

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

TEORIE DI GAUGE E ROTTURA SPONTANEA DI SIMMETRIA

Relatore:
Prof. Fiorenzo Bastianelli

Presentata da:
Veronika Fedotova

Anno Accademico 2017/2018

Sommario

In questa tesi si discutono le teorie di gauge abeliane e non abeliane. Partendo da una base di teoria generale, si prendono come esempi di applicazione l'Elettrodinamica quantistica, dove il gruppo di gauge è il gruppo abeliano $U(1)$ - teoria di gauge abeliana, e la Cromodinamica quantistica, dove il gruppo di gauge è il gruppo non abeliano $SU(3)$ - teoria di gauge non abeliana. Si mostra come il concetto chiave di simmetria di gauge e l'uso cruciale della derivata covariante permetta di ottenere facilmente le Lagrangiane classiche delle suddette teorie. Per ultimo si affronta il problema di come introdurre un termine di massa associato ai campi di gauge, analizzando il Meccanismo di Higgs abeliano, in cui per semplicità si fa uso di un campo scalare complesso. Il Modello Standard delle particelle elementari è basato sul gruppo di gauge $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ con meccanismo di Higgs per le interazioni deboli.

Indice

Introduzione	2
1 Formalismo lagrangiano, simmetrie e campi di gauge	1
1.1 Formalismo lagrangiano	1
1.2 Gruppi, simmetrie e teorema di Noether	3
1.2.1 Gruppi	3
1.2.2 Simmetrie e teorema di Noether	4
1.3 Cenni di relatività ristretta	8
1.4 Cenni di equazioni d'onda relativistiche	12
1.4.1 Equazione di Klein - Gordon	13
1.4.2 Equazione di Dirac	14
1.5 Teoria di gauge: generalità	16
2 Applicazioni delle teorie di gauge: QED e QCD	20
2.1 Equazioni di Maxwell: formalismo classico e covariante	20
2.1.1 Invarianza di gauge per l'elettromagnetismo	23
2.1.2 Il principio di gauge per l'elettromagnetismo	25
2.2 Lagrangiana della QED	27
2.3 Geometria dell'invarianza di gauge	31
2.4 Gruppo SU(N): simmetrie rigide e locali	33
2.4.1 Azione con simmetria rigida SU(N)	36
2.4.2 Azione con simmetria locale e derivata covariante D_μ	37
2.5 Lagrangiana della QCD	40
3 Rottura spontanea di simmetria	43
3.1 Rottura spontanea di simmetria globale	43
3.2 Rottura spontanea di simmetria locale	47
3.2.1 Meccanismo di Higgs abeliano	47
Conclusioni	51
Bibliografia	53

Introduzione

Le *teorie di gauge* sono una classe di teorie di campo costruite in modo tale che la Lagrangiana del sistema che si considera risulti essere invariante sotto certe trasformazioni locali, dette anche *trasformazioni di gauge*. L'importanza delle teorie di gauge è nel loro successo nella descrizione delle particelle elementari. Infatti il *Modello Standard*, che rappresenta l'odierna teoria portante nella spiegazione di tre interazioni fondamentali su quattro, fa uso di una teoria di gauge non abeliana, basata sul gruppo di simmetria $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, ed è verificato sperimentalmente con grande precisione.

Per costruire una teoria di gauge, prima di tutto occorre soffermarsi sul concetto di campo: infatti le particelle e le interazioni tra queste sono viste come quanti di campi, sistemi fisici con infiniti gradi di libertà. Questi possono essere fermionici, se sono campi di materia, o bosonici, se invece sono mediatori delle forze. La dinamica di tali campi è descritta tramite opportune Lagrangiane e si sfrutta il Principio di Minima Azione per ricavarne le equazioni del moto. Quando le equazioni del moto ottenute sono invarianti in forma sotto certe trasformazioni delle variabili dinamiche, è possibile individuare le *simmetrie* di un sistema. Le simmetrie possono essere globali o locali, continue o discrete. Quando si ha una simmetria globale continua vale il noto *Teorema di Noether* che garantisce l'esistenza di cariche conservate, espresse attraverso leggi di conservazione. La conservazione della carica elettrica ne rappresenta un esempio importante. Nel caso di simmetrie locali invece, imponendo che la Lagrangiana libera le soddisfi, emergono automaticamente le interazioni tra i campi di materia fermionici e i campi di gauge, i cui quanti sono interpretati come bosoni delle interazioni fondamentali. In particolare emerge che ci sono tanti campi bosonici quanti sono i generatori del gruppo di gauge.

In questa tesi si discute la costruzione di teorie di gauge, abeliane e non abeliane, e le conseguenze che ne derivano. In particolare si parte dal modello più semplice, rappresentato dalle equazioni di Maxwell per arrivare allo studio dell'*Elettrodinamica quantistica*, teoria di gauge abeliana, basata sul gruppo di simmetria $U(1)$. Si vede come è possibile ottenere la Lagrangiana che descrive la propagazione degli elettroni, dei fotoni e il termine che rappresenta l'interazione tra i due. Analogamente, si ricostruisce la Lagrangiana della *Cromodinamica quantistica*, una teoria di gauge non abeliana basata sul gruppo di simmetria $SU(3)$: oltre ai termini che descrivono la propagazione dei quanti dei campi, grazie alla non commutatività dei generatori del gruppo di simmetria,

emergono anche quelli delle auto-interazioni dei mediatori, tipiche dei gluoni.

Nell'ultima parte della tesi viene affrontato il problema legato alla *rottura spontanea di simmetria*. Sperimentalmente i bosoni vettori dell'*Interazione debole* sono dotati di massa, il cui ordine di grandezza è di 100 GeV. Le teorie di gauge costruite invece non ammettono direttamente l'esistenza di bosoni massivi poiché l'introduzione dei termini di massa espliciti nella Lagrangiana viola la simmetria di gauge e la rinormalizzabilità della teoria. Un termine di massa può essere introdotto grazie al meccanismo di rottura spontanea della simmetria di gauge, il *Meccanismo di Higgs*, che viene presentato nella situazione più semplice considerando un gruppo di simmetria abeliano e un solo campo scalare complesso. Tale meccanismo preserva la simmetria di gauge della Lagrangiana e comporta la presenza di termini di massa per il bosone vettore, compatibilmente con la simmetria locale.

Capitolo 1

Formalismo lagrangiano, simmetrie e campi di gauge

Nel primo capitolo della tesi sono introdotte le principali nozioni fisiche e matematiche necessarie per sviluppare una *teoria di gauge*. Dopo brevi richiami di meccanica lagrangiana, il formalismo è esteso ai campi, recuperando la definizione dell'*azione* e le equazioni di *Eulero-Lagrange*. In seguito è introdotta la definizione di un *gruppo* affiancata dal *Teorema di Noether*: si distingue tra simmetrie rigide e simmetrie locali e vengono analizzate le conseguenze che ne derivano. Per finire si presenta uno schema generale per la costruzione di una *teoria di gauge* e sono introdotti i protagonisti assoluti: la *derivata covariante* e il *potenziale di gauge*.

1.1 Formalismo lagrangiano

Si consideri un sistema dinamico descritto da coordinate generalizzate q_i con $i = 1, \dots, s$ dove s è il numero dei gradi di libertà del sistema, e dalle loro derivate temporali $\dot{q}_i \equiv \frac{dq_i}{dt}$. Si chiama *Lagrangiana* del sistema la funzione $L(q_i, \dot{q}_i, t)$, contenente tutte le informazioni sulla dinamica del sistema. Classicamente questa funzione è nella forma

$$L = T - V = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V \quad (1.1)$$

dove T è il termine di energia cinetica e V è l'energia potenziale. Si definisce il funzionale azione S come

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \quad (1.2)$$

Tale funzione non dipende dalle derivate di ordine superiore al primo poiché la dinamica del sistema è interamente definita dalle sole coordinate e velocità. Il Principio di Minima Azione stabilisce che, fissati q^1 e q^2 ai tempi t_1 e t_2 , la traiettoria fisica del sistema tra i due punti è quella che minimizza l'azione, ovvero vale

$$\delta S[q] = 0 \quad (1.3)$$

Le equazioni del moto, con le condizioni scelte, sono le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (1.4)$$

Con s gradi di libertà del sistema, si ha un sistema di s equazioni differenziali del secondo ordine e si richiedono $2s$ costanti di integrazione per determinare completamente la soluzione. Per verificare che (1.4) si ottengono dal Principio di Minima Azione si supponga che $q_i = q_i(t)$ sia precisamente la funzione per la quale S ha un minimo. Questo significa che S cresce sostituendo $q_i(t)$ con una funzione qualsiasi del tipo

$$q_i(t) \rightarrow q_i(t) + \delta q_i(t) \quad (1.5)$$

dove $\delta q_i(t)$ è una variazione infinitesima. Imponendo la condizione a contorno

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0 \quad (1.6)$$

la variazione della Lagrangiana diventa

$$\delta L(q_i, \dot{q}_i, t) = L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t) - L(q_i, \dot{q}_i, t) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \quad (1.7)$$

da cui segue che la variazione dell'azione è

$$\begin{aligned} \delta S[q] &= S[q + \delta q] - S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_i, \dot{q}_i) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i = 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

dove si sono sfruttati l'integrazione per parti e gli estremi fissi. Dato che secondo il principio variazionale, la variazione dell'azione δS deve essere nulla per ogni δq_i , la funzione integranda deve essere necessariamente uguale a zero, e quindi si ottengono le equazioni di Eulero-Lagrange (1.4).

Il formalismo lagrangiano per un sistema meccanico con finiti gradi di libertà può essere esteso ai sistemi con infiniti gradi di libertà, ovvero i campi. Il passaggio da un punto materiale descritto da $x(t)$ al campo $\phi(x^\mu) = \phi(t, x, y, z)$ può essere visualizzato

come la sostituzione di x con ϕ e di t con x^μ .

Si consideriamo i campi ϕ^a . L'azione $S[\phi^a]$ può essere espressa come

$$S[\phi^a] = \int \mathcal{L}(\phi^a, \partial_\mu \phi^a) d^4x \quad (1.9)$$

dove $\mathcal{L}(\phi^a, \partial_\mu \phi^a)$ è la *densità di Lagrangiana*. Variando il campo ϕ^a

$$\phi^a(x) \rightarrow \phi^a(x) + \delta\phi^a(x) \quad (1.10)$$

con opportune condizioni al contorno, quali l'annullamento sul bordo di R , l'ipersuperficie contenente il campo, è possibile recuperare le equazioni di Eulero-Lagrange. La variazione della Lagrangiana può essere espressa come:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}(\phi^a, \partial\phi^a) &= \mathcal{L}(\phi^a + \delta\phi^a, \partial_\mu\phi^a + \delta(\partial_\mu\phi^a)) - \mathcal{L}(\phi^a, \partial_\mu\phi^a) \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^a} \delta\phi^a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)} \delta(\partial_\mu\phi^a) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Andando a valutare la variazione dell'azione, la quale è l'integrale sullo spazio-tempo della densità di Lagrangiana \mathcal{L}

$$\delta\mathcal{S}[\phi^a] = \mathcal{S}[\phi^a + \delta\phi^a] - \mathcal{S}[\phi^a] \quad (1.12)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S}[\phi^a] &= \int \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^a} \delta\phi^a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)} \delta(\partial_\mu\phi^a) \right) d^4x \\ &= \int \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^a} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)} \right) \delta\phi^a d^4x = 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

dove si sfrutta il fatto che $\delta(\partial_\mu\phi^a) = \partial_\mu(\delta\phi^a)$ e si procede come in (1.8). Questa formulazione è consistente con il caso della meccanica classica e si ottiene l'analogo delle equazioni di Eulero-Lagrange (1.4), questa volta per i campi

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^a} = 0 \quad (1.14)$$

1.2 Gruppi, simmetrie e teorema di Noether

1.2.1 Gruppi

Un gruppo G per definizione è una collezione di elementi $\{g\}$ con un'operazione binaria interna al gruppo \cdot e sono soddisfatte le seguenti condizioni:

- $\forall g_1, g_2 \in G, \exists g_3 \in G : g_1 \cdot g_2 = g_3 \in G;$
- $\exists e \in G : g \cdot e = e \cdot g = g;$
- $\forall g \in G \exists g^{-1} : g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e;$
- $\forall g_1, g_2, g_3 \in G, (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3);$

Se gli elementi del gruppo commutano sotto la legge di composizione, si dice che il gruppo è *abeliano*, altrimenti si dice che è *non abeliano*. Se gli elementi del gruppo dipendono in maniera continua da uno o più parametri, si parla di *gruppo di Lie*. In generale, un elemento di un gruppo di Lie $g(\theta)$ può essere parametrizzato come

$$g(\theta) = e^{i\theta_a T^a} \in G \quad (1.15)$$

$a = 1, \dots, \dim G$, i parametri θ_a sono numeri reali che parametrizzano i vari elementi del gruppo, scelti in modo tale che per $\theta_a = 0$ si abbia l'identità 1_G e gli operatori T^a sono i generatori del gruppo. Essi generano le trasformazioni infinitesime quando $\theta_a \ll 1$ e vale

$$g = 1_G + i\theta_a T^a + \dots \quad (1.16)$$

Studiando le trasformazioni che differiscono di poco dall'identità, si ottiene l'algebra di Lie del gruppo, ovvero un'algebra che contiene le informazioni essenziali sul gruppo e la sua espressione è

$$[T^a, T^b] = i f^{ab}_c T^c \quad (1.17)$$

Le costanti f^{ab}_c sono chiamate costanti di struttura del gruppo e lo caratterizzano quasi completamente. Due gruppi diversi con la stessa algebra di Lie sono simili localmente ma differiscono per topologia. Se i parametri del gruppo sono delle funzioni arbitrarie del tempo o dello spazio si parla di *simmetrie locali* o di *gauge*, altrimenti si parla di *simmetrie rigide*.

1.2.2 Simmetrie e teorema di Noether

Il grande vantaggio della formulazione lagrangiana dei campi è nel fatto che lo studio di invarianze conduce naturalmente all'individuazione delle quantità conservate.

Il teorema di Noether è un risultato molto importante in fisica poiché permette di stabilire una relazione fondamentale tra le simmetrie globali e le conservazioni di carica e tra le simmetrie di gauge e le equazioni del moto. Il teorema, nella sua formulazione per le simmetrie globali, ovvero quelle generate dal gruppo di Lie finito-dimensionale, stabilisce che ad ogni simmetria corrisponde una carica conservata. Nella sua formulazione per le simmetrie locali o di gauge, che sono legate al gruppo di Lie infinito-dimensionale, stabilisce che il numero delle variabili dinamiche usate è ridondante, poiché con una trasformazione di gauge è possibile modificare arbitrariamente l'evoluzione temporale di

un'opportuna combinazione delle variabili dinamiche, non fissata a priori dalle equazioni del moto. Come già introdotto, l'azione S , in funzione delle coordinate generalizzate e delle loro derivate, si esprime come

$$S[q] = \int dt L(q^i, \dot{q}^i, t) \quad (1.18)$$

e le sue equazioni di Lagrange associate, che derivano dal Principio di Minima Azione, sono

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad (1.19)$$

Per ogni azione $S[q^i(t)]$, una funzione $f^i(t)$ è una *simmetria* se

$$S[q^i(t) + f^i(t)] = S[q^i(t)] \quad (1.20)$$

a meno di integrali di derivate totali, che non modificano le equazioni del moto. Queste ultime sono pertanto invarianti in forma. Si pone $f^i(t) = \delta_s q^i(t)$ sottolineando che le due funzioni, $q^i(t)$ e $\delta_s q^i(t)$ non dipendono l'una dall'altra: le $\delta_s q^i(t)$ individuano le direzioni lungo le quali l'azione non cambia. Per derivare il Teorema di Noether si usa la definizione di simmetria e la variazione dell'azione on-shell. Si definisce una simmetria come $\delta_s q^i(t)$ tale che, comunque si prenda $q^i(t)$, l'azione è invariante a meno di termini di bordo, ovvero vale:

$$\delta S[q^i(t), \delta_s q^i(t)] \equiv S[q^i(t) + \delta_s q^i(t)] - S[q^i(t)] = \int dt \frac{dK}{dt} \quad (1.21)$$

dove il termine integrale è un termine di bordo che non modificano le equazioni del moto. Ogni funzione $\delta_s q^i(t)$ che soddisfa la condizione (1.21) rappresenta una simmetria. La (1.21) è un'equazione per $\delta_s q^i(t)$ poiché deve essere soddisfatta per ogni $q(t)$ di partenza.

La variazione on shell, dove per "on-shell" si intende che la configurazione del sistema fisico soddisfa le equazioni del moto classiche, si ha quando, per ipotesi, $q(t)$ soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange mentre $\delta q^i(t)$ sono variazioni infinitesime arbitrarie. Matematicamente

$$\begin{aligned} \delta S[q^i(t), \delta q^i(t)] &= \int dt \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \right) = \\ &= \int dt \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right) \delta q^i + \int dt \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right) \end{aligned} \quad (1.22)$$

in cui si è sfruttata l'integrazione per parti. Se $q^i(t)$ soddisfano le equazioni di Eulero-Lagrange, resta solo

$$\delta S[q^i(t), \dot{q}^i(t)] \equiv S[q^i + \delta q^i] - S[q^i] = \int dt \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right) \quad (1.23)$$

È importante notare che nella prima situazione $\delta_s q^i(t)$ dovevano soddisfare (1.21) e $q^i(t)$ erano arbitrarie, mentre questa volta $q_i(t)$ devono soddisfare le equazioni di Eulero-Lagrange e le $\delta q^i(t)$ possono essere arbitrarie. La combinazione della (1.21), in cui si ha la condizione per una simmetria

$$\delta S[q^i(t), \delta_s q^i(t)] = \int dt \frac{dK}{dt} \quad (1.24)$$

con (1.22), che esprime la variazione on shell

$$\delta S[q^i(t), \delta q^i(t)] = \int dt \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right) \quad (1.25)$$

permette di ricavare il Teorema di Noether. Sostituendo $\delta_s q^i(t)$ in (1.22) e supponendo che $q^i(t)$ della (1.21) soddisfino le equazioni di Eulero-Lagrange, è possibile trarre l'uguaglianza

$$\begin{aligned} Q &= K - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta_s q^i(t) \\ \frac{d}{dt} Q &= 0 \end{aligned} \quad (1.26)$$

Quindi, se è data una simmetria, in questo caso $\delta_s q^i(t)$, allora si ha una carica Q , espressa sopra, che è conservata nel tempo.

Un discorso analogo si fa trattando i campi. L'azione è sempre l'integrale della densità di Lagrangiana

$$S[\phi(x)] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (1.27)$$

Ripetendo i ragionamenti di prima, un insieme di simmetrie dell'azione è dato da tutte le funzioni infinitesime $\delta_s \phi(x)$ che soddisfano, comunque sia scelto ϕ , la condizione

$$\delta S[\phi(x), \delta_s \phi] \equiv S[\phi + \delta_s \phi] - S[\phi] = \int d^4x \partial_\mu K^\mu \quad (1.28)$$

Naturalmente, come prima, (1.27) è un'equazione per $\delta_s \phi(x)$ e le coordinate non hanno nessun ruolo nella definizione della simmetria.

L'analogo della condizione (1.22), supponendo che $\phi(x)$ soddisfi le equazioni di Eulero-Lagrange, che per comodità si riportano di seguito, generalizzate per i campi (1.13)

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} = 0 \quad (1.29)$$

diventa

$$\begin{aligned}
 \delta S[\phi^i, \delta\phi^i] &= \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} \delta\phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \delta(\partial_\mu \phi^i) \right) = \\
 &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \right) \right] \delta\phi^i + \int d^4x \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \delta\phi^i \right) = \quad (1.30) \\
 &= \int \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \delta\phi^i \right)
 \end{aligned}$$

Poiché la (1.27) è valida per ogni ϕ , e in particolare per un ϕ che soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange e la (1.30) è valida per ogni $\delta\phi$ e in particolare per $\delta_s\phi$, le due variazioni δS sono identiche. Pertanto è possibile ottenere la formulazione del Teorema di Noether, valida per la conservazione della corrente associata alla simmetria e si ha

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (1.31)$$

dove

$$J^\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}(x)} \delta\phi(x) - K^\mu \quad (1.32)$$

È possibile verificare che dalla conservazione di corrente (1.31) emerge la conservazione della carica Q . Esplicitando

$$\frac{\partial}{\partial t} J^0 = -\nabla \cdot \vec{J} \quad (1.33)$$

e usando il teorema della divergenza si ha

$$\int_V d^3x \frac{\partial J^0}{\partial t} = - \int_V d^3x \nabla \cdot \vec{J} = - \int_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (1.34)$$

dove l'ultima uguaglianza è l'applicazione del teorema della divergenza. Se si suppone che \vec{J} va a zero "velocemente" al crescere dell'area A che racchiude V , l'integrale si annulla e si ha la conservazione della carica Q :

$$Q = \int_V d^3x J^0(x) \quad (1.35)$$

con

$$\frac{d}{dt} Q = 0$$

Nel caso di traslazioni spazio-temporali le correnti conservate formano un tensore. Per comprenderlo, basta considerare le simmetrie legate alle traslazioni spazio-temporali dello spazio di Minkowski. Infatti si ha una corrente associata ad ogni traslazione del tipo

$$\begin{aligned}
 t &\rightarrow t + \epsilon^0 \\
 x &\rightarrow x + \epsilon^1 \\
 y &\rightarrow y + \epsilon^2 \\
 z &\rightarrow z + \epsilon^3
 \end{aligned} \quad (1.36)$$

Si hanno così 4 simmetrie a cui corrispondono 4 correnti. È possibile quindi definire il tensore energia-impulso come segue

$$J^\mu = T^\mu{}_\nu \epsilon^\nu \quad (1.37)$$

La legge di conservazione assume la forma

$$\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0 \quad (1.38)$$

Per quanto riguarda le simmetrie locali, il metodo precedente non permette di ottenere nessuna equazione di continuità poiché la variazione dell'azione è sempre nulla. Si vedrà più avanti che, la richiesta di un'invarianza di gauge porta alla definizione di potenziali di gauge e alle interazioni tra i campi.

Riassumendo, la richiesta di invarianza globale sotto un certo gruppo, porta alla conservazione di tante correnti quanti sono i generatori del gruppo. La richiesta di invarianza locale, sotto un certo gruppo, porta all'esistenza di tanti campi di gauge a massa nulla quanti sono i generatori del gruppo, che possono essere interpretati come campi bosonici mediatori delle interazioni.

1.3 Cenni di relatività ristretta

Le trasformazioni di Lorentz sono le trasformazioni di coordinate che permettono di descrivere come varia la misura del tempo e dello spazio tra due sistemi di riferimento inerziali. Si considerino due sistemi di riferimento K e K' , con K' che si muove a velocità costante v diretta lungo l'asse x rispetto a K . In queste condizioni le trasformazioni di Lorentz sono

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (1.39)$$

e ponendo $\beta = \frac{v}{c}$ e $\gamma = \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^{-1}$ le (1.39) diventano

$$\begin{aligned} t' &= \left(t - \frac{\beta x}{c}\right)\gamma \\ x' &= (x - \beta ct)\gamma \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (1.40)$$

Dalle equazioni (1.40) si vede che il tempo non è più assoluto ma è relativo al sistema di riferimento e il concetto di simultaneità perde il suo significato. Le corrette leggi di trasformazione che collegano i due sistemi di riferimento inerziali danno luogo alla meccanica relativistica i cui principi sono

1. Le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali
2. La velocità della luce è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali

Lo spazio-tempo relativistico è lo spazio di Minkowski \mathcal{M}^4 e un evento vi è identificato con il quadrivettore

$$(ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \vec{x}) = x^\mu \quad (1.41)$$

La grandezza s^2 , definita come

$$s^2 \equiv -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \quad (1.42)$$

è uno scalare, cioè un invariante di Lorentz: la quantità s^2 può essere calcolata indipendentemente con x^μ o con x'^μ ed è quindi indipendente dal sistema di riferimento inerziale scelto. In generale dati due eventi individuati da x^μ e y^μ , il quadrato della distanza invariante è data da

$$s^2 = -(x^0 - y^0) + (x^1 - y^1) + (x^2 - y^2) + (x^3 - y^3) \quad (1.43)$$

In generale s^2 può essere

- $s^2 < 0$: distanza di tipo tempo
- $s^2 = 0$: distanza di tipo luce
- $s^2 > 0$: distanza di tipo spazio

È possibile scrivere le trasformazioni di Lorentz in forma matriciale come

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

e in maniera compatta come

$$x' = \Lambda x \quad (1.45)$$

o con la notazione di Einstein, in cui gli indici ripetuti vengono automaticamente sommati

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (1.46)$$

dove $\Lambda^\mu \nu$ indica gli elementi della matrice di Lorentz al variare degli indici μ e ν . Il quadrato della distanza minkowskiana s^2 che è invariante per le trasformazioni di Lorentz, può essere scritta come

$$s^2 = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = \begin{pmatrix} ct & x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \quad (1.47)$$

$$= x^T \eta x = x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

dove $\eta_{\mu\nu}$ è la *metrica di Minkowski*. In generale le trasformazioni di Lorentz sono quelle che lasciano invariata la distanza minkowskiana:

$$s^2 = x^T \eta x = x'^T \eta x' = x^T \Lambda^T \eta \Lambda x \rightarrow \Lambda^T \eta \Lambda \quad (1.48)$$

Quindi sono le trasformazioni di Lorentz tutte quelle definite dalle matrici Λ tali che

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \quad (1.49)$$

o in notazione tensoriale

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu \alpha \Lambda^\nu \beta = \eta_{\alpha\beta} \quad (1.50)$$

L'insieme di tutte le trasformazioni di Lorentz formano il gruppo di Lorentz: questo gruppo è caratterizzato da 6 parametri che rappresentano i 3 angoli di rotazione degli assi e le 3 componenti della velocità relativa tra i due sistemi di riferimento inerziali.

Si vuole fare una puntualizzazione sulle notazioni utilizzate: il quadrivettore posizione x^μ ha sempre l'indice in alto, la metrica di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ ha sempre due indici in basso, gli elementi della matrice per la trasformazione di Lorentz $\Lambda^\mu \nu$ ha l'indice di riga in alto e l'indice di colonna in basso. È possibile "abbassare" l'indice del quadrivettore moltiplicando per la metrica:

$$x_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} x^\nu$$

È possibile inoltre definire l'inverso della metrica come

$$\eta^{\mu\nu} = (\eta^{-1})^{\mu\nu}$$

Lo scalare s^2 può essere definito come

$$s^2 = x_\mu x^\mu \quad (1.51)$$

L'operatore di derivata si può scrivere come un 4-vettore con l'indice in basso

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (1.52)$$

La domanda che ci si pone è cosa vuol dire che un'equazione è un invariante relativistico? Si consideri un campo o una collezione ϕ e un operatore differenziale D . Dire che $D\psi = 0$ è un invariante relativistico significa che se $\phi(x)$ soddisfa questa equazione e viene compiuta una rotazione o un boost in un diverso sistema di riferimento, il campo trasformato soddisfa ancora la stessa equazione.

La formulazione lagrangiana della teoria dei campi, introdotta in questo capitolo, rende semplice discutere l'invarianza di Lorentz. Un'equazione del moto è automaticamente Lorentz-invariante se la Lagrangiana da cui è ottenuta lo è. È una conseguenza immediata del Principio di Minima Azione (1.13): se il boost lascia la Lagrangiana del campo inalterata allora anche l'azione lo è e il minimo dell'azione è ancora lo stesso. Come un esempio si prenda l'equazione di Klein-Gordon, trattato in (1.61). Una trasformazione di Lorentz arbitraria delle coordinate è data da

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (1.53)$$

dove Λ è una matrice del gruppo di Lorentz. Si immagini che ϕ sia il valore locale di una qualche quantità misurata, in generale distribuita nello spazio. Se in $x = x_0$ il campo presenta un massimo, allora quando viene compiuto un boost si avrà il massimo in $x = \Lambda x_0$. La corrispondente trasformazione del campo è

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x) \quad (1.54)$$

È necessario verificare che lascia effettivamente invariata in forma la Lagrangiana di Klein-Gordon

$$\mathcal{L}_{Kl-Go} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (1.55)$$

Il termine di massa è invariante poiché si trasla semplicemente nel punto $(\Lambda^{-1}x)$. La trasformazione legata alla derivata invece è

$$\partial_\mu \phi(x) \rightarrow \partial_\mu (\phi(\Lambda^{-1}x)) = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu (\partial_\nu \phi)(\Lambda^{-1}x) \quad (1.56)$$

Poiché il tensore metrico $g^{\mu\nu}$ è Lorentz-invariante, si ha l'identità:

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \phi(x))^2 &\rightarrow g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi'(x)) (\partial_\nu \phi'(x)) = \\ &= g^{\mu\nu} [(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu \partial_\rho \phi] [(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu \partial_\sigma \phi] (\Lambda^{-1}x) = \\ &= g^{\rho\sigma} (\partial_\rho \phi) (\partial_\sigma \phi) (\Lambda^{-1}x) = \\ &= (\partial_\mu \phi)^2 (\Lambda^{-1}x) \end{aligned} \quad (1.57)$$

Quindi l'intera Lagrangiana è semplicemente trasformata come uno scalare $\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(\Lambda^{-1}x)$

1.4 Cenni di equazioni d'onda relativistiche

La meccanica quantistica descrive la radiazione e la materia sia come fenomeno ondulatorio che come entità particellare, al contrario della meccanica classica, in cui, per esempio, la luce è descritta solo come un'onda o l'elettrone solo come una particella. Per una particella libera non relativistica vale l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{x}, t) \quad (1.58)$$

dove $\psi(\vec{x}, t)$ è la funzione d'onda. La maggiore novità della meccanica quantistica è nell'interpretazione probabilistica: nell'interpretazione di Copenaghen la $\psi(x)$ non ha un proprio significato fisico, mentre lo ha il suo modulo al quadrato, che fornisce la distribuzione di probabilità dell'osservabile posizione. Per ogni volume V dello spazio, l'integrale del modulo quadro della funzione d'onda

$$\int_V |\psi(x)|^2 d^3x \quad (1.59)$$

assegna la probabilità di trovare la particella dentro quel volume, quando si misura la sua posizione. Se si vuole generalizzare questa equazione al caso relativistico, mantenendo le sue peculiarità, si presentano numerosi problemi interpretativi, che possono essere risolti solo nell'ambito della teoria quantistica dei campi. Tuttavia, è utile averne una prima visione e dimestichezza poiché molte situazioni fisiche si prestano alla trattazione con la prima quantizzazione. Le corrette equazioni d'onda per descrivere le particelle di massa m e spin s sono le seguenti

- equazione di Klein-Gordon: particelle di massa m e di spin 0
- equazione di Dirac: particelle di massa m e di spin 1/2
- equazioni di Maxwell: particelle senza massa e di spin 1
- equazioni di Proca: particelle di massa m e di spin 1
- equazioni di Rarita-Schwinger: particelle di spin 3/2
- equazioni di Pauli-Fierz: particelle di spin 2

Vengono approfondite ora alcune di queste equazioni con le loro caratteristiche principali e i relativi problemi derivanti dalla loro interpretazione.

1.4.1 Equazione di Klein - Gordon

L'equazione di Klein-Gordon può essere ottenuta dalla prima quantizzazione di una particella relativistica. Tuttavia il campo di Klein-Gordon non ammette un'interpretazione probabilistica come nel caso dell'equazione di Schrödinger. La consistenza con la meccanica quantistica viene recuperata trattando il campo di Klein-Gordon come un campo classico descrivente un numero infinito di gradi di libertà (anche esso in seguito quantizzato) e non come una funzione d'onda quantistica. La quantizzazione del campo prende nome di *seconda quantizzazione*. Con quest'ultima è possibile descrivere un numero arbitrario di particelle e antiparticelle identiche di spin zero e massa m .

Se si vuole ottenere un'equazione d'onda relativistica è necessario usare la corretta relazione relativistica tra energia e impulso

$$p_\mu p^\mu = -m^2 c^2 \rightarrow -\frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^2 - m^2 c^2 \rightarrow E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (1.60)$$

Sostituendo gli osservabili con i loro rispettivi operatori, $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ e $\vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$, si ottiene

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} + \nabla^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) \psi(\vec{x}, t) = 0 \quad (1.61)$$

nota come l'equazione di Klein-Gordon. In notazioni relativistiche si può scrivere come

$$(\partial_\mu \partial^\mu - \mu^2) \phi(x) = 0 \quad (1.62)$$

con $\mu = \frac{mc}{\hbar}$ ed anche come

$$(\square - \mu^2) \phi(x) = 0 \quad (1.63)$$

con $\square = \partial^\mu \partial_\mu$, che indica l'operatore differenziale d'Alembertiano.

L'equazione di Klein-Gordon può essere ottenuta anche dal principio variazionale, definendo l'azione

$$S[\phi, \phi^*] = \int (-\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi) d^4 x \quad (1.64)$$

Le soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon possono essere cercate nella forma di un'onda piana

$$\phi(x) \rightarrow e^{ip_\nu x^\nu} \quad (1.65)$$

Infatti, inserendola nell'equazione di Klein-Gordon si ottiene

$$-(p^\mu{}_\mu + m^2) e^{ip_\nu x^\nu} = 0 \quad (1.66)$$

Quindi, l'onda piana, per essere una soluzione, deve soddisfare la condizione di mass-shell $p^\mu{}_\mu = -m^2$. Il risultato che ne deriva è

$$(p^0)^2 = (\vec{p})^2 + m^2 \rightarrow p^0 = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = \pm E_p \quad (1.67)$$

Emerge da qui la seconda problematica dell'equazione di Klein-Gordon: le energie negative delle particelle. Solo in un secondo momento le particelle a energie negative saranno interpretate come antiparticelle, ovvero particelle che hanno la massa identica ma carica opposta. Una soluzione generale dell'equazione può essere espressa in termini di combinazioni lineari di onde piane:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left(a(\vec{p}) e^{-iE_p t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b^*(\vec{p}) e^{iE_p t - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \\ \phi^*(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left(b(\vec{p}) e^{-iE_p t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^*(\vec{p}) e^{iE_p t - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)\end{aligned}$$

In particolare $a(\vec{p})$ e $a^*(\vec{p})$ sono i coefficienti di Fourier associati alla creazione e alla distruzione di particelle, mentre $b(\vec{p})$ e $b^*(\vec{p})$ sono associati alla distruzione e alla creazione delle antiparticelle.

Il campo complesso di Klein-Gordon libero (non interagente) possiede simmetrie rigide generate dal gruppo di Poincaré (che esprime traslazioni e trasformazioni di Lorentz) e simmetrie rigide per trasformazioni di fase $U(1)$.

1.4.2 Equazione di Dirac

L'equazione di Dirac è l'equazione relativistica per la descrizione di particelle di spin $1/2$ e massa m . Anche in questo caso, l'interpretazione probabilistica può essere recuperata solo trattando la funzione d'onda di Dirac come un campo classico da quantizzare (seconda quantizzazione).

L'equazione si presenta come

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0 \quad (1.68)$$

dove la funzione d'onda $\psi(x)$ ha quattro componenti e prende nome di *spinore di Dirac* e le γ^μ sono matrici 4×4 . Le quattro componenti del campo di Dirac non sono componenti di un quadrivettore ma sono di natura spinoriale e come tali si trasformano diversamente per trasformazioni di Lorentz ed è necessario utilizzare indici diversi:

- $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ per indicizzare le componenti di un quadrivettore
- $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$ per indicizzare le componenti di uno spinore di Dirac

L'equazione (1.68), con queste considerazioni, può essere scritta in modo esteso come

$$((\gamma^\mu)_\alpha{}^\beta \partial_\mu + m \delta_\alpha{}^\beta) \psi_\beta(x) = 0 \quad (1.69)$$

Si hanno così 4 equazioni distinte per ogni componente dello spinore. Riprendendo la corretta relazione relativistica di energia-impulso (1.60), Dirac propose una relazione lineare

$$E = c\vec{p} \cdot \vec{\alpha} + mc^2 \beta \quad (1.70)$$

con α e β matrici unitarie tali che siano consistenti con la (1.60). Elevando la (1.70) al quadrato si ottiene

$$\begin{aligned}
 E^2 &= (c\vec{p} \cdot \vec{\alpha} + mc^2\beta)^2 = (c\vec{p} \cdot \vec{\alpha} + mc^2\beta) \cdot (c\vec{p} \cdot \vec{\alpha} + mc^2\beta) = \\
 &= c^2 p^i p^j \alpha^i \alpha^j + m^2 c^4 \beta^2 + mc^3 p^i \alpha^i \beta + mc^3 \beta p^i \alpha^i = \\
 &= c^2 p^i p^j \alpha^i \alpha^j + m^2 c^4 \beta^2 + mc^3 p^i (\alpha^i \beta + \beta \alpha^i) = \\
 &= \frac{1}{2} c^2 p^i p^j (\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i) + m^2 c^4 \beta^2 + mc^3 p^i (\alpha^i \beta + \beta \alpha^i)
 \end{aligned} \tag{1.71}$$

Se si vuole che i momenti arbitrari \vec{p} siano consistenti con (1.60) è necessario porre le seguenti condizioni sulle matrici unitarie α e β

$$\begin{aligned}
 \alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i &= 2\delta^{ij} \\
 \beta^2 &= 1 \\
 \alpha^i \beta + \beta \alpha^i &= 0
 \end{aligned} \tag{1.72}$$

Dirac ottenne la soluzione minimale con matrici 4×4 ed esplicitamente si ha:

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.73}$$

dove σ^i sono le matrici di Pauli:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.74}$$

Dalle condizioni (1.72) si ottengono le relazioni fondamentali che caratterizzano le matrici γ

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \tag{1.75}$$

in cui è stata utilizzata la definizione dell'anticommutatore $\{A, B\} = AB + BA$.

Riprendendo (1.70) e sostituendo $p^0 = E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ e $p_\mu = -i\hbar \partial_\mu$, si ottiene l'equazione di Dirac in forma "hamiltoniana"

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i\hbar c \vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha} + mc^2 \beta) \psi \tag{1.76}$$

in cui il membro di destra può essere identificato con una matrice 4×4 di operatori differenziali. Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione (1.76) per la matrice invertibile $\frac{\beta}{\hbar c}$ si ottiene

$$\frac{i}{c} \beta \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\beta \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi + \frac{mc\beta^2}{\hbar} \psi$$

ponendo $\gamma^0 \equiv -i\beta$ e $\gamma^i \equiv -i\beta \alpha^i$ e $\mu = \frac{mc}{\hbar}$ otteniamo

$$-\frac{\gamma^0}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \gamma^i \vec{\nabla} \psi + \mu \psi$$

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + \mu)\psi = 0 \quad (1.77)$$

L'equazione spesso è scritta con la notazione introdotta da Feynman

$$(\not{\partial} + m)\psi(x) = 0 \quad (1.78)$$

L'equazione libera ammette come soluzioni le onde piane che si propagano nello spazio-tempo $\psi(x) = e^{ip_\nu x^\nu}$. Tuttavia è aggiunta anche una polarizzazione $w(p)$ collegata allo spin. Si ha quindi l'onda piana nella seguente forma

$$\psi(x) \rightarrow w(p)e^{ip_\nu x^\nu} \quad (1.79)$$

dove $w(p)$ è

$$w(p) = \begin{pmatrix} w_1(p) \\ w_2(p) \\ w_3(p) \\ w_4(p) \end{pmatrix} \quad (1.80)$$

Sostituendo (1.79) nell'equazione di Dirac si ottengono quattro soluzioni: due ad energia positiva che rappresentano due stati diversi di spin, up e down, e due ad energia negativa sempre con due diversi stati di polarizzazione. Le soluzioni ad energia negativa sono interpretate come funzioni associate alle antiparticelle.

L'equazione di Dirac è covariante sotto le trasformazioni di Lorentz ed è invariante per trasformazioni discrete, quali parità, riflessione temporali e coniugazione di carica.

1.5 Teoria di gauge: generalità

Le teorie di gauge coinvolgono due tipi di campi: campi di gauge o potenziali di gauge e campi di materia. I campi di gauge, per esempio, sono i campi bosonici che mediano le interazioni fondamentali e sono i fotoni, i gluoni e i bosoni dell'interazione debole Z^0 , W^+ e W^- . I campi di materia sono le particelle fondamentali che interagiscono attraverso i campi di gauge.

Gli elementi che caratterizzano una teoria di gauge sono i seguenti:

- Uno spazio \mathcal{X} dei parametri, solitamente una varietà differenziabile liscia, che può essere un sottoinsieme di R^3 o dello spazio di Minkowski \mathcal{M}^4 . Le coordinate di un elemento $x \in \mathcal{X}$ sono denotati con x^μ .
- Il gruppo di gauge \mathcal{G} che definisce localmente tutte le trasformazioni di gauge. Questo gruppo è infinito - dimensionale ed è chiamato *gruppo delle trasformazioni di gauge*. Localmente, in un aperto U_α di \mathcal{X} , le trasformazioni di gauge sono delle funzioni che associano ad ogni elemento dell'aperto un elemento del gruppo \mathcal{G} .

- I campi di materia sono rappresentati da una collezione

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \\ \vdots \\ \psi^n \end{pmatrix} \quad (1.81)$$

di funzioni lisce $\psi^i : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ che si trasformano secondo una rappresentazione n -dimensionale unitaria del gruppo di gauge \mathcal{G}

$$\begin{aligned} U : G &\rightarrow U(n) \\ g &\rightarrow U(g) \end{aligned} \quad (1.82)$$

cosicché valgono

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = U(g(x))\psi(x) \\ \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = U^i_j(g(x))\psi(x)^j \end{aligned} \quad (1.83)$$

- I campi di gauge o potenziali di gauge, sono delle matrici hermitiane $n \times n$, cioè tali che $A_\mu^{(g)} = A_\mu^{\dagger(g)}$, le componenti delle quali sono $A_\mu^{(g)}(x) = (A_\mu^{nm}(x))$. È postulato che si trasformino come

$$A'_\mu{}^{(g)} = U(g(x)) \cdot A_\mu^{(g)}(x) \cdot U^{-1}(g(x)) + \frac{i}{g}(\partial_\mu U(g(x)) \cdot U^{-1}(g(x))) \quad (1.84)$$

In questa legge di trasformazione del potenziale di gauge compare la costante g che prende nome di *costante di accoppiamento* della teoria di gauge. Tale costante serve per aggiustare le dimensioni della trasformazione e definisce l'intensità dell'interazione a un dato livello di energia, dal quale dipende. Utilizzando il potenziale di gauge, si definisce la *derivata covariante di gauge* come

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu^{(g)}(x) \quad (1.85)$$

Tale derivata si trasforma secondo la (1.83) come

$$\begin{aligned} D'_\mu &= \partial_\mu + igA'_\mu{}^{(g)}(x) = \\ &= \partial_\mu + ig[U(g(x)) \cdot A_\mu^{(g)} \cdot U^{-1}(g(x)) + \frac{i}{g}(\partial_\mu U(g(x)) \cdot U^{-1}(g(x)))] = \\ &= \partial_\mu + igU(g(x)) \cdot A_\mu^{(g)} \cdot U^{-1}(g(x)) + i^2(\partial_\mu U(g(x)) \cdot U^{-1}(g(x))) \end{aligned} \quad (1.86)$$

sfruttando la regola di Leibnitz:

$$\partial_\mu \equiv \partial_\mu(U \cdot U^{-1}) = \partial_\mu U \cdot U^{-1} + U \cdot \partial_\mu U^{-1}$$

e facendo opportuni raccoglimenti, si ottiene

$$= U(g(x)) \cdot [+igA_\mu^{(g)} + \partial_\mu] \cdot U^{-1}(g(x)) = U(g(x)) \cdot D_\mu \cdot U^{-1}(g(x))$$

Se si applica la derivata covariante, definita in (2.8) ad un campo di materia ψ emerge che $D_\mu\psi$ e ψ si trasformano nella stessa maniera:

$$\begin{aligned} D_\mu\psi &\rightarrow D'_\mu\psi' = U(g(x)) \cdot D_\mu \cdot U^{-1}(g(x))(U(g(x))\psi) \\ &= U(g(x))D_\mu\psi \end{aligned} \quad (1.87)$$

Il potenziale di gauge e la derivata covariante di gauge sono introdotti per avere una derivata che si trasforma come il campo di materia. Con il potenziale di gauge è possibile definire il *tensore di campo di forza di gauge*:

$$F_{ij}^{(g)} := \frac{1}{ig}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu^{(g)} - \partial_\nu A_\mu^{(g)} + ig[A_\mu^{(g)}, A_\nu^{(g)}] \quad (1.88)$$

dove il termine tra le parentesi quadre rappresenta il commutatore di matrici $n \times n$, ossia $\forall A, B \in M_{n \times n}$:

$$[A, B]^{ik} = A^{ij}B^{jk} - B^{ij}A^{jk} \quad (1.89)$$

Considerando ancora la trasformazione definita in (1.83), il tensore di campo di forza di gauge si trasforma come

$$\begin{aligned} F_{ij}^{\prime(g)}(x) &= \frac{1}{ig}[D'_\mu, D'_\nu] = U(g(x)) \cdot F_{ij}^{(g)}(x) \cdot U^{-1}(g(x)) = \\ &= U(g(x)) \cdot (\partial_\mu A_\nu^{(g)} - \partial_\nu A_\mu^{(g)} + ig[A_\mu^{(g)}, A_\nu^{(g)}]) \cdot U^{-1}(g(x)) \end{aligned} \quad (1.90)$$

Una teoria di gauge è stata definita *abeliana* se il gruppo di gauge che la caratterizza è un gruppo abeliano e il commutatore che compare in (1.88) diventa nullo. Ciò significa che il tensore di campo di forza è *gauge-invariante* (non cambia sotto la trasformazione) e la sua espressione è

$$F_{ij}^{(g)} = \frac{1}{ig}(\partial_\mu A_\nu^{(g)} - \partial_\nu A_\mu^{(g)}) \quad (1.91)$$

Questa espressione deriva dal fatto che il gruppo abeliano quando agisce sul potenziale di gauge lo trasforma semplicemente come:

$$A_\mu^{\prime(g)} = A_\mu^{(g)}(x) - \frac{i}{g}(\partial_\mu U(g(x)) \cdot U^{-1}(g(x))) \quad (1.92)$$

in virtù del fatto che

$$U(g(x)) \cdot A_\mu^{(g)}(x) \cdot U^{-1}(g(x)) = A_\mu^{(g)}(x) \cdot [U(g(x)) \cdot U^{-1}(g(x))] = A_\mu^{(g)}(x)$$

Il tensore del campo di forza si usa per costruire l'azione, poiché invariante e si ha

$$\mathcal{L}_{ABL} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (1.93)$$

Analogamente, una teoria di gauge si dice *non abeliana* se il gruppo che la caratterizza è un gruppo non abeliano e il commutatore che compare in (1.88) non si annulla. Il tensore di campo di forza in questo caso è gauge-covariante. Questo vuol dire che la dipendenza funzionale non viene alterata da un certo insieme di trasformazioni, in questo caso trasformazioni generate dal gruppo considerato. Per costruire un'azione invariante si usa la traccia del tensore e la corrispondente Lagrangiana è data come

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{2} \text{Tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \quad (1.94)$$

La Lagrangiana per una teoria di gauge non abeliana è chiamata anche di Yang-Mills, dai nomi dei due studiosi che estesero la teoria di gauge per gruppi abeliani anche ai gruppi non abeliani. L'esempio più importante dei concetti appena illustrati è il *Modello Standard* che risulta essere una $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -teoria di gauge. In particolare il gruppo $SU(3)$ descrive l'interazione forte e la corrispondente teoria di gauge prende nome di *Quantum chromodynamics* o *QCD*, il gruppo $SU(2)$ descrive l'interazione debole mentre il gruppo $U(1)$ descrive l'interazione elettromagnetica. La teoria di gauge $SU(2) \times U(1)$ è unificata nella teoria *elettrodebole*.

Nel capitolo 2 verrà presentata l'applicazione delle teorie di gauge abeliane e non nella trattazione dell'Elettrodinamica quantistica e della Cromodinamica quantistica.

Capitolo 2

Applicazioni delle teorie di gauge: QED e QCD

In questo capitolo ci si addentra nell'applicazione della teoria introdotta nel capitolo 1. Dopo un breve excursus sulle equazioni di Maxwell, si procede a definire il *potenziale di gauge* A_μ , il *tensore di Faraday* $F_{\mu\nu}$ e la *derivata covariante* D_μ : sono questi gli elementi fondamentali per la definizione di *trasformazioni di gauge elettromagnetiche*. In seguito, si ribalta l'argomento introducendo il *principio di gauge*: si postula esplicitamente l'invarianza sotto l'azione del gruppo di gauge abeliano $U(1)$. Questa è la strada che si segue anche in seguito, per introdurre le teorie di gauge per i gruppi non abeliani, chiamate anche teorie di Yang-Mills.

Partendo dal principio di gauge, viene affrontata quindi la Lagrangiana dell'Elettrodinamica, partendo da un campo fermionico libero e imponendo l'invarianza locale sotto il gruppo $U(1)$. Emerge che è possibile interpretare i termini che vi compaiono come particelle dei campi di materia e di gauge che interagiscono. Si procede poi con lo studio della Lagrangiana della Cromodinamica, richiedendo l'invarianza locale sotto il gruppo non abeliano $SU(3)$.

2.1 Equazioni di Maxwell: formalismo classico e covariante

Le equazioni di Maxwell sono un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali lineari che, insieme alla forza di Lorentz, costituiscono le leggi fondamentali che governano l'interazione elettromagnetica. Esse esprimono l'evoluzione temporale e i vincoli a cui è soggetto il campo elettromagnetico in relazione alle distribuzioni di carica e corrente elettrica da cui è generato. Facendo uso delle unità di misura di Heaviside-Lorentz con

$c, \mu_0, \epsilon_0 = 1$, le equazioni di Maxwell nel formalismo classico sono:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}\tag{2.1}$$

Quando le equazioni furono formulate, non si era a conoscenza delle due importanti proprietà che esse possiedono: *l'invarianza di Lorentz* e *la simmetria di gauge* che verranno analizzate ora. Innanzitutto è necessario introdurre il quadri-potenziale per scrivere le equazioni (2.1) in forma covariante, mettendo in luce l'invarianza di Lorentz. Osservando che il campo \vec{B} è solenoidale, ovvero la sua divergenza è nulla, è possibile definire il potenziale di \vec{B} come il vettore \vec{A} il cui rotore sia appunto il campo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}\tag{2.2}$$

grazie al fatto che la divergenza di un rotore è sempre nulla. Sostituendo il potenziale \vec{A} così definito in (2.1) otteniamo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{E} + \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0\tag{2.3}$$

Ciò che compare nelle parentesi, deve essere una quantità con rotore nullo. È possibile quindi introdurre un altro potenziale, questa volta scalare, Φ tale che soddisfi la richiesta

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi\tag{2.4}$$

Le espressioni per i due potenziali \vec{A} e Φ sono:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \Phi\end{aligned}\tag{2.5}$$

Definiamo il quadri-potenziale A^μ come

$$A^\mu = (\Phi, \vec{A})\tag{2.6}$$

Avendo il quadri-potenziale, seguendo il procedimento introdotto nel capitolo 1, è possibile definire il *Tensore di Faraday* o *Tensore del campo elettromagnetico* $F_{\mu\nu}$ come:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\tag{2.7}$$

Questo tensore non è altro che il tensore di campo di forza di gauge. Le equazioni di Maxwell, in forma *covariante* diventano

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu\nu} &= -J^\nu \\ \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} &= 0\end{aligned}\quad (2.8)$$

dove

$$F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}$$

e avrà componenti

$$F_{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}$$

cioè si ha un tensore completamente antisimmetrico. È possibile verificare immediatamente che le equazioni (2.8) sono analoghe alle (2.1)

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ -E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ -E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_y & -B_z \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}\quad (2.9)$$

Per $\nu = 0$, si ha

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu 0} &= \partial_0 F^{00} + \partial_i F^{i0} = \partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \\ &= -(\partial_1 E^1 + \partial_2 E^2 + \partial_3 E^3) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -J^0 = -\rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho\end{aligned}\quad (2.10)$$

Per $\nu = 1$ si ha

$$\partial_\mu F^{\mu 1} = \partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = \partial_t E^1 + \partial_2(-B^3) + \partial_3 B^2\quad (2.11)$$

La quale, insieme alle analoghe per $\nu = 2, 3$, ricostruisce l'equazione

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}\quad (2.12)$$

Analogamente si ha

$$\begin{aligned}\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} &= \partial_1 B^1 + \partial_2 B^2 + \partial_3 B^3 = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}\quad (2.13)$$

e con $\mu, \nu, \lambda = 0, 1, 2$ si ha

$$\partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} = \partial_t B^3 + \partial_1 E^2 + \partial_2(-E^1) = 0\quad (2.14)$$

che corrisponde alla terza componente di $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$. Le altre due possono essere ottenute con il procedimento analogo variando gli indici μ e ν . Le proprietà del tensore di Faraday derivano dalla sua definizione e dal fatto che è a sua volta definito grazie all'invarianza di gauge. Le caratteristiche saranno ora analizzate con più cura.

2.1.1 Invarianza di gauge per l'elettromagnetismo

Si consideri una particella di massa m , senza spin, non relativistica, soggetta al campo elettromagnetico, che si muove nello spazio. La particella sarà descritta dalla funzione d'onda $\psi(t, \vec{x})$ e la sua dinamica sarà descritta dall'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \quad (2.15)$$

dove l'Hamiltoniana del sistema è

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e\vec{A}}{c} \right)^2 + e\Phi \quad (2.16)$$

Se si introduce una funzione scalare $\chi(t, \vec{x})$ per la trasformazione dei potenziali Φ e \vec{A} , definiti in precedenza, nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} + \nabla\chi \\ \Phi' &= \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.17)$$

si vede che i campi \vec{E} e \vec{B} rimangono inalterati. Infatti si ha

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A}' &= \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \nabla\chi) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \nabla\chi = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \\ -\nabla\Phi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} &= -\nabla \left(\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} + \nabla\chi) = \\ &= -\nabla\Phi + \frac{1}{c} \nabla \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{c} \nabla \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} \right) = \vec{E} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Le trasformazioni (2.17) possono essere compattate in un'unica scrittura per il quadri-potenziale A^μ (2.6):

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi \quad (2.19)$$

Benché i campi \vec{E} e \vec{B} restano inalterati sotto le trasformazioni (2.17), l'Hamiltoniana (2.16) non rimane invariata con le trasformazioni dei potenziali. Questo significa che l'equazione di Schrödinger non è direttamente gauge-invariante per questa trasformazione, ma è necessario supporre che anche la funzione d'onda $\psi(t, \vec{x})$ possa cambiare. Poiché ciò che è osservabile è il modulo quadro della funzione d'onda, e non essa stessa, per rendere l'equazione di Schrödinger covariante sotto le trasformazioni (2.17), si postula che la funzione d'onda si trasformi come

$$\psi' = \psi \cdot e^{\frac{ie}{\hbar c} \chi(t, \vec{x})} \quad (2.20)$$

La modifica applicata alla funzione d'onda è semplicemente una trasformazione di fase e non influenza l'osservabile $|\psi(t, \vec{x})|^2$, che in meccanica quantistica rappresenta la densità

di probabilità di trovare la particella nel punto \vec{x} al tempo t . Anche considerando la densità di corrente \vec{J} , espressa come

$$\vec{J} = \psi^*(\nabla\psi) - (\nabla\psi)^*\psi \quad (2.21)$$

si verifica che essa non risulta essere invariante, una volta ridefinita la funzione d'onda poiché la funzione scalare χ dipende dalle coordinate e si ha infatti

$$\begin{aligned} \vec{J}' &= \psi'^*(\nabla\psi') - (\nabla\psi')^*\psi' = \\ &= \psi^*(t, \vec{x})e^{\frac{-ie}{\hbar c}\chi(t, \vec{x})} \cdot (\vec{\nabla}\psi(t, \vec{x})e^{\frac{ie}{\hbar c}\chi(t, \vec{x})} + \psi(t, \vec{x})\frac{ie}{\hbar c}\nabla\chi(t, \vec{x})e^{\frac{ie}{\hbar c}\chi(t, \vec{x})}) + \\ &- (\nabla\psi^*(t, \vec{x})e^{\frac{-ie}{\hbar c}\chi(t, \vec{x})} + \psi^*(t, \vec{x})\left(\frac{-ie}{\hbar c}\right)\nabla\chi(t, \vec{x})e^{\frac{-ie}{\hbar c}\chi(t, \vec{x})}) \cdot \psi(t, \vec{x})e^{\frac{ie}{\hbar c}\chi(t, \vec{x})} = \\ &= \psi^*(t, \vec{x})\nabla\psi + \psi^*(t, \vec{x})\psi(t, \vec{x})\frac{ie}{\hbar c}\nabla\chi(t, \vec{x}) - \nabla\psi^*(t, \vec{x})\psi(t, \vec{x}) + \\ &+ \psi^*(t, \vec{x})\psi(t, \vec{x})\frac{ie}{\hbar c}\nabla\chi(t, \vec{x}) \neq \psi^*(\nabla\psi) - (\nabla\psi)^*\psi \end{aligned} \quad (2.22)$$

Per far sì che sia gauge invariante, la cosa più semplice è ridefinire l'operatore differenziale, ottenendo quella che è stata introdotta come *derivata covariante*. Per farlo, si riscrive l'equazione di Schrödinger (2.16) come

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\Phi)\psi = \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\vec{A})^2\psi \quad (2.23)$$

e si definiscono le derivate covarianti come

$$\begin{aligned} -i\hbar\vec{D} &= -i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\vec{A} \rightarrow \vec{D} = \nabla - i\frac{e}{\hbar c}\vec{A} \\ i\hbar D_t &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\Phi \rightarrow D_t = \frac{\partial}{\partial t} - i\frac{e}{\hbar}\Phi \end{aligned} \quad (2.24)$$

L'insieme di

$$\begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} + \nabla\chi \\ \Phi' &= \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} \\ \psi' &= \psi \cdot e^{\frac{ie}{\hbar c}\chi(t, \vec{x})} \end{aligned} \quad (2.25)$$

prendono nome di *trasformazioni di gauge elettromagnetiche*.

Le trasformazioni elettromagnetiche possono essere scritte come

$$\begin{aligned} \vec{D}'\psi' &= \vec{D}'(\psi \cdot e^{\frac{ie}{\hbar c}\chi}) = e^{\frac{ie}{\hbar c}\chi} \cdot \vec{D}\psi \\ D_t'\psi' &= D_t'(\psi \cdot e^{\frac{ie}{\hbar c}\chi}) = e^{\frac{ie}{\hbar c}\chi} \cdot D_t\psi \end{aligned} \quad (2.26)$$

Osservando che la derivata spaziale che quella temporale agiscono nello stesso modo sulla funzione d'onda, possiamo definire la quadri-derivata D_μ

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) + \frac{ie}{\hbar c} (-\phi, \vec{A}) \quad (2.27)$$

e complessivamente le (2.26), unite nel quadrivettore, agiscono come

$$D'_\mu \psi' = D'_\mu (\psi \cdot e^{\frac{ie}{\hbar c} \chi(t, \vec{x})}) = e^{\frac{ie}{\hbar c} \chi(t, \vec{x})} \cdot D_\mu \psi \quad (2.28)$$

La teoria generale vuole che la derivata covariante si trasformi secondo (1.83) cioè come

$$D'_\mu = e^{\frac{ie}{\hbar c} \chi(t, \vec{x})} D_\mu e^{-\frac{ie}{\hbar c} \chi(t, \vec{x})} \quad (2.29)$$

e come il campo di materia. La costante di accoppiamento g è

$$g = \frac{e}{\hbar c} \quad (2.30)$$

che fornisce l'intensità dell'interazione elettromagnetica.

La derivata covariante D_μ è collegata al tensore di Faraday come spiegato in (1.90) ed infatti si ha

$$[D_\mu, D_\nu] = \frac{ie}{\hbar c} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \frac{ie}{\hbar c} F_{\mu\nu} \quad (2.31)$$

con $F_{\mu\nu}$ esattamente il tensore di Faraday.

Matematicamente, lo spazio dei parametri \mathcal{X} è lo spazio quadri-dimensionale di Minkowski \mathcal{M}^4 nel quale gli elementi sono denotati con il solito quadri-vettore x^μ . La funzione $\chi(t, \vec{x})$ introdotta per la trasformazione del quadri-potenziale A_μ , è una rappresentazione del gruppo delle matrici unitarie unidimensionali $U(1)$ che è quindi il gruppo di gauge. La trasformazione di gauge può essere denotata come:

$$\begin{aligned} U : \mathcal{M} &\rightarrow U(1) \\ (t, \vec{x}) &\rightarrow U(\chi(t, \vec{x})) = e^{\frac{ie}{\hbar c} \chi(t, \vec{x})} \end{aligned} \quad (2.32)$$

e il campo di materia, ovvero la funzione d'onda che descrive la particella di massa m e senza spin, soggetta al campo elettromagnetico, si trasforma come

$$\psi(t, \vec{x}) \rightarrow \psi'(t, \vec{x}) = U(\chi(t, \vec{x})) \cdot \psi(t, \vec{x}) \quad (2.33)$$

2.1.2 Il principio di gauge per l'elettromagnetismo

Diversamente dal ragionamento seguito nella sezione precedente, in cui si è partiti dall'Hamiltoniana

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\Phi \right) \psi = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \psi \quad (2.34)$$

per arrivare, con varie considerazioni, a scrivere le trasformazioni di gauge elettromagnetiche, si vuole ora *postulare* che la funzione d'onda risulti essere invariante sotto le trasformazioni di fase locale

$$\psi(t, \vec{x}) \rightarrow \psi'(t, \vec{x}) = e^{i\alpha(t, \vec{x})} \psi(t, \vec{x}) \quad (2.35)$$

Richiedere l'invarianza sotto la trasformazione di fase equivale a dire che la particella che viene descritta non debba più essere trattata come una particella libera, ma soggetta all'interazione con il campo A_μ , che è esattamente il quadri-potenziale del campo elettromagnetico. Negli esperimenti, la fase assoluta di un'onda non può essere misurata ma è possibile misurare le differenze di fase con gli esperimenti di interferenza. Fisicamente, aggiungere una fase alla funzione d'onda senza riscontrare gli effetti osservabili è equivalente ad avere un principio di simmetria o l'invarianza. Se si applica una trasformazione di fase globale, non si riscontrano effetti sperimentali: la scelta della fase è puramente convenzionale ed il principio di simmetria garantisce che ogni scelta sia perfettamente equivalente. Una trasformazione del tipo

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi \cdot e^{i\alpha} \quad (2.36)$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ è una simmetria rigida e dal teorema di Noether segue che si ha la conservazione della carica elettrica, un risultato ben noto dell'Elettromagnetismo. Scelta per convenzione una fase α , questa viene mantenuta poi in ogni punto dello spazio-tempo. Ci si chiede cosa succede invece quando si introduce una trasformazione di fase locale, cioè tale che $\alpha = \alpha(t, \vec{x})$ sia una funzione arbitraria dello spazio-tempo. Un esempio fisico di questa situazione potrebbe essere un esperimento di interferenza, in cui si fanno passare gli elettroni attraverso due fenditure e si immagini di porre un filtro polarizzatore dietro una delle due fenditure. Il filtro polarizzatore modificherà la fase delle particelle e questo cambiamento sarà osservabile sperimentalmente. In questo caso la trasformazione di fase sarà locale: per averla globale si dovrebbe estendere il filtro a tutto lo spazio-tempo o non metterlo affatto. In questa situazione, è necessario che la trasformazione sia trattata puntualmente e la trasformazione (2.36) diventa

$$\psi(t, \vec{x}) \rightarrow \psi'(t, \vec{x}) = \psi(t, \vec{x}) \cdot e^{i\alpha(t, \vec{x})} \quad (2.37)$$

L'equazione di Schrödinger per una particella libera

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(t, \vec{x}) = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (2.38)$$

non è invariante sotto la trasformazione (2.37): questo perché le derivate ∇ e ∂_t agiscono anche sulla fase $\alpha(t, \vec{x})$. Infatti, si ha

$$\partial_\mu \psi'(t, \vec{x}) = e^{i\alpha(t, \vec{x})} [\partial_\mu + i\partial_\mu \alpha(t, \vec{x})] \cdot \psi(t, \vec{x}) \quad (2.39)$$

Per rendere l'equazione di Schrödinger per una particella libera invariante è necessario eliminare la derivata della fase. Questo fisicamente equivale a rendere la particella soggetta ad una forza. In altre parole se si vuole modificare arbitrariamente la fase di una funzione d'onda, è necessario introdurre un campo di forza a cui essa sarà soggetta. Se si prende $\alpha(t, \vec{x}) = g\chi(t, \vec{x})$, con g costante di accoppiamento del campo, già introdotta nel paragrafo precedente, allora questa trasformazione non sarà altro che la trasformazione di gauge elettromagnetica e sarà sufficiente introdurre A_μ nella definizione della derivata covariante. Con queste modifiche, la particella si muoverà obbedendo all'equazione di Schrödinger e al potenziale A_μ .

Il fatto che l'interazione sia dettata da un'invarianza di fase locale è proprio il *principio di gauge*. Partendo dall'equazione per una particella libera, si arriva a scrivere l'equazione per una particella interagente, grazie alla sostituzione

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \quad (2.40)$$

Il principio di gauge fornisce una base all'unificazione delle interazioni fondamentali del Modello Standard come si vedrà nei paragrafi successivi.

2.2 Lagrangiana della QED

L'elettrodinamica quantistica è la teoria relativistica dei campi meglio conosciuta e ha costituito il modello in base al quale sviluppare le successive teorie. Infatti estendendo le sue proprietà, si è arrivati alla conclusione che tre delle quattro forze fondamentali, *forza nucleare forte*, *forza nucleare debole* e *forza elettromagnetica* sono basate sul gruppo di gauge $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. I risultati sperimentali confermano in maniera molto accurata la teoria e per questa ragione la QED è considerata il gioiello della fisica moderna.

Come introdotto nel primo capitolo, le equazioni del moto dei campi sono derivate da una Lagrangiana L grazie al Principio Variazionale. Questa a sua volta è ottenuta grazie all'integrazione sullo spazio della densità di Lagrangiana \mathcal{L} , funzione dei campi ϕ e dei loro gradienti. L'integrale sullo spazio-tempo della densità di Lagrangiana \mathcal{L} fornisce l'Azione S

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_i(x), \partial_\mu \phi_i(x)) \quad (2.41)$$

Le equazioni del moto si ottengono dalle equazioni di Eulero-Lagrange (1.4).

Le equazioni del moto devono essere covarianti, vale a dire tali che mantengono la stessa relazione funzionale quando si passa da un sistema di riferimento O ad un sistema di riferimento O' che vi è legato tramite una trasformazione di Lorentz, e la \mathcal{L} deve essere un invariante di Lorentz.

Le interazioni tra i campi sono introdotte imponendo che la Lagrangiana libera \mathcal{L}_0 soddisfi una simmetria di gauge locale e questo comporta l'aggiunta di un termine \mathcal{L}' :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}' \quad (2.42)$$

A ciascuna Lagrangiana costruita come sopra corrisponde un set di regole di Feynman che permettono di associare ai termini della Lagrangiana un insieme di propagatori e fattori di vertici per la loro interpretazione fisica. In particolare i propagatori sono identificati con i termini quadratici nei campi mentre i termini rimanenti sono associati ai vertici di interazione dettati da una costante di accoppiamento, che, quando è piccola, permette di trattarli perturbativamente.

Prima di tutto, occorre scrivere una Lagrangiana libera. Poiché si vogliono studiare i fermioni, si prende il campo di Dirac e la Lagrangiana, Lorentz-invariante, per un campo di Dirac libero e di massa m è

$$\mathcal{L}_{Dirac} = -\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (2.43)$$

dove $\bar{\psi}$ indica il coniugato di Dirac che ha l'espressione

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\beta = \psi^\dagger i\gamma^0 \quad (2.44)$$

Questa Lagrangiana è invariante sotto la trasformazione di simmetria rigida o globale, appartenente al gruppo $U(1)$

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x) \quad (2.45)$$

Il parametro α che compare nella trasformazione è infatti considerato costante.

Se si richiede l'invarianza locale o di gauge, considerando $\alpha = \alpha(t, \vec{x})$, che varia da punto a punto nello spazio-tempo, e che implica la trasformazione seguente per il campo di Dirac

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x) \quad (2.46)$$

e un'analogha trasformazione per il suo coniugato

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{-i\alpha(t, \vec{x})}\bar{\psi}(x) \quad (2.47)$$

si può verificare che la (2.43) perde l'invarianza. Più precisamente il termine di massa che compare nella (2.43) è invariante e si ha

$$m\bar{\psi}\psi \rightarrow m\bar{\psi}'\psi' = m\psi e^{-i\alpha(x)}e^{i\alpha(x)}\psi = m\bar{\psi}\psi \quad (2.48)$$

Tuttavia il termine contenente la derivata non lo è poiché la derivazione va ad agire sulla fase; esplicitando

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi &\rightarrow \bar{\psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\psi' = \bar{\psi}e^{-i\alpha(x)}\gamma^\mu\partial_\mu(e^{i\alpha(x)}\psi) = \\ &= \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i\partial_\mu\alpha(x)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \end{aligned} \quad (2.49)$$

Il termine contenente la $\partial_\mu \alpha(t, \vec{x})$ si annulla solo quando $\alpha(t, \vec{x})$ è costante; nella teoria però sono richieste delle funzioni arbitrarie. Per recuperare l'invarianza di gauge è necessario estendere l'azione. Come già fatto per elettromagnetismo classico in questo capitolo, si introduce la derivata covariante

$$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu(x) \quad (2.50)$$

e si richiede che $A_\mu(x)$ si trasformi sotto le trasformazioni di gauge in modo che valga la seguente legge di trasformazione

$$D_\mu \psi(x) \rightarrow D'_\mu \psi'(t, \vec{x}) = e^{i\alpha(t, \vec{x})} D_\mu \psi(x) \quad (2.51)$$

con D_μ definito in (2.50). Questo avviene se A_μ a sua volta si trasforma come

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x) \quad (2.52)$$

Sostituendo la derivata ∂_μ con D_μ si ottiene una Lagrangiana invariante

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \quad (2.53)$$

Infatti si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= -\bar{\psi}' \gamma^\mu D'_\mu \psi' - m \bar{\psi}' \psi' = \\ &= -e^{-i\alpha(x)} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu (e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi(x)) - m e^{-i\alpha(x)} \bar{\psi}(x) e^{i\alpha(x)} \psi(x) = \\ &= -e^{-i\alpha(x)} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi(x) - m \bar{\psi}(x) \psi(x) = \\ &= -\bar{\psi}(x) \gamma^\mu D_\mu \psi(x) - m \bar{\psi}(x) \psi(x) = \mathcal{L} \end{aligned} \quad (2.54)$$

Quindi la Lagrangiana definita in (2.53) è gauge invariante a differenza della (2.43). Si osserva che questo risultato si ha grazie all'introduzione del nuovo campo $A_\mu(x)$ che è interpretato come il potenziale vettore del campo elettromagnetico. Nella Lagrangiana completa, è necessario introdurre un termine che rappresenti la dinamica di questo campo. Dovendo l'intera Lagrangiana essere gauge-invariante, anche questo termine dovrà esserlo. Riprendendo il principio-guida del capitolo 1, si definisce il campo di forza di gauge $F_{\mu\nu}$ a partire dalle derivate covarianti come

$$[D_\mu, D_\nu] \psi = -i F_{\mu\nu} \psi \quad (2.55)$$

La derivata covariante, quando agisce su tensori, genera tensori, allora la quantità a destra deve essere anche essa un tensore. Esplicitando il commutatore delle derivate si ottiene

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] \psi &= [\partial_\mu - iA_\mu, \partial_\nu - iA_\nu] \psi = \\ &= [(\partial_\mu - iA_\mu)(\partial_\nu - iA_\nu) - (\partial_\nu - iA_\nu)(\partial_\mu - iA_\mu)] \psi = \\ &= -i(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \psi \end{aligned} \quad (2.56)$$

Questo termine è proprio quello che descrive la dinamica del campo A_μ e per costruzione è gauge-invariante. Naturalmente deve essere anche Lorentz-invariante, perciò si prende

$$\mathcal{L}_{MAX} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (2.57)$$

Il fatto che sia uno scalare di Lorentz si vede dal fatto che indici sono tutti correttamente sommati. A questo punto, si ha la Lagrangiana del campo di Dirac e quella di Maxwell che vanno a formare

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} &= \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{MAX} = \\ &= -\frac{1}{4e^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \end{aligned} \quad (2.58)$$

dove è stato introdotto e^{-2} per tenere conto del peso relativo tra i vari pezzi della Lagrangiana che sono separatamente gauge invarianti. Se si esplicita la definizione della derivata covariante (2.50) e si ridefinisce $A_\mu \rightarrow eA_\mu$ per via della normalizzazione standard del termine cinetico del campo, si ottiene

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \bar{\psi}(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi + ieA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (2.59)$$

Ogni termine di questa Lagrangiana può essere interpretato con un preciso significato fisico:

- il primo termine rappresenta la propagazione libera del campo A_μ : sono fotoni e il potenziale di gauge ne descrive la propagazione;
- il secondo termine rappresenta la propagazione degli elettroni, descritti dal campo di Dirac essendo dei fermioni;
- il terzo termine rappresenta l'interazione tra il campo di Dirac e il campo di gauge;

La costante e che è stata introdotta nella ridefinizione del potenziale $A_\mu \rightarrow eA_\mu$, rappresenta la costante di accoppiamento ed è identificata con la carica elementare dell'elettrone.

Il principio di gauge e il procedimento seguito hanno permesso di derivare, grazie all'introduzione della derivata covariante, l'interazione tra il campo di spin 1/2 degli elettroni e quello di spin 1 dei fotoni. Un metodo utile per visualizzare i termini della complessa Lagrangiana (2.59) è quello dei diagrammi di Feynman in Figura 2.1

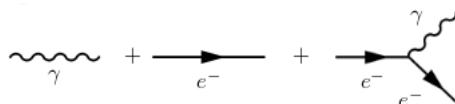


Figura 2.1: Diagrammi di Feynman associati ai vari termini della Lagrangiana \mathcal{L}

Quando la costante di accoppiamento è piccola, è possibile trattarla perturbativamente ed è possibile calcolare le ampiezze dei vari processi fisici descritti dalla QED in termini delle ampiezze parziali corrispondenti ai diagrammi di Feynman che si possono costruire con il vertice elementare che compare nella Lagrangiana (2.59). Un altro importante elemento che deriva dalla teoria è il fatto che i fotoni non possono avere massa. Infatti, se così non fosse, si avrebbe il termine di un fotone massivo nella \mathcal{L}_{QED} , espresso da

$$\mathcal{L}_\gamma = \frac{1}{2}m^2 A^\mu A_\mu \quad (2.60)$$

Questo termine tuttavia distruggerebbe l'invarianza di gauge poiché:

$$A_\mu A^\mu \rightarrow A'^\mu A'_\mu = (A^\mu + \partial_\mu \alpha(x))(A_\mu + \partial_\mu \alpha(x)) \neq A^\mu A_\mu \quad (2.61)$$

Pertanto, l'invarianza di gauge porta all'esistenza di fotoni non massivi.

2.3 Geometria dell'invarianza di gauge

Nel paragrafo precedente si è visto come, postulando l'invarianza sotto la trasformazione di fase locale

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(t, \vec{x})} \psi(x) \quad (2.62)$$

è possibile ottenere una \mathcal{L} invariante, al prezzo di introdurre la derivata covariante D_μ . La trasformazione (2.62) rappresenta una rotazione di angolo $\alpha(x)$ che varia arbitrariamente da punto a punto, essendo funzione di x . Non è stato difficile verificare che il termine di massa $m\bar{\psi}\psi$ è invariante sotto la trasformazione (2.62) mentre il termine di energia cinetica, contenente le derivate, è stato quello che ha richiesto l'introduzione di D_μ . Al di là degli aspetti matematici, è possibile esplorare gli aspetti geometrici della teoria.

In generale, la derivata di $\psi(x)$ nella direzione di un generico vettore n^μ , si può definire con un'operazione di limite

$$n^\mu \partial_\mu \psi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\psi(x + \epsilon n) - \psi(x)] \quad (2.63)$$

La domanda che sorge spontanea è cosa vuol dire sottrarre il campo valutato nei due diversi punti, dato che questi presentano trasformazioni diverse sotto (2.62). Per rendere l'operazione lecita è necessario introdurre un fattore scalare che compensi la differenza di fase tra i punti considerati. Il modo più semplice per farlo è definire una funzione scalare $U(y, x)$ con la seguente legge di trasformazione

$$U(y, x) \rightarrow e^{i\alpha(y)} U(y, x) e^{-i\alpha(x)} \quad (2.64)$$

e che abbia la proprietà di restituire 1 quando i due punti coincidono e di essere una fase pura nel caso contrario, ovvero $U(y, x) = e^{i\Phi(y, x)}$. Grazie al fatto che $U(y, x)\psi(x)$ e $\psi(y)$

si trasformano nello stesso modo con la (2.62), è possibile eseguire la (2.63):

$$n^\mu D_\mu \psi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\psi(x + \epsilon) - U(x + \epsilon n, x) \psi(x)] \quad (2.65)$$

dove D_μ è la solita derivata covariante. Per esplicitare la (2.65) si prendono due punti a distanza infinitesima. Se $U(y, x)$ è una funzione continua dei due punti y e x , allora è possibile svilupparla come

$$U(x + \epsilon n, x) = 1 + ie\epsilon n^\mu A_\mu + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.66)$$

dove la costante e compare esplicitamente. Il coefficiente di ϵn^μ è un nuovo campo vettoriale A_μ che, visto il suo ruolo, prende nome di *connessione*. La derivata covariante prende la forma

$$D_\mu \psi(x) = \partial_\mu \psi(x) - ie A_\mu \psi(x) \quad (2.67)$$

Inserendo la (2.66) nella (2.64) si trova che A_μ si trasforma come

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \quad (2.68)$$

Questa espressione è consistente e si può verificare che la derivata si trasforma come il campo di materia:

$$\begin{aligned} D_\mu \psi(x) &\rightarrow \left[\partial_\mu - ie \left(A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha \right) \right] e^{i\alpha(x)} \psi(x) = \\ &= e^{i\alpha(x)} (\partial_\mu - ie A_\mu) \psi(x) = e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi(x) \end{aligned} \quad (2.69)$$

La derivata covariante e la legge di trasformazione per la connessione A_μ seguono entrambe dall'aver postulato la simmetria locale. Come precedentemente, per completare la trattazione, è necessario introdurre l'energia cinetica per il campo A_μ : un termine invariante che dipenda da A_μ , dalle sue derivate ma non da ψ . Questo termine può essere ricavato dal commutatore, come è stato fatto in precedenza, (2.56) ma anche dalla funzione $U(y, x)$ come si vedrà ora. Per prima cosa è necessario sviluppare la (2.66) all'ordine successivo in ϵ , con la condizione, per semplificare il lavoro, $(U(x, y))^\dagger = U(y, x)$; si ottiene

$$U(x + \epsilon n, x) = \exp \left[-ie\epsilon n^\mu A_\mu \left(x + \frac{\epsilon}{2} n \right) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right] \quad (2.70)$$

Usando questo sviluppo, è possibile collegare le direzioni delle differenze di fase lungo un piccolo quadrato nello spazio-tempo per definire $U(x)$, come in Figura 2.2

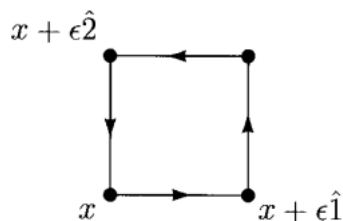


Figura 2.2: Quadratino del piano per la definizione di connessione

nel seguente modo

$$U(x) \equiv U(x, x + \hat{2})U(x + \epsilon\hat{2}, x + \epsilon\hat{1} + \epsilon\hat{2}) \times U(x + \epsilon\hat{1} + \epsilon\hat{2}, x + \epsilon\hat{1})U(x + \epsilon\hat{1}, x) \quad (2.71)$$

La legge di trasformazione (2.64) per $U(x)$ implica l'invarianza locale di (2.71). Nel limite per $\epsilon \rightarrow 0$ emerge anche l'invarianza locale della funzione A_μ . Inserendo (2.70) si ottiene

$$U(x) = \exp \left\{ -ie\epsilon \left[-A_2 \left(x + \frac{\epsilon}{2}\hat{2} \right) - A_1 \left(x + \frac{\epsilon}{2}\hat{1} + \epsilon\hat{2} \right) + A_2 \left(x + \epsilon\hat{1} + \frac{\epsilon}{2}\hat{2} \right) + A_1 \left(x + \frac{\epsilon}{2}\hat{1} \right) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right\} \quad (2.72)$$

e sviluppando l'esponenziale in potenze di ϵ , si riduce a

$$U(x) = 1 - i\epsilon^2 e [\partial_1 A_2(x) - \partial_2 A_1(x)] + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (2.73)$$

La struttura

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.74)$$

è localmente invariante e il procedimento mostra l'origine geometrica del tensore $F_{\mu\nu}$.

2.4 Gruppo $SU(N)$: simmetrie rigide e locali

La trattazione seguita finora ha permesso di descrivere in maniera completa l'Elettrodinamica quantistica, la quale può essere vista come una teoria di gauge abeliana con gruppo di simmetria $U(1)$. La procedura può essere estesa ai gruppi non abeliani. Questi modelli sono alla base del *Modello Standard* delle interazioni fondamentali: interazioni elettrodeboli e forti. Nel primo capitolo è stata introdotta la definizione di un gruppo e le proprietà basilari di questi. Riprendendo alcuni concetti, si vuole porre una maggior attenzione sul gruppo $SU(N)$, ovvero il gruppo delle matrici speciali unitarie, sottogruppo di $U(N)$. Infatti si lavorerà più avanti con il gruppo $SU(3)$ al quale è collegata l'azione della Cromodinamica quantistica.

Il gruppo $SU(N)$ è un gruppo di Lie, cioè un gruppo dipendente in modo continuo da uno o più parametri, non abeliano. Un elemento $g \in G$, connesso all'identità, può essere parametrizzato con le coordinate α_a e usando i generatori hermitiani T^a , tali che soddisfino le seguenti proprietà

- $U = e^{i\alpha_a T^a} \in G$ con $a = 1, \dots, \dim G$: ogni elemento arbitrario del gruppo deve poter essere scritto nella forma esponenziale. Un elemento del gruppo è parametrizzato dalle coordinate α_a ;
- $[T^a, T^b] = i f^{ab}_c T^c$: è l'algebra di Lie soddisfatta dai generatori infinitesimi T^a . Le costanti f^{ab}_c sono chiamate *costanti di struttura* e caratterizzano il gruppo G .
- $\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}$: è una scelta di normalizzazione dei generatori nella rappresentazione fondamentale ed identifica la *metrica di Killing*. La normalizzazione scelta produce la delta di Kronecker δ^{ab} come metrica di Killing; è necessario che sia definita positiva, ragione per cui verranno considerati solo i gruppi compatti.
- $f^{abc} = f^{ab}_d \delta^{dc}$: l'espressione che permette di alzare e abbassare gli indici delle costanti di struttura con la metrica. Le costanti sono completamente antisimmetriche in tutti gli indici.
- $[[T^a, T^b], T^c] + [[T^b, T^c], T^a] + [[T^c, T^a], T^b] = 0 \rightarrow f^{ab}_d f^{dc}_e + f^{bc}_d f^{da}_e + f^{ca}_d f^{db}_e = 0$: deve valere l'identità di Jacobi;
- $(T^a_{\text{agg}})^b_c = -i f^{ab}_c$: è la rappresentazione aggiunta

Per lavorare opportunamente con i gruppi, è utile inoltre introdurre la definizione di *rappresentazione*. Una rappresentazione di un gruppo astratto G è una realizzazione delle relazioni moltiplicative del gruppo G in un corrispondente gruppo di matrice quadrate. Le matrici devono essere pensate come operatori che agiscono su opportuni spazi vettoriali V , la cui dimensione è la dimensione della rappresentazione. Una rappresentazione è quindi un'applicazione R tale che:

$$\begin{aligned} R : G &\rightarrow \text{Gl} \\ g &\rightarrow R(g) \end{aligned} \tag{2.75}$$

dove Gl è il gruppo delle matrici quadrate $N \times N$, invertibili e K è un campo. Devono essere valide le seguenti, per garantire le proprietà del gruppo

$$\begin{aligned} R(g_1) \cdot R(g_2) &= R(g_1 \cdot g_2) \\ R(e) &= I \end{aligned}$$

Quando si usano delle matrici per definire il gruppo, si definisce immediatamente quella che prende il nome di *rappresentazione fondamentale* o *definite*. Se $R(g)$ rappresenta

tale matrice e v^a è l'elemento dello spazio vettoriale V su cui agisce, allora si ha:

$$v^a \rightarrow v'^a = [R(g)]^a_b v^b \quad (2.76)$$

dove $[R(g)]^a_b$ descrive al variare degli indici gli elementi della matrice. La rappresentazione fondamentale non è l'unica ed è utile conoscere le altre rappresentazioni e le loro dimensioni poiché i tensori su cui agiscono possono essere usati per descrivere in modo conveniente quantità fisiche associate a modelli dove G agisce come gruppo di simmetria. Due rappresentazioni si dicono *equivalenti* quando sono collegate da trasformazioni di similitudine; in altre parole $R(g)$ e $\tilde{R}(g)$ sono equivalenti se

$$\tilde{R}(g) = AR(g)A^{-1} \quad (2.77)$$

$\forall g \in G$. Le rappresentazioni equivalenti definiscono fundamentalmente la stessa rappresentazione e l'equazione (2.77) rappresenta un cambio di base dello spazio vettoriale V su cui le matrici agiscono. Una rappresentazione si dice *riducibile* quando è equivalente ad una rappresentazione diagonale a blocchi e può essere scritta come

$$R(g) = R_1(g) \oplus R_2(g) \oplus \cdots \oplus R_n(g) \quad (2.78)$$

Una rappresentazione è *irriducibile* quando non è possibile ridurla come sopra. Dalle rappresentazioni irriducibili inequivalenti è possibile definire tutte le altre. A partire dalla rappresentazione fondamentale, che agisce sullo spazio vettoriale V , è possibile definire automaticamente altre tre rappresentazioni: $R^*(g)$, complessa coniugata, che agisce su V^* , $R^{-1,T}(g)$, inversa trasposta, che agisce sullo spazio \tilde{V} e $R^{-1,\dagger}(g)$, inversa hermitiana, che agisce su \tilde{V}^* . Procedendo in ordine, si introducono le seguenti notazioni matematicamente

$$\begin{aligned} v^a &\rightarrow v'^a = [R(g)]^a_b v^b \\ v^{\dot{a}} &\rightarrow v'^{\dot{a}} = [R^*(g)]^{\dot{a}}_{\dot{b}} v^{\dot{b}} \\ v_a &\rightarrow v'_a = [R^{-1,T}(g)]_a^b v_b \\ v_{\dot{a}} &\rightarrow v'_{\dot{a}} = [R^{-1,\dagger}(g)]_{\dot{a}}^{\dot{b}} v_{\dot{b}} \end{aligned}$$

Solitamente, data una rappresentazione, è possibile decomporla in rappresentazioni irriducibili, studiando i tensori su cui agiscono. Concentrandosi sul gruppo $SU(N)$, di cui le proprietà caratteristiche sono descritte sopra, si possono studiare le varie rappresentazioni. Le prime naturalmente sono la rappresentazione fondamentale che si indica con la sua dimensione N e la sua complessa coniugata \bar{N} , chiamata anche l'antifondamentale. Facendo il prodotto tensoriale $N \otimes N$, si hanno le rappresentazioni simmetrica e antisimmetrica che si indicano rispettivamente con le loro dimensioni

$$N \otimes N = \frac{N(N+1)}{2} \oplus \frac{N(N-1)}{2} \quad (2.79)$$

Se invece si fa il prodotto tensoriale tra $N \otimes \bar{N}$ si ottengono la rappresentazione banale e la cosiddetta rappresentazione aggiunta

$$N \otimes \bar{N} = 1 \oplus (N^2 - 1) \quad (2.80)$$

Riassumendo, per il gruppo SU(N) si hanno le seguenti rappresentazioni irriducibili:

$$1, N, \bar{N}, N^2 - 1, \frac{N(N+1)}{2}, \frac{\overline{N(N+1)}}{2}, \frac{N(N-1)}{2}, \frac{\overline{N(N-1)}}{2}, \quad (2.81)$$

in ordine sono la rappresentazione banale, fondamentale e la sua complessa coniugata, l'aggiunta, la simmetrica e la sua coniugata e l'antisimmetrica e la sua complessa coniugata.

Il discorso analogo non è stato fatto per $U(1)$ perché tutte le sue rappresentazioni irriducibili unitarie sono uno-dimensionali e non si sarebbe apprezzato il procedimento.

2.4.1 Azione con simmetria rigida SU(N)

Si considerino n campi di Dirac liberi identici di massa m . Si può assemblarli in vettori colonna

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \vdots \\ \psi^n \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

e in vettori riga

$$\bar{\psi} = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_n) \quad (2.83)$$

La Lagrangiana libera di questi N campi di Dirac è data da

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (2.84)$$

Sotto l'azione del gruppo $SU(N)$, i campi si trasformano come

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = U\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)U^\dagger = \bar{\psi}(x)U^{-1} \end{aligned} \quad (2.85)$$

dove $U \in SU(N)$ e, poiché è unitaria, vale $U^\dagger = U^{-1}$. Con le (2.85) la Lagrangiana (2.84) risulta essere invariante, dato che U non dipende dalle coordinate, e infatti si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= -\bar{\psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\psi' - m\bar{\psi}'\psi' = \\ &= \bar{\psi}U^{-1}\gamma^\mu\partial_\mu(U\psi(x)) - m\bar{\psi}U^{-1}U\psi(x) = -\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi = \mathcal{L} \end{aligned} \quad (2.86)$$

Si tratta di trasformazioni rigide o globali perché i parametri α_a che parametrizzano l'elemento del gruppo $SU(N)$ considerato sono costanti. Dal teorema di Noether segue che ci sono n correnti conservate.

2.4.2 Azione con simmetria locale e derivata covariante D_μ

Quando si cerca di rendere locale la simmetria $SU(N)$, la Lagrangiana (2.84) non è più invariante, poiché la derivata ∂_μ agisce anche sugli α^a che dipendono dalle coordinate

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= -\bar{\psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\psi' - m\bar{\psi}'\psi' = -\bar{\psi}(x)U^{-1}\gamma^\mu\partial_\mu(U\psi(x)) - m\bar{\psi}(x)U^{-1}U\psi(x) = \\ &= -\bar{\psi}(x)U^{-1}\gamma^\mu(\partial_\mu U)\psi(x) - \bar{\psi}(x)U^{-1}\gamma^\mu U\partial_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}\psi \neq \mathcal{L}\end{aligned}\quad (2.87)$$

Con il procedimento già seguito per le teorie di gauge abeliane, per rendere la (2.84) invariante sotto le trasformazioni di gauge locali, si introduce la derivata covariante, definita da

$$D_\mu = \partial_\mu + W_\mu(x) \quad (2.88)$$

dove $W_\mu(x)$ è la *connessione*, introdotta geometricamente nel paragrafo precedente, o *potenziale di gauge*. W_μ ha valori nell'algebra di Lie ed quindi è formato da matrici $N \times N$ per ogni valore dell'indice μ . È possibile sviluppare il potenziale di gauge W_μ in termini dei generatori T^a dell'algebra di Lie come segue

$$W_\mu(x) = -iW_\mu^a(x)T^a \quad (2.89)$$

La derivata covariante deve trasformarsi come il campo di materia

$$D_\mu\psi(x) \rightarrow D'_\mu\psi'(x) = U(x)D_\mu\psi(x) \quad (2.90)$$

e si ottiene la legge di trasformazione del potenziale di gauge W_μ

$$W_\mu(x) \rightarrow W'_\mu(x) = U(x)\partial_\mu U^{-1}(x) + U(x)W_\mu(x)U^{-1}(x) \quad (2.91)$$

Infatti, combinando le leggi di trasformazione introdotte, si ha

$$\begin{aligned}D'_\mu\psi'(x) &= (\partial_\mu + W'_\mu)\psi' = \\ &= U(\partial_\mu + W_\mu)\psi = U(\partial_\mu + W_\mu)U^{-1}U\psi = \\ &= U(\partial_\mu + W_\mu)U^{-1}\psi' = \partial_\mu\psi' + U[(\partial_\mu + W_\mu)U^{-1}]\psi'\end{aligned}\quad (2.92)$$

Il tensore di *curvatura* o tensore di *campo di forza* in generale è dato da

$$[D_\mu, D_\nu] = F_{\mu\nu} \quad (2.93)$$

ed esplicitando la definizione della derivata covariante (2.88), si ha

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + [W_\mu, W_\nu]. \quad (2.94)$$

Il tensore di campo di forza si trasforma in modo covariante

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = UF_{\mu\nu}U^{-1} \quad (2.95)$$

Con la derivata covariante D_μ , la Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}(\gamma^\mu D_\mu + m)\psi \quad (2.96)$$

diventa gauge-invariante. Infatti

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= -\bar{\psi}'(\gamma^\mu D'_\mu + m)\psi'(x) = -\bar{\psi}'\gamma^\mu D'_\mu\psi' - \bar{\psi}'\psi'm = \\ &= -\bar{\psi}'\gamma^\mu[U(\partial_\mu + W_\mu)U^{-1}\psi'] - m\bar{\psi}'\psi' = \\ &= -\bar{\psi}U^{-1}\gamma^\mu[U(\partial_\mu + W_\mu)\psi] - m\bar{\psi}\psi = -\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi = \mathcal{L} \end{aligned} \quad (2.97)$$

Per scrivere la Lagrangiana completa, è necessario inserire il termine che descriva la dinamica dei campi W_μ , senza violare l'invarianza di gauge e tale che sia Lorentz-invariante. Il modo più semplice per farlo è quello di sfruttare la traccia del tensore del campo di forza $F_{\mu\nu}$

$$\mathcal{L}_{DIN} = \frac{1}{2} \text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} \quad (2.98)$$

Come prima, si introduce una costante di accoppiamento g per definire il peso relativo tra le due azioni gauge-invarianti e la \mathcal{L} totale diventa

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2} \text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) - \bar{\psi}(\gamma^\mu D_\mu + m)\psi \quad (2.99)$$

Essa è invariante sotto le trasformazioni di gauge ricapitolate qui di seguito

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = U(x)\psi(x) \\ W_\mu(x) &\rightarrow W'_\mu(x) = U(x)(\partial_\mu + W_\mu(x))U^{-1}(x) \end{aligned} \quad (2.100)$$

Le precedenti (2.100) possono essere anche infinitesime. Infatti, se $U = e^{i\alpha_a T^a}$ è l'elemento del gruppo considerato e si pone $\alpha \equiv -i\alpha_a T^a$ con $\alpha_a \ll 1$, è possibile sviluppare l'esponenziale come $U = 1 - \alpha + \mathcal{O}(\alpha^2)$. Da qui seguono le trasformazioni di gauge infinitesime

$$\begin{aligned} \delta\psi &= -\alpha\psi \\ \delta\bar{\psi} &= \bar{\psi}\alpha \\ \delta W_\mu &= \partial_\mu + [W_\mu, \alpha] \end{aligned} \quad (2.101)$$

Per normalizzare in modo canonico l'azione dei campi di gauge, si ridefinisce $W_\mu \rightarrow gW_\mu$, esplicitando la costante di accoppiamento g che è analoga alla carica elettrica e introdotta per normalizzare la \mathcal{L}_{QED} . Riprendendo la (2.89), che si riporta qui di seguito per comodità

$$W_\mu(x) = -iW_\mu^a(x)T^a \quad (2.102)$$

è possibile sviluppare in termini di generatori T^a anche il tensore di campo di forza $F_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu}(x) = -iF_{\mu\nu}^a(x)T^a \quad (2.103)$$

e, poiché il tensore $F_{\mu\nu}$ è definito a partire dalle derivate covarianti come si vede in (2.94), vale

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + gf^{abc}W_\mu^b W_\nu^c \quad (2.104)$$

Questo termine è molto diverso rispetto al tensore del campo di forza della QED e discende dal fatto che il gruppo $SU(N)$ è non abeliano. Infatti il commutatore produce dei termini quadratici e cubici nei campi di gauge. Questi ultimi sono interpretati come le auto-interazioni tra i bosoni vettori e la ragione di questo è che i bosoni stessi sono dotati della carica g grazie alla quale possono interagire, a differenza per esempio dei fotoni che non hanno carica. Ridefinendo per comodità anche i parametri delle coordinate $\alpha^a \rightarrow g\alpha^a$, le trasformazioni di gauge infinitesime (3.5) sono esprimibili come

$$\begin{aligned} \delta\psi(x) &= ig\alpha^a T^a \psi(x) \\ \delta W_\mu^a(x) &= \partial_\mu \alpha^a + gf^{abc}W_\mu^b(x)\alpha^c(x) \end{aligned} \quad (2.105)$$

La Lagrangiana complessiva, con le trasformazioni infinitesime, diventa

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - \bar{\psi}(\gamma^\mu(\partial_\mu - igW_\mu^a T^a) + m)\psi \quad (2.106)$$

nella quale, è stato aggiunto il termine che descriva la dinamica dei campi di gauge W_μ (2.98), tenendo conto della sua gauge e Lorentz invarianza. Il primo termine della (2.106) descrive la propagazione libera dei campi W_μ^a : come per i fotoni, anche gli $N^2 - 1$ campi previsti dalla teoria devono essere senza massa per non rompere l'invarianza di gauge. Si vedrà in seguito che è possibile rendere questi bosoni massivi introducendo il meccanismo di rottura spontanea di simmetria. Il secondo termine della (2.106) descrive la propagazione libera dei campi ψ insieme alla loro interazione con il campo di gauge. La costante g è la costante di accoppiamento e, quando il suo valore è piccolo, può essere trattata perturbativamente. Inoltre solo da essa dipendono tutti i vertici di interazione tra i campi di spin $1/2$ e 1 . Le cariche non abeliane corrispondono alla rappresentazione del gruppo di gauge scelta per i campi ψ : in questo caso si è lavorato con la rappresentazione fondamentale. In generale una teoria invariante rispetto a trasformazioni locali di un gruppo di simmetria non abeliano è detta teoria di Yang-Mills.

È importante ricordare che la teoria richiede l'esistenza di bosoni di gauge di massa nulla e che c'è una corrispondenza $1 \rightarrow 1$ tra la dimensione del gruppo di gauge e il numero dei campi di gauge a massa nulla. Nel caso del gruppo $SU(2)$ per esempio tale dimensione è 3 poiché 3 sono i generatori mentre per $SU(3)$ la dimensione è 8, pari al numero dei generatori. Proprio l'applicazione di quest'ultimo gruppo sarà ora analizzata in dettaglio per descrivere l'azione della *Cromodinamica quantistica*.

2.5 Lagrangiana della QCD

L'azione della Cromodinamica quantistica è basata sul gruppo $SU(3)$. Gli otto generatori di questo gruppo nella rappresentazione fondamentale sono definiti tramite le matrici di Gell-Mann λ^a , che generalizzano le matrici di Pauli σ^i . Queste matrici sono

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.107)$$

e sono normalizzate secondo la convenzione

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (2.108)$$

Questi generatori compaiono nella rappresentazione esponenziale di un elemento arbitrario del gruppo $SU(3)$ della forma

$$U = \exp\left(-i\alpha^a \frac{\lambda^a}{2}\right)$$

Calcolando l'algebra di Lie

$$[T^a, T^b] = i f^{ab} T^c \quad (2.109)$$

si possono trovare le costanti di struttura che identificano il gruppo $SU(3)$. I fermioni della teoria, cioè i quarks, vengono assegnati alla rappresentazione fondamentale di tripletto del gruppo $SU(3)$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_G \\ \psi_B \end{pmatrix} \quad (2.110)$$

che rispetto ad una trasformazione locale del gruppo diventa

$$\psi \rightarrow \psi' = \exp\left(-i\alpha^a \frac{\lambda^a}{2}\right) \psi \quad (2.111)$$

dove α^a sono i parametri reali che specificano la trasformazione, mentre i generatori soddisfano l'algebra di Lie. Il gruppo $SU(3)$ contiene ben sei campi fermionici, che

si trasformano nella rappresentazione fondamentale e descrivono i sei sapori di quark conosciuti: *up, down, char, strange, top, bottom*. Ciascun sapore di quark è degenere poiché si trasforma nella rappresentazione antisimmetrica: si dice che sono *colorati*, e senza un significato fisico, questi colori sono rosso, verde, blu. Le antiparticelle, gli antiquark, si trasformano nella rispettiva rappresentazione coniugata. In particolare si dice che la *QCD* è una teoria di Yang-Mills con simmetria di gauge *esatta* del gruppo *SU(3)* di colore: l'informazione cruciale che è possibile combinare i colori di un quark per ottenere uno stato senza colore, cioè uno scalare, oppure uno stato di otto colori. Come sempre, per scrivere la Lagrangiana completa, si parte da una Lagrangiana fermionica libera

$$\mathcal{L}_{FREE} = -\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (2.112)$$

Per richiedere l'invarianza rispetto a trasformazioni di gauge locali, si sostituisce la derivata ∂_μ con la derivata covariante D_μ , che porta con sé l'introduzione di 8 campi di gauge bosonici che interagiscono con i fermioni. Per ultimo, si aggiunge anche il termine cinetico dei campi. Sommando per i 6 diversi sapori di quark si ottiene la Lagrangiana completa

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - \sum_{f=1}^6 \bar{\psi}_f (\gamma^\mu D_\mu + m_f) \psi_f = \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - \sum_{f=1}^6 \bar{\psi}_f (\gamma^\mu \partial_\mu + m_f) \psi_f + i\frac{g}{2}W_\mu^a \sum_{f=1}^6 \bar{\psi}_f \gamma^\mu \lambda^a \psi_f \end{aligned} \quad (2.113)$$

dove l'indice f rappresenta i vari sapori di quark considerati, u, d, c, s, t, b . Poiché i quark diversi hanno masse diverse, anche la massa m ha il pedice corrispondente. I campi di gauge W_μ sono otto in totale: sono le componenti di un ottetto nella rappresentazione aggiunta di *SU(3)*. È possibile interpretare i termini della \mathcal{L} con i diagrammi di Feynman in Figura 2.3

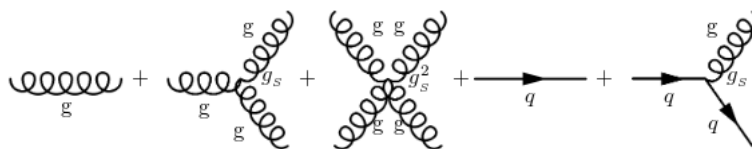


Figura 2.3: Termini della \mathcal{L} con i diagrammi di Feynman

I termini della (2.113) sono in ordine il termine cinetico dei gluoni, compresi i termini quadratici e cubici delle loro auto-interazione, i termini cinetici e di massa dei quark, e i termini di interazione tra i campi fermionici e i bosoni che mediano l'interazione. La costante g è la costanti di accoppiamento.

La Lagrangiana (2.113) possiede anche altre simmetrie. Una simmetria rigida sempre presente è $U(1)$ che ruota tutti i campi dei quark con la stessa fase: la carica conservata è *il numero barionico*. Questa simmetria è conservata anche dalle altre interazioni fondamentali. Ci sono poi altre simmetrie $U(1)$ che ruotano separatamente i campi fermionici e danno origine alle leggi di conservazione dei *numeri fermionici*: *carica di stranezza* S , *carica di charm* C etc. Queste simmetrie sono esatte solo per la QCD e la QED : la forza debole le viola essendo responsabile del decadimento debole e la conseguente modifica dei sapori. In totale ci sono 6 cariche $U(1)$ conservate, una per ogni sapore di quark, e il numero barionico non è altro che la loro combinazione. Ci sono poi alcune simmetrie approssimate. Nel limite in cui le masse di alcuni quark sono considerate identiche (come nel caso dei quarks up e down) c'è un'aggiuntiva simmetria rigida non abeliana. Nel caso degli up e down si parla di simmetria rigida $SU(2)$ corrispondente all'isospin forte. Un esempio fisico può essere quello dei mesoni π^-, π^0, π^+ .

Per concludere questa parte vale la pena sottolineare alcuni fatti; per prima cosa, dai risultati ottenuti in questo capitolo, è chiaro che aggiungendo dei termini opportuni alla derivata ∂_μ “si costruisce” una derivata covariante D_μ che permette di scrivere una Lagrangiana invariante rispetto a trasformazioni di gauge locali, in tutti gli spazi interni di trasformazione che si vogliono considerare. Tuttavia non ci sono principi teorici che possano suggerire quali spazi interni di trasformazione esaminare; a oggi i dati sperimentali suggeriscono di costruire tale descrizione del gruppo $SU(3)$ di colore per le interazioni forti, e sul gruppo $SU(2) \times U(1)$ per l'interazione elettrodebole. Il secondo fatto è che mentre l'invarianza globale porta alla conservazione della corrente, la richiesta di invarianza locale porta all'introduzione dei potenziali di gauge. Si può dimostrare che così come i fotoni devono essere di massa nulla, come si vede in (2.61), anche i campi bosonici introdotti devono essere sempre di massa nulla affinché l'invarianza locale non sia rotta; questo fatto è in disaccordo con i risultati sperimentali e si vedrà nel prossimo capitolo qual è il meccanismo che permette di generare la massa dei bosoni senza compromettere la teoria. Infine si può dimostrare che l'invarianza di gauge locale non è mai possibile per una teoria di campi liberi ma soltanto per una teoria di campi interagenti: l'invarianza di gauge può essere assunta come principio per lo sviluppo di teorie di gauge nelle quali, a partire da Lagrangiane libere, l'interazione sarà sempre introdotta come richiesta di invarianza di gauge locale.

Capitolo 3

Rottura spontanea di simmetria

Nel capitolo precedente si è visto che la simmetria di gauge non è compatibile con la presenza di termini di massa per i corrispondenti campi di gauge. L'invarianza di gauge può quindi apparentemente funzionare per la QED e la QCD poiché sia i fotoni che i gluoni hanno anche sperimentalmente massa nulla. Le masse sperimentali dei bosoni dell'interazione debole invece sono nell'ordine di 100 GeV. Nulla apparentemente vieta di rompere esplicitamente la simmetria inserendo nella Lagrangiana dei termini per le masse dei campi di gauge ma il risultato che si ottiene in questo modo è proibito dal vincolo di rinormalizzabilità. Si deve quindi trovare un modo per mantenere l'invarianza di gauge nelle interazioni deboli, permettendo di generare le masse dei bosoni senza distruggere la rinormalizzabilità della teoria. Questo è possibile grazie all'introduzione del meccanismo di *rottura spontanea di simmetria di gauge*. In generale, si parla di rottura spontanea di simmetria quando una Lagrangiana che possiede una certa simmetria descrive modelli il cui stato fondamentale (stato di energia più bassa) non è invariante sotto la trasformazione di simmetria. Un esempio classico è fornito da un ferromagnete: al di sopra del punto di Curie, il ferro risulta essere paramagnetico e gli spin di valenza sono orientati isotropicamente; quando la temperatura scende al di sotto di tale punto avviene una transizione di fase e il ferro diventa ferromagnetico poiché gli spin si allineano nella stessa direzione non fissata a priori e la simmetria rotazionale ovviamente è rotta. Le conseguenze della rottura spontanea di simmetria sono diverse a seconda che si abbia una simmetria globale o una simmetria locale (Meccanismo di Higgs).

3.1 Rottura spontanea di simmetria globale

In teoria dei campo, le simmetrie dell'azione possono essere realizzate quantisticamente in due modi diversi:

- realizzazione di Wigner-Weyl: il vuoto, cioè lo stato di energia più basso, è invariante per trasformazioni di simmetria. Questa è la *fase simmetrica* della teoria e

lo spettro della teoria si decompone in rappresentazioni del gruppo di simmetria;

- realizzazione di Nambu-Goldstone: il vuoto non è invariante, ma ci sono diversi possibili vuoti collegati da trasformazioni di simmetria. Questa è la *fase spontaneamente rotta*, caratterizzata dall'esistenza di eccitazioni a massa nulla che corrispondono alle fluttuazioni attorno al vuoto, che è il minimo del potenziale, lungo le direzioni piatte di esso. Queste direzioni piatte esistono necessariamente per via della simmetria della Lagrangiana.

Si consideri un campo scalare complesso ϕ

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \quad (3.1)$$

La Lagrangiana che definisce il modello è

$$\mathcal{L} = -\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda(\phi^* \phi)^2 \quad (3.2)$$

Esplicitando le derivate, La corrispondente densità di energia è

$$\mathcal{E} = \dot{\phi}^* \dot{\phi} + \nabla \phi^* \cdot \nabla \phi + \mu^2 \phi^* \phi + \lambda(\phi^* \phi)^2 \quad (3.3)$$

La Lagrangiana (3.2) possiede una simmetria globale $U(1)$

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \phi' = e^{i\alpha} \phi \\ \phi^* &\rightarrow \phi'^* = e^{-i\alpha} \phi^* \end{aligned} \quad (3.4)$$

dove α è un parametro arbitrario ma costante. In forma infinitesima le trasformazioni (3.4) si possono scrivere come

$$\begin{aligned} \delta\phi &= i\alpha\phi \\ \delta\phi^* &= -i\alpha\phi^* \end{aligned} \quad (3.5)$$

Essendo l'energia $E = T + V$, il potenziale è

$$V = \mu^2 \phi^* \phi + \lambda(\phi^* \phi)^2 \quad (3.6)$$

La forma di questo potenziale è fissata dalla richiesta di rinormalizzazione e deve valere la seguente relazione

$$V(\phi, \phi^*) = V(\phi\phi^*) \quad (3.7)$$

Per la sua forma, quando il parametro $\mu < 0$, è definito a forma di “cappello messicano” ed è rappresentato in Figura 3.1

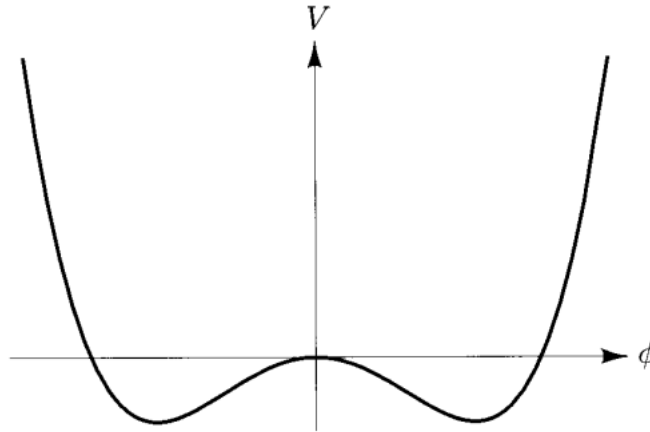


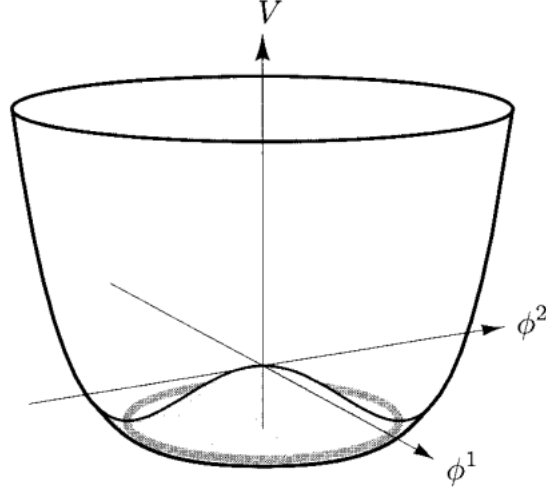
Figura 3.1: L'andamento del potenziale V a “cappello messicano” in funzione del modulo quadrato del campo ϕ

Analizzando l'energia (3.3), emerge che i termini sono entrambi definiti positivi e il contributo minimo si ha per campi costanti sia nello spazio che nel tempo. Si richiede $\lambda > 0$ affinché il potenziale sia limitato inferiormente per $\phi \rightarrow \infty$ e la teoria sia stabile. Nel determinare i possibili vuoti, si è di fronte a due situazioni possibili: se $\mu^2 > 0$, il potenziale V ha un solo minimo in $\phi_0 = \phi_0^* = 0$. Questa è la situazione con vuoto simmetrico in quanto la simmetria globale $U(1)$ non è spontaneamente rotta: infatti il vuoto definito è invariante per le trasformazioni (3.4). La simmetria è visibile nello spettro (realizzazione di Wigner-Weyl): ci sono particelle cariche con la carica $U(1)$ e massa μ che interagiscono.

Per $\mu^2 < 0$ i vuoti possibili sono molteplici e sono parametrizzati da

$$\begin{aligned} \phi_0 &= ae^{i\eta} \\ a &= \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

dove a è il raggio mentre η è una fase che indicizza i possibili vuoti, tutti equivalenti tra loro. Questa è la fase spontaneamente rotta. I punti dei minimi in particolare giacciono sulla circonferenza di raggio a e rappresentano gli infiniti stati fondamentali equivalenti del campo classico $\phi(x) = \phi_1 + i\phi_2$ come si può vedere in Figura 3.2


 Figura 3.2: Potenziale per la rottura spontanea di simmetria nel caso di $O(2)$

Il valore di aspettazione sul vuoto del campo quantistico dovrebbe essere uguale al valore assunto dal campo classico nello stato di minima energia; in questo caso il valore di aspettazione non è nullo ma è dato da $\frac{-\mu^2}{2\lambda}$. Poiché nella teoria quantistica dei campi le particelle sono pensate come stati eccitati del vuoto, questo suggerisce che per avere un'interpretazione quantistica del potenziale (3.6) e avere delle oscillazioni stabili, si deve espandere il campo attorno ad un punto della circonferenza sulla quale giacciono tutti i minimi, non intorno al punto $\phi = 0$ che rappresenta uno stato instabile. Scegliendo come vuoto $\phi_0 = a$ e con $\eta = 0$ il campo diventa

$$\phi(x) = (a + \rho(x))e^{i\theta(x)} \quad (3.9)$$

dove θ sarà proprio il bosone non massivo della teoria. Si ottiene sviluppando

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda(\phi^* \phi)^2 = \\ &= -\partial^\mu \rho \partial_\mu \rho - (\rho + a)^2 \partial^\mu \theta \partial_\mu \theta - \mu^2 (\rho + a)^2 - \lambda(\rho + a)^4 = \\ &= -\partial^\mu \rho \partial_\mu \rho - a^2 \partial^\mu \theta \partial_\mu \theta - (-2\mu^2) \rho^2 + \\ &\quad - (\rho^2 + 2a\rho) \partial^\mu \theta \partial_\mu \theta - \lambda(\rho^4 + 4a\rho^3) + \frac{\mu^4}{4\lambda} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dalla parte quadratica in ρ si leggono le masse delle fluttuazioni $m_\rho^2 = -2\mu^2 = 4\lambda a^2 > 0$ mentre $m_\theta^2 = 0$. Quindi le oscillazioni radiali in ρ corrispondono a convenzionali campi massivi poiché soggette ad una forza di richiamo mentre le oscillazioni in θ sono a massa nulla poiché, passando attraverso i punti della circonferenza dei minimi, non sono soggetti ad alcuna forza. Il resto della Lagrangiana descrive le interazioni. Il campo θ che rimane senza massa è chiamato *bosone di Goldstone*. Concludendo, i due gradi di libertà

della Lagrangiana sono uno relativo al campo massivo $\rho(x)$ e l'altro relativo al campo di massa nulla $\theta(x)$, corrispondente alle oscillazioni “senza resistenza” sulla circonferenza dei minimi. Questo modello è un esempio semplice dell'applicazione del *teorema di Goldstone*, il quale afferma che la rottura spontanea di simmetria globale genera inevitabilmente uno o più bosoni scalari a massa nulla. Questo esempio, in cui si aveva una Lagrangiana invariante sotto il gruppo $U(1)$ costruita prendendo in considerazione un campo scalare complesso (visto come una combinazione di due campi reali) può essere generalizzato a N campi scalari; il gruppo ortogonale in n dimensioni è il gruppo $O(N)$ e il teorema di Goldstone afferma che in una rottura spontanea di simmetria per ogni generatore rotto esiste un bosone scalare a massa nulla. Nel caso più generale, una teoria quantistica dei campi invariante sotto un gruppo G spontaneamente rotto su un sottogruppo H contiene tanti bosoni di Goldstone, quanti generatori del gruppo G spontaneamente rotti.

Invece di partire dalla forma polare del campo ϕ si poteva procedere anche con la sua parametrizzazione (3.1) aggiungendo il raggio a definito in precedenza. Ripetendo i ragionamenti analoghi, la Lagrangiana del sistema nei termini di ϕ_1 e ϕ_2 , sviluppata intorno al vuoto stabile, è

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi_1\partial_\mu\phi_1 - \frac{1}{2}\partial^\mu\phi_2\partial_\mu\phi_2 - 2^2\phi_1^2 + \\ & -\sqrt{2}\lambda a\phi_1(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 + \frac{\mu^4}{4\lambda} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Si può interpretare come campo di Goldstone il campo ϕ_2 poiché non ha il termine di massa mentre la massa di ϕ_1 soddisfa $m_\rho^2 = 4\lambda a^2$, la stessa condizione trovata prima.

3.2 Rottura spontanea di simmetria locale

Quando si verifica la rottura spontanea di simmetria di gauge le conseguenze sono diverse dal caso precedente. In particolare si ha che i bosoni di Goldstone, particelle scalari senza massa, non esistono in sé ma servono a far comparire nella Lagrangiana bosoni di campo che successivamente saranno interpretati come bosoni dell'interazione debole, avendo acquisito massa. Questo fenomeno è conosciuto come *Meccanismo di Higgs*. Il meccanismo nella sua forma minimale prevede l'esistenza di un bosone scalare che accoppiandosi ai bosoni di Goldstone fa acquistare massa ai tre mediatori W^\pm e Z^0 .

3.2.1 Meccanismo di Higgs abeliano

Per semplificare la trattazione, si prende in considerazione il modello di Higgs abeliano, una sorta di *QED* scalare. Si prende un campo scalare carico e si introduce l'interazione elettromagnetica e con essa l'invarianza sotto il gruppo $U(1)$ di simmetria di gauge. In

accordo con la teoria sviluppata, per scrivere la Lagrangiana invariante si sostituisce ∂_μ con D_μ , la solita derivata covariante. Tale Lagrangiana è

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}(A))^2 - D^\mu\phi^*D_\mu\phi - m^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2 \quad (3.12)$$

dove

$$\begin{aligned} D_\mu\phi &= (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi \\ D_\mu\phi^* &= (D_\mu\phi)^* = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^* \end{aligned} \quad (3.13)$$

La simmetria di gauge è data naturalmente da

$$\begin{aligned} \phi' &= e^{i\alpha}\phi \\ A'_\mu &= A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha \end{aligned} \quad (3.14)$$

Considerando la definizione classica della Lagrangiana come $\mathcal{L} = T - V$, il potenziale del sistema è

$$V = \mu^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2 \quad (3.15)$$

ed è il potenziale a forma di “cappello messicano” nel caso in cui il parametro μ sia negativo, introdotto nel paragrafo precedente. Si richiede nuovamente $\lambda > 0$ affinché la teoria sia consistente e si prende $\mu^2 < 0$ per cui la simmetria di gauge è spontaneamente rotta, in completa analogia con il caso precedente. I possibili vuoti sono descritti nel settore scalare da

$$\phi_0 = ae^{i\eta} \quad (3.16)$$

con a il raggio espresso come

$$a = \sqrt{-\frac{\mu^2}{2\lambda}}$$

I vuoti però non sono invarianti per trasformazioni di gauge. Operando la rottura di simmetria scegliendo uno stato di vuoto, per esempio $\phi_0 = a$, si possono studiare le piccole fluttuazioni attorno ad esso. Parametrizzando il campo scalare come

$$\phi(x) = a + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x) + i\phi_2(x)) \quad (3.17)$$

e sviluppando la Lagrangiana si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}(A))^2 - \frac{1}{2}\partial^\mu\phi_1\partial_\mu\phi_1 - \frac{1}{2}\partial^\mu\phi_2\partial_\mu\phi_2 + \\ &\quad - e^2a^2A_\mu A^\mu - \sqrt{2}eaA^\mu\partial_\mu\phi_2 - 2\lambda a^2\phi_1^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.18)$$

Da questa Lagrangiana emerge automaticamente il termine di massa $m_A^2 = 2e^2 a^2$ per il campo di gauge A_μ : infatti basta paragonarlo con la densità di Lagrangiana libera di Proca

$$\mathcal{L}_{PRO} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \quad (3.19)$$

che descrive particelle di spin intero, come è richiesto per i campi di gauge, e di massa m . Il campo bosonico ha quindi acquisito massa come si voleva. Il termine di massa per il campo scalare reale ϕ_1 è $m_{\phi_1}^2 = 4\lambda a^2$, mentre ϕ_2 è il bosone di Goldstone che resta senza massa.

Ci sono però anche due problemi legati al modello: il primo problema riguarda il termine $\sqrt{2}eaA^\mu\partial_\mu\phi_2$, accoppiamento tra A_μ e ϕ_2 che sembra dare al campo di gauge A_μ la possibilità di interagire con ϕ_2 , bosone di Goldstone. Il secondo problema è legato ai gradi di libertà del sistema: la Lagrangiana iniziale (3.12) ha 4 gradi di libertà, rappresentati dai due campi scalari e dai due possibili stati di elicità del campo di gauge. Nella Lagrangiana (3.18) i gradi di libertà invece sono apparentemente 5: i due campi scalari e i 3 gradi di libertà associati al campo di gauge massivo, il quale ha tre possibili stati di elicità. Questo non ha un senso fisico perché la semplice scelta di uno dei vuoti non deve introdurre un ulteriore grado di libertà. Per chiarire il problema è conveniente combinare in un quadrato esatto il termine che accoppia A_μ e ϕ_2 e si ottiene la seguente Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}(A))^2 - e^2 a^2 \left(A_\mu - \frac{1}{\sqrt{2}ea}\partial_\mu\phi_2\right)^2 - \frac{1}{2}\partial^\mu\phi_1\partial_\mu\phi_1 - 2\lambda a^2\phi_1^2 + \dots \quad (3.20)$$

Si interpreta il termine tra parentesi dicendo che il campo di Goldstone ϕ_2 sparisce perché viene “mangiato” dal campo di gauge A_μ che diventa massivo ed acquista una polarizzazione in più; in questo modo si risolve il problema legato ai gradi di libertà del sistema. Lo si può vedere anche grazie alla libertà di scelta di gauge. Infatti si può eseguire una trasformazione di gauge scegliendo la fase in modo tale che punto per punto abbia fase opposta rispetto a ϕ . In questo modo il campo (3.17) diventa reale e, poiché il bosone di Goldstone corrisponde alle oscillazioni sulla circonferenza dei minimi, e quindi ai quanti del campo, con questa scelta è stato eliminato l’ulteriore grado di libertà non voluto. Il campo scalare massivo che resta ϕ_1 è detto il campo di Higgs. I termini successivi che compaiono nella Lagrangiana rappresentano le interazioni.

In particolare per quanto riguarda la scomparsa del bosone di Goldstone ϕ_2 questa può essere resa evidente con una condizione di *gauge-fixing*. Con il *gauge unitario* si può fissare la condizione

$$\phi_2(x) = 0$$

Questo gauge rende esplicito il fatto che ϕ_2 non contribuisce allo spettro fisico mentre tutti gli altri campi corrispondono a particelle fisiche.

Il Modello Standard delle interazioni fondamentali fa uso del modello GWS, Glashow - Salam - Weinberg, che descrive la teoria elettrodebole, un’unificazione dell’interazione

debole ed elettromagnetica, costruita sul gruppo di simmetria $SU(2) \times U(1)$ spontaneamente rotta. Introducendo il campo ϕ , questo deve essere un doppietto di funzioni scalari complesse (cioè 4 campi reali totali) e il potenziale a “cappello messicano” è quello necessario per introdurre la rottura spontanea di simmetria. Ripercorrendo il ragionamento fatto per il Meccanismo di Higgs abeliano, il valore non nullo di ϕ nella sua configurazione di vuoto rompe la simmetria locale $SU(2)$ ma non quella $U(1)$: in questo modo il mediatore dell’interazione elettromagnetica, il fotone, rimane senza massa, in accordo con i risultati sperimentali mentre i tre campi scalari conferiscono massa ai bosoni vettori Z e W^\pm come si voleva. I bosoni del quarto grado di libertà del campo ϕ , non essendosi accoppiati con nessun campo, sono proprio i bosoni di Higgs che sono stati rivelati per la prima volta nel 2012 negli esperimenti ATLAS e CMS condotti con l’acceleratore LHC del CERN. Da notare che non è rotta la simmetria $SU(3)$ perché il campo di Higgs è invariante sotto la trasformazione di questo gruppo e in particolare è invariante la sua configurazione di vuoto.

Conclusioni

In questa tesi sono state presentate in modo semplice le teorie di gauge abeliane e non abeliane tramite le loro applicazioni alla forza elettromagnetica e forte. In particolare si è visto come la richiesta di invarianza locale o di gauge porti all'introduzione dei campi vettoriali A_μ i cui quanti, bosoni di gauge, possono essere interpretati come mediatori delle forze. Tali quanti devono avere la massa nulla affinché la simmetria locale non venga rotta. Inoltre, la richiesta di invarianza di gauge porta a specificare la forma dell'interazione radiazione-materia partendo da una teoria di campi liberi invarianti sotto la simmetria globale. Se si vogliono bosoni massivi, come nel caso dei bosoni dell'interazione debole, la cui massa sperimentalmente è dell'ordine di 100 GeV, si usa il Meccanismo di Higgs per rendere la teoria compatibile, senza quindi perdere la sua rinormalizzabilità e la simmetria di gauge, con le evidenze sperimentali.

L'esempio più significativo di simmetrie locali è il Modello Standard delle interazioni fondamentali, il quale è una teoria di gauge basata sul gruppo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. La possibilità di mantenere la struttura fondamentale del modello, salvaguardandone la predittività e la consistenza teorica, è offerta dal meccanismo di Higgs, che, a fronte dell'introduzione di un ulteriore campo scalare (un bosone di spin 0), consente di assegnare massa non soltanto ai bosoni W^\pm e Z , ma anche a tutti i fermioni del modello rompendo in modo spontaneo la simmetria di gauge. Attualmente il Modello Standard rappresenta la teoria più completa che si ha a disposizione per la descrizione delle particelle elementari e le loro interazioni. I successi sperimentali ottenuti negli ultimi 40 anni sono stati strabilianti, fino alla recente scoperta del famoso bosone di Higgs che consente al Modello Standard di essere una teoria completa, valida essenzialmente a qualunque scala di energia.

È molto sorprendente come tre delle quattro interazioni fondamentali emergano dalla richiesta di imporre l'invarianza di gauge su una teoria libera per ottenere le interazioni del sistema fisico considerato. L'invarianza di gauge può a sua volta essere assunta a principio dinamico: il principio di simmetria di gauge.

Non mancano comunque alcuni problemi che emergono nella costruzione del Modello Standard. È possibile richiedere l'invarianza della Lagrangiana del sistema completo in tutti gli spazi interni di trasformazione che si vogliono considerare. Tuttavia non ci sono principi teorici che possano suggerire quali spazi interni di trasformazione esaminare; a

oggi i dati sperimentali suggeriscono di costruire tale descrizione sul gruppo $SU(3)$ di colore per le interazioni forti, e sul gruppo $SU(2) \times U(1)$ per l'interazione elettrodebole. Un secondo problema riguarda il fatto che il Modello Standard presenta molti parametri liberi: sono necessari circa 30 parametri che descrivono le masse e le interazioni delle particelle per determinare completamente la teoria, ma non si conosce il perché per esempio il neutrino sia molto più leggero dell'elettrone (problemi gerarchici). Inoltre il Modello non permette di spiegare facilmente l'asimmetria tra la materia e l'antimateria, la materia oscura e l'energia oscura e simili evidenze sperimentali e cosmologiche. Per queste ragioni, si condivide il pensiero che il Modello Standard non possa essere il punto finale di arrivo. In particolare, la quarta interazione fondamentale, la gravità, non è direttamente includibile nel Modello Standard in quanto la sua teoria di gauge (Relatività Generale) risulta essere non rinormalizzabile, e quindi non direttamente estendibile al mondo quantistico.

Al momento non esiste nessuna indicazione certa su dove la fisica oltre il Modello Standard potrebbe comparire: tra le sue estensioni ci sono teorie come la Supersimmetria, la Teoria delle Stringhe, la Teoria M etc, delle quali per il momento non si è avuta alcuna evidenza sperimentale. La speranza è quella di poter trovare una TOE: un'ipotetica *theory of everything* che sarebbe in grado di spiegare interamente e di riunire in un unico quadro tutti i fenomeni fisici conosciuti.

Bibliografia

- [1] Fiorenzo Bastianelli. Appunti del corso di teoria dei campi 1, 2010.
- [2] Max Bañados and Ignacio Reyes. A short review on noether's theorems, gauge symmetries and boundary terms. *International Journal of Modern Physics D*, 25(10):1630021, 2016.
- [3] L.D. Landau, E.M. Lifshits, and F. Rapuano. *Fisica teorica*. Number v. 1 in Editori Riuniti Univ. Press. Editori Riuniti University Press, 2010.
- [4] M.E. Peskin. *An Introduction To Quantum Field Theory*. CRC Press, 2018.
- [5] L.H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1996.