

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

# Caratterizzazione di un DMD per la generazione di potenziali ottici

**Relatore:**  
Prof. Francesco Minardi

**Presentata da:**  
Tommaso Cavana

Anno Accademico 2017-2018

# Indice

<b>1</b>	<b>Radiazione Ottica</b>	<b>5</b>
1.1	Potenziale di un dipolo ottico . . . . .	5
1.1.1	Generalità sull'interazione tra un dipolo e un campo elettrico . . . . .	5
1.1.2	Modello classico: l'atomo come oscillatore armonico smorzato. . . . .	7
1.1.3	Modello semi-classico: atomo quantizzato e campo classico. . . . .	8
1.1.4	Atomo a due e a molti livelli . . . . .	10
1.2	Caratterizzazione di un fascio laser gaussiano mediante il parametro $M^2$ . . . . .	14
1.2.1	Momento secondo di un fascio . . . . .	14
1.2.2	Il parametro $M^2$ . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Teoria della diffrazione</b>	<b>17</b>
2.1	Equazione del reticolo di diffrazione per un DMD . . . . .	17
2.2	Diffrazione di un singolo specchio ruotato . . . . .	19
2.3	Interferenza di specchi ruotati . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Setup dell'apparato</b>	<b>27</b>
3.1	Il Digital-Micromirror-Device . . . . .	27
3.2	Il laser . . . . .	29
3.3	Il LED . . . . .	29
3.4	La camera CMOS . . . . .	30

3.5	Setup per la misura dell'intensità . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Risultati</b>	<b>33</b>
4.1	Il contrasto di un'immagine . . . . .	33
4.2	$M^2$ del laser . . . . .	38
4.3	Angolo di blaze . . . . .	39
4.4	Profilo di intensità . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>45</b>

# Introduzione

Lo scopo di questa tesi è studiare il funzionamento di un Digital-Micromirror-Device e la sua interazione con un fascio ottico. Questo strumento ha risvolti applicativi di notevole impatto soprattutto nello studio della materia alle basse energie; grazie alla sua struttura dotata di molti specchi rotanti delle dimensioni dell'ordine del  $\mu\text{m}$  che permettono la generazione di pattern personalizzati, essi possono essere usati per riflettere la luce di un fascio incidente per generare trappole di dipolo della forma prestabilita. Si studieranno inizialmente i modelli principali che descrivono l'interazione tra un fascio ottico e un dipolo, poiché di interesse applicativo, mostrando le grandezze fondamentali che descrivono il fenomeno, guardando il problema sia da un punto di vista classico che da uno quantistico evidenziando alla fine le differenze più importanti. Per comprendere meglio gli aspetti pratici dell'utilizzo di un fascio laser un capitolo è riservato allo studio del parametro  $M^2$ , che descrive la tendenza di un fascio reale a perdere la propria collimazione più velocemente del corrispettivo teorico. Dopo questa prima parte prettamente teorica, verrà data una descrizione degli strumenti utilizzati durante le misurazioni e del setup del piano di lavoro; in particolare si esporranno le principali caratteristiche meccaniche e ottiche del DMD, spiegando il suo funzionamento di base. Il fulcro della tesi rimane lo studio delle proprietà diffrattive del DMD, a cui è dedicato il Capitolo 2. Qui è messo in luce il comportamento della radiazione ottica incidente sul piano degli specchi del dispositivo. In particolare si studiano i fenomeni di diffrazione e interferenza, prima guardando al DMD come fosse un reticolo di diffrazione, e successivamente studiando

il campo elettrico in un punto lontano dalla superficie riflettente, ottenendo una previsione teorica del profilo di intensità al variare dell'angolo di incidenza della radiazione. Nell'ultimo capitolo si analizza il contrasto di alcune immagini acquisite tramite la riflessione di un fascio del DMD. Lo studio di questo parametro è decisivo per definire la qualità di un'immagine, poiché permette, insieme alla risoluzione, la distinzione di oggetti diversi. L'ultimo capitolo contiene inoltre i risultati delle previsioni teoriche del valore dell' $M^2$  del fascio laser utilizzato durante la tesi, dell'angolo del DMD per ottenere il massimo dell'interferenza e ,infine, dell'andamento del profilo di intensità del laser al variare dell'angolo del DMD.

# Capitolo 1

## Radiazione Ottica

### 1.1 Potenziale di un dipolo ottico

Per la trattazione della seguente sezione si è seguito l'articolo riportato in bibliografia [5]. I fasci laser hanno molteplici usi, uno dei quali è la generazione di trappole per atomi. Un atomo può essere trattato come un dipolo elettrico, e siccome l'interazione di un dipolo con un campo elettrico genera un potenziale, è possibile intrappolare l'atomo in una buca di potenziale. Nella seguente sezione viene data prima un'introduzione dell'interazione tra un dipolo e un campo elettrico e successivamente vengono esposti due modelli, uno classico e uno semi-classico, che permettono una descrizione del fenomeno. Vengono anche messe in luce le principali differenze tra i due modelli, applicando il secondo ai casi di un atomo a due e molti livelli.

#### 1.1.1 Generalità sull'interazione tra un dipolo e un campo elettrico

Le forze agenti su un dipolo ottico provengono dall'interazione dispersiva tra un momento di dipolo atomico indotto e il gradiente di intensità del fascio laser. La forza in questione deriva da un potenziale conservativo, e quindi il minimo del potenziale determina la posizione di stabilità del sistema. Il

dipolo però non ha solo la componente dispersiva, ma anche una assorbente. Il dipolo ottico è perciò anche un sistema che assorbe, seppur con bassa frequenza, l'energia di fotoni lontani dalla risonanza che generano quindi fenomeni di scattering. Questi pertanto stabiliscono un limite alla trappola di dipolo. Consideriamo ora un atomo come un semplice oscillatore immerso in un campo elettrico per trovare le equazioni che descrivono il potenziale e la frequenza di emissione di fotoni. Il campo elettrico oscillante induce un momento di dipolo oscillante alla stessa frequenza  $\omega$ . Possiamo quindi scrivere il campo elettrico e il momento di dipolo in questo modo:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}E \times \exp(-i\omega t) \quad \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}p \times \exp(-i\omega t) \quad (1.1)$$

dove  $\mathbf{e}$  è il versore del campo. I moduli del campo e della polarizzazione sono legati dalla relazione  $p = \alpha E$ , dove  $\alpha$  è il coefficiente a valori complessi di polarizzabilità elettronica. Il potenziale di interazione tra il campo e il dipolo è, sapendo che  $I = 2\epsilon_0 c |E|^2$ :

$$U_{dip} = -\frac{1}{2} \langle \mathbf{p} \mathbf{E} \rangle = -\frac{\text{Re}(\alpha) I}{2\epsilon_0 c} \quad (1.2)$$

dove il coefficiente  $\frac{1}{2}$  deriva dalla media su un periodo del termine  $\cos^2(\omega t)$  che viene dal prodotto dei vettori campo elettrico e polarizzazione. L'intensità del laser è perciò proporzionale al potenziale di interazione. Questo ci dice anche che la forza che il campo elettrico esercita sul dielettrico è proporzionale al gradiente dell'intensità del laser, infatti abbiamo:

$$\mathbf{F}_{dip}(r) = -\nabla U_{dip}(r) = \frac{\text{Re}(\alpha) \nabla I}{2\epsilon_0 c} \quad (1.3)$$

La potenza assorbita dal sistema dell'oscillatore è

$$P_{abs} = \langle \dot{\mathbf{p}} \mathbf{E} \rangle = 2\omega \text{Im}(pE^*) = \frac{\omega I \times \text{Im}(\alpha)}{\epsilon_0 c} \quad (1.4)$$

Abbiamo quindi due risultati importanti. La parte reale della polarizzabilità elettronica che descrive le proprietà dispersive del dipolo è proporzionale

alla forza generata sul dipolo dal campo elettrico, mentre la parte immaginaria che descrive le proprietà assorbitive del dipolo è direttamente proporzionale alla potenza assorbita. Per conoscere la frequenza con cui un fotone subisce un fenomeno di scattering bisogna pensare a quest'ultimo come un ciclo di assorbimento e di emissione. Allora la frequenza di scattering sarà la frequenza di assorbimento, poiché i fotoni sono fuori dalla risonanza, quindi non ci sono due assorbimenti successivi senza che prima ci sia un'emissione. Per capire con che frequenza il dipolo assorbe i fotoni possiamo usare la relazione appena trovata della potenza. Infatti se i fotoni di scattering hanno un'energia  $\hbar\omega$ , la frequenza di scattering sarà:

$$\Gamma_{sc}(r) = \frac{P_{abs}}{\hbar\omega} = \frac{\text{Im}(\alpha)I(r)}{\hbar\epsilon_0 c} \quad (1.5)$$

Abbiamo trovato le due quantità di maggior interesse per la descrizione di un dipolo in funzione dell'intensità del fascio laser  $I(r)$  e del coefficiente di polarizzabilità elettronica  $\alpha$ ; il potenziale di interazione e la frequenza di scattering. Per conoscere effettivamente quindi i valori delle grandezze di interesse dobbiamo trovare una relazione che descriva la polarizzabilità elettronica.

### 1.1.2 Modello classico: l'atomo come oscillatore armonico smorzato.

Per calcolare la polarizzabilità  $\alpha$  consideriamo il modello dell'atomo di Lorentz. In questo modello l'oscillatore è un elettrone di massa  $m_e$  e carica  $-e$  legato tramite una interazione elastica al nucleo. La frequenza dell'oscillazione è  $\omega_0$ . L'equazione differenziale che descrive il moto è la seguente:

$$\ddot{x} + \Gamma_\omega \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{-eE(t)}{m_e} \quad (1.6)$$

dove  $\Gamma_\omega$  è una frequenza che descrive lo smorzamento, dovuto al fatto che, classicamente, un elettrone in moto accelerato emette radiazione. Risolvendo

l'eq.1.6 si ottiene l'equazione del moto e si ricava il coefficiente  $\alpha$ , il quale risulta essere:

$$\alpha = \frac{e^2}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_\omega} \quad (1.7)$$

La frequenza  $\Gamma_\omega$  invece, secondo il modello di Larmor di un dipolo oscillante, è:

$$\Gamma_\omega = \frac{e^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 m_e c^3} \quad (1.8)$$

Se si introduce lo smorzamento a risonanza  $\Gamma \equiv \Gamma_{\omega_0} = (\omega_0/\omega)^2\Gamma_\omega$  e si sostituisce  $e^2/m_e$  nell'eq. (1.7) attraverso l'eq. (1.8) si ottiene la polarizzabilità elettronica scritta in una forma più comoda:

$$\alpha = 6\pi\epsilon_0 c^3 \frac{\Gamma/\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i(\omega^3/\omega_0^2)\Gamma} \quad (1.9)$$

### 1.1.3 Modello semi-classico: atomo quantizzato e campo classico.

In questo modello l'atomo è descritto come un sistema a due livelli, quindi quantizzato, immerso in un campo elettrico classico. L'approccio semi-classico mostra alla fine che i risultati che si ottengono sono esattamente identici a quelli del caso classico, a meno di considerare l'effetto della saturazione, che per la natura del sistema deve essere tenuta in considerazione. Questo porta a modificare la frequenza di smorzamento. Ora il modo corretto di scriverla fa uso dell'elemento di matrice di dipolo elettrico di transizione tra lo stato fondamentale e il primo stato eccitato. L'espressione è quindi:

$$\Gamma = \frac{\omega_0^3}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3} |\langle e|\mu|g\rangle|^2 \quad (1.10)$$

dove  $e$  e  $g$  sono rispettivamente le autofunzioni dello stato eccitato e dello stato fondamentale, mentre  $\mu = -er$  è l'operatore di dipolo elettrico. Tuttavia per molti atomi, ad esempio gli alcalini con una forte transizione (ovvero

permessa dal dipolo) tra lo stato fondamentale e gli altri stati, la frequenza calcolata nel caso classico descrive con buona approssimazione la frequenza di decadimento spontaneo. Come già accennato, la differenza sostanziale tra i due modelli sta nel considerare o meno l'occorrenza della saturazione. Se se ne tiene conto, la polarizzabilità elettronica ottenuta nel caso classico non è più valida. Tuttavia, nel caso a cui siamo interessati, ovvero la generazione di trappole di dipolo, la frequenza del campo è lontana da quella di risonanza del dipolo. Abbiamo quindi una frequenza di scattering bassa, e conseguentemente anche la saturazione bassa; cioè ( $\Gamma_{sc} \ll \Gamma$ ). Possiamo quindi scrivere le due grandezze di interesse in funzione della polarizzabilità elettronica trovata nel caso classico ma valida anche in quello semi-classico. Abbiamo quindi due relazioni valide per entrambi i casi:

$$U_{dip} = -\frac{3\pi e^2}{2\omega_0^3} \left( \frac{\Gamma}{\omega - \omega_0} + \frac{\Gamma}{\omega_0 + \omega} \right) I(r) \quad (1.11)$$

$$\Gamma_{sc}(r) = \frac{3\pi e^2}{2\hbar\omega_0^3} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^3 \left( \frac{\Gamma}{\omega - \omega_0} + \frac{\Gamma}{\omega_0 + \omega} \right)^2 I(r) \quad (1.12)$$

Le espressioni sono valide per qualsiasi frequenza  $\omega$  e mostrano che ci sono due effetti di risonanza. Oltre alla risonanza  $\omega_0 = \omega$  che si considera normalmente, compare anche un termine contro-rotante dove la risonanza c'è per  $\omega_0 = -\omega$ . In molti esperimenti la frequenza del laser è vicina alla risonanza classica, cioè il primo caso citato sopra. In questo caso il detuning  $\Delta \equiv \omega - \omega_0$  è molto piccolo e soddisfa  $|\Delta| \ll \omega_0$ . In questo caso vale l'approssimazione di non considerare il termine contro-rotante rispetto al termine risonante classico. Inoltre, si può anche porre  $\omega/\omega_0 \approx 1$ . Con le approssimazioni appena compiute le due espressioni di interesse diventano:

$$U_{dip}(r) = \frac{3\pi e^2}{2\omega_0^3} \frac{\Gamma}{\Delta} I(r) \quad (1.13)$$

$$\Gamma_{sc}(r) = \frac{3\pi e^2}{2\hbar\omega_0^3} \left( \frac{\Gamma}{\Delta} \right)^2 I(r) \quad (1.14)$$

La fisica più basilare delle trappole di dipolo nel caso di laser lontani dalla frequenza di risonanza può essere compresa sulla base di queste due relazioni.

Una relazione che le lega è la seguente

$$\hbar\Gamma_{sc} = \frac{\Gamma}{\Delta} U_{dip} \quad (1.15)$$

Questo risultato è importante perché ci dice la relazione che sussiste tra la parte assorbitiva, quella del termine di sinistra, e la parte dispersiva, quella del termine di destra. Possiamo già fare delle osservazioni su quello che ci si aspetta di osservare dalle due relazioni di cui sopra:

- segno del detuning: se il termine di detuning è negativo, cioè  $\omega - \omega_o < 0$ , abbiamo che il potenziale di interazione di dipolo è negativo. Quello che si osserva dunque è il dipolo che viene attratto verso il massimo dell'intensità del fascio laser, poiché il minimo della buca di potenziale è il punto in cui il fascio ha la sua massima intensità. Al contrario se il detuning è positivo, cioè  $\omega - \omega_o > 0$ , il potenziale è positivo. Il minimo del potenziale si troverà nel minimo dell'intensità del laser. Abbiamo quindi una prima distinzione tra i tipi di trappole che si possono realizzare, le prime con detuning negativo, dette *red-detuned*, e le seconde con detuning positivo, dette *blue-detuned*.
- modulazione dell'intensità e del detuning: siccome per generare una trappola la frequenza di scattering deve essere bassa e il potenziale deve essere alto (in valore assoluto), si modulano i valori dell'intensità e del detuning. Il potenziale scala come  $I/\Delta$  mentre la frequenza di scattering come  $I/\Delta^2$ . Si cerca allora di usare un fascio ad alta intensità per rendere la buca di potenziale profonda, tenendo anche ampio il detuning per minimizzare il fenomeno dello scattering.

#### 1.1.4 Atomo a due e a molti livelli

Negli atomi usati negli esperimenti la struttura interna riveste un ruolo imprescindibile che complica le considerazioni fatte finora, poiché il potenziale di dipolo dipende da come è fatta questa struttura. La trattazione va quindi rivista e si vede che i nuovi effetti che si ricavano sono interessanti. Gli

atomi a molti livelli possono essere considerati come oscillatori che dipendono dal particolare stato dell'atomo; ne consegue che la polarizzabilità elettronica è anche essa dipendente dallo stato dell'atomo. Invece di considerare l'atomo come un oscillatore armonico, studiamo il concetto di potenziale dello stato fondamentale dipendenti dagli stati eccitati. Questo ci permette di conoscere molto meglio il potenziale visto dall'atomo nell'approssimazione di un campo elettrico oscillante a frequenza lontana dalla risonanza. Gli effetti della radiazione lontana dalla risonanza sui livelli atomici possono essere trattati come una perturbazione del secondo ordine nel campo elettrico, ovvero lineare nell'intensità. La teoria delle perturbazione al secondo ordine dipendenti dal tempo per stati non degeneri ci permette di affermare che un'interazione descritta da un'Hamiltoniana  $H_1$  porta a una variazione dell'energia nell' $i$ -esimo livello data da

$$\Delta E_i = \sum_{j \neq i} \frac{|\langle e | H_1 | g \rangle|^2}{\varepsilon_i - \varepsilon_j} \quad (1.16)$$

Per un atomo che interagisce con la luce di un laser l'Hamiltoniana è  $H_1 = -\hat{\boldsymbol{\mu}} \mathbf{E}$  dove  $\hat{\boldsymbol{\mu}} = -e\mathbf{r}$  rappresenta l'operatore di dipolo elettrico. Per i livelli energetici che sono rilevanti bisogna usare il modello dell'atomo vestito, considerando il sistema combinato di atomo più campo elettrico. In questo caso si parte dall'atomo che ha energia interna nulla mentre l'energia del campo è massima, e la indichiamo con  $\varepsilon_i = n\hbar\omega$ . Quando l'atomo assorbe un fotone non si trova più nello stato fondamentale e ha un'energia interna pari a  $\hbar\omega_0$ , mentre il campo ha perso energia e ora è pari a  $(n-1)\hbar\omega$ . L'energia totale del sistema diventa allora  $\varepsilon_j = -\hbar\Delta_{ij} + n\hbar\omega$ , e il denominatore della formula (sopra) è  $\varepsilon_i - \varepsilon_j = \hbar\Delta_{ij}$ . Nel caso semplificato di un atomo a due livelli lo spostamento dei livelli è, dalla eq. (1.17)

$$\Delta E = \pm \frac{|\langle e | \mu | g \rangle|^2}{\Delta} |E|^2 = \pm \frac{3\pi e^2 \Gamma}{2\omega_0^3 \Delta} \quad (1.17)$$

Dove il segno è positivo per lo stato eccitato e negativo per lo stato fondamentale. Abbiamo usato la relazione  $I = 2\epsilon_0 c |E|^2$  e l'equazione (1.10)

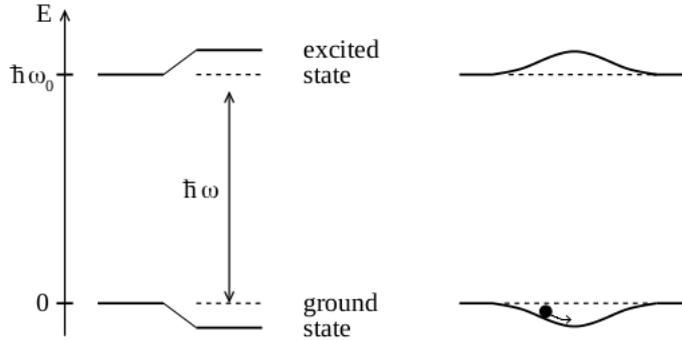


Figura 1.1: Spostamento dei livelli per un atomo a due livelli. Nell’immagine a sinistra è raffigurato lo spostamento dei livelli fondamentale e eccitato dovuto a luce red-detuned. A destra invece, è raffigurato l’effetto di un campo elettrico non omogeneo, ad esempio uno gaussiano.

per l’ultimo termine della catena di uguaglianze. Lo studio dell’interazione di dipolo con un campo elettrico attraverso la teoria delle perturbazioni rivela un fatto interessante. Quello che prima era il potenziale di interazione di dipolo di un atomo a 2 livelli, valido anche nel caso classico, ora è uno shift dello stato fondamentale e dello stato eccitato. Questo effetto è conosciuto con il nome di “effetto Stark”. Siccome per le trappole di dipolo è interessante vedere il comportamento del sistema nel caso di bassa saturazione, cioè l’atomo è quasi sempre nel suo stato fondamentale, allora l’effetto Stark sullo stato fondamentale sarà equivalente alla generazione di un potenziale attrattivo, nel caso in cui il campo elettrico non sia uniforme. L’esempio è mostrato nel figura nel caso rilevante di un fascio gaussiano.

Passiamo ora dal caso semplificato di un atomo a due livelli a quello di un atomo a molti livelli. L’unica differenza risiede nel considerare nell’eq. (1.16) non più un solo elemento di matrice ma tanti quanti sono gli stati dell’atomo meno quello preso in considerazione. In particolare avremo quest’espressione per il generico elemento di matrice di dipolo:

$$\mu_{ij} = |\langle e_j | \mu | g_i \rangle|^2 \quad (1.18)$$

L'espressione fortunatamente si semplifica notevolmente poiché dalla fisica atomica è un fatto noto che la matrice di dipolo di transizione può essere scritta come prodotto di elemento di matrice di dipolo  $||\mu||$  e una costante reale  $c_{ij}$ :

$$\mu_{ij} = c_{ij} ||\mu|| \quad (1.19)$$

Il vantaggio deriva dal fatto che il termine di dipolo  $||\mu||$  dipende unicamente dai numeri quantici principali, poiché dipende unicamente dalla funzione d'onda dell'orbitale e non dai suoi sotto-livelli, ed è inoltre strettamente collegato alla frequenza di decadimento spontaneo  $\Gamma$  tramite l'eq. (1.10). I coefficienti  $c_{ij}$  invece dipendono dai numeri quantici angolari e quindi tengono conto dello specifico accoppiamento tra i sotto-livelli  $i$  e  $j$  dello stato fondamentale e dello stato eccitato, che dipende dalla polarizzazione del laser e dal momento angolare dell'atomo. Abbiamo quindi trovato un modo comodo per scrivere lo shift in energia nel caso di un atomo a molti livelli. Avremo quindi, nel caso di uno stato fondamentale  $|g_i\rangle$ ,

$$\frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \Gamma I \times \sum_j \frac{c_{ij}^2}{\Delta_{ij}}$$

dove la sommatoria è estesa a tutti gli stati elettronici eccitati.

Ricapitolando, l'interazione radiazione-dipolo può essere spiegata prevalentemente sulla base della frequenza di scattering del sistema  $\Gamma_{sc}$  e del potenziale di interazione  $U_{dip}$ . Abbiamo però anche visto che la forma del fascio che trasporta la radiazione è importante per la valutazione delle due grandezze di interesse. Nella prossima sezione allora si mostrerà una caratteristica di un generico fascio gaussiano. Si scoprirà che la larghezza di un fascio gaussiano reale differisce dal corrispettivo teorico di un fattore, detto  $M^2$ .

## 1.2 Caratterizzazione di un fascio laser gaussiano mediante il parametro $M^2$

Per la trattazione di questa sezione si fa riferimento all'articolo riportato in bibliografia [9]. Nella caratterizzazione di un fascio laser, un'informazione importante risiede nella sua larghezza, ovvero nella grandezza del fascio nel piano perpendicolare alla propagazione. Ci sono tuttavia molti modi per definire questa grandezza, più o meno adeguati rispetto al tipo di fascio in questione. Alcuni dei più utili sono:

- il momento secondo, l'equivalente nel continuo della varianza.
- la distanza tra i primi minimi dell'intensità, se esistono.
- la distanza tra i punti in cui l'intensità è  $\frac{1}{e}$  o  $\frac{1}{e^2}$ .
- il diametro "D86", ovvero la zona in cui è contenuto l'86 % dell'energia totale.

Nei prossimi paragrafi verrà mostrato che il primo tra i modi descritti sopra per definire la larghezza, il momento secondo, è uno dei più importanti e forse l'unico che può essere considerato universale, quindi adatto a ogni tipo di fascio; verrà inoltre messo in risalto il legame che esiste con un fascio gaussiano, attraverso la definizione del parametro  $M^2$ .

### 1.2.1 Momento secondo di un fascio

Il momento secondo dell'intensità di un fascio é una grandezza definita nel seguente modo (per la direzione  $x$ ):

$$\sigma_x^2 = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} I(x, y)(x - x_0)^2 dx dy}{\iint_{-\infty}^{\infty} I(x, y) dx dy} \quad (1.20)$$

dove  $I(x, y)$  è l'intensità del fascio, e

$$x_0 = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} I(x, y)(x - x_0)^2 dx dy}{\iint_{-\infty}^{\infty} I(x, y) dx dy} \quad (1.21)$$

è il centro di massa. Il momento secondo di un fascio, come accennato, obbedisce a una relazione che lo rende particolarmente importante. Questa relazione è:

$$\sigma_x^2 = \sigma_{x_0}^2 + \sigma_\theta^2(z - z_0)^2 \quad (1.22)$$

dove  $z_0$  è il punto lungo l'asse di propagazione del fascio dove l'intensità è massima,  $\sigma_\theta$  è l'apertura angolare del fascio a partire dal punto  $z_0$  e  $\sigma_{x_0}^2$  è il momento secondo calcolato in  $z_0$ , ed in particolare è il più piccolo tra tutti quelli lungo l'asse. La potenza di questa relazione risiede nella sua generalità; non è valida soltanto nel caso di un fascio in particolare, ma lo è per uno qualsiasi, sia esso gaussiano o no, coerente o meno. Infatti la dipendenza quadratica è valida solo per il momento secondo; le altre definizioni di larghezza di un fascio possono al più averla approssimativamente. Nella tesi in questione lo studio è compiuto su un fascio gaussiano, il quale ha un collegamento forte con il momento secondo definito sopra, poiché quest'ultimo rientra nella sua espressione analitica, come è mostrato nel prossimo paragrafo.

### 1.2.2 Il parametro $M^2$

Nello studio di un fascio gaussiano un'espressione di ampio utilizzo per il profilo di intensità è  $I(x) = \exp[-2x^2/w_x^2]$  che differisce leggermente da dalla definizione statistica della curva gaussiana (non normalizzata):  $I(x) = \exp[-x^2/2\sigma_x^2]$ ; si nota immediatamente che  $w_x = 2\sigma_x$ . Analogamente al fascio gaussiano ideale, per un fascio di profilo arbitrario introduciamo la grandezza  $W_x$ , tale che  $(W(x)/2)^2$  sia uguale al momento secondo. Nella propagazione di un fascio, avevamo trovato la relazione che descrive il valore del momento secondo al variare della distanza nell'asse di propagazione. Nel caso di un fascio reale si trova che questo valore differisce da quello ideale di un fattore moltiplicativo, chiamato  $M^2$ . Abbiamo infatti questa relazione:

$$W_x^2 = W_{x0}^2 + M_x^4 \times \left(\frac{\lambda}{\pi W_{x0}}\right)^2 (z - z_0)^2 \quad (1.23)$$

Il fattore  $M^2$  rende la relazione non più generale, poiché il suo valore dipende dal tipo di fascio. Tuttavia proprio questo risulta essere un vantaggio, poiché il valore di  $M^2$  ci dice quanto un fascio sia “buono”; in particolare sussistono queste considerazioni:

- I  $M^2$  hanno un limite inferiore, che è 1 (fascio ideale). Quindi maggiore è  $M^2$  più il fascio è lontano dall’essere ideale.
- il valore di  $M^2$  ci dice di quanto aumenta la larghezza del fascio rispetto al “limite di diffrazione”, in cui tale larghezza aumenta solo a causa della diffrazione.

Nello studio di un fascio gaussiano risulta allora di primaria importanza la conoscenza del valore del  $M^2$ , poiché ci dice con che modo del campo elettromagnetico stiamo lavorando. Nel seguente paragrafo studieremo il fascio gaussiano prodotto dal laser usato nell’esperimento, descritto nel Capitolo 3, e ricaveremo attraverso un fit non lineare il valore del parametro  $M^2$ .

# Capitolo 2

## Teoria della diffrazione

Nel corso di questo capitolo si affronta da un punto di vista teorico il comportamento di un fascio luminoso incidente col DMD. In particolare si studieranno i fenomeni della diffrazione e dell'interferenza, che rivestono un ruolo molto importante per via delle dimensioni degli specchi del DMD. Si mostrerà come è possibile ottenere il valore dell'angolo di incidenza del fascio per avere sia la condizione di interferenza distruttiva che di massimo di diffrazione, e descriveremo un modo per ottenere il valore dell'intensità in un punto lontano dal DMD a partire dal campo elettrico incidente. Queste considerazioni ci permetteranno di studiare il profilo dell'intensità in un massimo dell'interferenza al variare dell'angolo di incidenza.

### 2.1 Equazione del reticolo di diffrazione per un DMD

Il DMD utilizzato verrà studiato più approfonditamente nel Capitolo 3. In generale è uno strumento che riflette la luce e si comporta a tutti gli effetti come un reticolo di diffrazione a 2 dimensioni[2]. La peculiarità consiste nel fatto che gli specchi quadrati del reticolo sono ruotati di  $45^\circ$  rispetto all'asse passante per il centro (si veda fig. 3.1), e che inoltre è possibile la rotazione attorno all'asse passante per la diagonale verticale. Siccome per effetto della

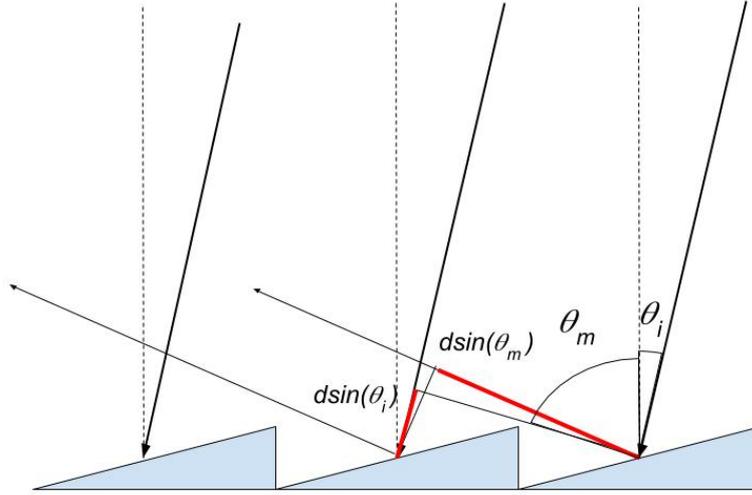


Figura 2.1:  $d$  è la distanza tra i centri di due specchi adiacenti,  $\theta_i$  è l'angolo di incidenza e  $\theta_m$  è l'angolo di diffrazione.

diffrazione e dell'interferenza l'energia viene redistribuita in molti picchi è opportuno trovare un modo per determinare dove trovare spazialmente e rispetto a quale angolo un massimo dell'energia. Studiando la diffrazione di un reticolo si vede che esiste un angolo, detto di *blazing*, in cui l'intensità del raggio diffratto è massima per un certo angolo di incidenza. [12]

Seguendo la fig. 2.1 per avere il massimo dell'intensità è necessario che sussista questa relazione[2][3]:

$$m\lambda = d \sin(\theta_m) + d \sin(\theta_i) \quad (2.1)$$

dove  $m$  è l'ordine di diffrazione,  $\lambda$  è la lunghezza d'onda del laser e  $\theta_i$  e  $\theta_m$  sono rispettivamente gli angoli di incidenza e di diffrazione rispetto alla normale del piano del DMD. Nel caso del DMD però, abbiamo un'ulteriore condizione, dovuta al fatto che gli specchi che lo compongono ruotano attorno all'asse passante lungo la diagonale. Indicando con la lettera  $\phi$  gli angoli rispetto alla normale degli specchi, e scegliendo gli angoli incidenti  $\theta_i$  e  $\phi_i$  negativi, si ottengono le relazione  $\theta_i = \phi_i + 12^\circ$ ,  $\theta_r = \phi_r - 12^\circ$ , dove  $\theta_r$  e  $\phi_r$  sono gli angoli di riflessione. Dall'ottica geometrica vale  $\phi_i = -\phi_r$ ; mettendo

insieme le tre condizioni precedenti si ottiene  $\theta_r = \theta_i + 24^\circ$ . [7] La condizione di blaze si ottiene quando, fissato l'angolo di incidenza del laser in modo tale da avere interferenza costruttiva, l'angolo di riflessione degli specchi coincide con l'angolo di uno degli ordini di diffrazione, ovvero  $\theta_r = \theta_m$ . Mettendo le ultime due relazioni ricavate nell'eq. 2.1, si ottiene la seguente equazione[2]:

$$F(\theta_i) = \arcsin\left(\frac{m\lambda}{d} - \sin(|\theta_i| + 24)\right) + \theta_i = 0 \quad (2.2)$$

L'equazione diventa quindi uno studio degli zeri del primo termine della relazione al variare del parametro  $m = 0, 1, 2, \dots$ . I valori per cui è verificata l'eq. 2.2 sono gli angoli di incidenza per cui l'intensità è massima, ovvero quando il massimo di uno degli ordini di diffrazione coincide con l'angolo per cui si ha interferenza costruttiva. Nel caso in cui ci fossero due ordini di diffrazione per cui vale l'equazione sopra, il massimo più intenso sarà nell'ordine di diffrazione più vicino a  $m = 0$ . [2] Per avere una previsione teorica del profilo dell'intensità del fascio al variare dell'angolo di incidenza, quindi non soltanto la conoscenza dell'angolo in cui l'intensità è massima, è necessario sviluppare una teoria che descriva il campo elettrico incidente sul DMD e il suo valore su uno schermo di osservazione. È quello che ci prefiggiamo di fare nella prossima sezione.

## 2.2 Diffrazione di un singolo specchio ruotato

Per questa sezione è stato preso come esempio il modello costruito nel libro riportato in bibliografia[6]. Per affrontare il problema iniziamo considerando un solo specchio, ovvero un solo elemento del DMD. Suddividiamo lo specchio in tante porzioni infinitesimali; lo scopo diventa allora quello di calcolare il contributo del campo elettrico di ciascuna delle porzioni infinitesime e sommare, ovvero integrare, tutti i contributi. In fig. (2.2)

è mostrato uno schema per comprendere meglio le grandezze in gioco. Per ogni porzione infinitesima assumeremo valida un'espressione, sotto le condizioni dell'approssimazione di Kirchoff. Una spiegazione dettagliata su

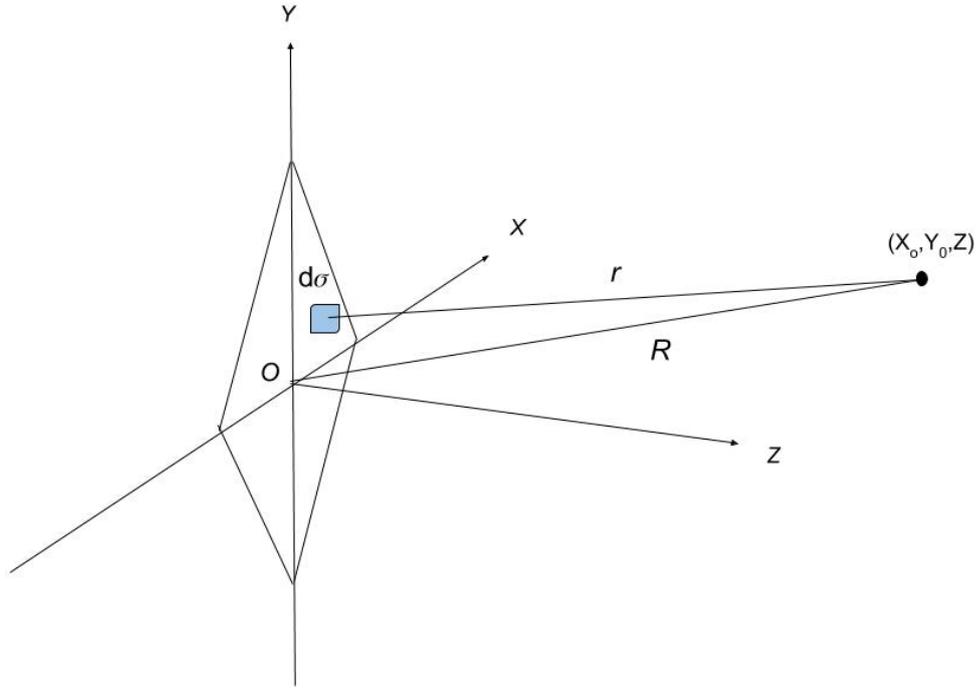


Figura 2.2:

come ricavare l'espressione è contenuta nel libro riportato in bibliografia [4]. Assumiamo quindi che il campo elettrico riflesso da uno specchio che arriva sul piano di osservazione  $\Sigma$  sia dato dalla formula di Rayleigh-Sommerfield [6]:

$$U(x_o, y_o, \bar{z}) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\sigma} U(x, y, 0) \frac{\bar{z}}{r} \frac{e^{ikr}}{r} d\sigma \quad (2.3)$$

dove  $x_o$  e  $y_o$  sono le coordinate del punto di osservazione sullo schermo,  $\bar{z}$  è la distanza del piano  $\Sigma$  dallo specchio  $\sigma$ ,  $\lambda$  è la lunghezza d'onda del fascio incidente,  $r$  è la distanza tra il punto  $(x, y)$  sullo specchio e il punto di osservazione. Il campo risulta quindi una sovrapposizione di onde sferiche, per via del termine  $\exp(ikr)/r$ , modulato dalla direzione in cui si osserva il fascio, per via di  $\bar{z}/r$ , e dipendente dal campo incidente sulla superficie

dello specchio  $\Sigma$ ,  $U(x, y, 0)$ . Quest'ultimo termine, nel nostro caso può essere scritto in questo modo:

$$U(x, y, 0) = \xi_i \times \exp(-ik \cos \theta_i z) \times \exp(ik \sin \theta_i x) \quad (2.4)$$

$U(x, y, 0)$  è quindi il prodotto dell'ampiezza  $\xi_i$  con i due fattori di fase nelle direzioni  $z$  e  $x$ . La direzione  $y$  nel nostro caso non ci interessa poiché il raggio riflesso nell'esperimento è parallelo al piano  $xz$ . Il primo termine di fase, quello della direzione  $z$ , è nullo poiché ci troviamo sulla superficie dello specchio ( $z = 0$ ), il secondo invece,  $\exp(ikx \sin(\theta_i))$ , dove  $\theta_i$  è l'angolo rispetto alla normale dello specchio. L'espressione del campo elettrico su  $\Sigma$  diventa quindi:

$$U_p(x_o, y_o, \bar{z}) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\sigma} \xi_i \frac{\bar{z} e^{ik(x \cdot \sin \theta_i + r)}}{r} d\sigma \quad (2.5)$$

Per semplificare l'integrazione, notiamo che spostandosi da un punto all'altro della superficie  $\Sigma$ , la variazione di  $r$  è piccola (poiché  $\bar{z}$  è molto grande). Questo ci permette di portare fuori dall'integrazione il fattore  $1/r^2$ , poiché rimane approssimativamente uguale. Non possiamo fare lo stesso con il termine esponenziale, però, poiché la fase, per via di  $k$  che è molto grande, varia apprezzabilmente nonostante  $r$  rimanga pressoché costante. Per calcolare l'integrale bisogna quindi esplicitare  $r$  in funzione di  $x$  e  $y$ , che risulta essere, da semplici considerazioni geometriche:

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \bar{z}^2}$$

Svolgendo i quadrati e raccogliendo  $R = x_0^2 + y_0^2 + \bar{z}^2$ , si ottiene:

$$r = R \sqrt{\frac{x^2 - 2x_0x + y^2 - 2y_0y}{R^2} + 1}$$

che possiamo approssimare in

$$r \approx R \sqrt{\frac{-2x_0x - 2y_0y}{R^2} + 1}$$

poiché  $R^2 \gg x^2$  e  $R^2 \gg y^2$ . È possibile espandere la radice in serie di McLaurin nel caso in cui  $x$  e  $y$  siano molto piccoli rispetto a  $R$ , che è il

nostro caso perché  $R$  è dell'ordine di 1 m, mentre  $x$  e  $y$  sono dell'ordine di  $10^{-5}m$ . Abbiamo quindi infine:

$$r \approx R \left( 1 - \frac{x_0x + y_0y}{R^2} \right)$$

Sostituendo questa espressione di  $r$  nell'eq. (2.5) si ottiene:

$$U_p(x_o, y_o, \bar{z}) = \xi_i \frac{\bar{z}}{i\lambda R^2} \exp(ikR) \iint_{\sigma} \exp(-ik(x\alpha + y\beta)) d\sigma \quad (2.6)$$

dove  $\alpha = \sin \theta_o - \sin \theta_i$ ,  $\sin \theta_o = x_o/R$  e  $\beta = y_o/R$ . Sorge ora un'ulteriore complicazione. Nel nostro caso gli specchi sono ruotati di  $45^\circ$  rispetto all'asse passante per il baricentro del quadrato, in modo che le diagonali, non i lati sono allineati lungo  $x$  e  $y$ . Non è possibile perciò integrare separatamente in  $x$  e  $y$  poiché il dominio non è semplice. Risulta quindi opportuno, per evitare di svolgere due integrali più complicati, fare un cambio di variabile di integrazione. È naturale fare il seguente cambio di variabili, che corrisponde a una rotazione di  $45^\circ$  delle coordinate  $x$  e  $y$ :

$$\begin{aligned} u &= \frac{x+y}{\sqrt{2}} & v &= \frac{y-x}{\sqrt{2}} \\ x &= \frac{u-v}{\sqrt{2}} & y &= \frac{u+v}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Sostituiti nell'equazione, tenuto conto che  $\det J = 1$ , dove  $J$  è lo Jacobiano della matrice di trasformazione, l'integrale da risolvere diventa:

$$I_S = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} \exp(-iku \frac{(\alpha + \beta)}{\sqrt{2}}) \times \exp(-ikv \frac{(\beta - \alpha)}{\sqrt{2}}) du dv$$

Gli integrali si possono fattorizzare e svolgendoli il risultato è:

$$I_S = L^2 \text{sinc} \left[ \frac{kL}{2\sqrt{2}}(\alpha + \beta) \right] \text{sinc} \left[ \frac{kL}{2\sqrt{2}}(\beta - \alpha) \right]$$

dove  $\text{sinc}(x) \equiv \sin(x)/x$ .

Sostituendo questa espressione nell'eq.(2.6) otteniamo il risultato cercato, ovvero il campo elettrico diffratto da un quadrato ruotato su una superficie lontana:

$$U_p(x_o, y_o, \bar{z}) = \xi_i \frac{\bar{z}}{i\lambda r^2} L^2 \times \exp(ikR) \times \operatorname{sinc} \left[ \frac{kL}{2\sqrt{2}}(\alpha + \beta) \right] \operatorname{sinc} \left[ \frac{kL}{2\sqrt{2}}(\beta - \alpha) \right] \quad (2.7)$$

Dalla seguente espressione si evince che l'unica differenza che si ha rispetto al caso in cui uno specchio quadrato non sia ruotato è il diverso fattore di fase nelle funzioni *sinc*.

Infine dobbiamo fare attenzione alla definizione degli angoli in quanto la superficie dei singoli specchi non è parallela al piano  $xy$ : lo specchio in posizione "on" è ruotato di  $12^\circ$  intorno all'asse  $y$ . Per questa ragione, se chiamiamo  $\theta_i$  e  $\theta_o$  l'angolo di incidenza e, rispettivamente, quello della direzione di osservazione, misurati rispetto all'asse  $z$ , gli angoli  $\theta_i, \theta_o$  nell'eq. (2.6) vanno sostituiti con  $\theta_i + 12^\circ$  e  $\theta_o - 12^\circ$ . Pertanto l'eq. (2.7) diventa:

$$U_p(x_o, y_o, \bar{z}) = \xi_i \frac{\bar{z}}{i\lambda r^2} L^2 \times \exp(ikR) \times \operatorname{sinc} \left[ \frac{kL}{2\sqrt{2}}(\alpha_D + \beta) \right] \operatorname{sinc} \left[ \frac{kL}{2\sqrt{2}}(\beta - \alpha_D) \right] \quad (2.8)$$

dove  $\alpha_D = \sin(\theta_i + 12^\circ) - \sin(\theta_o - 12^\circ)$ .

Nel prossimo paragrafo calcoleremo il contributo al campo elettrico di molti specchi ruotati, e vedremo che anche in questo caso il risultato non è molto dissimile rispetto al caso in cui gli specchi non lo siano.

## 2.3 Interferenza di specchi ruotati

Dopo aver calcolato il contributo al campo elettrico di un singolo specchio dobbiamo sommare i contributi di tutti gli specchi, tenendo conto della loro disposizione spaziale. Per comprendere meglio il procedimento usato, facciamo riferimento alla fig. 2.3.

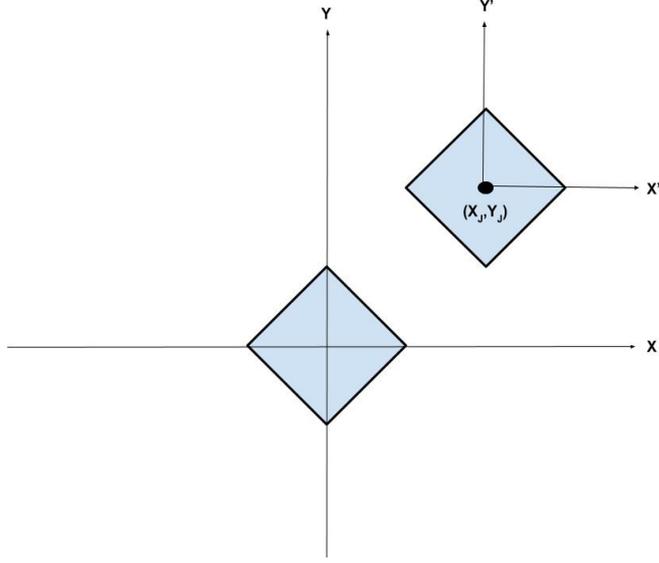


Figura 2.3: Il cambio di variabile è una traslazione del sistema di coordinate dal centro dello specchio centrale a uno qualsiasi.

In questo caso l'integrale calcolato per ogni specchio non è più svolto rispetto all'origine del sistema di riferimento ma rispetto al centro di ogni specchio. Per indicare le coordinate delle porzioni infinitesime di ogni specchio rispetto al loro centro facciamo il seguente cambio di variabili, che non è altro che una traslazione:

$$x' = x - x_j, \quad y' = y - y_j$$

dove  $(x_j, y_j)$  sono le coordinate del centro del generico specchio. Andando a sostituire nell'eq. (2.6) ottenuta nel paragrafo precedente per un singolo specchio abbiamo che il suo contributo al campo è uguale a quello del paragrafo precedente, ma moltiplicato per un fattore di fase ulteriore:

$$\begin{aligned}
 U_p^j(x_o, y_o, \bar{z}) = & \xi_i \frac{\bar{z}}{i\lambda r^2} L^2 \operatorname{sinc}\left(\frac{kL}{2\sqrt{2}}(\alpha_D + \beta)\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{kL}{2\sqrt{2}}(\beta - \alpha_D)\right) \exp(ikR) \\
 & \times \exp(-ik(x_j\alpha + y_j\beta))
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

Per trovare il campo elettrico totale nel punto  $(x_0, y_0, \bar{z})$  dobbiamo allora sommare tutti i contributi  $U_p^j$  al variare di  $j$ . Per farlo dobbiamo scegliere prima di tutto uno tra i vari modi disponibili, i quali porteranno comunque allo stesso risultato. Nel nostro caso il DMD, come mostrato in fig. 3.1, può essere visto come la somma di due pattern identici ma traslati l'uno rispetto l'altro. Se fissiamo l'indice di riga, e sommiamo su tutti gli indici di colonna, abbiamo il contributo di una riga; se ora sommiamo sugli indici di riga alterni, ad esempio quelli pari, abbiamo uno dei due pattern. Per avere l'altro trasliamo il centro rispetto a cui calcolare la somma di un vettore  $(d/2, d/2)$ . In questo modo ci siamo spostati al centro di un altro specchio su una riga con indice dispari, e possiamo ripetere il procedimento di somma. Possiamo quindi scrivere la somma totale dei contributi, prendendo per comodità di scrittura solo la parte che varia in funzione di  $x_j$  e  $y_j$ , che è definita come:

$$\Sigma_{TOT} = \sum_{-N_y}^{N_y} \sum_{-N_x}^{N_x} \exp(-ik(x_j\alpha + y_j\beta))$$

Per il ragionamento fatto sopra,  $\Sigma_{TOT}$  diventa

$$\begin{aligned} \Sigma_{TOT} = & \sum_{\hat{j}=-N_y/2}^{N_y/2} \sum_{\hat{i}=-N_x}^{N_x} \exp(-ikd(\alpha(\hat{i} + \frac{1}{2}) + (\hat{j} + \frac{1}{2})\beta)) \\ & + \sum_{\hat{j}=-N_y/2}^{N_y/2} \sum_{\hat{i}=-N_x}^{N_x} \exp(-ikd(\alpha\hat{i} + \hat{j}\beta)) \end{aligned} \quad (2.10)$$

La prima sommatoria si fattorizza raccogliendo  $\exp(-ikd(\alpha + \beta)/2)$ . Le due sommatorie diventano quindi uguali a meno del termine raccolto. Questo ci permette di ottenere:

$$\Sigma_{TOT} = (1 + \exp(-i\frac{kd}{2}(\alpha + \beta))) \sum_{\hat{j}=-N_y/2}^{N_y/2} \sum_{\hat{i}=-N_x}^{N_x} \exp(-ikd(\alpha\hat{i} + \hat{j}\beta)) \quad (2.11)$$

La doppia sommatoria può essere ulteriormente semplificata poiché non ci sono termini misti, quindi è possibile fattorizzare ulteriormente e ottenere:

$$\Sigma_{TOT} = (1 + \exp(-i\frac{kd}{2}(\alpha + \beta))) \sum_{\hat{j}=-N_y/2}^{N_y/2} \exp(-ikd\hat{j}\beta) \sum_{\hat{i}=-N_x}^{N_x} \exp(-ikd\hat{i}\alpha) \quad (2.12)$$

Possiamo trovare la soluzione delle due somme se le vediamo come serie geometriche. Abbiamo infatti il risultato generale che:

$$\sum_{\hat{j}=-N}^N \exp(-ik\hat{j}) = \frac{\sin(k(N + 1/2))}{\sin(k/2)} \quad (2.13)$$

Allora avremo come risultato finale che:

$$\Sigma_{TOT} = (1 + \exp(-i\frac{kd}{2}(\alpha + \beta))) \frac{\sin((N_x + 1/2)kd\alpha)}{\sin(kd\alpha/2)} \frac{\sin((N_y/2 + 1/2)kd\beta)}{\sin(kd\beta/2)} \quad (2.14)$$

Mettendo insieme quest'espressione con i risultati ottenuti nel capitolo precedente abbiamo infine l'espressione del campo elettrico, diffratto da  $N$  specchi, in un punto lontano  $P$ . L'espressione finale risulta essere:

$$\begin{aligned} U_p(x_o, y_o, \bar{z}) = & \xi_i \frac{\bar{z}}{i\lambda r^2} L^2 (1 + \exp(-i\frac{kd}{2}(\alpha + \beta))) \exp(ikR) \\ & \times \frac{\sin((N_x + 1/2)kd\alpha)}{\sin(kd\alpha/2)} \frac{\sin((N_y/2 + 1/2)kd\beta)}{\sin(kd\beta/2)} \\ & \times \text{sinc}(\frac{kL}{2\sqrt{2}}(\alpha_D + \beta)) \text{sinc}(\frac{kL}{2\sqrt{2}}(\beta - \alpha_D)) \end{aligned} \quad (2.15)$$

A noi interessa tuttavia l'intensità del campo elettrico e quindi solo il modulo quadro di  $U_p$ :

$$\begin{aligned} |U_p|^2 = & (2\xi_i \frac{\bar{z}}{\lambda r^2} L^2)^2 \cos^2(k\frac{d}{4}(\alpha + \beta)) \\ & \times \frac{\sin^2((N_x + 1/2)kd\alpha)}{\sin^2(kd\alpha/2)} \frac{\sin^2((N_y/2 + 1/2)kd\beta)}{\sin^2(kd\beta/2)} \\ & \times \text{sinc}^2(\frac{kL}{2\sqrt{2}}(\alpha + \beta)) \text{sinc}^2(\frac{kL}{2\sqrt{2}}(\beta - \alpha)) \end{aligned} \quad (2.16)$$

# Capitolo 3

## Setup dell'apparato

In questo capitolo verranno descritti i vari componenti dell'apparato sperimentale. In particolare verranno approfonditi:

- il Digital-Micromirror-Device, un modulatore spaziale di luce.
- le sorgenti luminose: un laser e un led.
- la camera CMOS per l'acquisizione delle immagini.

Infine verrà descritto come sono stati predisposti gli strumenti per la misura dell'intensità del fascio nel massimo di interferenza al variare dell'angolo di incidenza sul DMD.

### 3.1 Il Digital-Micromirror-Device

Per il lavoro di questa tesi uno strumento di fondamentale importanza è il Digital-Micromirror-Device. Quello utilizzato negli esperimenti è il modello Texas Instruments DLP3000[10]. Il DMD è un modulatore spaziale di luce controllato digitalmente e ottimizzato per applicazioni con piccoli fattori di forma. Quando viene accoppiato con un appropriato sistema ottico, ad esempio un fascio laser, il DMD può essere usato per modularne l'ampiezza e la direzione. Il DLP3000 è capace di creare modelli di figure attraverso la

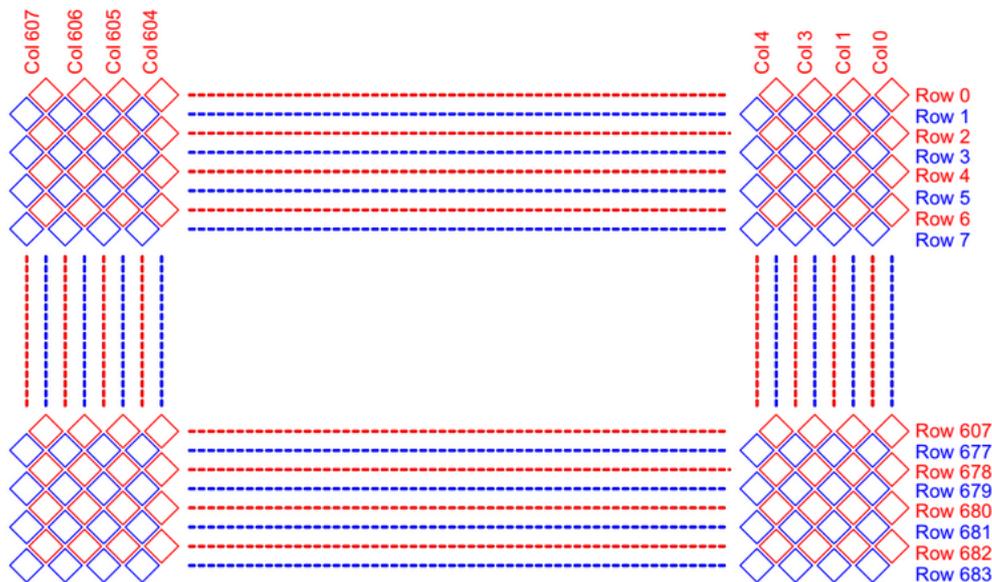


Figura 3.1: Le colonne sono 608, le righe 684. È da notare che il conteggio delle righe è diverso rispetto alle colonne. Per le prime, due linee adiacenti (blu e rosse), sono conteggiate separatamente. Per le seconde, invece, sono contante come una singola.

modulazione della luce in maniera efficiente per via della precisione e della velocità con cui è possibile ridefinire un'immagine. Il DMD è quindi un oggetto estremamente utile in molte applicazioni, come lo scanning 3D, gli apparati medici, la microscopia, la spettroscopia e molte altre. La sezione del DMD che modula la luce è un rettangolo con diagonale di 7.62mm composto da specchi in alluminio quadrati cui le diagonali sono di  $10.8\mu\text{m}$ . La disposizione degli specchi ( $608 \times 684$ ) mantiene fino alla risoluzione WVGA. Gli specchi sono ruotati di un angolo di  $45^\circ$  rispetto all'asse passante per il loro centro. La configurazione è mostrata in fig. 3.1.

La caratteristica che li rende dei modulatori di luce è la possibilità di ruotare attorno a un asse passante per una diagonale. Gli angoli possibili sono due e sono opposti ( $\pm 12^\circ$ ). La rapidità nel cambiare configurazione, che in questa tesi non è stata studiata, è dovuta alla capacità di modifica nella disposizione degli specchi in  $5 \mu\text{s}$ . La massima efficienza nella riflessione si

ha per illuminazione laterale e per una lunghezza d'onda nel visibile (420 – 700nm) In questo caso si hanno:

- riflettività degli specchi 88%.
- efficienza in diffrazione 86% (rapporto tra la potenza misurata nel massimo di diffrazione e la potenza del fascio incidente). Il valore misurato risulta essere invece  $P_{max}/P_{inc} = (0.63 \pm 0.01)mV$ .

## 3.2 Il laser

Il laser è prodotto dalla Thorlabs ed è il modello CPFS63AP05. Il fascio è di tipo gaussiano, ovvero nel piano perpendicolare alla direzione di propagazione l'intensità è una gaussiana, in entrambe le direzioni. La lunghezza d'onda è di 635nm.

## 3.3 Il LED

Descriviamo brevemente il tipo di LED utilizzato, per comprendere meglio i risultati ottenuti. Il modello è il M660L4[11] prodotto da Thorlabs. Produce un fascio piano, con uno spettro largo in lunghezza d'onda centrato intorno al valore di 660nm (colore rosso scuro). Se utilizziamo il parametro FWHM, che sta per "larghezza a metà altezza" (Full width at Half Maximum), la larghezza dello spettro. risulta essere di 20 nm. Il LED deve essere alimentato con un generatore di corrente. Il valore di test è di 1200 mA. Per verificare il comportamento del LED all'aumentare della corrente di alimentazione è stato condotto un fit lineare su i valori acquisiti attraverso un fotodiodo (la grandezza che misura è una differenza di potenziale elettrico proporzionale all'intensità di luce incidente sul fotodiodo) e, come risulta dalla fig. 3.2 l'intensità del fascio cresce linearmente con la corrente di alimentazione.

Una caratteristica negativa del LED per i nostri scopi è che emette luce molto divergente. Infatti a 35° dall'asse di propagazione l'intensità relativa

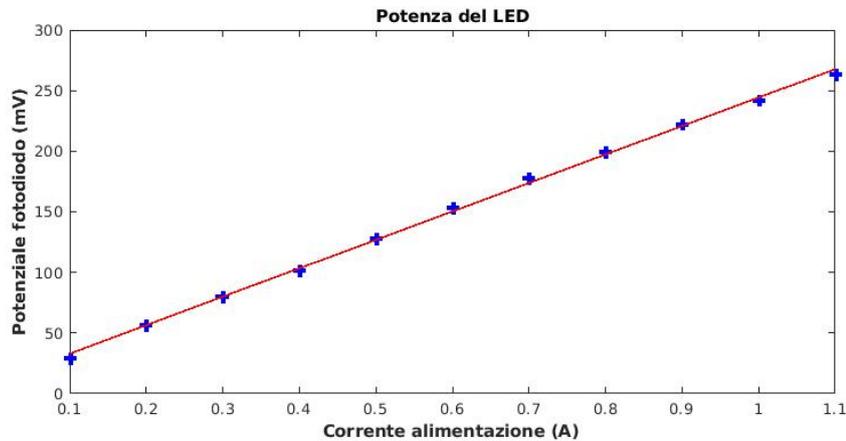


Figura 3.2: Il fit è stato eseguito con la funzione  $f(x) = ax + b$ . È risultato che  $a = 234.7 \text{ mV/A}$ ,  $b = 9.8 \text{ mV}$

del fascio è solo 0.8. Si raggiunge il primo minimo, il 10% dell'intensità diretta, a circa  $60^\circ$ . Per evitare una così ampia dispersione di energia si utilizza presso la sorgente una lente con focale di  $25\text{mm}$ .

### 3.4 La camera CMOS

La camera CMOS utilizzata è il modello MT9M001C12STM-DR[8] prodotto da On semiconductor. È stata impiegata per acquisire le immagini dei fasci del laser e del LED. Ad esempio le immagini dei fasci laser gaussiani su cui è stata fatta l'analisi per ottenere il valore del parametro  $M^2$ , o anche quelle per lo studio del contrasto, sono state acquisite tramite la camera. La camera ha una matrice di  $1280 \times 1024$  pixel attivi. Contando anche quelli non attivi la matrice è di  $1312 \times 1048$  pixel. Ciascun pixel è un quadrato di lato  $5.2\mu\text{m}$ . La frequenza di cattura è programmabile con un massimo di 30 fps ("frames-per-second"). Nell'acquisizione è stato variato questo parametro per ottenere immagini esenti da saturazione. È possibile inoltre impostare un gain, il quale è stato preso in considerazione nell'acquisizione.

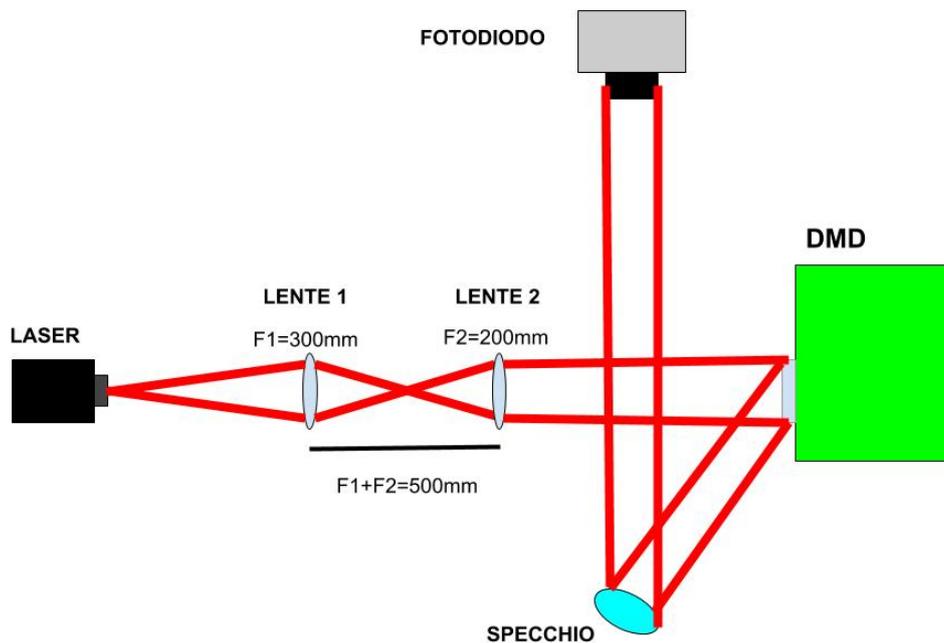


Figura 3.3: Il setup è composto da una sorgente laser , due lenti per rendere l'onda incidente piana, il DMD che diffrange l'onda, lo specchio che controlla la direzione del massimo selezionato e infine dal fotodiode che ne misura la potenza.

### 3.5 Setup per la misura dell'intensità

L'esperimento per la misura dell'intensità del laser al variare dell'angolo di rotazione del DMD è rappresentato in fig.3.3

Il laser emette la radiazione con  $\lambda = 635nm$ , di un colore rosso scuro; siccome il fascio uscente non è un'onda piana, per renderlo tale occorrono due lenti. In questo modo infatti è stato possibile, disponendo le lenti a un distanza pari alla somma delle focali, avere in uscita dalla seconda lente un'onda piana. L'onda piana incide quindi sul DMD, e genera una figura di interferenza, con picchi delocalizzati. Lo specchio permette di selezionarne uno, e direzionarlo dove si preferisce; nel nostro caso, nel fotodiode. Quest'ultimo converte la radiazione entrante in una differenza di potenziale, la quale infine viene misurata da un voltmetro.



# Capitolo 4

## Risultati

Nel seguente capitolo vengono raccolti i risultati delle misurazioni fatte durante la tesi e vengono commentati alla luce delle previsioni teoriche compiute nei capitoli precedenti. Nella prima sezione viene studiato il contrasto, in particolare in riferimento alle immagini acquisite tramite la camera CMOS di un fascio riflesso dal DMD.

### 4.1 Il contrasto di un'immagine

Il contrasto è comunemente definito come il rapporto tra l'ampiezza del segnale e il suo valor medio. La capacità di riconoscere la presenza di un elemento in un'immagine dipende fortemente dal contrasto, e dalla risoluzione di questa. Questo è il motivo per cui ad esempio è di grande interesse conoscere e controllare il contrasto di un sistema di diagnostica per immagini[1]. In questo capitolo verrà messo in luce come sia di fondamentale importanza la caratterizzazione del contrasto nello studio di sistemi ottici come il DMD. Il contrasto è definito numericamente come  $C = \frac{\Delta_{Max,Min}}{Max+Min}$  dove  $Max$  è il valore massimo dell'intensità, e  $Min$  il minimo. Per come è definito, vale che  $0 \leq C \leq 1$ . La definizione di contrasto non è tuttavia soddisfacente da sola, poiché non definisce un algoritmo universale per calcolarne il valore. Ovvero, non si riesce a descrivere l'immagine a partire dal contrasto, se non viene

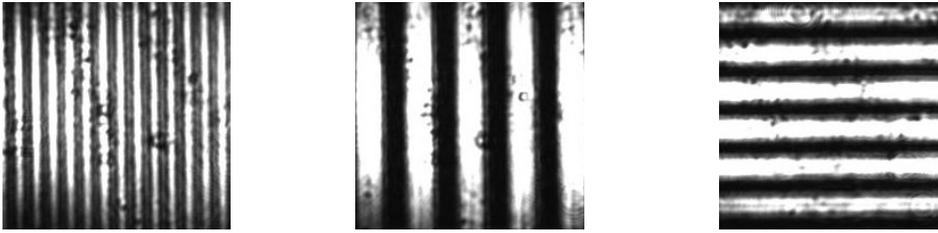


Figura 4.1: le immagini hanno lo stesso numero di pixel ( $200 \times 200$ ). Si nota che la risoluzione (n di pixel) per ogni linea bianca o nera è inferiore per la prima immagine rispetto alle altre due.

specificato rispetto a quali pixel o gruppi di pixel. Questo è il motivo per cui è necessario definire il contrasto a partire dal sistema di acquisizione dell'immagine, e dal tipo di pattern che si vuole esaminare. Nella tesi il sistema di acquisizione utilizzato è la camera CMOS descritta nel Capitolo 3. Questa ha  $1280 \times 1024$  pixel attivi, e 8 bit per pixel per la luminosità (256 livelli di grigio). Il pattern utilizzato consiste in righe bianche e nere, verticali o orizzontali, dallo spessore variabile. Un esempio per ognuno dei tre casi si trova in fig. 4.1. Delle immagini in figura, e in generale in quelle acquisite, la porzione in cui l'intensità risultava più uniforme e quindi più adatta per l'analisi è un quadrato di  $200 \times 200$  pixel.

Un modo naturale per definire il contrasto diventa allora prendere la media di tutti i pixel con luminosità alta e tutti quelli con luminosità bassa, farne separatamente la media e calcolare  $C$ , dove  $Max$  sarà la media delle medie delle intensità alte e  $Min$  sarà la media delle medie delle intensità basse. Questo è quello che si è cercato di fare con il seguente programma in Matlab.

```
A=imread('stripesTelescopeW100_A90.bmp');
```

```
w=sum(A);
```

```
v=w/size(A,1);
```

```
vector=[1:100];
```

```

for a=1:100

index_sup=1;
index_und=1;
values=[1:1];
values(1,1)=v(1,1);
mean_sup=[1:1];
mean_und=[1:1];
count=1;
k=1;

for j=2:size(v,2)

if abs(v(1,j)-v(1,j-1))<a

    if count~=1
        count=1;
    end

    values(1,k)=v(1,j);
    k=k+1;

else

    if count==1

        M=mean(values,2);
        k=1;
        values=[1:1];M=mean(values,2);count=count+1;

        if (v(1,j)-v(1,j-1))>a

```

```

        mean_und(1, index_und)=M;
        index_und=index_und+1;

    else

        mean_sup(1, index_sup)=M;
        index_sup=index_sup+1;

    end

end

end

end

vector(1, a)=abs(mean(mean_sup)-mean(mean_und));

end

max(vector)

```

Descriviamo ora l'algoritmo di questo codice per comprendere meglio i risultati ottenuti, prendendo come immagine campione quella con le linee orizzontali. La tecnica generale consiste nel memorizzare i valori dei plateau alti e bassi, scartando i valori di salita e di discesa. La funzione *imread* restituisce una matrice 2D con il numero di righe pari al numero di pixel di una riga della camera, e ugualmente per le colonne. Il valore degli elementi della matrice è il livello di grigio del pixel corrispondente (da 0 a 255). Viene realizzato un vettore  $v$  che è la somma dei vettori riga normalizzato (divisione per il numero di colonne). Il problema da risolvere è quindi ridotto a una dimensione. Dalla riga 9 alla riga 16 vengono definiti e inizializzati gli indici per gestire le istruzioni e i vettori per memorizzare i dati. Nella riga 18

viene fatto un ciclo che va dal secondo all'ultimo indice del vettore  $v$ . Se la differenza tra i livelli di grigio di due pixel successivi è inferiore in valore assoluto a un certo parametro  $a$ , ovvero ci troviamo in una zona di plateau, il valore del secondo viene salvato nel vettore  $values$ . Nel momento in cui incontriamo un pixel che ha un valore cui la differenza col precedente eccede il parametro  $a$ , ovvero siamo in una zona di salita o discesa, vengono attuate alcune istruzioni. Prima di tutto viene fatta la media dei valori memorizzati nel vettore  $values$ , e vengono quindi ripuliti il contatore  $k$ , che gestisce l'indice del vettore  $values$ , e  $values$  stesso, così da essere pronto a memorizzare nuovi valori da capo. Viene anche segnalato attraverso l'aumento di  $count$  che il sistema non è più in una zona di plateau. Sempre attraverso  $count$ , nel caso in cui 3 o più punti successivi siano o in salita o in discesa, le istruzioni precedenti vengono eseguite una sola volta, ovvero per i primi due punti, per evitare che la variabile  $M$  sia inizializzata con 0. Ora, se la differenza tra i due punti è positiva, cioè stiamo andando dal basso verso l'alto, la media calcolata prima viene salvata nel vettore che contiene le medie dei plateau bassi ( $mean\_sup$ ); Viceversa se la differenza è negativa ( $mean\_und$ ). Infine viene calcolata la media delle medie dei valori dei plateau bassi che viene sottratta alla media delle medie dei plateau alti dividendo tutto per la somma dei due termini; il risultato è memorizzato nel vettore  $vector$ . Questi sono i valori che ci interessano poiché ci dicono in media, qual è la differenza tra l'intensità dei punti alti e dei punti bassi. Siccome il parametro  $a$  è arbitrario e il suo unico scopo è quello di ottimizzare i valori appena trovati, risulta naturale fare un ciclo, qui compiuto al variare di  $a$  da 1 a 100. Il calcolo del contrasto è stato effettuato su venti immagini, dieci a linee orizzontali e dieci a linee verticali, variandone la grandezza. I valori ottenuti sono stati raccolti in tab.(4.1).

I valori ottenuti mostrano che il contrasto delle immagini calcolato con l'algoritmo descritto sopra è prossimo all'unità per tutti i casi contemplati. Possiamo quindi affermare che il sistema ha acquisito delle immagini con un ottimo contrasto. L'algoritmo è stabile anche per risoluzione relativamente

	Righe	Colonne
W200	0.9840	0.9828
W180	0.9876	0.9822
W160	0.9859	0.9830
W140	0.9832	0.9826
W120	0.9841	0.9834
W100	0.9833	0.9846
W80	0.9837	0.9839
W60	0.9829	0.9848
W40	0.9846	0.9875
W20	0.9791	0.9843

Tabella 4.1: I valori raccolti sono calcolati su immagini con righe e colonne con larghezza variabile da circa tre pixel/linea a venti pixel/linea

basse, fino a 3 pixel per linea, ma è facile notare che quando la risoluzione diventa molto bassa, la possibilità di definire zone di plateau è difficile, e l'algoritmo non è più utile. Prendendo come esempio il caso in cui ad ogni linea corrisponde un pixel, l'algoritmo non restituirà teoricamente alcun valore, poiché la differenza tra le intensità di due pixel successivi sarebbe sempre troppo grande per poter considerare l'esistenza di una zona di plateau. Prendendo infatti il caso di altre immagini acquisite dove la risoluzione è molto bassa, l'algoritmo non funziona. I risultati che dà sono totalmente aleatori. Concludiamo quindi che l'algoritmo funziona con la condizione  $pixel/linea > 3$ .

## 4.2 $M^2$ del laser

Per ottenere il valore  $M_x^2$  è stato necessario acquisire 4 immagini del profilo di intensità del fascio nel piano perpendicolare alla propagazione, questo poiché nell'equazione 1.23 i parametri liberi sono tre ( $W_{x0}, z_0, M_x^2$ ). Infatti i

valori  $W_x(z)$  posso essere calcolati attraverso un fit delle immagini acquisite, ed è quello che è stato fatto in figura 4.2, e le distanze  $z$  sono misurate direttamente (nel nostro caso è la distanza tra la prima lente per la convergenza del fascio e la camera CMOS).

Come si nota dall'immagine il fascio non è gaussiano, ma presenta, soprattutto quando l'intensità delle code è più debole, una forma bilobata. Questo indica già che il fascio non è unicamente gaussiano. Quello che ci aspettiamo è quindi di trovare un valore del parametro  $M^2$  non trascurabile.

In figura 4.3 è stato graficato il fit non lineare dei dati acquisiti rispetto alla funzione 1.23, insieme ad altre linee tratteggiate che indicano l'andamento del fascio al variare del parametro  $M^2$ . Come risulta dall'immagine, il valore di  $M^2$  è di 10.7, che conferma il fatto che il fascio non è unicamente gaussiano. Il fascio pertanto sarà molto più limitato dalla diffrazione rispetto a un corrispettivo fascio ideale.

### 4.3 Angolo di blaze

I risultati dello studio dell'equazione 2.2 sono riportati in figura 4.4. Si nota che vi sono vari massimi dell'interferenza e uno dei massimi è raggiunto per l'angolo  $\theta_i \approx 20^\circ$  con  $m = 6$ . Altri massimi si trovano ad esempio per  $m = 7$  per il quale l'equazione 2.2 è verificata per un angolo prossimo a  $0^\circ$ , negativo; per  $m = 7, 8$  invece l'angolo di blaze è rispettivamente prossimo a  $32^\circ$  e  $45^\circ$ . Il valore che ci interessa però è il massimo dell'interferenza al minimo ordine di diffrazione per un angolo positivo di riflessione, ovvero per  $m = 6$ . Questo valore ci servirà nello studio dell'andamento del profilo di diffrazione del reticolo al variare dell'angolo di incidenza.

### 4.4 Profilo di intensità

Nello scorso paragrafo si è trovato che la condizione di blaze al minimo ordine di diffrazione si ottiene per un angolo di incidenza rispetto al pia-

no del DMD  $\theta_i \approx 20^\circ$ . Per verificare questa proprietà e per vedere come varia l'intensità rispetto all'angolo una volta che è stato selezionato un massimo dell'interferenza, possiamo utilizzare l'eq. (2.16) che descrive in maniera generale l'intensità del fascio. Siccome si ha la condizione di interferenza costruttiva, nell'eq. (2.16) i termini che la descrivono possono essere posti uguali a una costante. La condizione di interferenza costruttiva ci assicura che deve valere l'equazione del reticolo (2.1) e con essa la condizione sull'angolo di osservazione, ovvero:

$$\theta_m = \arcsin\left(\frac{m\lambda}{d} - \sin(\theta_i)\right) \quad (4.1)$$

Inserendo questa condizione nell'eq. (2.16) e mettendo in un grafico i risultati si ottiene l'andamento in fig. 4.5.

Si osserva che effettivamente in corrispondenza dell'angolo di blaze, cioè per  $\theta_i \approx 20^\circ$  si ha un massimo dell'intensità. Per verificare questa previsione sono stati misurati i valori dell'intensità fissando come condizione l'angolo di osservazione per il quale si ha interferenza costruttiva, e variando l'angolo di incidenza: specificamente sono stati acquisiti i valori dell'intensità per  $\theta_i$  che va da  $2^\circ$  a  $26^\circ$  con un passo di  $2^\circ$ . I dati sono stati raccolti in fig. 4.6.

Dal grafico risulta che l'andamento del profilo di intensità è simile a quello misurato sperimentalmente. Il dato che è di nostro interesse, ovvero l'angolo di blaze per  $\theta_i \approx 20^\circ$  è confermato.

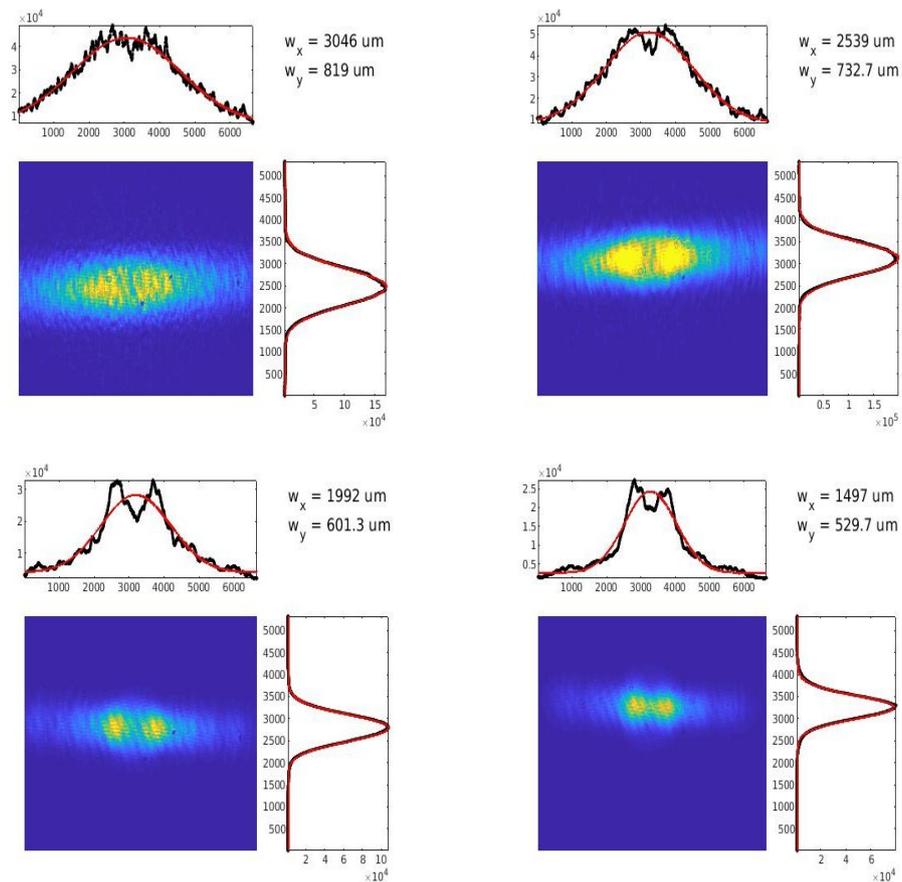


Figura 4.2: Ogni immagine raffigura il profilo di intensità (u.d.m arbitraria) al variare della distanza del fascio espresso in  $mm$  acquisiti dalla camera CCD. In ogni immagine sono anche rappresentati i fit lungo le direzioni  $x$  e  $y$ , e sono riportati i valori dei parametri  $W_x$ ,  $W_y$  ricavati tramite il fit e definiti nel paragrafo precedente. Una caratteristica che si nota aumentando la distanza dal laser è la natura bilobata del fascio, dovuta al fatto che il fascio non è unicamente una gaussiana ma è una sovrapposizione di funzioni diverse.

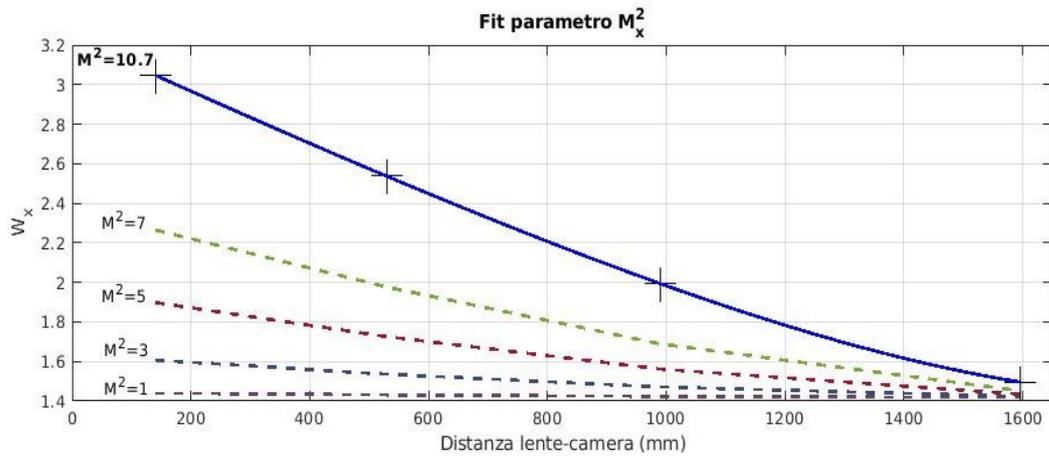


Figura 4.3: Nel grafico la linea blu è quella che corrisponde al fit eseguito sui dati acquisiti. Le altre linee indicano, a parità dei parametri liberi ( $W_{x0}, z_0$ ), l'andamento di  $W_x(z)$ . Si nota che il valore di  $M^2$  cambia radicalmente la propagazione di una fascio. Da ciò ne deriva la sua importanza pratica.

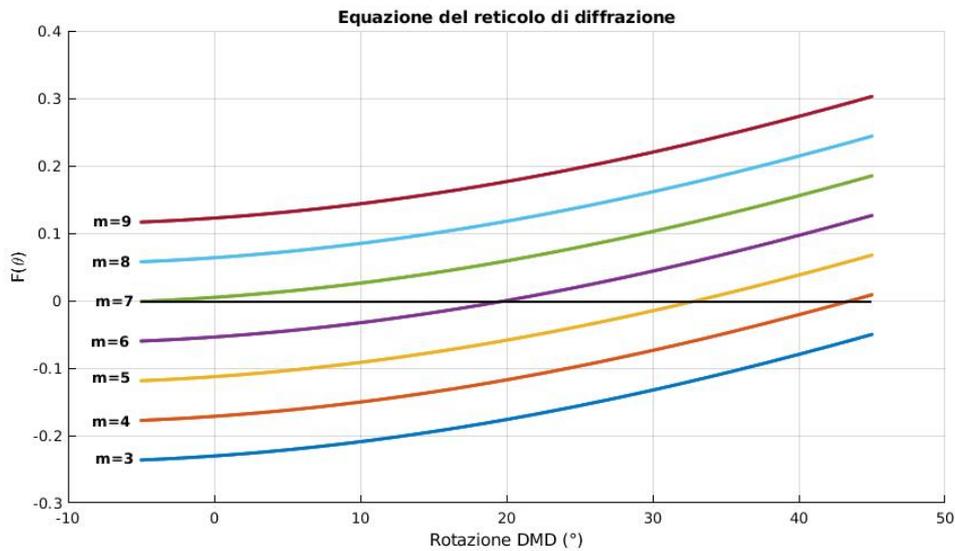


Figura 4.4: Nell'immagine sono raffigurati i grafici della funzione 2.2, dove la variabile indipendente è l'angolo di rotazione del piano del DMD, per valori di  $m = 3 - 9$ . La soluzione con angolo positivo più piccolo si ha per  $m = 6$ , dove  $\theta_{blaze} \approx 20^\circ$

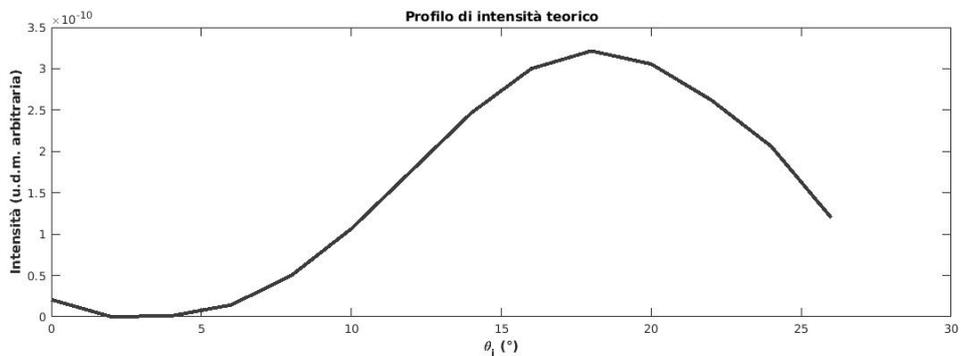


Figura 4.5: Intensità calcolata del picco di diffrazione più intenso al variare dell'angolo di incidenza. Il picco a  $\theta_i \approx 20^\circ$  è l'angolo di blaze, dove l'interferenza costruttiva coesiste con un massimo di un ordine di diffrazione.

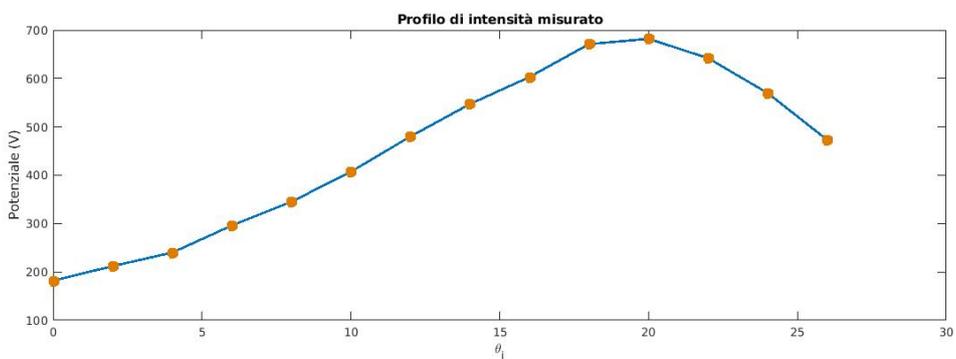


Figura 4.6: Intensità del picco di diffrazione più intenso, misurata con il fotodiode, al variare dell'angolo di incidenza. I dati raccolti indicano che l'andamento sperimentale è simile a quello teorico. In particolare è confermata la previsione teorica dell'angolo di blaze, a  $\theta_i \approx 20^\circ$ .



# Capitolo 5

## Conclusioni

La tesi ha evidenziato l'importanza e le proprietà fondamentali del DMD; in particolare ha messo in luce la possibilità di generare pattern personalizzati per potenziali ottici con cui realizzare trappole di dipolo. Lo studio delle proprietà ottiche del DMD ha messo in risalto le sue proprietà di diffrazione della luce di un fascio incidente. Grazie al modello costruito nel Capitolo 2 è stato possibile fare una previsione teorica dell'angolo di blazing del DMD, dove l'intensità del fascio diffratto è massima. Dall'analisi dei dati è risultato che il picco previsto è confermato sperimentalmente per un ordine di diffrazione  $m = 6$  per un angolo incidente rispetto al piano del DMD  $\theta_i \approx 20^\circ$ . Durante lo studio delle proprietà generali di un fascio laser, l'attenzione è stata rivolta verso il parametro  $M^2$ , misurato sperimentalmente per il laser gaussiano utilizzato durante la tesi. I risultati mostrano che il fascio utilizzato non era unicamente gaussiano, poiché è risultato  $M^2=10.7$ , dove per un fascio ideale (unicamente gaussiano)  $M^2 = 1$ . Infine è stata accentuata l'importanza dello studio del contrasto di un immagine. Le analisi effettuate tramite l'algoritmo spiegato nel Capitolo 4 hanno mostrato che in tutte le immagini in cui è stato applicato, il contrasto è risultato prossimo all'unità, il valore massimo. Questo è stato fatto tenendo conto dei limiti dell'algoritmo che si è evidenziato non funzionare per risoluzione molto basse. La tesi evidenzia quindi un buon accordo tra i dati sperimentali e le previsioni effet-

tuate, dimostrando le principali proprietà ottiche del DMD e degli strumenti utilizzati, come il laser e la camera CMOS.

# Bibliografia

- [1] Cecchin, D. and Bui, F. DIGITALE IN MEDICINA: Rumore = [https://www.unipd.it/nucmed/TF/TSRM/immagini\\_integrate/TSRM\\_9\\_Rumore\\_artefatti.pdf](https://www.unipd.it/nucmed/TF/TSRM/immagini_integrate/TSRM_9_Rumore_artefatti.pdf).
- [2] G. Del Pace. Tailored optical potentials for experiments with atomic superfluids. Master's thesis, Università di Firenze.
- [3] Perego Elia. Master's thesis, Università di Firenze.
- [4] O.K. Ersoy. *Diffraction, Fourier Optics and Imaging*. John Wiley & Sons, 2007.
- [5] R. Grimm, M. Weidemüller, and Y. B. Ovchinnikov. Optical dipole traps for neutral atoms. In *Advances in atomic, molecular, and optical physics*, volume 42, pages 95–170. Elsevier, 1998.
- [6] E. Hecht. *Optics*. Pearson, 2017.
- [7] Sylvain de. Léséleuc. Digital micromirror device. Master's thesis, Swiss Federal Institute of Technology in Zurich.
- [8] ON Semiconductor. 1/2-Inch Megapixel CMOS Digital Image Sensor = <https://www.mouser.it/datasheet/2/308/MT9M001-D-1103807.pdf>.
- [9] A.E. Siegman. How to (maybe) measure laser beam quality. *OSA TOPS Volume*, pages 1–18, 1998.

- [10] Texas Instruments. DLP3000 DLP® 0.3 WVGA Series 220 DMD = <http://www.ti.com/lit/ds/symlink/dlp3000.pdf>.
- [11] Texas Instruments. M660L4 Mounted LED = <https://www.thorlabs.com/drawings/816d6f9a68acb9eb-911A7E44-FF9F-A73E-50B397B3E3AFBEDA/M660L4-SpecSheet.pdf>.
- [12] P.P.J. Zupancic. Dynamic holography and beamshaping using digital micromirror devices. Master's thesis, Ludwig-Maximilians-Universitat Munchen.