Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTA' DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Specialistica in Matematica

L'irrazionalità nella matematica greca, particolarmente in Aristotele

Tesi di laurea in Storia della Matematica

Relatore: Chiar.mo Prof.
SALVATORE COEN

Presentata da:
PATRIZIA AMERISE

terza Sessione
Anno Accademico 2009/10

Alla mia famiglia

Introduzione

È ormai universalmente accettato che furono i Greci a scoprire l'esistenza dell'άλογον cioè dell'irrazionalità. Tuttavia essi non introdussero mai questo concetto tra i numeri: nessun autore antico infatti usa mai l'espressione άλογος αριτμός (numero irrazionale). Il *numero irrazionale* non esiste nella Grecia antica: i termini stessi άρρητος (*indicibile*) e άλογος (*che non si può esprimere come λόγος, cioè come rapporto di due numeri interi*), stanno ad indicare questo fatto. L'irrazionalità per i Greci significò *incommensurabilità*, cioè impossibilità di trovare un sottomultiplo comune a due grandezze: l'aritmetica dunque rimase limitata ai numeri interi e razionali positivi, mentre la geometria poté cogliere la nuova realtà ed avere nuovi ed importanti sviluppi. Per rendere conto della prima dimostrazione dell'esistenza di una grandezza irrazionale, gli storici della scienza e i commentatori di Aristotele fanno riferimento ad un testo sull'incommensurabilità della diagonale che si trova nei *Primi Analitici* (41a 24- 50a 37). In questo testo Aristotele fa un cenno a quella che doveva essere la dimostrazione dell'incommensurabilità del lato e della diagonale del quadrato. Si tratta di una dimostrazione per assurdo: *se lato e diagonale fossero commensurabili, un numero dovrebbe essere insieme pari e dispari.* In uno scolio all'ultima proposizione del libro X degli *Elementi* di Euclide (nell'edizione di Heiberg si trova in appendice) è sviluppata una dimostrazione che segue la traccia aristotelica, tuttavia gli editori moderni a partire dal 1829 con E. F. August l'hanno omessa dal testo euclideo non trovando alcun legame tra la dimostrazione e il resto del libro X.

Nel primo capitolo vengono presentate le dimostrazioni usuali proposte che fanno tutte riferimento al modello che si trova alla fine del libro X degli *Elementi.*

Nel secondo capitolo presenteremo alcune dimostrazioni geometriche ed una ricostruzione alternativa che si basa sul metodo dell'anthyphairesis. Tuttavia per quanto seducente possa apparire questa ricostruzione, essa non trova alcun riscontro nelle fonti. Le prime testimonianze relative all'irrazionalità collegano sempre la scoperta agli studi del rapporto tra lato e

diagonale del quadrato.
Il problema è che le dimostrazioni proposte nel primo capitolo passano tutte attraverso la rappresentazione delle frazioni come rapporto di due interi relativamente primi, vale a dire attraverso la proposizione VII.22 degli *Elementi*, e questo non corrisponde agli scritti aristotelici. Infatti la proposizione VII.22 è dimostrata per assurdo ma né Platone né Aristotele parlando dell'incommensurabilità fanno riferimento ad una dimostrazione in cui si annidano l'uno dentro l'altro due ragionamenti per assurdo: il primo per dimostrare la proprietà di rappresentazione dei rapporti tra due numeri interi tramite due interi relativamente primi, poi, da lì, l'impossibilità della razionalità di radice quadrata di 2.
Nel terzo capitolo verrà proposta allora una nuova dimostrazione ricostruita da Salomon Ofman, conforme al testo dei *Primi Analitici* e fondata sul metodo molto antico della decomposizione pari e dispari. Non passando attraverso la proposizione VII.22 né attraverso nessun'altra proposizione dimostrata per assurdo, questa irrazionalità apparirà come il primo risultato che non si può dimostrare attraverso nessun altro metodo. Grande importanza ha quindi questa dimostrazione che rende conto della centralità che acquista il ragionamento per assurdo, prima in matematica, poi in tutti i tipi di discorsi razionali.

Indice

Introduzione **i**

1 Dimostrazioni Standard **1**
1.1 Sulle origini della scoperta degli irrazionali 1
1.2 Le dimostrazioni dell'incommensurabilità del lato e della diagonale del quadrato 3
1.2.1 Dimostrazione tratta dall'edizione degli *Elementi* di Heiberg 4
1.2.2 Dimostrazione degli *Elementi* 6
1.2.3 Dimostrazione di Alessandro d'Afrodisia 8
1.2.4 Dimostrazione alternativa degli *Elementi* 10
1.3 Sull'autenticità delle dimostrazioni precedenti 10

2 Dimostrazioni geometriche **13**
2.1 La scoperta dell'incommensurabile nel *Menone* di Platone . 14
2.2 Dimostrazione pari-dispari - variante geometrica 18
2.3 Dimostrazione per successive sottrazioni reciproche: anthyphairesis 21
2.3.1 Applicazione al quadrato 23
2.3.2 Applicazione al pentagono regolare 26
2.4 (*In*)Fondatezza della tesi precedente 27
2.5 Numeri laterali e numeri diagonali 30
2.6 Numeri laterali e diagonali e successioni di Cauchy 34
2.7 Origine dei numeri laterali e diagonali 35

3 L'irrazionalità di $\sqrt{2}$ in Aristotele. Una nuova ipotesi **39**
3.1 Il testo di Aristotele 39
3.2 Il metodo di decomposizione pari/dispari 42
3.3 Proprietà della decomposizione pari/dispari 44
3.4 La dimostrazione dell'incommensurabilità della diagonale al lato del quadrato 44

3.5 Conseguenze 46
3.6 Una dimostrazione che non si espone alle critiche aristoteliche 48
3.7 Origine del ragionamento per assurdo 51

4 Conclusioni 55

Bibliografia 59

Capitolo 1

Dimostrazioni Standard

1.1 Sulle origini della scoperta degli irrazionali

La data e le modalità della scoperta dell'incommensurabilità non sono conosciute esattamente anche se molto si è scritto a sostegno di questa o di quella ipotesi. Tre autori, circa settecento anni dopo la scoperta, ci danno alcune informazioni sulle origini della teoria dell'incommensurabilità, ma è difficile stabilire quanta validità storica abbiano queste informazioni.
Secondo Pappo[1], la teoria dell'incommensurabilità ha avuto origine nella scuola Pitagorica; egli riporta la tradizione secondo cui il membro di questa setta che per primo divulgò il segreto dell'incommensurabilità fu fatto morire in mare, e raccontando questa storia gioca sul termine per "incommensurabile", $\acute{\alpha}\lambda o\gamma o\varsigma$ (álogos) o $\acute{\alpha}\rho\rho\eta\tau o\varsigma$ (árretos), che possono significare entrambi "irrazionale" e "ineffabile", indicando quindi sia il significato tecnico che religioso della scoperta[2]. Un secondo testimone, Proclo (Costantinopoli 410 ca. - Atene 485), in un passo molto citato[3] ascrive a Pitagora stesso la "teoria degli irrazionali": *«egli infatti iniziò la trattazione delle grandezze irrazionali e trovò la costruzione delle figure cosmiche»* [65-66, ed. it. pp. 71-72]. La prima parte dell'affermazione di Proclo $\tau\grave{\eta}\nu\ \tau\hat{\omega}\nu\ \alpha\lambda\acute{o}\gamma\omega\nu\ \pi\rho\alpha\gamma\mu\alpha\tau\epsilon\acute{\iota}\alpha\nu$ ("la teoria degli irrazionali") è stata centro di vari dibattiti, si è infatti molto discusso sul significato del termine $\alpha\lambda\acute{o}\gamma\omega\nu$. Fabricius sembra essere stato

[1]Fu uno dei più importanti matematici del periodo tardo ellenistico. Della sua vita si conosce ben poco e anche le date della sua nascita e della sua morte sono assai incerte. Sembra accertata solo la data del 320 d. C., anno intorno al quale ha scritto un commento all'Almagesto di Claudio Tolomeo.

[2]Pappo, *The Commentary of Pappus on Book X of Euclid's Elements*

[3]Proclo, *Commento al 1. libro degli Elementi di Euclide*

il primo a registrare la variante $\alpha\nu\alpha\lambda\acute{o}\gamma\omega\nu$ che è stata notata anche da E. F. August. $\alpha\nu\alpha\lambda\acute{o}\gamma\omega\nu$ non è la forma corretta della parola, ma il suo significato è "proporzione" o "proporzionale", e la vera lettura può essere sia $\tau\hat{\omega}\nu\ \alpha\nu\alpha\lambda o\gamma\iota\hat{\omega}\nu$ ("proporzioni"), o più probabilmente, $\tau\hat{\omega}\nu\ \alpha\nu\grave{\alpha}\ \lambda\acute{o}\gamma o\nu$ ("proporzionali"); Diels legge $\tau\hat{\omega}\nu\ \alpha\nu\grave{\alpha}\ \lambda\acute{o}\gamma o\nu$, e sembrerebbe, come ha sottolineato T. Heath[4], che vi sia un accordo generale sul fatto che $\alpha\lambda\acute{o}\gamma\omega\nu$ è errato, e la teoria che Proclo intende attribuire a Pitagora sia la teoria delle *proporzioni* o *proporzionali*, non degli irrazionali. Heath ha sottolineato anche come l'attribuzione della teoria degli irrazionali a Pitagora si verifica in una proposizione che ha l'aspetto di una glossa. Il fatto che questo commento sia stato omesso in un'altra versione del sommario di Eudemo rafforza la tesi che si tratti di una aggiunta tardiva. Ad ogni modo, il testo di Proclo è evidentemente una fonte discutibile sulla quale basare qualsiasi conclusione circa le origini della teoria dell'incommensurabilità.
Il terzo testimone, Giamblico (Calcide 245 ca. - 325 ca. d.C.), dà una serie di notizie sui Pitagorici e le origini di questa teoria, permutando e confondendo in diversi modi varie differenti leggende quali la scoperta dell'irrazionale, la costruzione del dodecaedro, la carriera di Ippaso, e la morte in mare di qualche empio Pitagorico:

> *Di Ippaso si racconta che fosse dei Pitagorici, ma che, per aver divulgato per primo la costruzione della sfera di dodici pentagoni, perisse in mare come empio:... (246)Colui che per primo rivelò la natura delle grandezze commensurabili e incommensurabili agli indegni di partecipare a tali cognizioni, si dice che incorresse in tanto odio che non solo fu escluso da ogni compagnia e convivenza, ma anche gli fu costruita una tomba, come se colui, ch'era una volta un compagno, avesse davvero cessato di vivere. (247)Altri dicono che anche la divinità si adirasse con i divulgatori delle dottrine di Pitagora. Perì infatti come empio in mare colui che rivelò come s'iscrive nella sfera l'icosagono, cioè il dodecaedro, una delle cinque figure dette solide. Alcuni però narrano che questo accadesse a colui che aveva propagato la dottrina degli irrazionali e degli incommensurabili.*[5]

La tradizione che Giamblico conserva fornisce, tuttavia, poco da utilizzare per la datazione delle origini della teoria, dato che praticamente nient'altro è noto di Ippaso. Tuttavia, un certo numero di storici ha scelto di leggere in questi resoconti un intrinseco collegamento tra la scoperta dell'incommensurabilità e quella della costruzione del dodecaedro, attraverso lo studio

[4] [10], pp.84-85
[5] *Vit. Pyth. 88 de comm. math sc.* 25 p. 77 18-24

della suddivisione dei segmenti in estrema e media ragione, conosciuto nella letteratura moderna come "sezione aurea". Ma vedremo anche che il contesto della prima scoperta dell'incommensurabilità può essere visto solo come lo studio del lato e della diagonale del quadrato.

1.2 Le dimostrazioni dell'incommensurabilità del lato e della diagonale del quadrato

In contrasto con Giamblico, che associa l'irrazionale al dodecaedro e ai segmenti divisi in estrema e media ragione, gli scrittori del quarto secolo Platone e Aristotele parlano sempre dell'incommensurabilità nel contesto del lato e della diagonale del quadrato. L'uso che Aristotele fa di esempi di incommensurabilità mostra che esso era un risultato familiare al suo pubblico. Esso era già, presumibilmente, entrato nella tradizione dei manuali di geometria del suo tempo. Ma egli non accredita mai la scoperta ai Pitagorici, nonostante le sue frequenti discussioni sulle loro dottrine. Al contrario, parlando dei principi cosmologici, Aristotele riferisce così il punto di vista pitagorico:

> *«I Pitagorici per primi si applicarono alle matematiche e le fecero progredire e, nutriti dalle medesime, credettero che i principi di queste fossero principi di tutti gli esseri. E, poiché nelle matematiche i numeri sono per loro natura i principi primi, e appunto nei numeri essi ritenevano di vedere, più che nel fuoco e nella terra e nell'acqua, molte somiglianze con le cose che sono e che si generano [...] pensarono che gli elementi dei numeri fossero elementi di tutte le cose.»*[6]

e questo dogma, che può essere riassunto "tutte le cose sono numeri", è incompatibile con l'accettazione dell'irrazionale[7]. Da Platone, invece, si può ricavare l'impressione che la diffusione della conoscenza delle grandezze incommensurabili fosse ai suoi tempi abbastanza recente. Ma dal momento che egli sembra accreditare a Teodoro dei progressi nella teoria dell'incommensurabilità, e poiché Platone, molto probabilmente, è venuto a conoscenza di questo lavoro durante il suo viaggio a Cirene un po' di tempo dopo il 390 a.C., possiamo tranquillamente affermare che l'incommensurabilità è

[6] *Metafisica*, A 5, 985b24- 986a2

[7] Infatti in questo caso si dovrebbe abbandonare l'idea pitagorica del punto-monade occupante una porzione di spazio in favore del punto concepito come punto ideale, che occupa una posizione ma che è privo di estensione.

stata scoperta prima. Ma è difficile determinare quanto prima.
Aristotele, in aggiunta, per mostrarci che l'esempio caratteristico dell'incommensurabilità era quello del lato e della diagonale del quadrato, ci dà un indizio sulla natura della dimostrazione dalla quale questa incommensurabilità è stata stabilita. Nella sua esposizione del metodo di ragionamento *per assurdo* egli rimanda alla dimostrazione in questo modo: *se il lato e la diagonale sono supposti commensurabili, si può dedurre che i numeri dispari sono uguali ai numeri pari*[8]; questo assurdo ci dà l'incommensurabilità delle grandezze considerate. Come si vede, questa indicazione è molto scarna ma riporta i tratti fondamentali della dimostrazione e, come Oskar Becker ha osservato[9], ogni variante possibile della dimostrazione effettiva deve seguire questa descrizione. In uno scolio all'ultima proposizione del libro X degli *Elementi* di Euclide è sviluppata una dimostrazione molto nota (numerata a volte X.117) che segue la traccia aristotelica . Considerando inoltre che l'inclusione di questa dimostrazione negli *Elementi* può essere giustificata solo per interesse storico della dimostrazione, poiché la sua collocazione non ha alcuna incidenza sullo sviluppo delle proposizioni del libro X, è stato generalmente sostenuto che si dovrebbe accettare questa versione come la forma originale da cui l'incommensurabilità è stata scoperta è dimostrata.
Poiché questo testo è importante per i discorsi seguenti lo riportiamo qui di seguito.

1.2.1 Dimostrazione tratta dall'edizione degli *Elementi* di Heiberg

Quello che segue è il testo originale della dimostrazione dell'incommensurabilità del lato e della diagonale di un quadrato tratta dall'edizione di J.L.Heiberg dell'opera *Euclidis Elementa*, libro X, appendice 27, pp.408-411.

Προκείσδω ἡμῖν δεῖξαι, ὅτι ἐπὶ τῶν τετραγώνων σχημάτων ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ διάμτρος τῇ πλευρᾷ μήκει.

Propositum sit nobis demonstrare, in figuris quadratis diametrum latusque longitudine incommensurabilia esse.

[8]Vedremo in seguito che sono i dispari che crollano nei pari

[9] [2]

Ἔστω τετράγωνον τὸ $AB\Gamma\Delta$, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ $A\Gamma$· λέγω, ὅτι ἡ ΓA ἀσύμμετρός ἐστι τῇ AB μήκει.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω σύμμετρος· λέγω, ὅτι συμβήσεται τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἄρτιον εἶναι καὶ περισσόν. φανερὸν μὲν οὖν, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς $A\Gamma$ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς AB. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΓA τῇ AB, ἡ ΓA ἄρα πρὸς τὴν AB

λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω, ὃν ὁ EZ πρὸς H, καὶ

ἔστωσαν οἱ EZ, H ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οὐκ ῎ρα μονὰς ἐστὶν ὁ EZ. εἰ γὰρ ἔσται μονὰς ὁ EZ, ἔχει δὲ λόγον

πρὸς τὸν H, ὃν ἔχει ἡ $A\Gamma$ πρὸς τὴς AB, και μείξων ἡ $A\Gamma$ τῆς AB, μείξων ἄρα καὶ ἡ EZ τοῦ H ἀριθμοῦ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ EZ· ἀριθμὸς ἄρα. καὶ ἐπεί

ἐστιν ὡς ἡ ΓA πρὸς τὴν AB, οὕτος ὁ EZ πρὸς τὸν H, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓA πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AB, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ EZ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ H. διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓA τοῦ ἀπὸ τῆς AB διπλασσίων ἄρα καί ὁ ἀπὸ τοῦ EZ τοῦ ἀπὸ τοῦ H· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ EZ ὥστε καί αὐτὸς ὁ EZ ἄρτιός ἐστιν. εἰ γὰρ ἦν περισσός, καὶ ὁ ἀπ᾽ αὐτοῦ τετράγωνος περισσὸς ἦν, ἐπειδήπερ, ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ᾖ, ὁ ὅλος περισσός ἐστιν· ὁ EZ ἄρα ἀρτί-

Sit $AB\Gamma\Delta$ quadratum, diametrus autem eius $A\Gamma$ dico, $\Gamma A, AB$ longitudine incommensurabiles esse.

Nam si fieri potest, commensuraliles sint dico, fore, ut idem numerus et par et impar sit manifestum igitur, esse $A\Gamma^2 = 2AB^2$ [I,47] et quoniam $\Gamma A, AB$ commensurabiles sunt, $\Gamma A : AB$ rationem habet,

quam numerus ad numerum [prop.VI]. sit

$\Gamma A : AB = EZ : H$,

et EZ, H minimi sint eorum, qui eandem rationem habent [cfr VII, 33]. itaque EZ unitas non est. si enim est unitas, et

$EZ : H = A\Gamma : AB$

et $A\Gamma > AB$, erit etiam $EZ > H$, unitas numero [V, 14]; quod absurdum est. quare EZ unitas non est. ergo numerus est. et quoniam est $\Gamma A : AB = EZ : H$, erit etiam

$\Gamma A^2 : AB^2 = EZ^2 : H^2$

[VI, 20 coroll.; VIII,11]. uerum $\Gamma A^2 = 2AB^2$. itaque etiam $EZ^2 = 2H^2$. quare EZ^2 par est. itaque etiam ipse EZ par est. nam si impar esset, etiam quadratum eius impar esset, quoniam, si numeri impares componuntur, et multitudo eorum impar est, totus impar est [IX, 23] ergo EZ par est. in Θ in duas partes aequales secetur. et quoniam EZ, H minimi sunt eorum, qui eanden rationem habent, inter se primi sunt [VII, 21]. et EZ par est. itaque H impar est. nam si par esset, binas numeros EZ, H metiretur (omnis enim nuος ἐστιν. τετμήσθω δίχα καρὰ τὸ Θ. κα᾽ ἐπεὶ οἱ EZ, H ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λογον ἐχόντων [αὐτοῖς], πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσιν. καὶ ὁ EZ ἄρτιος· περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ H. εἰ γὰρ ἦν ἄρτιος, τοὺς EZ, H δυὰς ἐμέτρει· πᾶς γὰρ ἄρτιος ἔχει μέρος ἥμισυ· πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλὴλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄρτιός ἐστιν ὁ H· περισσός ἄρα. καὶ ἐπεὶ διπλάσιος ὁ EZ τοῦ $E\Theta$, τετραπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ EZ τοῦ ἀπὸ $E\Theta$. διπλάσιος δὲ ὁ ἀπὸ τοῦ EZ τοῦ ἀπὸ τοῦ H. διπλὰσιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ H τοῦ ἀπὸ $E\Theta$· ἄρτιος ἄρα ἐστιν ὁ ἀπὸ τοῦ H. ἄρτιος ἄρα διὰ τὰ εἰρημένα ὁ H· ἀλλὰ καὶ περισσός· ὅπερ ἐστὶν αδύνατον. οὐκ άρα σύμμετρός ἐστιν ἡ ΓA τῇ AB μήκει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

merus par partem dimidiam habet [VII def. 6]), qui inter se primi sunt; quod fieri non potest. ergo H par non est. impar igitur est. et quoniam $EZ = 2E\Theta$, erit [VIII, 1] $EZ^2 = 4E\Theta^2$. est autem $EZ^2 = 2H^2$. itaque $H^2 = 2E\Theta^2$. quare H^2 par est. itaque propter ea, quae diximus [p. 408, 23 sq.], H par est. at idem impar est; quod fieri non potest. ergo ΓA, AB longitudine commensurabiles non sunt; quod erat demonstrandum.

1.2.2 Dimostrazione degli *Elementi*

Dimostriamo che nei quadrati la diagonale è incommensurabile con il lato[10]:

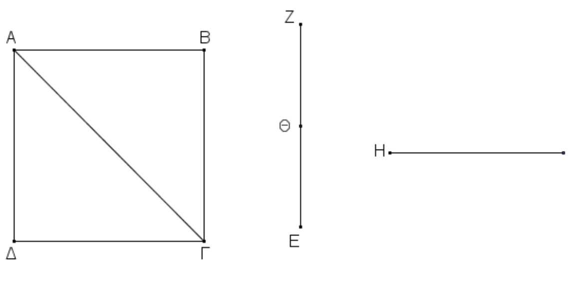

Fig. 1.1:

[10] Traduzione dal testo latino di J.L.Heiberg presentato nel paragrafo 1.2.1

Dimostrazione. Sia $AB\Gamma\Delta$ un quadrato, dove $A\Gamma$ è la diagonale. Dimostriamo che $A\Gamma$ è incommensurabile in lunghezza con AB.
Ipotesi: Per assurdo supponiamo che $A\Gamma$ sia commensurabile con AB. Seguirà allora che lo stesso numero è pari e dispari.
Ora è chiaro che il quadrato costruito su $A\Gamma$ è il doppio del quadrato costruito su AB[11], cioè $A\Gamma^2 = 2AB^2$. Poiché $A\Gamma$ è commensurabile con AB, allora $A\Gamma$ avrà con AB lo stesso rapporto che un numero ha con un altro[12]. Sia $\Gamma A : AB = EZ : H$, e siano questi numeri EZ e H i più piccoli numeri che abbiano questo rapporto [cfr. VII.33].
Allora EZ non è l'unità. Se EZ fosse l'unità e $EZ : H = A\Gamma : AB$, essendo $A\Gamma$ più grande di AB, allora anche EZ sarebbe più grande di H, il che è impossibile[13]. Così, EZ non è l'unità; quindi, è un numero.
Risultato 1: EZ è pari.
Poiché $\Gamma A : AB = EZ : H$, così anche $\Gamma A^2 : AB^2 = EZ^2 : H^2$ [14]. Ora $\Gamma A^2 = 2AB^2$, così anche $EZ^2 = 2H^2$. Quindi EZ^2 è un numero pari, così anche EZ è pari. Se fosse dispari, il suo quadrato sarebbe anche dispari; poiché, se sommiamo un numero dispari di termini dispari, il tutto è dispari[15]. Così EZ è pari. Sia diviso in due parti uguali in Θ.
Risultato 2: H è dispari.
Poiché EZ e H sono i più piccoli numeri che hanno questo dato rapporto, essi sono relativamente primi [VII.21][16]. Poiché EZ è pari, allora H è dispari. Se fosse pari, sarebbero entrambi multipli di 2 [VII def.6] e quindi non sarebbero relativamente primi, contro l'ipotesi. Quindi H è dispari.
Conseguenza:
Poiché $EZ = 2E\Theta$ [17], $EZ^2 = 4E\Theta^2$. Ma $EZ^2 = 2H^2$, così $H^2 = 2E\Theta^2$. Così H^2 è pari, e quindi H è pari. Ma H è anche dispari, il che è impossibile.
Quindi, ΓA è incommensurabile in lunghezza con AB.
Che è ciò che dovevamo dimostrare. □

Knorr ha messo in evidenza[18] come, nei passi intermedi, l'autore di questa versione abbia usato un metodo che ci si aspetterebbe in una prova pitagorica, anche se non l'ha esattamente capita: cioè il fatto che EZ non possa essere un'unità. I Pitagorici, in particolare Filolao e Archita, vede-

[11] Segue dal teorema di Pitagora. *Elementi*, I.47
[12] *Elementi*, X.5
[13] Perché stiamo supponendo che EZ è l'unità e quindi non è divisibile.
[14] *Elementi*, X.9
[15] *Elementi*, IX.23
[16] Nel testo si fa riferimento alla proposizione VII.21 degli *Elementi* che nella numerazione moderna corrisponde a VII.22
[17] Perché per ipotesi Θ divide in due EZ
[18] [12], p. 24

vano l'unità come una sorta di ibrido, contemporaneamente dispari e pari, anche se non come un numero, propriamente parlando[19]. Quindi, in questa dimostrazione, il risultato che H è contemporanemante dispari e pari non sarebbe mai di per sé possibile, per H che non è l'unità. Così, l'autore dovrebbe avere dimostrato che H non è l'unità, non che non lo è EZ. Questo passo, infatti, è dato correttamente in una dimostrazione alternativa del teorema presente negli *Elementi* (vedere 1.2.4). Ma è importante osservare che il passo, in entrambi i casi, è inutile in questa particolare forma della dimostrazione in cui l'unità è stata considerata un termine dispari[20].

1.2.3 Dimostrazione di Alessandro d'Afrodisia

Nella ricerca delle origini dell'irrazionalità, è importante, sottolinea Knorr, utilizzare testi che non derivino unicamente dagli *Elementi*; che è ciò, aggiunge, che non hanno fatto gli storici precedenti.
Si trova una tale dimostrazione nei *Commentari* agli *Analitici Primi* di Alessandro d'Afrodisia (III secolo d.C.):

Dimostrazione. Dimostriamo che la diagonale di un quadrato è incommensurabile in lunghezza con il lato.
Ipotesi: Per assurdo supponiamo che la diagonale e il lato del quadrato siano commensurabili.
Se la diagonale e il lato del quadrato fossero commensurabili, essi avrebbero il rapporto di numeri interi, diciamo $a : b$ [21]. Sia questo rapporto ridotto ai minimi termini; cioè a e b sono relativamente primi.
Ora, anche a^2 e b^2 saranno relativamente primi[22].

[19] Aristotele, nella *Metafisica* (A 5, 986a 16-20), riportando la concezione Pitagorica afferma:

> *«Essi pongono, poi, come elementi costitutivi del numero il pari e il dispari; di questi, il primo è illimitato, il secondo è limitato. L'Uno deriva da entrambi questi elementi, perché è, insieme, pari e dispari. Dall'Uno, poi, procede il numero; e i numeri, come si è detto, costituirebbero tutto quanto l'universo.»*

Cioè l'Uno ha in sé sia la natura del pari che quella del dispari perché se è sommato ad un dispari dà un pari, se è sommato ad un pari dà un dispari.

[20] Questa concezione dell'unità come dispari è consistente con le definizioni di Euclide, ed è stata utilizzata da alcuni matematici, ma non dai Pitagorici, già questo, quindi, mette in dubbio che questa possa essere la dimostrazione vista dai Pitagorici.

[21] Alessandro fa riferimento alla proposizione X.4 che nella numerazione moderna corrisponde a X.5

[22] *Elementi*, VII.27

Risultato 1': a^2 è pari.
Dalla costruzione fatta si vede che a^2 e b^2 si trovano nella medesima proporzione che il quadrato sulla diagonale al quadrato sul lato; cioè, $a^2 : b^2 = 2 : 1$ [23]. Quindi a^2 è pari, perché è il doppio del numero b^2.
Risultato 1'bis: b^2 è pari.
Se un numero quadrato è divisibile per 2, anche la sua metà lo è. Quindi anche b^2 (metà di a^2) sarà pari.
Risultato 2': b^2 è dispari.
b^2 è anche dispari, poiché a^2 e b^2 sono relativamente primi e a^2 è pari; due numeri pari non possono essere relativamente primi, dal momento che il numero 2 li dividerebbe entrambi.
Conseguenza:
Dall'ipotesi di relativa primalità, uno o entrambi i numeri a^2 e b^2 devono essere dispari; ma dall'ipotesi di commensurabilità segue che a^2 e b^2 sono entrambi pari. Questa contraddizione dimostra l'incommensurabilità del lato e della diagonale, e rende chiara l'osservazione di Aristotele che l'ipotesi della commensurabilità rende i numeri dispari uguali ai numeri pari. □

Questa dimostrazione è una prova basata sul pari e dispari ma si vede abbastanza chiaramente che la sua origine non è la versione euclidea (X.117) che abbiamo ricevuto. Alessandro fa qui delle citazioni dagli *Elementi* che sono d'accordo parola per parola con la tradizione manoscritta conservata. Questo porta a pensare che egli possedesse una copia degli *Elementi* sostanzialmente della stessa forma del manoscritto in nostro possesso, ma che la sua copia non includesse una dimostrazione di incommensurabilità del lato e della diagonale basata sulle proprietà dei numeri pari e dispari e che quindi egli abbia ricavato questa dimostrazione da qualche altra fonte. Come sottolinea Knorr[24], è come se Alessandro avesse avuto a disposizione una prova più generale e l'avesse modificata per soddisfare le esigenze del passaggio di Aristotele. Si può anche vedere dove questa dimostrazione diverge dalla sua fonte. Per tutta la prima parte della dimostrazione Alessandro cita Euclide per spiegare i suoi passaggi. Ma non appena introduce i numeri pari e dispari le citazioni degli *Elementi* sono omesse e Alessandro usa anche un teorema: *le metà di numeri quadrati pari sono pari* che non compare in Euclide.

[23] Indicata con d la diagonale e con l il lato del quadrato, si ha che se $d : l = a : b$ allora $d^2 : l^2 = a^2 : b^2$. Ora, poiché i quadrati costruiti sulla diagonale e sul lato stanno tra loro come 2:1, cioè il quadrato costruito sulla diagonale è il doppio del quadrato costruito sul lato, a^2 e b^2 devono stare nella stessa proporzione (si assume qui che se due rapporti sono uguali tra loro sono uguali anche i rapporti duplicati).

[24] [12], pp.228-229

Inoltre, contrariamente alla dimostrazione degli *Elementi*, la contraddizione (essere pari e dispari), e più generalmente la dimostrazione, non riguarda più i due numeri il cui rapporto è uguale al rapporto tra lato e diagonale del quadrato ma i quadrati di questi numeri.

1.2.4 Dimostrazione alternativa degli *Elementi*

Un'altra dimostrazione dell'incommensurabilità del lato e della diagonale è stata conservata in alcuni manoscritti dell'opera di Euclide. Questa dimostrazione può essere parafrasata nel modo seguente:

Dimostrazione. Sia A la diagonale di un quadrato e B il lato.
Ipotesi: A e B sono commensurabili.
Esisteranno allora un intero c e un intero d tali che $A : B = c : d$. Possiamo prendere c e d ridotti ai minimi termini; cioè c e d relativamente primi.
Risultato 1": d non è l'unità.
Dall'ipotesi $A : B = c : d$ segue $A^2 : B^2 = c^2 : d^2$; ma $A^2 = 2B^2$; così $c^2 = 2d^2$. Quindi, se d fosse l'unità, allora c^2 sarebbe uguale a 2. Ma questo è impossibile, poiché 2 non è quadrato di un intero, quindi d non è l'unità.
Risultato 2": c e d non sono relativamente primi.
Dal momento che $A^2 : B^2 = c^2 : d^2$, e B^2 è misura di A^2, così anche d^2 è misura di c^2. Ma quando un numero quadrato misura un altro numero quadrato, il corrispondente lato del primo misura il lato del secondo[25]. Cioè, d è misura sia di c che di d e abbiamo dimostrato che d non è l'unità. Quindi c e d non sono relativamente primi.
Conseguenza: Siamo giunti ad un assurdo. Quindi, A e B sono incommensurabili. □

1.3 Sull'autenticità delle dimostrazioni precedenti

Sulla dimostrazione che si trova alla fine del libro X degli *Elementi* nell'edizione di Heiberg (cf. sopra 1.2.2), gli storici adottano punti di vista differenti. La maggior parte pensa che essa non sia di Euclide. O. Becker osserva anzi che gli editori moderni (a cominciare da E. F. August nel 1829) hanno omesso la proposizione in questione dal corpo principale del testo perché non vedevano alcuna connessione tra essa e il resto del libro X.

[25] *Euclide*, VIII.14: *Se un numero quadrato ne divide un altro, anche il lato del primo dividerà il lato del secondo [. . .].* Letteralmente: Se un numero quadrato misura un quadrato, anche il lato misurerà il lato [. . .].

Secondo Becker[26], e anche secondo Á. Szabó[27], si tratta di una proposizione molto antica, molto anteriore all'opera di Euclide. Sarebbe stato lui (o i suoi primi editori) che l'avrebbe(ro) aggiunta all'opera perché ritenuta degna di essere conservata per ragioni storiche e/o come testimonianza essenziale delle origini della matematica, e sarebbe proprio questa la prova cui fa riferimneto Aristotele.
A favore dell'antichità di questa dimostrazione vi è la sua applicazione della decomposizione pari/dispari, in accordo con il breve cenno di Aristotele alla dimostrazione. Tuttavia vari aspetti non avrebbero potuto essere parte integrante dell'originale scoperta dell'incommensurabilità. Innanzitutto, la dimostrazione (come anche le successive due dimostrazioni presentate) è messa nel formato di una *reductio ad absurdum*. Il risultato, l'incommensurabilità del lato e della diagonale, è enunciato in via preliminare. Questo non poteva essere vero per la scoperta originaria dell'incommensurabilità. I Pitagorici hanno postulato gli interi come fondamento di tutte le cose: l'esistenza di grandezze incommensurabili avrebbe sovvertito questo presupposto filosofico. Quindi, l'affermazione dell'incommensurabilità del lato e della diagonale sarebbe difficilmente l'adeguato punto di partenza per gli studi pitagorici di queste grandezze. Anzi, secondo Knorr, i primi studi devono avere assunto la forma di ricerche per i numeri che esprimessero il rapporto di tali grandezze. Cioè, la commensurabilità è stata un'ipotesi implicita in questo studio, e la contraddizione dedotta, che tutti i numeri dispari sono pari, è sorta in modo imprevisto. Nel riesaminare tale ragionamento, i Pitagorici avrebbero infine riconosciuto l'ipotesi errata: che le due grandezze sono state prese commensurabili.
Una seconda prova della rielaborazione in questa dimostrazione è l'utilizzo di teoremi che sono troppo generali per i loro fini. I numeri EZ e H sono presi come i più piccoli termini che danno quel rapporto. Viene quindi richiamata la proposizione VII.22 degli *Elementi* che afferma: *i più piccoli termini, fra quanti abbiano tra loro uno stesso rapporto sono relativamente primi.* Ma la dimostrazione non richiede questa condizione in tutta la sua generalità. Tutto ciò che serve è che i termini EZ e H non siano scelti entrambi pari. Un'altra indicazione di una mano editoriale successiva è il modo di dimostrare che il quadrato di un dispari è dispari. Il testo cita IX.23: *Se si somma un numero dispari di numeri dispari, pure il totale sarà dispari.* Ma ancora, questo richiamo è troppo generale per il caso attuale. I Pitagorici avrebbero fatto piuttosto riferimento alla rappresentazione grafica puntiforme di un numero dispari quadrato, dal quale il risultato ne-

[26] [2], p. 534
[27] [18], p. 233

cessario è ovvio. Certamente non c'è stato un appello a un teorema come IX.23, parte di una teoria formalizzata del dispari e del pari.
Vi è un ulteriore modo, più profondo, in cui la prova è stata rivista per essere conforme con lo stile degli *Elementi*. Seguendo la prassi di Euclide nel libro X, numeri e grandezze sono attentamente distinte. Per esempio, nella prova citata, l'autore trasferisce la supposta commensurabilità di $A\Gamma$ e AB in una condizione aritmetica con l'appello a X.5: *le grandezze commensurabili hanno fra loro il rapporto che un numero ha con un numero*, e quest'ultimo è un rapporto di numeri interi. Dopo ottiene la condizione essenziale $EZ^2 = 2H^2$ tramite X.9: *quadrati di rette commensurabili in lunghezza hanno fra loro il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato [...]*, cioè $A\Gamma : AB = EZ : H$ se e solo se $A\Gamma^2 : AB^2 = EZ^2 : H^2$; e poiché $A\Gamma^2 = 2AB^2$ si ha il risultato. Abbastanza chiaramente, questa esplicita espressione della relazione di grandezze commensurabili e interi non sarebbe stata disponibile nel momento delle prime scoperte e studi sull'incommensurabilità.
Come sostiene Knorr, è solo a partire dall'epoca euclidea che ha avuto luogo una separazione rigorosa tra numeri e grandezze, quando l'autore di questa dimostrazione distingue con molta cura tra di essi[28]. L'approccio pitagorico sarà stato più "ingenuo" nel senso che grandezze e interi saranno stati interscambiati senza tener conto delle difficoltà formali coinvolte. Quindi, gli studi pitagorici portando a questo riconoscimento non avrebbero separato le grandezze dai numeri, come è stato fatto nella dimostrazione dell'incommensurabilità degli *Elementi*. È per questo che egli propone una ricostruzione della prova pitagorica «purificata di questi tratti anacronistici» a partire dal *Menone* di Platone[29].
Secondo S. Ofman[30], il fatto stesso che Alessandro costruisca la dimostrazione data in 1.2.3, è un'ulteriore dimostrazione del fatto che la dimostrazione dell'incommensurabilità data in 1.2.2 non è quella cui fa riferimento Aristotele. Infatti se questa dimostrazione fosse già esistita già ai tempi di Alessandro, egli non avrebbe avuto bisogno di ricostruirla ma avrebbe potuto fare esplicito riferimento ad essa.

[28]La motivazione per la separazione delle grandezze e dei numeri risiede nel riconoscimento dell'esistenza di grandezze incommensurabili.
[29]Questa dimostrazione verrà proposta in 2.1.
[30] [13], p. 92

Capitolo 2

Dimostrazioni geometriche

Le dimostrazioni per assurdo presentate nel capitolo precedente hanno un carattere troppo evoluto e astratto per costituire il primo passo nella conoscenza scientifica dell'irrazionale.
A proposito della prima dimostrazione, fondata sullo schema aristotelico, Frajese afferma *«è troppo elaborata per avere valore euristico: ha infatti più la finezza di un sottile gioco sui numeri, che la spontaneità e l'immediatezza di un processo di ricerca»*. Secondo altri autori, tra cui F. Franciosi, è più naturale pensare che la scoperta abbia le sue radici nell'ambito dell'aritmogeometria. I Pitagorici, infatti, erano soliti rappresentare i numeri con ciottoli disposti in modo da formare figure geometriche[1]. Così, i numeri 1, 3, 6 e 10 erano detti triangolari perché i corrispondenti punti potevano essere disposti a triangolo:

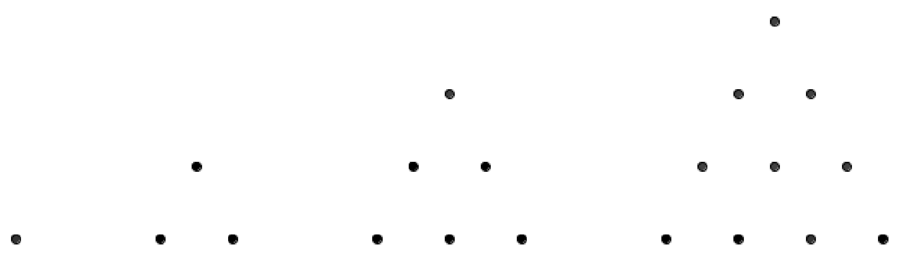

Fig. 2.1: Numeri triangolari

I numeri 1, 4, 9, 16, ... venivano detti numeri quadrati perché intesi come punti potevano essere disposti in un quadrato:

[1]In questo senso il *numero* si confonde con l'insieme numerato e quest'ultimo è addirittura disposto secondo forme geometriche facilmente riconoscibili: si ha quindi una forma di corrispondenza fra aritmetica e geometria e per questo alcuni critici hanno definito la matematica pitagorica *aritmogeometria.*

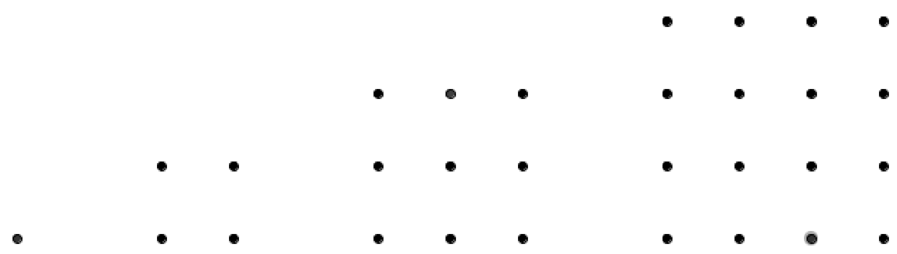

Fig. 2.2: Numeri quadrati

È verosimile, secondo Franciosi, che nel tentativo di disporre i ciottoli di due quadrati uguali in un terzo quadrato, i Pitagorici, *«almeno intuitivamente, abbiano concluso che non ce n'era nessuno: nella constatazione di questa impossibilità fu il seme della scoperta dell'irrazionale*[2]*»*.
À. Szabò suggerisce che la scoperta sarebbe avvenuta sempre dal tentativo di raddoppiare il quadrato, però in campo geometrico anziché nel campo dell'aritmo-geometria. L'autore basa questa sua ipotesi su due fatti:

1. Il problema del raddoppiamento del quadrato è la versione nel piano di quello della duplicazione del cubo, che ebbe grande importanza per i Greci del V e del IV secolo a.C.

2. In un passo del *Menone* di Platone viene effettivamente considerato il problema del raddoppiamento del quadrato.

Presentiamo allora di seguito il passo geometrico del dialogo platonico cui fa riferimento Szabò.

2.1 La scoperta dell'incommensurabile nel *Menone* di Platone

In un celebre passo (819d) delle tarde *Leggi*, Platone rimprovera ai Greci l'ignoranza di una scoperta così grande quale quella dell'incommensurabilità, appare quindi naturale che nei suoi Dialoghi sempre ricchi di allusioni e riferimenti allo sviluppo della matematica, debba aver trovato l'occasione di trattare della scoperta in questione. Poiché nel *Teeteto* (147d-148b) vengono presentati proprio i risultati raggiunti in materia di incommensurabilità da Teodoro di Cirene e da Teeteto l'Ateniese, certamente Platone avrà fatto un cenno all'importantissima scoperta dell'incommensurabilità

[2]F. Franciosi, L'irrazionalità nella matematica greca arcaica, *Bollettino dell'Istituto di filologia greca*, suppl. 2, Roma 1977, p.21

anche se non si trattava di un fatto recentissimo.
In verità nel brano del *Teeteto* la teoria degli irrazionali si trova già ad uno stadio evoluto: Teeteto fornisce un criterio generale per riconoscere l'irrazionalità, mentre Teodoro viene rievocato per aver indicato un metodo per riconoscere l'irrazionalità delle radici quadrate dei numeri da 3 fino a 17 [3]. È stato osservato da tutti che è significativo il fatto che Platone faccia cominciare le ricerche di Teodoro da $\sqrt{3}$ e non da $\sqrt{2}$. Secondo l'interpretazione più comune, questo è una testimonianza del fatto che dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$, cioè dell'incommensurabilità del lato e della diagonale del quadrato, si

[3]Nel dialogo *Teeteto* si assiste ad un colloquio che avrebbe avuto luogo ad Atene tra Socrate, il matematico Teodoro di Cirene, e il giovinetto Teeteto. Quest'ultimo è presentato da Teodoro come estremamente intelligente e precoce, e Socrate vuole metterlo alla prova chiedendogli di definire che cosa sia la scienza (*epistème*). Teeteto comincia con l'enunciare alcune scienze, ma Socrate insiste: egli non vuole conoscere quali siano alcune scienze particolari, ma che cosa sia la *scienza*. Teeteto risponde allora che questo modo di porre la questione è simile a quello che si è presentato a lui e al suo compagno Socrate il giovane.
A loro Teodoro aveva presentato alcune costruzioni geometriche dimostrando che il lato del quadrato di area 3 (piedi quadrati) e quello del quadrato di area 5 non sono commensurabili col lato del quadrato di area 1 (cioè con il segmento lungo 1 piede, assunto come unità di misura).
In linguaggio moderno diremmo che Teodoro aveva dimostrato l'irrazionalità di $\sqrt{3}$ e di $\sqrt{5}$, cioè aveva dimostrato, in sostanza, l'impossibilità di trovare un numero razionale (intero o frazionario) che moltiplicato per sé stesso desse come prodotto 3 o 5.
Ma Teodoro non si era limitato ai quadrati di area 3 e 5, ma aveva trattato tutti i casi fino al quadrato di area 17.
Cioè Teodoro, secondo il racconto di Teeteto, aveva fornito tante dimostrazioni separate dell'irrazionalità delle radici quadrate di 3, 5, 6, 7, $\ldots$ 17, senza fornire una dimostrazione generale, che valesse a stabilire l'irrazionalità, o meno, di qualunque radice.
Così Teeteto, nel rispondere a Socrate, aveva enunciato tante scienze particolari, senza dare una definizione generale di *scienza*.
Ma Teeteto prosegue informando Socrate degli studi da lui compiuti per riconoscere in linea generale se un quadrato avente l'area espressa da qualsiasi numero intero abbia il lato commensurabile con l'unità di misura delle lunghezze.
Teeteto narra appunto che egli divise tutti i numeri (interi) in due gruppi: quello dei numeri quadrati e quello dei numeri non quadrati, che chiamò *rettangolari*.
Stabilita una unità di misura per le lunghezze, egli distinse i quadrati (geometrici) aventi per area un numero quadrato, da quelli aventi per area un numero rettangolare.
I lati dei primi risultano commensurabili con l'unità di lunghezza, e furono da lui chiamati *lunghezze*; i lati dei secondi risultano incommensurabili con l'unità di lunghezza (e con tutte le lunghezze) e furono detti *potenze*(=radici).
Cioè Teeteto ha riconosciuto l'irrazionalità di tutte le radici quadrate dei numeri che non siano quadrati perfetti. Con un colpo solo si riconosce così l'irrazionalità della radice di 2, di 3, di 5, etc. escludendo soltanto le radici di 4, di 9 e così via, cioè le radici quadrate dei numeri quadrati.

siano occupati altri matematici antecedenti a Teodoro. A. Frajese osserva[4] come da un lato l'omissione della radice quadrata di 2 da parte di Platone costituisca una delle prove più significative dell'antichità della scoperta, ma dall'altro come questo spinga a pensare che Platone, nell'omettere la radice quadrata di 2, faccia un implicito riferimento ad un argomento da lui già trattato in un dialogo precedente.
Viene subito in mente la lezione di geometria del *Menone*[5] (82b-85b) in cui Socrate guida lo schiavo di Menone nella costruzione del quadrato doppio di un quadrato dato.
Socrate disegna un quadrato avente il lato di due piedi e fa constatare al ragazzo che esso ha l'area di 4 piedi quadrati: gli propone quindi di raddopiare il quadrato stesso, cioè di costruire un secondo quadrato che abbia area doppia del primo, ossia l'area di 8 piedi quadrati. In due tentativi falliti di specificare il lato del quadrato doppio, lo schiavo sceglie prima il doppio del lato del quadrato dato, ossia 4. Quindi l'area del nuovo quadrato sarebbe 4 volte 4, ossia 16 mentre l'area del quadrato doppio di quello iniziale deve essere 8. Il lato 4 è dunque troppo grande. Il ragazzo propone allora di provare con il lato 3. Ma si osserva che 3 volte 3 fa 9, e che quindi neppure questa volta si è ottenuta l'area 8. Fino a qui quindi si è cercata una soluzione aritmetica del problema: vale a dire se sia possibile trovare un numero quadrato che sia doppio di un altro numero quadrato.
Conducendo lo schiavo alla scoperta, Socrate accenna al fatto che la diagonale e il lato del quadrato sono incommensurabili quando consiglia al ragazzo di provare a indicare il lato del quadrato doppio se non può fare il calcolo numerico:

> *SOCR. Da una di tre piedi non può dunque costruirsi un quadrato la cui superficie sia di otto piedi.*
> *SERVO. No, certo!*

---

[4] [8], p. 76

[5] In questo dialogo Platone intraprende una discussione sulla natura della conoscenza. La conoscenza per Platone è reminiscenza o anamnesi non deriva dall'esperienza ma è innata:

> *«L'anima, dunque, poiché immortale e più volte rinata, avendo veduto il mondo di qua e quello dell'Ade, in una parola tutte quante le cose, non c'è nulla che non abbia appreso. Non v'è, dunque, da stupirsi se può fare riemergere alla mente ciò che prima conosceva della virtù e di tutto il resto. Poiché, d'altra parte, la natura tutta è imparentata con se stessa e l'anima ha tutto appreso, nulla impedisce che l'anima, ricordando (ricordo che gli uomini chiamano apprendimento) una sola cosa, trovi da sé tutte le altre, quando uno sia coraggioso e infaticabile nella ricerca. Sì, cercare ed apprendere sono, nel loro complesso, reminiscenza [anamnesi]!» (81d)*

> *SOCR. Da quale linea allora? Cerca di rispondermi con precisione: e se non vuoi fare il calcolo numerico, indicacelo! (84a)*

Nella seconda parte interviene la geometria che risolve il problema. Socrate disegna quattro quadrati uguali al dato, uno accanto all'altro, così da realizzare la figura del quadrato quadruplo, cioè di lato doppio. Traccia poi una diagonale in ciascun quadrato, in modo che le quattro diagonali vengano a costituire un quadrato: quello costruito appunto sulla diagonale del quadrato dato. Ma in tal modo ciascun quadrato è stato diviso dalla diagonale in due triangoli rettangoli isosceli uguali, mentre il nuovo quadrato costruito mediante le diagonali contiene quattro di tali triangoli: dunque esso è doppio del quadrato dato, quindi il problema è risolto.

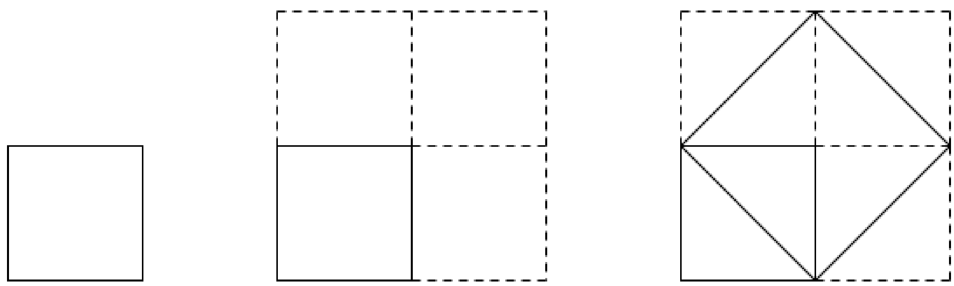

Fig. 2.3: Costruzione del quadrato doppio del quadrato dato

Ecco il contrasto fondamentale tra aritmetica e geometria: con i numeri non si riesce a raddoppiare il quadrato, mentre un tale problema viene risolto immediatamente con una semplicissima costruzione geometrica.
Quindi, come suggerisce Frajese, la scoperta dell'incommensurabilità del lato e della diagonale del quadrato può essere avvenuta da una parte con la constatazione dell'impossibilità di trovare un numero quadrato che sia doppio di un altro numero quadrato, oppure la scoperta potrebbe anche essere stata incidentale e aver seguito il tentativo di costruzione geometrica del quadrato di area doppia. In ogni caso, i mezzi utilizzati nella dimostrazione non vanno oltre quelli posseduti dai Pitagorici, ed è certo pitagorica anche la dottrina della reminescenza che Platone vuole provare.

2.2 Dimostrazione pari-dispari - variante geometrica

Vi sono poi diverse teorie sulla scoperta dell'incommensurabilità che fanno uso di un meccanismo iterativo in cui una stessa figura si ripete identica a se stessa e in scale diverse secondo precisi rapporti.
Una dimostrazione di questo tipo è quella proposta da Wilbur Knorr.
Knorr ritiene verosimile supporre che la scoperta dell'esistenza di grandezze incommensurabili sia avvenuta in un contesto geometrico, nel quale la suddivisione del quadrato - come nel *Menone* di Platone - conduce a quadrati sempre più piccoli. Egli ricostruisce la seguente variante geometrica, basata sulle proprietà dei dispari e dei pari[6], della dimostrazione dell'incommensurabilità del lato di un quadrato alla sua diagonale.

Dimostrazione. Si considera un quadrato $ABCD$ e un quadrato più piccolo $EFGH$ con i vertici nei punti medi dei lati di $ABCD$[7].

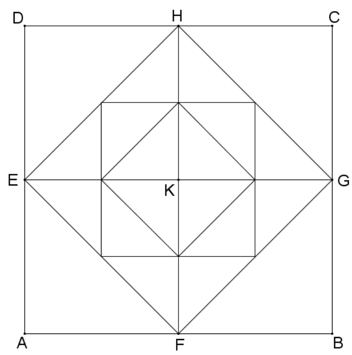

Fig. 2.4:

Supponiamo che venga chiesto quante volte il lato EF può essere incluso sulla diagonale EG.
Ipotesi: Per assurdo supponiamo che il lato EF e la diagonale EG del quadrato più piccolo siano commensurabili.
Allora il loro rapporto deve essere uguale al rapporto tra due numeri interi, rispettivamente l e d. Si può esigere che questi numeri siano ridotti ai minimi termini, quindi che non siano entrambi pari.

[6]Questa dimostrazione può essere considerata una variante geometrica di quella basata sull'impossibilità per un numero di essere simultaneamente pari e dispari.
[7]Il lato del quadrato più grande è uguale alla diagonale del quadrato più piccolo.

I quadrati $ABCD$ e $EFGH$, sui lati AB e EF rispettivamente, rappresentano così numeri quadrati, rispettivamente l^2 e d^2.
Risultato 1: EG è pari.
Come è chiaro dalla figura 2.4, $ABCD$ è il doppio di $EFGH$, cioè $2l^2 = d^2$. Così, $ABCD$ rappresenta un numero quadrato pari. Il suo lato AB (che è uguale a EG) deve essere pari.
Risultato 2: EF è pari.
Poiché $ABCD$ è un numero quadrato pari, allora deve essere divisibile per quattro. Essendo $AFKE$ un quarto di $ABCD$, esso rappresenta un numero. Il suo doppio è il numero quadrato $EFGH$. Quindi, $EFGH$ e il suo lato EF sono numeri pari.
Conseguenza: Si è dimostrato, contrariamente all'ipotesi, che i numeri EF e EG sono entrambi pari.
Dalla contraddizione segue che i due segmenti devono essere incommensurabili.

□

Knorr giustifica il passo in cui è richiesta l'ipotesi dei minimi termini attraverso l'impossibilità di una bisezione infinita di un intero finito: *geometricamente* si dovrebbe poter continuare all'infinito, perché il lato e la diagonale sono segmenti continui ogni volta bisecabili, ma *aritmeticamente* non si può procedere oltre un certo limite, quello in cui si ottengono l'unità o un numero dispari. La difficoltà consiste appunto nel fatto che l'indefinita bisecabilità di un segmento di retta diventa incompatibile con l'ipotesi che la diagonale e il lato del quadrato iniziale siano rappresentati da due numeri interi.
Knorr suggerisce di rifare la dimostrazione incorporando questo argomento come segue.
$ABCD$ è un numero quadrato che si è dimostrato essere pari. La sua metà, il quadrato $EFGH$, è stato dimostrato in seguito essere anche esso un numero quadrato pari. Continuando con lo stesso argomento, la sua metà, il quadrato $AFKE$, rappresenta anch'esso un numero quadrato pari.
Questo procedimento, concepito geometricamente, ovviamente prosegue indefinitamente, producendo ad ogni passo un numero quadrato pari più piccolo. Ma se $ABCD$ rappresenta un numero finito, la sua divisione successiva in due deve alla fine terminare. In questo modo, l'ipotesi iniziale che sia EG che EF rappresentano numeri ha portato ad un assurdo.
In questa versione, la capacità di scegliere i numeri EG e EF ridotti ai minimi termini non è richiesta. Successivamente, questa versione della dimostrazione utilizzante la regressione infinita potrebbe essere stata ritoccata nella forma più "economica" data precedentemente.

Entrambe le versioni evitano gli anacronistici tratti euclidei. Nella seconda versione, l'infinito ripetersi delle immagini in scale diverse può ricordare le più famose argomentazioni basate su un processo di bisezione protratto «all'infinito»: quelle di Zenone di Elea[8]. Aristotele ci avverte però che non si tratta della medesima cosa[9], rivelando così implicitamente che erano note dimostrazioni dell'incommensurabilità del lato e della diagonale di un quadrato che facevano uso di una regressione all'infinito fondata sulla bisezione (benché l'argomentazione di Zenone, in quanto argomentazione *contro il moto* non potesse essere usata come prova dell'incommensurabilità di due grandezze).
Knorr sostiene che questo "trattamento" del lato e della diagonale del quadrato, in entrambe le forme date sopra, era familiare agli scrittori del quarto secolo. I suoi principi non includono nulla oltre l'ambito di una ingenua geometria metrica, certamente accessibile ai Greci del quinto secolo e che il problema dell'incommensurabilità potrebbe sorgere come una conseguenza imprevista di un tale studio metrico del quadrato[10]. Secondo Knorr, un ragionamento geometrico di questo tipo avrebbe potuto indurre come per caso la consapevolezza del paradosso implicito nell'ipotesi di valori interi per il lato e la diagonale del quadrato.
I Pitagorici hanno dovuto elaborare le implicazioni insite per il concetto di numero e di grandezza. L'incommensurabilità implicava un divorzio tra

[8]Zenone di Elea, discepolo ed amico di Parmenide, per sostenere l'idea del maestro, che la realtà è costituita da un *Essere unico e immutabile*, propose alcuni paradossi, che ci sono stati tramandati attraverso la citazione che ne fa Aristotele nella sua *Fisica*, per dimostrare l'impossibilità della molteplicità e del moto, nonostante le apparenze della vita quotidiana. Il primo argomento contro il movimento è quello sulla dicotomia. Esso afferma che un oggetto in movimento prima che possa percorrere una data distanza, deve prima percorrere la metà di tale distanza, ma prima di far ciò deve innanzitutto percorrere la metà della metà e così via attraverso un numero infinito di suddivisioni. Essendo impossibile percorrere uno spazio infinito in un tempo finito, l'inizio del movimento sarà impossibile.

[9]Negli *Analitici Primi* (II, 65b 16-21), egli critica chi tenta di assumere i paradossi di Zenone sull'impossibilità del movimento come causa dell'incommensurabilità della diagonale:

> *In realtà, il fissare come causa ciò che non è causa consiste in ciò, e si verifica, ad esempio, quando qualcuno, volendo provare l'incommensurabilità della diagonale, metta mano all'argomentazione di Zenone, che conduce all'impossibilità del movimento, e consideri tale conclusione come assurda: la conclusione falsa, difatti, non si collega assolutamente, in alcun modo, con l'affermazione iniziale.*

[10]La dimostrazione di Knorr consiste nel dividere per 2 finché è possibile, cioè fino a che non si arriva ad un numero dispari, è questa è proprio la decomposizione pari/dispari di cui parleremo nel prossimo capitolo.

numero e grandezza: non tutti i rapporti tra grandezze sono rapporti tra numeri interi. L'incommensurabilità ($\alpha\sigma\upsilon\mu\mu\varepsilon\tau\rho\acute{\iota}\alpha$) determina quindi una «asimmetria» tra numero e grandezza geometrica: i numeri possono essere trattati come grandezze geometriche, ma non tutte le grandezze possono essere rappresentate da numeri[11].
Le ricerche successive furono incentrate principalmente sul tentativo di "raddrizzare" questa asimmetria. La teoria delle proporzioni per i rapporti incommensurabili e per tutti i tipi di grandezze è attribuita tradizionalmente ad Eudosso e trova la sua sistemazione nel libro V degli *Elementi*. Qui Euclide per superare l'incertezza provocata dall'esistenza di grandezze incommensurabili, il cui rapporto non è esprimibile come rapporto tra interi, non definisce esplicitamente cos'è un rapporto, ma si limita a specificare le condizioni per cui due rapporti sono uguali[12]. La scoperta dell'incommensurabilità avrebbe portato a riconoscere che si deve distinguere tra due tipi di grandezze. Se alcuni segmenti sono supposti come unità, allora un segmento che è esprimibile come un multiplo, parte o parti di esso può essere chiamato "razionale". Ma ogni segmento che non ha misura comune con l'unità è chiamato "irrazionale". Per esempio, nel contesto paradigmatico del triangolo rettangolo isoscele, o del quadrato, un lato razionale avrà una diagonale irrazionale (cf. *Repubblica* 546c). Da una elaborazione successiva, si può considerare la relazione tra due segmenti, senza rifersi ad una unità. Se i segmenti hanno una misura comune, verranno detti "commensurabili"; altrimenti verranno chiamati "incommensurabili"[13].

2.3 Dimostrazione per successive sottrazioni reciproche: anthyphairesis

Alcuni autori, in particolare K. von Fritz e S. Heller, propongono una ricostruzione alternativa per la scoperta dell'incommensurabilità centrata sull'algoritmo euclideo della divisione, chiamato $\alpha\nu\theta\upsilon\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\varepsilon\sigma\iota\varsigma$ (*anthyphairesis*) o $\alpha\nu\tau\alpha\nu\alpha\acute{\iota}\rho\varepsilon\sigma\iota\varsigma$ (*antanairesis*). Il loro parere merita attenzione,

[11] Zelloni, *Gnomon*, cit. pag. 149

[12] *Elementi*, libro V def. V

[13] "Incommensurabile" non coincide, nella teoria di Euclide, con "irrazionale": per Euclide è razionale un qualsiasi prefissato segmento di retta che funge da grandezza di riferimento; i segmenti commensurabili in lunghezza, o anche solo in potenza, con esso si dicono razionali, quelli incommensurabili sia in lunghezza che in potenza si dicono irrazionali. Il termine "irrazionale" denota quindi una condizione di inconfrontabilità metrica più radicale del termine "incommensurabile".

visto che molti storici hanno finito per accettare l'anthyphairesis come base della prima teoria dell'incommensurabilità.
L'algoritmo dell'anthyphairesis procede come segue.

Algoritmo dell'anthyphairesis

Siano date due grandezze omogenee a e b, con $a > b$.
Si sottrae b da a quante volte è possibile; lasciando un resto $c < b$. Se questo resto è nullo, allora l'unità di misura comune di a e b è b; se il resto non è nullo si riapplica il procedimento alla coppia di grandezze b e c.
Se la grandezza maggiore b non è un multiplo della minore c, si ottiene un nuovo resto d, e questo è usato nello stesso modo rispetto al precedente sottraendo c, producendo un nuovo resto e.
Il procedimento continua in questo modo.

Quando l'algoritmo è applicato a dei numeri naturali, esso termina dopo un numero finito di passi, e l'ultimo resto (non nullo) è il massimo comun divisore dei due numeri dati[14]. Allo stesso modo, il procedimento applicato alle grandezze commensurabili termina, risolvendosi nella più grande misura comune[15].
Possiamo visualizzare come procede l'anthyphairesis per due grandezze commensurabili immaginando che a e b siano due segmenti e riportandoli uno sull'altro. Supponiamo, ad esempio, che a e b siano i lati di un rettangolo.

[14]Euclide sviluppa questo metodo in VII.1 e VII.2. L'esistenza del massimo comun divisore è assicurata dal fatto che i due numeri sono presi non relativamente primi.

[15]Euclide dimostra questo in X.3. Se il metodo è applicato ai segmenti le sottrazioni successive non portano necessariamente al loro massimo comun divisore. Il metodo può essere applicato ai segmenti di retta solo in teoria. C'è una grande differenza tra i numeri e i segmenti di retta che li rappresentano. I primi sono composti da unità, mentre i secondi no. Questo metodo delle sottrazioni successive non è un metodo pratico e concreto eccetto che quando è applicato a numeri interi. Si può vedere meglio questo considerando VII.1. Non ci sono difficoltà circa questo teorema se teniamo presente che Euclide lavora solo con numeri interi e che, secondi i Greci, questi sono costituiti da unità che non possono essere divise in parti più piccole. Così la sottrazione successiva di due numeri relativamente primi terminerà una volta che l'unità è stata raggiunta. Il metodo può essere applicato ai segmenti di retta soltanto se questi sono multipli di una unità data.
C'è solo una proposizione (X.2) dove Euclide fa riferimento a questo metodo. Questa proposizione dà un criterio di incommensurabilità in termini di sottrazioni successive, vale a dire, se il processo va avanti all'infinito, le due grandezze alle quali è applicato sono incommensurabili. Questo criterio, tuttavia, è solo teorico; non può essere applicato in pratica. Gli antichi sembrano non avere mai fatto uso della X.2 nelle loro dimostrazioni matematiche.

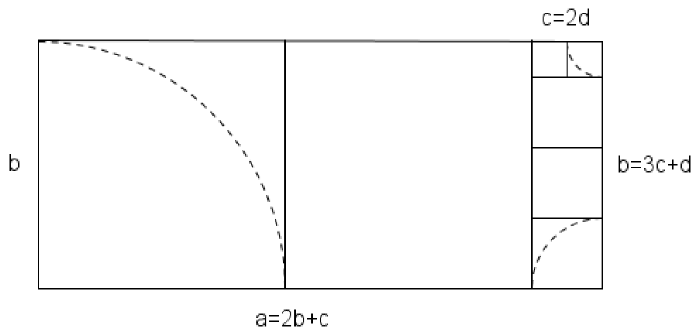

Fig. 2.5: Algoritmo dell'anthyphairesis applicato ai lati a e b di un rettangolo

Nell'esempio dato in figura 2.5, riportiamo b su a: il primo segmento è contenuto nel secondo un numero $n_0 = 2$ di volte; la parte rimanente è il segmento $c = a - 2b$. Ora riportiamo c su b: lo possiamo sovrapporre $n_1 = 3$ volte e la parte rimanente è il segmento $d = b - 3c$. Alla fine riportiamo d su c, e troviamo che d può essere sovrapposto esattamente $n_2 = 2$ volte senza lasciare alcun "resto". Quindi d misura c: cioè, se prendiamo d come unità di misura, c è esattamente 2 unità, $b = 3c + d = 3 \times 2 + 1 = 7$ unità e $a = 2b + c = 2 \times 7 + 2 = 16$ unità. Quindi a e b sono commensurabili dalla misura comune d.
La successione di numeri $n_0,\ n_1,\ n_2, \ldots$ è definita "anthyphairesis di a e b" (o spettro di a e b) e si denota di solito con $[n_0,\ n_1,\ n_2, \ldots]$[16]

2.3.1 Applicazione al quadrato

Nel caso delle grandezze incommensurabili, il procedimento dell'anthyphairesis continua *ad infinitum*, diventando i resti delle divisioni successive alla fine più piccoli di qualsiasi grandezza finita preassegnata, come Euclide dimostra in X.1 e X.2.
La dimostrazione del fatto che il procedimento può non avere termine, cioè

[16] L'anthyphairesis è costituita da una serie di sottrazioni che portano allo sviluppo di una frazione continua.
Così nell' esempio dato sopra dei due segmenti a e b la loro anthyphairesis può scriversi come segue:
$a = \mathbf{2}b + c$
$b = \mathbf{3}c + d$
$c = \mathbf{2}d$
quindi $a : b = [2,\ 3,\ 2] = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}$

che ogni resto è diverso da zero, produce come conseguenza l'assenza di una misura comune, cioè l'incommensurabilità delle grandezze considerate.
Se, ad esempio, si applica l'algoritmo dell'anthyphairesis al lato e alla diagonale di un quadrato si trova che le due grandezze sono incommensurabili.

Infatti, riportiamo AB su AC (una volta, $n_0 = 1$), la parte rimanente è EC. Ora bisogna riportare quest'ultima su BC: consideriamo la circonferenza di centro E e raggio EC e determiniamo il punto F intersezione di questa circonferenza e del lato BC. $EC = EF$ per costruzione e quindi il triangolo CEF sarà isoscele e l'angolo ECF è uguale all'angolo CFE. Ma l'angolo ECF è metà di un angolo retto, quindi l'angolo $ECF = CFE = \pi/4$:

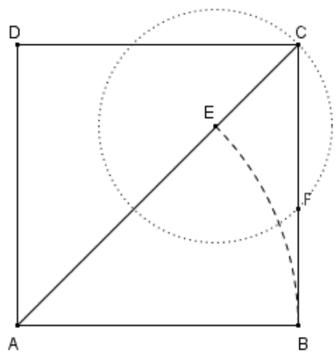

Fig. 2.6:

Segue allora che l'angolo CEF è retto, possiamo quindi costruire il quadrato $ECHF$ di lato EC, la sua diagonale sarà CF. Riportiamo ora EC su BC:

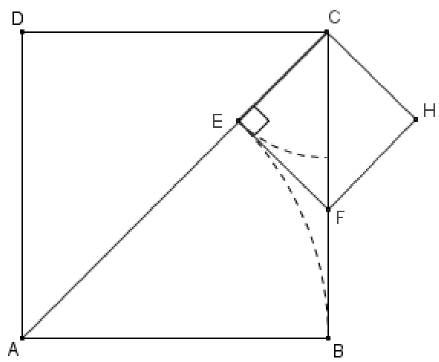

Fig. 2.7:

Dalla figura 2.8

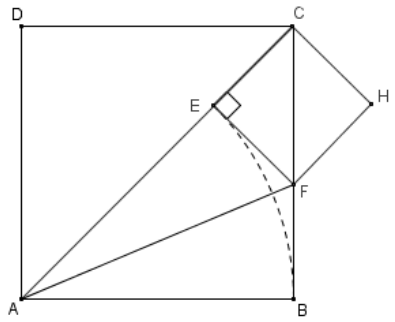

Fig. 2.8:

segue che, poiché i triangoli ABF e AEF sono uguali[17], $BF = EF = EC$, quindi occorre riportare di nuovo EC su $BC - BF = CF$[18], quindi $n_1 = 2$; essendo CF la diagonale del quadrato che ha per lato EF ci siamo di nuovo ricondotti al caso di riportare il lato di un quadrato sulla sua diagonale: il procedimento, quindi, non ha mai fine, e pertanto le due grandezze considerate sono incommensurabili e l'anthyphairesis del lato e della diagonale del quadrato è $[1, 2, 2, \ldots]$[19].

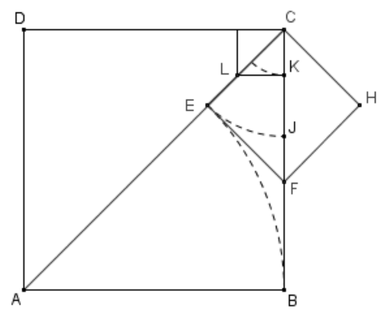

Fig. 2.9: Anthyphairesis applicata al lato s e alla diagonale d di un quadrato

[17] Essendo due triangoli rettangoli che hanno l'ipotenusa in comune e uguali i due cateti maggiori

[18] Cioè il segmento EC è contenuto nel segmento BC 2 volte, con resto non nullo. Quando lo riportiamo la prima volta otteniamo il segmento $BF = EF$; la seconda volta EF andrà riportato sul segmento rimanente FC e questo equivale di nuovo a riportare il lato di un quadrato sulla sua diagonale.

[19] Infatti dalla figura 2.9 si vede che se consideriamo il segmento LF si vengono a creare due triangoli uguali EFL e FKL, quindi $EL = LK = CK$ e quindi il segmento CK è contenuto in EC due volte, cioè $n_2 = 2$.

2.3.2 Applicazione al pentagono regolare

K. von Fritz propone la tesi secondo cui i Pitagorici[20] scoprirono inizialmente l'incommensurabilità applicando l'anthyphairesis al lato e alla diagonale del pentagono in modo da determinarne il rapporto[21].
La ricostruzione di von Fritz non è inverosimile per varie ragioni:

1. Il pentagono stellato compare già nell'arte babilonese.
2. Il pentagramma o stella a cinque punte era probabilmente il simbolo della scuola pitagorica.
3. Il dodecaedro è uno dei tre poliedri regolari noti ai Pitagorici.
4. C'è inoltre la testimonianza di Giamblico che associa la costruzione del dodecaedro regolare allo sfortunato Ippaso (cf. 1.1)

Vediamo allora in che modo l'algoritmo euclideo può portare alla scoperta.
Consideriamo il pentagono di figura 2.10
Applicando il metodo dell'anthyphairesis al lato BC e alla diagonale AB, si ha, poiché $BC = BD$, che il primo resto ottenuto è

$$AB - BC = AB - BD = AD.$$

[20]K.von Fritz, *Discovery*, pp. 256-260. In particolare von Fritz associa la scoperta a Ippaso di Metaponto in occasione della costruzione del pentagono regolare, che è la figura che forma le facce del dodecaedro regolare.

[21]Il rapporto tra la diagonale e il lato del pentagono regolare è uguale al «numero irrazionale» $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, il numero «aureo» che individua il rapporto tra le due parti in cui si divide un segmento in «media ed estrema ragione».
Per definizione, due segmenti A e B con $A > B$, sono in questo rapporto se il più grande A è il medio proporzionale tra il più piccolo e la loro somma; cioè,

$$(A + B) : A = A : B$$

da cui

$$A^2 = B(A + B.)$$

Ora, se A e B sono in questo rapporto, allora si trovano nello stesso rapporto anche $A+B$ e A (*Elementi*, XIII.5). Infatti, dati A e B in media ed estrema ragione, dove A è il più grande, allora $A^2 = B(A + B)$. Sommando $A(A + B)$ ad ogni membro dell'uguaglianza, si ottiene $A(A+B)+A^2 = A(A+B)+B(A+B)$ da cui $A(A+A+B) = (A+B)^2$, cioè $A + B$ e A sono in estrema e media ragione.
Ma è vero anche il contrario, vale a dire, se A e B sono in estrema e media ragione, allora lo sono anche B e $A - B$.
Così da questo vediamo che l'anthyphairesis di due segmenti in media ed estrema ragione produce sempre due grandezze nello stesso rapporto (medio ed estremo). Quindi, il procedimento, per grandezze in questo rapporto, continua indefinitamente.

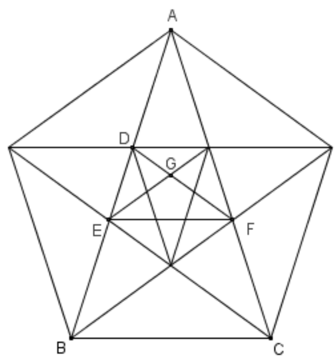

Fig. 2.10:

Dal momento che $BD = AE$, il resto successivo è

$$BD - AD = AE - AD = DE.$$

Ma il primo resto ottenuto AD è uguale a DF che è la diagonale del pentagono che viene formato all'interno del primo da tutte le sue diagonali, mentre il secondo resto DE è il lato del pentagono interno. Quindi nella tappa successiva dell'antanairesi ci siamo ricondotti nuovamente a riportare il lato di un pentagono regolare sulla sua diagonale.
Dal momento che le diagonali di ciascun pentagono formano sempre un altro pentagono regolare è evidente che la possibilità di continuare la sequenza, per produrre pentagoni sempre più piccoli, contraddice l'ipotesi che il rapporto iniziale $d : l$ possa essere uguale ad un rapporto tra interi, per il fatto che la riduzione successiva degli interi si arresta necessariamente all'unità e non può proseguire all'infinito. Quindi, le grandezze sono incommensurabili.

2.4 (*In*)Fondatezza della tesi precedente

Come osservato da Frajese[22], il fatto che il procedimento antanairetico non abbia mai termine, e che possa quindi essere spinto innanzi quanto si vuole, richiede che le grandezze siano *inesauribili per sottrazione*: cioè nel senso che sottraendo da una delle grandezze metà o più della metà, e ancora metà o più della metà dal resto, e così via, si possa continuare quanto si vuole.

[22][6], nota 2 pp. 598-599

Se si considera il caso particolare dei *segmenti* di retta, questa *ineusaribilità alla sottrazione* implica che: *Tra due punti di una retta è sempre possibile inserire almeno un punto intermedio*, cioè la retta è densa in sé. Questa proposizione corrisponde alla *inesauribilità* della retta, cioè alla proprietà che un segmento di retta, per quanto piccolo, contiene infiniti punti.
Quindi i punti, dovendo essere contenuti in numero infinito in un segmento finito, sono privi di dimensioni; in particolare privi di lunghezza. Siamo, quindi, alla concezione degli enti geometrici idealizzati.
Se, quindi, l'introduzione degli enti idealizzati ebbe luogo come conseguenza della scoperta della prima coppia di linee incommensurabili (lato e diagonale del quadrato), la dimostrazione di tale incommensurabilità non poteva essere compiuta con il metodo della X.2 (fondato sugli enti idealizzati) senza commettere una specie di petizione di principio[23]. Questa potrebbe essere la spiegazione del fatto, messo in evidenza sia da Knorr che da Frajese, che né presso Euclide, né presso altri matematici Greci si trova la dimostrazione dell'esistenza di grandezze irrazionali secondo il metodo dell'algoritmo euclideo della X.2 (applicazioni a casi specifici si devono solo ad alcuni scoliasti).
Un'altra possibilità è che questo criterio appaia negli *Elementi* solo come *residuo*[24] di una precedente concezione algoritmica del rapporto che la teoria delle proporzioni avrebbe sostanzialmente occultato. A questa teoria alluderebbe una dichiarazione esplicita di Aristotele che, in un passo dei *Topici* (158 b 29), espone in modo più esplicito di quanto non faccia Euclide *che cosa* è un rapporto[25]. Per Aristotele un rapporto è precisamente un'*antanairesis*:

[23]Fu proprio la scoperta dell'esistenza di grandezze incommensurabili a spingere ad una separazione delle grandezze e dei numeri. I Pitagorici prima di questa scoperta non distinguevano i numeri dai punti geometrici; Aristotele infatti descriveva il punto pitagorico come "unità dotata di posizione" o come "unità considerata nello spazio".

[24]B.L. van der Waerden, *Geometry and Algebra Civilizations*, cit., p. 137

[25]Euclide nel libro V ne dà la seguente definizione:

III. *Rapporto (λόγος) fra due grandezze omogenee è un certo modo di comportarsi rispetto alla quantità.*

Questa *definizione* è stata molto criticata, in quanto tautologica. Frajese dice a proposito: «è evidente che in essa Euclide non pretende di *definire* il rapporto, ma enuncia anzitutto una condizione (l'omogeneità) alla quale le grandezze devono soddisfare affinché si possa parlare di rapporto fra di esse.» La successiva definizione elabora il concetto di rapporto evidenziandone un'altra condizione, quella di applicarsi a grandezze archimedee:

IV. *Si dice che hanno fra loro rapporto le grandezze le quali possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente.*

> *Pare che anche nelle scienze matematiche alcune proposizioni non si dimostrino facilmente, per la mancanza di una definizione; così avviene, ad esempio, quando si afferma che la retta parallela al lato di un parallelogramma, e condotta sul lato di questo, divide in modo simile il lato e la superficie. Tuttavia, una volta enunciata l'espressione definitoria, diventa senz'altro chiaro quanto si vuol dire. Infatti, il numero di parti che viene sottratto alla superficie dal taglio della parallela è eguale al numero di parti che viene sottratto ai lati (*ossia superfici e lati hanno la stessa antanairesis*): orbene, questa è appunto la definizione di stesso rapporto.*

Alessandro di Afrodisia ha commentato la dichiarazione di Aristotele nel modo seguente:

> *Questa è la definizione di proporzionale usata dagli antichi: sono in proporzione l'una con l'altra (e simili l'una con l'altra) quelle grandezze che possiedono la stessa anthyphairesis. Ma egli ha chiamato antanairesis l'anthyphairesis*[26]

Il significato del termine greco antanairesis, che Alessandro di Afrodisia considera sinonimo di anthyphairesis, si spiega soprattutto in base al senso di *anti* e *ana*: vi si allude ad una specie di "antagonismo", a un confronto reciproco di due grandezze, e alla risoluzione di questo confronto per via di un processo che comporta la *ripetizione* (*ana*) di una stessa operazione elementare di *sottrazione* applicata a diverse grandezze che ubbidiscono a una formula ricorsiva.
La procedura quindi può servire, eventualmente, per dimostrare che due grandezze sono incommensurabili, per calcolare le approssimazioni numeri-

[26]Alexandri Aphrodisiensis *In Aristotelis Topicorum libros octo commentaria*, M. Wallies, Berolini, 1891, p.545.

che del loro rapporto[27] e, infine, per definire il concetto di *logos*[28]. Tuttavia, il fatto che le prime testimonianze relative all'irrazionalità - alcuni passi matematici in Platone e Aristotele - pongono invariabilmente l'accento sul caso, considerato paradigmatico, della diagonale e del lato del quadrato e su un tipo di dimostrazione indiretta, mina gravemente la tesi secondo cui il metodo dell'anthyphairesis ha avuto un ruolo di primo piano nella scoperta pitagorica dell'incommensurabilità.

2.5 Numeri laterali e numeri diagonali

Una stretta combinazione di proprietà di figure geometriche e di strutture algoritmiche si può trovare in uno dei più importanti strumenti di approssimazione del rapporto tra diagonale e lato di un quadrato, e cioè nei numeri "laterali e diagonali" che sono stati trattati da Teone di Smirne e da Proclo, il secondo dei quali associa il loro sviluppo ai Pitagorici. Teone di Smirne ne parla in questo modo:

> *Esattamente nel modo in cui i numeri sono studiati nella loro capacità di produrre triangoli, quadrati, pentagoni e le altre figure, così troviamo anche i rapporti tra lati e diagonali nella loro funzione di princìpi di generazione; poiché da essi dipende la disposizione ordinata delle figure. Quindi, poiché l'unità, in accordo con il principio generativo supremo, dà luogo a tutte le figure, così ancora nell'unità sarà trovato il rapporto tra diagonale e lato. Per chiarezza, si prendano due unità, delle quali una sia una diagonale e l'altra un lato, in quanto l'unità, come principio (αρχή) di tutte le cose, deve essere in potenza sia lato che diagonale. Quindi si aggiunga al lato una diagonale e alla*

[27]Nella consueta rappresentazione dell'algoritmo, lo spettro di una coppia di grandezze corrisponde ad una *frazione continua* f di cui i numeri $n_0,\ n_1,\ n_2,\dots$ costituiscono i quozienti o «denominatori parziali», e successive approssimazioni del rapporto $a : b$ si ottengono troncando in diversi punti la corrispondente frazione continua f. Si può allora denotare la frazione continua f con il simbolo che ne indica lo spettro, e definire il rapporto come la frazione continua generata dall'antanairesis:

$$f = n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \dots}}} = [n_0,\ n_1,\ n_2, \dots] = a : b.$$

[28]Infatti l'*antanairesis* dà luogo ad una sequenza di quozienti e di resti, e questa sequenza, finita o infinita, secondo la definizione di Aristotele, è il logos, il rapporto tra due grandezze, commensurabili o incommensurabili.

> *diagonale due lati, poiché la potenza del lato va presa due volte, come quella della diagonale una volta. La diagonale diventerà allora più grande, mentre il lato diventerà più piccolo.*[29]

Proclo invece afferma:

> *I pitagorici proposero questo elegante teorema sulle diagonali e i lati, e cioè che quando la diagonale riceve il lato di cui è diagonale, diventa un lato, mentre il lato, quando è aggiunto a se stesso e riceve la sua diagonale, diventa una diagonale. E questo è da lui [da Euclide] dimostrato graficamente nel secondo libro degli Elementi.*[30]

Vale che, se s_1 e d_1 sono rispettivamente il lato e la diagonale di un quadrato, allora si può costruire un nuovo quadrato avente lato $s = s_1 + d_1$ e diagonale $d = 2s_1 + d_1$. Questo si può vedere dalla figura 2.11.

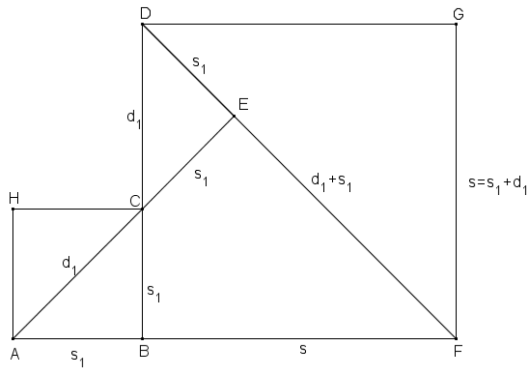

Fig. 2.11:

Partendo con il quadrato $ABCH$, il cui lato $AB = s_1$, si costruisce un nuovo quadrato più grande $BDGF$, il cui lato $BD = s_1 + d_1$. Si può facilmente vedere che i triangoli ABC e DCE sono congruenti, così $AB = CE = DE = s_1$. Così la diagonale del quadrato più grande è $DF = 2s_1 + d_1$. Quindi, abbiamo ottenuto un nuovo lato e una nuova diagonale dal lato e dalla diagonale date, come affermato.

La legge di ricorsione è quindi la seguente:

$$s_{n+1} = s_n + d_n \tag{2.1}$$

$$d_{n+1} = d_n + 2s_n \tag{2.2}$$

[29] I. Thomas, *Greek Mathemathical Works*, cit., vol. I, pp. 132-133

[30] *Ibid.*, pp. 136-139

Applicando queste formule si ottengono numeri laterali e diagonali positivi e sempre più grandi.
Teone di Smirne cita diverse coppie $(s,\ d)$ di numeri laterali e diagonali calcolati in base ai valori iniziali $s = 1$ e $d = 1$, precisamente:

$$(1,\ 1) \qquad (2,\ 3) \qquad (5,\ 7) \qquad (12,\ 17) \qquad \ldots$$

e aggiunge l'importante osservazione che, in ogni diade della successione, il quadrato della diagonale, d_n, è alternativamente più piccolo e più grande di un'unità rispetto al doppio del quadrato del lato, s_n[31]:

$$d_n^2 = 2s_n^2 + (-1)^n \tag{2.3}$$

L'uguaglianza (2.3) si può dimostrare per induzione.
Per $n = 1$ l'uguaglianza è certamente vera, infatti $1^2 = 2 \times 1^2 - 1$.
Supponendo che la relazione (2.3) valga per un certo n, si dimostra che vale anche per $n + 1$, infatti:

$$\begin{aligned} d_{n+1}^2 - 2s_{n+1}^2 &= (d_n + 2s_n)^2 - 2(d_n + s_n)^2 \\ &= d_n^2 + 4d_n s_n + 4s_n^2 - 2d_n^2 - 4d_n s_n - 2s_n^2 \\ &= -d_n^2 + 2s_n^2 = -(d_n^2 - 2s_n^2) \\ &= -(-1)^n = (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

La relazione dunque vale anche per $n + 1$, quindi vale per ogni n.
Dalla (2.1) e dalla (2.2) si ha che le due successioni s_{n+1} e d_{n+1} sono entrambe strettamente crescenti e poiché $s_{n+1} \geq 1 + s_n$ e $d_{n+1} \geq 1 + d_n$ le due serie sono divergenti; dall'uguaglianza $d_n^2 = 2s_n^2 + (-1)^n$, dividendo per s_n^2 si ottiene

$$\left(\frac{d_n}{s_n}\right)^2 = 2 + \frac{(-1)^n}{s_n^2}$$

[31]Questa proprietà, che è valida per la diade monadica e si trasmette per eredità ricorsiva a tutti i suoi successori, è il risultato dell'impossibilità dell'esistenza di un numero quadrato il cui doppio sia uguale ad un altro numero quadrato. In queste condizioni è estremamente significativo che si possa costruire una successione ricorsiva di numeri quadrati, s_n^2, il cui doppio, $2s_n^2$, sia il più vicino possibile, cioè di una monade indivisibile, con un altro numero quadrato, d_n^2. In effetti è proprio questa proprietà della diade $\Delta_2 = [3,\ 2]$ che viene verificata nel *Menone* quando Socrate fa notare al giovane schiavo che il quadrato $d^2 = 3^2$ è più grande di una monade rispetto a $2s^2 = 2 \cdot 2^2 = 8$. Per il caso della diagonale effabile $\Delta_3 = [7,\ 5]$, Platone cita esplicitamente nella *Repubblica* la stessa uguaglianza: $2 \cdot 5^2 - 7^2 = 1$. Essa si verifica anche per l'esempio $\Delta_4 = [17,\ 12]$, al quale Platone allude nel *Teeteto*: $17^2 - 2 \cdot 12^2 = 1$.

che ci dice che, poiché per $n \to \infty$, $s_n \to \infty$ e quindi $\dfrac{(-1)^n}{s_n^2} \to 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{d_n}{s_n}\right)^2 = 2$$

e quindi per la continuità della radice

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{s_n} = \sqrt{2}.$$

Corrispondentemente si avrà una serie infinita di diadi effabili[32] il cui *logos* ($d : s$) approssima sempre meglio il valore della radice quadrata di 2 [33]. I termini di ordine pari della successione $(-1)^n/(s_n^2)$ tendono a 0 da destra, mentre quelli di ordine dispari vi tendono da sinistra, e in effetti, se riscriviamo i numeri laterali e diagonali esplicitando il valore di ciascun rapporto, otteniamo:

Δ_1	$1 : 1$	1
Δ_2	$3 : 2$	$1,5$
Δ_3	$7 : 5$	$1,4$
Δ_4	$17 : 12$	$1,41\overline{6}$
Δ_5	$41 : 29$	$1,4137931\ldots$
Δ_6	$99 : 70$	$1,4142857\ldots$
Δ_7	$239 : 169$	$1,4142011\ldots$
Δ_8	$577 : 408$	$1,4142156\ldots$

cioè il rapporto dei termini di ciascuna diade approssima sempre meglio il valore di $\sqrt{2} = 1,41421356237\ldots$ e si vede, in particolare come *le diadi di*

[32] Con il termine *diade effabile* si intende *coppia di numeri esprimibile*, cioè di cui si può parlare, che è pensabile, razionale.

[33] Il rapporto $d : s$ è uguale ogni volta ad una frazione $[1, 2, \ldots 2]$ nella quale il 2 compare un certo numero finito di volte. Cioè data la frazione continua

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}$$

che rappresenta l'anthyphairesis del lato e della diagonale di un quadrato, i numeri laterali e diagonali si possono ottenere come segue:

$$\frac{1}{1}, \qquad 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \qquad 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{7}{5}, \ldots.$$

ordine pari tendano al valore di $\sqrt{2}$ per eccesso, mentre le diadi di ordine dispari vi tendano per difetto:

$$1 \qquad \frac{7}{5} \qquad \frac{41}{29} \qquad \rightarrow \qquad \rightarrow \quad \sqrt{2} \quad \leftarrow \qquad \leftarrow \frac{99}{70} \qquad \frac{17}{12} \qquad \frac{3}{2}.$$

2.6 Numeri laterali e diagonali e successioni di Cauchy

I numeri laterali e diagonali definiti in precedenza possono essere definiti anche in un altro modo. Se considero la sottosuccessione costituita dalle diadi di ordine pari

$$(2,\ 3) \qquad (12,\ 17) \qquad (70,\ 99) \qquad (408,\ 577) \qquad \ldots$$

questa può essere definita induttivamente nel modo seguente:
$s_1 = 2$, $d_1 = 3$ e per ogni $n \geq 2$:

$$s_n = 3s_{n-1} + 2d_{n-1} \tag{2.4}$$

$$d_n = 4s_{n-1} + 3d_{n-1} \tag{2.5}$$

si dimostra per induzione che $d_n^2 - 2s_n^2 = 1$ che è la proprietà fondamentale delle diadi (2.3) per n pari[34].
Dividendo nella formula precedente tutto per s_n^2 si ottiene

$$\left(\frac{d_n}{s_n}\right)^2 = 2 + \left(\frac{1}{s_n^2}\right)$$

Ora $\{s_n\}_{n\geq 1}$ è una successione di numeri naturali divergente; così $\left(\dfrac{d_n}{s_n}\right)^2$ converge a 2.
Questo modo di definire le successioni dei numeri laterali e diagonali è utile

[34] Allo stesso modo la successione delle diadi di ordine dispari

$$(5,\ 7) \qquad (29,\ 41) \qquad (169,\ 239) \qquad (985,\ 1393) \qquad \ldots$$

può essere definita induttivamente nel modo seguente:
$s_1 = 5$, $d_1 = 7$ e per ogni $n \geq 2$:

$$s_n = 3s_{n-1} + 2d_{n-1}$$

$$d_n = 4s_{n-1} + 3d_{n-1}$$

si dimostra per induzione che $d_n^2 - 2s_n^2 = -1$.

per dimostrare che il campo dei numeri razionali ammette successioni di Cauchy[35] non convergenti nel campo stesso.
Infatti se consideriamo una successione di numeri razionali positivi $\{b_n\}_{n\geq 1}$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} b_n^2 = 2$$

(cioè $\{b_n^2\}_{n\geq 1}$ è una successione di Cauchy), anche la successione $\{b_n\}_{n\geq 1}$ è di Cauchy[36] in $\mathbb{Q}$ e non converge in $\mathbb{Q}$.
È sufficiente, infatti, considerare due successioni $\{x_n\}_{n\geq 1}$, $\{y_n\}_{n\geq 1}$ di numeri naturali definite rispettivamente come in (2.4) e in (2.5), e porre $b_n = \dfrac{y_n}{x_n}$, allora per quanto detto in precedenza $\{b_n^2\}_{n\geq 1}$ converge a 2. $\{b_n\}_{n\geq 1}$ è anch'essa di Cauchy e non è convergente in $\mathbb{Q}$ [37], in quanto il suo limite è $\sqrt{2}$ che non appartiene a $\mathbb{Q}$.

2.7 Origine dei numeri laterali e diagonali

Per quanto riguarda l'origine dei numeri laterali e diagonali si possono formulare solo ipotesi. Knorr ritiene verosimile che essi derivino da esperienze con l'espansione antifairetica del rapporto tra lato e diagonale del

[35] Una successione $\{a_n\}_{n\geq 1}$ in un anello ordinato $(A, \leq)$, è di Cauchy in A se per ogni $\varepsilon > 0$ in A esiste un indice p tale che per ogni $n,\ m \geq p$ si abbia $|a_n - a_m| < \varepsilon$.
Si dirà che $\{a_n\}_{n\geq 1}$ a termini in A converge in A ad un elemento $a \in A$ quando per ogni $\varepsilon > 0$ in A esiste un indice p tale che per ogni $n \geq p$ si abbia $|a_n - a| < \varepsilon$. In questo caso si scrive $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

[36] Per assurdo, supponiamo che esista un numero razionale $c > 0$, tale che per ogni $\overline{n}$ esistano $m,\ n \geq \overline{n}$ con

$$|b_m - b_n| > c$$

Ne segue

$$b_m^2 + b_n^2 - 2b_m b_n > c^2$$

quindi, supponendo $b_m \geq b_n \geq 0$

$$|b_m^2 - b_n^2| = b_m^2 - b_n^2 > c^2 + 2b_m b_n - 2b_n^2 = c^2 + 2b_n(b_m - b_n) \geq c^2 > 0.$$

assurdo per l'ipotesi che $\{b_n^2\}_{n\geq 1}$ sia di Cauchy.

[37] Infatti se $\{b_n\}_{n\geq 1}$ convergesse a $q \in \mathbb{Q}$, per ogni $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ esisterebbe un indice p tale che per ogni $n > p$ si avrebbe

$$|b_n - q| < \varepsilon, \qquad |b_n + q| < q + q + \varepsilon$$

pertanto $|b_n^2 - q^2| < \varepsilon(2q + \varepsilon)$ e la successione $\{b_n^2\}_{n\geq 1}$ convergerebbe a q^2 da cui $q^2 = 2$ che è assurdo.

quadrato[38]. Proclo parla per due volte della regola per generare i numeri laterali e diagonali, e tutte e due le volte dice che la regola risale ai Pitagorici. Egli riporta la dimostrazione aritmetica effettuata dai Pitagorici della proprietà (2.3). Ma questo teorema è, come si esprime Proclo, *elegante* perché se ne può dare una dimostrazione geometrica, istituendo così una perfetta corrispondenza tra Numero e Figura[39]. La forma geometrica può essere provata, ci dice, come fa Euclide "per mezzo di segmenti"

[38]S. Heller ha proposto una tesi in cui collega l'anthyphairesis ai numeri laterali e diagonali per dimostrare l'incommensurabilità del lato e della diagonale del quadrato.
Infatti è possibile invertire le formule (2.1) e (2.2) così che il quadrato più piccolo in figura 2.11 sia derivato da quello più grande; cioè se s e d sono il lato e la diagonale dati allora $s_1 = d - s$ e $d_1 = 2s - d$ sono il lato e la diagonale del quadrato più piccolo.
E in questo caso la legge di ricorsione è la seguente:

$$s_{n+1} = d_n - s_n \tag{2.6}$$

$$d_{n+1} = 2s_n - d_n \tag{2.7}$$

Ora, supponiamo di eseguire l'anthyphairesis sul lato e sulla diagonale dati, s e d. Il primo resto r_0 sarà

$$r_0 = d - s = s_1$$

cioè, il lato del quadrato (più piccolo) ottenuto. Poiché s_1 è minore di s, il secondo resto sarà

$$r_1 = s - s_1 = d_1$$

cioè, il diametro del quadrato ottenuto. Procedendo allo stesso modo, dal momento che d_1 e più grande di s_1, il prossimo resto sarà

$$r_2 = d_1 - s_1 = s_2$$

cioè, il lato del successivo quadrato più piccolo ottenuto nello stesso modo dai segmenti s_1 e d_1. Il resto successivo sarà

$$r_3 = s_1 - s_2 = d_2$$

cioè la diagonale del secondo quadrato ottenuto.
È ovvio da questo che i resti saranno alternativamente i lati e le diagonali di una sequenza infinita di quadrati decrescenti generati dalla nostra formula. Quindi, l'anthyphairesis continua *ad infinitum* e il lato e la diagonale dati sono incommensurabili.
Tuttavia una tale investigazione di questi rapporti implica già una competenza teorica abbastanza avanzata per gestire questa procedura algoritmica piuttosto sottile. Si sa per certo che un tale livello era stato raggiunto dai geometri degli inizi del quarto secolo - in parte stimolati da un interesse nello studio delle rette incommensurabili ma l'aritmetica del quinto secolo difficilmente tradisce segni di una simile finezza.

[39]Toth afferma:

> *Quello che i Pitagorici hanno scoperto è che l'antanairesi della diagonale e del lato di un quadrato «genera per necessità intrinseca la successione infinita dei numeri diagonali e laterali delle diadi» delle «diagonali effabili».*

($\gamma\rho\alpha\mu\mu\iota\kappa\tilde{\omega}\varsigma$), mentre la forma Pitagorica è dimostrata "per mezzo di numeri" ($\delta\iota\grave{\alpha}\ \tau\tilde{\omega}\nu\ \alpha\rho\iota\vartheta\mu\tilde{\omega}\nu$).
Il teorema cui fa riferimento Proclo è il II.10 degli *Elementi* che può essere tradotto algebricamente dalla formula:

$$(2a + x)^2 + x^2 = 2a^2 + 2(a + x)^2 \tag{2.8}$$

che nella variante

$$(2a + x)^2 - 2(a + x)^2 = 2a^2 - x^2$$

esprime la proprietà fondamentale (2.3) dei numeri laterali e diagonali. Infatti se a e x soddisfano una delle due relazioni $x^2 - 2a^2 = \pm 1$, allora si possono costruire $a+x$ e $2a+x$ che soddisfano l'altra relazione. La formula "euclidea" (2.8) è d'altra parte la chiave della costruzione di una sequenza infinita, autosimilare, di quadrati che riproduce graficamente il meccanismo di generazione dei numeri laterali e diagonali. Infatti, la dimostrazione geometrica è la seguente: si costruisca un quadrato di lato AB, e si prolunghi il lato di una quantità uguale ($BC = AB$), si aggiunga un segmento uguale alla diagonale ($CD = BE$) e su questi due segmenti si costruisca un secondo quadrato; si prolunghi ancora il lato di questo secondo quadrato di BD e DF che vengono a formare il lato di un terzo quadrato (fig. 2.12).

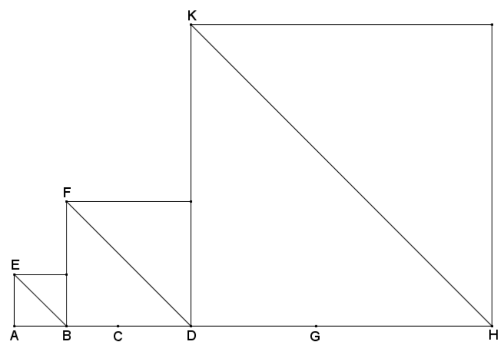

Fig. 2.12:

Ponendo $AB = a$ e $CD = x$, per la relazione (2.8) risulta che

$$(2AB + CD)^2 + CD^2 = 2AB^2 + 2(AB + CD)^2.$$

Poiché $2AB^2 = EB^2 = CD^2$, si ottiene $AD^2 = 2BD^2$, e quindi AD è la diagonale del quadrato di lato BD. Poiché $AD = 2a + x$ e $BD = a + x$, si verifica graficamente che, se x è la diagonale corrispondente ad a, allora in corrispondenza al lato $a+x$ si ha una diagonale $2a+x$. Questa costruzione ci dà, quindi, il procedimento per generare i numeri laterali e diagonali. Tuttavia è verosimile che questi numeri siano stati scoperti dai Pitagorici prima di Euclide, e quindi potrebbero essere stati scoperti per una via diversa da quella indicata sopra.

Ciò che si evince dai discorsi di Proclo e degli altri scrittori è che *i numeri laterali e diagonali sono un algoritmo progettato per approssimare il rapporto geometrico del lato e della diagonale.*

Che questo fosse l'utilizzo che si faceva dell'algoritmo risulta evidente dalla terminologia. Teone e Giamblico parlano del *πλευρικὸς καὶ διαμετρικὸς λόγος*, "rapporto lato e diagonale", e i numeri nella sequenza sono chiamati "laterali" e "diagonali". Platone (*Repubblica* 546c), e Proclo seguendo quest'ultimo, distinguono la "diagonale razionale", *ρητὴ διάμετρος*, dalla "diagonale irrazionale", *ἄρρητος διάμετρος*, il cui quadrato è proprio il doppio del quadrato del lato corrispondente[40]. Una conferma dell'utilizzo dell'algoritmo per l'approssimazione è il fatto che Aristarco usi 7/5 per il rapporto, e Erone usi il valore 17/12.

Risulta così che i Pitagorici utilizzarono l'algoritmo non come un dispositivo teorico per dimostrare l'irrazionalità della diagonale, ma come un dispositivo pratico per approssimarla. Ma è concepibile, secondo Knorr, che la scoperta di tale algoritmo, portando ad una infinità di valori sempre approssimanti ma che non eguagliavano mai il valore limite, potrebbero inizialmente essere stati mal interpretati come una dimostrazione di incommensurabilità.

[40] Platone parla delle diagonali razionali e irrazionali di 5 pensando a 7 e a $\sqrt{50}$ rispettivamente.

Capitolo 3

L'irrazionalità di $\sqrt{2}$ in Aristotele. Una nuova ipotesi

In questo capitolo presenteremo una nuova dimostrazione dell'irrazionalità di radice quadrata di 2 presentata recentemente da Salomon Ofman sulla rivista *Philosophie Antique*[1].

3.1 Il testo di Aristotele

La principale difficoltà cui vanno incontro le interpretazioni «standard» si trova nella testimonianza aristotelica. La conclusione (impossibile) alla quale si approda nel testo non è che *un* numero dispari sarebbe uguale a *un* numero pari o che un numero sarebbe contemporaneamente pari e dispari, che è ciò cui giungono le altre dimostrazioni.
L'asserzione di Aristotele è molto più forte, perché dall'ipotesi per assurdo, egli conclude che *i numeri dispari diventerebbero pari.*
Aristotele lo ripete due volte in termini identici:

> *γίγνεσθαι τὰ περιττὰ* (*i* dispari) *ἴσα* (uguali) *τοῖς αρτίοις* (*ai* pari):
> i (numeri) dispari diventano uguali ai (numeri) pari
> (*An. pr.* I, 23, 41a27)

e una riga più in basso:

> *ἴσα γίγνεσθαι τὰ περιττὰ τοῖς αρτίοις* (*An. pr.* I, 23, 41a28)

[1]cf. [13]

E ancora un po' dopo, passa dalla modalità di movimento (γίγνεσθαι, diventano) a quella di riposo (εἶναι, sono):

> τὰ περιττὰ ἴσα εἶναι τοῖς αρτίοις: *«i numeri dispari sono uguali ai numeri pari»* (*An. pr.* I, 44, 50a38)

In queste tre frasi, la contraddizione non è mai presentata sotto forma di un doppio predicato (pari e dispari) associato ad un numero, ma sotto forma di una relazione di uguaglianza (attraverso il termine ἴσα) tra la totalità dei numeri dispari e la totalità dei numeri pari, i neutri plurali (περιττὰ, αρτίοις) designano la classe generale definita dal nome.
È importante la struttura stessa della frase. Le frasi usate dai commentatori di Aristotele: «un pari è uguale a un dispari» o «un numero è contemporaneamente pari e dispari» sono frasi simmetriche, perché è la stessa cosa dire che un numero è «pari e dispari» o «dispari e pari»; o ancora, che «un pari è uguale a un dispari» o che «un dispari è uguale a un pari».
Al contrario la frase di Aristotele è asimmetrica. Essa non indica, almeno direttamente, una identificazione tra i pari e i dispari, ma piuttosto che i dispari sarebbero pari, cioè si avrebbe un "crollo" dei dispari nei pari (e non viceversa).
Aristotele usa il termine ἴσα ma non nel senso di uguaglianza numerica, infatti l'insieme dei numeri pari e l'insieme dei numeri dispari sono due insiemi infiniti e Aristotele per rigettare il carattere numerico dell'infinito nella *Metafisica* sfrutta proprio il fatto che ogni numero deve essere o pari o dispari mentre l'infinito non è né l'uno né l'altro[2].
In matematica l'uguaglianza è una relazione simmetrica, ma se Aristotele riprende un risultato matematico lo fa in un quadro filosofico, e l'uguaglianza nel linguaggio comune non è una relazione simmetrica[3]. Aristotele utilizza il termine ἴσα nel senso di un attributo, i dispari *diventerebbero* pari (sono sempre i dispari che ricevono l'attributo). Da cui la asimmetria sistematica dei tre enunciati aristotelici, dove sono sempre i dispari a ricevere l'assegnazione. L'ambiguità della frase è che, i dispari una volta *divenuti* pari, vengono identificati con questi ultimi e assistiamo così ad una scomparsa dei dispari in favore dei pari.

[2] *Metafisica,* M, 8, 1084a1-2

[3] Ofman fa l'esempio dell'uguaglianza dei diritti:

> *Quando gli amici degli animali chiedono che i «loro diritti siano uguali a quelli degli uomini» non lo fanno al fine di ridurre quelli degli uomini, e riportare quest'ultimi a delle bestie. Al contrario si tratta di chiedere che i diritti dei primi diventino uguali a quelli dei secondi.*

Resta da vedere qual è la dimostrazione vista da Aristotele, che gli permette di concludere l'inclusione dei dispari nei pari.
Le dimostrazioni «standard» di irrazionalità si basano sulla proposizione VII.22 degli *Elementi* di Euclide:

> *I numeri più piccoli, fra quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto, sono primi tra loro.*

la cui prova è ottenuta tramite un ragionamento per assurdo.
Ora, Aristotele usa l'esempio dell'irrazionalità come esempio paradigmatico di dimostrazione per assurdo (*An. pr.*, I, 23. 41a23-31):

> *In realtà, tutti coloro che sviluppano una prova mediante riduzione all'assurdo, da un lato deducono sillogisticamente una proposizione falsa, e dall'altra provano la conclusione - che da principio si è stabilito di dedurre - partendo da una ipotesi, quando cioè dall'assunzione della premessa contraddittoria a tale conclusione discende qualcosa di assurdo. Una prova di questo tipo, ad esempio, è quella che stabilisce l'incommensurabilità della diagonale, fondandosi sul fatto che quando viene supposta la sua commensurabilità, i numeri dispari risultano uguali ai numeri pari. Orbene, da un lato, che i numeri dispari diventino eguali ai numeri pari, viene dedotto sillogisticamente, e d'altro lato, che la diagonale sia incommensurabile, viene provato con l'appoggio di un'ipotesi, in quanto dall'assunzione della premessa contraddittoria discende una proposizione falsa. Come infatti abbiamo visto, il ragionamento sillogistico mediante la riduzione all'assurdo consiste appunto in questo, cioè nel provare qualcosa di assurdo attraverso l'ipotesi iniziale.*

Se la prova primitiva dell'incommensurabilità passava attraverso la proposizione VII.22, allora il tipo di ragionamento per assurdo non sarebbe apparso per trattare dell'irrazionalità, ma in un quadro numerico (intero), per dimostrare questo risultato: ogni rapporto (intero) è rappresentabile tramite il rapporto di due interi relativamente primi. Quindi Aristotele avrebbe scelto l'esempio dell'irrazionalità arbitrariamente, dando così prova di incoerenza dal momento che l'esempio fondamentale per illustrare il modo di ragionamento per assurdo richiederebbe l'uso di un risultato intermedio anch'esso dimostrato per assurdo. Per evitare ogni circolarità nella presentazione, è la proposizione VII.22 che avrebbe dovuto scegliere, essendo il caso più semplice.

Eppure, sia in Platone che in Aristotele, non troviamo alcuna allusione ad una costruzione comprendente due ragionamenti per assurdo, l'uno che prova la proprietà di rappresentazione dei rapporti interi tramite due interi relativamente primi, poi, da lì, l'impossibilità della razionalità della radice quadrata di 2.
Per evitare queste difficoltà S. Ofman dà una dimostrazione di irrazionalità che non passa attraverso un risultato dimostrato per assurdo e che, soprattutto, si accorda con i testi aristotelici.

3.2 Il metodo di decomposizione pari/dispari

La dimostrazione data da Ofman si basa sul metodo molto antico del pari e del dispari che risale ad almeno 4000 anni fa. Si tratta non solo di dividere i numeri tra pari e dispari ma di considerare il numero massimo di volte che un numero può essere diviso per 2, prima di arrivare a un numero dispari.
In linguaggio moderno il metodo può essere descritto nel modo seguente:
Per ogni intero n pari[4], abbiamo $n = 2^h u$ dove h è il numero massimo di divisioni di n per 2, e u è un dispari.
Così, ad esempio
$28 = 2 \times 14 = 2 \times 2 \times 7$ è divisibile 2 volte per 2, vale a dire $h = 2$ o ancora $28 = 2^2 \times 7$.
La scrittura di ogni intero pari nella forma $n = 2^h u$ deriva naturalmente dalla distinzione dei numeri in pari e dispari, e permette di suddividere l'insieme dei numeri in maniera ancora più precisa ripetendo ulteriormente questa suddivisione sui pari.
Il metodo viene chiamato *decomposizione pari/dispari* di n e h viene chiamato *grado di parità* di n.
Se poniamo:
N l'insieme degli interi, **D** l'insieme dei dispari, **P** l'insieme dei pari,
2D l'insieme dei dispari moltiplicati per 2, **2P** l'insieme dei pari moltiplicati per 2,
4D l'insieme dei dispari moltiplicati per 4, **4P** l'insieme dei pari moltiplicati per 4,
e così di seguito, otteniamo la tabella della figura 3.1:

[4]Oggi l'ipotesi n pari è superflua perché per $h = 0$ si ha $2^0 = 1$

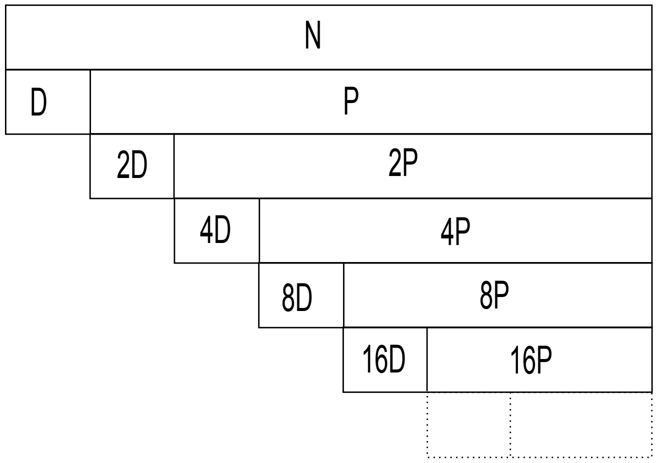

Fig. 3.1:

Questa tabella[5] descrive i pari sotto forma di una successione:

$$2(2n+1),\ 4(2n+1),\ 8(2n+1),\ 16(2n+1),\ldots$$

Una tale successione di potenze di 2 si ritrova nei più antichi testi greci non matematici. Già il ragionamento per dicotomia di Zenone si fonda sulle potenze di due e sui loro inversi, vale a dire le frazioni della forma $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. E l'Ateniese delle *Leggi* di Platone propone di fissare la pena per le recidive nel modo seguente:

> *Se qualcuno nell'ambito di qualche arte che esercita partecipa del commercio al minuto indegno di un uomo libero, sia accusato, davanti ai cittadini giudicati primi per virtù, da chiunque vuole farlo, con l'accusa di disonorare la sua stirpe, e se risulti insudiciare con una pratica indegna il focolare suo e dei suoi padri, condannato a un anno di carcere, sia allontanato da quella occupazione; se recidivo, sarà condannato ad altri due anni di carcere, e ad ogni ricaduta nella condanna continuerà a fare dei raddoppi in relazione al tempo di detenzione precedente*[6].

Più in generale il metodo diairetico o dicotomico utilizzato da Platone per la ricerca delle definizioni prende come modello questa successione[7]. Il procedimento è così sintetizzabile: preso un «tutto uno» (ólon), lo si divide nelle

[5] È essenzialmente dovuta a Nicomaco, ma gli storici la fanno risalire ai pitagorici antichi
[6] Platone, *Leggi*, 919e6-920a3
[7] Vedere per esempio la quasi totalità del *Sofista*; *Fedro* 266a

due parti/aspetti complementari che in esso sono riconoscibili, e di queste due parti si sceglierà quella che interessa per la ricerca in corso, dividendola a sua volta in due. Così facendo, ripetendo la divisione per ogni aspetto di nostro interesse fino a giungere all'oggetto d'indagine, l'intero di partenza sarà alla fine diviso nelle sue varie forme (eidos). Da qui, risalendo a ritroso seguendo le varie ramificazioni ottenute, è possibile ritrovare la definizione dell'oggetto studiato, unificando i vari aspetti di nostro interesse.
In un testo in cui critica la procedura dicotomica platonica, Aristotele osserva che questa conduce a ciò:

> *le differenze ultime sarebbero dell'ordine di 4 o ci sarebbe qualche altro tra i numeri binari successivi [dunque le potenze di 2].*

Egli rimprovera inoltre a Platone di affermare che le sole divisioni naturali sarebbero di potenze di 2, l'errore che quest'ultimo commette è dimenticare il fattore dispari che interviene quando si considera un numero in generale.

3.3 Proprietà della decomposizione pari/dispari

(a) *Il grado di parità di un prodotto è la somma dei gradi di parità di ciascuno dei termini del prodotto*, vale a dire
$m = 2^k u$ (con u dispari) e $n = 2^h v$ (con v dispari)
allora
$m \times n = 2^{k+h} w$ (con w dispari, $w = u \times v$).
Questa proprietà è chiamata *additività del grado di parità*[8].
Da questa proprietà consegue che, il grado di parità di $m^2 = m \times m$ è il doppio del grado di parità di m. Si ha dunque la proprietà seguente, chiamata *proprietà dei gradi di parità dei quadrati*:
il grado di parità di un quadrato è sempre pari.
Allo stesso modo, *il grado di parità di un cubo è sempre un multiplo di 3*, che chiameremo *proprietà dei gradi di parità dei cubi.*

3.4 La dimostrazione dell'incommensurabilità della diagonale al lato del quadrato

Si procede tramite una dimostrazione per assurdo.
Si tratta di dimostrare che supporre l'esistenza di due interi m e n di rap-

[8] Se uno dei due numeri è dispari, il grado di parità del prodotto è uguale al grado di parità del numero pari

porto uguale a $\sqrt{2}$ conduce ad un'impossibilità.
Supponiamo dunque che $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.
Elevando al quadrato, si ottiene $2 = (\frac{m}{n})^2 = \frac{m^2}{n^2}$, o ancora

$$2n^2 = m^2 \tag{3.1}$$

Per l'additività dei gradi di parità, il grado di parità di $2n^2$ è uguale a quello di n^2 aumentato di uno. Per la proprietà dei gradi di parità dei quadrati, il grado di parità di n^2 e di m^2 sono pari.
I termini di sinistra e di destra dell'uguaglianza (3.1) rappresentano lo stesso numero, quindi hanno lo stesso grado di parità.
Si ha quindi che: un numero pari aumentato di 1 è uguale ad un numero pari.
L'unità, differenza di due pari, è dunque pari[9].
Per definizione, un numero dispari è la somma di un pari e di una unità[10].
Essendo ora l'unità pari, allora ogni dispari è somma di due pari, e poiché la somma di due pari è ancora pari, si ottiene che ogni dispari è pari, e quindi il crollo dei dispari nei pari, che è proprio la contraddizione indicata per tre volte nei *Primi Analitici* di Aristotele.
Questa dimostrazione non utilizza la proposizione VII.22 degli Elementi, che è il centro della prova generale dell'irrazionalità degli interi non quadrati.
Ofman afferma[11]:

> *Dal punto di vista matematico, la tendenza è, in effetti, la generalizzazione e l'oblio delle tappe storiche intermedie*

per mettere in evidenza il fatto che una volta che il risultato è stato ottenuto, l'attenzione si è spostata dalla parità alla primalità, e il risultato particolare riguardante 2 così come il metodo basato sulla parità sono scomparsi.

[9] L'unità sarebbe allora divisibile per 2, e così la più grande paura dei matematici greci sarebbe realizzata: l'unità apparirebbe non più come una, ma un insieme di parti (*Repubblica*, VII, 525e5). Per i Greci antichi, l'unità era precisamente concepita, per definizione, come indivisibile. D'altra parte, poiché 1 è il più piccolo dispari e 2 il più piccolo pari, si avrebbe 1=2 ed essendo l'unità ciò tramite cui il numero è definito, vale a dire una «pluralità» di unità, se 1 fosse uguale a 2, tutti i numeri sarebbero pari, e si ritroverebbe l'assurdità che tutti i dispari diventano pari.

[10] *Elementi*, libro VII def. VII: *Numero dispari è quello che non è divisibile in due parti (=numeri) uguali, ossia quello che differisce di una unità da un numero pari.*

[11] cf. [13]

Invece nella costruzione proposta da Ofman la parità gioca un ruolo essenziale, tramite la decomposizione pari/dispari. Nella dimostrazione, essa interviene in modo molto speciale, concludendo che l'unità diventa pari. Da qui segue il crollo della nozione stessa di parità.
Si possono allora interpretare letteralmente questi testi dei *Primi Analitici.* Si conclude in effetti, non più che *un* numero dispari è uguale a un pari, o ancora che *un* numero è contemporaneamente pari e dispari, che è ciò cui giungono le altre dimostrazioni, ma che *ogni dispari è pari.* O ancora, in termini aristotelici, che (il genere) dispari è (il genere) pari.

3.5 Conseguenze

(a) *Il risultato resta vero per ogni numero pari il cui grado di parità è dispari*
È sufficiente ripetere la dimostrazione precedente.
Sia $x = 2^i s$ un intero, con i e s dispari.
Supponiamo per assurdo che esistano due interi m e n il cui rapporto sia uguale a $\sqrt{x}$.
Elevando al quadrato si ottiene:

$$x = (\frac{m}{n})^2 = \frac{m^2}{n^2}$$

o ancora

$$x \times n^2 = m^2 \tag{3.2}$$

Questa uguaglianza significa che i termini di sinistra e di destra rappresentano lo stesso numero, quindi hanno lo stesso grado di parità. Il grado di parità di $x \times n^2 = m^2$ è uguale al grado di parità di x (cioè i) sommato al grado di parità di n^2. Il grado di parità di n^2 e di m^2 è pari, quindi la somma di un numero dispari i e di un numero pari (il grado di parità di n^2) è uguale ad un numero pari (il grado di parità di m^2).
Ma la somma di un dispari e di un pari è dispari, si ha quindi un'uguaglianza tra un pari e un dispari, da cui un'impossibilità[12].

[12]A differenza del paragrafo precedente, l'assurdo cui si arriva qui non è che l'unità è pari, ma che la somma di un dispari e di un pari è pari. Poiché questo risultato ingloba come caso particolare quello di $x = 2$, esso avrebbe potuto far "dimenticare" ai matematici posteriori la conclusione impossibile della prima dimostrazione (l'unità è pari), a favore dell'uguaglianza tra un dispari e un pari che ritroviamo nelle dimostrazioni standard.

Applicazioni

Le radici quadrate di tutti i numeri pari come 2, 6, 8, 10, 14 (ma non 4, 12, 16[13]) sono irrazionali.
(b) *L'irrazionalità è ricondotta al solo caso dei numeri dispari*
Si utilizza qui una proprietà dei quadrati: se moltiplichiamo il lato di un quadrato per un intero a otteniamo un quadrato la cui area è a^2 volte più grande di quella del primo[14].
Dal momento che $\sqrt{t}$ è il lato di un quadrato di superficie t, in scrittura moderna, questo dà $\sqrt{a^2t} = a\sqrt{t}$ dove a et sono degli interi.
Consideriamo ora il caso di un intero dispari y con grado di parità pari, cioè la sua decomposizione pari/dispari dà:
$y = 2^{2i}s$ dove s è dispari.
1. Dire che la radice quadrata di y è razionale vuol dire che esistono due interi p e q tali che:

$$\sqrt{y} = \frac{p}{q}$$

o ancora che

$$\sqrt{2^{2i}s} = 2^i\sqrt{s} = \frac{p}{q}$$

vale a dire che $\sqrt{s}$ è razionale[15].
Quindi, per ogni intero pari $z = 2^jw$ sono possibili due casi:

- j è dispari, quindi $\sqrt{z}$ è irrazionale
- j è pari, quindi $\sqrt{z}$ è razionale (o irrazionale) a seconda che lo è $\sqrt{w}$ (o che non lo è)

2. L'esistenza della radice quadrata di w (intero dispari) razionale è equivalente a dire che w è il quadrato di un numero razionale, cioè esistono due interi m e n tali che:

$$w = (\frac{m}{n})^2 = \frac{m^2}{n^2}$$

[13]Il senso di questa parentesi non è che $\sqrt{4}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{16}$ non sono irrazionali ma solo che questo risultato non può essere ottenuto dal discorso precedente, in quanto il grado di parità di questi numeri non è dispari

[14]Così, duplicando il lato di un quadrato, otteniamo un quadrato 4 volte più grande, come Socrate mostra al giovane servitore del *Menone* di Platone (82e-83b), che pensava invece di duplicare il quadrato iniziale.

[15]La razionalità di $\sqrt{y}$ equivalente a quella di $\sqrt{s}$ stesso discorso vale per la loro irrazionalità

o ancora

$$w \times n^2 = m^2.$$

Se $m = 2^h u$ (con u dispari) e $n = 2^k v$ (con v dispari), allora il grado di parità di $m^2 = 2h$ e il grado di parità di $n^2 = 2k$.
Essendo l'intero w dispari, il grado di parità di $w \times n^2$ è uguale a quello di m^2.
Si ha quindi $2h = 2k$ vale a dire $h = k$, da cui

$$w = (\frac{m}{n})^2 = \frac{2^{2h}t}{2^{2k}r} = \frac{t}{r} = \frac{u^2}{v^2} = (\frac{u}{v})^2$$

e w è il quadrato di un rapporto di due dispari.
Così, da **1** e **2** segue che, *la questione riguardante le radici quadrate è interamente ricondotta al caso degli interi dispari.*
Concludendo, la dimostrazione standard richiede di ricorrerre alla proposizione VII.22 degli Elementi, secondo la quale ogni razionale può essere rappresentato come rapporto di due interi *primi*, i numeri più piccoli tra quelli il cui rapporto dà quel numero razionale. Questa proposizione non è assolutamente banale e inoltre pone un problema cronologico difficile: fare intervenire questa proposizione aggiunge un grado di incertezza molto forte alla datazione della scoperta dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$, e di conseguenza a quella delle altre radici irrazionali di interi. Inversamente, la datazione della conoscenza dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$, influenzerà quella della proposizione VII.22 e quindi di tutto il libro VII, con un rischio evidente di circolarità.
Con la dimostrazione proposta da Ofman, al contrario, queste due questioni sono indipendenti.

3.6 Una dimostrazione che non si espone alle critiche aristoteliche

L'uso della proposizione VII.22 nelle dimostrazioni standard pone un problema nei confronti della teoria aristotelica della scienza in quanto è troppo generale per il risultato cercato e dà una soluzione per tutti gli interi non quadrato (di interi)[16]. Si espone così ad una doppia critica. Epistemologica, in quanto contravviene all'adeguatezza richiesta da Aristotele

[16]Secondo Aristotele la conoscenza non consiste nell'enunciare una proprietà vera, ma nel determinare la *causa* al fine di ottenere una conoscenza vera o universale. Dal punto di vista dimostrativo, questo si traduce in un ragionamento che deve essere precisamente adattato, né troppo generale né troppo particolare. Nell'uno o l'altro caso, afferma, la conclusione è sbagliata, anche se considerata «in se stessa», è vera. (*Secondi Analitici*, I, 24).

tra il mezzo (la dimostrazione) e il fine (il risultato ottenuto); cronologica, in quanto le testimonianze testuali impongono un periodo sufficientemente lungo tra il risultato particolare dell'irrazionalità di radice quadrata di 2 e il caso generale.
La dimostrazione proposta da Ofman invece non si espone alle stesse critiche.
Innanzitutto non si espone alla critica aristotelica dell'inadeguatezza del mezzo al fine, infatti se si prova a generalizzare la dimostrazione della sezione 3.4, questa generalizzazione fallisce.

Sia x un intero *qualunque*. Riprendiamo la dimostrazione della sezione 3.4 sostituendo 2 con x.
Ogni intero n si può scrivere sotto forma di un prodotto $n = x^h u$ dove h è il numero massimo di divisioni possibili di n per x, e u è un intero non divisibile per x[17].
Supponiamo che la radice quadrata di x sia razionale, vale a dire

$$\sqrt{x} = \frac{m}{n}$$

con $n = x^h u$ e $m = x^k v$ dove u e v degli interi non divibili per x, da cui:

$$x = \frac{m^2}{n^2}$$

e dunque

$$x \times n^2 = m^2,$$

e poiché $n = x^h u$ e $m = x^k v$ si ottiene:

$$x^{2h+1} t = x^{2k} s \qquad (3.3)$$

con $t = u^2$ e $s = v^2$.
Per concludere l'unicità bisogna dimostrare, come nel caso $x = 2$, che t e s non sono divisibili per x[18].
Per $x = 2$ è evidente, perché gli interi e i loro quadrati hanno la stessa parità.
In generale, invece, questo è falso: se un intero non è divisibile per un altro intero, questo non significa che non lo sia neanche il suo quadrato[19].

[17] Dalla definizione di h segue immediatamente la sua unicità così come quella di u; seguono anche le proprietà di additività dei gradi di parità.

[18] Ma sappiamo solo che u e v non lo sono.

[19] Ad esempio 4 non è divisibile per 8, ma il suo quadrato $4^2 = 16$ lo è. Per trattare questa questione è stata elaborata la teoria che compare alla fine del libro VII degli *Elementi*, in particolare le proposizioni dalla 26 alla 32. Questa è essenzialmente la teoria della decomposizione degli interi in fattori primi.

Per concludere il ragionamento per assurdo che prova l'irrazionalità di $\sqrt{x}$ bisogna dimostrare l'impossibilità che il risultato (3.3) si verifichi. Questo può riscriversi nel modo seguente:

- Se $2h+1$ è maggiore di $2k$:

$$x^{2h+1-2k} = \frac{s}{t} = \frac{v^2}{u^2}$$

vale a dire

$$\sqrt{x^{2h+1-2k}} = \frac{v}{u}$$

- Se $2h+1$ è minore di $2k$:

$$x^{2k-2h-1} = \frac{t}{s} = \frac{u^2}{v^2}$$

vale a dire

$$\sqrt{x^{2k-2h-1}} = \frac{u}{v}.$$

Ma questo è equivalente (quasi) a dimostrare l'irrazionalità della radice quadrata di non importa quale potenza dispari di x[20], cioè a provare la questione da cui siamo partiti[21]. Siamo quindi in un circolo, e la generalizzazione fallisce.

Quindi la dimostrazione proposta da Ofman non incorre nelle critiche aristoteliche dell'inadeguatezza del mezzo al fine in cui invece incorrono le altre dimostrazioni e non incorre neanche nella critica cronologica mossa da coloro i quali ritengono che sia inverosimile che un intervallo di tempo molto lungo sia intercorso tra la dimostrazione standard dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$, e la prova generale[22]. Nel caso della dimostrazione di Ofman invece questo problema non si presenta come è stato già sottolineato nella sezione (3.5).

[20] Come nel caso $x = 2$, l'irrazionalità di x è equivalente a quella di tutte le potenze dispari di x

[21] Questo non è del tutto esatto, perché all'inizio di questa dimostrazione abbiamo detto che $\sqrt{x}$ è razionale se si scrive come rapporto di due interi qualunque m e n, ora invece consideriamo due interi u e v non divisibili per x

[22] Heath, ad esempio, pensa che la prima prova dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ sia molto antica e sia quella di cui si parla negli *Analitici*. Ma poiché egli pensa che è stata utilizzata la dimostrazione standard, per spiegare il lungo tempo intercorso tra la dimostrazione standard dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ e la prova generale, afferma che i matemetici greci a quel tempo erano presi con altri problemi quali la quadratura del cerchio, la trisezione dell'angolo e la duplicazione del cubo.

3.7 Origine del ragionamento per assurdo

La dimostrazione d'irrazionalità proposta da Ofman oltre a rendere conto adeguatamente delle testimonianze testuali presenta un ulteriore interesse: ci fornisce delle informazioni sull'origine del ragionamento per assurdo. Essa spiega il carattere paradigmatico della dimostrazione geometrica di incommensurabilità in quanto modello di dimostrazione per assurdo. La dimostrazione proposta non utilizzando alcun risultato intermedio già dimostrato per assurdo, appare come il primo teorema che non si può ottenere attraverso alcun metodo diretto. Da cui la relazione tra irrazionale e prova per assurdo che ritroviamo nei testi aristotelici.
Ci si può chiedere se questa relazione tra dimostrazione per assurdo e prova di incommensurabilità sia stata stabilita da Aristotele, o se egli non abbia fatto altro che riportare il punto di vista dei matematici.
Il seguente brano tratto dalla *Metafisica*:

> *Tutti cominciano con il meravigliarsi che le cose stiano in un determinato modo: così, ad esempio, di fronte alle marionette che si muovono da sé nelle rappresentazioni, o di fronte alle rivoluzioni del sole o alla incommensurabilità della diagonale al lato: infatti, a tutti coloro che non hanno ancora conosciuto la causa, fa meraviglia che fra l'una e l'altro non vi sia una unità minima di misura comune. Invece, bisogna pervenire allo stato di animo contrario, il quale è anche il migliore, secondo quanto dice il proverbio. E così avviene, appunto, per restare agli esempi fatti, una volta che si sia imparato: di nulla un geometra si meraviglierebbe di più che se la diagonale fosse commensurabile al lato.*

in cui Aristotele fa una presentazione in due tempi (prima tutti si stupiscono dell'incommensurabilità della diagonale poi si stupirebbero se fosse il contrario) fa propendere per il secondo caso.
Tuttavia, la dimostrazione per assurdo non è relegata solo alla sfera matematica infatti essa è molto utilizzata nei dialoghi platonici e da Aristotele, che le consacra una forma di sillogismo. Questo ha portato Szabó a formulare una doppia tesi[23]. Da una parte, la causa della singolarità della matematica greca antica è da ricercarsi in questa forma di ragionamento. D'altra parte, questa forma di ragionamento sarebbe nata presso gli Eleati, il primo testo dove si troverebbe un tale ragionamento sarebbe il *Poema* di Parmenide. Szabó conclude allora che la matematica greca antica ha un

[23] [18], pp. 336-337

fondamento filosofico e che Aristotele non avrebbe avuto alcuna influenza sulla matematica della sua epoca. Per difendere la sua tesi Szabó si basa sul discorso di Parmenide, che fa un ragionamento per assurdo, nell'opera eponima di Platone. Ma non è detto che tutti i discorsi che Platone fa pronunciare ai suoi personaggi siano da attribuirsi realmente a questi.
Knorr, a proposito di questa tesi di Szabó, afferma che qualora una tale direzione esiste, il suo senso è generalmente opposto, sono i filofosi che si impadroniscono del lavoro, dei risultati, delle definizioni o dimostrazioni matematiche al fine di sfruttarle. Nell'*Eutidemo* sono i dialettici che Socrate vede "cucinare" i risultati matematici:

> *[...]E quando, appunto, abbiano conquistato ciò di cui vanno a caccia, non sanno servirsene, tanto è vero che cacciatori e pescatori offrono il bottino ai cuochi; i geometri, gli astronomi, i maestri del calcolo (anche questi sono cacciatori, ché, in effetto, ciascuno di loro non costruisce le figure, ma rintraccia quelle che già sono), tutti costoro, come quelli che non sanno servirsi delle loro arti, ma solo cacciarle, consegnano le loro scoperte ai dialettici perché ne usino*[24]

Comunque, sia presso Platone che presso Aristotele, non c'è alcuna allusione ad un'origine filosofica, meno ancora parmenidea, del ragionamento per assurdo. Se questa relazione esistesse, questo silenzio sarebbe inspiegabile vista l'importanza accordata ai rapporti tra matematica e filosofia.
Inoltre, un gran numero di pensatori presocratici sono stati matematici, così Talete, Democrito, Anassimandro e Pitagora. È quindi improbabile che una nuova forma di ragionamento sia stata utilizzata per un lungo periodo in uno dei due campi senza passare nell'altro.
Ciò non toglie che si può seguire Szabó quando questi propone di legare la nascita della matematica greca al ragionamento per assurdo. Szabó ha certamente ragione nel sottolineare l'importanza di questo tipo di ragionamento in matematica. Questo metodo sarebbe all'origine della costruzione dimostrativa, nel senso ipotetico deduttivo. L'introduzione delle grandezze irrazionali, superando i calcoli sui soli numeri interi, esigeva questo nuovo approccio. Infatti come sostiene W.Knorr

> *questo settore della matematica, non può fare appello alla pratica per sostenere le sue affermazioni. (...) La sua giustificazione non può essere basata che su una deduzione logica, e una teoria di tali quantità non può avere che un criterio di validità: la*

[24] *Eutidemo,* 290c.

coerenza logica.

Questo è il motivo per cui l'irrazionalità si ritrova al centro della dimostrazione per assurdo.

Capitolo 4

Conclusioni

Il modo in cui avvenne la scoperta dell'esistenza di grandezze incommensurabili è incerto.
Le ricostruzioni si basano essenzialmente su due fonti. La più antica è un passo di Aristotele (*An. pr.*, I, 23, 41a26-27) in cui si dice che la diagonale non è commensurabile [con il lato] perché se lo fosse i numeri dispari dovrebbero coincidere con i pari. La seconda fonte è negli *Elementi* di Euclide (X, pp. 408-411, ed. Heiberg). Si tratta di un brano, probabilmente spurio, che contiene una prova completa dell'incommensurabilità coerente con la breve esposizione di Aristotele.
Sulla base di queste fonti, molti autori hanno accettato che l'incommensurabilità sia stata per la prima volta scoperta nell'ambito degli studi sul lato e sulla diagonale del quadrato, soprattutto perché Platone e Aristotele ne parlano sempre in relazione a questo esempio. Le dimostrazioni basate su questa ipotesi sono state presentate nel primo capitolo.
Tuttavia alcuni autori hanno formulato altre ipotesi, tra cui quella basata sull'applicazione del metodo dell'anthyphairesis (sottrazioni successive) che, come abbiamo visto nel capitolo 2, se applicato al lato e alla diagonale di un pentagono regolare (o anche al lato e alla diagonale di un quadrato) dà l'incommensurabilità delle grandezze considerate come conseguenza del fatto che il procedimento continua *ad infinitum.*
Abbiamo visto come le dimostrazioni dell'irrazionalità proposte nel primo e nel secondo si espongano a diverse critiche.
In particolare le dimostrazioni standard sono soggette a critiche di natura:

1. *Epistemologica*: in quanto l'uso della proposizione VII.22 pone un problema nei confronti della scienza come concepita da Aristotele. Infatti questa proposizione è troppo generale per il risultato cercato e dà una soluzione per tutti gli interi non quadrato di interi, e una

dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ che secondo un metodo che permette di stabilire altrettanto bene l'irrazionalità degli altri numeri, è una conoscenza «alla maniera dei sofisti»[1]. Essa non rende conto della sola natura del numero 2.

2. *Di inadeguatezza del mezzo (la dimostrazione) al fine (la conclusione)*: infatti tutte queste dimostrazioni sfruttano la VII.22 che è una proprietà non di parità ma di relativa primalità: per ottenere la conclusione non è necessario che tutte le frazioni possano essere messe sotto forma di un rapporto tra due numeri interi, ma è soltanto sufficiente che non siano simultaneamente pari[2].

3. *Cronologica*: in quanto il fatto che la dimostrazione standard ammetta una generalizzazione immediata non spiega perché sia intercorso tanto tempo tra la dimostrazione del risultato particolare riguardante l'irrazionalità di $\sqrt{2}$ e il caso generale.
   In effetti presso gli autori antichi, l'irrazionalità di $\sqrt{2}$ appare, sotto la forma dell'incommensurabilità della diagonale del quadrato, come un risultato in sé. E in un testo del *Teeteto* di Platone (147d-148b), riguardante l'irrazionalità delle radici di interi, il numero 2 si trova esplicitamente distinto dagli altri interi. All'epoca di Socrate, dove si svolge il racconto, non si ha quindi una dimostrazione unica, valida per tutti gli interi[3].
   Quindi, se la dimostrazione vista da Aristotele è la più antica dimostrazione di irrazionalità, non può essere una dimostrazione generale, di cui 2 sarebbe un caso particolare.

---

[1] Secondo Aristotele il sapere consiste nel conoscere la causa di un oggetto, sapendo che si tratta della sua causa (*Sec. An.* I, 2, 71b 9-12):

> *Noi pensiamo di conoscere un singolo oggetto assolutamente - non già in modo sofistico, cioè accidentale - quando riteniamo di conoscere la causa, in virtù della quale l'oggetto è, sapendo che essa è causa di quell'oggetto, e crediamo che all'oggetto non possa accadere di comportarsi diversamente. È dunque chiaro che il sapere è qualcosa di simile.*

[2] Cf.sezione 2.2.

[3] Questo è un elemento a favore della tesi secondo cui quella degli *Elementi* non è la dimostrazione originale: infatti è così immediata la generalizzazione della dimostrazione tradizionale riguardante la radice quadrata di 2 che difficilmente Platone l'avrebbe menzionata come una nuova scoperta.

Invece la critica principale contro le dimostrazioni geometriche è quella di non trovare riscontro nelle testimonianze testuali in nostro possesso.
La dimostrazione proposta invece nell'ultimo capitolo non si espone alle stesse critiche.
Non si espone alla critica di inadeguatezza del mezzo al fine, in quanto questa dimostrazione non sfrutta la proposizione VII.22 ma si basa sul metodo della decomposizione pari/dispari.
Non si espone neanche alla critica epistemologica e cronologica in quanto la dimostrazione proposta non può essere generalizzata e ciò spiegherebbe anche il tempo intercorso tra la dimostrazione del caso particolare e quella del caso generale; e d'altra parte non si espone neanche alla critica di non trovare riscontro nelle fonti, visto che questa dimostrazione si basa sulla proprietà dei pari e dei dispari ed è dimostrata tramite una *reductio ad absurdum* in accordo quindi con il testo aristotelico.
L'interesse di tale dimostrazione è anche la sua neutralità cronologica. Infatti l'utilizzo della proposizione VII.22 degli *Elementi* impone un *terminus post quem* alla datazione della scoperta dell'irrazionalità di radice quadrata di 2, al contrario l'antichità dei risultati necessari alla dimostrazione proposta da Ofman non impone alcun limite superiore di datazione, evitando così le speculazioni sul momento della scoperta.
Ci si può interrogare sulla tradizione, riportata da Aristotele e da numerosi altri testi dell'antichità, che collega l'irrazionalità agli antichi Greci, e più precisamente a Pitagora o ai primi pitagorici, vale a dire autori del VI secolo a. C.
La dimostrazione proposta nel primo capitolo sfrutta il teorema di Pitagora, invece i risultati matematici necessari per la dimostrazione di Ofman erano disponibili già molto tempo prima essendo conosciuti quasi certamente dai Mesopotami e dagli Egizi[4], cioè risalgono almeno a due millenni a. C. Non c'è, però, alcuna traccia di questi risultati prima di quelli della Grecia

[4]La serie di potenze di 2 era comunemente utilizzata per la moltiplicazione tra interi. Secondo il papiro di Rhind, questa scrittura come somma di potenze di 2, era alla base della tecnica moltiplicatica egiziana.
Per moltiplicare due numeri, si decompone il moltiplicatore sotto forma di una somma di tali potenze, dopodiché si procede alla moltiplicazione del primo termine della moltiplicazione per ogni elemento di questa somma, e infine si sommano i risultati. Così ad esempio

$$15 \times 13 = 15 \times (8 + 4 + 1) = 15 \times 8 + 15 \times 4 + 15 \times 1 = 120 + 60 + 15 = 195.$$

Certamente i Greci erano a conoscenza di questa tecnica moltiplicativa visto che le colonie greche confinavano con l'Egitto e visto anche che Platone nelle *Leggi* propone l'educazione matematica dei ragazzi egiziani come modello per quella dei ragazzi greci (VII, 819a-d).

classica, ma, come fa notare Ofman, questo non invalida necessariamente quanto è stato stabilito altrove. Infatti Ofman osserva:

> *Gli antichi Greci, e Platone in particolare, così smaniosi di far arrivare agli Egizi le loro scoperte più sorprendenti (e non solo in matematica) non fanno mai riferimanto a questa questione.*

Per quanto riguarda il teorema di Pitagora, questo è indipendente dal risultato, e non interviene nella dimostrazione la quale è una dimostrazione di non esistenza: *non esistono numeri (razionali) di quadrato uguale a 2.* Ma l'esistenza stessa, nel quadro geometrico, di una grandezza il cui quadrato è uguale a 2 è una conseguenza del teorema di Pitagora o, più esattamente, di un caso particolarmente semplice di questo, cioè il caso di un triangolo rettangolo isoscele. La dimostrazione è data nel *Menone* di Platone. Questa esistenza è preliminare alla dimostrazione di qualche risultato che in qualche modo la riguarda.
L'irrazionalità di $\sqrt{2}$ suppone dunque questo teorema[5]. La sua attribuzione a Pitagora pone dei problemi, essendo le testimonianze tardive, posteriori di almeno un mezzo millennio, e poco sicure. Gli Egizi e i Mesopotami potevano anche essere in possesso di una forma più o meno primitiva del teorema di Pitagora, ma ciò che è completamente assente dalla loro matematica è l'uso del metodo detto di dimostrazione per assurdo; in altri termini, di una nuova concezione della matematica, che permette di elaborare questa forma di dimostrazione.
Concludendo, seguendo la prospettiva proposta nel terzo capitolo, l'irrazionalità si trova intrinsecamente collegata con il metodo per assurdo, non solo come caso di applicazione fondamentale, ma logicamente e cronologicamente, in accordo con la stretta relazione che troviamo nei testi aristotelici e, sempre seguendo questa impostazione, l'incommensurabilità della diagonale è necessariamente anteriore alla prova generale.

[5]Per le dimostrazioni del primo capitolo in quanto esso interviene nella dimostrazione; invece per la dimostrazione del terzo capitolo, solo per una questione di esistenza: in effetti, senza il teorema di Pitagora, non si avrebbe neanche ragione di pensare all'incommensurabilità.

Bibliografia

[1] Aristotele. *Organon (a cura di Giorgio Colli)*. Adelphi, 2003.

[2] Oskar Becker. Die Lehre vom Geraden und Ungeraden im neunten Buch der Euklidischen Elemente: Versuch einer Wiederherstellung in der ursprünglichen Gestalt. *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, Abteilung B (Studien):pp. 533–553, 1936.

[3] Carl B. Boyer. *Storia della matematica*. Mondadori, 2006.

[4] Jacques Brunschwig and Geoffrey E.R.Lloyd. *Il sapere greco*. Einaudi, 2007.

[5] Salvatore Coen. *Matematiche elementari da un punto di vista superiore, note preliminari, cap. VIII*, 2010.

[6] Euclide. *Gli Elementi (a cura di A. Frajese - L. Maccioni)*. UTET, 1970.

[7] D. H. Fowler. Ratio in early greek mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 1(num. 6):pp. 807–846, 1979.

[8] Attilio Frajese. La scoperta dell'incommensurabile nel dialogo Menone. *Bollettino Unione Matematica Italiana*, vol. 9(num. 1):pp. 74–80, 1954.

[9] Livia Giacardi and Silvia Clara Roero. *La matematica delle civiltà arcaiche*. Stampatori didattica, 1978.

[10] Thomas Heath. *A history of greek mathematics*. Dover, 1981.

[11] Morris Kline. *Storia del pensiero matematico*. Einaudi, 1999.

[12] Wilbur Knorr. *The evolution of the Euclidean Elements*. Reidel, 1975.

[13] Salomon Ofman. L'irrationalité de $\sqrt{2}$ dans les Analytiques d'Aristote. *Philosophie antique*, (num. 10):pp. 81–138, 2010.

[14] Platone. *Opere Complete*. Laterza, 1984.

[15] Proclo. *Commento al 1. libro degli Elementi di Euclide*. Giardini, 1978.

[16] Giovanni Reale. *Metafisica di Aristotele*. Bompiani, 2004.

[17] Lucio Russo. *La rivoluzione dimenticata*. Feltrinelli, 2001.

[18] Arpad Szabò. *The beginnings of Greek mathematics*. Reidel, 1978.

[19] William Thomson. *The Commentary of Pappus on Book X of Euclid's Elements*. Harvard University Press, 1930.

[20] Imre Toth. *Lo schiavo di Menone*. Vita e Pensiero, 1998.

[21] Kurt von Fritz. The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum. *Annals of Mathematics*, XLVI:pp. 242–264, 1945.

[22] Kurt von Fritz. *Le origini della scienza in Grecia*. Il Mulino, 1988.

[23] Gabriele Zaffagnini. Il duplice parricidio di Platone. Technical report, Collegio Superiore di Bologna, 2006-07.

[24] Paolo Zellini. *Gnomon, una indagine sul numero*. Adelphi, 1999.