

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

**LA DISCRIMINAZIONE TRA
TERREMOTI ED ESPLOSIONI
SOTTERRANEE**

Relatore:
Prof. Michele Dragoni

Presentata da:
Beniamino Rocchi

Anno Accademico 2017/2018

Sommario

Negli ultimi sessant'anni la maggior parte dei test di ordigni nucleari sono stati condotti all'interno della crosta terrestre. In attesa che venga ratificato un divieto comprensivo di tutti i test nucleari, sono state sviluppate una serie di tecniche sismologiche atte a individuare tali test. Nel presente elaborato si studiano le sorgenti all'interno di un mezzo elastico che rappresentano un terremoto e un'esplosione sotterranea. Successivamente si studiano i diversi tipi di onde generate da queste sorgenti, e in base alle differenze riscontrate nel segnale ricevuto si introducono i principali metodi di discriminazione per individuare, fra le centinaia di terremoti più o meno intensi rilevati ogni giorno, un possibile test nucleare che violi i trattati internazionali.

Indice

Introduzione	4
1 Sistemi di forze in un mezzo elastico	6
1.1 Teoria Statica	6
1.1.1 Centro di dilatazione	11
1.1.2 Doppia coppia di forze	12
1.2 Teoria dinamica	13
1.2.1 Soluzione in assenza di forze di volume: onde elastiche piane . . .	14
1.2.2 Soluzione in presenza di forze di volume: il tensore di Green . . .	17
1.2.3 Spostamento dato da un sistema di coppie puntiformi	20
1.2.4 Spostamento prodotto da una doppia coppia di forze	22
1.2.5 Spostamento prodotto da un centro di dilatazione	24
2 Propagazione e spettro della sorgente delle onde sismiche	26
2.1 Onde sismiche	26
2.2 Deduzione delle velocità delle onde P ed S in profondità	28
2.2.1 Localizzazione della sorgente di un sisma	31
2.3 Onde di superficie	33
2.4 Spettro della sorgente sismica	35
3 Metodi di Discriminazione	38
3.1 Localizzazione	38
3.2 Discriminanti legate allo spettro delle onde	39
3.2.1 Segno del primo impulso di onde P	40
3.2.2 Onde di Love	40

3.2.3	Criterio m_b/M_S	41
3.2.4	Frequenza delle onde prodotte	42
3.3	Considerazioni e precisazioni	43
Appendice A Il tensore di Green		46
A.1	I potenziali di Helmholtz	46
A.2	Teorema di Lamé	48
A.3	Soluzione delle equazioni per φ e ψ	48
A.4	Calcolo del tensore di Green	49
A.4.1	I potenziali φ e ψ	50
A.4.2	Risultato finale	51
A.4.3	Espressione generale del tensore di Green	53
A.5	Proprietà del tensore di Green	54
A.5.1	Campo vicino	54
A.5.2	Campo lontano	55
A.5.3	Approssimazione di campo lontano	55
A.6	La distribuzione angolare della radiazione	56
A.7	Riduzione al caso statico	57
Bibliografia		59

Introduzione

Sin dal primo test nucleare (Trinity, 6 Agosto 1945) le esplosioni nucleari sono state strettamente legate alla sismologia. Le esplosioni nucleari hanno fornito sorgenti sismiche facilmente individuabili e abbastanza potenti da generare onde in grado di propagarsi in tutto il globo. Le onde sismiche propagandosi in mezzi diversi cambiano velocità e percorso, e quindi studiare il comportamento delle onde negli strati più interni della Terra ha permesso di studiarne la struttura (Bath, 1973; Dahlman e Israelson, 1977).

Da questo primo test sono state fatte esplodere più di 2000 bombe di potenza variabile, e già dagli anni '50, con la crescita della consapevolezza dei rischi e dei danni derivanti dal fallout nucleare, si iniziò a tentare di contenere le esplosioni conducendo test sotterranei. Nel 1958, durante l'Operazione Plumbbob in Nevada, fu eseguito con successo il primo test sotterraneo, riuscendo a contenere l'esplosione nel suolo ed evitare la dispersione nell'atmosfera. Se da una parte la possibilità di far brillare ordigni nel suolo ridusse i rischi ambientali, allo stesso tempo rese molto più semplice la possibilità di tenere tali esperimenti segreti.

Con l'introduzione dei primi accordi per la messa al bando dei test nucleari (Limited Test Ban Treaty, 1963; Threshold Test Ban Treaty, 1974) si andò a sviluppare un nuovo ramo della sismologia, denominato "*Detection Seismology*" (Sykes e Evernden, 1982). Solo nel 1996 le Nazioni Unite hanno adottato il Comprehensive Nuclear Test Ban Treaty (CTBT), un trattato per la totale messa al bando dei test nucleari, e la rispettiva organizzazione (CTBTO). Tale trattato è stato firmato da 181 nazioni e ratificato da 149, per diventare operativo mancano la firma di tre Nazioni (fra cui Corea del Nord, Pakistan e India, tutte e tre dotate di tecnologia nucleare) e la ratifica da parte di otto (fra cui gli USA) e per questo non è ancora entrato in vigore. Il CTBT prevede un'organizzazione che si avvalga di una rete di stazioni di monitoraggio in tutto il mondo (Sistema di Monitoraggio Internazionale, IMS) per individuare eventi sismici e

discriminare se siano effettivamente dovuti a test nucleari. Anche se il CTBTO ancora non è operativo, esiste la Commissione Operativa del CTBT, che costituisce il regime di verifica in modo che esso sia già operativo quando il trattato entrerà in vigore. L'IMS ha rilevato ed identificato con successo tutti i 6 test Nord Coreani condotti dal 2006 in poi.

L'obiettivo di questa tesi sarà innanzitutto spiegare le differenze che occorrono fra un terremoto ed un'esplosione (in particolare esaminando i modelli di sorgente formati da doppie coppie di forze e da centri di dilatazione), studiare le caratteristiche delle onde sismiche emesse dai due tipi di sorgente e la loro propagazione all'interno della Terra e successivamente illustrare i diversi criteri di discriminazione tra i terremoti e le esplosioni sotterranee.

Capitolo 1

Sistemi di forze in un mezzo elastico

In questo capitolo tratteremo alcune soluzioni dell'equazione di equilibrio di un mezzo elastico omogeneo e isotropo in presenza di forze di volume. Tali forze hanno il ruolo di sorgenti del campo di deformazione e sforzo all'interno del mezzo.

1.1 Teoria Statica

Consideriamo una forza statica \mathbf{F} applicata in un punto di uno spazio elastico omogeneo e isotropo. Nel caso di sorgenti puntiformi o di estensione finita, si assume in genere come condizione al contorno che il campo di spostamenti \mathbf{u} e le sue derivate spaziali si annullino a distanza infinita dalle sorgenti. Poiché stiamo considerando una teoria lineare, possiamo prevedere che ciascuna componente dello spostamento sia una combinazione lineare delle tre componenti della forza, cioè

$$u_i(\mathbf{x}) = G_{ij}F_j \quad (1.1)$$

dove i coefficienti G_{ij} danno la componente i dello spostamento prodotto da una forza unitaria con direzione j . Tali coefficienti formano un tensore del secondo ordine simmetrico e che dipende dal punto di osservazione, detto *tensore di Somigliana* (Landau e Lifshitz, 1970; Boschi e Dragoni, 2000). Per una forza statica \mathbf{F} applicata in un punto $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$, passando attraverso l'equazione di equilibrio

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\mathbf{F} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1.2)$$

dove λ e μ sono le costanti di Lamé. Posso ricavare le componenti di questo tensore come

$$G_{ij} = \frac{1}{8\pi\mu}(r,u\delta_{ij} - kr_{,ij}) \quad (1.3)$$

dove

$$k = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \quad (1.4)$$

Nel caso di una distribuzione di forze $f(x_1, x_2, x_3)$ per unità di volume, lo spostamento prodotto è dato da

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_V f_j(\mathbf{x}')G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')dV \quad (1.5)$$

dove V è il volume del corpo elastico e $dV = dx'_1 dx'_2 dx'_3$. Una forza singola, agente in un dato punto del mezzo, costituisce il tipo più semplice di *nucleo di deformazione*. I nuclei di deformazione sono un gruppo di soluzioni dell'equazione di equilibrio

$$\mathbf{f} + \mu\nabla^2\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (1.6)$$

per un corpo elastico omogeneo e isotropo, che sono singolari in un punto (quello in cui si trova il nucleo stesso). I nuclei di deformazione possono essere considerati come sorgenti puntiformi del campo di spostamenti.

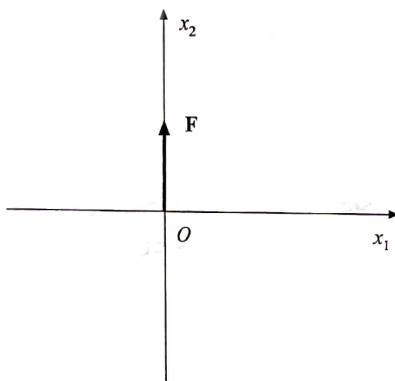


Figura 1.1: Forza singola

Dalla soluzione per forza singola posso ricavare altri nuclei di deformazione. Ad esempio, applicando due forze parallele tra loro e facendo tendere allo stesso punto i due nuclei, ottengo una coppia di forze. Consideriamo una forza $\mathbf{F}^{(1)}$ applicata nell'origine

delle coordinate, in direzione $+x_1$, e una forza $\mathbf{F}^{(2)}$ applicata nel punto $(0, h, 0)$ in direzione $-x_1$. Prendiamo il modulo di entrambe le forze uguale a M/h , dove M ha le dimensioni di un momento. Allora

$$\mathbf{F}^{(1)} = \frac{M}{h} \hat{\mathbf{x}}_1 \quad (1.7)$$

$$\mathbf{F}^{(2)} = -\frac{M}{h} \hat{\mathbf{x}}_1 \quad (1.8)$$

Gli spostamenti prodotti separatamente dalle due forze sono:

$$u_i^{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{M}{h} G_{i1}(x_1, x_2, x_3) \quad (1.9)$$

$$u_i^{(2)}(\mathbf{x}) = -\frac{M}{h} G_{i1}(x_1, x_2 - h, x_3) \quad (1.10)$$

Lo spostamento totale prodotto dalla coppia di forze è allora :

$$U_i(\mathbf{x}) = u_i^{(1)}(\mathbf{x}) + u_i^{(2)}(\mathbf{x}) \quad (1.11)$$

Possiamo costruire una soluzione $u_i(\mathbf{x})$ che esprima una coppia di forze per una sorgente puntiforme prendendo il limite di U_i per h che tende a zero

$$u_i(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} U_i(x) \quad (1.12)$$

che esplicitando U_i diventa

$$u_i(\mathbf{x}) = M \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G_{i1}(x_1, x_2, x_3) - G_{i1}(x_1, x_2 - h, x_3)}{h} \quad (1.13)$$

ovvero

$$u_i(\mathbf{x}) = M G_{i1,2} \quad (1.14)$$

Se consideriamo forze dirette lungo gli assi delle coordinate, possiamo ottenere sei possibili tipi di coppie con momento torcente diverso da zero. Se invece applichiamo le due

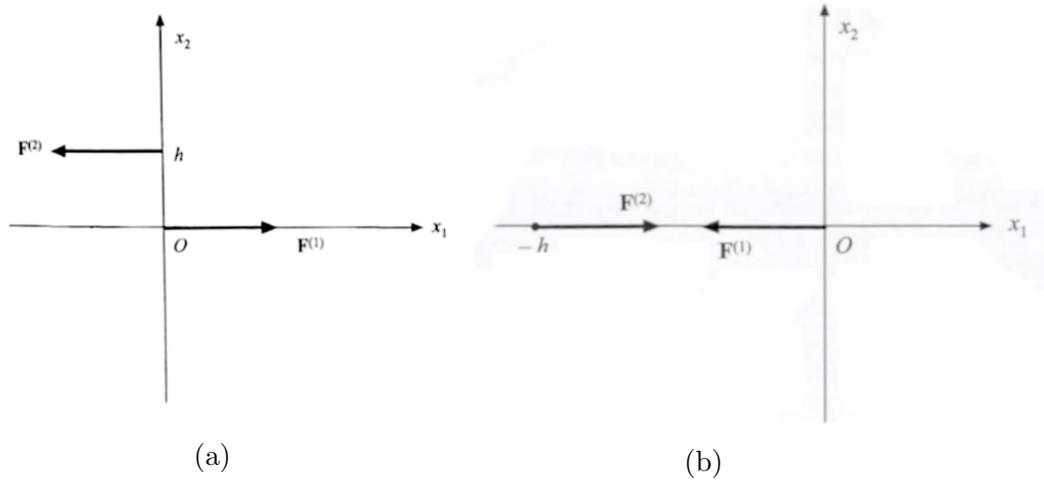


Figura 1.2: Due coppie di forze, la prima con braccio diverso da zero, la seconda con braccio uguale a zero, che facendo tendere h a zero danno origine a coppie multiformi.

forze sullo stesso asse otteniamo una coppia di forze con momento nullo. Ad esempio, consideriamo una forza $\mathbf{F}^{(1)}$ applicata nell'origine in direzione $-x_1$ e una forza $\mathbf{F}^{(2)}$ applicata nel punto $(-h, 0, 0)$ in direzione $+x_1$. Poniamo che entrambe le forze abbiano modulo uguale a M/h , allora

$$\mathbf{F}^{(1)} = -\frac{M}{h}\hat{\mathbf{x}}_1 \quad (1.15)$$

$$\mathbf{F}^{(2)} = \frac{M}{h}\hat{\mathbf{x}}_1 \quad (1.16)$$

e gli spostamenti prodotti separatamente dalle due forze sono

$$u_i^{(1)}(\mathbf{x}) = -\frac{M}{h}G_{i1}(x_1, x_2, x_3) \quad (1.17)$$

$$u_i^{(2)}(\mathbf{x}) = \frac{M}{h}G_{i1}(x_1 + h, x_2, x_3) \quad (1.18)$$

Se, in maniera analoga a quanto fatto con l'equazione 1.11, chiamiamo U_i la somma dei due spostamenti, allora lo spostamento u_i prodotto dalla coppia di forze (detta anche *dipolo vettoriale*) è dato da

$$u_i(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} U_i(\mathbf{x}) = MG_{i1,1} \quad (1.19)$$

Possiamo considerare lo spostamento prodotto da un dipolo come un caso particolare di quello prodotto da una coppia con momento, quando il braccio della coppia è nella stessa direzione delle forze. Se consideriamo forze dirette lungo gli assi delle coordinate, ci sono tre possibili dipoli, ortogonali l'uno all'altro. Se invece consideriamo sia le coppie con momento, sia quelle con momento nullo, ne esistono nove tipi differenti (mostrati in figura 1.8). Una sorgente costituita da una o più coppie di forze è descritta in generale da un tensore del secondo ordine M_{ij} (*tensore momento*), dove l'indice i denota la direzione della forza e l'indice j la direzione del braccio. A ognuna delle nove coppie di forze corrisponde una componente del tensore M_{ij} . In un sistema di coordinate in cui le forze che compongono i nuclei sono parallele agli assi delle coordinate, le componenti diagonali rappresentano i tre dipoli, quelle non diagonali descrivono le coppie con momento diverso da zero. Lo spostamento $u_i(\mathbf{x})$ prodotto da una sorgente statica descritta da un momento M_{kl} è allora

$$u_i(\mathbf{x}) = G_{ik,l}M_{kl} \quad (1.20)$$

dove $G_{ik,l}$ è il tensore di Somigliana derivato sulla direzione del braccio della forza. L'indice i quindi indica la componente dello spostamento, l'indice k la direzione delle forze che compongono la coppia e l'indice l la direzione del braccio della coppia.

Nel caso di una distribuzione di coppie, rappresentata da una *densità di momento* $m_{ij}(\mathbf{x})$ (per unità di volume), lo spostamento prodotto è dato da

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_V m_{kl}(\mathbf{x}')G_{ik,l}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')dV \quad (1.21)$$

in maniera simile a quanto visto in 1.5

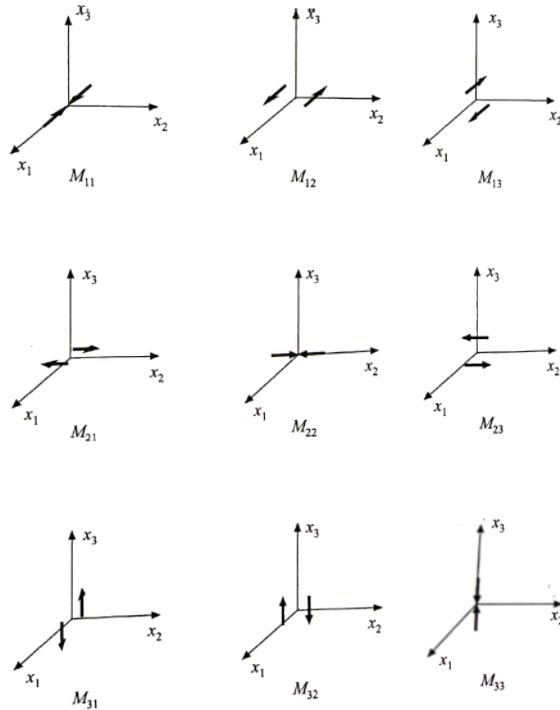


Figura 1.3: Possibili combinazioni date da una coppia di forze dirette lungo gli assi delle coordinate

1.1.1 Centro di dilatazione

Un caso particolare di nucleo di deformazione è il *centro di dilatazione*, che è costituito da tre dipoli ortogonali, ognuno con la stessa intensità M . La sorgente è quindi isotropa, e per questo il tensore momento ad essa associato è diagonale in tutti i sistemi di coordinate

$$M_{ij} = M\delta_{ij} \quad (1.22)$$

e dà luogo a uno spostamento

$$u_i(\mathbf{x}) = MG_{ij,j} \quad (1.23)$$

Se $M > 0$ ottengo un centro di compressione, se $M < 0$ ottengo un centro di dilatazione, che useremo per schematizzare un'esplosione sotterranea.

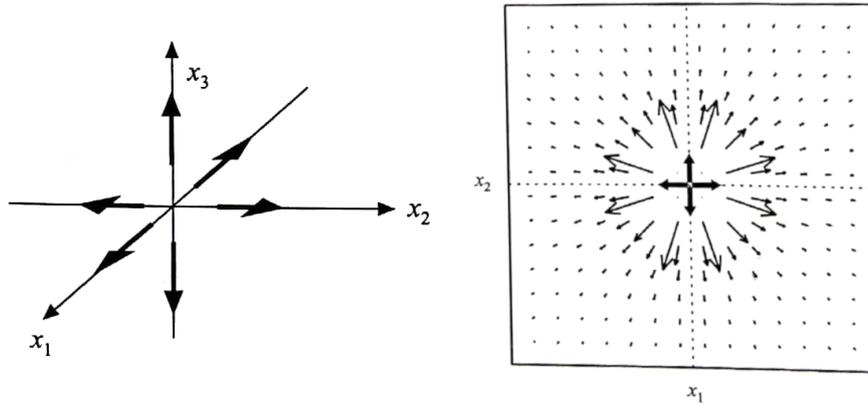


Figura 1.4: Centro di dilatazione e rispettivo campo degli spostamenti

1.1.2 Doppia coppia di forze

L'altro caso di sorgente che ci interessa, e che possiamo descrivere con un tensore M_{ij} è la *doppia coppia di forze* a momento torcente nullo. Essa è costituita da due coppie di forze, ognuna con momento torcente della stessa intensità e direzione opposta.

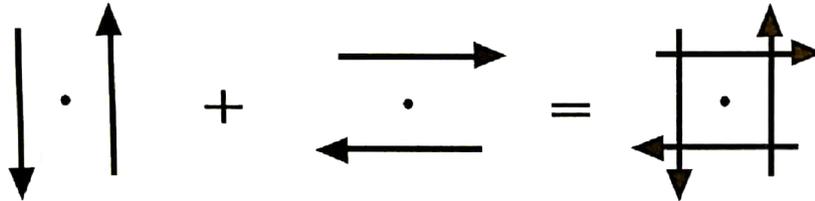


Figura 1.5: Doppia coppia di forze

Dalla definizione del tensore momento appare evidente che data una coppia definita da $M_{ij} (i \neq j)$ l'altra coppia necessaria per formare una doppia coppia a momento torcente nullo è quella descritta dalla componente M_{ji} . Inoltre affinché il momento totale si annulli le componenti M_{ij} e M_{ji} devono avere la stessa intensità. Dunque il tensore momento per una doppia coppia di forze a momento totale nullo può essere costruito tramite i

versori n e b , che esprimono la direzione della forza e del braccio. Ottengo:

$$M_{ij} = M(n_i b_j + n_j b_i) \quad (1.24)$$

Consideriamo come esempio una doppia coppia di forze giacente sul piano $x_1 x_2$. Essa è descritta dal tensore

$$\begin{pmatrix} 0 & M & 0 \\ M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per la 1.20, lo spostamento prodotto è

$$u_i = M(G_{i1,2} + G_{i2,1}) \quad (1.25)$$

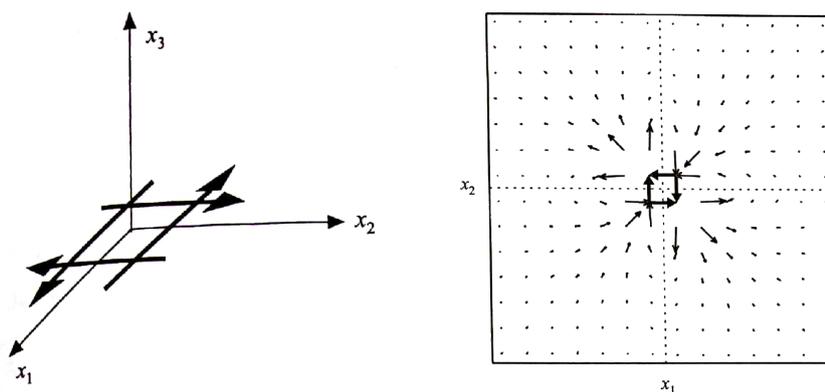


Figura 1.6: Doppia coppia di forze e rispettivo campo degli spostamenti

1.2 Teoria dinamica

Quando un mezzo elastico viene sollecitato in maniera veloce in un punto o in un insieme di punti, ne risulta una accelerazione dei punti del mezzo. La deformazione che si produce si trasmette al resto del mezzo con velocità finita tramite onde, dette onde elastiche (Landau e Lifshitz, 1970). Le onde elastiche sono descritte da soluzioni dell'equazione

del moto di un mezzo elastico

$$\rho \ddot{u}_i = f_i + \sigma_{ij,j} \quad (1.26)$$

dove il membro di destra contiene la somma delle forze di volume f e delle forze σ dovute allo sforzo interno. il membro di sinistra è invece la densità ρ moltiplicata per l'accelerazione \ddot{u} . Le forze interne σ sono date da

$$\sigma_{ij,j} = \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} \quad (1.27)$$

L'equazione 1.26 in notazione vettoriale diventa

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (1.28)$$

Le costanti elastiche nell'equazione del moto possono assumere valori diversi nel caso elastico rispetto al caso statico. Ciò è dovuto al fatto che nel caso statico le costanti elastiche sono *isoterme*. Nel caso elastico invece alla deformazione corrisponde una variazione della temperatura, che porta ad una variazione delle costanti elastiche. Tuttavia nel caso della Terra, data la piccola conducibilità termica delle rocce, per lunghezze d'onda superiori a qualche millimetro lo scambio di calore è abbastanza lento da considerare condizioni *adiabatiche*. I moduli di elasticità C_{ijkl} (che esprimono il rapporto fra tensione e deformazione) sono detti in questo caso *moduli adiabatici* e sono in generale diversi da quelli isotermi

1.2.1 Soluzione in assenza di forze di volume: onde elastiche piane

Consideriamo l'equazione del moto per un mezzo omogeneo 1.26, ma in assenza di forze di volume

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (1.29)$$

Essa è soddisfatta da qualunque funzione lineare del tempo

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})t \quad (1.30)$$

dove \mathbf{a} e \mathbf{b} possono essere funzioni lineari di \mathbf{x} . Questa soluzione rappresenta deformazioni uniformi (se \mathbf{a} e \mathbf{b} sono costanti) e movimenti di corpo rigido estesi a tutto il mezzo, con ampiezze che crescono linearmente nel tempo, ed implica che l'accelerazione \ddot{u} sia uguale a zero. Se $\ddot{u} \neq 0$, l'equazione del moto in assenza di forze di volume è soddisfatta da una funzione del tipo

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u} \left(t - \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}}{c} \right) \quad (1.31)$$

dove $\hat{\mathbf{n}}$ è un versore costante e c una velocità. La 1.31 rappresenta un'onda piana, che si propaga in direzione $\hat{\mathbf{n}}$ con velocità c . In un'onda piana la perturbazione si propaga con fronti d'onda che sono piani, e quindi il tipo di oscillazione più semplice che si possa avere in un mezzo illimitato è un'onda piana in cui lo spostamento \mathbf{u} dipende da una sola coordinata e dal tempo. Se assumiamo per semplicità che l'onda si propaghi in direzione x_1 , possiamo scrivere la (4.6) come

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u} \left(t - \frac{x_1}{c} \right) \quad (1.32)$$

Questa equazione d'onda rappresenta uno spostamento che nel punto x_1 e all'istante t è uguale allo spostamento nell'origine $x_1 = 0$ all'istante $t - x_1/c$. I fronti dell'onda sono perpendicolari all'asse x_1 . L'equazione 1.29 ha quindi derivate nulle nelle direzioni x_2 e x_3 , e si riduce a

$$\rho \ddot{u}_1 = \mu u_{1,11} + (\lambda + \mu) u_{1,11} \quad (1.33)$$

$$\rho \ddot{u}_2 = \mu u_{2,11} \quad (1.34)$$

$$\rho \ddot{u}_3 = \mu u_{3,11} \quad (1.35)$$

che se definiamo due quantità α e β

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (1.36)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (1.37)$$

diventa

$$\ddot{u}_1 - \alpha^2 u_{1,11} = 0 \quad (1.38)$$

$$\ddot{u}_2 - \beta^2 u_{2,11} = 0 \quad (1.39)$$

$$\ddot{u}_3 - \beta^2 u_{3,11} = 0 \quad (1.40)$$

Le tre equazioni ottenute sono tre equazioni di d'Alembert unidimensionali, che rappresentano onde di spostamento propagate in direzione x_1 . Le due quantità α e β sono le velocità di propagazione di tali onde, che possiamo notare essere diverse a seconda della componente dello spostamento presa in esame.

Dunque un'onda elastica piana risulta composta da due tipi di onde che si propagano in maniera indipendente. Nel primo tipo, descritto da u_1 , spostamento e direzione di propagazione sono paralleli, cioè l'onda è *longitudinale* e si propaga con velocità α . Nel secondo tipo, descritto da u_2 e u_3 , lo spostamento è perpendicolare alla direzione di propagazione, cioè l'onda è *trasversale* e si propaga con velocità β . Dalle definizioni di α e β , sapendo che λ e μ sono maggiori di zero, si ha che

$$\alpha > \beta \quad (1.41)$$

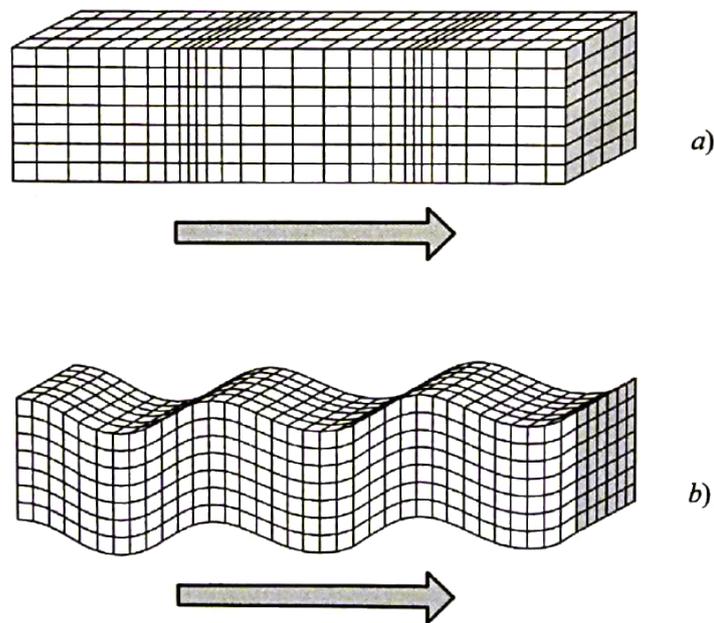


Figura 1.7: Schematizzazione di un'onda P (a) e di un'onda S (b)

Nell'ipotesi in cui $\lambda = \mu$, che per la crosta terrestre è una buona approssimazione, ottengo $\alpha = \sqrt{3}\beta$. Se usiamo un valore per ρ compreso fra 2000 e 3000 kg/m³ e $\lambda = \mu \simeq 3 \times 10^{10} Pa$ (valore medio per la crosta), ottengo velocità dell'ordine dei chilometri al secondo. Le onde longitudinali sono usualmente dette *onde P*, perché avendo velocità maggiore, durante un terremoto sono le prime ad arrivare. Le onde trasversali invece, arrivando per seconde, sono chiamate *onde S*. Le onde P producono una dilatazione $\theta \neq 0$ e sono quindi dette anche *onde di compressione*, ma sono irrotazionali, cioè $\boldsymbol{\omega} = 0$, dove $\boldsymbol{\omega}$ è il vettore rotazione. Le onde trasversali al contrario hanno $\theta = 0$ ma $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, e quindi lasciano invariato il volume, ma comportano una deformazione; sono anche dette *onde di taglio*. Se consideriamo una porzione del mezzo elastico, essa viene compressa e dilatata quando attraversata da un'onda P, mentre attraversata da onde S cambierà forma lasciando il volume invariato.

1.2.2 Soluzione in presenza di forze di volume: il tensore di Green

In generale si producono onde elastiche se esiste una distribuzione di forze di volume $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ in una regione finita (nel caso del centro di dilatazione si riduce ad un solo punto), la cui intensità subisce una rapida variazione nel tempo. La funzione $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ è detta *funzione sorgente*. La variazione di \mathbf{f} nel tempo produce una variazione dello spostamento, che si propaga nel mezzo a partire dalla sorgente con la velocità delle onde elastiche. Se la sorgente pur essendo dipendente dal tempo, non produce accelerazione (ad esempio una forza linearmente crescente nel tempo) l'equazione del moto 1.26 si riduce alla sola equazione di equilibrio. La variazione di $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ deve essere abbastanza veloce da impedire al mezzo di rimanere nelle condizioni di equilibrio statico. Tipicamente la sorgente ha una durata finita e la funzione $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ o una delle sue derivate rispetto al tempo presentano una o più discontinuità nel tempo, che danno origine a corrispondenti discontinuità nello spostamento, nella velocità o nell'accelerazione del mezzo. La soluzione dell'equazione del moto 1.28 per una forza impulsiva, di intensità unitaria, è nota come *tensore di Green*: esso corrisponde al tensore di Somigliana già incontrato nella teoria statica (equazione 1.1) ed ha la forma

$$G_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{0}, 0) = \frac{1}{4\pi\rho} (3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \frac{1}{r^3} t \left[H\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) - H\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2}\gamma_i\gamma_j\frac{1}{r}\delta\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1}{4\pi\rho\beta^2}(\delta_{ij} - \gamma_i\gamma_j)\frac{1}{r}\delta\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \quad (1.42)$$

ricavata nell'Appendice. Il tensore di Green è un tensore del secondo ordine, dipendente anche dal tempo: si esprime con $G_{ij}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau)$, che dà la componente i dello spostamento prodotto nel punto \mathbf{x} all'istante t da una forza unitaria, impulsiva, applicata nel punto $\boldsymbol{\xi}$ in direzione j nell'istante τ . Nel caso dinamico, occorre tenere conto del tempo necessario affinché il segnale, che si trasmette con velocità finita, arrivi dalla sorgente al punto di osservazione. Consideriamo il caso più semplice di una funzione sorgente scalare $f(\tau)$ che produce un segnale scalare $u(t)$. Immaginiamo che la sorgente agisca in un punto $\boldsymbol{\xi}$ del mezzo elastico e studiamo nel tempo il segnale osservato nel punto \mathbf{x} . Possiamo supporre che, per effetto della propagazione dal punto $\boldsymbol{\xi}$ al punto \mathbf{x} , l'impulso cumulativo $f(\tau)d\tau$, che è prodotto nell'intervallo di tempo $d\tau$ intorno all'istante τ , venga traslato in un tempo t e disposto in un intervallo dt . Per il principio di causalità t deve essere maggiore di τ . Introduco una funzione $g(t)$, detta *propagatore*, che è nulla per $t < \tau$ (sempre per il principio di causalità) e che dipende in generale da $t - \tau$. Poiché la teoria è lineare, assumiamo che la variazione di spostamento du osservata in \mathbf{x} all'istante t sia proporzionale a $f(\tau)d\tau$. Ottengo:

$$du(t) = g(t - \tau)f(\tau)d\tau \quad (1.43)$$

e, integrando l'intera funzione sorgente ($-\infty < \tau < t$)

$$u(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad (1.44)$$

Poiché $g(t - \tau) = 0$ per $\tau > t$ si può estendere l'integrale a ∞ :

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad (1.45)$$

Questo integrale definisce la *convoluzione* delle due funzioni $f(t)$ e $g(t)$ e si usa scrivere

$$u = f * g \quad (1.46)$$

Con un cambiamento di variabile si può dimostrare che la convoluzione gode della proprietà commutativa

$$f * g = g * f \quad (1.47)$$

Utilizzando il segno di convoluzione, si possono scrivere le soluzioni dinamiche in maniera formalmente analoga a quelle statiche, utilizzando il simbolo di convoluzione al posto del prodotto. Così lo spostamento dovuto a una forza $F_i(t)$ variabile nel tempo è

$$u_i = F_i * G_{ij} \quad (1.48)$$

in maniera analoga alla 1.1, dove però il tensore G_{ij} indica il tensore di Green invece che il tensore di Somigliana. Lo stesso si può applicare ai nuclei di deformazione più complessi. In particolare, il campo di spostamenti prodotto da una sorgente puntiforme descritta da un tensore momento M_{ij} è

$$u_i = M_{jk} * G_{ij,k} \quad (1.49)$$

Per analizzare lo spostamento prodotto da una sorgente dinamica in un mezzo elastico omogeneo e isotropo posso dividere e analizzare i diversi contributi. Consideriamo in particolare lo spostamento prodotto da una forza singola, ossia il tensore di Green. Mentre nel caso statico le proprietà del mezzo sono rappresentate soltanto dalle costanti elastiche λ e μ , nel caso dinamico deve comparire anche la densità ρ , che è presente nell'equazione del moto. Dunque il tensore di Green dipenderà da μ , λ e ρ , oppure da α , β e ρ , messe in relazione dalle espressioni 1.36 e 1.37. Come per il tensore di Somigliana, possiamo aspettarci che il tensore di Green dipenda dalla distanza r tra la sorgente e il punto di osservazione e dalle sue derivate spaziali, ovvero che con l'aumentare di r il segnale si attenui e che l'emissione del segnale stesso sia anisotropa. Salvo il caso di sorgenti isotrope (come il centro di dilatazione) le sorgenti dinamiche descritte da 1.48 e da 1.49 emettono onde elastiche (in generale sia longitudinali che trasversali) con ampiezza diversa a seconda della direzione. La forma del segnale prodotto dalla sorgente, ossia il suo andamento con la distanza r dalla sorgente a un istante t fissato, oppure il suo andamento col tempo in un punto fissato, è rappresentata da una funzione $\Omega(r, t)$, chiamata *forma d'onda* determinata dall'andamento temporale della sorgente. In base a queste considerazioni il tensore di Green può essere espresso come una somma di tre

termini, ognuno dei quali è un prodotto di fattori che rappresentano separatamente la dipendenza dalle suddette variabili:

$$G_{ij} = \mathcal{G}_{ij}^V + \mathcal{G}^L P_{ij} + \mathcal{G}^L S_{ij} \quad (1.50)$$

dove il primo termine è inversamente dipendente dal quadrato della distanza, e perciò è significativo solo per r piccolo (*campo vicino*), mentre gli altri due termini sono dipendenti da r^{-1} e rappresentano il campo di radiazione a grande distanza rispettivamente per onde P ed S (*campo lontano*). Se la sorgente è posta nell'origine di un sistema di coordinate sferiche (r, ϑ, φ) ciascuno dei tre termini ha la forma

$$\mathcal{G} = A \mathcal{R}_{ij}(\vartheta, \varphi) f(r) \Omega(r, t) \quad (1.51)$$

dove A è un fattore costante dipendente dalle proprietà elastiche del mezzo (ad esempio dalla densità ρ), \mathcal{R}_{ij} è la distribuzione angolare della radiazione e Ω è la forma d'onda. I quattro fattori in generale possono avere valori diversi per ciascuno dei tre fattori del tensore di Green.

Nella prossima sezione calcoleremo il campo di spostamenti operato dal tensore di Green, e successivamente lo applicheremo usando come sorgente una doppia coppia di forze.

1.2.3 Spostamento dato da un sistema di coppie puntiformi

Consideriamo una sorgente puntiforme situata nel punto $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$ e descritta da un momento $M_{ij}(t)$: si tratta di un sistema di coppie. Il campo di spostamenti è

$$u_i = M_{jk} * G_{ij,k} \quad (1.52)$$

cioè

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} M_{jk}(\tau) G_{ij,k}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\xi}, 0) d\tau \quad (1.53)$$

L'espressione del tensore di Green come ricavata nelle appendici (Aki e Richards, 1980; Ben-Menahem e Sing, 1981) è

$$\begin{aligned}
G_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{0}, 0) &= \frac{1}{4\pi\rho} (3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \frac{1}{r^3} t \left[H\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) - H\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \right] + \\
&+ \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} \gamma_i\gamma_j \frac{1}{r} \delta\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (\delta_{ij} - \gamma_i\gamma_j) \frac{1}{r} \delta\left(t - \frac{r}{\beta}\right)
\end{aligned} \tag{1.54}$$

Come abbiamo anticipato, lo spostamento è formato da cinque termini: due di campo lontano, due di campo intermedio e uno di campo vicino.

Il calcolo dell'integrale fornisce (Aki e Richards, 1980)

$$\begin{aligned}
u_i(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\rho} R_{ijk}^V \frac{1}{r^4} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau M_{jk}(t - \tau) d\tau + \\
&+ \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} R_{ijk}^{IP} \frac{1}{r^2} M_{jk}\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} R_{ijk}^{IS} \frac{1}{r^2} M_{jk}\left(t - \frac{r}{\beta}\right) + \\
&+ \frac{1}{4\pi\rho\alpha^3} R_{ijk}^{LP} \frac{1}{r} \dot{M}_{jk}\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1}{4\pi\rho\beta^3} R_{ijk}^{LS} \frac{1}{r} \dot{M}_{jk}\left(t - \frac{r}{\beta}\right)
\end{aligned} \tag{1.55}$$

L'espressione è formata da cinque termini: nell'ordine, il campo vicino, il campo intermedio P , il campo intermedio S , il campo lontano P , il campo lontano S . Notiamo che il termine di campo vicino dipende sia da α che da β , mentre come ci si poteva aspettare i termini di campo intermedio e lontano dipendono da α per le onde P e da β per le onde S .

I tensori R_{ijk} sono combinazioni di coseni direttori e descrivono la distribuzione angolare della radiazione relativa al campo vicino (V), intermedio (IP e IS) e lontano (LP e LS). Le espressioni esplicite sono le seguenti:

$$R_{ijk}^V = 15\gamma_i\gamma_j\gamma_k - 3\gamma_i\delta_{jk} - 3\gamma_j\delta_{ik} - 3\gamma_k\delta_{ij} \tag{1.56}$$

$$R_{ijk}^{IP} = 6\gamma_i\gamma_j\gamma_k - \gamma_i\delta_{jk} - \gamma_j\delta_{ik} - \gamma_k\delta_{ij} \tag{1.57}$$

$$R_{ijk}^{IS} = -(6\gamma_i\gamma_j\gamma_k - \gamma_i\delta_{jk} - \gamma_j\delta_{ik} - 2\gamma_k\delta_{ij}) \tag{1.58}$$

$$R_{ijk}^{LP} = \gamma_i\gamma_j\gamma_k \tag{1.59}$$

$$R_{ijk}^{LS} = -(\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij})\gamma_k \tag{1.60}$$

Proprietà dello spostamento

La struttura di ciascun termine è analoga a quella già vista per lo spostamento prodotto da una forza singola:

- un coefficiente costante che dipende dalla densità del mezzo e dalla velocità delle onde;
- la distribuzione angolare della radiazione;
- la dipendenza dalla distanza r ;
- la funzione sorgente, che in questo caso è il tensore M_{ij} .

Analizziamo i diversi termini:

- Il termine di campo vicino è simile a quello della forza singola per quanto riguarda la dipendenza dalla funzione sorgente. Ne differisce per la presenza di r^{-4} invece di r^{-3} e per la diversa distribuzione angolare della radiazione.

- I termini di campo intermedio (assenti per la forza singola) dipendono da r^{-2} . I termini sono proporzionali alla funzione sorgente calcolata all'istante ritardato $t - r/c$. Sono proporzionali a c^{-2} .

- I termini di campo lontano dipendono da r^{-1} come per la forza singola. Una differenza importante rispetto al caso della forza singola è la dipendenza dalla derivata temporale della funzione sorgente. Sono proporzionali a c^{-3} .

A causa della dipendenza dalle velocità α e β , nei termini di campo intermedio e lontano, l'ampiezza delle onde S è maggiore di quella delle onde P.

Si noti che non esiste una regione in cui il campo intermedio prevale sugli altri. Nei pressi della sorgente tutti i termini sono significativi. Allontanandosi dalla sorgente, dapprima si può trascurare il campo vicino, poi anche il campo intermedio. A grande distanza prevale il campo lontano.

1.2.4 Spostamento prodotto da una doppia coppia di forze

Consideriamo una doppia coppia di forze a momento torcente nullo. Nel caso in cui le forze che costituiscono la doppia coppia siano dirette secondo due assi delle coordinate, il momento può essere descritto da uno scalare M .

Per questo sistema di forze, gli indici j e k sono diversi tra loro quindi le distribuzioni

di radiazione diventano

$$R_{ijk}^V = 15\gamma_i\gamma_j\gamma_k - 3\gamma_j\delta_{ik} - 3\gamma_k\delta_{ij} \quad (1.61)$$

$$R_{ijk}^{IP} = 6\gamma_i\gamma_j\gamma_k - \gamma_j\delta_{ik} - \gamma_k\delta_{ij} \quad (1.62)$$

$$R_{ijk}^{IS} = -(6\gamma_i\gamma_j\gamma_k - \gamma_j\delta_{ik} - 2\gamma_k\delta_{ij}) \quad (1.63)$$

$$R_{ijk}^{LP} = \gamma_i\gamma_j\gamma_k \quad (1.64)$$

$$R_{ijk}^{LS} = -(\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij})\gamma_k \quad (1.65)$$

Per qualunque scelta di j e k , i loro valori sono fissati e i tensori R_{ijk} si riducono a vettori R_i . Pertanto lo spostamento si semplifica come segue:

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}, t) = & \frac{1}{4\pi\rho r^4} R_i^V \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau M(t - \tau) d\tau + \\ & + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2 r^2} R_i^{IP} M\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1}{4\pi\rho\beta^2 r^2} R_i^{IS} M\left(t - \frac{r}{\beta}\right) + \\ & + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^3 r} R_i^{LP} \dot{M}\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1}{4\pi\rho\beta^3 r} R_i^{LS} \dot{M}\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \end{aligned} \quad (1.66)$$

Si possono esprimere le distribuzioni angolari della radiazione in coordinate sferiche (r , θ , ϕ). Supponiamo che la doppia coppia giaccia sul piano $x_2 = 0$ e che le direzioni delle forze siano x_1 e x_3 . L'asse da cui si misura la coordinata θ sia l'asse x_3 .

Allora

$$\mathbf{R}^V = 9\mathbf{f}(\theta, \phi) - 6\mathbf{g}(\theta, \phi)$$

$$\mathbf{R}^{IP} = 4\mathbf{f}(\theta, \phi) - 2\mathbf{g}(\theta, \phi)$$

$$\mathbf{R}^{IS} = -3\mathbf{f}(\theta, \phi) + 3\mathbf{g}(\theta, \phi)$$

$$\mathbf{R}^{LP} = \mathbf{f}(\theta, \phi)$$

$$\mathbf{R}^{LS} = \mathbf{g}(\theta, \phi)$$

dove

$$\mathbf{f}(\theta, \phi) = \sin 2\theta \cos \phi \hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{g}(\theta, \phi) = \cos 2\theta \cos \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} - \cos \theta \sin \phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

dove $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ sono i versori nelle tre direzioni ortogonali delle coordinate sferiche. Sul piano $x_2 = 0$ ($\phi = 0$), le funzioni scalari $f(\theta)$ e $g(\theta)$ sono rappresentabili tramite curve chiamate rose a quattro petali.

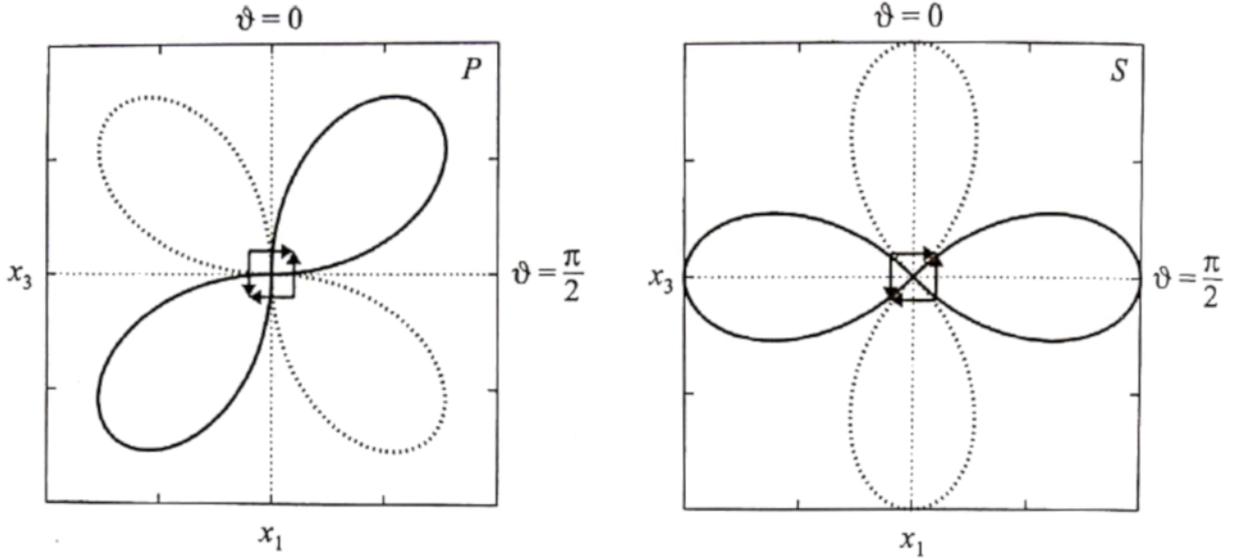


Figura 1.8: Rose a quattro petali (Boschi e Dragoni, 2000).

1.2.5 Spostamento prodotto da un centro di dilatazione

Consideriamo un centro di dilatazione. Nel caso in cui le forze che costituiscono il nucleo di deformazione siano dirette secondo gli assi delle coordinate, il momento può essere descritto da uno scalare $M(t)$.

Per questo sistema di forze, gli indici j e k sono uguali tra loro: quindi si ha

$$\gamma_j \gamma_k = \gamma_j \gamma_j = 1 \quad (1.67)$$

Ponendo $k = j$, le distribuzioni di radiazione diventano

$$R_i^V = 15\gamma_i - 3\gamma_i - 3\gamma_j \delta_{ij} - 3\gamma_j \delta_{ij} = 15\gamma_i - 3\gamma_i - 3\gamma_i - 3\gamma_i = 6\gamma_i \quad (1.68)$$

$$R_i^{IP} = 6\gamma_i - \gamma_i - \gamma_j \delta_{ij} - \gamma_j \delta_{ij} = 6\gamma_i - \gamma_i - \gamma_i - \gamma_i = 3\gamma_i \quad (1.69)$$

$$R_i^{IS} = -(6\gamma_i - \gamma_i - \gamma_j\delta_{ij} - 2\gamma_j\delta_{ij}) = -(6\gamma_i - \gamma_i - \gamma_i - 2\gamma_i) = -2\gamma_i \quad (1.70)$$

$$R_i^{LP} = \gamma_i \quad (1.71)$$

$$R_i^{LS} = -\gamma_i + \delta_{ij}\gamma_j = -\gamma_i + \gamma_i = 0 \quad (1.72)$$

Lo spostamento è

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}, t) = & \frac{1}{4\pi\rho r^4} R_i^V \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau M(t - \tau) d\tau + \\ & + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2 r^2} R_i^{IP} M\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1}{4\pi\rho\beta^2 r^2} R_i^{IS} M\left(t - \frac{r}{\beta}\right) + \\ & + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^3 r} R_i^{LP} \dot{M}\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) \end{aligned} \quad (1.73)$$

Notiamo alcune caratteristiche importanti del campo lontano:

- 1) la radiazione ha una distribuzione isotropa: lo spostamento è radiale e dipende solo da r ;
- 2) nel campo lontano le onde S sono assenti.

Capitolo 2

Propagazione e spettro della sorgente delle onde sismiche

Nella sezione 1.2.1 abbiamo introdotto le onde di volume P ed S. In questo capitolo studieremo la propagazione di tali onde all'interno della Terra, ed introdurremo le onde di superficie, date dall'interazione delle onde di volume con la superficie della Terra. Questo ci permetterà di introdurre nell'ultimo capitolo diversi criteri per discriminare il tipo di sorgente sismica in base alle caratteristiche del segnale ricevuto.

2.1 Onde sismiche

Ogni perturbazione improvvisa della Terra genera onde sismiche, ma solo i terremoti e le esplosioni nucleari sono sorgenti abbastanza intense per poter essere rilevate in superficie a grandi distanze (Bath, 1973). Le onde prodotte sono di quattro tipi, come mostrato in figura 2.1. Si possono dividere in onde di *volume* e di *superficie*: le onde di volume si propagano all'interno della Terra, mentre le onde di superficie sono perlopiù confinate agli strati più vicini alla superficie. Come già visto nella sezione 1.2.1, le onde di volume sono di due tipi, P ed S. Le onde P sono onde longitudinali, ovvero onde di compressione (figura 2.1a). Le onde S invece producono uno spostamento trasversale alla direzione di propagazione (figura 2.1b) (Brown e Mussett, 1993).

Un'onda sismica è quindi la propagazione di una **deformazione** attraverso un materiale. Affinché la deformazione non sia permanente, il materiale deve avere un comportamento

elastico durante le deformazioni, che durano solo una frazione di secondo. Se un volume infinitesimo in un mezzo elastico viene deformato, si sviluppa uno **sforzo** che tende a riportare il materiale al suo stato naturale. Il rapporto fra la deformazione e lo sforzo è detta **modulo elastico** del materiale. La velocità di propagazione dell'onda cresce con il valore del modulo ma decresce con la densità del materiale. L'equazione generale della velocità è

$$\text{velocità d'onda} = \sqrt{\frac{\text{modulo elastico}}{\text{densità}}} \quad (2.1)$$

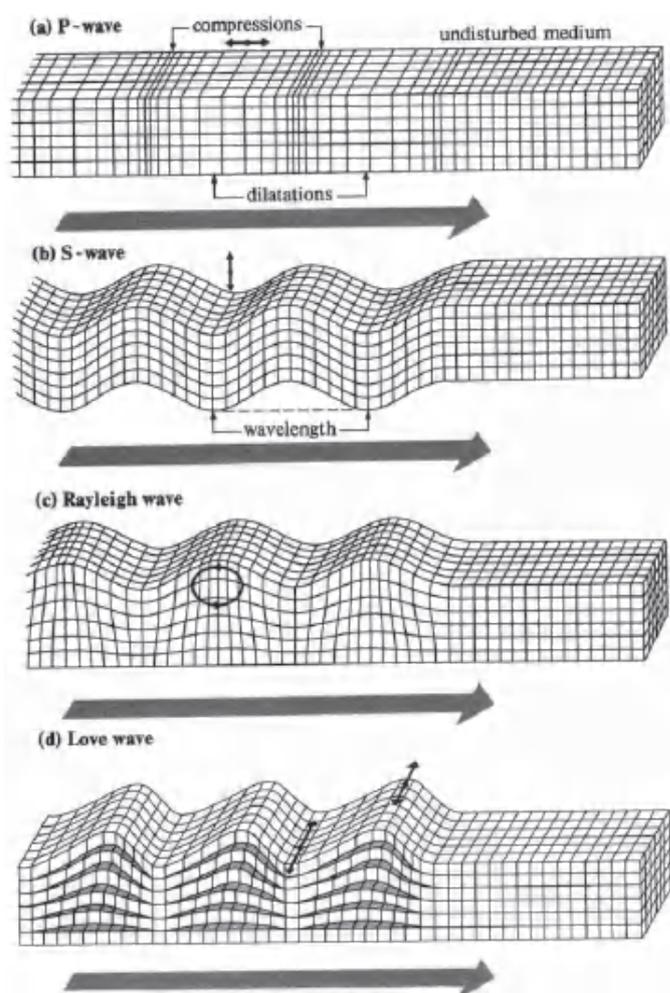


Figura 2.1: Quattro tipi di onda sismica: (a) nelle onde P le particelle oscillano lungo la direzione di propagazione dell'onda; (b) nelle onde S il moto è trasversale. (c) il moto delle particelle per le onde di Rayleigh è più complesso, ma vicino alla superficie può essere approssimato con un'ellisse verticale; (d) nelle onde di Love il moto è trasversale e orizzontale. Nelle onde di superficie (Rayleigh e Love) il moto decresce con la profondità.

Dato che un materiale può deformarsi in modi diversi, esiste più di un modulo elastico. Il **modulo di compressibilità** k è una misura della resistenza del materiale ai cambiamenti di volume (compressione o dilatazione) mentre il **modulo di rigidità** μ è la resistenza ai cambiamenti di forma causati da sforzi di taglio. Dalla figura 2.1 si nota che le onde P mutano i quadrati in rettangoli, cambiando il volume ma non la forma, mentre le onde S mutano i quadrati in rombi di uguale volume, mutandone solo la forma. Troviamo quindi che per le onde P si applica il modulo di compressibilità e per le onde S il modulo di rigidità. Le formule per le velocità corrispondenti sono

$$\alpha = \sqrt{\frac{k + \frac{4}{3}\mu}{\rho}} \qquad \beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \qquad (2.2)$$

dove ρ è la densità. Questo risultato, in accordo con le equazioni 1.36 e 1.37 danno una velocità maggiore per le onde P, che arriveranno all'osservatore prima delle onde S. Inoltre notiamo come le onde S non si possano propagare attraverso i fluidi, in quanto non possono essere deformati (cioè hanno $\mu = 0$). Inoltre le onde P vengono fortemente rallentate. Questa caratteristica ha permesso storicamente di dedurre la natura fluida del parte del nucleo terrestre, e viene inoltre utilizzata nelle indagini petrolifere.

2.2 Deduzione delle velocità delle onde P ed S in profondità

Una sorgente puntiforme di onde sismiche, quali un'esplosione o un terremoto, generano onde che si diffondono sfericamente, ma quando incontrano una regione con densità o proprietà elastiche differenti (e quindi velocità sismica diversa) vengono distorte (Bullen, 1963). Questo fenomeno non è dissimile dal comportamento della luce, e come per la luce è solitamente conveniente pensare in termini di raggi piuttosto che di fronti d'onda, identificando come raggio il percorso seguito da una piccola sezione del fronte d'onda, come mostrato in figura 2.2.

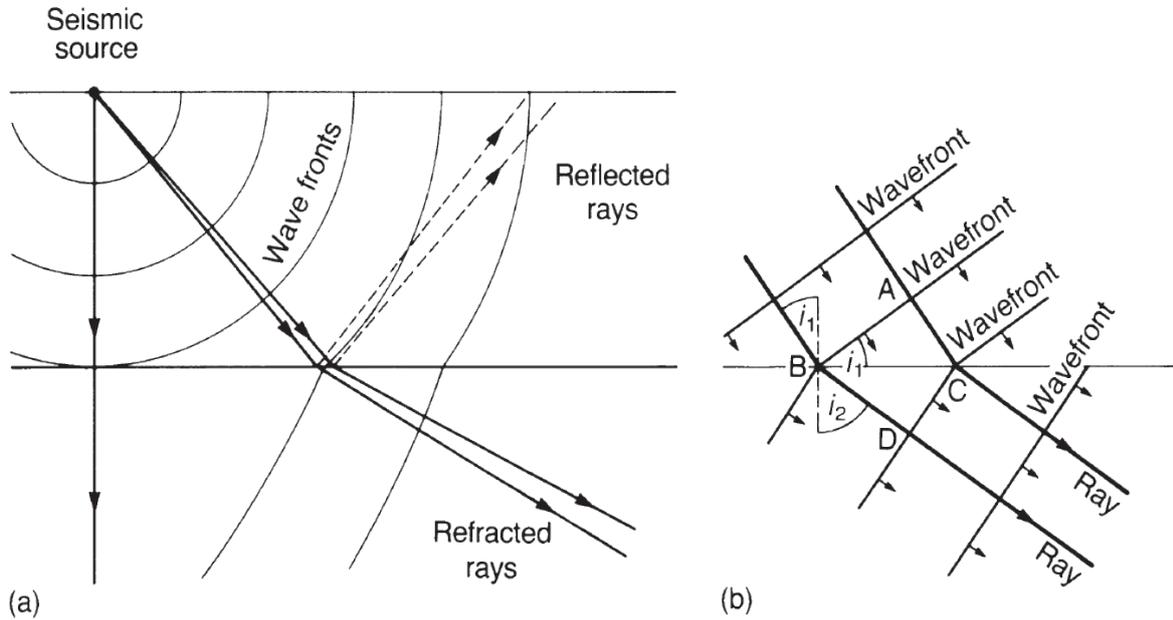


Figura 2.2: Rifrazione e riflessione di onde sismiche (da Brown e Mussett, 1993).

La sezione AB del fronte d'onda si muove in CD, dove AC e BD sono proporzionati alle velocità V_1 e V_2 dei due materiali (in questo caso $V_1 > V_2$). Possiamo scrivere:

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{AC/BC}{BD/BC} = \frac{AC}{BD} = \frac{V_1}{V_2} \quad \text{o equivalentemente} \quad \frac{\sin i_1}{V_1} = \frac{\sin i_2}{V_2} \quad (2.3)$$

Questa è la regola generale che governa la rifrazione in un'interfaccia tra due materiali ed è equivalente alla Legge di Snell in ottica. L'equazione 2.3 può essere utilizzata per calcolare il percorso dei raggi attraverso la Terra. La figura 2.3 mostra tre interfacce concentriche. Se conosciamo gli strati e le rispettive velocità, possiamo iniziare a una n-sima interfaccia generica e a un angolo incidente arbitrario i_{n-1} . Possiamo applicare l'equazione 2.3 in A per ottenere l'angolo i_n

$$\frac{\sin i_{n-1}}{V_{n-1}} = \frac{\sin i_n}{V_n} \quad (2.4)$$

Allora la distanza fra A e B e il tempo impiegato per percorrerla, t_{AB} , sono dati da

$$AB \cos i_n = (r_n - r_{n+1}) \quad t_{AB} = \frac{AB}{V_n} = \frac{(r_n - r_{n+1})}{V_n \cos i_n} \quad (2.5)$$

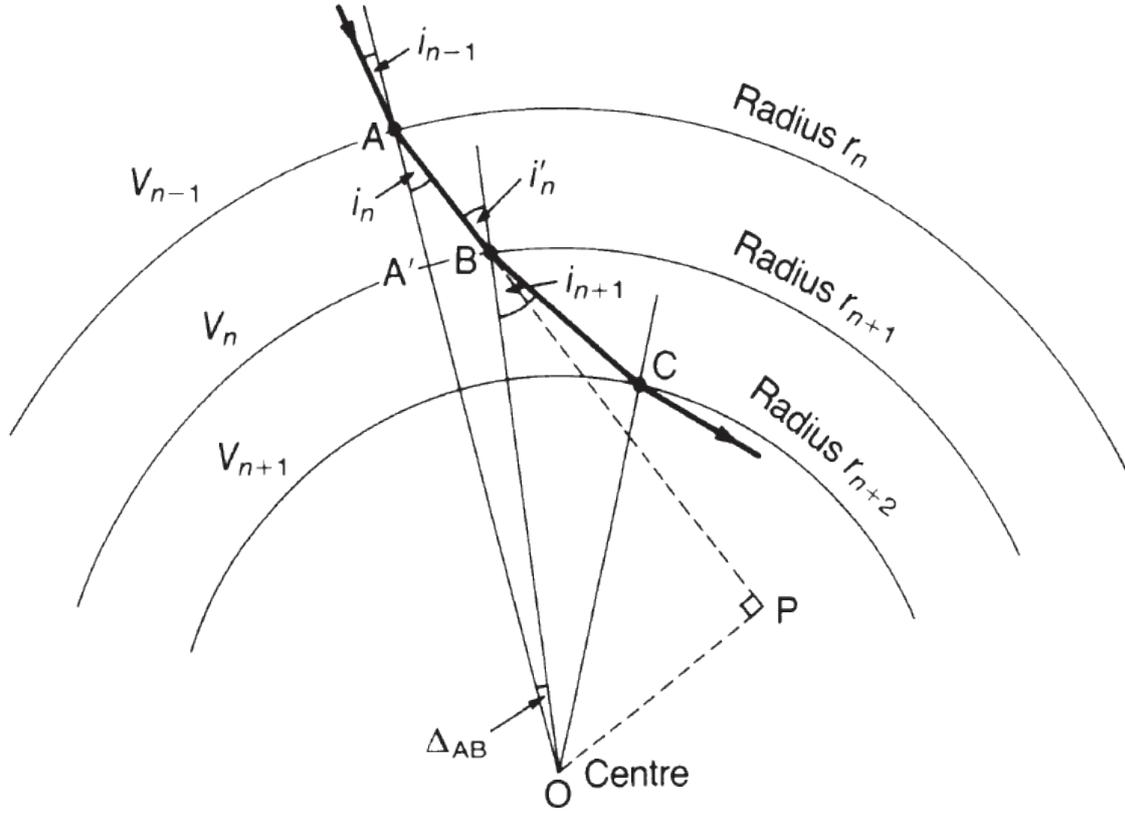


Figura 2.3: Schematizzazione della propagazione di un raggio sismico nella Terra (da Brown e Mussett, 1993).

Il raggio è avanzato di un angolo epicentrale Δ_{AB} . Dato che

$$A'B = r_{n+1}\Delta_{AB} \quad e \quad \frac{A'B}{A'A} = \tan i_n \quad (2.6)$$

allora

$$\Delta_{AB} = \tan i_n \frac{(r_n - r_{n+1})}{r_{n+1}} \quad (2.7)$$

Possiamo ora ripetere il procedimento avanzando a B. Dato che le interfacce sono archi di circonferenza, le perpendicolari ad A e B convergono al centro della Terra, e quindi

$$AO \sin i_n = OP = BO \sin i'_n \quad (2.8)$$

Allora

$$\sin i'_n = \frac{r_n}{r_{n+1}} \sin i'_n \quad (2.9)$$

Le ultime due equazioni legano $\sin i'_n$ a $\sin i_n$, e quindi di nuovo a $\sin i'_n$, da cui siamo partiti, e quindi possiamo ripetere lo stesso procedimento per passare da B a C.

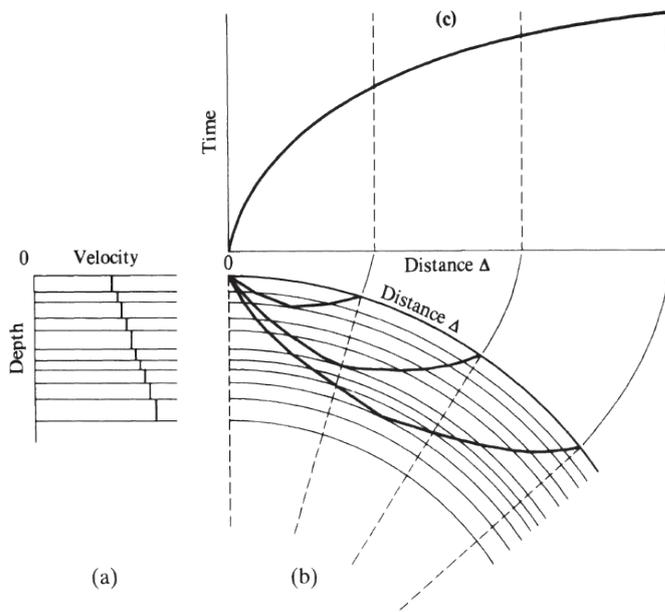


Figura 2.4: Diagramma schematicizzato dei raggi all'interno della Terra. (a) cambiamenti graduali della velocità possono essere approssimati con molti strati sottili con piccole variazioni di velocità. (b) Un aumento della velocità con la profondità causa una curvatura dei raggi verso la superficie. (c) Diagramma che mostra la corrispondenza distanza-tempo. Notiamo che le distanze sono misurate dall'angolo sotteso con il centro della Terra, l'angolo epicentrale Δ (da Brown e Mussett, 1993).

Sommando gli incrementi di distanza e tempo, possiamo dedurre il percorso del raggio (e il tempo impiegato per percorrerlo), a patto di conoscere la variazione di velocità con la profondità. Nella Terra la maggior parte delle variazioni è continua, è quindi necessario suddividere queste regioni in strati abbastanza sottili, che possono essere trattati come appena visto. Ovviamente inizialmente non conosciamo il profilo velocità-profondità (figura 2.4a), ma solo il risultato finale, la curva distanza-tempo (figura 2.4c). È possibile invertire tale curva matematicamente.

2.2.1 Localizzazione della sorgente di un sisma

Quando avviene un terremoto o una grossa esplosione, le onde prodotte sono registrate dalle stazioni sismiche. Il passo successivo è di identificare i vari arrivi alle diverse stazioni, dato che oltre al primo arrivo delle onde già citate (onde P,S e di superficie)

sono presenti molti altri fronti d'onda dati dalla riflessione, dalla rifrazione o da una combinazione delle due, come mostrato in figura 2.5.

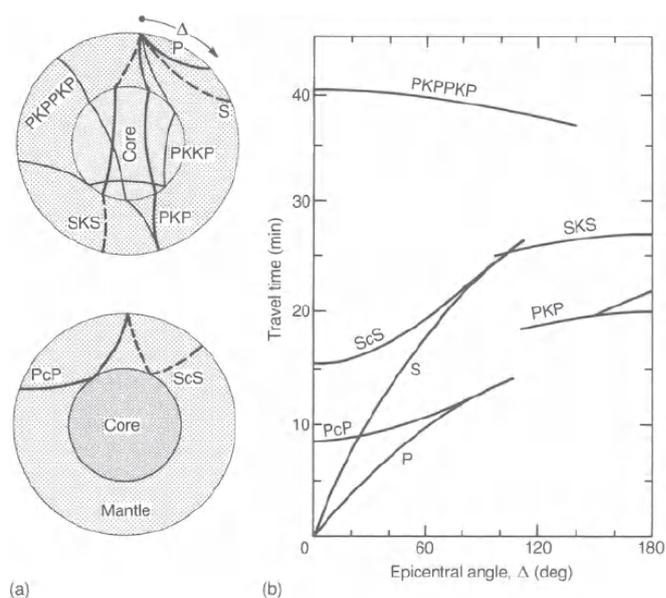


Figura 2.5: Fronti d'onda e corrispondenti curve distanza-tempo. (a) nel mantello, dove in generale la velocità cresce con la profondità, i raggi deviano dalla verticale. I fronti che raggiungono il nucleo possono essere riflessi e tornare nel mantello oppure essere rifratti nel nucleo, che ha velocità minori. K denota un'onda P rifratta nel nucleo, c indica una riflessione nell'arrivo al nucleo. I fronti d'onda possono essere riflessi e rifratti anche più volte di quanto mostrato in figura. (b) I corrispondenti tempi di percorrenza.

Nella pratica ovviamente si ricava (a) da (b) e non il contrario (da Brown e Mussett, 1993).

A questo stadio, né la posizione né l'istante iniziale del terremoto sono conosciuti. Possiamo stimarli confrontando i dati delle diverse stazioni, poiché le più vicine al sisma registreranno le onde prima e con un'ampiezza maggiore. In questo modo si possono costruire curve distanza-tempo provvisorie. A questo punto possiamo stimare la distanza spaziale e temporale del terremoto utilizzando la differenza nei tempi di arrivo delle onde P ed S. La figura 2.5b mostra come questo intervallo è legato alla distanza della stazione sismica dalla sorgente del terremoto (espressa in funzione dell'angolo epicentrale Δ , l'angolo sotteso al centro). Il sismogramma di una sola stazione non ci permette di determinare la posizione della sorgente, ma solo la distanza da esso. Per poter individuare la posizione dobbiamo triangolarla da almeno tre osservatori, e con l'aumentare dei segnali incrociati aumenta la precisione.

2.3 Onde di superficie

Le figure 2.1 (b) e (c) illustrano i due tipi di onde sismiche di superficie. Le onde di Rayleigh hanno un comportamento simile alle onde nell'acqua, poiché il passaggio dell'onda fa muovere un punto sulla superficie della Terra lungo un'ellisse in un piano verticale, come una boa nell'acqua. Come nel caso delle onde in acqua, l'ampiezza del moto diminuisce con la profondità. L'ampiezza di onde dello stesso tipo, ma frequenza diversa, si attenua alla stessa velocità con la profondità, *a patto che si misuri la profondità in termini di lunghezza d'onda* (Ben-Menahem e Singh, 1981). Ad esempio, se l'ampiezza di un'onda lunga dieci metri si attenua della metà alla profondità di sei metri, l'ampiezza di un'onda lunga 20 metri si dimezzerebbe alla profondità di dodici metri. Ne segue che la perturbazione dovuta a onde più lunghe ha effetto fino a profondità maggiori rispetto alle onde più corte.

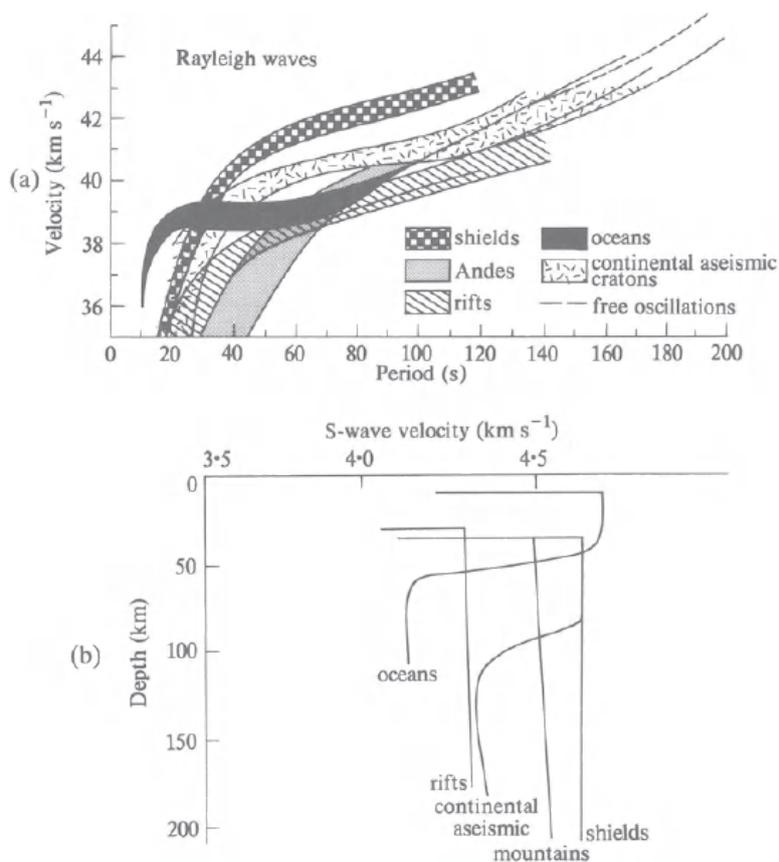


Figura 2.6: Dispersione delle onde di superficie. (a) Dispersione delle onde di Rayleigh in regioni con strutture diverse. (b) Velocità delle onde S relativo ad (a). Le onde di Love danno risultati simili. (da Brown e Mussett, 1983).

La velocità delle onde di Rayleigh dipende principalmente dal modulo di rigidità e dalla densità della roccia, e si aggira sul 92% della velocità dell'onde S, V_S . La perturbazione dovuta a queste onde non è limitata alla sola superficie e quindi la loro velocità non dipende solamente dalle proprietà delle rocce superficiali, ma anche da quelle più profonde, anche se in maniera via via più marginale. Questa dipendenza della velocità dalle proprietà fisiche del mezzo lontano dalla superficie sarà maggiore per onde più lunghe, dato che la loro perturbazione si propaga più in profondità. Di conseguenza, in una regione dove V_S varia con la profondità (cioè in una buona parte dei casi) le lunghezze d'onda maggiori avranno velocità diverse da quelle di onde più corte. Questa variazione di velocità con la lunghezza d'onda, detta **dispersione**, può essere usata per determinare come V_S varia con la profondità.

La velocità determinata misurando il tempo impiegato dalle onde di superficie di una certa lunghezza d'onda per trasmettersi tra due punti sulla superficie della Terra fornisce per forza di cose una media per il materiale incontrato lungo lo spostamento. Questo può essere un vantaggio rispetto alle onde di volume, a patto di ignorare le variazioni di piccola scala, come quelle dovute alla grande variabilità delle rocce cristalline. Un ulteriore vantaggio è che la dispersione delle onde superficiali trasporta dati riguardanti aree, come quelle oceaniche, su cui sono presenti poche stazioni di rilevamento. La figura 2.6a mostra i risultati per alcuni tipi differenti di area, e la figura 2.6b mostra la variazione di V_S con la profondità, dedotta dalla dispersione delle onde superficiali. Nonostante ci siano differenze regionali, i risultati non si discostano troppo da una simmetria sferica. Finora abbiamo considerato solo onde superficiali di Rayleigh. Il secondo tipo di onde di superficie è l'onda di Love, che ha moto interamente orizzontale (figura 2.1d). Le proprietà delle onde di Love sono più complesse rispetto alle onde di Rayleigh, ma, riguardo al tipo di informazioni che possiamo ricavare, possono esserne considerate complementari. Le onde di superficie di interesse per questi obiettivi hanno periodo molto maggiore rispetto alle onde di volume. Le onde di superficie hanno rivelato che la Terra è anisotropa, cioè per alcune profondità la velocità delle onde sismiche varia con la direzione di propagazione

2.4 Spettro della sorgente sismica

Le sorgenti sismiche non emettono onde armoniche, ma **pacchetti di onde** caratterizzati da una banda di frequenze. La forma $\Omega(t)$ dell'onda sismica emessa da una dislocazione è tipicamente un impulso di durata finita, che possiamo approssimare con un **impulso quadro** nel tempo, come mostrato in figura 2.7. Prendiamo come esempio una sorgente

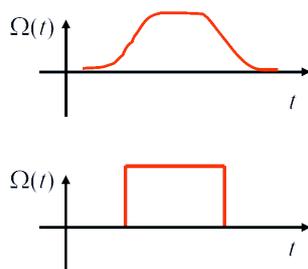


Figura 2.7: Forma d'onda di una sorgente sismica

puntiforme (una doppia coppia di forze) di durata T e intensità $M(t)$. L'intensità $M(t)$ (detta anche *funzione sorgente*) è una funzione non decrescente nel tempo. Consideriamo per semplicità una rampa

$$M(t) = M_0 \frac{t}{T}, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.10)$$

$$M(t) = M_0, \quad t > T \quad (2.11)$$

L'impulso emesso dalla sorgente è descritto dalla forma d'onda $\Omega(r, t)$. Come abbiamo

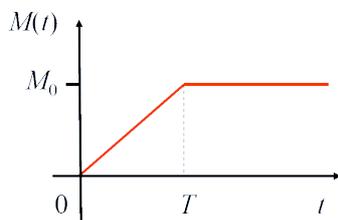


Figura 2.8: Momento di una sorgente sismica

visto nel Capitolo 1.2.4, a grande distanza r dalla sorgente (campo lontano), $\Omega(r, t)$ è la

derivata temporale di $M(t)$ calcolata all'istante ritardato $t - r/c$:

$$\Omega(r, t) = \dot{M} \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (2.12)$$

dove c è la velocità delle onde ($c = \alpha$ per le onde P e $c = \beta$ per le onde S). La forma d'onda di un impulso quadro è quindi data da

$$\Omega(r, t) = \frac{M_0}{T} \left[H \left(t - \frac{r}{c} \right) - H \left(t - \frac{r}{c} - T \right) \right] \quad (2.13)$$

Poniamo

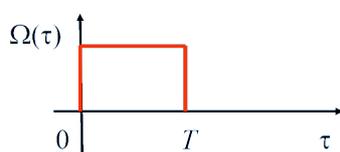


Figura 2.9

$$\tau = t - \frac{r}{c}$$

Quindi

$$\Omega(r, t) = \frac{M_0}{T} [H(\tau) - H(\tau - T)] \quad (2.14)$$

Lo **spettro** è la trasformata di Fourier della forma d'onda:

$$\tilde{\Omega}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.15)$$

Lo spettro dell'impulso quadro è allora

$$\tilde{\Omega}(\omega) = \frac{M_0}{\sqrt{2\pi T}} \int_0^T e^{-i\omega t} dt \quad (2.16)$$

cioè

$$\tilde{\Omega}(\omega) = -\frac{M_0}{\sqrt{2\pi T}} (e^{-i\omega T} - 1) \quad (2.17)$$

Se ora introduciamo la variabile

$$\chi = \frac{\omega T}{2} \quad (2.18)$$

Otteniamo

$$\tilde{\Omega}(\omega) = -\frac{M_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 - e^{-2i\chi}}{2i\chi} \quad (2.19)$$

che possiamo riscrivere come

$$\tilde{\Omega}(\omega) = -\frac{M_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \chi}{\chi} e^{-i\chi} \quad (2.20)$$

il cui modulo vale

$$|\tilde{\Omega}(\omega)| = \frac{M_0}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{\sin \chi}{\chi} \right| \quad (2.21)$$

Lo spettro ottenuto ha tipicamente questa forma:

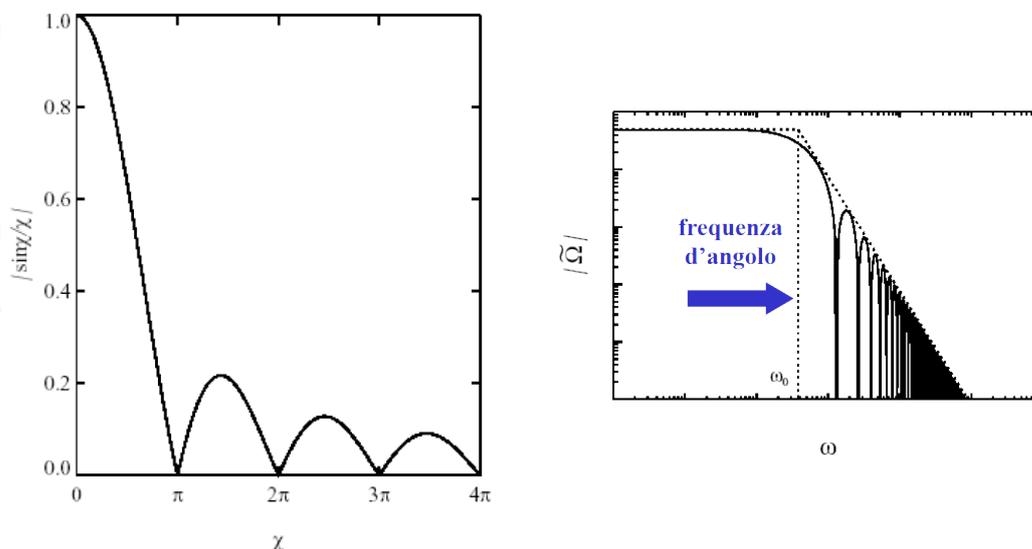


Figura 2.10: Grafico della funzione $\frac{\sin \chi}{\chi}$ (a) e dello spettro $\tilde{\Omega}$. Il grafico dello spettro è semilogaritmico

Notiamo che lo spettro dell'onda si annulla per χ multiplo intero di π , e che si attenua all'aumentare della frequenza. Questo ricordando la definizione di χ , significa in sostanza che le caratteristiche dello spettro dipendono dalla durata T dell'impulso, e i valori delle frequenze assenti sono i multipli dell'inverso di T

Capitolo 3

Metodi di Discriminazione

Quadro Generale

Nell'introduzione abbiamo presentato il Sistema Internazionale di Monitoraggio (IMS), ovvero il sistema di stazioni di rilevamento su cui si basa il CTBT. L'IMS prevede quattro metodologie: sismologica (per le esplosioni sotterranee), idroacustica (per le esplosioni negli oceani), infrasonica e radionuclidica (per le esplosioni nell'atmosfera). In questo capitolo l'obiettivo è di esporre i principali metodi di discriminazione sismologici (per una trattazione più dettagliata si rimanda a Dahlman e Israelson, 1977). L'intensità di un evento sismico si esprime tramite la sua *magnitudo*. A un dato evento possono essere assegnate diverse magnitudo, ognuna basata su un tipo diverso di onda sismica. La magnitudo è il logaritmo dell'ampiezza di un tipo particolare di onda, normalizzata in funzione della distanza e della profondità dell'ipocentro. Fra le varie magnitudo che si possono definire, ne discuteremo solo due, che nella notazione sismologica sono indicate con M_s e m_b . La prima è detta *magnitudo delle onde superficiali* e si basa genericamente su onde di Rayleigh con periodo di 20 secondi, la seconda è detta *magnitudo delle onde di volume* e si basa su onde P con periodo di un secondo.

3.1 Localizzazione

Una buona scrematura degli eventi sismici può essere operata con semplici considerazioni riguardo la localizzazione del sisma. Come visto nel capitolo 2.2.1, sfruttando le

diverse velocità di propagazione delle onde P ed S (ricavate nelle equazioni 1.36 e 1.37) e assumendo una sorgente puntiforme si può usare la differenza nei tempi di arrivo per triangolare la posizione e la profondità della sorgente sismica (rispettivamente dette *epicentro* e *ipocentro* del sisma). Per poter compiere questa triangolazione occorre usare almeno tre diverse stazioni di rilevamento, abbastanza vicine al sisma da poter ricevere un segnale distinguibile dal rumore di fondo.

Considerando che la perforazione più profonda della crosta terrestre mai attuata dall'uomo (pozzo superprofondo di Kola) arriva ad una profondità di poco superiore ai dodici chilometri, una volta ricavati epicentro ed ipocentro possiamo escludere a priori, con un buon grado di sicurezza, tutti gli eventi con ipocentro calcolato a profondità superiore ai quindici chilometri. Inoltre la posizione dell'epicentro ci permette di scartare i segnali provenienti dalla crosta oceanica, per evidenti limiti tecnologici.

Si stima che oltre il 90% di tutti i terremoti ha origine al di sotto degli oceani, o a profondità superiori ai trenta chilometri. Se inoltre escludiamo i terremoti con origine in Paesi che non hanno accesso a tecnologie nucleari, rimangono solo poche centinaia di terremoti con una magnitudo rilevante ($m_b > 3.8$) per i quali è necessario impiegare altre discriminanti sismiche.

Va notato che la precisione con cui si localizza l'ipocentro cala con la distanza delle stazioni di monitoraggio dal sisma. Fra gli obiettivi del CTBT vi è comunque di avere una griglia di stazioni che possa garantire una buona copertura su tutte le nazioni facenti parte del trattato, permettendo un'analisi in condizioni ottimali.

3.2 Discriminanti legate allo spettro delle onde

Nel primo Capitolo abbiamo introdotto il centro di dilatazione e la doppia coppia di forze come sorgenti sismiche per esplosioni e terremoti. Come abbiamo visto, il centro di dilatazione, al contrario della doppia coppia di forze, è una sorgente isotropa. Dal punto di vista della produzione delle onde, questo implica che le esplosioni abbiano una produzione iniziale di sole onde P, mentre i terremoti producono sia onde P che onde S. Questo non significa che in caso di esplosione non si registrino onde S, in quanto con la propagazione nella crosta parte dell'energia delle onde P si trasforma in onde S, e viceversa. Questa differenza nella produzione iniziale però si propaga in diversi aspetti del segnale, che possono essere misurati e usati come discriminante.

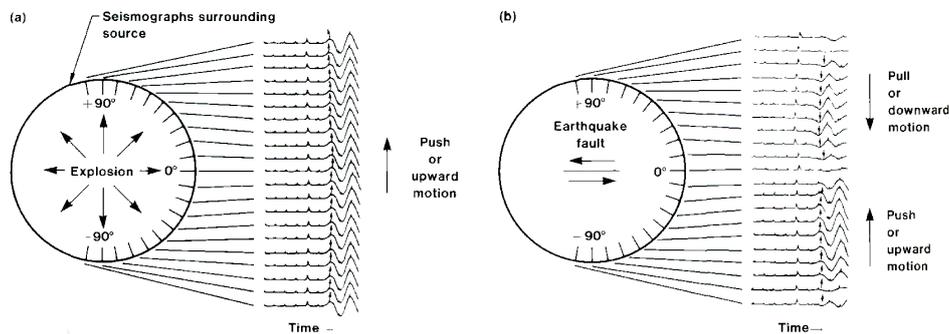


Figura 3.1: Radiazione di onde sismiche P da un'esplosione (a) e da un terremoto (b) (The Regional Seismic Test Network, 1982).

3.2.1 Segno del primo impulso di onde P

Come abbiamo visto nel capitolo 1.2.5, un centro di dilatazione produce onde P sempre verso l'esterno, in maniera isotropa. Questo significa che le prime onde P prodotte da un'esplosione a raggiungere la superficie produrranno sempre una prima deformazione verso l'esterno. Un terremoto invece produce sia deformazioni verso l'esterno sia verso l'interno, a seconda della direzione rispetto al piano di faglia. Gli osservatori della rete sismometrica registreranno quindi solo onde P con primo impulso positivo in caso di esplosione, mentre in caso di terremoto alcuni registreranno un primo impulso positivo ed altri negativo. In figura 3.1 sono mostrate le due diverse modalità di irradiazione accoppiate con il relativo sismogramma ad una diversa distanza angolare.

3.2.2 Onde di Love

Come visto quando abbiamo introdotto le onde di superficie nel capitolo 2.3, esse hanno intensità proporzionale alla velocità delle onde S, β . Questo significa che osservare onde di superficie (nello specifico onde di Love) più o meno intense ci permette di valutare l'entità delle onde S. Nello specifico, dato che un terremoto produce poche onde S, produrrà onde di Love molto deboli, al contrario di un terremoto

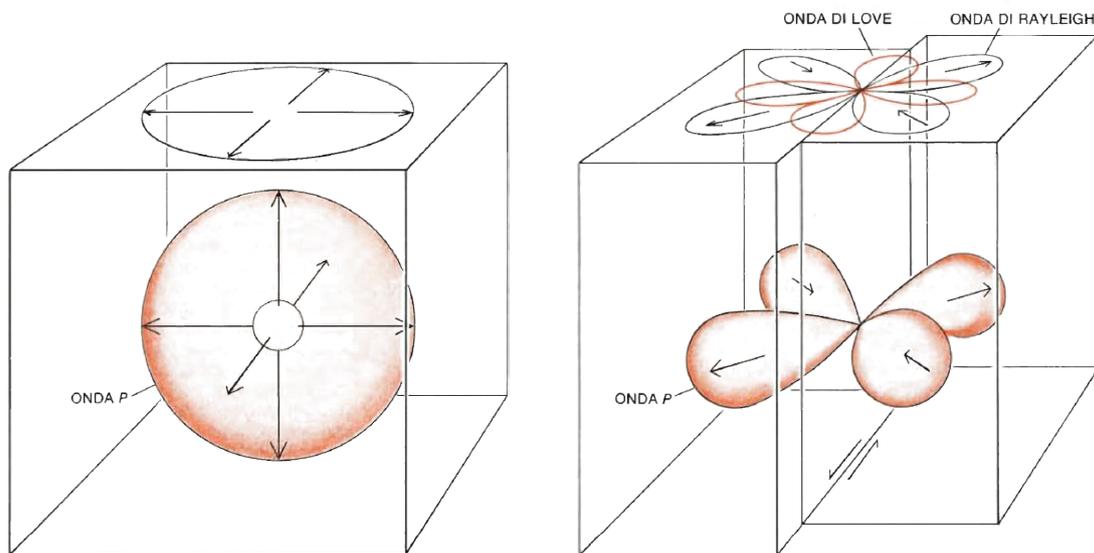


Figura 3.2: Confronto fra i modi di irradiazione delle onde P generate da un'esplosione sotterranea (*a sinistra*) e da un terremoto (*a destra*). Il primo movimento delle onde P di un'esplosione è diretto uniformemente verso l'esterno e quindi generalmente viene osservato in tutte le stazioni sismiche come un dislocamento verso l'alto. Il primo movimento delle onde P di un terremoto è diretto verso l'esterno in alcune direzioni e verso l'interno in altre; l'andamento delle onde in superficie dipende dall'orientazione del piano della faglia sismica (Sykes and Evernden, 1982).

3.2.3 Criterio m_b/M_S

All'inizio di questo capitolo abbiamo dato una definizione qualitativa di magnitudo. In particolare sono di interesse la magnitudo m_b , calcolata misurando l'ampiezza delle onde P alla frequenza di 1 Hz, e la magnitudo M_S , ottenuta da onde di Rayleigh alla frequenza di 0,05 Hz. Il discriminante m_b/M_S , usato per distinguere le esplosioni dai terremoti naturali, è il rapporto tra queste due magnitudo. I segnali sismici regionali (cioè per distanze inferiori ai 2000 chilometri) si propagano principalmente nella crosta e nel mantello superiore rispetto al mantello inferiore. Una stazione posta a distanza regionale sarà quindi in grado di registrare sia le onde di volume che si propagano nella crosta che le onde di superficie. Dato che un terremoto produce lungo la faglia uno sforzo di taglio notevole rispetto a quello prodotto da un'esplosione, le onde di superficie di un terremoto sono molto più intense. Di conseguenza il rapporto m_b/M_S sarà molto più alto per un'esplosione che per un terremoto.

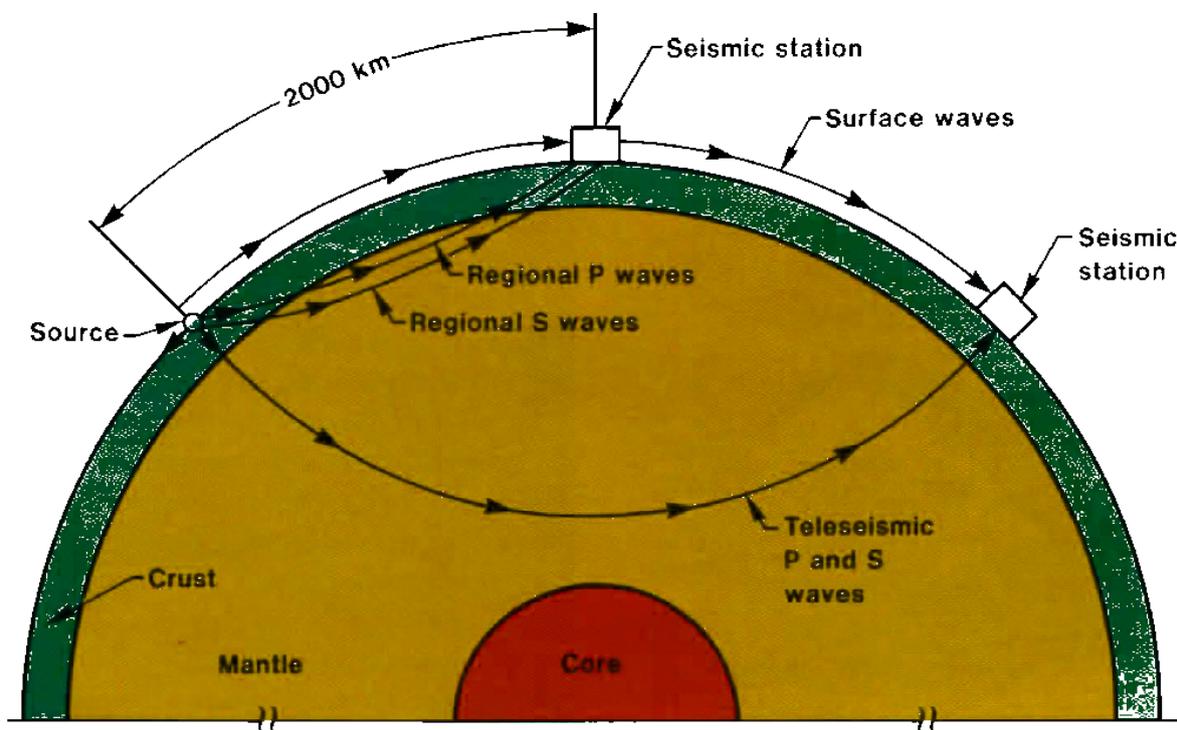


Figura 3.3: I percorsi delle onde sismiche sono qui tracciati in uno spaccato della Terra. Una stazione a distanza regionale dalla sorgente registra onde sismiche regionali, che si sono propagate negli strati meno profondi della Terra, mentre una stazione a distanza telesismica registra onde sismiche che si sono propagate negli strati più profondi (The Regional Seismic Test Network, 1982).

3.2.4 Frequenza delle onde prodotte

Se invece l'osservatore è posto a distanze telesismiche (superiori ai 2000 chilometri), esso registrerà le onde di volume passanti per il mantello inferiore, mentre le onde di superficie saranno fortemente smorzate. Studiando un sisma, è possibile prendere l'ampiezza spettrale a differenti frequenze e confrontarla con un terremoto di dimensioni simili. Per un'esplosione la natura impulsiva della sorgente e il volume molto contenuto rispetto all'energia rilasciata fanno sì che il rapporto fra le ampiezze spettrali del terremoto e del sisma di riferimento presenti un picco iniziale per le esplosioni, assente nei terremoti.

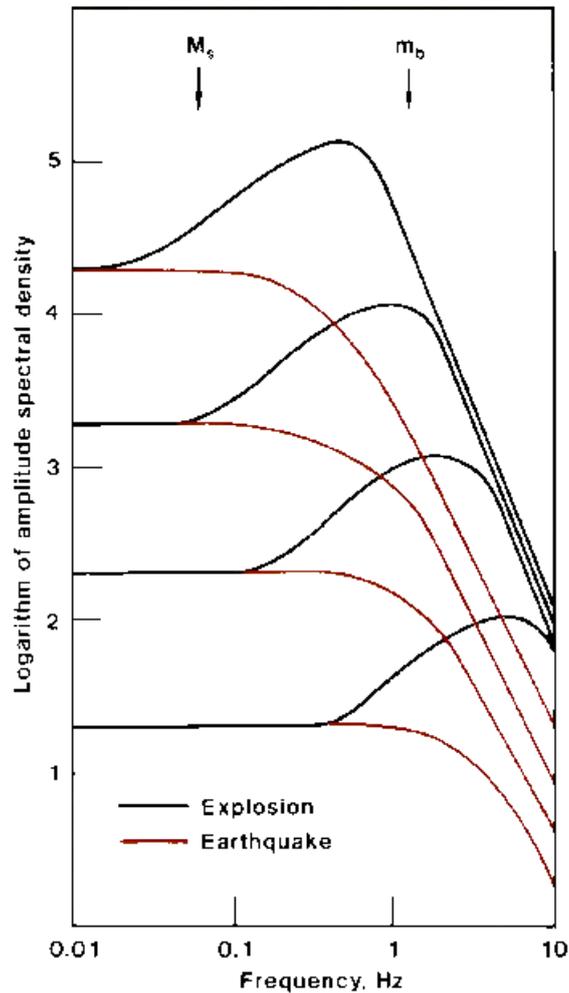


Figura 3.4: Spettro tipico per la sorgente di un'esplosione (in nero) e di un terremoto (in rosso). Un'esplosione genera uno spettro caratterizzato da un picco assente nei terremoti. Confrontando un terremoto e un'esplosione con una magnitudo M_S simile, l'esplosione avrà una magnitudo m_b maggiore (The Regional Seismic Test Network, 1982).

3.3 Considerazioni e precisazioni

Quando abbiamo parlato delle sorgenti sismiche, le abbiamo supposte puntiformi. Questa approssimazione è utile, ma dà alcuni problemi specifici (Sykes e Evernden, 1982). Il primo è che la formazione della sorgente non è istantanea: impiega un tempo pari alla dimensione massima della sorgente divisa per la velocità di formazione della sorgente stessa. Per i terremoti la dimensione della sorgente è pari alla lunghezza della disloca-

zione nella quale viene liberata la maggior parte dell'energia di breve periodo, ed è da 3 a 20 volte maggiore (a seconda dello stato di sforzo nelle rocce) del raggio della cavità e della zona di distruzione di un'esplosione comparabile. Per i terremoti la velocità di formazione della sorgente è da poco meno a molto meno della velocità delle onde trasversali nelle rocce circostanti la faglia, mentre per le esplosioni la velocità corrispondente è quella delle onde d'urto nella roccia, che è essenzialmente la velocità delle onde di compressione. Come conseguenza di queste differenze fra le dimensioni della sorgente e della velocità di formazione della sorgente stessa, i tempi caratteristici delle esplosioni e dei terremoti differiscono di un fattore variabile dalle sei alle quaranta volte. Non è strano quindi il fatto che generalmente venga osservata una chiara differenza fra gli spettri delle onde P di breve periodo dei terremoti e quelle delle esplosioni.

Un'altra peculiarità è che, al contrario di quanto ci si aspetterebbe, le esplosioni producono una piccola quantità di onde S, e di conseguenza si possono registrare onde di Love anche in un test nucleare. Queste onde S non sono prodotte direttamente dall'esplosione, ma da un piccolo terremoto da essa generato (Dahlman e Israelson, 1977). Infatti la cavità generata e il cono di distruzione circostante causati dall'esplosione porta alla liberazione di una parte dello sforzo naturale, che a sua volta genera onde sismiche, comprese quelle di Love, equivalenti alle onde di un piccolo terremoto. Le onde osservate sono una sovrapposizione delle onde dovute all'esplosione e di quelle dovute alla liberazione dello sforzo. La liberazione dello sforzo naturale modifica anche l'ampiezza delle onde di Rayleigh. La perturbazione però non è mai tanto grande da mettere in dubbio la natura di un evento identificato in base al rapporto fra le onde di lungo periodo e quelle di breve periodo. Solo di rado la perturbazione incide in maniera significativa sull'ampiezza delle onde P: non si è mai avuto notizia che ne abbia modificato qualche volta la direzione del primo movimento. Se inoltre la magnitudo M_s è determinata dalle onde di Love anziché da quelle di Rayleigh, il metodo del rapporto ($M_s : m_b$) è in grado di offrirci un'ottima discriminante.

Le tecniche descritte non sono in grado di fornire risultati con una certezza assoluta, e d'altronde sarebbe impossibile averla. Per sismi con $mb > 4$, l'IMS fornisce risultati con un buon intervallo di confidenza. Questi risultati sono resi ulteriormente affidabili dal fatto che lo sviluppo e il mantenimento di un arsenale di armi nucleari richiederebbe numerosi test, aumentando la probabilità che almeno uno venga rilevato.

Conclusioni

In questa tesi si sono discussi vari metodi di discriminazione tra terremoti ed esplosioni sotterranee. Per poter introdurre tali metodi, sono stati introdotti i sistemi di forze in un mezzo elastico. Sono stati discussi due modelli per le sorgenti puntiformi, il centro di dilatazione e la doppia coppia di forze, sia nel caso statico che nel caso dinamico. Nel caso dinamico sono state introdotte le onde sismiche, e nel secondo capitolo si è proceduto a ottenere espressioni per gli spostamenti e le velocità di propagazione. Una volta ricavate queste informazioni, è stato possibile introdurre i vari metodi di discriminazione, dei quali il principale e più potente è il discriminante m_b/M_S . I criteri studiati certamente non sono affidabili al 100%, ma forniscono un buon intervallo di confidenza. Questi buoni risultati sono rafforzati da fattori esterni, tra cui la necessità di compiere una serie di test per poter ottenere e mantenere operativo un arsenale nucleare, e il rischio politico che un Paese correrebbe compiendo test clandestini. In definitiva se e quando il CTBT diventerà operativo, ci sono ottime possibilità che un'eventuale violazione venga rilevata.

Appendice A

Il tensore di Green

Il tensore di Green per un mezzo elastico illimitato, omogeneo e isotropo è la soluzione fondamentale per i problemi elastodinamici. La conoscenza del tensore di Green consente di calcolare l'effetto di qualunque distribuzione di forze applicata al mezzo (Aki e Richards, 2002).

A.1 I potenziali di Helmholtz

Abbiamo già detto che è sempre possibile scrivere un campo vettoriale $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ nella forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 \quad (\text{A.1})$$

dove

$$\nabla \times \mathbf{A}_1 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{A}_2 = 0 \quad (\text{A.2})$$

Dato che il rotore di un gradiente è sempre nullo, si può scrivere

$$\mathbf{A}_1 = \nabla \Phi \quad (\text{A.3})$$

dove Φ è un campo scalare. Analogamente, poiché la divergenza di un rotore è sempre nulla, si può scrivere

$$\mathbf{A}_2 = \nabla \times \Psi \quad (\text{A.4})$$

dove Ψ è un campo vettoriale. Dunque la (1) può essere scritta come

$$\mathbf{A} = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi \quad (\text{A.5})$$

I campi Φ e Ψ sono detti **potenziali di Helmholtz**.

Per calcolare i potenziali di Helmholtz relativi ad un campo \mathbf{A} , bisogna trovare un campo vettoriale \mathbf{B} che soddisfa l'**equazione di Poisson** vettoriale

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mathbf{A} \quad (\text{A.6})$$

Infatti, in base all'identità

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (\text{A.7})$$

l'equazione di Poisson è identicamente soddisfatta se si sceglie

$$\Phi = \nabla \cdot \mathbf{B}, \quad \Psi = -\nabla \times \mathbf{B} \quad (\text{A.8})$$

Infatti, introducendo queste espressioni nell'identità scritta sopra, si ottiene

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \nabla\Phi - \nabla \times (-\Psi) = \mathbf{A} \quad (\text{A.9})$$

Risulta soddisfatta anche la condizione $\nabla \cdot \Psi = 0$, perché la divergenza di un rotore è uguale a zero.

La soluzione dell'equazione di Poisson vettoriale, analogamente al caso scalare, è

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{A}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' \quad (\text{A.10})$$

dove V è il volume nel quale è definito il campo \mathbf{A} . Ottenuto \mathbf{B} , i potenziali di Helmholtz si calcolano poi tramite le (8).

La scomposizione in **potenziali di Helmholtz** è particolarmente utile per il campo degli spostamenti $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ in un corpo elastico.

A.2 Teorema di Lamé

Consideriamo lo spostamento $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ scritto nella forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\alpha + \mathbf{u}_\beta \quad (\text{A.11})$$

Dato che \mathbf{u}_α è irrotazionale e \mathbf{u}_β è solenoidale, i due campi possono essere espressi tramite i **potenziali di Helmholtz**:

$$\mathbf{u}_\alpha = \nabla\varphi, \quad \mathbf{u}_\beta = \nabla \times \boldsymbol{\psi} \quad (\text{A.12})$$

dove φ è il potenziale scalare e $\boldsymbol{\psi}$ è il potenziale vettore.

Esprimiamo anche le forze di volume $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ tramite i loro potenziali di Helmholtz:

$$\mathbf{f} = \nabla\Phi + \nabla \times \boldsymbol{\Psi} \quad (\text{A.13})$$

Il **teorema di Lamé** afferma che, se $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ soddisfa l'equazione del moto e $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ è espressa tramite i suoi potenziali di Helmholtz Φ e $\boldsymbol{\Psi}$, esistono un potenziale scalare $\varphi(x, t)$ e un potenziale vettore $\boldsymbol{\psi}(x, t)$ tali che

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \nabla \times \boldsymbol{\psi} \quad (\text{A.14})$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0 \quad (\text{A.15})$$

$$\ddot{\varphi} - \alpha^2 \nabla^2 \varphi = \frac{\Phi}{\rho} \quad (\text{A.16})$$

$$\ddot{\boldsymbol{\psi}} - \beta^2 \nabla^2 \boldsymbol{\psi} = \frac{\boldsymbol{\Psi}}{\rho} \quad (\text{A.17})$$

Il teorema si dimostra facilmente (Aki e Richards, 2002).

A.3 Soluzione delle equazioni per φ e $\boldsymbol{\psi}$

L'equazione per il potenziale φ è un'equazione differenziale del secondo ordine alle derivate parziali:

$$\ddot{\varphi} - \alpha^2 \nabla^2 \varphi = \frac{\Phi}{\rho} \quad (\text{A.18})$$

L'equazione ha quattro variabili (le tre coordinate spaziali e il tempo) e un termine "disomogeneo" dipendente dalle variabili.

La soluzione può essere espressa nella forma di un integrale sul volume V del mezzo elastico:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\alpha^2\rho} \int_V \frac{\Phi\left(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{\alpha}\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' \quad (\text{A.19})$$

La soluzione ha la notevole proprietà che il campo nel punto \mathbf{x} all'istante t è sensibile all'attività della sorgente nel punto \mathbf{x}' all'istante **ritardato** $t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/\alpha$.

L'equazione per il potenziale vettore $\boldsymbol{\psi}$ equivale a tre equazioni scalari identiche a quella per φ . Perciò ogni componente di $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t)$ è data da una formula analoga a quella che dà $\varphi(\mathbf{x}, t)$.

Grazie al teorema di Lamé, calcoleremo ora il tensore di Green.

A.4 Calcolo del tensore di Green

Come si è detto, il **tensore di Green** è lo spostamento prodotto da una forza impulsiva di intensità unitaria, applicata a un mezzo elastico illimitato, omogeneo e isotropo.

Introduciamo un sistema di coordinate cartesiane (x_1, x_2, x_3) e consideriamo **una forza** di intensità $F(t)$ variabile nel tempo, applicata nell'origine delle coordinate in direzione $\hat{\mathbf{x}}_1$: la forza di volume corrispondente è

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = F(t)\delta(\mathbf{x})\hat{\mathbf{x}}_1 \quad (\text{A.20})$$

In accordo col teorema di Lamé, esprimiamo la forza \mathbf{f} tramite i potenziali di Helmholtz Φ e $\boldsymbol{\Psi}$:

$$\mathbf{f} = \nabla\Phi + \nabla \times \boldsymbol{\Psi} \quad (\text{A.21})$$

Esiste allora un campo vettoriale \mathbf{B} tale che

$$\Phi = \nabla \cdot \mathbf{B} \quad \boldsymbol{\Psi} = -\nabla \times \mathbf{B} \quad (\text{A.22})$$

e soddisfa l'equazione di Poisson

$$\nabla^2\mathbf{B} = \mathbf{f} \quad (\text{A.23})$$

la cui soluzione è

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = -\frac{F(t)}{4\pi r} \hat{\mathbf{x}}_1 \quad (\text{A.24})$$

dove

$$r = |\mathbf{x}| \quad (\text{A.25})$$

Il campo \mathbf{B} ha la sola componente B_1 : perciò i potenziali delle forze di volume sono

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial B_1}{\partial x_1} \quad \Psi(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial B_1}{\partial x_3} \hat{\mathbf{x}}_2 + \frac{\partial B_1}{\partial x_2} \hat{\mathbf{x}}_3 \quad (\text{A.26})$$

cioè, inserendo l'espressione di B_1 ,

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{F(t)}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} \quad (\text{A.27})$$

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = -\frac{F(t)}{4\pi} \left(-\frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{r} \hat{\mathbf{x}}_2 + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{r} \hat{\mathbf{x}}_3 \right) \quad (\text{A.28})$$

dove si può notare che la dipendenza dal tempo è **separata** dalla dipendenza dalle coordinate spaziali.

Per il teorema di Lamé, i potenziali φ e ψ dello spostamento soddisfano le equazioni

$$\ddot{\varphi} - \alpha^2 \nabla^2 \varphi = \frac{\Phi}{\rho} \quad \ddot{\psi} - \beta^2 \nabla^2 \psi = \frac{\Psi}{\rho} \quad (\text{A.29})$$

che diventano

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{\alpha^2} \ddot{\varphi} = \frac{F(t)}{4\pi\rho\alpha^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} \quad (\text{A.30})$$

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{\beta^2} \ddot{\psi} = \frac{F(t)}{4\pi\rho\beta^2} \left(-\frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{r} \hat{\mathbf{x}}_2 + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{r} \hat{\mathbf{x}}_3 \right) \quad (\text{A.31})$$

Abbiamo già visto qual è la soluzione di queste equazioni.

A.4.1 I potenziali φ e ψ

Nel caso del **potenziale scalare** φ , il termine disomogeneo è il prodotto di una funzione $F(t)$ che dipende solo dal tempo per una funzione delle sole coordinate spaziali. Pertanto

la soluzione assume la forma

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{(4\pi\alpha)^2\rho} \int_V \frac{F\left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{\alpha}\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial}{\partial x'_1} \frac{1}{|\mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' \quad (\text{A.32})$$

L'integrazione su V può essere effettuata considerando un sistema di gusci sferici centrati nel punto \mathbf{x} , mentre \mathbf{x}' si trova sulla superficie del guscio. Sia $\alpha\tau$ il raggio di un generico guscio, con

$$\tau = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{\alpha} \quad (\text{A.33})$$

Perciò si può trasformare l'integrale di volume in un integrale in τ da 0 all'infinito e in un integrale sulla superficie $S(\tau)$ del guscio di raggio $\alpha\tau$:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{(4\pi\alpha)^2\rho} \int_0^\infty \frac{F(t - \tau)}{\tau} \left(\int_S \frac{\partial}{\partial x'_1} \frac{1}{|\mathbf{x}'|} dS \right) d\tau \quad (\text{A.34})$$

L'integrale su S si risolve facilmente. Si trova

$$\int_S \frac{\partial}{\partial x'_1} \frac{1}{|\mathbf{x}'|} dS = \begin{cases} 0, & \tau > r/\alpha \\ 4\pi\alpha^2\tau^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r}, & \tau < r/\alpha \end{cases} \quad (\text{A.35})$$

I dettagli del calcolo si trovano in Aki e Richards (2002), capitolo 4. Quindi

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} \right) \int_0^{r/\alpha} \tau F(t - \tau) d\tau \quad (\text{A.36})$$

Dal risultato ottenuto per $\varphi(\mathbf{x}, t)$ possiamo dedurre che il **potenziale vettore** è

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{r} \hat{\mathbf{x}}_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{r} \hat{\mathbf{x}}_3 \right) \int_0^{r/\beta} \tau F(t - \tau) d\tau \quad (\text{A.37})$$

A.4.2 Risultato finale

Lo spostamento può dunque calcolarsi come

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla\varphi(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.38})$$

Eseguendo il calcolo e generalizzando a una forza con direzione j , si ottiene

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\rho} \left(\frac{1}{r}\right)_{,ij} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau F_j(t - \tau) d\tau + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} r_{,i} r_{,j} \frac{1}{r} F_j\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (\delta_{ij} - r_{,i} r_{,j}) \frac{1}{r} F_j\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \quad (\text{A.39})$$

Introducendo il versore $\boldsymbol{\gamma}$, definito da

$$\mathbf{x} = r\boldsymbol{\gamma} \quad (\text{A.40})$$

le cui componenti γ_i sono i coseni direttori di \mathbf{x} , si ha

$$\gamma_i = \frac{x_i}{r} = r_{,i} \quad \left(\frac{1}{r}\right)_{,ij} = \frac{3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}}{r^3} \quad (\text{A.41})$$

Lo **spostamento** può dunque essere scritto come

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\rho} (3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \frac{1}{r^3} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau F_j(t - \tau) d\tau + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} \gamma_i\gamma_j \frac{1}{r} F_j\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (\delta_{ij} - \gamma_i\gamma_j) \frac{1}{r} F_j\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \quad (\text{A.42})$$

Come anticipato, l'espressione ottenuta per lo spostamento dovuto alla forza $F_j(t)$ può essere scritta concisamente tramite l'operazione di **convoluzione** come

$$u_i = F_j * G_{ij} \quad (\text{A.43})$$

Per trovare l'espressione di G_{ij} , consideriamo l'integrale

$$I = \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau F_j(t - \tau) d\tau \quad (\text{A.44})$$

Se introduciamo una nuova variabile

$$\tau' = t - \tau \quad (\text{A.45})$$

possiamo scrivere

$$I = - \int_{t-r/\alpha}^{t-r/\beta} (t - \tau') F_j(\tau') d\tau' = \quad (\text{A.46})$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} (t - \tau') F_j(\tau') \left[H\left(\tau' - t + \frac{r}{\alpha}\right) - H\left(\tau' - t + \frac{r}{\beta}\right) \right] d\tau' \quad (\text{A.47})$$

Eliminando per semplicità l'apice da τ , scriviamo infine

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} F_j(\tau)(t - \tau) \left[H\left(t - \frac{r}{\alpha} - \tau\right) - H\left(t - \frac{r}{\beta} - \tau\right) \right] d\tau \quad (\text{A.48})$$

che è l'espressione di una **convoluzione**. Analogamente possiamo scrivere

$$F_j\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} F_j(\tau) \delta\left(t - \frac{r}{\alpha} - \tau\right) d\tau \quad (\text{A.49})$$

$$F_j\left(t - \frac{r}{\beta}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} F_j(\tau) \delta\left(t - \frac{r}{\beta} - \tau\right) d\tau \quad (\text{A.50})$$

Ne segue che il **tensore di Green** ha la forma

$$\begin{aligned} G_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{0}, 0) &= \frac{1}{4\pi\rho} (3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \frac{1}{r^3} t \left[H\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) - H\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \right] + \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} \gamma_i\gamma_j \frac{1}{r} \delta\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (\delta_{ij} - \gamma_i\gamma_j) \frac{1}{r} \delta\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

A.4.3 Espressione generale del tensore di Green

L'espressione ottenuta si riferisce a una forza \mathbf{F} impulsiva di intensità unitaria applicata all'istante $t = 0$ nell'origine delle coordinate. Tale forza è descritta da una forza di volume

$$f_i(\mathbf{x}, t) = F_i \delta(\mathbf{x}) \delta(t) \quad (\text{A.52})$$

Se la forza F è applicata in un generico punto $\boldsymbol{\xi}$ (anziché nell'origine delle coordinate) e agisce all'istante $t = \tau$, si ha

$$f_i(\mathbf{x}, t) = F_i \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta(t - \tau) \quad (\text{A.53})$$

In questo caso, bisogna porre nell'espressione precedente

$$r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| \quad (\text{A.54})$$

e sostituire t con $t - \tau$. Se le condizioni al contorno sono indipendenti dal tempo, l'origine del tempo può essere spostata come si vuole. Quindi

$$G_{ij}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) = G_{ij}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\xi}, 0) \quad (\text{A.55})$$

che è l'espressione generale del tensore di Green.

A.5 Proprietà del tensore di Green

Il tensore di Green è formato da tre termini, che dipendono in maniera diversa dalla distanza r : il primo è chiamato **campo vicino** (*near field*); gli altri due sono chiamati **campo lontano** (*far field*).

In ciascuno dei tre termini possono essere distinti **quattro fattori**:

- un fattore costante, che dipende dalla densità del mezzo e dalla velocità delle onde;
- un fattore contenente i coseni direttori γ_i , che esprime la dipendenza angolare della radiazione emessa (*radiation pattern*);
- un fattore che esprime la dipendenza dell'ampiezza dalla distanza r ;
- la **forma d'onda**, che esprime la dipendenza del segnale dal tempo.

Il termine di campo vicino e quelli di campo lontano si differenziano per importanti proprietà.

A.5.1 Campo vicino

Ha le seguenti proprietà:

- 1) non contiene la velocità delle onde nel fattore costante;
- 2) comprende sia moti longitudinali che trasversali: i due tipi di onde non sono separabili;
- 3) si attenua più velocemente del campo lontano (come r^{-2} nel caso di una forza impul-

siva);

4) è diverso da zero solo per $r/\alpha < t < r/\beta$.

A.5.2 Campo lontano

Ha le seguenti proprietà:

- 1) i due termini si riferiscono rispettivamente alle onde P e alle onde S;
- 2) a parità degli altri fattori, l'ampiezza delle onde S è maggiore di quella delle onde P (a causa delle velocità α^2 e β^2 al denominatore);
- 2) lo spostamento è parallelo a $\boldsymbol{\gamma}$ nel caso delle onde P ($\mathbf{u} \times \boldsymbol{\gamma} = 0$); è perpendicolare a $\boldsymbol{\gamma}$ nel caso delle onde S ($\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0$);
- 3) si attenua come $1/r$;
- 4) la forma d'onda dipende dallo spazio e dal tempo nella combinazione $t - r/c$ (*tempo ritardato*), dove $c = \alpha$ oppure $c = \beta$, ed è proporzionale alla forza applicata all'istante ritardato.

I tre termini si differenziano inoltre per la distribuzione angolare della radiazione.

A.5.3 Approssimazione di campo lontano

Il termine di campo vicino può essere in molti casi trascurato se si vuole descrivere la radiazione **a grande distanza** dalla sorgente.

Consideriamo l'espressione dello spostamento $u_i(\mathbf{x}, t)$. Se la durata della sorgente è T , l'integrale che compare nel termine di campo vicino \mathcal{G}^V è dell'ordine di FT^2 . I fattori che danno la distribuzione angolare della radiazione sono dell'ordine dell'unità. Quindi

$$\mathcal{G}^V \approx \frac{FT^2}{4\pi\rho r^3} \quad (\text{A.56})$$

mentre i termini di campo lontano sono

$$\mathcal{G}^L \approx \frac{F}{4\pi\rho c^2 r} \quad (\text{A.57})$$

dove $c = \alpha$ oppure β . Dunque il campo lontano è preponderante sul campo vicino se

$$\frac{F}{4\pi\rho c^2 r} \gg \frac{FT^2}{4\pi\rho r^3} \quad (\text{A.58})$$

cioè

$$r \gg cT \simeq \lambda \quad (\text{A.59})$$

dove λ è la **lunghezza d'onda**. Perciò, quando si considerano lunghezze d'onda molto minori della distanza dalla sorgente, è sufficiente utilizzare i termini di campo lontano.

A.6 La distribuzione angolare della radiazione

In ciascuno dei tre termini del tensore di Green è presente un fattore contenente i coseni direttori γ_i . Questo fattore esprime la dipendenza angolare della radiazione emessa. In particolare, si ha

$$R_{ij}^V = 3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij} \quad (\text{A.60})$$

$$R_{ij}^{LP} = \gamma_i\gamma_j \quad R_{ij}^{LS} = \delta_{ij} - \gamma_i\gamma_j \quad (\text{A.61})$$

Consideriamo un piano su cui giace la forza \mathbf{F} , applicata nell'origine delle coordinate, e introduciamo un versore $\boldsymbol{\gamma}'$, perpendicolare a $\boldsymbol{\gamma}$ e giacente nel piano suddetto. Chiamiamo ϑ l'angolo tra la direzione della forza (assunta come $\vartheta = 0$) e la direzione $\boldsymbol{\gamma}$ del punto di osservazione.

L'ampiezza dello spostamento nelle direzioni longitudinale e trasversale può essere calcolata per i diversi termini del tensore di Green prendendone il **prodotto scalare** con i versori $\boldsymbol{\gamma}$ e $\boldsymbol{\gamma}'$ rispettivamente. Teniamo conto che

$$\gamma_i\gamma_i = 1, \quad \gamma'_i\gamma'_i = 1, \quad \gamma_i\gamma'_i = 0 \quad (\text{A.62})$$

1) Il campo vicino ha una componente longitudinale

$$R_{ij}^V\gamma_i = (3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij})\gamma_i = 2\gamma_j = 2 \cos \vartheta \quad (\text{A.63})$$

e una componente trasversale

$$R_{ij}^V\gamma'_i = (3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij})\gamma'_i = -\gamma'_j = -\sin \vartheta \quad (\text{A.64})$$

2) Per il termine longitudinale del campo lontano, si ha

$$R_{ij}^{LP} \gamma_i = (\gamma_i \gamma_j) \gamma_i = \gamma_j = \cos \vartheta \quad (\text{A.65})$$

3) Per il termine trasversale del campo lontano, si ha

$$R_{ij}^{LS} \gamma'_i = (\delta_{ij} - \gamma_i \gamma_j) \gamma'_i = \gamma'_j = \sin \vartheta \quad (\text{A.66})$$

La distribuzione della radiazione può essere visualizzata tracciando i grafici delle suddette funzioni trigonometriche in forma polare. In tutti i casi, la componente longitudinale ha l'**intensità massima** nella direzione della forza, mentre la componente trasversale ce l'ha nella direzione perpendicolare alla forza.

A.7 Riduzione al caso statico

Il **tensore di Somigliana** può essere ottenuto dal tensore di Green se si considera una forza costante nel tempo a partire dall'istante $\tau = 0$:

$$F_j(\tau) = F_j H(\tau) \quad (\text{A.67})$$

e si calcola lo **spostamento** $u_i(\mathbf{x})$ per $t \rightarrow \infty$. Le forze che compaiono nell'espressione di $u_i(\mathbf{x})$ hanno tutte il valore costante F_j e si ottiene

$$u_i(\mathbf{x}) = \frac{F_j}{4\pi\rho} \left(\frac{3\gamma_i \gamma_j - \delta_{ij}}{r^3} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau d\tau + \frac{1}{\alpha^2} \frac{\gamma_i \gamma_j}{r} + \frac{1}{\beta^2} \frac{\delta_{ij} - \gamma_i \gamma_j}{r} \right) \quad (\text{A.68})$$

Il calcolo dell'integrale fornisce

$$\int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau d\tau = \left[\frac{\tau^2}{2} \right]_{r/\alpha}^{r/\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{\beta^2} - \frac{r^2}{\alpha^2} \right) \quad (\text{A.69})$$

Quindi

$$u_i(\mathbf{x}) = \frac{F_j}{4\pi\rho r} \left[\frac{3\gamma_i \gamma_j - \delta_{ij}}{2} \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right) + \frac{\gamma_i \gamma_j}{\alpha^2} + \frac{\delta_{ij} - \gamma_i \gamma_j}{\beta^2} \right] \quad (\text{A.70})$$

oppure

$$u_i(\mathbf{x}) = \frac{F_j}{8\pi\rho r} \left[(3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right) + \frac{2\gamma_i\gamma_j}{\alpha^2} + 2\frac{\delta_{ij} - \gamma_i\gamma_j}{\beta^2} \right] \quad (\text{A.71})$$

o anche

$$u_i(\mathbf{x}) = \frac{F_j}{8\pi\rho r} \left[\frac{2}{\beta^2}\delta_{ij} + (3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right) - 2\gamma_i\gamma_j \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \right] \quad (\text{A.72})$$

e infine

$$u_i(\mathbf{x}) = \frac{F_j}{8\pi\rho r} \left[\frac{2}{\beta^2}\delta_{ij} - \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right) (\delta_{ij} - \gamma_i\gamma_j) \right] \quad (\text{A.73})$$

Introducendo le costanti di Lamé, si ha

$$\frac{1}{\beta^2} = \frac{\rho}{\mu} \quad (\text{A.74})$$

$$\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{\rho}{\mu} - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \quad (\text{A.75})$$

Infine, usando le relazioni

$$\frac{\delta_{ij} - \gamma_i\gamma_j}{r} = r_{,ij} \quad \frac{2}{r} = r_{,kk} \quad (\text{A.76})$$

si ottiene

$$u_i(\mathbf{x}) = \frac{F_j}{8\pi\mu} \left(r_{,kk} \delta_{ij} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} r_{,ij} \right) \quad (\text{A.77})$$

che si può scrivere come

$$u_i(\mathbf{x}) = F_j G_{ij} \quad (\text{A.78})$$

dove G_{ij} è il tensore di Somigliana. Si vede che lo spostamento statico prodotto da una forza decresce con la distanza come $1/r$:

$$u_i(\mathbf{x}) = \frac{F_j}{8\pi\mu r} \left[2\delta_{ij} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} (\delta_{ij} - \gamma_i\gamma_j) \right] \quad (\text{A.79})$$

Tutti e tre i termini del tensore di Green contribuiscono a determinare lo spostamento permanente finale del mezzo elastico. (Boschi e Dragoni, 2000)

Bibliografia

- Aki K. e Richards P. G., *Quantitative Seismology*, 2a edizione, University Science Books, Sausalito CA, 2002
- Bath M., *Introduction to Seismology*, Birkhauser Verlag, Basilea, 1973.
- Ben-Menahem A. e Singh S. J., *Seismic Waves and Sources*, Springer-Verlag, Berlino, 1981.
- Boschi E. e Dragoni M., *Sismologia*, Unione Tipografico-Editrice Torinese, Torino, 2000.
- Brown G. C. e Mussett A. E., *The Inaccessible Earth*, 2a edizione, Chapman and Hall, Londra, 1993.
- Bullen K.E., *An Introduction to the Theory of Seismology*, 3rd edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1963.
- Dahlman, O. e Israelson, H., *Monitoring Underground Nuclear Explosions*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam-Oxford-New York, 1977.
- Landau L. e Lifshitz E., *Theory of elasticity*, Pergamon Press, Oxford, 1970.
- *The Regional Seismic Test Network*, in Energy and Technology Review, 20-29, November 1982.
- Sykes L. R. e Evernden J. F., *Il Controllo di un Bando Totale agli Esperimenti Nucleari*, Le Scienze, vol. 29, n. 172, 1982.