dice un *fascio di iperpiani*.

Se $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ è un piano e $P \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$, l'insieme delle rette che passano per P è un *fascio di rette*.

Se $\dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = 3$ ed r è una retta, $\Lambda_1(r)$ è un fascio di piani. Con le notazioni precedenti, se $P \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$, allora $\Lambda_1(P)$ è chiamato *stella di piani di centro P*.

Proposizione 2.3.1. *Supponiamo che il sottospazio S di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ abbia dimensione k , ed equazioni cartesiane*

$$\begin{aligned} a_{10}X_0 + a_{11}X_1 + \dots + a_{1n}X_n &= 0 \\ a_{20}X_0 + a_{21}X_1 + \dots + a_{2n}X_n &= 0 \\ \vdots &\qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{n-k0}X_0 + a_{n-k1}X_1 + \dots + a_{n-kn}X_n &= 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

ossia

$$\begin{aligned}
 F_1(X_0, X_1, \dots, X_n) &= 0 \\
 F_2(X_0, X_1, \dots, X_n) &= 0 \\
 &\vdots \\
 F_{n-k}(X_0, X_1, \dots, X_n) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

Allora il sistema lineare $\Lambda_1(S)$ consiste degli iperpiani di equazione

$$\lambda_1 F_1(X_0, X_1, \dots, X_n) + \lambda_2 F_2(X_0, X_1, \dots, X_n) + \dots + \lambda_{n-k} F_{n-k}(X_0, X_1, \dots, X_n) = 0$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{K}$ sono scalari non tutti uguali a zero.

Denotiamo con H_1, H_2, \dots, H_{n-k} gli $n - k$ iperpiani definiti dalle equazioni del sistema (2.8). Osserviamo che ogni iperpiano H definito dalla (2.9) ha coordinate omogenee che sono combinazioni lineari di quelle di H_1, H_2, \dots, H_{n-k} . Questo significa che $\delta^{-1}(H)$ appartiene al sottospazio $L(\delta^{-1}(H_1), \delta^{-1}(H_2), \dots, \delta^{-1}(H_{n-k}))$ di $\mathbb{P}^\vee(\mathbf{V})$. Pertanto la proposizione appena vista afferma che

$$\delta^{-1}[\Lambda_1(S)] = L(\delta^{-1}(H_1), \delta^{-1}(H_2), \dots, \delta^{-1}(H_{n-k})).$$

In particolare, poichè $\delta^{-1}(H_1), \delta^{-1}(H_2), \dots, \delta^{-1}(H_{n-k})$ sono linearmente indipendenti, si deduce il seguente corollario:

Corollario 2.3.2. *Sia la notazione come sopra, allora $\delta^{-1}[\Lambda_1(S)]$ è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^\vee(\mathbf{V})$ di dimensione $n - k - 1$*

Si ottiene così una corrispondenza tra sottospazi di dimensione k di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e sottospazi di dimensione $n - k - 1$ di $\mathbb{P}^\vee(\mathbf{V})$. Inoltre questa corrispondenza è biunivoca perchè un sistema lineare è individuato dal suo centro.

Di più, se $S \subset S'$, tra i sistemi lineari corrispondenti si ha l'inclusione opposta $\Lambda_1(S') \subset \Lambda_1(S)$.

Pertanto abbiamo il seguente teorema:

Teorema 2.3.3. *Sia $\dim(\mathbb{P}(\mathbf{V})) = n$. L'applicazione*

$$\delta : \mathbb{P}^\vee(\mathbf{V}) \rightarrow \{\text{iperpiani di } \mathbb{P}(\mathbf{V})\}$$

definita precedentemente è una biezione che fa corrispondere ad ogni sottospazio proiettivo di dimensione $n - k - 1$ di $\mathbb{P}^\vee(\mathbf{V})$ un sistema lineare di iperpiani di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ di centro un sottospazio proiettivo di dimensione k .

Si ha una corrispondenza biunivoca tra sottospazi di $\mathbb{P}^\vee(\mathbf{V})$ e sottospazi di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ che rovescia le inclusioni:

$$S \subset S' \iff \Lambda_1(S) \supset \Lambda_1(S')$$

Se $\dim(S) = k$, allora $n - k - 1$ è la dimensione del sistema lineare $\Lambda_1(S)$. Così i fasci di iperpiani di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ che hanno centro di dimensione $n - 2$, hanno dimensione $n - (n - 2) - 1 = 1$, cioè corrispondono alle rette di $\mathbb{P}^\vee(\mathbf{V})$. Se $P \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$, allora $\Lambda_1(P)$ ha dimensione $n - 1$, cioè corrisponde a un iperpiano di $\mathbb{P}^\vee(\mathbf{V})$. Otteniamo così una corrispondenza biunivoca:

$$\delta^\vee: \mathbb{P}(\mathbf{V}) \rightarrow \{\text{iperpiani di } \mathbb{P}^\vee(\mathbf{V})\}$$

$$P \mapsto \Lambda_1(P)$$

È immediato verificare che δ^\vee è l'inversa della δ definita precedentemente.

Si ha $\dim[\Lambda_1(S)] = n$ se e solo se $\Lambda_1(S) = \mathbb{P}^\vee(\mathbf{V})$, e ciò avviene se e solo se $S = \emptyset$.

$\mathbb{P}^\vee(\mathbf{V}) = \Lambda_1(\emptyset)$ è detto il *sistema lineare improprio*.

Esempio 2.4. Supponiamo che $\dim(\mathbb{P}(\mathbf{V})) = 3$. Se $P \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$, il sistema lineare $\Lambda_1(P)$, la stella di centro P , ha dimensione 2. Se invece $r \subset \mathbb{P}(\mathbf{V})$ è una retta, $\Lambda_1(r)$ è un fascio di piani e quindi ha dimensione 1. Infine, se $\mathcal{P} \subset (\mathbb{P}(\mathbf{V}))$ è un piano, $\Lambda_1(\mathcal{P})$ ha dimensione 0, e consiste nel solo piano \mathcal{P} . Quindi possiamo affermare che a punti, rette e piani di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ corrispondono rispettivamente piani, rette e punti di $\mathbb{P}^\vee(\mathbf{V})$.

Siano $P[x_0, x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$ e $H[a_0, a_1, \dots, a_n]$ un iperpiano di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. La condizione che $P \in H$ è equivalente alla seguente identità:

$$a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0. \quad (2.10)$$

Fissati a_0, a_1, \dots, a_n , la (2.10) è una condizione sulle coordinate di punto, soddisfatta da tutti e soli i punti $P[x_0, x_1, \dots, x_n] \in H$. D'altra parte se teniamo

fissi x_0, x_1, \dots, x_n , la (2.10) si può considerare come una condizione sulle coordinate di iperpiano, che è soddisfatta da tutti e soli gli iperpiani $H \in \Lambda_1(P)$. Se consideriamo una configurazione di punti e iperpiani di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, dove le coordinate di ogni punto si interpretano come coordinate di iperpiano, e quelle di ogni iperpiano della stessa configurazione come coordinate di un punto, si ottiene una nuova configurazione di punti e di iperpiani che viene chiamata *configurazione duale* della precedente. I suoi punti e i suoi iperpiani si diranno duali dei corrispondenti iperpiani e punti della configurazione di partenza. Ora, poichè la (2.10) è simmetrica nelle coordinate di punto e di iperpiano, tutte le incidenze che sono soddisfatte dai punti e dagli iperpiani della configurazione data sono anche verificate dai corrispondenti elementi della configurazione duale.

Principio di dualità:

ad ogni proposizione vera riguardante punti e iperpiani di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e loro incidenze corrisponde una proposizione ancora vera riguardante iperpiani e punti di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e loro incidenze, che si ottiene dalla precedente scambiando tra loro le parole “punto” e “iperpiano”. Le due proposizioni si dicono duali l’una dell’altra.

Una proposizione si dice *autoduale* se coincide con la sua duale.

Capitolo 3

I teoremi di Pappo e Desargues

Dopo aver esposto l'importanza e la storia che hanno avuto i teoremi principali della geometria proiettiva, entriamo ora nel vivo, e analizziamoli nel loro dettaglio.

I teoremi di Pappo e Desargues sono due risultati riguardanti alcune configurazioni di rette nel piano. Ciascun teorema ha una versione proiettiva e una euclidea. La versione proiettiva, analizzata nel secondo paragrafo, è espressa sinteticamente con un unico enunciato, mentre quella euclidea necessita di una trattazione differenziata in alcuni casi, a seconda della configurazione delle rette: ad esempio se sono incidenti o parallele.

Vedremo quindi nel prossimo capitolo i due teoremi, prima nel contesto euclideo e poi in quello proiettivo; osserveremo che grazie all'aggiunta dei “punti all'infinito”, e all'eliminazione dei fenomeni di parallelismo, i due teoremi assumeranno nella geometria proiettiva una forma più semplice ed essenziale.

3.1 La versione affine

La proposizione 139 del libro VII delle *Collezioni* [15], dà quello che oggi è noto come il teorema di Pappo: ne esistono diverse versioni e prima di esporre il teorema in linguaggio formale, vedremo tre versioni di tale risultato. Successivamente esporremo il teorema di Desargues nella geometria affine

piana. Per dimostrare entrambi i risultati sarà utile trattare il teorema di Talete.

Definizione 3.1. Sia \mathbf{V} uno spazio vettoriale su \mathbb{K} . Uno *spazio affine* su \mathbf{V} , cioè uno spazio affine con spazio vettoriale associato \mathbf{V} , è un insieme non vuoto \mathbf{A} , i cui elementi si dicono *punti* di $\mathbf{A}(\mathbf{V})$, tale che sia data un'applicazione

$$\mathbf{A}(\mathbf{V}) \times \mathbf{A}(\mathbf{V}) \rightarrow \mathbf{V} \quad (3.1)$$

che associa ad ogni $(P, Q) \in \mathbf{A}(\mathbf{V}) \times \mathbf{A}(\mathbf{V})$ un vettore di \mathbf{V} , denotato con \overrightarrow{PQ} e chiamato vettore di punto iniziale P e di punto finale Q , in modo che i seguenti due assiomi siano soddisfatti:

SA1 Per ogni punto $P \in \mathbf{A}(\mathbf{V})$ e per ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ esiste un unico punto $Q \in \mathbf{A}(\mathbf{V})$ tale che

$$\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v}.$$

SA2 Per ogni terna P, Q, R di punti di $\mathbf{A}(\mathbf{V})$ è soddisfatta la seguente identità:

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}.$$

Per ogni $(P, Q) \in \mathbf{A}(\mathbf{V}) \times \mathbf{A}(\mathbf{V})$ diremo P punto di applicazione del vettore \overrightarrow{PQ} .

L'applicazione (3.1) definisce una *struttura di spazio affine* sull'insieme $\mathbf{A}(\mathbf{V})$.

La dimensione di \mathbf{V} è detta *dimensione dello spazio affine* $\mathbf{A}(\mathbf{V})$, ed è denotata con $\dim(\mathbf{A}(\mathbf{V}))$.

Uno spazio affine di dimensione 1 (rispettivamente dimensione 2), viene chiamato *retta affine* (rispettivamente *piano affine*).

Se $\mathbf{V} = \mathbb{K}^n$, lo spazio affine associato a \mathbb{K}^n si denota con \mathbf{A}^n .

Teorema 3.1.1 (Talete). *Siano H, H', H'' rette parallele e distinte del piano affine \mathbf{A}^2 , ed r_1, r_2 due rette non parallele ad H, H', H'' . Siano inoltre*

$$P_i = r_i \cap H, \quad P'_i = r_i \cap H', \quad P''_i = r_i \cap H'', \quad i = 1, 2,$$

e $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ tale che

$$\overrightarrow{P_i P_i''} = k_i \overrightarrow{P_i P_i'}, \quad i = 1, 2.$$

Allora $k_1 = k_2$.

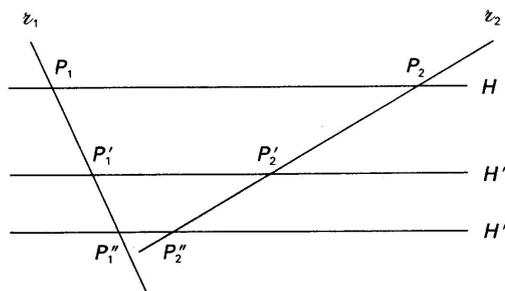


Figura 3.1: Teorema di Talete

Il teorema di Talete afferma essenzialmente che lo scalare $k = k_1 = k_2$ dipende solo da H, H', H'' e non dalle rette trasversali r_1, r_2 .

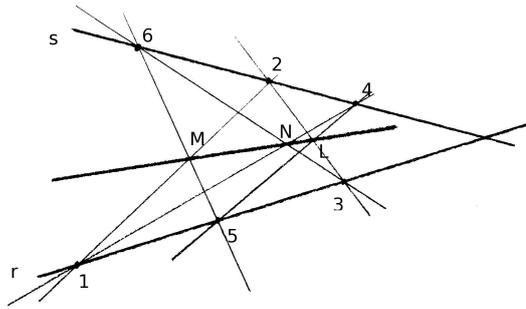
Supponendo le rette r_1 e r_2 incidenti in un punto $O \in H$, si ottiene un caso particolare del teorema, dove $P_1 = O = P_2$, e per il teorema si afferma che $\overrightarrow{OP_1''} = k \overrightarrow{OP_1'}$, $\overrightarrow{OP_2''} = k \overrightarrow{OP_2'}$.

Elenchiamo ora, con parole semplici, le tre versioni del teorema di Pappo. Questo teorema viene anche chiamato *Teorema dell'esagono*, il motivo si evince facilmente dalla costruzione che faremo di seguito.

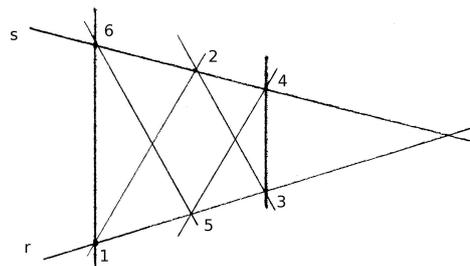
1. Dato un esagono di vertici 1, 2, 3, 4, 5, 6, se i vertici di indice dispari appartengono a una retta r e quelli d'indice pari a una retta s , complanare ad r , allora i punti M, N, L di intersezione di coppie di lati opposti dell'esagono, sono allineati;
2. Se nell'esagono sopra considerato, supponiamo che $\overline{12} \parallel \overline{45}$ e $\overline{23} \parallel \overline{56}$ allora anche $\overline{34} \parallel \overline{61}$;

¹La dimostrazione del teorema (3.1.1) si trova in [1, p. 115-116]

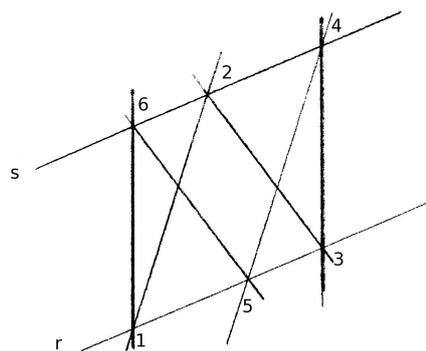
3. (*Piccolo teorema di Pappo*). Se $\overline{12} \parallel \overline{45}$, $\overline{23} \parallel \overline{56}$ ed anche $r \parallel s$ allora $\overline{34} \parallel \overline{61}$.



(a) *Versione 1.*



(b) *Versione 2.*



(c) *Versione 3.*

Figura 3.2: Le diverse versioni del teorema di Pappo.

Ora enunciamo il teorema in linguaggio formale, con la relativa dimostrazione:

Teorema 3.1.2 (Pappo). *Siano H, H' due rette distinte, del piano affine \mathbb{A}^2 . Siano $P, Q, R \in H$ e $P', Q', R' \in H'$ punti distinti, nessuno dei quali comune ad H e ad H' . Se $\overline{PQ'} \parallel \overline{P'Q}$ e $\overline{QR'} \parallel \overline{Q'R}$ allora $\overline{PR'} \parallel \overline{P'R}$.*

Dimostrazione. Dimostriamo ora il teorema nella versione 2 e 3; la versione 1 verrà dimostrata nel prossimo capitolo nel contesto della geometria proiettiva. Supponiamo che H e H' non siano parallele, e sia $\{O\} = H \cap H'$.

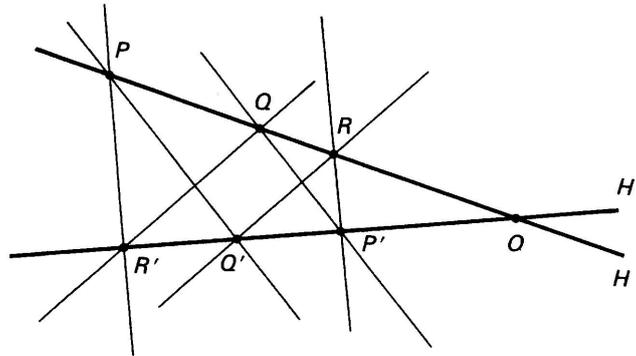


Figura 3.3: Teorema di Pappo, versione affine.

Per opportuni $k, h \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ si ha

$$\begin{aligned} \overline{PQ'} \parallel \overline{P'Q} &\stackrel{\text{Talette}}{\implies} \overline{OP'} = k \overline{OQ'}, & \overline{OQ} = k \overline{OP}, \\ \overline{QR'} \parallel \overline{Q'R} &\stackrel{\text{Talette}}{\implies} \overline{OQ'} = h \overline{OR'}, & \overline{OR} = h \overline{OQ}. \end{aligned}$$

Ma allora:

$$\begin{aligned} \overline{PR'} &= \overline{OR'} - \overline{OP} = \frac{1}{h} \overline{OQ'} - \frac{1}{k} \overline{OQ}, \\ \overline{RP'} &= \overline{OP'} - \overline{OR} = k \overline{OQ'} - h \overline{OQ}, \end{aligned}$$

e quindi $\overline{RP'} = hk \overline{PR'}$, cioè $\overline{RP'} \parallel \overline{PR'}$.

Se invece H e H' sono parallele, allora si ha

$$\overline{PQ'} \parallel \overline{P'Q} \implies \overline{PQ} = \overline{Q'P'},$$

$$\overline{QR'} \parallel \overline{Q'R} \implies \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{R'Q'},$$

e quindi

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{Q'P'} + \overrightarrow{R'Q'} = \overrightarrow{R'P'}.$$

Pertanto $\overline{PR'} \parallel \overline{P'R}$. □

Veniamo ora al teorema di Desargues, chiamato anche *Teorema dei triangoli*:

Teorema 3.1.3 (Desargues). *Siano $A, B, C, A', B', C' \in \mathbf{A}^2$ punti a tre a tre non allineati, tali che $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$, $\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$. Allora le tre rette $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$ sono parallele oppure hanno un punto in comune.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$ non siano parallele. Allora due di esse si incontrano in un punto, per esempio supponiamo che $\overline{AA'} \cap \overline{BB'} = \{O\}$.

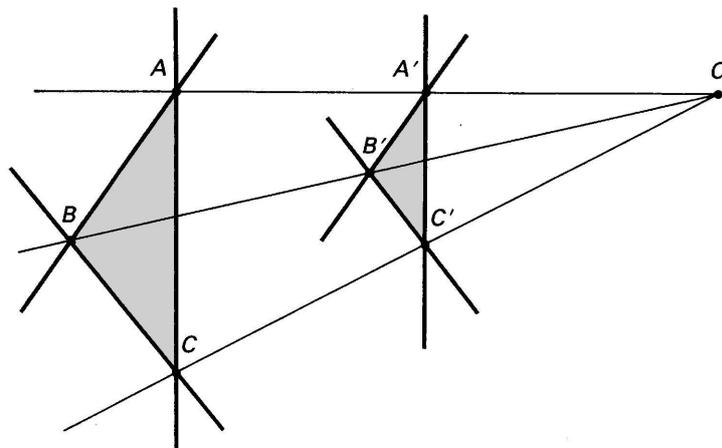


Figura 3.4: Teorema di Desargues, versione affine.

Applicando il teorema di Talete ad \overline{AB} , $\overline{A'B'}$ si ha

$$\overrightarrow{OA'} = k \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OB'} = k \overrightarrow{OB}, \quad k \in \mathbb{K}.$$

Sia $\{C''\} = \overline{OC} \cap \overline{A'C'}$, applicando il teorema di Talete ad \overline{AC} , $\overline{A'C'}$ si ha

$$\overrightarrow{OC''} = k \overrightarrow{OC}$$

visto che $\overrightarrow{OA'} = k \overrightarrow{OA}$.

D'altra parte, posto $\{C'''\} = \overline{OC} \cap \overline{B'C'}$, e applicando il teorema di Talete alle rette $\overline{BC}, \overline{B'C'}$, si ottiene

$$\overrightarrow{OC'''} = k \overrightarrow{OC}$$

perchè $\overrightarrow{OB'} = k \overrightarrow{OB}$.

Infine, dai risultati ottenuti

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC''} = k \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OC'''} = k \overrightarrow{OC} \end{aligned} \implies C'' = C''' = C' \implies O, C, C' \text{ sono allineati.}$$

□

3.2 La versione proiettiva

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto gli spazi proiettivi e le coordinate omogenee; i matematici del XIX secolo si resero conto che in questo contesto più generale molti teoremi risultavano più semplici ed eleganti, questo grazie alla scomparsa di molti “casi eccezionali”, generati da configurazioni particolari (come ad esempio quella di due rette parallele nel piano), tipiche della geometria euclidea ma assenti nella proiettiva. Vediamo ora l'analogo dei due teoremi di Pappo e Desargues nella geometria proiettiva utilizzando le premesse analizzate nel capitolo precedente.

Teorema 3.2.1 (Pappo). *Siano $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ un piano proiettivo, r ed r' due rette distinte di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, e P, Q, R, P', Q', R' sei punti distinti tali che $P, Q, R \in r \setminus (r \cap r')$, $P', Q', R' \in r' \setminus (r \cap r')$.*

Allora i tre punti

$$L(P, Q') \cap L(P', Q), \quad L(Q, R') \cap L(Q', R), \quad L(P, R') \cap L(P', R)$$

sono allineati.

La retta che li contiene è detta retta di Pascal.

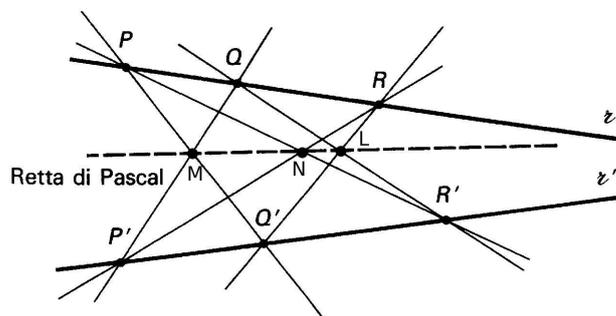


Figura 3.5: Teorema di Pappo, versione proiettiva.

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema con l'aiuto delle coordinate omogenee.

Anzitutto definiamo $M := L(P, Q') \cap L(P', Q)$, $N := L(P, R') \cap L(P', R)$, $L := L(Q, R') \cap L(Q', R)$.

Osserviamo che, presi i quattro punti P, P', R', L , se ne consideriamo solo tre di questi, risultano non allineati, cioè non giacenti sulla stessa retta. Quindi possiamo scegliere le coordinate omogenee tali che

$$P' = (1, 0, 0) \quad L = (0, 1, 0)$$

$$P = (0, 0, 1) \quad R' = (1, 1, 1)$$

Ora questo ci dà le equazioni di tre rette:

$$L(P', R') = r : y = z, \quad L(R', L) : z = x, \quad L(P, R') : x = y. \quad (3.2)$$

Queste rette contengono rispettivamente i punti Q', Q, N , dunque

$$Q' = (p, 1, 1), \quad Q = (1, q, 1), \quad N = (1, 1, r),$$

con p, q, r degli scalari.

Le tre rette

$$L(L, Q) : x = py, \quad L(N, P) : y = qz, \quad L(P', Q') : z = rx,$$

passano tutte per lo stesso punto $R' = (1, 1, 1)$ se $pqr = 1$.

Infine, $M := L(P, Q') \cap L(P', Q)$, significa

$$\begin{cases} x = py \\ y = qz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = pqz \\ y = qz \end{cases}$$

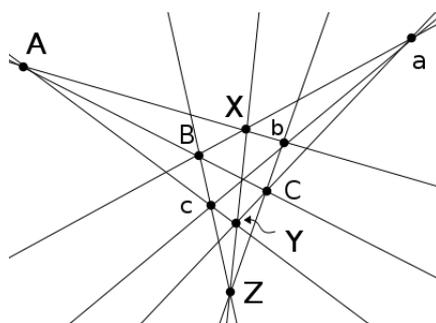
e per concludere la dimostrazione dovremmo vedere che M appartiene alla retta $L(L, N) : z = rx$. Affinchè questo sia vero deve verificarsi

$$z = r(pqz)$$

cioè $rpq = 1$. Ma questo è vero per quanto abbiamo appena detto, quindi i tre punti M, N, L sono allineati. \square

È bene osservare che nella dimostrazione precedente non abbiamo considerato i diversi casi di incidenza o parallelismo delle rette r ed r' , perchè come già detto, nella geometria proiettiva non c'è differenza tra due rette incidenti che si incontrano in un "punto finito" e due rette parallele che si incontrano in un "punto all'infinito".

Infine osserviamo che il teorema di Pappo è autoduale (si veda il paragrafo 2.3). Prese due triplete di linee concorrenti, l'incontro di alcune loro intersezioni concorrono.



Per meglio dire, siano $A, B, C, a, b, c, X, Y, Z$ nove punti come in figura. Se le rette $\overline{Xb}, \overline{BC}, \overline{cY}$ e $\overline{BX}, \overline{cb}, \overline{YC}$ sono concorrenti, allora anche le rette $\overline{Bc}, \overline{XY}, \overline{bC}$ sono concorrenti.

Vediamo ora il teorema di Desargues proiettivo; in parole semplici esso afferma che se due triangoli sono in prospettiva rispetto a un punto, allora sono in prospettiva anche rispetto a una retta. In modo equivalente, se due triangoli sono in prospettiva rispetto a un punto, e se i prolungamenti dei lati corrispondenti si intersecano, allora i tre punti di intersezione sono allineati.

Teorema 3.2.2 (Desargues). *Sia $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ un piano proiettivo e siano $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$ punti distinti tali che le tre rette $L(P_1, P_4), L(P_2, P_5), L(P_3, P_6)$ abbiano in comune un punto P_0 diverso da P_1, \dots, P_6 .*

Allora i punti

$$L(P_1, P_3) \cap L(P_4, P_6), \quad L(P_2, P_3) \cap L(P_5, P_6), \quad L(P_1, P_2) \cap L(P_4, P_5)$$

sono allineati.

Dimostrazione. Siano $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_6 \in \mathbf{V}$ tali che $P_i = [\mathbf{v}_i]$, $i = 1, \dots, 6$. Per ipotesi esistono scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_6 \in \mathbb{K}$ tali che

$$\mathbf{v}_0 = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_4 \mathbf{v}_4 = \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_5 \mathbf{v}_5 = \alpha_3 \mathbf{v}_3 + \alpha_6 \mathbf{v}_6.$$

P_0 è diverso da P_1, \dots, P_6 , e quindi gli $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ sono tutti diversi da zero.

I tre punti $L(P_1, P_3) \cap L(P_4, P_6)$, $L(P_2, P_3) \cap L(P_5, P_6)$, $L(P_1, P_2) \cap L(P_4, P_5)$ sono rispettivamente associati ai vettori

$$\begin{aligned} \alpha_1 \mathbf{v}_1 - \alpha_3 \mathbf{v}_3 &= -\alpha_4 \mathbf{v}_4 + \alpha_6 \mathbf{v}_6 \\ -\alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 &= \alpha_5 \mathbf{v}_5 - \alpha_6 \mathbf{v}_6 \\ -\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 &= \alpha_4 \mathbf{v}_4 - \alpha_5 \mathbf{v}_5. \end{aligned}$$

Questi tre vettori sono linearmente dipendenti perchè la loro somma è $\mathbf{0}$, e quindi i tre punti corrispondenti sono allineati. \square

Il teorema 3.2.2 si può anche enunciare così: *sotto le ipotesi dette, sono allineati i tre punti di intersezione delle coppie di lati ordinatamente corrispondenti dei due triangoli di vertici $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$.*

Osserviamo infine che anche il reciproco del teorema di Desargues è vero: se due triangoli stanno in prospettiva rispetto ad una retta e se ciascuna

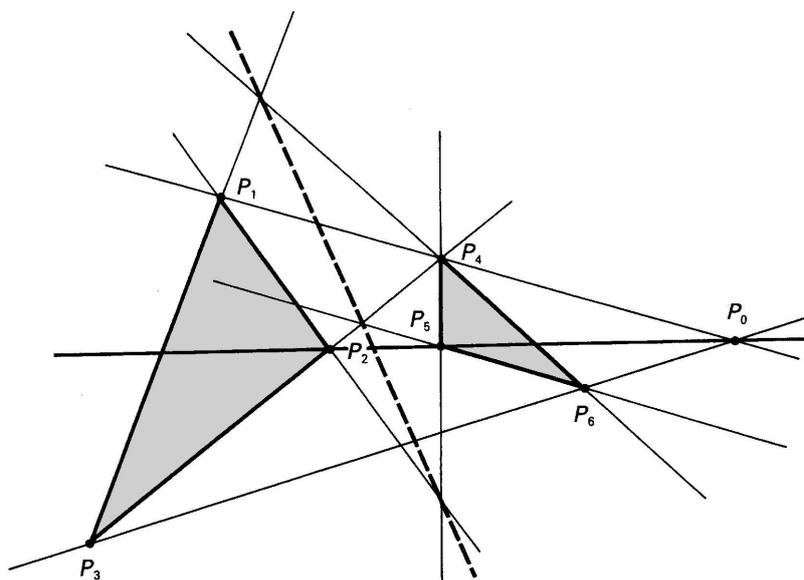


Figura 3.6: Teorema di Desargues, versione proiettiva.

coppia di vertici corrispondenti sono uniti da rette che si intersecano, allora i triangoli sono in prospettiva rispetto al punto di intersezione delle tre rette. Abbiamo quindi detto, in parole semplici, che il teorema di Desargues è autoduale, cioè coincide con il suo duale (si veda il paragrafo 2.3).

3.3 Il teorema di Pascal

All'età di sedici anni, Pascal pubblicò *Essai puor les coniques* [18], che consisteva in un'unica pagina stampata, ma che può essere definita una delle più feconde di tutta la storia della matematica. Essa conteneva la proposizione *mysterium hexagrammaticum*, oggi nota come il *teorema di Pascal*. Prima di enunciarlo diamo la definizione di esagono semplice, utile per la costruzione del teorema.

Definizione 3.2. Per *esagono semplice piano* si intende una sestupla ordinata di punti a tre a tre non allineati (*vertici* dell'esagono) e le sei rette che

congiungono ogni vertice con il successivo (rispetto all'ordinamento fissato) e l'ultimo con il primo (*lati* dell'esagono).

Se $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ sono i vertici dell'esagono, le tre coppie di lati opposti sono le seguenti: $P_1P_2 - P_4P_5$, $P_2P_3 - P_5P_6$, $P_3P_4 - P_6P_1$, come in figura (precisamente per opposto del lato P_iP_{i+1} intendiamo il lato $P_{i+3}P_{i+4}$).

Teorema 3.3.1 (Pascal). *Le tre coppie di lati opposti di un esagono semplice inscritto in una conica si incontrano in tre punti allineati.*

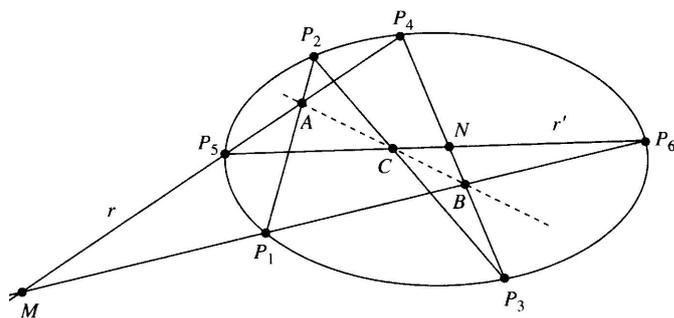


Figura 3.7: Teorema di Pascal.

Possediamo soltanto delle indicazioni sul modo in cui Pascal dimostrò questo teorema. Egli disse che, essendo vero per il cerchio, deve essere vero, per proiezione e sezione, per tutte le coniche.

Possiamo anche aggiungere che il *teorema di Pappo* appena affrontato, sulle coppie di terne di punti appartenenti a una coppia di rette, è un caso particolare del teorema di Pascal, che si ottiene quando la conica degenera in una coppia di rette.

3.4 Definizione assiomatica della geometria proiettiva

Concludiamo questo lavoro esponendo una diversa visione della geometria proiettiva.

Così come Euclide definiva la geometria euclidea basandola su degli assiomi ([10] e [11]), anche la geometria proiettiva piana può avere questa formulazione, ottenendo quindi un modo più generale di definirla. In particolare essa può essere definita assiomaticamente, senza dover ricorrere allo spazio quoziente $\mathbb{P}(\mathbb{K}^n) := (\mathbb{K}^n \setminus \{0\})/\sim$, ma utilizzando soltanto i concetti di punti, linee e incidenza.

Anzitutto diamo la definizione di *proiettività*:

Definizione 3.3. Siano $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e $\mathbb{P}(\mathbf{V}')$ due spazi proiettivi. Un'applicazione biunivoca $f : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V}')$ è un *isomorfismo di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ su $\mathbb{P}(\mathbf{V}')$* se esiste un isomorfismo $\varphi : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$ tale che

$$f([v]) = [\varphi(v)]$$

per ogni $[v] \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$. L'isomorfismo f si dice *indotto da φ* . Se un isomorfismo f esiste, $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e $\mathbb{P}(\mathbf{V}')$ si dicono *isomorfi*.

Una *proiettività* di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ è un isomorfismo di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ in sé stesso.

Elenchiamo ora gli *assiomi della geometria proiettiva piana* [8, p. 24/26]:

1. Due punti distinti appartengono a una sola linea.
2. Qualsiasi coppia di linee è incidente ed ha almeno un punto in comune.
3. Tra quattro punti ne esistono tre che non sono allineati.
4. Tre punti diagonali di una quadrangolo completo non sono mai allineati.
5. Se due triangoli sono in prospettiva rispetto a un punto allora sono in prospettiva rispetto a una linea (*teorema di Desargues*).

6. Se una proiettività lascia invariati tre punti distinti di una linea, essa lascia invariato ogni punto della linea.

In questa definizione assiomatica il teorema di Desargues non può essere dimostrato perchè è un assioma, tuttavia se supponiamo vero il teorema di Pappo oppure di essere in uno spazio di dimensione maggiore di due, allora il teorema di Desargues è vero.

Nel caso in cui ci trovassimo nello spazio (dimensione = 3), dire che vale il teorema di Desargues, equivale al fatto che ci troviamo su di un corpo (campo non commutativo), cioè possiamo identificare lo spazio proiettivo con lo spazio quoziente e la solita relazione di equivalenza, $\mathbb{P}(\mathbb{K}^3) := (\mathbb{K}^3 \setminus \{0\})/\sim$, dove \mathbb{K} è un corpo.

Assumere vero il teorema di Pappo, equivale invece al fatto che se ci troviamo su di uno spazio proiettivo definito su di un corpo, allora questo corpo è anche un campo.

Esistono infatti *piani proiettivi non desarguesiani*, cioè in cui non vale il teorema di Desargues, come ad esempio il piano di Moulton, il piano di Hughes, il piano di Moufang o il piano di André [21].

Osserviamo infine che è possibile dare una diversa definizione assiomatica della geometria proiettiva piana [9, p. 230-231], sostituendo agli assiomi 5 e 6 il *teorema di Pappo*.

Bibliografia

- [1] Sernesi, E., *Geometria I*, Bollati Boringhieri, Torino 1989.
- [2] Beltrametti, Carletti, Gallardi e Bragadin, *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*, Bollati Boringhieri, Torino 2002.
- [3] Kline, M. (1972), *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Edizione Italiana: *Storia del pensiero matematico, Vol I e Vol II*, Giulio Einaudi, Torino 1991.
- [4] Boyer, C. B. (1968), *A history of Mathematics*, Edizione italiana: *Storia della matematica*, Istituto Editoriale Internazionale, Milano 1976.
- [5] Geoffrey E. R. Lloyd, *Early Greek Science: Thales to Aristotle* (1970), *Greek Science after Aristotle* (1973), Edizione Italiana: *La scienza dei greci*, Universale Laterza, Bari 1978.
- [6] Russo L., *La rivoluzione dimenticata*, Feltrinelli, Milano 1996.
- [7] *Lessico universale italiano*, Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da Giovanni Treccani, 1970.
- [8] H. S. M. Coxeter, *Projective Geometry* Second Edition, Springer-Verlang, 1974.
- [9] H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry* Second Edition, John Wiley & Sons, 1969.

-
- [10] J. L. Heiberg e H. Menge, *Euclidis Opera Omnia* (testo greco e traduzione latina), Leipzig, 1883-1916.
- [11] F. Enriques, *Elementi*, traduzione italiana in quattro volumi (I-IV, V-IX, X, XI-XIII), Roma (1925, Stock) e Bologna (1930, 1932, 1936, Zanichelli).
- [12] T. L. Heath, *Apollonius of Perga. Treatise on Conic Sections*, Cambridge University Press, 1896.
- [13] Heath T.L., *History of Greek Mathematics*, Clarendon, Oxford, 1921, 2 volumi.
- [14] Thomas I., *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*, Loeb Classical Library, Cambridge, Mass., 1939-1941, 2 volumi.
- [15] Pappo di Alessandria, *La collection mathématique*, traduzione di Paul Ver Eecke, Parigi 1933, 2 volumi.
- [16] N. Poudra, *Oeuvres de Desargues - Réunies et analysées par M. Poudra*, 2 Volumi , Paris Leiber, 1864.
- [17] Moisy P., *Textes retrouvés de Desargues*, “XVIIe siècle”, 1951.
- [18] B. Pascal, *Oeuvres*, a cura di L. Brunschvicg e P. Boutroux, 14 Volumi, Hachette, Parigi 1904-14.
- [19] Lazare N. M. Carnot, *Géométrie de position*, 1803.
- [20] J.-D. Gergonne, *Annales de Mathématiques*, 1825-26.
- [21] <http://it.wikipedia.org>
- [22] http://spazioinwind.libero.it/popoli_antichi/Asia-Minore/Colosso-Rodi.html
- [23] http://www.fe.infn.it/u/filimanto/scienza/storia/grecia/9_pappo/pappo.htm

Ringraziamenti

In primo luogo desidero ringraziare la Professoressa Rita Fioresi, per il tempo e l'aiuto che mi ha dedicato, seguendomi con estrema attenzione e accuratezza durante la scrittura di questo elaborato.

In secondo luogo ringrazio il Professor Alberto Serra, al quale è dedicata questa tesi, perchè senza la passione che mette nel suo lavoro da insegnante e che ha saputo trasmettermi negli ultimi anni delle scuole superiori, non avrei mai fatto la scelta di iscrivermi a Matematica.

Ringrazio i miei genitori per il supporto morale ed economico che mi hanno sempre dato durante questi tre anni, facendo sacrifici affinchè il mio percorso di studi potesse essere il più agile e fruttuoso possibile. Ringrazio mia sorella, la mia migliore amica, che mi ha sempre incoraggiato e sostenuto.

Voglio ringraziare tutti i miei amici, quelli che ci sono sempre stati, quelli appena trovati e quelli da poco riscoperti, ognuno mi ha dato o mi ha detto qualcosa che è servito a potenziare la fiducia in me stessa, e la tenacia nello studio.

In particolare, ricordo le mie coinquiline Rakhsha e Xue: è stato unico e indimenticabile vivere con voi! Le nostre diversità di lingua, provenienza e interessi si sono subito trasformate in importanti e preziosi arricchimenti l'una per l'altra.

Ringrazio gli amici della Fuci, il gruppo di Bologna e il gruppo di Forlì, che mi hanno aiutato a valorizzare ed esaltare il sapore della vita universitaria.

Un ringraziamento anche ai compagni dell'università, coloro con cui ho condiviso più da vicino lo studio e le fatiche di questi anni.

Infine un ringraziamento particolare a Marco, il mio più grande amico, sempre presente nella mia vita, ma in un modo decisamente essenziale in questi ultimi tre anni e mezzo: mi è stato vicino quando ero giù di morale, mi ha spronato a reagire alle difficoltà che incontravo nello studio e nella vita, e con estrema sincerità e semplicità mi ha sempre dato consigli unici e fondamentali.