

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

## L' integrale funzionale in meccanica quantistica

**Relatore:**  
**Prof. Fiorenzo Bastianelli**

**Presentata da:**  
**Alessandro Dal Maso**

Anno Accademico 2018/2019

## Sommario

La formulazione della meccanica quantistica che fa uso dell' integrale funzionale è un approccio intuitivo che ben complementa la formulazione standard. Le applicazioni sono presenti in molti settori, come per esempio in teoria quantistica dei campi, in meccanica statistica e nella fisica dei sistemi condensati. Partendo da una generalizzazione dell' esperimento della doppia fenditura di Young vedremo, dopo aver esplorato le più immediate applicazioni del concetto, l'applicazione a due dei casi più comunemente trattati come primi approcci alla teoria quantistica. Poi esamineremo la connessione esistente tra questo strumento matematico e la topologia. Vedremo come l'integrale funzionale può essere utilizzato per rappresentare la matrice di densità di un sistema, e infine affronteremo come risolvere un problema che emerge nella teoria perturbativa standard tramite l'uso degli istantoni nell'integrale funzionale.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
1.1	Esperimento della doppia fenditura . . . . .	2
1.2	Le leggi del moto . . . . .	4
1.3	La formulazione delle leggi del moto con integrale funzionale . . . . .	5
1.4	Il limite classico . . . . .	5
1.5	Costruire l'integrale . . . . .	6
1.6	Due eventi in successione . . . . .	8
1.7	Operatore di evoluzione temporale . . . . .	10
1.8	La funzione d'onda . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Applicazioni ai casi specifici più comuni</b>	<b>12</b>
2.1	Particella libera . . . . .	12
2.2	Oscillatore armonico . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Due casi relativi all'elettromagnetismo</b>	<b>16</b>
3.1	L'effetto Aharonov-Bohm . . . . .	16
3.2	Monopoli magnetici . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Statistica delle particelle</b>	<b>20</b>
4.1	In tre dimensioni . . . . .	20
4.2	In due dimensioni . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Operatore densità</b>	<b>25</b>
5.1	Stati puri e non . . . . .	25
5.2	L'operatore densità . . . . .	25
5.3	Esempio . . . . .	26
5.4	Equazione differenziale dell'operatore densità . . . . .	27
5.5	Legame con l'integrale funzionale . . . . .	28
<b>6</b>	<b>Integrale funzionale euclideo</b>	<b>29</b>
<b>7</b>	<b>Istantoni</b>	<b>31</b>
7.1	Problemi della trattazione perturbativa . . . . .	31
7.2	Metodo di steepest descent . . . . .	32
7.3	Applicazione al problema . . . . .	33
7.4	Istantoni in un potenziale con due minimi . . . . .	34

# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Esperimento della doppia fenditura

Com'è noto, l'esperimento della doppia fenditura è uno degli esperimenti più usati per mettere in luce il dualismo onda-particella. Feynman lo descrisse come l'esperimento-chiave che "racchiude l'unico mistero della meccanica quantistica". Ne riassumiamo qui i punti principali: supponiamo di dirigere un fascio di particelle contro una barriera che non possono attraversare, dotata di due fenditure. Le particelle che attraversano le fenditure, dopo aver percorso un tratto di spazio vuoto, arrivano ad uno schermo rivelatore, che ne registra la posizione. Si va poi a studiare la figura prodotta dalla densità di rilevazioni delle particelle. La figura prodotta è quella tipica dei fenomeni di interferenza, a conferma del dualismo onda-particella che permea la meccanica quantistica.

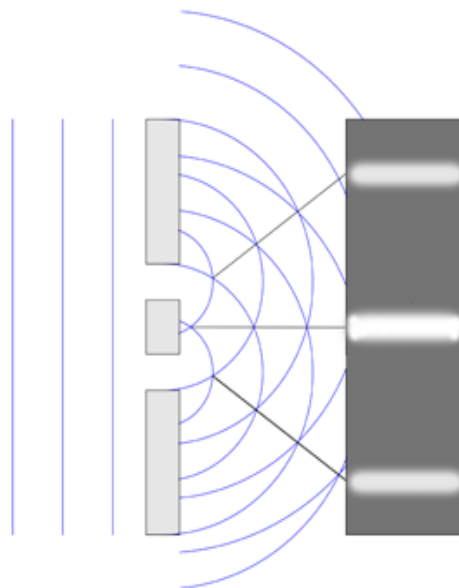


Figura 1.1: L'interferenza prodotta da una doppia fenditura.

Storicamente l'esperimento fu compiuto per la prima volta da Young nel 1801 con una sorgente di luce coerente per evidenziare la natura ondulatoria della luce. Il risultato, unito all'elaborazione teorica

successiva di James Clerk Maxwell, cementificò sempre più nei fisici l'idea che tra la teoria corpuscolare e quella ondulatoria fosse la seconda ad essere la corretta descrizione della luce. La teoria corpuscolare cominciò a riacquistare credito all'inizio del '900, quando fenomeni come l'effetto Compton e l'effetto fotoelettrico vennero spiegati tramite urti di fotoni. L'ipotesi secondo la quale la luce avrebbe avuto una natura doppia, sia oscillatoria che corpuscolare, si estese ben presto ad ogni particella subatomica. Nel 1927 Davisson e Germer utilizzarono una variante dell'esperimento della doppia fenditura con un fascio di elettroni, e ottennero una figura di interferenza. Nel 1974 a Bologna Pier Giorgio Merli, Gianfranco Missiroli e Giulio Pozzi ripeterono l'esperimento inviando però un elettrone alla volta, ottenendo comunque interferenza: l'implicazione è che ogni singolo elettrone interferisca con solo se stesso. Sorge ora il problema dell'interpretazione dei risultati ottenuti: come ci si aspetta da un esperimento tanto fondamentale, l'interpretazione dipende da quella della meccanica quantistica in generale. Quella che fa uso dell'integrale funzionale è la seguente: la particella percorre ogni percorso possibile per arrivare al punto sullo schermo dove sarà rilevato. Ad ogni percorso ("path") associamo un numero complesso che denoteremo con  $K$ , e che costituisce l'ampiezza di probabilità associata al percorso. Sommando su tutti i percorsi otteniamo una ampiezza di probabilità totale collegata al moto della particella dal punto di partenza a quello di arrivo che avviene in un intervallo di tempo  $T$  fissato. Il modulo quadrato di questa ampiezza di probabilità fornisce la probabilità che la particella inizialmente in un punto dello spazio arrivi ad un punto finale nel tempo  $T$ .

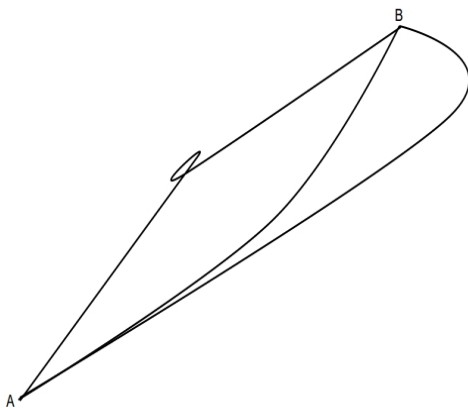


Figura 1.2: Tre possibili percorsi compiuti da una particella per andare dal punto A al punto B

Si noti che ogni percorso è ammissibile: per esempio anche quelli che attraversano entrambe le fenditure in successione. Allora a cosa dobbiamo il fenomeno di interferenza? Al fatto che la fase totale dei percorsi attraverso una fenditura interferisce con quella dei percorsi che attraversano l'altra fenditura. Ponendo un rivelatore in ciascuna delle due fenditure sappiamo dove passa l'elettrone eliminando l'altra possibilità, e non vediamo più gli effetti di interferenza.

## 1.2 Le leggi del moto

Un modo estremamente elegante di esprimere le leggi del moto nella fisica classica è attraverso il principio di minima azione. Associamo ad ogni possibile evoluzione temporale (percorso nel caso di un corpo puntiforme) del sistema una quantità, l'azione, definita come

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (1.1)$$

dove il sistema evolve da  $(q_a, t_a)$  a  $(q_b, t_b)$ . L'evoluzione temporale compiuta dal sistema sarà quella che minimizza l'azione. La quantità integrata è nota come lagrangiana ed è la differenza tra energia cinetica e potenziale. Per esempio per una massa puntiforme che si muove in un potenziale monodimensionale

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - V(q). \quad (1.2)$$

Tornando al problema del determinare le leggi del moto, se indichiamo con  $\bar{q}(t)$  il percorso compiuto classicamente abbiamo che per un generico percorso  $q(t) = \bar{q}(t) + \delta q$

$$\begin{aligned} q(t_a) - \bar{q}(t_a) &= \delta q(t_a) = 0 \\ q(t_b) - \bar{q}(t_b) &= \delta q(t_b) = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Dato che tutti i percorsi partono dallo stesso stato e finiscono nello stesso stato. La necessità di minimizzare l'azione si traduce in

$$\delta S[\bar{q}(t)] = S[\bar{q} + \delta q(t)] - S[\bar{q}(t)] = 0 \quad (1.4)$$

ma

$$\begin{aligned} \delta S &= S[\bar{q} + \delta q(t)] - S[\bar{q}] \\ &= \int_{t_a}^{t_b} (L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t)) dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \left( L(q, \dot{q}, t) + \delta q \frac{\partial L}{\partial q} + d\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L(q, \dot{q}, t) \right) dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \left( \delta q \frac{\partial L}{\partial q} + \delta \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) dt \end{aligned} \quad (1.5)$$

integrando per parti abbiamo

$$\delta S = \delta q \frac{\partial L}{\partial q} \Big|_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} \delta q \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right) dt \quad (1.6)$$

Ma come abbiamo visto  $\delta q = 0$  agli estremi e quindi l'equazione precedente si traduce nell'annullamento della quantità dentro l'integrale

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (1.7)$$

Che rappresenta, naturalmente, le equazioni del moto di Eulero-Lagrange. In meccanica classica, ci interessano i minimi di  $S$  al fine di calcolare l'evoluzione temporale del sistema, mentre nella meccanica quantistica, come abbiamo visto nell'esperimento della doppia fenditura, anche la formula generale di  $S$  è importante.

### 1.3 La formulazione delle leggi del moto con integrale funzionale

Feynman annuncia i seguenti postulati:

- La probabilità che un sistema passi dallo stato  $q_a$  al tempo  $t_a$  allo stato  $q_b$  al tempo  $t_b$  è proporzionale al quadrato del modulo di un numero complesso indicato con  $K(q_b, t_b, q_a, t_a)$
- $K$  è dato dall' integrale dei contributi dati da ogni singolo percorso possibile  $q(t)$ , a cui è associata un'ampiezza di probabilità  $\Phi[q(t)]$ , e quindi  $K = \sum_{\text{percorsi } q(t)} \Phi[q(t)]$
- Il contributo di ogni singolo percorso è dato da  $\Phi[q(t)] = e^{(i/\hbar)S[q(t)]}$ , in cui compare l'azione classica.

Abbiamo tre problemi da affrontare nello sviluppare questi postulati: Assicurarne la coerenza con la meccanica newtoniana nel limite classico, esplicitare la costante di cui si parla nel terzo postulato e costruire l'integrale su tutti i percorsi.

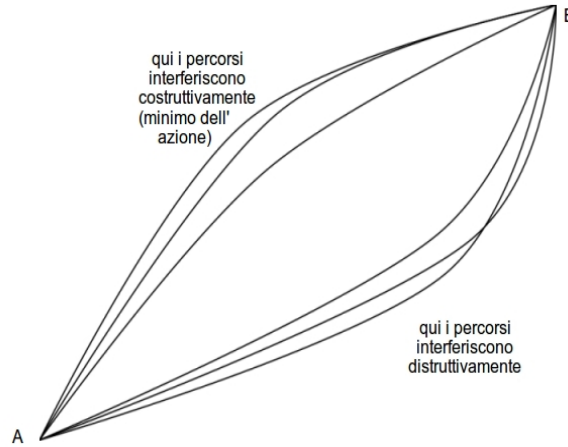


Figura 1.3: Il percorso classico è quello che, approssimando al primo ordine, non ha alcuna variazione del proprio contributo per deviazioni di percorso. Da ciò si determinano le equazioni del moto classiche.

L'integrale di cammino è un numero complesso associato al processo in cui un corpo passa da uno stato  $q_1$  ad uno stato  $q_2$  in un tempo  $T$ . Esso risponde alla domanda: se un corpo è nella posizione  $q$ , qual è la sua funzione d'onda dopo un tempo  $T$ ? *Se consideriamo  $K$  una funzione di  $q_2$ , non è nient'altro che la funzione d'onda di una particella con una posizione iniziale nota. Pertanto, l'integrale di cammino soddisfa l'equazione di Schrödinger.*

### 1.4 Il limite classico

Il limite classico, come sappiamo, è quello in cui  $\frac{1}{\hbar} \rightarrow +\infty$ . Se ci chiediamo quanto velocemente vari il contributo alla fase di un singolo percorso al variare di  $S$  troviamo

$$\delta\Phi = \delta S \frac{de^{(i/\hbar)S[q(t)]}}{dS} = \delta S \frac{i}{\hbar} e^{(i/\hbar)S[q(t)]} \quad (1.8)$$

$$\delta\Phi \propto \frac{1}{\hbar}$$

Quindi nel limite classico piccoli cambiamenti nel percorso si riflettono in enormi cambiamenti sulla fase, che essendo una funzione periodica tornerà rapidamente al suo valore iniziale. Il contributo totale sarà quindi nullo. Quindi nessun percorso deve essere considerato nel calcolo deli  $K$ , dato che i percorsi immediatamente vicini ne cancellano il contributo. Ma per il percorso speciale  $\bar{q}$  quello che estremizza  $S$ , un piccolo cambiamento di  $S$  non produce alcun cambiamento in  $K$  (perlomeno sviluppando al primo ordine) ed è quindi l'unico che contribuisce. In questo modo le leggi del moto classiche sono derivate naturalmente da quelle quantistiche. Al crescere di  $\hbar$  anche altri percorsi portano un contributo non trascurabile a  $K$ .

## 1.5 Costruire l'integrale

Anche se l'idea di una somma su tutti i possibili percorsi è intuitiva, matematicamente sorge il problema della definizione. Quella trovata si dimostrerà di difficile utilizzo all'atto pratico, quindi nei casi specifici si cercheranno metodi di calcolo più efficienti. Il punto di partenza è l'integrale di Riemann. Come sappiamo, nell'integrale di Riemann l'area al di sotto di una curva è approssimata dalla somma delle aree dei rettangoli che hanno per altezza il valore della funzione e come ordinata una costante data.

$$\lim_{p \rightarrow 0} \left[ p \sum_i f(x_i) \right] \quad (1.9)$$

Possiamo fare una considerazione sulla costruzione dell'integrale: potremmo dire che l'area sotto la curva è la somma delle ordinate

$$\sum_i f(x_i) \quad (1.10)$$

e che, non essendo tale espressione convergente, bisogna introdurre una costante moltiplicativa, appunto  $p$ .

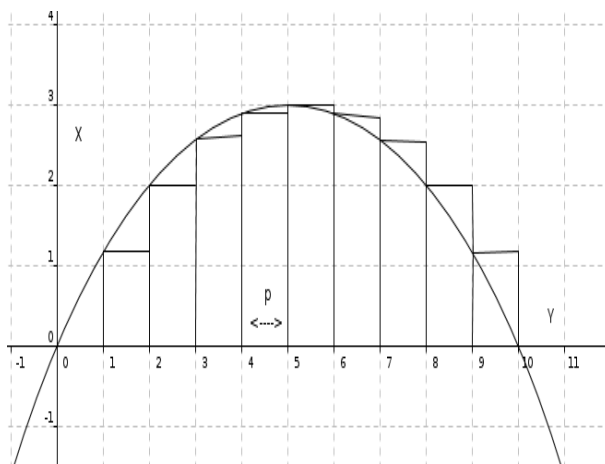


Figura 1.4: L'integrale di Riemann come somma delle ordinate, moltiplicate per la loro distanza reciproca  $p$ . Al tendere di  $p$  a zero la somma delle aree tende all'area sotto la curva. Una definizione analoga verrà data per l'integrale funzionale.

Ora dobbiamo applicare l'integrale di Riemann all'integrale funzionale. Per prima cosa, dividiamo la variabile temporale in intervalli di larghezza  $dt$ . Abbiamo un set  $t_i$  di valori di  $t$  a ciascuno dei quali il



nostro sistema è in uno stato  $q_i$ . Ma cosa succede tra due  $t_i$ ? Approssimiamo il moto ad uno a velocità costante, il che equivale a connettere i  $q_i$  con linee rette, come mostrato nel grafico

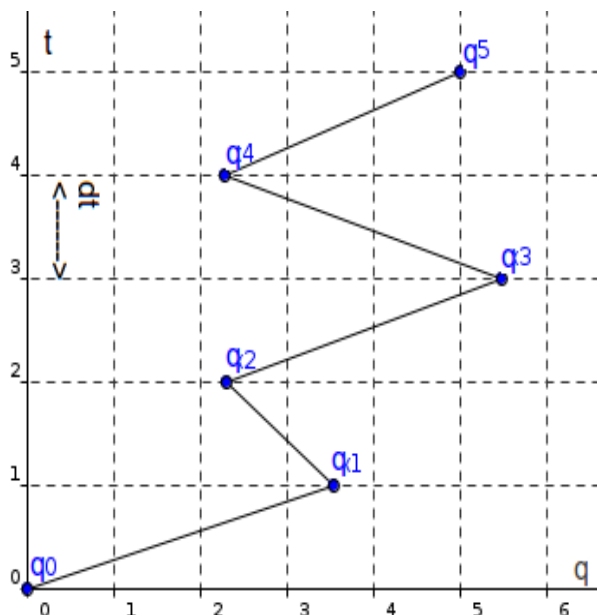


Figura 1.5: La somma su tutti i percorsi è definita come un limite. Inizialmente si somma su tutti i possibili valori delle variabili intermedie. Notare che la somma non va fatta su  $q_0$  e  $q_5$  che sono costanti assegnate. Per ottenere poi la misura corretta,  $dt$  è mandato a zero.

Definiamo la somma su tutti i percorsi come l'integrale su ognuno dei  $q_i$

$$K(a, b) \approx \int_{q_1} \cdots \int_{q_{N-1}} \phi[q(t)] dq_1 \cdots dq_{N-1}. \quad (1.11)$$

L'equazione sopra riportata corrisponde all'equazione (1.10). Non integriamo su  $q_0$  o  $q_N$  perché sono le coordinate dei nostri punti iniziale e finale fissati. Proprio come nel caso dell'integrale di Riemann, il limite non esiste. Introduciamo quindi un fattore di normalizzazione dipendente dall'intervallo temporale  $dt$ . Questo fattore non è di facile definizione, e non sappiamo farlo per il caso generale. Ciò dipende dal fatto che ora stiamo integrando su uno spazio infinito-dimensionale. Comunque, è possibile trovare una definizione ad hoc per quasi ogni situazione pratica. Per esempio se

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} \dot{q}^2 + V(q) \quad (1.12)$$

il fattore normalizzante risulta essere  $A^{-N}$  dove

$$A = \left( \frac{2\pi i \hbar dt}{m} \right)^{(1/2)} \quad (1.13)$$

È possibile definire il nostro percorso in un modo più elegante. Invece che linee rette, uniamo i nostri  $q_i$  con i percorsi che minimizzano l'azione classica. In questo modo non dobbiamo ricorrere ad arbitrarie linee rette. Ci sono infiniti modi di scomporre l'intervallo di tempo  $\Delta t$  in cui avviene il moto. Quello che abbiamo utilizzato potrebbe non essere la migliore in alcuni casi particolari. Per esempio, supponiamo

che  $L$  dipenda dall' accelerazione. Non possiamo calcolare l'accelerazione nei punti  $q_i$ , perlomeno con la definizione data di integrale funzionale. Esiste però un utile approssimazione:

$$\ddot{q}_i \approx \frac{\dot{q}_i - \dot{q}_{i-1}}{dt} \approx \frac{q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}}{dt^2}. \quad (1.14)$$

Grazie alla quale possiamo mantenere il nostro integrale su linee spezzate. In altri casi l'integrale di Riemann non è sufficiente, e bisogna passare ad altre definizioni di integrale, come quello di Lebesgue. Quindi scriveremo la definizione più generale dell'integrale funzionale come

$$K(a, b) = \int_a^b e^{(i/\hbar)S[a,b]} \mathcal{D}q(t) \quad (1.15)$$

## 1.6 Due eventi in successione

In questa sezione ci chiediamo quale sia l'integrale funzionale di un'evoluzione temporale che parte dallo stato  $a$ , passa per lo stato  $b$  e arriva infine a  $c$ . L'azione diventa:

$$S[a, c] = S[a, b] + S[b, c] \quad (1.16)$$

Che vale solo se  $S$  non dipende dalle derivate successive alla velocità (altrimenti dovremmo specificare la velocità in  $b$ ). Utilizzando la definizione di  $K$

$$K(a, c) = \int e^{(i/\hbar)(S[a,b]+S[b,c])} \mathcal{D}q(t). \quad (1.17)$$

Dividiamo l'integrale in due parti: uno che integra tutti i percorsi da  $a$  a  $b$ , e il secondo che integra su tutti i percorsi da  $b$  a  $c$ . Infine integriamo su tutti i possibili valori di  $b$ .

$$K(a, c) = \int_{q_b} \left( \int e^{(i/\hbar)S[a,b]} \mathcal{D}q(t) \right) \left( \int e^{(i/\hbar)S[b,c]} \mathcal{D}q(t) \right) dq_b. \quad (1.18)$$

Se svolgiamo l'integrale più interno, rimane solo l'integrazione su  $q_b$ :

$$K(a, c) = \int_{q_b} K(a, b)K(b, c) dq_b \quad (1.19)$$

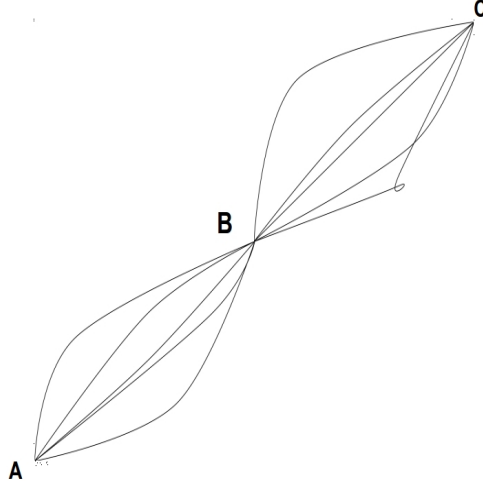


Figura 1.6: Un modo per ottenere  $K(a, c)$  è prima calcolare  $K(a, b)$  e  $K(b, c)$  e poi integrare il loro prodotto su tutti i valori possibili di  $b$ . La fase risultante per andare da  $a$  a  $c$  passando per  $b$  è  $K(a, b)K(b, c)$

Ed arriviamo alla regola: *le ampiezze di due eventi in successione si moltiplicano*. Le applicazioni di questa regola sono tante ed utili. Ne illustreremo ora una che porta a una definizione alternativa di  $K$ . Se applichiamo la formula per due eventi in successione a tre eventi otteniamo:

$$K(a, c) = \int_{q_b} \int_{q_c} K(a, b)K(b, c)K(c, d) dq_b dq_c \quad (1.20)$$

Stiamo studiando l'integrale funzionale di una particella che va da  $a$  a  $b$ , da  $b$  a  $c$ , e infine da  $c$  a  $d$ . Continuiamo a ripetere la suddivisione finché non otteniamo

$$K(q_0, q_N) = \int_{q_1} \cdots \int_{q_{N-1}} K(q_0, q_1) \cdots K(q_{N-1}, q_N) dq_1 \cdots dq_{N-1} \quad (1.21)$$

Per la regola degli eventi in successione avremo

$$\phi[q(t)] = \lim_{dt \rightarrow 0} \prod_{i=0}^{N-1} K(q_i, q_{i+1}) \quad (1.22)$$

Dove per  $K(q_i, q_{i+1})$  possiamo usare l'utile approssimazione

$$K(q_{i+1}, q_i) \approx \frac{1}{A} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} dt L \left( \frac{q_{i+1} - q_i}{dt}, \frac{q_{i+1} + q_i}{2}, \frac{t_{i+1} + t_i}{2} \right) \right] \quad (1.23)$$

Nel regime relativistico non siamo più in grado di esprimere la fase del singolo percorso semplicemente come  $e^{(i/\hbar)S[q(t)]}$ , o comunque in un'espressione altrettanto semplice. La formula per gli eventi in successione è ancora valida (con qualche piccola modifica). L'equazione (1.22) vale ancora, ma non più la (1.23). Le complicazioni sono dovute allo spin e alla possibilità di creazione di particelle.

## 1.7 Operatore di evoluzione temporale

Vediamo come dalla formulazione standard ci si possa ricondurre al formalismo di integrale di cammini. Per prima cosa consideriamo la base ortonormale degli autovalori dell'operatore posizione  $\hat{q}$ , che soddisfano:

$$\begin{aligned}\hat{q}|q\rangle &= q|q\rangle \\ \langle q'|q\rangle &= \delta(q' - q) \\ \int |q\rangle\langle q| dq &= 1\end{aligned}\tag{1.24}$$

La relazione che caratterizza l'operatore evoluzione è

$$K = \langle q'|e^{-iHT/\hbar}|q\rangle\tag{1.25}$$

che andiamo a separare

$$\begin{aligned}\langle q'|e^{-iHt_2} \int |q_1\rangle\langle q_1| dq_1 e^{-iHt_1}|q\rangle \\ = \int dq_1 K(q', T, q_1, t_1) K(q_1, t_1, q, 0)\end{aligned}\tag{1.26}$$

dove  $T = t_1 + t_2$ . Ripetendo questa operazione  $N-1$  volte

$$K = \int dq_1 \cdots dq_{N-1} \prod_1^N \langle q_k|e^{-iHdt/\hbar}|q_{k-1}\rangle.\tag{1.27}$$

Usiamo di nuovo l'inserimento di identità ma stavolta con  $p$

$$\begin{aligned}\int \frac{|p\rangle\langle p|}{2\pi\hbar} dp = 1 \\ \langle p|p'\rangle = \delta(p' - p) \\ K = \int dq_1 \cdots dq_{N-1} \frac{dp_1}{2\pi\hbar} \cdots \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \prod_1^N \langle q_k|p_k\rangle \langle p_k|e^{-iHdt/\hbar}|q_{k-1}\rangle.\end{aligned}\tag{1.28}$$

Dato che  $dt$  è un infinitesimo espandiamo in serie di Taylor:

$$\begin{aligned}\langle p_k|e^{iHdt/\hbar}|q_{k-1}\rangle &= \langle p_k|\hat{I} - \frac{idt}{\hbar}H + \cdots|q_{k-1}\rangle \\ &= \langle p_k|q_{k-1}\rangle \left(1 - \frac{idt}{\hbar}H(q_{k-1}, p_k) + \cdots\right) \\ &= \langle p_k|q_{k-1}\rangle e^{-idtH(q_{k-1}, p_k)/\hbar}.\end{aligned}\tag{1.29}$$

Ricordiamo che

$$\langle q|p\rangle = e^{ipq/\hbar}, \quad \langle p|q\rangle = e^{-ipq/\hbar}\tag{1.30}$$

da cui arriviamo alla seguente identità

$$\langle p_k|q_k\rangle \langle p_k|e^{-idtH/\hbar}|q_{k-1}\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}(p_k(q_k - q_{k-1}) - dtH(p_k, q_k))}.\tag{1.31}$$

Trascurando termini infinitesimi nel limite  $dt \rightarrow 0$ . Sostituendo

$$K = \lim_{dt \rightarrow 0} \int dq_1 \cdots dq_{N-1} \frac{dp_1}{2\pi\hbar} \cdots \frac{dp_N}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}(p_k(q_k - q_{k-1}) - dtH(p_k, q_k))}.\tag{1.32}$$

Riconosciamo il contenuto della parentesi come l'azione e scriviamo

$$K = \int DqDp e^{\frac{i}{\hbar}S[q(t)]}\tag{1.33}$$

## 1.8 La funzione d'onda

$K(q_b, T, q_a, 0)$  è un numero complesso collegato ad un moto tra due punti precisi dello spazio:  $q_a$  e  $q_b$ . Fissato  $(q_a, 0)$ , rappresenta la funzione d'onda di una particella di cui sappiamo che al tempo  $t = 0$  si trovava in  $q_a$ . E se invece, fissato  $(q_b, T)$ , considerassimo  $K$  come una funzione del punto di partenza?  $K$  diventerebbe la fase collegata alla probabilità di trovare la particella in un punto dello spaziotempo senza nessuna particolare richiesta sul suo moto precedente. Chiamiamo questa grandezza  $\Phi(q_b, T)$ . Tale grandezza soddisfa l'equazione di Schrödinger come le ampiezze precedentemente incontrate, e la probabilità di trovare la particella ad un punto dello spaziotempo è  $|\Phi(q_b, T)|^2$ . Chiamiamo tale grandezza funzione d'onda.  $\Phi(q_b, T)$  descrive completamente il sistema. Consideriamo la notazione  $K(q_b, T, q_a, 0)$  come qualcosa che ci dà più informazione: ci dice che la particella ad un tempo  $t = 0$  si trovava in un certo punto  $q_a$  dello spazio. Magari questa informazione è inutile ai fini del problema. Allora scriviamo semplicemente  $\Phi(q_b, T)$ . Anche  $\Phi(q_b, T)$  soddisfa le regole di composizione che abbiamo visto:

$$\Phi(q_c, t_c) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(q_c, t_c, q_b, t_b) \Phi(q_b, t_b) dq_b \quad (1.34)$$

La fase collegata ad una particella che arriva in  $(q_c, t_c)$  è uguale alla somma sui possibili valori di  $(q_b, t_b)$  del prodotto della fase collegata ad una particella che va da  $(q_b, t_b)$  a  $(q_c, t_c)$  con la fase collegata ad una particella che arriva in  $(q_b, t_b)$ . L'implicazione di ciò è importante: l'effetto di eventi passati su una particella possono essere espressi in una singola funzione d'onda. Se di un sistema isolato conosciamo la funzione d'onda, possiamo predire interamente la sua evoluzione futura.

## Capitolo 2

# Applicazioni ai casi specifici più comuni

### 2.1 Particella libera

La lagrangiana di una particella libera è

$$\frac{1}{2}m\dot{q}^2. \quad (2.1)$$

Vediamo prima di tutto come il problema viene affrontato nella formalizzazione standard. Andiamo a calcolare il valore del propagatore:

$$\begin{aligned} U(0, T) &= \langle q' | e^{-iHT/\hbar} | q \rangle \\ &= \langle q' | e^{-iT\hat{p}^2/2m\hbar} | q \rangle \\ &= \langle q' | e^{-iT\hat{p}^2/2m\hbar} \int \frac{dp}{2\pi\hbar} | p \rangle \langle p | q \rangle \\ &= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{-iTp^2/2m\hbar} \langle q' | p \rangle \langle p | q \rangle \\ &= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{-iT(1/\hbar)(p^2/2m) + i(q-q')p}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

L'integrale è di tipo gaussiano e vale

$$K = \left( \frac{m}{2i\pi\hbar T} \right)^{(1/2)} e^{im(q'-q)^2/2T\hbar}. \quad (2.3)$$

Vediamo come l'integrale funzionale risolve lo stesso problema. Utilizziamo (1.22) e (1.23) ottenendo

$$\begin{aligned} K &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2\pi i \hbar dt} \right)^{N/2} \int \prod_j^{N-1} e^{\frac{imdt}{2\hbar} \sum (q_{j+1} - q_j)^2} dq_j \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2\pi i \hbar dt} \right)^{N/2} \int \prod_j^{N-1} e^{\frac{im}{2\hbar dt} \sum (q_{j+1} - q_j)^2} dq_j. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Il calcolo degli integrali (gaussiani) procede come di seguito. Prima notiamo che

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{2\pi i \hbar dt}{m} \right)^{-1/2} \exp \left( \frac{mi}{2\hbar dt} (q_2 - q_1)^2 + (q_1 - q_0)^2 \right) dq_1 = \\ \left( \frac{2\pi i \hbar 2dt}{m} \right)^{-1/2} \exp \left( \frac{im}{2\hbar 2dt} (q_3 - q_2)^2 \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Poi moltiplichiamo il risultato per il fattore moltiplicativo dovuto a  $q_3$

$$\left(\frac{2\pi i\hbar dt}{m}\right)^{-1/2} \exp\left(\frac{im}{2\hbar dt}(q_3 - q_2)^2\right) \quad (2.6)$$

e di nuovo, ripetiamo l'integrazione come abbiamo appena fatto. questa volta,  $2dt$  sarà rimpiazzato da  $3dt$ . In questo modo, ricorrendo ricorsivamente a questo metodo ritroviamo l'equazione (2.3). Notiamo che nell'esponenziale compare l'azione classica,  $S[q_c] = e^{im(q-q')^2/2T\hbar}$ . La probabilità di trovare la particella in un dato punto dello spaziotempo è

$$P\delta q = |K|^2\delta q = \frac{m}{2\pi\hbar T}\delta q. \quad (2.7)$$

Chiaramente una probabilità non normalizzabile. Classicamente questa situazione corrisponde ad una particella che si trova in un dato punto nello spazio, mentre i possibili valori di  $p$  sono tutti equiprobabili. Vediamo ora come le relazioni di de Broglie siano ricavabili dall'integrale funzionale di particella libera. Per semplicità poniamo la partenza del moto nell'origine spaziotemporale.

$$\left(\frac{2\pi i\hbar T}{m}\right) \exp\frac{imq^2}{2\hbar t} \quad (2.8)$$

Notiamo che, fissato  $T$ , le parti reale e immaginaria della nostra fase per una particella libera hanno un andamento simile a  $\cos(q^2)$  e  $\sin(q^2)$  rispettivamente.

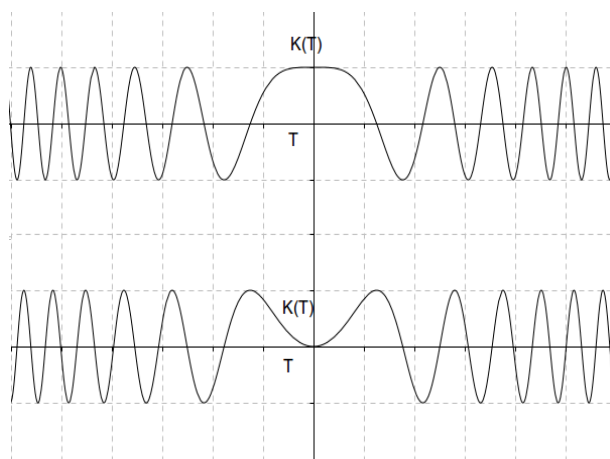


Figura 2.1: L'andamento di  $\cos(q^2)$ ,  $\sin(q^2)$ . La lunghezza d'onda diminuisce con grandi  $q$ , dove la particella si trova se ha una grande velocità (per un dato  $T$ )

$\lambda$  è quella quantità per cui

$$\begin{aligned} K(q + \lambda) - K(q) &= 2\pi \\ \frac{m}{2\hbar t}((q + \lambda)^2 - q^2) &= 2\pi \\ \frac{m}{2\hbar t}(x\lambda + \lambda^2) &\approx \frac{m\lambda x}{\hbar t} = 2\pi \end{aligned} \quad (2.9)$$

L'approssimazione vale quando  $\lambda^2 \ll \lambda x$ . troviamo

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{m(q/t)} = \frac{h}{p} \quad (2.10)$$

che è la formula di de Broglie che collega lunghezza d'onda e momento. Notiamo che, *fissato*  $q$ , l'andamento di  $K$  nel tempo ha l'andamento mostrato in figura:

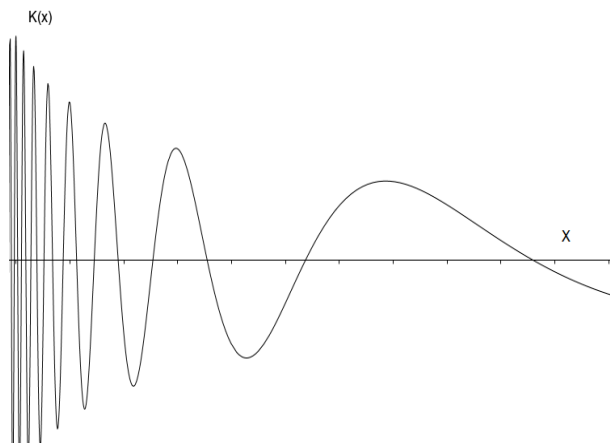


Figura 2.2:  $K$  in funzione di  $q$ , per un  $T$  fissato. la frequenza è proporzionale all'energia che le particella ha se arriva a destinazione dopo un tempo  $t$ .

$T$  è quella quantità per cui

$$\begin{aligned}
 K(t+T) - K(t) &= 2\pi & (2.11) \\
 \frac{mq^2}{2\hbar} \left( \frac{1}{t+T} - \frac{1}{t} \right) &= 2\pi \\
 \frac{mq^2}{2\hbar t^2} \left( \frac{T}{1+T/t} \right) &= 2\pi
 \end{aligned}$$

introducendo  $\omega = 2\pi/T$  e assumendo  $t \gg T$ , similmente a come fatto prima per  $\lambda$  troviamo

$$\hbar\omega = \frac{mq^2}{2\hbar t^2} \quad (2.12)$$

così otteniamo le relazioni di de Broglie

$$\begin{cases} \lambda = \hbar k \\ E = \hbar\omega \end{cases} \quad (2.13)$$

## 2.2 Oscillatore armonico

Stavolta la lagrangiana vale

$$\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2. \quad (2.14)$$

Scomponiamo ogni percorso in due componenti: il percorso seguito classicamente e la deviazione da esso,  $y(t)$ .

$$x = x_c + y \quad (2.15)$$

$$S[q_c + y] = \int_0^T \left( \frac{m}{2} \dot{x}_c^2 + \frac{m}{2} \omega^2 x_c^2 \right) dt + (\text{termini lineari in } y) + \int_0^T \left( \frac{m}{2} \dot{y}_c^2 + \frac{m}{2} \omega^2 y^2 \right) dt. \quad (2.16)$$



I termini lineari in  $y$  si annullano visto che  $x_c$  minimizza l'azione. Dato che i punti iniziale e finale di  $q$  e  $q_c$  coincidono, ne deduciamo che  $y$  deve essere un percorso chiuso, cioè  $y_{iniziale} = y_{finale} = 0$ . Ovvero dipende solo dall'intervallo temporale. La separazione dei percorsi in parte classica e deviazione è un metodo operativo utilizzato frequentemente e di grande importanza nella formulazione dell' integrale funzionale. Spesso è il fattore classico a contenere l'informazione rilevante per l'ottenimento della soluzione. Per valutare l'espressione si possono seguire due strade: Possiamo integrare nello spazio delle fasi o scomporre  $y$  in serie di Fourier:  $y = a_k \sin(k\pi t/T)$  e integrare sui coefficienti  $a_k$ . Il risultato è

$$K(q', T, q, 0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \sin(\omega T)}} e^{iS[q_c]} \quad (2.17)$$

dove l'azione classica è

$$S[q_c] = \frac{m\omega}{2\sin\omega T} [(q'^2 + q^2)\cos\omega T - 2q'q(t)]. \quad (2.18)$$

## Capitolo 3

# Due casi relativi all'elettromagnetismo

### 3.1 L'effetto Aharonov-Bohm

L'effetto Aharonov-Bohm è uno dei casi in cui la trattazione classica di un problema è insoddisfacente in modo evidente. Si tratta di un campo elettromagnetico confinato in una regione di spazio in cui una particella non ha alcuna possibilità di accedere: nonostante questo la particella risente dell'influenza del campo. Mentre classicamente il campo elettromagnetico può essere interpretato come un altro modo di modellizzare la forza di Lorentz agente sulla particella, non è così nella trattazione quantistica. L'effetto è illustrato da una variante dell'esperimento della doppia fenditura di Young, in cui in cui al centro di dello schermo con le fenditure vi è la scatola contenente la radiazione elettromagnetica e le particelle sono cariche.

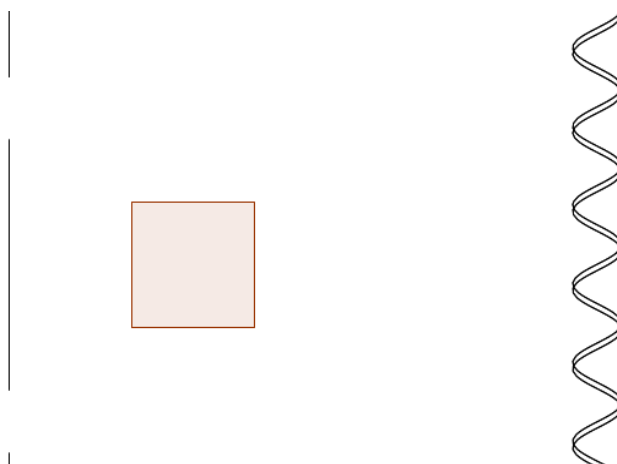


Figura 3.1: L'esperimento ideale - poi realizzato - di Aharonov-Bohm

Il pattern di interferenza cambierà con il flusso del campo elettromagnetico, nonostante le particelle non possano assolutamente entrare nella regione. Classicamente la forza nulla ha un effetto nullo, mentre quantisticamente non è così. Consideriamo due possibili percorsi che terminano in un punto sullo schermo. Siano le azioni associate  $S[q_1]$  e  $S[q_2]$ .

$$e^{iS[q_1]/\hbar} + e^{iS[q_2]/\hbar} = 1 + e^{i(S[q_2]-S[q_1])/ \hbar} \quad (3.1)$$

La fase relativa è  $\phi = (S[q_2] - S[q_1])/\hbar$ .

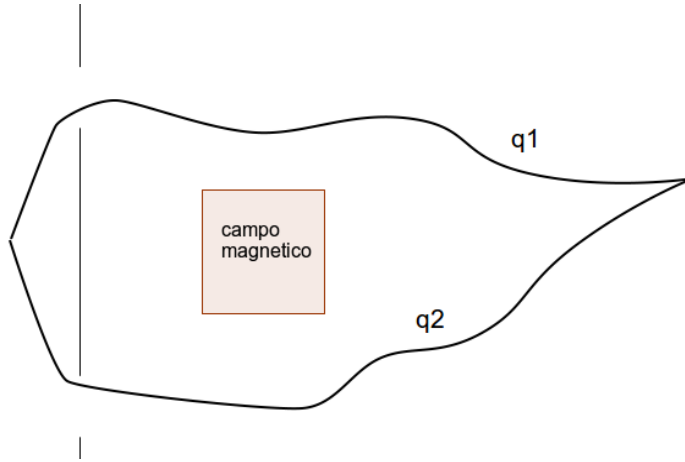


Figura 3.2: Due dei possibili percorsi che contribuiscono all'integrale funzionale.

Se nel percorso è presente un campo magnetico la lagrangiana della particella diventa:

$$L \rightarrow L' = L - \frac{e}{c} v \cdot A(q). \quad (3.2)$$

Così l'azione diventa

$$S'[q_1] = S[q_1] - \frac{e}{c} \int_{q_1} A(q) dq. \quad (3.3)$$

Fornendo un'argomentazione simile per il secondo percorso, la fase relativa diventa:

$$\begin{aligned} e^{iS'[q_1]/\hbar} + e^{iS'[q_2]/\hbar} &= e^{iS'[q_1]/\hbar} (1 + e^{i(S'[q_1] - S'[q_2])/ \hbar}) \\ &= e^{iS'[q_1]/\hbar} (1 + e^{i\phi'}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\phi' = \phi - \frac{e}{\hbar c} \left( \int_{q_2} A(q) dq - \int_{q_1} A(q) dq \right).$$

La quantità tra parentesi è un integrale di contorno:

$$\int_{q_2} A(q) dq - \int_{q_1} A(q) dq = \oint A(q) dq = \Phi. \quad (3.5)$$

Ovvero il flusso all'interno dell'area contenente il campo magnetico.

$$\phi' = \phi - \frac{e\Phi}{\hbar c}. \quad (3.6)$$

Significativamente, il cambio di fase è indipendente dai due percorsi scelti (naturalmente è relativo a due percorsi che passano attraverso fessure diverse). Il campo magnetico influenza la figura di interferenza in modo chiaro ed elegante: in assenza di esso

$$K = \int_1 e^{iS[q(t)]/\hbar} Dq + \int_2 e^{iS[q(t)]/\hbar} Dq \quad (3.7)$$

Includendo il campo magnetico

$$\begin{aligned}
K' &= K'_1 + K'_2 \\
&= \int_1 e^{i(S[q(t)] - (e/c) \int_1 A dq) / \hbar} Dq + \int_2 e^{i(S[q(t)] - (e/c) \int_2 A dq) / \hbar} Dq \\
&= e^{-ie \int_1 A dq / \hbar c} K_1 + e^{-ie \int_2 A dq / \hbar c} K_2 \\
&= e^{-ie \int_1 A dq / \hbar c} (K_1 + e^{-ie \int_2 A dq / \hbar c} K_2) \\
&= e^{-ie \int_1 A dq / \hbar c} (K_1 + e^{-ie \Phi / \hbar c} K_2)
\end{aligned}$$

Il cambio di fase totale è irrilevante. Il cambiamento nella fase relativa è di  $e\Phi/\hbar c$ . Variando questa grandezza in modo continuo vediamo cambiare il percorso di interferenza che si ripete periodicamente con frequenza 2. Per esempio se  $\Phi = \pi\hbar c/e$  interferenze costruttive e distruttive si invertono.

## 3.2 Monopoli magnetici

Ogni evidenza sperimentale conferma che la carica elettrica viene in multipli di  $e/3$ . Perché? Da un punto di vista teorico immaginare particelle di carica  $+e$ ,  $+\sqrt{2}e$ ,  $-\pi e$  è perfettamente legittimo; perlomeno, così era. Dirac nel 1931 dimostra che se esistono i monopoli magnetici allora il prodotto di una carica elettrica e di una magnetica (appunto, un monopolo) deve essere un multiplo intero di un valore fondamentale.

$$eg = \frac{\hbar c}{2} n \quad (3.8)$$

dove  $g$  è la carica magnetica. Un monopolo di carica  $g$  genera un campo magnetico

$$B = g \frac{1}{r^2} \hat{r}. \quad (3.9)$$

Che non può essere descritto da un potenziale vettore: Infatti se definiamo  $B$  come il rotore di tale potenziale, escludiamo la presenza di sorgenti, ovvero di monopoli magnetici. È un ostacolo ad una teoria dei monopoli magnetici non indifferente. Classicamente le quattro leggi di Maxwell e la legge di Lorentz descrivono la totalità dei fenomeni elettromagnetici, ma se vogliamo discutere in termini di azione dobbiamo fare ricorso al potenziale elettromagnetico  $A_\mu$ . Se poi ci spostiamo nella realtà quantistica non possiamo più evitare di fare ciò, dato che l'interazione tra campo elettromagnetico e particelle cariche viene espressa proprio attraverso  $A_\mu$ , e non in termini dei campi elettrico e magnetico separati. L'intuizione di Dirac fu di descrivere il monopolo come un solenoide cilindrico infinitamente stretto, con un'alta densità di spire e semi-infinito. Il monopolo si trova all'estremità di tale solenoide.

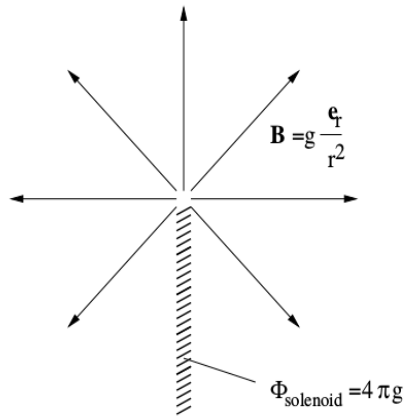


Figura 3.3: Modello per il monopolo magnetico

Ovunque tranne che all'interno del solenoide, il campo magnetico è quello di un monopolo magnetico. Il campo all'interno del solenoide è conosciuto come una "stringa di Dirac". Il flusso di ogni superficie chiusa è zero, perché il monopolo apporta un contributo uguale e opposto a quello della stringa di Dirac. Così l'unione di monopolo e stringa può essere descritta in termini di potenziale elettromagnetico. Tuttavia, come abbiamo visto con l'effetto Aharonov-Bohm, il campo all'interno del solenoide influenza le particelle che viaggiano al di fuori di esso. Descriviamo il moto di tali particelle in termini di integrali funzionali: se vogliamo un effetto nullo, bisogna che il cambio di fase relativo sia un multiplo intero dell'angolo giro.

$$-\frac{e}{\hbar c} \oint A dq = -\frac{e\Phi}{\hbar c} = \frac{4\pi e g}{\hbar c} \quad (3.10)$$

Imponendo tale quantità =  $2n\pi$ , per fare sì che la particella non sia influenzata dal campo elettromagnetico all'interno del solenoide:

$$eg = \frac{\hbar c}{2} n. \quad (3.11)$$

E dunque la carica elettrica è quantizzata: l'unità fondamentale vale

$$\epsilon = \frac{\hbar c}{2g} \quad (3.12)$$

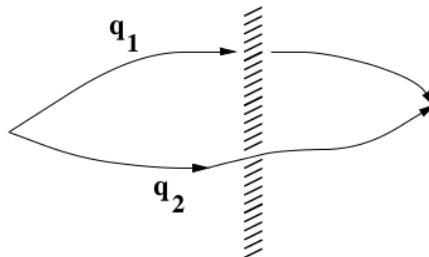


Figura 3.4: Due dei possibili percorsi che contribuiscono all'integrale funzionale.

## Capitolo 4

# Statistica delle particelle

Vedremo come l'integrale funzionale ci mostra una differenza nella statistica seguita dalle particelle in due e in tre dimensioni. Il punto di partenza è una domanda apparentemente ben lontana da questo argomento. Due particelle indistinguibili, per le quali è impossibile occupare lo stesso punto dello spaziotempo, si trovano a  $t = 0$  nelle posizioni  $q_1(0)$ ,  $q_2(0)$ . Dopo un tempo  $T$  il sistema torna allo stato iniziale: qual è l'integrale funzionale associato a questo processo? Come vedremo, la risposta ha implicazioni diverse in tre dimensioni piuttosto che in due, e curiosamente il caso meno complesso è il primo.

### 4.1 In tre dimensioni

Secondo la descrizione che l'integrale funzionale dà del problema,

$$K(q_1(0), q_2(0), T, q_1(T), q_2(T), 0) = \int e^{S[q_1(t), q_2(t)]} \quad (4.1)$$

Se le particelle non sono identiche, matematicamente il fatto che il sistema ritorni allo stato iniziale si formalizza come  $q_1(T) = q_1(0)$ ,  $q_2(T) = q_2(0)$ . Ma dato che lo sono, possiamo anche scrivere  $q_1(T) = q_2(0)$ ,  $q_2(T) = q_1(0)$ . In altre parole, abbiamo due classi di percorsi: quelli in cui ciascuna particella ritorna alla propria posizione originaria, e quelli in cui le particelle si scambiano di posto. Le due possibilità sono illustrate in figura.

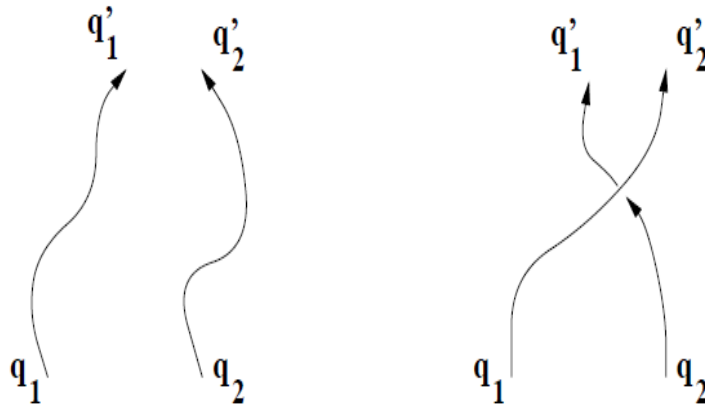


Figura 4.1: Le due classi di percorsi.

Si richiede che sia impossibile per le particelle trovarsi nello stesso punto,  $q_1(t) \neq q_2(t) \forall t$ . Grazie a questa condizione escludiamo il caso particolare in cui le particelle convergono nello stesso punto in un qualsiasi momento. Questo caso è problematico perché topologicamente entrambi i casi sono lo stesso se avviene questa sovrapposizione, e possiamo deformare un percorso del primo tipo nel secondo passando da questo caso intermedio. È conveniente, invece di costruire la nostra argomentazione in termini di  $q_1$ ,  $q_2$ , concentrarci su  $q = q_2 - q_1$ . La nuova variabile contiene tutta l'informazione rilevante al problema. In tal modo:

- $q_1(T) = q_1(0), q_2(T) = q_2(0)$  diventa  $q(T) = q(0)$ ;
- $q_1(T) = q_2(0), q_2(T) = q_1(0)$  diventa  $q(T) = -q(0)$ ;
- $q_1(t) \neq q_2(t) \forall t$  diventa  $q(t) \neq 0 \forall t$ .

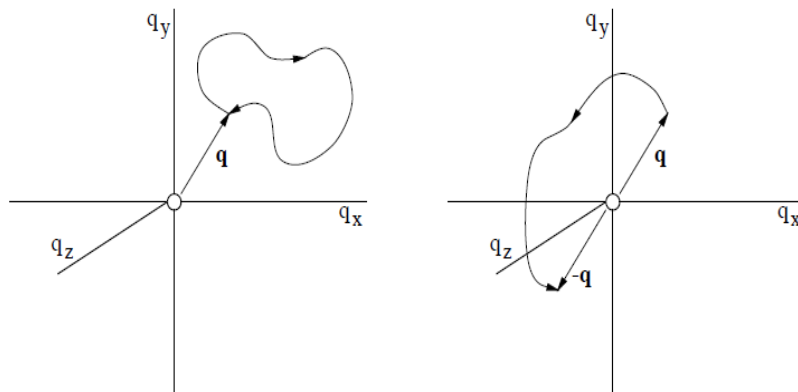


Figura 4.2: Le due classi di percorsi nello spazio di  $q = q_2 - q_1$ . dato che  $q = -q$ , entrambi i percorsi sono chiusi.

Dato che le particelle si muovono in tre dimensioni, anche  $q$  appartiene ad  $\mathbb{R}^3$ . Abbiamo escluso l'origine, quindi è più corretto  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ . Però abbiamo visto che  $q$  e  $-q$  sono equivalenti (rappresentano lo stesso

stato del sistema), allora lo spazio diventa  $(\mathbb{R}^3 - \{0\})/\mathbb{Z}^2$ . Il fatto che esistano due classi di percorsi si traduce a livello di insieme nel fatto che  $(\mathbb{R}^3 - \{0\})/\mathbb{Z}^2$  non è semplicemente connesso. Infatti parliamo di insieme semplicemente connesso quando ogni percorso chiuso è topologicamente banale, ovvero può essere deformato nel percorso banale  $q(t) = 0$ . Invece il nostro insieme è doppiamente connesso; ovvero concatenando due percorsi chiusi non banali otteniamo un percorso banale. È il momento di introdurre l'integrale funzionale nel problema.

$$K(q, T, q, 0) = \int_{\text{diretti}} e^{iS[q(t)]} dq + \int_{\text{scambio}} e^{iS[q(t)](t)} dq = K(q, T, q, 0) + K(-q, T, q, 0). \quad (4.2)$$

Ognuno di questi due termini è a sua volta un integrale funzionale che descrive le singole particelle. Dato che, come abbiamo visto, l'integrale funzionale soddisfa l'equazione di Schrödinger anche una combinazione lineare dei due termini. In particolare: (da qui in poi per semplificare la lettura sottintendiamo il punto di partenza e intervallo temporale dell'integrale funzionale, che sono sempre  $(T, q, 0)$ . per esempio  $K(q) \rightarrow K(q, T, q, 0)$ .)

$$K \rightarrow K^\phi(q, T) = K(q) + e^{i\phi} K(-q). \quad (4.3)$$

Una generalizzazione arbitraria, ma che come vedremo si rivelerà molto utile. Eliminando la condizione  $q(T) = q(0)$  e identificando con un generico  $q'$  il punto di arrivo del sistema

$$K^\phi(q') = K[q'] + e^{i\phi} K(-q'). \quad (4.4)$$

Variando  $q'$  in modo continuo fino a raggiungere  $-q'$ ,

$$K^\phi(-q') = K(-q') + e^{i\phi} K(q'). \quad (4.5)$$

Dato che le particelle sono identiche le due espressioni precedenti rappresentano la stessa cosa. In quanto ampiezze per lo stesso processo fisico, possono differire solo per una fase:

$$K^\phi(q') = e^{i\phi} K^\phi(-q'). \quad (4.6)$$

Combiniamo le tre equazioni precedenti:

$$K(q') + e^\phi K(-q) = e^{i\alpha} K(-q') + e^{i\phi+\alpha} K(q'). \quad (4.7)$$

Da cui, eguagliando i coefficienti

$$\alpha = \phi = n\pi. \quad (4.8)$$

Che ha due soluzioni fisiche:  $\phi = 0, \phi = \pi$ . sostituendo questi due risultati in (4.6), Se  $\phi = 0$

$$K = K_{\text{diretti}} + K_{\text{scambio}}. \quad (4.9)$$

Il caso in cui le ampiezze dirette e di scambio si sommano, come è proprio dei bosoni. Se  $\phi = \pi$

$$K = K_{\text{diretti}} - K_{\text{scambio}} \quad (4.10)$$

Le ampiezze di scambio contribuiscono con un segno meno, come è proprio dei fermioni.

## 4.2 In due dimensioni

Vediamo lo stesso problema ma in due dimensioni. Di nuovo utilizziamo

$$q = q_2 - q_1 \quad (4.11)$$



L'integrale funzionale si separa in classi topologicamente distinte, ma ora sono in numero infinito: concatenare due percorsi del tipo  $q \rightarrow -q$ , infatti, non ci consegna un percorso topologicamente banale, ma uno appartenente ad una terza classe di percorsi, in cui le particelle compiono un giro completo l'una intorno all'altra prima di tornare al punto di partenza. Questo si traduce nello spazio di  $q$  in un giro completo intorno all'origine, che non può essere deformato nel percorso banale.

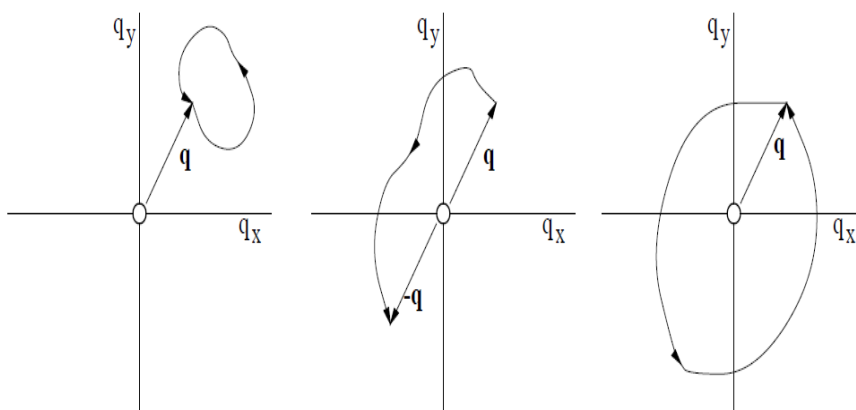


Figura 4.3: Le prime tre classi di percorsi. In due dimensioni sono presenti infinite classi.

È utile visualizzare cosa sta accadendo utilizzando un asse temporale:

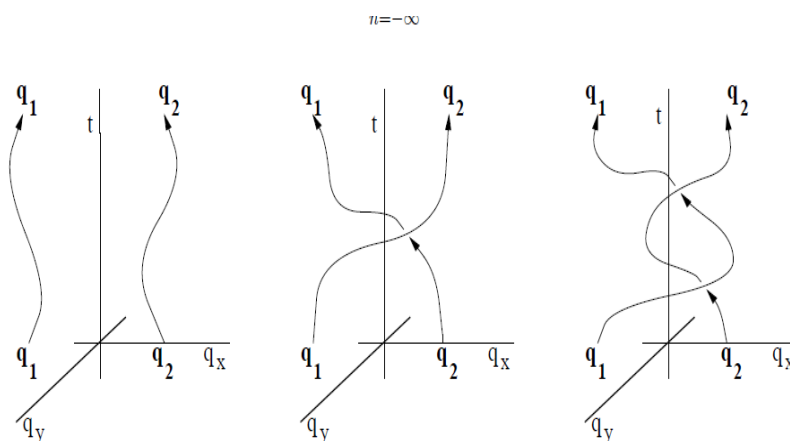


Figura 4.4: gli stessi percorsi di (4.3) ma rappresentando anche l'asse temporale.

Ogni successivo scambio produce una diversa classe di percorsi, e corrisponde ad un ulteriore mezzo giro intorno all'origine. Se denotiamo ogni percorso con le sue coordinate polari

$$K(q) \rightarrow K(q, \theta) \tag{4.12}$$

Allora ad ogni aggiunta di  $n\pi$  otteniamo l'  $n$ -esima classe di percorsi:

$$K(q, \theta) = \sum_n \int_n e^{iS[q(t)]} Dq \quad (4.13)$$

$$K(q, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n(q, \theta).$$

Di nuovo generalizziamo l'integrale moltiplicando i membri per una fase:

$$K(q', \theta') = \sum C_n K_n(q, \theta). \quad (4.14)$$

Eliminando la condizione per cui il punto di arrivo coincide con quello di partenza e indicando il nuovo punto di arrivo con  $q'$

$$K(q', \theta') = \sum C_n K_n(q', \theta'). \quad (4.15)$$

Facciamo variare con continuità  $\theta' \rightarrow \theta' + \pi$

$$K(q', \theta' + \pi) = \sum C_n K_n(q', \theta' + \pi). \quad (4.16)$$

$K(q', \theta')$  rappresenta la stessa quantità di  $K(q', \theta' + \pi)$ , quindi i due possono solo differire di una fase:

$$K(q', \theta' + \pi) = e^{i\phi} K(q', \theta'). \quad (4.17)$$

Ma come è evidente  $K_n(q', \theta' + \pi) = K_{n+1}(q', \theta')$ . Combinando le due osservazioni vediamo che, uguagliando i coefficienti

$$C_n = e^{i\phi} C_{n-1}. \quad (4.18)$$

Così se per esempio scegliamo  $C_0 = 1$

$$K = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\phi} K_n. \quad (4.19)$$

Che è l'equivalente in due dimensioni del nostro risultato precedentemente ottenuto. Abbiamo ogni classe di percorsi contribuisce con una fase relativa rispetto a quella immediatamente precedente di  $\phi$ , ma su questa grandezza non c'è alcuna restrizione. Se, per esempio  $\phi = 0, \phi = \pi$  abbiamo il caso rispettivamente, di bosoni o fermioni. Le particelle di fuori di questo caso generale sono conosciute come "Qualunquoni" e la statistica cui obbediscono è detta statistica frazionaria.

## Capitolo 5

# Operatore densità

Vediamo ora uno strumento matematico che ha una connessione inaspettata con il nostro integrale funzionale.

### 5.1 Stati puri e non

Si supponga che uno sperimentatore prepari un fascio di elettroni in modo che il loro stato di spin sia

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle\uparrow| + \langle\downarrow|) \quad (5.1)$$

e poi un altro fascio in cui il metà degli elettroni è nello stato  $\langle\uparrow|$  e metà nello stato  $\langle\downarrow|$ . Ci poniamo la domanda: cosa distingue i due fasci? Evidentemente non il valore della componente  $z$  dello spin: per entrambe la misura sperimentale è  $\langle\uparrow|$  metà delle volte e  $\langle\downarrow|$  l'altra metà. Ciò che ci consente di distinguere i due fasci è il misurarne la componente  $x$  dello spin. Infatti gli elettroni del primo sono in un autostato per l'operatore di spin  $s_x$  mentre ciò non vale per quelli del secondo, per i quali otterremo uno dei due autostati nel 50% dei casi e l'altro autostato nell'altro 50%. Il non determinismo è dovuto alla semplice teoria della probabilità e non ad un effetto quantistico. Quindi, oltre l'apparente similitudine data dalla misura di  $s_z$ , i due casi sono fondamentalmente differenti. Diremo sistemi *puri* quelli formati da sottosistemi tutti nello stesso stato quantistico, mentre quelli per cui non è così (come nel secondo dei nostri fasci di elettroni) saranno *misti*.

### 5.2 L'operatore densità

È chiaro che per un sistema misto il valore di aspettazione di un operatore dipendendo dallo stato del sistema, è la media degli autovalori pesata sulle probabilità che il sistema si trovi in quell' autostato:

$$\langle A \rangle = \sum_i w_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle \quad (5.2)$$

da cui

$$\begin{aligned}
 \langle A \rangle &= \sum_i w_i \langle \psi_i | A | \phi_i \rangle \\
 &= \sum_i \sum_j w_i \langle \phi_i | A | j \rangle \langle j | \phi_i \rangle \\
 &= \sum_i \sum_j \langle j | w_i | \phi_i \rangle \langle \phi_i | A | j \rangle \\
 &= \text{Tr} \left( \sum_i w_i | \phi_i \rangle \langle \phi_i | A \right)
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

da cui definiamo l'operatore densità

$$\rho = \sum_i w_i | \phi_i \rangle \langle \phi_i | \tag{5.4}$$

Dove la sommatoria è fatta sui possibili stati. Notiamo che  $\rho$  gode di una particolare proprietà se applicato a sistemi in uno stato puro. Se  $|\phi\rangle$  è uno stato puro è sempre possibile prendere una base che lo contenga come elemento  $i$ -esimo e allora la matrice associata a  $\rho$  è zero ovunque tranne che nell'elemento  $\rho_{i,i}$ . Allora ovviamente

$$\rho^2 = \rho. \tag{5.5}$$

Questo è meno ovvio su una qualsiasi base, dove  $\rho$  potrebbe non essere neppure diagonale, ma l'equazione precedente rimane vera. Per uno stato misto, per esempio uno composto da due stati puri,  $\rho$  non sarà diagonale neppure se la base scelta è composta dai due stati, e l'equazione (5.5) non vale.

### 5.3 Esempio

Utilizziamo come esempio un raggio di luce che viaggia lungo l'asse  $z$ . Definiamo come base per lo stato di polarizzazione dei fotoni

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  polarizzazione lungo  $x$   
 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  polarizzazione lungo  $y$

così esprimiamo uno stato generico come

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

Dove

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{5.7}$$

La nostra matrice diventa (per gli stati puri)

$$\rho = \begin{pmatrix} aa^* & ab^* \\ ba^* & bb^* \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

Esaminiamo ora i singoli casi.

Polarizzazione  $x$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Polarizzazione  $y$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Polarizzazione a  $45^\circ$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Polarizzazione a  $135^\circ$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

50% dei fotoni  $x$ -polarizzati 50%  $y$ -polarizzati:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

50% dei fotoni  $45^\circ$ -polarizzati 50%  $135^\circ$ -polarizzati:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

Notiamo che gli ultimi due casi hanno la stessa matrice di densità. Ciò è un indizio di una similitudine tra i due casi: per esempio, se i due raggi attraversassero un polarizzatore  $x$ , in entrambi i casi il 50% dei fotoni verrebbe assorbito.

## 5.4 Equazione differenziale dell'operatore densità

Sappiamo dalla meccanica statistica che la probabilità che un sistema sia in uno stato  $|\phi_i\rangle$  è

$$w_i = \frac{e^{-\beta E_i}}{\sum_i e^{-\beta E_i}}. \quad (5.15)$$

La matrice diventa

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_n w_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n| \\ &= \frac{1}{\sum_i e^{-\beta E_i}} \sum_n e^{-\beta E_n} |\phi_n\rangle \langle \phi_n| \\ &= \frac{e^{-\beta H}}{Z}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Dato che

$$\sum_i e^{-\beta E_i} = \text{Tr}(e^{-\beta H}) \quad (5.17)$$

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{\text{Tr}(e^{-\beta H})}. \quad (5.18)$$

Ignorando il fattore di normalizzazione

$$\rho = e^{-\beta H}. \quad (5.19)$$

Utilizzando come base gli autovettori di  $H$

$$\rho_{ij} = \delta_{ij} e^{-\beta E_i} \quad (5.20)$$

$$-\frac{\partial \rho_{ij}}{\partial \beta} = \delta_{ij} E_i e^{-\beta E_i} = E_i \rho_{ij} \quad (5.21)$$

$$-\frac{\partial \rho}{\partial \beta} = H \rho. \quad (5.22)$$

Questa è l'equazione che identifica  $\rho$ .

## 5.5 Legame con l'integrale funzionale

Definendo  $u = \beta \hbar$ , che ha le dimensioni di un tempo, l'equazione precedente diventa

$$\hbar \frac{\partial \rho(u)}{\partial u} = -H \rho(u). \quad (5.23)$$

Con soluzione

$$\rho(u) = e^{-Hu/\hbar}. \quad (5.24)$$

Suddividiamo il "tempo"  $u$  in intervalli di lunghezza  $\epsilon$ . Esprimendo la matrice densità nella rappresentazione spaziale la soluzione diventa

$$\begin{aligned} \rho(u) &= e^{-H\epsilon/\hbar} e^{-H\epsilon/\hbar} \dots e^{-H\epsilon/\hbar} \\ \rho(u) &= \rho(\epsilon) \rho(\epsilon) \dots \rho(\epsilon) \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\rho(x, x', u) = \int \dots \int \rho(x_0, x_1, \epsilon) \rho(x_1, x_2, \epsilon) \dots \rho(x_{N-1}, x_N) dx_1 \dots dx_{N-1}. \quad (5.26)$$

Che presenta una chiara similitudine con l'equazione (1.21). La particella viaggia da  $x_0$  a  $x_N$  attraverso gli step intermedi  $x_1, x_2, \dots$  che definiscono un percorso su cui avviene l'integrale. L'esponente del  $\rho$  finale è dato dalla somma dei contributi di ogni possibile percorso, ovvero su ogni possibile valore di  $x_i$ . Quando  $\epsilon \rightarrow 0$  il numero di integrali svolti approssima infinito. Notiamo che, anche se a  $\rho$  manca un'unità immaginaria per approssimare al primo ordine  $e^{-iS[x]/\hbar}$ , i percorsi che contribuiscono di più sono comunque quelli che minimizzano l'esponentiale.

## Capitolo 6

# Integrale funzionale euclideo

Tra le applicazioni dell' integrale di cammino una è particolarmente utile nella meccanica statistica. Come vedremo la funzione di partizione, l'oggetto matematico centro di tutta la meccanica statistica, può essere scritto come un integrale funzionale. Vediamo ora la relazione tra i due. La funzione di partizione è

$$Z = \sum_j e^{-\beta E_j} \quad (6.1)$$

dove  $\beta = 1/(k_b T)$ .

$$Z = \sum_j \langle j | e^{-\beta H} | j \rangle \quad (6.2)$$

Richiamiamo la definizione di propagatore:

$$K(q', T, q, 0) = \langle j | e^{-HT/\hbar} | j \rangle \quad (6.3)$$

dove per semplicità abbiamo posto  $T_{iniziale} = 0$ . Supponiamo che  $T$  sia un parametro immaginario puro,  $T = -i\beta\hbar$ . allora

$$\begin{aligned} K(q', -i\beta\hbar, q, 0) &= \langle q' | e^{-iH(-i\beta)} | q \rangle \\ &= \langle q' | e^{-\beta H} \sum_j | j \rangle \langle j | | q \rangle \\ &= \sum_j e^{-\beta E_j} \langle j | q \rangle \langle q' | j \rangle. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Ora poniamo  $q' = q$  e integriamo su  $q$

$$\begin{aligned} \int K(q, -i\beta\hbar, q, 0) \mathcal{D}q &= \sum_j e^{-\beta E_j} \langle j | \int | q \rangle \langle q | dq | j \rangle \\ &= \sum_j e^{-\beta E_j} \langle j | j \rangle \\ &= Z. \end{aligned} \quad (6.5)$$

il propagatore valutato a  $T = -i\beta\hbar$  è legato alla funzione di partizione. Esplicitando l'integrale funzionale

$$K(q', T, q, 0) = \int \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_0^T \left( \frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q) \right) dt \right] Dq(t). \quad (6.6)$$

Dove il primo integrale è su tutti i percorsi da  $q$  a  $q'$  nel tempo  $T$ . Di nuovo  $q = q', T = -i\beta\hbar$

$$K(q, -i\beta\hbar, q, 0) = \int \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_0^{-i\beta\hbar} \left( \frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q) \right) dt \right] Dq(t) \quad (6.7)$$

Facciamo la sostituzione  $\tau = it$  che implica  $\dot{q} = i \frac{dq}{d\tau}$  e  $dt = \frac{d\tau}{i}$ .

$$K(q, -i\beta\hbar, q, 0) = \int Dq(\tau) \exp - \int_0^\beta d\tau \left( \frac{m}{2} \left( \frac{dq}{d\tau} \right)^2 + V(q) \right). \quad (6.8)$$

L'integrale è ora su tutti i percorsi tali che  $q(0) = q(\beta\hbar) = 0$ . Il risultato è detto "integrale euclideo", ed associa a ciascun percorso un peso  $e^{-S_E}$  dove  $S_E$  è l'azione euclidea, ovvero l'azione con il potenziale cambiato di segno. Il potenziale euclideo ha molti usi, uno dei quali è quello di trovare l'energia di ground state del sistema, dato che nel limite  $\beta \rightarrow \infty$  la funzione di partizione è dominata dallo stato di energia minima. Nel prossimo capitolo utilizzeremo questo strumento per risolvere un problema intrinseco della teoria perturbativa.



# Capitolo 7

## Istantoni

### 7.1 Problemi della trattazione perturbativa

Nella meccanica quantistica, certi aspetti di un problema possono rimanere irrisolti nella trattazione perturbativa. Si consideri il potenziale

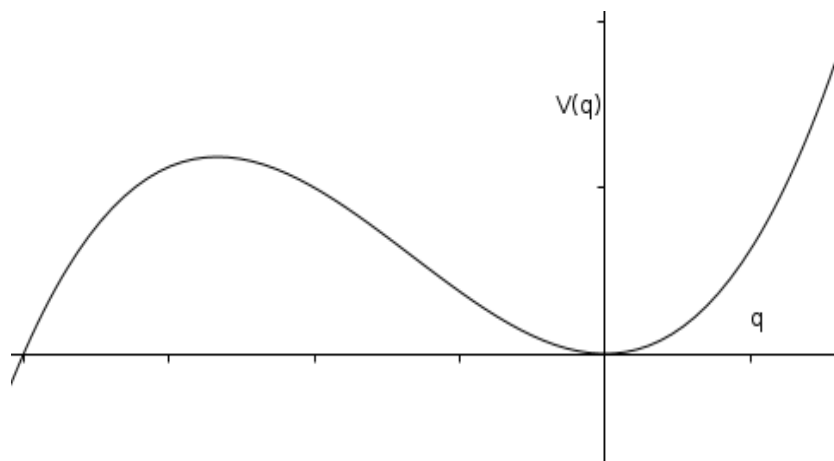


Figura 7.1:  $V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2q^2 + \lambda q^3$

Possiamo calcolare le correzioni al potenziale armonico di energia e funzioni d'onda che approssimano il problema attorno al punto  $q = 0$ , senza mai accorgerci di un serio problema nel modello: il nostro potenziale non ha alcun ground state. L'energia potenziale non ha alcun minimo e la trattazione perturbativa ignora completamente questo fatto. Un secondo esempio è dato dal potenziale in figura (7.2)

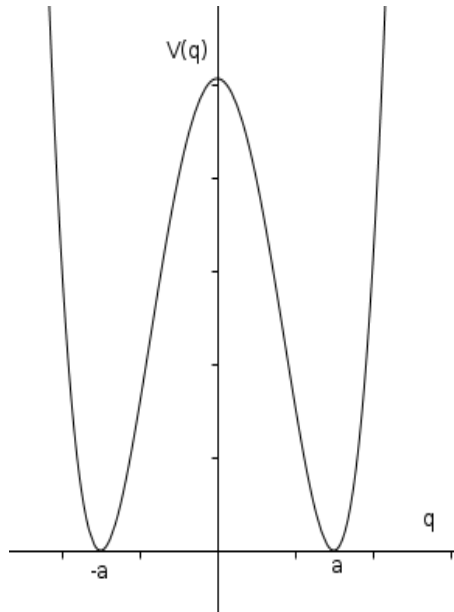


Figura 7.2:  $V(q) = \frac{\lambda}{4!}(q^2 - a^2)^2$ .

Ci sono due stati ad energia minima. Possiamo sviluppare il potenziale in uno dei due minimi fino all'ordine desiderato; non vedremo mai l'altro minimo. Si potrebbe pensare che lo stato ad energia minima - e anche tutti quelli successivi - siano doppiamente degeneri. Vedremo che non è così: esiste uno splitting energetico, dovuto all'effetto tunnel, che separa i due stati candidati a minimo energetico. Questo splitting è invisibile alla teoria perturbativa. Per vederlo è necessario utilizzare un'approssimazione conosciuta come *metodo di steepest descent*.

## 7.2 Metodo di steepest descent

Consideriamo l'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-S(q)/\hbar}. \quad (7.1)$$

Dove  $S$  è una funzione con molti minimi locali.

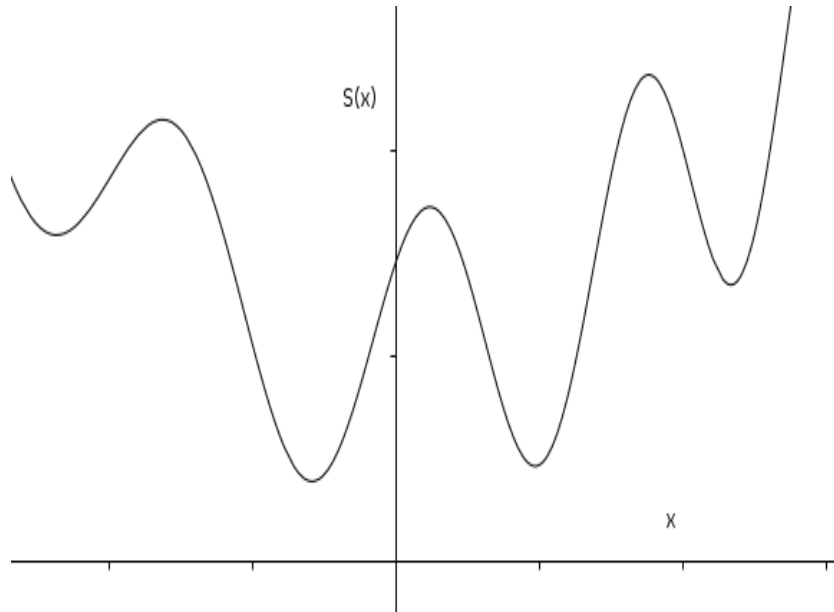


Figura 7.3: una funzione dai molti minimi.

Nei minimo  $q_i$  sviluppiamo  $S$

$$S(x) \approx S(q_i) + \frac{1}{2}(x - x_i)^2 \ddot{S}(q_i). \quad (7.2)$$

Quando  $\hbar \rightarrow 0$  l'integrale sarà dominato dai minimi della funzione.

$$I \approx I_1 + I_2 + I_3 + \dots \quad (7.3)$$

dove

$$\begin{aligned} I_i &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[S(q_i) + \frac{1}{2}(q - q_i)^2 \ddot{S}(q_i)]/\hbar} dx \\ &= \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\ddot{S}(q_i)}} e^{-S(q_i)/\hbar}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

### 7.3 Applicazione al problema

Applichiamo ora il metodo al nostro problema, dove ad  $q$  corrisponde il percorso scelto, e la traiettoria classica sarà il corrispettivo di  $q_i$  nella sezione precedente, l'estremo di  $S(q)$ . Sia  $q_c(\tau)$  la soluzione classica al problema

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} q &= \frac{\partial V(q)}{\partial q} \\ q(-\beta\hbar/2) &= q \\ q(\beta\hbar/2) &= q'. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Se scriviamo  $q = q_c + y$  l'azione diventa

$$S_E[q_c + y] = \int_{-\beta\hbar/2}^{\beta\hbar/2} \left( \frac{\dot{q}_c^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} + yq_c + V(q_c + y) \right). \quad (7.6)$$

Se espandiamo il potenziale

$$V(q_c + y) = V(q_c) + yV'(q_c) + \frac{1}{2}y^2V''(q_c) + \dots \quad (7.7)$$

otteniamo

$$= \int_{-\beta\hbar/2}^{\beta\hbar/2} \left( \frac{\dot{q}_c^2}{2} + V(q_c) \right) d\tau + \int (\text{termini lineari in } y) + \int_{-\beta\hbar/2}^{\beta\hbar/2} \left( \frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{1}{2}y^2V''(q_c) \right) d\tau + \dots \quad (7.8)$$

I termini lineari in  $y$  si annullano dato che  $q_c$  estremizza l'azione. Eliminando questi e quelli di ordine superiore a  $y^2$  il propagatore diventa

$$K = e^{-S_E/\hbar} \int e^{-\int (\frac{1}{2}\dot{y}^2 + \frac{1}{2}V''(q_c)y^2) d\tau/\hbar} Dy. \quad (7.9)$$

Dove abbiamo la condizione  $y(-\beta\hbar/2) = y(\beta\hbar/2) = 0$ .

## 7.4 Istantoni in un potenziale con due minimi

Vedremo come la nostra trattazione ci porterà ad una correzione non perturbativa dell'energia, che elimina la degenerazione del ground state. Vogliamo valutare l'integrale

$$K_E = \int_{q, -\beta\hbar}^{q', \beta\hbar} e^{-S_E/\hbar} \mathcal{D}q \quad (7.10)$$

$$S_E = \int \left( \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{\lambda}{4!}(q^2 - a^2)^2 \right) d\tau$$

per  $\beta \rightarrow \infty$ .

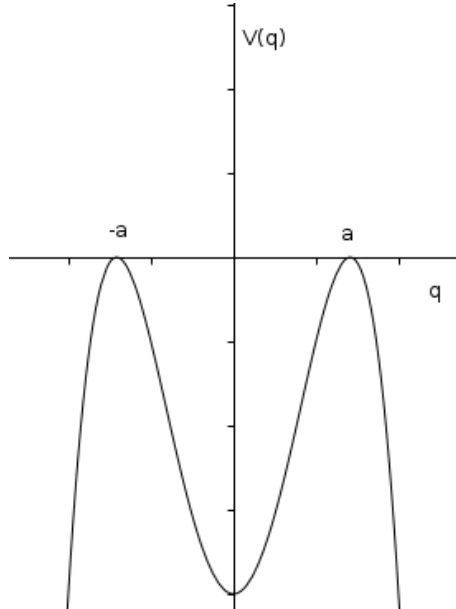


Figura 7.4:  $V(q) = -\frac{\lambda}{4!}(q^2 - a^2)^2$ , il potenziale per l'azione euclidea.

Esaminiamo le possibili soluzioni classiche. Abbiamo come condizioni su di esse  $q = \pm a, q' = \pm a$ . Se  $q' = q$  una soluzione banale è  $q(\tau) = \text{cost.} = q(0)$ ; in questo caso il minimo in  $-a$  non influisce sullo studio del problema e la trattazione perturbativa è corretta. Ma cosa succede se, invece,  $q' = -q$ ? Allora la soluzione più semplice consiste Nella particella, posizionata inizialmente in, per esempio,  $-a$ , che dopo un tempo  $t$ , infinito nel limite  $\beta\hbar \rightarrow \infty$  si sposta con un'oscillazione in  $a$ . Questa transizione, che avviene in un tempo infinitesimo se confrontato con  $\beta\hbar$ , è nota come istantone. L'istantone fa da "mediatore" tra i due stati di minimo. Il sistema è in uno stato di ground sempre tranne che per un breve lasso di tempo - un istante. Ponendo  $E = 0$  abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\dot{q}^2 &= V(q) & (7.11) \\ \frac{dq}{d\tau} &= \pm \sqrt{\frac{\lambda}{4!}(q^2 - a^2)}.\end{aligned}$$

C'è una famiglia di soluzioni che risolvono l'equazione:

$$q(\tau) = a \tanh \frac{\omega}{2}(\tau - \tau_0). \quad (7.12)$$

Dove

$$\omega = \sqrt{\frac{\lambda a^2}{3}}. \quad (7.13)$$

Vogliamo calcolare l'azione associata a tale percorso. Ponendo  $E = 0$

$$S^{ist} = \int \left( \frac{\dot{q}^2}{2} + V(q) \right) d\tau = 2 \int V(q) d\tau. \quad (7.14)$$

Utilizzando (7.12) il risultato è

$$S^{ist} = \frac{2a^3}{3} \sqrt{\frac{\lambda}{3}} \quad (7.15)$$

Esaminiamo ora altre possibili soluzioni. Dopo essersi spostata da  $a$  a  $-a$ , la particella può compiere la stessa oscillazione al contrario (anti-istantone) e tornare indietro. l'accoppiamento di istantone e anti-istantone lascia la particella nella posizione di partenza, quindi nulla impedisce che ad essa possa seguire una seconda coppia, poi una terza, eccetera. Quindi le soluzioni sono del tipo:  $q = \text{cost.}$ ,  $q = IA$ ,  $q = IAIA$ , eccetera per  $q' = q$ , mentre per  $q' = -q$  abbiamo soluzioni del tipo  $q = I$ ,  $q = IAI$ ,  $q = IAI AI$ , eccetera.

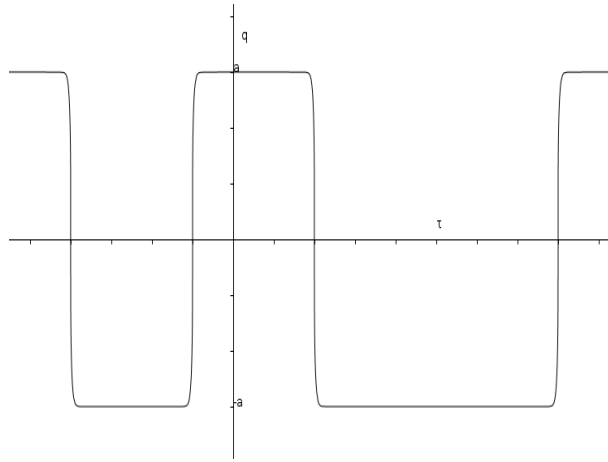


Figura 7.5: Più istantoni, separati da intervalli temporali di grandezza molto maggiore della loro durata temporale  $\beta\hbar$ , che si susseguono.

Utilizzando il metodo di steepest descent, associamo ad ogni percorso classico - minimo dell' azione - un' ampiezza di probabilità. Se  $q = q'$

$$K = K_0 + K_2 + K_4 + \dots \quad (7.16)$$

Il pedice intero pari indica il numero di istantoni/anti-istantoni che vengono compiuti per il percorso classico intorno al quale expandiamo. Se  $q' \neq q$ . I pedici sono dispari. Vediamo ora come calcolare i singoli termini.

$K = 0 : q_c = a$ : questo è il caso in cui la modellizzazione ad oscillatore armonico non necessita di correzioni, e possiamo scrivere

$$K_0 = \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} e^{-\beta\omega/2} \quad (7.17)$$

Dove  $\omega = (\lambda a^2/3)$ . Da ciò possiamo estrarre l'energia di ground state. Troviamo  $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}(1 + o(\lambda\hbar^2))$ . Come ci aspettavamo il nostro modello di oscillatore armonico non necessita di correzioni in questo caso.

Vediamo ora i termini successivi, il cui calcolo è meno banale. Ci concentriamo inizialmente su  $q_c = AI$ . Poniamo l'origine degli assi in mezzo ad  $A$  ed  $I$  e separiamo l'azione nelle parti relative ai due semiassi.

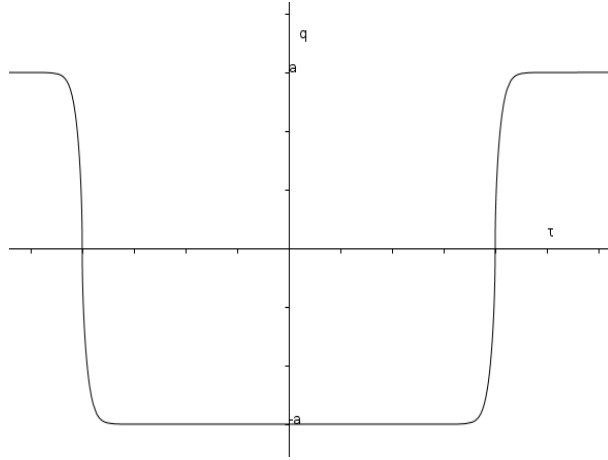


Figura 7.6: suddividiamo l'asse temporale in due metà, una contenente l'istantone e una l'anti-istantone

Grazie alla regola data per due eventi in successione, possiamo fattorizzare l'integrale in due parti. La prima, relativa al semiasse negativo, contiene l'istantone, la seconda, relativa al semiasse positivo, l'anti-istantone.

$$K_2 = \int_{K_2} e^{-S[q]/\hbar} \mathcal{D}q = \int_{1,K_2} e^{-S[q]/\hbar} \mathcal{D}q \cdot \int_{2,K_2} e^{-S[q]/\hbar} \mathcal{D}q. \quad (7.18)$$

Moltiplichiamo e dividiamo per  $K_0 = \int_{I,K_0} e^{iS_I[q]} \mathcal{D}q \cdot \int_{II,K_0} e^{iS_{II}[q]} \mathcal{D}q$ :

$$K_2 = \frac{\left( \int_{1,K_2} e^{-S[q]/\hbar} \mathcal{D}q \cdot \int_{II,K_0} e^{-S[q]/\hbar} \mathcal{D}q \right) \left( \int_{I,K_0} e^{-S[q]/\hbar} \mathcal{D}q \cdot \int_{II,K_2} e^{-S[q]/\hbar} \mathcal{D}q \right)}{K_0}. \quad (7.19)$$

La prima parentesi e la seconda non sono altro che le l'integrale funzionale per un unico istantone/anti-istantone, ovvero  $K_1$ .

$$K_2 = \frac{K_1^2}{2K_0}. \quad (7.20)$$

Per semplificare l'espressione separiamo i percorsi in  $q = q_c + y$ , percorso classico più deviazione. Nel caso di  $K_0$  il percorso classico è  $x_c = 0$ , mentre per  $K_1$  è dato da (7.12), per il quale abbiamo calcolato l'azione associata ((7.15)). Calcoliamo sia  $K_0$  che  $K_1$  in funzione di  $q_c + y$

$$K_0 = \int e^{-S[0+y]/\hbar} \mathcal{D}q = \int e^{-S[y]/\hbar} \mathcal{D}y \quad (7.21)$$

$$K_1 = \int e^{-S[q_{ist}+y]/\hbar} \mathcal{D}q = e^{-S_{ist}/\hbar} \int e^{-S[y]/\hbar} \mathcal{D}q \quad (7.22)$$

Usando l'espressione precedente, (7.17), e integrando sul possibile punto di separazione tra  $I$  e  $II$  (ciò da il coefficiente  $\beta^2/2$ ) otteniamo

$$K_2 = e^{-2S_{ist}/\hbar} \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} e^{-\beta\omega/2} \frac{\beta^2}{2} R^2 \quad (7.23)$$

dove  $R$  è il rapporto tra il contributo all' integrale funzionale dato da tutte le deviazioni dal percorso classico (7.12) e il contributo all'integrale funzionale di tutte le deviazioni dal percorso classico  $q_c(t) = 0$ . poniamo per semplicità di lettura

$$\sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} e^{-\beta\omega/2} = s \quad (7.24)$$

Allo stesso modo troviamo

$$\begin{aligned}
K_{2n} &= e^{-2nS_{ist}/\hbar} s \frac{\beta^2}{2n!} R^2 & (7.25) \\
K_{tot} &= s \left( 1 + \frac{(\beta R e^{[-S_{ist}/\hbar]})^2}{2!} \frac{(\beta R e^{[-S_{ist}/\hbar]})^4}{4!} + \dots \right) \\
K_{tot} &= s \cosh(\beta R e^{-S_{ist}/\hbar}) \\
K_{tot} &= s \left( e^{\beta R e^{-S_{ist}/\hbar}} + e^{-\beta R e^{-S_{ist}/\hbar}} \right)
\end{aligned}$$

Ora è arrivato il momento di calcolare la differenza energetica tra i due stati di minimo. L'integrale di cammino euclideo può essere espresso come in (6.5)

$$K = \sum_n \langle q'|n \rangle \langle n|q \rangle e^{-\beta E_n} = \langle q'|0 \rangle \langle 0|q \rangle e^{-\beta E_0} + \langle q'|1 \rangle \langle 1|q \rangle e^{-\beta E_1} + \dots \quad (7.26)$$

Nel limite  $\beta \rightarrow \infty$  dato che  $E_0 < E_1 < \dots$ ,  $K$  sarà dominato dai primi due termini. Se li confrontiamo con l'espressione appena ottenuta per  $K$  vediamo che lo splitting energetico è dato dagli argomenti che all'esponenziale moltiplicano  $\beta$ .

$$\frac{\hbar\omega}{2} \pm \hbar R e^{-S_{ist}/\hbar}. \quad (7.27)$$

E otteniamo (finalmente) lo splitting cercato:

$$\Delta E = 2\hbar R e^{-S_{ist}/\hbar}. \quad (7.28)$$

Anche se esplicitare  $R$  è complicato. rimandiamo il lettore interessato a *Quantum theory of many-variable system and fields*, di Sakita, sezione 9.1, *Steepest Descent metodo di Integration*.



# Bibliografia

- [1] P. G. Merli, G. Missiroli, G. Pozzi, *Electron interferometry with the Elmiskop 101 electron microscope*, in Journal of Physics E: Scientific Instruments, vol. 7, n° 9, settembre 1974
- [2] R. Rosefelder, *Path Integrals in Quantum Physics*, Paul Scherren Institute, CH-5232 Villigen PSI, Swizerland [Lectures]
- [3] R. P. Feynman, A. R. Hibbs *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, 1965
- [4] R. P. Feynman, notes taken by R. Kikuchi and H. Feivesson *Statistical Mechanics*, WestView 1998
- [5] R. MacKenzie *Path Integral Methods and Applications*, Université de Montréal [Lectures]
- [6] R. P. Feynman, R. B. Leighton; M. Sands *The Feynman Lectures on Physics, Vol. 3*. Addison-Wesley 1965
- [7] B. Sakita, *Quantum theory of many-variable system and fields*, World Scientific Publishing, 1985
- [8] Michael Fowler, *The density matrix*,  
da <http://galileo.phys.virginia.edu/classes/752.mf1i.spring03/DensityMatrix.htm>