

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea Magistrale in Fisica

LA MAGNETOIDRODINAMICA E IL FLUSSO DI HARTMANN

Relatore:
Prof. Michele Dragoni

Presentata da:
Cesare Angeli

Anno Accademico 2017/2018

Indice

Introduzione	1
1 La Magnetoidrodinamica	3
1.1 La teoria magnetoidrodinamica	3
1.2 Le equazioni di Maxwell	4
1.3 Il tensore degli sforzi di Maxwell	7
1.4 La forza ponderomotrice	9
1.5 Le equazioni del moto	11
1.6 Cinematica delle linee di campo e teorema di Alfvén	13
1.7 Il moto del liquido conduttore	15
2 Il Flusso di Hartmann	19
2.1 Il problema di Hartmann	19
2.2 La soluzione del problema	24
2.3 Il numero di Hartmann	28
2.4 L'interpretazione della soluzione	32
2.5 Lo Strato di Hartmann	33
3 Il Nucleo Terrestre	37
3.1 Composizione e cinematica del Nucleo terrestre	37
3.2 La generazione del campo geomagnetico	39
3.3 La rappresentazione di Mie	42
3.4 L'evoluzione delle linee di campo nel Nucleo terrestre	45
3.5 Dinamica del Nucleo terrestre	46
Conclusioni	53
Appendice A: il sistema CGS in elettromagnetismo	55
Appendice B: la notazione indiciale	57

Introduzione

Nel 1970 Hannes Alfvén ricevette il premio Nobel per la fisica per lo sviluppo e le applicazioni della teoria della Magnetoidrodinamica. Questa teoria ha lo scopo di descrivere il comportamento dei fluidi conduttori in presenza di campi magnetici: il bisogno primario era quello di avere una teoria analoga alla fluidodinamica tradizionale per poter descrivere i materiali assimilabili a questo modello. Come ci si può aspettare avendo a che fare con liquidi, la formulazione generale delle leggi della Magnetoidrodinamica non presenta una soluzione analitica generale, ma è comunque possibile l'analisi e talvolta la risoluzione di alcuni casi particolari. Le applicazioni sono infatti di vario tipo, spaziando dall'ingegneria, come nel caso dei recenti sviluppi nel campo della fusione nucleare controllata, fino all'astrofisica, dove la gran parte della materia è ionizzata e si può assimilare al modello.

Nel primo capitolo vengono esposti i fondamenti della Magnetoidrodinamica e alcuni suoi tratti fondamentali, evidenziando come la teoria nasce fondamentalmente dalla combinazione della fluidodinamica e dell'elettrodinamica. Fin da subito si può capire come il moto del fluido e l'evoluzione del campo magnetico siano essenzialmente accoppiati ed necessaria una soluzione contemporanea delle equazioni del moto (che saranno le equazioni di Navier-Stokes) e dell'*equazione idromagnetica*, che verrà ricavata lungo la trattazione ricorrendo anche ad una descrizione delle forze agenti sul fluido mutuata dalla meccanica dei continui, facendo uso del *tensore degli sforzi di Maxwell*. I risultati generali principali che verranno trattati sono l'evoluzione delle linee di campo magnetico nel fluido, con particolare attenzione al caso del conduttore perfetto, e l'effetto di *attrito magnetico* che risulta dall'interazione tra fluido e campo.

Nel secondo capitolo viene analizzato un problema, detto *flusso di Hartmann*, che viene presentato da Julius Hartmann per la prima volta nel 1937 per lo studio del moto del mercurio immerso in un campo magnetico uniforme. Tale problema prevede che il fluido conduttore sia in moto laminare stazionario tra due pareti solide, in presenza solamente di un gradiente di pressione e del campo magnetico imposto dall'esterno. L'importanza di questo problema risiede principalmente nel fatto che si possa calcolare una soluzione analitica, che permette di creare una base qualitativa dell'interazione magnetoidrodinamica valida anche per i casi più complessi.

Nel terzo capitolo viene affrontata una applicazione di natura geofisica: la generazione

del campo magnetico principale terrestre. Dopo una rapida introduzione alla composizione e alla cinematica del Nucleo terrestre, viene mostrato come esso sia il principale responsabile della presenza del campo geomagnetico, tramite l'introduzione del concetto di *dinamo autoalimentata* e l'analisi del moto delle linee di campo dovuto all'alta conducibilità del Nucleo esterno. Infine viene data una panoramica generale di quale sia l'effettiva dinamica del Nucleo esterno, tenendo conto anche degli effetti termici, turbolenti e inerziali, tramite l'uso di numeri adimensionali.

Capitolo 1

La Magnetoidrodinamica

1.1 La teoria magnetoidrodinamica

La *meccanica dei continui* consiste nello studio dei mezzi continui, ovvero di quei mezzi le cui proprietà macroscopiche possono essere descritte su porzioni infinitesime di volume. Tali porzioni devono essere abbastanza "grandi" da poter ignorare la natura molecolare del mezzo, ma abbastanza "piccole" da poter considerare il valore medio delle grandezze macroscopiche come un valore puntuale. Nel caso dell'*elettrodinamica dei continui*, queste considerazioni vengono applicate, oltre che alle grandezze meccaniche come densità, temperatura e pressione, anche ai valori del campo elettrico e magnetico.

La *magnetoidrodinamica* (abbreviata in MHD, dall'inglese *Magnetohydrodynamics*) è una sotto-teoria dell'elettrodinamica dei continui¹ utile per la descrizione dei fluidi conduttori. Le ipotesi alla base della MHD sono:

- la frequenza delle collisioni tra gli elettroni liberi è elevata rispetto alle frequenze del moto, per cui limitiamo l'applicazione al caso di fluidi ad elevata densità e/o basse frequenze di oscillazione;
- il fluido si può descrivere con le usuali quantità idrodinamiche (densità ρ , pressione p , e temperatura T);
- non si ha separazione di carica nel limite della continuità del mezzo, ovvero gli elementi infinitesimi di volume in cui suddividiamo il mezzo contengono lo stesso numero di cariche positive e negative.

La MHD unisce quindi la meccanica dei fluidi e la teoria dell'elettromagnetismo classico.

¹Per gli altri aspetti dell'elettrodinamica dei continui, si rimanda a [1]

1.2 Le equazioni di Maxwell

L'elettromagnetismo classico² è descritto completamente dalle *equazioni di Maxwell*³, che possono essere scritte come

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_e \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (1.1)$$

dove \mathbf{E} e \mathbf{B} sono il campo elettrico e magnetico, ρ_e è la densità di carica elettrica, \mathbf{J} la densità di corrente elettrica e c è la velocità della luce. Queste equazioni possono essere semplificate tenendo conto delle ipotesi della MHD. Dato che per ipotesi consideriamo un mezzo in cui non avviene separazione di carica, possiamo considerare $\rho_e = 0$; inoltre, dato che consideriamo un moto a basse frequenze, possiamo anche ignorare la *corrente di spostamento*, ponendo $\partial \mathbf{E} / \partial t = 0$. Otteniamo quindi il sistema

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \end{cases} \quad (1.2)$$

La Legge di Faraday

Integrando la terza delle (1.1) su una qualsiasi superficie S , si ottiene la cosiddetta *legge di Faraday*, secondo la quale

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.3)$$

dove \mathbf{n} è il versore normale alla superficie S . Nel caso di un liquido conduttore che si muove a velocità \mathbf{v} , dobbiamo considerare che la superficie S si muove insieme al fluido; perciò, dobbiamo calcolare il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie in movimento.

²Per una trattazione completa si rimanda a [2]

³Le equazioni sono presentate nel sistema CGS gaussiano, v. Appendice A.

Nel caso in cui la superficie S sia ferma, si ha per il generico campo vettoriale \mathbf{F} il risultato banale

$$\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.4)$$

che discende dal fatto che una qualsiasi parametrizzazione di S non è funzione del tempo. Nel caso in cui S dipenda dal tempo, la situazione si complica. In un intervallo di tempo dt , la superficie S delimita un volume δV , individuato dalla superficie $S(t)$, dalla superficie $S(t+dt)$ e da una superficie laterale S' . L'elemento di superficie di S' è dato da $dS' = |d\mathbf{s} \times \mathbf{v}| dt$ dove $d\mathbf{s} \times \mathbf{v}$ è normale a S' , per cui $\mathbf{n} dS' = d\mathbf{s} \times \mathbf{v} dt$ (v. fig. 1.1).

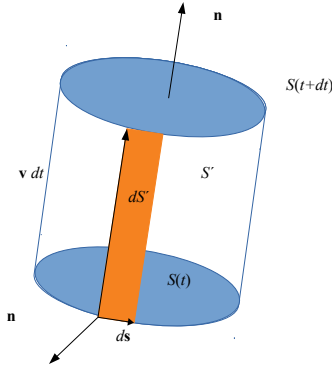


Figura 1.1: rappresentazione degli elementi di superficie per il calcolo del flusso attraverso una superficie in movimento.

Il flusso di \mathbf{F} attraverso S' sarà

$$\iint_{S'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = dt \oint_{\partial S'} \mathbf{F} \cdot (d\mathbf{s} \times \mathbf{v}) = dt \oint_{\partial S'} (\mathbf{v} \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s} \quad (1.5)$$

Il flusso uscente Φ dal volume cilindrico sarà dato da

$$\Phi = \iint_{S(t+dt)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS - \iint_{S(t)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS + dt \oint_{\partial S'} (\mathbf{v} \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s} \quad (1.6)$$

Utilizzando il teorema di Stokes per il calcolo del terzo integrale, si ottiene

$$\Phi = \iint_{S(t+dt)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS - \iint_{S(t)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS + dt \iint_{S(t)} \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s} \quad (1.7)$$

Ricordando che δV è il volume del cilindro, possiamo scrivere, utilizzando il teorema di Gauss che

$$\Phi = \iiint_{\delta V} \nabla \cdot \mathbf{F} dV \quad (1.8)$$

dove possiamo scrivere $dV = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dt dS$, così da trasformare l'integrale di volume in un integrale di superficie

$$\Phi = dt \iint_{S(t)} (\nabla \cdot \mathbf{F}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.9)$$

Eguagliando le espressioni (1.7) e (1.9) e raccogliendo i termini in dt si ottiene

$$\iint_{S(t+dt)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS - \iint_{S(t)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = dt \iint_{S(t)} [(\nabla \cdot \mathbf{F}) \mathbf{v} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{F})] \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.10)$$

dove il primo membro può essere espresso come

$$\iint_{S(t+dt)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS - \iint_{S(t)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = d \left(\iint_{S(t)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \right) \quad (1.11)$$

Dividendo per dt , si ottiene il contributo del movimento di S alla variazione di flusso di \mathbf{F} attraverso S

$$\frac{d}{dt} \iint_{S(t)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S(t)} [(\nabla \cdot \mathbf{F}) \mathbf{v} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{F})] \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.12)$$

dove i due termini interni all'integrale al secondo membro rappresentano rispettivamente il contributo delle sorgenti e quello della variazione nello spazio di \mathbf{F} . Se teniamo anche conto della variazione di \mathbf{F} rispetto al tempo otteniamo

$$\frac{d}{dt} \iint_{S(t)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S(t)} \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{F}) \mathbf{v} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{F}) \right] \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.13)$$

Vogliamo ora calcolare il flusso del campo magnetico \mathbf{B} attraverso la superficie S , di bordo ∂S , la quale si muove con il fluido. Dalle (1.2) sappiamo che la divergenza di \mathbf{B} è nulla, così da ottenere che la variazione del flusso sarà

$$\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right] \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.14)$$

perciò il flusso del campo magnetico può variare a causa di

- variazioni nel tempo di \mathbf{B} ;
- \mathbf{B} non è omogeneo;
- ∂S cambia forma per le variazioni locali del campo velocità \mathbf{v} .

La forza elettromotrice così generata causa a sua volta l'insorgere di una corrente elettrica nel fluido.

1.3 Il tensore degli sforzi di Maxwell

È noto dall'elettromagnetismo classico che un campo elettromagnetico trasporta energia e impulso, per i quali si possono ricavare la densità di energia

$$W = \frac{E^2 + B^2}{8\pi} \quad (1.15)$$

e la densità di impulso

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi c} \quad (1.16)$$

Vogliamo ora calcolare come varia l'impulso totale \mathbf{P} in un volume V rispetto al tempo, cioè

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \mathbf{E} \times \mathbf{B} dV \quad (1.17)$$

dove si può notare

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.18)$$

che, facendo uso delle (1.2), diventa

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = c(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + c(\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{E} \quad (1.19)$$

e, ricordando l'identità vettoriale

$$(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \frac{1}{2}\nabla v^2 \quad (1.20)$$

, si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = c \left[(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \frac{1}{2}\nabla B^2 + (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E} - \frac{1}{2}\nabla E^2 \right] \quad (1.21)$$

che possiamo riscrivere in notazione indiciale⁴

$$\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_{ijk}E_jB_k) = c \left[E_jE_{i,j} - \left(\frac{1}{2}E^2\delta_{ij} \right)_{,j} + B_jB_{i,j} - \left(\frac{1}{2}B^2\delta_{ij} \right)_{,j} \right] \quad (1.22)$$

Dato che le divergenze dei campi \mathbf{E} e \mathbf{B} sono nulle, possiamo aggiungere al secondo membro i termini $\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E})$ e $\mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B})$, che in notazione indiciale risultano essere rispettivamente $E_iE_{j,j}$ e $B_iB_{j,j}$. Sfruttando la regola di Leibniz, possiamo notare che, per un

⁴V. Appendice B.

qualsiasi campo vettoriale \mathbf{F} si ha che $F_j F_{i,j} + F_i F_{j,j} = (F_i F_j)_{,j}$. In questo modo possiamo riscrivere tutto il membro destro dell'equazione precedente come derivata rispetto ad una stessa componente, ovvero

$$\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_{ijk} E_j B_k) = c \left(E_i E_j - \frac{1}{2} E^2 \delta_{ij} + B_i B_j - \frac{1}{2} B^2 \delta_{ij} \right)_{,j}$$

da cui infine

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(E_i E_j + B_i B_j - \frac{E^2 + B^2}{2} \delta_{ij} \right)_{,j} dV \quad (1.23)$$

Si può notare come l'espressione integranda sia la divergenza di un tensore di rango 2, così da poter riscrivere l'espressione come

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} = \iiint_V T_{ij,j} dV \quad (1.24)$$

dove il tensore T_{ij} è il *tensore degli sforzi di Maxwell*, definito come

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left(E_i E_j + B_i B_j - \frac{E^2 + B^2}{2} \delta_{ij} \right) \quad (1.25)$$

Tale tensore generalizza esprime gli sforzi generati da un campo elettromagnetico su un corpo che vi è immerso. Applicando il teorema di Gauss a (1.23) notiamo che

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} = \iint_{\partial V} T_{ij} n_j dS \quad (1.26)$$

Ricordiamo inoltre che la variazione di impulso nel tempo deve bilanciare il *flusso di impulso* Φ_i attraverso ∂V , ovvero

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} = -\Phi_i \quad (1.27)$$

Da ciò possiamo dedurre come $-T_{ij}$ rappresenti la densità di flusso di impulso associata al campo elettromagnetico ed è uno sforzo; il flusso di impulso trasmesso dal campo al corpo attraverso ∂V equivale ad una forza esercitata su tale superficie. Allo stesso modo, si può definire la *trazione* esercitata dal campo elettromagnetico su una superficie avente normale \mathbf{n} come

$$t_i = T_{ij} n_j \quad (1.28)$$

Come esempio possiamo studiare il tensore di Maxwell nel caso di un campo magnetico di forma $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{x}}$. Per la (1.25) otteniamo

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} B^2 \delta_{ij} \right) \quad (1.29)$$

ovvero, se riutilizziamo la (1.15),

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} W & 0 & 0 \\ 0 & -W & 0 \\ 0 & 0 & -W \end{pmatrix}$$

Possiamo interpretare il significato fisico di questo tensore riscrivendolo come una somma

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} -W & 0 & 0 \\ 0 & -W & 0 \\ 0 & 0 & -W \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si può quindi notare la presenza di due effetti sovrapposti (v. fig. 1.2):

- sforzi compressivi di valore $-W$ nelle direzioni degli assi coordinati;
- uno sforzo tensile di valore $2W$ nella direzione del campo magnetico.

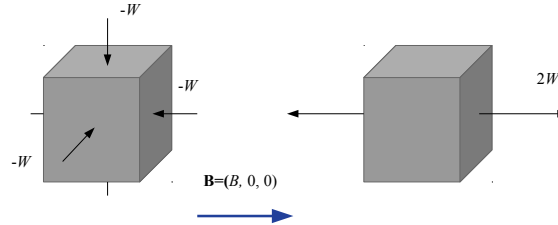


Figura 1.2: scomposizione del tensore di Maxwell nelle componenti dovute rispettivamente alla pressione e al campo magnetico

1.4 La forza ponderomotrice

La presenza di un campo elettromagnetico non omogeneo produce una forza di volume che possiamo calcolare come gradiente del tensore di Maxwell

$$f_i = T_{ij,j} \quad (1.30)$$

Consideriamo, come nel precedente esempio, un liquido conduttore immerso in un campo magnetico \mathbf{B} . Il tensore degli sforzi di Maxwell avrà quindi la forma vista in (1.29), da cui possiamo calcolare la forza a cui è sottoposto il fluido.

$$f_i = \frac{1}{4\pi} (B_{i,j}B_j + B_iB_{j,j}) - \frac{1}{8\pi}(B^2)_{,i}$$

Per le (1.2) sappiamo che il campo \mathbf{B} ha divergenza nulla, ovvero $B_{j,j} = 0$, ottenendo

$$f_i = \frac{1}{4\pi} B_{i,j}B_j - \frac{1}{4\pi} B_{,i}^2 \quad (1.31)$$

che possiamo riscrivere in notazione vettoriale

$$\mathbf{f} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{8\pi} \nabla (B^2) \quad (1.32)$$

Tale forza è detta *forza ponderomotrice* ed è composta da due termini:

- un termine avvevativo $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}$;
- il gradiente della densità di energia del campo magnetico W .

Dato che la forza ponderomotrice tende a muovere il liquido in direzione opposta al gradiente di W , possiamo interpretare quest'ultimo come una *pressione magnetica*, in quanto ha un effetto dinamico analogo a quello della pressione meccanica. Richiamando l'identità vettoriale

$$(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \frac{1}{2} \nabla v^2 \quad (1.33)$$

possiamo riscrivere la forza ponderomotrice come

$$\mathbf{f} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (1.34)$$

da cui possiamo notare che questa forza è perpendicolare al campo \mathbf{B} ed è presente solamente nel caso in cui il rotore di tale campo sia non nullo. È noto dalla teoria dei campi vettoriali che un campo con divergenza e rotore entrambi nulli è necessariamente uniforme, perciò possiamo dedurre che la forza ponderomotrice si manifesti solamente nel caso in cui \mathbf{B} non sia spazialmente uniforme.

Dalle (1.2) si può dedurre che, se il rotore di \mathbf{B} è non nullo, deve esistere una densità di corrente data dalla *legge di Ampère*

$$\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} \quad (1.35)$$

da cui possiamo scrivere

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (1.36)$$

per cui la forza ponderomotrice è perpendicolare sia al campo magnetico che alla corrente elettrica. Questa espressione può essere interpretata come una generalizzazione della forza di Lorentz $\mathbf{F} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, che calcola la forza agente su una particella con velocità \mathbf{v} in moto in un campo magnetico; per questo motivo la forza ponderomotrice viene anche detta *forza di Lorentz volumetrica o generalizzata*.

1.5 Le equazioni del moto

Consideriamo un liquido viscoso newtoniano, omogeneo e isotropo, con densità ρ , viscosità η conducibilità elettrica σ , per il quale valgano le seguenti ipotesi:

- la conducibilità elettrica non dipende dal campo magnetico;
- la permeabilità magnetica è $\mu \approx 1$;
- il liquido è elettricamente neutro;
- il liquido è incompressibile, per cui possiamo esprimere l'equazione di continuità come $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$

Tale liquido, nel caso si trovi immerso in un campo magnetico \mathbf{B} , si muove secondo l'equazione di Navier-Stokes

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f} \quad (1.37)$$

dove \mathbf{f} è la risultante delle forze non riconducibili a gradienti di pressione o forze viscosi, che risulta in questo caso essere la (1.36). Richiamando dalle (1.2) l'equazione per il rotore di \mathbf{B} e calcolandone la divergenza, si ottiene la *legge di conservazione della carica*:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (1.38)$$

Legge di Ohm

Nel sistema di riferimento in cui il fluido è in quiete, vale la *legge di Ohm*, per la quale $\mathbf{J}' = \sigma \mathbf{E}'$, dove \mathbf{E}' è il campo elettrico in quel sistema. In un sistema di riferimento di un osservatore, rispetto al quale il liquido è in moto con velocità \mathbf{v} non relativistica (ovvero tale che $v \ll c$), la corrente è $\mathbf{J} = \mathbf{J}' + \rho_e \mathbf{v}$, ma assumendo la neutralità del liquido $\rho_e = 0$ per cui $\mathbf{J} = \mathbf{J}'$.

Il campo \mathbf{E}' è legato ai campi \mathbf{E} e \mathbf{B} del sistema dell'osservatore dalla relazione

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1.39)$$

per cui la corrente nel sistema dell'osservatore sarà

$$\mathbf{J} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \quad (1.40)$$

Nel caso di nostro interesse, il liquido è immerso in un campo magnetico, ma il campo elettrico è nullo, per cui la corrente nel liquido sarà data da

$$\mathbf{J} = \frac{\sigma}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1.41)$$

Equazione di stato

L'equazione di stato ha la funzione di mettere in relazione pressione, temperatura e densità del mezzo con un'espressione di forma $p = p(\rho, T)$. Dato che assumiamo che il fluido sia omogeneo e incompressibile, prendiamo come equazione di stato la relazione $\rho = \text{costante}$, assumendo quindi nulle le variazioni della densità ρ dovute alla variazione della pressione p (ma non necessariamente quelle dovute a variazioni della temperatura T).

Equazione idromagnetica

Sostituendo l'espressione per \mathbf{E} ricavata dalla (1.40) nella terza delle (1.2) otteniamo la relazione

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \left(\frac{\mathbf{J}}{\sigma} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \quad (1.42)$$

Inserendo la (1.35), otteniamo

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.43)$$

Ricordando l'identità

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} \quad (1.44)$$

e che $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ otteniamo la *equazione idromagnetica*

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \chi_m \nabla^2 \mathbf{B} \quad (1.45)$$

dove abbiamo introdotto la *diffusività magnetica*⁵

$$\chi_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \quad (1.46)$$

⁵In letteratura, ad esempio in [3], è usato anche il nome di *viscosità magnetica*, che però, nella presente trattazione, è riservato per un'altra grandezza.

1.6 Cinematica delle linee di campo e teorema di Alfvén

L'equazione idromagnetica mostra che le variazioni del campo magnetico possono essere ricondotte a due termini: uno di tipo avveffivo e uno di tipo diffusivo. Questi possono essere meglio compresi analizzando due casi limite:

- il liquido si trova a riposo, ovvero $\mathbf{v} = 0$. L'equazione idromagnetica si riduce all'equazione

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \chi_m \nabla^2 \mathbf{B} \quad (1.47)$$

in cui si può riconoscere una equazione diffusiva; un campo magnetico di intensità B in una configurazione con grandezza lineare L decade quindi con un tempo caratteristico τ che possiamo ricavare dall'equazione

$$\frac{B}{\tau} \approx \chi_m \frac{B}{L^2} \quad (1.48)$$

ovvero

$$\tau = \frac{L^2}{\chi_m} = \frac{4\pi\sigma L^2}{c^2} \quad (1.49)$$

- il liquido è un conduttore perfetto. Questo caso si realizza nel caso in cui il termine diffusivo è trascurabile, che si realizza se $\sigma \rightarrow \infty$ oppure se $t \ll \tau$. In questo caso l'equazione idromagnetica assume la forma

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.50)$$

che possiamo riscrivere facendo uso dell'identità

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{B}) \quad (1.51)$$

in cui il secondo e quarto termine sono nulli, ottenendo

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (1.52)$$

dove riconosciamo al primo termine la *derivata totale* del campo \mathbf{B} , per cui

$$\frac{D\mathbf{B}}{Dt} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (1.53)$$

La relazione tra \mathbf{B} e \mathbf{v} in questo caso può essere compresa appieno calcolando il flusso di \mathbf{B} . Si può notare come

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \rightarrow \infty \quad (1.54)$$

per cui, ricordando la (1.14), otteniamo che

$$\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad \text{per } \sigma \rightarrow \infty \quad (1.55)$$

Questo risultato è noto come *teorema di Alfvén*, per il quale il flusso del campo magnetico attraverso una superficie in moto con il fluido è costante per un conduttore perfetto.

Il teorema di Alfvén comporta che le linee di campo di \mathbf{B} sono congelate nel fluido, muovendosi con esso. Scomponiamo la velocità \mathbf{v} del fluido in due componenti, una parallela (\mathbf{v}_{\parallel}) e una perpendicolare (\mathbf{v}_{\perp}) al campo magnetico. La velocità delle linee di campo, nel caso di un conduttore perfetto, sarà quindi la componente perpendicolare al campo $\mathbf{w} \equiv \mathbf{v}_{\perp}$. Nel limite $\sigma \rightarrow \infty$, la (1.40) diventa

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \rightarrow 0 \quad (1.56)$$

da cui

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} \simeq -c\mathbf{E} \quad (1.57)$$

Ora, ricordando che

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp} \quad \mathbf{v}_{\parallel} \times \mathbf{B} = 0 \quad (1.58)$$

e che $\mathbf{w} \equiv \mathbf{v}_{\perp}$, possiamo scrivere la relazione come

$$\mathbf{w} \times \mathbf{B} = -c\mathbf{E} \quad (1.59)$$

Moltiplicando vettorialmente entrambi i membri per \mathbf{B} a sinistra otteniamo

$$\mathbf{w} = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (1.60)$$

Nel caso in cui la conducibilità σ abbia un valore finito, le particelle di liquido intersecano le linee di campo, che vengono stirate dal moto del fluido.

Si definisce *linea materiale* (o *linea di fluido*) una curva che si sposta contemporaneamente alle particelle del mezzo. Per analizzare il moto di una linea materiale, prendiamo un elemento della linea \mathbf{s} , a cui estremi troviamo le velocità \mathbf{v} e \mathbf{v}' . Possiamo scrivere

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + (d\mathbf{x} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (1.61)$$

ma, assumendo che l'elemento di linea sia piccolo, abbiamo che $d\mathbf{x} \simeq \mathbf{s}$, da cui

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + (\mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (1.62)$$

Dato che la variazione di lunghezza di \mathbf{s} è data dalla differenza delle velocità, possiamo scrivere che

$$\frac{ds}{dt} = (\mathbf{s} \cdot \nabla) v \quad (1.63)$$

che recupera la forma dell'equazione (1.53). Dal teorema di Alfvén possiamo dedurre alcune conclusioni:

- se all'istante $t = 0$ \mathbf{B} e \mathbf{s} sono paralleli, essi rimangono paralleli anche in seguito;
- i moduli di \mathbf{B} e \mathbf{s} variano in modo proporzionale.

Per cui se due particelle di fluido si trovano sulla stessa linea di campo di \mathbf{B} , esse vi rimangono sempre a distanza proporzionale al modulo di \mathbf{B} . Viceversa le linee di campo vengono stirate dal moto del fluido e l'intensità di \mathbf{B} varia proporzionalmente.

Se L e V sono rispettivamente la lunghezza e la velocità caratteristiche del problema considerato, possiamo effettuare un cambio di variabile nella (1.45) dato da

$$\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{L} \quad \mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}}{V} \quad \text{da cui} \quad t' = \frac{V}{L}t \quad \mathbf{B}' = \frac{L}{V}\mathbf{B} \quad (1.64)$$

così da ottenere la seguente equazione

$$\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} = \nabla' \times (\mathbf{v}' \times \mathbf{B}') + \frac{\chi_m}{LV} \nabla'^2 \mathbf{B}' \quad (1.65)$$

dove ∇' sta ad indicare che le derivate sono effettuate rispetto alle nuove variabili. L'equazione è caratterizzata da una quantità adimensionale che definiamo come il *numero di Reynolds magnetico*, dato da

$$R_m = \frac{LV}{\chi_m} = \frac{4\pi\sigma}{c^2}LV \quad (1.66)$$

Grazie a questa grandezza, possiamo distinguere tra i due casi limite della (1.45) con il seguente criterio:

- se $R_m \ll 1$ la diffusione prevale sul trascinamento;
- se $R_m \gg 1$ il trascinamento delle linee prevale sulla diffusione.

1.7 Il moto del liquido conduttore

Come detto in precedenza, l'equazione del moto del liquido conduttore è data da (1.37), che riscriviamo come

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{f} \quad (1.67)$$

dove \mathbf{F} comprende le forze non elettromagnetiche e \mathbf{f} è la forza ponderomotrice

$$\mathbf{F} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} \quad \mathbf{f} = \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (1.68)$$

Sia $\hat{\mathbf{m}}$ la direzione del campo magnetico. Allora possiamo scrivere $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{m}}$ e possiamo scomporre il vettore velocità nella somma di una componente parallela

$$\mathbf{v}_{\parallel} = \hat{\mathbf{m}}(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{m}}) \quad (1.69)$$

e una perpendicolare

$$\mathbf{v}_\perp = \hat{\mathbf{m}} \times (\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{m}}) \quad (1.70)$$

alla direzione di \mathbf{m} . Usando la (1.40) possiamo scrivere

$$\mathbf{f} = \frac{\sigma}{c} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \times \mathbf{B} \quad (1.71)$$

ovvero

$$\mathbf{f} = \frac{\sigma}{c} \mathbf{E} \times \mathbf{B} + \frac{\sigma}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (1.72)$$

Introducendo la velocità trovata in (1.60) e utilizzando (1.51) troviamo che

$$\mathbf{f} = \frac{\sigma B^2}{c^2} \mathbf{w} + \frac{\sigma}{c^2} [\mathbf{B} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{v} B^2] \quad (1.73)$$

Poiché

$$\mathbf{B} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) = B^2 \hat{\mathbf{m}} (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{m}}) = B^2 \mathbf{v}_\parallel \quad (1.74)$$

e dato che

$$\mathbf{v}_\parallel - \mathbf{v} = -\mathbf{v}_\perp \quad (1.75)$$

possiamo infine riscrivere la forza ponderomotrice come

$$\mathbf{f} = -\frac{\sigma B^2}{c^2} (\mathbf{v}_\perp - \mathbf{w}) \quad (1.76)$$

Quindi possiamo concludere che la forza ponderomotrice dipende solo da \mathbf{v}_\perp , del quale ha la stessa direzione ma verso opposto. Tale forza ha quindi la forma di una forza di attrito che ostacola il moto nella direzione perpendicolare al campo \mathbf{B} .

Convien ora scrivere le equazioni (1.37) scomponendole per componenti parallela e perpendicolare al campo

$$\begin{cases} \rho \frac{d\mathbf{v}_\parallel}{dt} = \mathbf{F}_\parallel \\ \rho \frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = \mathbf{F}_\perp - \frac{\sigma B^2}{c^2} (\mathbf{v}_\perp - \mathbf{w}) \end{cases} \quad (1.77)$$

In questo modo diventa evidente come la forza magnetica influenzi solamente il moto perpendicolare a \mathbf{B} . Si è soliti definire una *viscosità magnetica* data da

$$\eta_m = \frac{\sigma B^2 L^2}{c^2} \quad (1.78)$$

A causa dell'attrito magnetico, la velocità \mathbf{v}_\perp decade nel tempo ad un valore stazionario

$$\mathbf{v}_\perp \rightarrow \mathbf{w} + \frac{c^2}{\sigma B^2} \mathbf{F}_\perp \quad (1.79)$$

con un tempo caratteristico dato da

$$\tau' = \frac{\rho c^2}{\sigma B^2} \quad (1.80)$$

Pur avendo finora studiato la dinamica dei continui descritti dalla teoria della MHD, è doveroso puntualizzare che il problema magnetoidrodinamico non ha una soluzione analitica generale. Infatti tutta la teoria può essere semplicemente espressa dal sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \chi_m \nabla^2 \mathbf{B} \\ \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \end{cases} \quad (1.81)$$

dal quale possono essere ricavati tutti i fenomeni analizzati in questo capitolo. La presenza in entrambe le equazioni dei campi \mathbf{B} e \mathbf{v} rende il sistema accoppiato e non separabile, complicando ulteriormente la situazione data dalla non linearità delle equazioni di Navier-Stokes. Tuttavia esistono problemi con condizioni particolarmente semplici da consentire una soluzione analitica, così da poter dare una base concettuale per l'interpretazione dei casi generali e più complessi⁶.

⁶Per i numerosi aspetti non trattati della MHD, tra cui turbolenza, onde di Alfvén, ecc... si rimanda a [4].

Capitolo 2

Il Flusso di Hartmann

2.1 Il problema di Hartmann

Consideriamo ora un problema di MHD del quale è possibile ottenere una soluzione analitica, ovvero per il quale riusciamo a determinare le funzioni della velocità e del campo magnetico. Tale problema è il *problema o flusso di Hartmann*, dal fisico danese Julius Friedrich Georg Hartmann (Copenaghen Holeby, Lolland, 1881 - Copenaghen 1951), i cui principali contributi riguardano l'aerodinamica e lo studio della MHD, presentando il problema omonimo in alcuni lavori riguardo la dinamica del mercurio sottoposto ad un campo magnetico uniforme¹. Il problema prevede un liquido conduttore, che rispetta le ipotesi del capitolo precedente, compreso tra due pareti solide, piane e parallele, del quale vogliamo risolvere il moto stazionario quando è sottoposto ad un gradiente di pressione idrostatica e ad un campo magnetico costanti.

Si suppongono noti i valori costanti e uniformi di densità ρ , conducibilità σ e viscosità η . Fissiamo il sistema di riferimento in modo che il moto avvenga lungo l'asse x e il campo magnetico sia parallelo all'asse z (v. fig. 2.1); le pareti sono poste orizzontalmente in corrispondenza dei piani $z = a$, $z = -a$. Possiamo quindi scrivere il gradiente di pressione come

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\gamma \quad (2.1)$$

e il campo magnetico come

$$\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{z}} \quad (2.2)$$

dove B_0 e γ sono costanti positive. Inoltre la velocità avrà la forma

$$\mathbf{v} = v_x(z) \hat{\mathbf{x}} \quad (2.3)$$

¹La trattazione completa è presentata in [5], il primo di una coppia di articoli che vuole presentare la teoria generale, ripresa anche nella presente tesi.

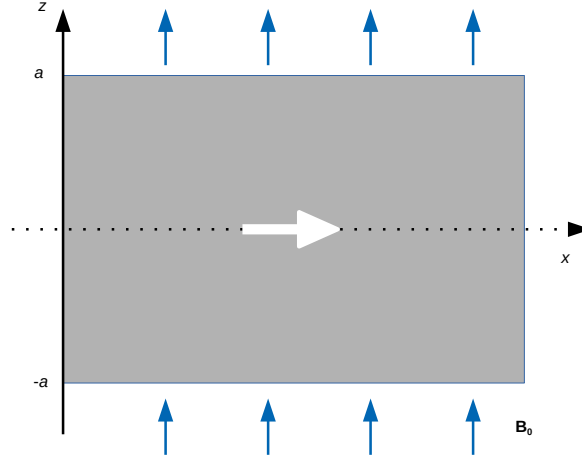


Figura 2.1: Flusso di Hartmann: moto unidirezionale lungo x sottoposto a campo magnetico uniforme \mathbf{B}_0 .

per la quale varrà l'equazione di continuità $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Per la simmetria del sistema, le grandezze in gioco possono essere funzione solamente della coordinata z , o potranno al più essere costanti. La forza di Lorentz, essendo direttamente proporzionale al vettore $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, produrrà una densità di corrente nella forma

$$\mathbf{J} = J_y \hat{\mathbf{y}} \quad (2.4)$$

Questa densità di corrente produce un campo elettrico \mathbf{E} , come visto dalla (1.40). Sempre dalla (1.40) possiamo dedurre che tale campo elettrico è diretto lungo l'asse y e, dalle (1.2) nel caso stazionario, possiamo dedurre che, avendo sia rotore che divergenza nulli, il campo è costante e uniforme, così da poter scrivere

$$\mathbf{E}_0 = E_0 \hat{\mathbf{y}} \quad (2.5)$$

dove E_0 è una costante. Possiamo quindi scrivere la componente non nulla della corrente come

$$J_y = \sigma \left(E_0 - \frac{1}{c} B_0 v_x \right) \quad (2.6)$$

Questa corrente produce un campo magnetico aggiuntivo, creando l'effetto del trascinamento delle linee di forza di \mathbf{B} nella direzione del moto del liquido. Il campo magnetico totale può essere scritto come $\mathbf{B} = (B_x, 0, B_0)$, dove $B_x = B_x(z)$ e B_0 è costante, e per esso varranno le equazioni di Maxwell. In particolare il campo \mathbf{B} avrà divergenza nulla e, grazie alla (1.35), è legato alla corrente dalla relazione

$$J_y = \frac{c}{4\pi} \frac{dB_x}{dz} \quad (2.7)$$

Tensore di Maxwell e forza ponderomotrice

Il tensore di Maxwell può essere calcolato direttamente dalla (1.25), trascurando il campo elettrico essendo $E_0 \ll B_0$, così da ottenere

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} B_x^2 - \frac{B^2}{2} & 0 & B_x B_z \\ 0 & -\frac{B^2}{2} & 0 \\ B_z B_x & 0 & B_z^2 - \frac{B^2}{2} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

che possiamo però scomporre in tre tensori (v. fig. 2.2)

$$T_{ij} = \frac{1}{8\pi} \begin{pmatrix} -B^2 & 0 & 0 \\ 0 & -B^2 & 0 \\ 0 & 0 & -B^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} B_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_z^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} 0 & 0 & B_x B_z \\ 0 & 0 & 0 \\ B_z B_x & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

che rappresentano rispettivamente:

- la pressione magnetica;
- degli sforzi tensili nelle direzioni x e z ;
- uno sforzo di taglio che agisce in direzione x sui piani perpendicolari all'asse z .

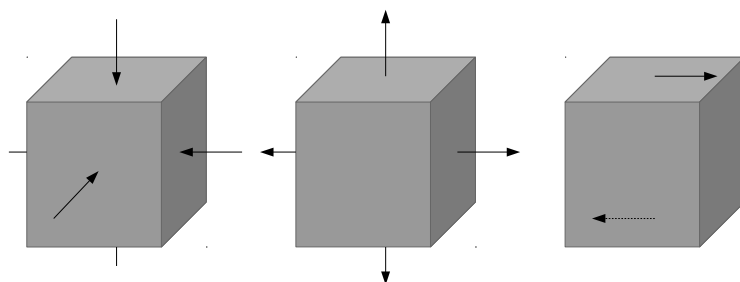


Figura 2.2: decomposizione del tensore di Maxwell nei tre contributi.

Corrispondentemente la forza ponderomotrice sarà data da combinazioni di derivate di T_{ij} :

- la pressione magnetica dà origine alla componente f_z ;

- gli sforzi tensili non producono forza, dato che B_x non dipende da x e B_z non dipende da z ;
- lo sforzo di taglio produce la componente f_x .

Dalla (1.32) possiamo calcolare la forza ponderomotrice. Dato che

$$\nabla(B^2) = \nabla(B_x^2) = \frac{\partial}{\partial z}(B_x^2)\hat{\mathbf{z}} = 2B_x \frac{\partial B_x}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \quad (2.10)$$

e che

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} = B_0 \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{B} = B_0 \frac{\partial}{\partial z} B_x \hat{\mathbf{x}} \quad (2.11)$$

possiamo scrivere che

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{8\pi} \nabla(B^2) \\ &= \frac{B_0}{4\pi} \frac{\partial B_x}{\partial z} \hat{\mathbf{x}} - \frac{B_z}{4\pi} \frac{\partial B_x}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (2.12)$$

L'equazione del moto

L'equazione del moto, data dalla (1.37), può essere anch'essa semplificata. In primo luogo possiamo considerare il problema in assenza di gravità, in quanto non ci interessa l'effetto del campo gravitazionale sul fluido. In secondo luogo, la derivata materiale della velocità \mathbf{v} è nulla:

- il termine $\partial \mathbf{v} / \partial t$ è nullo in virtù del fatto che consideriamo un moto stazionario;
- il termine $(\mathbf{v} \cdot \nabla)$ è nullo in quanto stiamo considerando un moto laminare.

L'equazione si riduce quindi a

$$-\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f} = 0 \quad (2.13)$$

che ci conviene studiare per componenti

$$\begin{cases} \frac{B_0}{4\pi} \frac{\partial B_x}{\partial z} + \eta \frac{\partial^2}{\partial z^2} v_x = -\gamma & \text{lungo } x \\ -\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{B_z}{4\pi} \frac{\partial B_x}{\partial z} = 0 & \text{lungo } z \end{cases} \quad (2.14)$$

La componente lungo z può essere riscritta come

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial B_x^2}{\partial z} = 0 \quad (2.15)$$

ovvero

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) = 0 \quad (2.16)$$

da cui, data la simmetria del problema, possiamo scrivere

$$p + \frac{B^2}{8\pi} = f(x) \quad (2.17)$$

dove f è una funzione che dipende solamente dalla variabile x , per la quale si può ricavare, derivando entrambi i membri rispetto a x che

$$\frac{df}{dx} = -\gamma \quad (2.18)$$

L'equazione idromagnetica

Nel caso stazionario, l'equazione idromagnetica si riduce da (1.45) alla forma

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{B} = 0 \quad (2.19)$$

che possiamo sviluppare ricorrendo alla (1.51), così da ottenere

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{B} = 0 \quad (2.20)$$

la cui unica componente non identicamente nulla è la componente x , data da

$$B_0 \frac{dv_x}{dz} + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{d^2 B_x}{dz^2} = 0 \quad (2.21)$$

In ultima analisi, il problema di Hartmann è stato ricondotto alla soluzione di un sistema di equazioni differenziali accoppiate, date dalle componenti lungo x dell'equazione del moto e dell'equazione idromagnetica

$$\begin{cases} \frac{B_0}{4\pi} \frac{\partial B_x}{\partial z} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = -\gamma \\ B_0 \frac{dv_x}{dz} + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{d^2 B_x}{dz^2} = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

A questo sistema vanno poi aggiunte le condizioni al contorno date da

- la velocità sulle pareti deve essere nulla $v_x(\pm a) = 0$,
- le componenti normale e tangenziale del campo magnetico devono essere continue sulle pareti, per cui, essendo B_x nulla all'esterno, si avrà $B_x(\pm a) = 0$.

2.2 La soluzione del problema

Per risolvere il sistema (2.22), ci conviene semplificare la notazione introducendo le costanti

$$\alpha = \frac{B_0}{4\pi\eta}, \quad \beta = \frac{4\pi\sigma B_0}{c^2}, \quad \theta = \frac{\gamma}{\eta} \quad (2.23)$$

e usando l'operatore

$$D = \frac{d}{dz} \quad (2.24)$$

In questo modo il sistema assume la forma

$$\begin{cases} D^2 v_x + \alpha D B_x + \theta = 0 \\ D^2 B_x + \beta D v_x = 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

Applichiamo alla prima l'operatore D e moltiplichiamo la seconda per α , ottenendo

$$\begin{cases} D^3 v_x + \alpha D^2 B_x = 0 \\ \alpha D^2 B_x + \alpha \beta D v_x = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

Sottraendo la seconda dalla prima, otteniamo

$$D^3 v_x + \alpha D^2 B_x - \alpha D^2 B_x - \alpha \beta D v_x = 0 \quad (2.27)$$

ovvero

$$D(D^2 - \alpha\beta)v_x = 0 \quad (2.28)$$

da cui possiamo ricavare la velocità

La velocità

L'equazione ottenuta è omogenea. Scriviamola come

$$(D - m_1)(D - m_2)(D - m_3)v_x = 0 \quad (2.29)$$

le cui radici sono

$$m_1 = 0, \quad m_2 = \sqrt{\alpha\beta}, \quad m_3 = -\sqrt{\alpha\beta} \quad (2.30)$$

La primitiva sarà quindi data da

$$v_x(z) = C_1 + C_2 e^{z/\Delta} + C_3 e^{-z/\Delta} \quad (2.31)$$

dove C_1 , C_2 e C_3 sono costanti e abbiamo introdotto la lunghezza

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{c}{B_0} \sqrt{\frac{\eta}{\sigma}} \quad (2.32)$$

In alternativa, possiamo esprimere la soluzione tramite le funzioni iperboliche:

$$X(z) = A_1 + A_2 \sinh \frac{z}{\Delta} + A_3 \cosh \frac{z}{\Delta} \quad (2.33)$$

dove A_1 , A_2 e A_3 sono altre costanti, i cui valori si ottengono imponendo le condizioni al contorno su v_x , cioè

$$A_1 + A_2 \sinh \frac{a}{\Delta} + A_3 \cosh \frac{a}{\Delta} = 0 \quad (2.34)$$

$$A_1 - A_2 \sinh \frac{a}{\Delta} + A_3 \cosh \frac{a}{\Delta} = 0 \quad (2.35)$$

Sommando le due equazioni si ottiene

$$2A_1 + 2A_3 \cosh \frac{a}{\Delta} = 0 \quad (2.36)$$

da cui

$$A_1 = -A_3 \cosh \frac{a}{\Delta} \quad (2.37)$$

Sottraendo le due equazioni si ottiene invece

$$A_2 \sinh \frac{a}{\Delta} = 0 = 0 \quad (2.38)$$

da cui

$$A_2 = 0 \quad (2.39)$$

Inserendo i valori di A_1 e A_2 , la soluzione diventa

$$v_x(z) = -A_3 \left(\cosh \frac{a}{\Delta} - \cosh \frac{z}{\Delta} \right) \quad (2.40)$$

La costante A_3 può essere espressa tramite la velocità massima v_0 . Dalla soluzione si ha

$$v_0 = v_x(0) = -A_3 \left(\cosh \frac{a}{\Delta} - 1 \right) \quad (2.41)$$

da cui

$$A_3 = -\frac{v_0}{\cosh \frac{a}{\Delta} - 1} \quad (2.42)$$

Perciò possiamo concludere che la velocità sarà data da

$$v_x(z) = v_0 \frac{\cosh \frac{a}{\Delta} - \cosh \frac{z}{\Delta}}{\cosh \frac{a}{\Delta} - 1} \quad (2.43)$$

Il campo magnetico

Il campo magnetico si ricava dall'equazione di Navier-Stokes

$$DB_x = -\frac{1}{\alpha}(D^2v_x + \theta) \quad (2.44)$$

in cui compare la derivata seconda della velocità. Dalla soluzione ricavata sopra otteniamo

$$\frac{d^2v_x}{dz^2} = -\frac{v_0}{\Delta^2} \frac{\cosh \frac{z}{\Delta}}{\cosh \frac{a}{\Delta} - 1} \quad (2.45)$$

Quindi

$$DB_x = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{v_0}{\Delta^2} \frac{\cosh \frac{z}{\Delta}}{\cosh \frac{a}{\Delta} - 1} - \theta \right) \quad (2.46)$$

Poiché la velocità massima v_0 deve essere proporzionale al gradiente di pressione γ , il parametro θ deve essere proporzionale a v_0 . Perciò poniamo $\theta = Kv_0$, dove K è una costante da determinare. Allora

$$DB_x = \frac{v_0}{\alpha} \left(\frac{1}{\Delta^2} \frac{\cosh \frac{z}{\Delta}}{\cosh \frac{a}{\Delta} - 1} - K \right) \quad (2.47)$$

Integrando, si ottiene

$$B_x = \frac{v_0}{\alpha} \left(\frac{1}{\Delta} \frac{\sinh \frac{z}{\Delta}}{\cosh \frac{a}{\Delta} - 1} - K \frac{z}{\Delta} \right) + C \quad (2.48)$$

dove C è un'altra costante. Per le condizioni al contorno su B_x , si ha

$$-\frac{v_0}{\alpha\Delta} \frac{\sinh \frac{a}{\Delta}}{\cosh \frac{a}{\Delta} - 1} + \frac{v_0K}{\alpha\Delta}a + C = 0 \quad (2.49)$$

$$\frac{v_0}{\alpha\Delta} \frac{\sinh \frac{a}{\Delta}}{\cosh \frac{a}{\Delta} - 1} - \frac{v_0K}{\alpha\Delta}a + C = 0 \quad (2.50)$$

Sommando le due equazioni, si ottiene

$$C = 0 \quad (2.51)$$

Sottraendole e semplificando, si ottiene invece

$$-\frac{\sinh \frac{a}{\Delta}}{\cosh \frac{a}{\Delta} - 1} + Ka = 0 \quad (2.52)$$

da cui

$$K = \frac{1}{a} \frac{\sinh \frac{a}{\Delta}}{\cosh \frac{a}{\Delta} - 1} \quad (2.53)$$

Quindi

$$B_x = \frac{v_0}{\alpha\Delta} \left(\frac{\sinh \frac{z}{\Delta}}{\cosh \frac{a}{\Delta} - 1} - \frac{\sinh \frac{a}{\Delta}}{\cosh \frac{a}{\Delta} - 1} \frac{z}{a} \right) \quad (2.54)$$

da cui

$$B_x = v_0 \frac{4\pi\sqrt{\eta\sigma}}{c} \frac{\sinh \frac{z}{\Delta} - \frac{z}{a} \sinh \frac{a}{\Delta}}{\cosh \frac{a}{\Delta} - 1} \quad (2.55)$$

La velocità massima

Per ricavare l'espressione di v_0 in funzione di γ e degli altri parametri del modello, inseriamo le soluzioni ottenute nell'equazione di Navier-Stokes. Sono necessarie le derivate

$$\frac{d^2 v_x}{dz^2} = -\frac{v_0}{\Delta^2} \frac{\cosh \frac{z}{\Delta}}{\cosh \frac{a}{\Delta} - 1} \quad (2.56)$$

e

$$\frac{dB_x}{dz} = -v_0 \frac{4\pi\sqrt{\sigma\eta}}{c} \frac{\frac{1}{a} \sinh \frac{a}{\Delta} - \frac{1}{\Delta} \cosh \frac{z}{\Delta}}{\cosh \frac{a}{\Delta} - 1} \quad (2.57)$$

Si ottiene

$$-\frac{B_0}{4\pi} v_0 \frac{4\pi\sqrt{\sigma\eta}}{c} \frac{\frac{1}{a} \sinh \frac{a}{\Delta} - \frac{1}{\Delta} \cosh \frac{z}{\Delta}}{\cosh \frac{a}{\Delta} - 1} - \eta \frac{v_0}{\Delta^2} \frac{\cosh \frac{z}{\Delta}}{\cosh \frac{a}{\Delta} - 1} = -\gamma \quad (2.58)$$

che possiamo scrivere come

$$\frac{v_0}{\Delta} \left(\frac{\eta}{\Delta} - \frac{B_0\sqrt{\sigma\eta}}{c} \right) \frac{\cosh \frac{z}{\Delta}}{\cosh \frac{a}{\Delta} - 1} + \frac{v_0 B_0\sqrt{\sigma\eta}}{ac} \frac{\sinh \frac{a}{\Delta}}{\cosh \frac{a}{\Delta} - 1} = \gamma \quad (2.59)$$

Per la definizione di Δ , il termine tra parentesi tonde si annulla e si ottiene un'equazione indipendente da z , cioè

$$\frac{v_0 B_0\sqrt{\sigma\eta}}{ac} \frac{\sinh \frac{a}{\Delta}}{\cosh \frac{a}{\Delta} - 1} = \gamma \quad (2.60)$$

da cui

$$v_0 = \frac{ac\gamma}{B_0\sqrt{\sigma\eta}} \frac{\cosh \frac{a}{\Delta} - 1}{\sinh \frac{a}{\Delta}} \quad (2.61)$$

Altre grandezze di interesse fluidodinamico

La *velocità media* è calcolata come media integrale al variare di z , ovvero

$$\bar{v}_x = \int_{-a}^a v_x(z) dz \quad (2.62)$$

il cui calcolo fornisce

$$\bar{v}_x = \frac{a\gamma\Delta}{\eta} \left(\coth \frac{a}{\Delta} - \frac{\Delta}{a} \right) \quad (2.63)$$

La *portata* è data da $Q = 2a\bar{v}_x$. Ricordando la definizione di Δ da (2.32) possiamo notare che la portata dipende, oltre che dalle quantità idrodinamiche γ e η e dalla geometria del condotto, dipende anche dall'intensità del campo B_0 e dalla conducibilità elettrica del fluido σ .

Possiamo anche calcolare la *vorticità* del flusso Ω . Ricordando la definizione $\Omega = \nabla \times \mathbf{v}$, si può vedere che

$$\Omega = \frac{dv_x}{dz} \hat{\mathbf{y}} \quad (2.64)$$

in cui

$$\Omega_y = -\frac{v_0}{\Delta} \frac{\sinh \frac{z}{\Delta}}{\cosh \frac{a}{\Delta} - 1} \quad (2.65)$$

2.3 Il numero di Hartmann

Studiamo ora due casi particolari. Il primo è il caso in cui $a/\Delta \ll 1$, ovvero $z/\Delta \ll 1$. Ricordando che per $x \ll 1$ possiamo sviluppare le funzioni iperboliche

$$\cosh x \simeq 1 + \frac{x^2}{2} \quad \sinh x \simeq x \quad (2.66)$$

da cui possiamo ricavare che

$$v_x(z) = v_0 \left(1 - \frac{z^2}{a^2} \right) \quad (2.67)$$

Per il campo magnetico si ottiene semplicemente che $B_x(z) = 0$, ovvero il campo iniziale non viene modificato. Possiamo quindi concludere che il fluido si comporta come un non conduttore, come si poteva notare dal fatto che la richiesta $\Delta \gg a$ equivale, in virtù della (2.32), che $\sigma \rightarrow 0$.

Il secondo caso è quello in cui $a/\Delta \gg 1$. In questo caso possiamo notare che per $x \gg 1$, vale l'approssimazione

$$\cosh x \simeq \sinh x \simeq \frac{e^x}{2} \quad (2.68)$$

da cui segue

$$v_x(z) = v_0 \left(1 - e^{-(a-|z|)/\Delta}\right) \quad (2.69)$$

che è una funzione che, al crescere del rapporto $\frac{a}{\Delta}$, si appiattisce sempre più. Si può allora considerare Δ come lo spessore tra il condotto, dove $v_x = 0$, e la zona dove $v_x \approx \text{cost.}$ Il campo magnetico assume la forma

$$B_x(z) = -v_0 \frac{4\pi\sqrt{\sigma\eta}}{c} \left(\frac{z}{a} - e^{-\frac{a-|z|}{\Delta}}\right) \quad (2.70)$$

A questo punto, per riassumere la fenomenologia appena presentata, conviene introdurre il *numero di Hartmann*, definito come

$$M = \frac{a}{\Delta} \quad (2.71)$$

il quale si aggiunge al numero di Reynolds magnetico definito in (1.66), essendo anch'esso un numero adimensionale da cui possiamo estrarre l'andamento qualitativo del moto. Riassumendo quanto visto sopra, possiamo determinare l'effetto del numero di Hartmann come segue

- se $M \ll 1$ il moto è scarsamente influenzato dalla presenza del campo magnetico, il campo di velocità è parabolico (v. fig. 2.3) e il campo prodotto dal fluido è trascurabile (ovvero, abbiamo un ridotto trascinamento delle linee di campo);

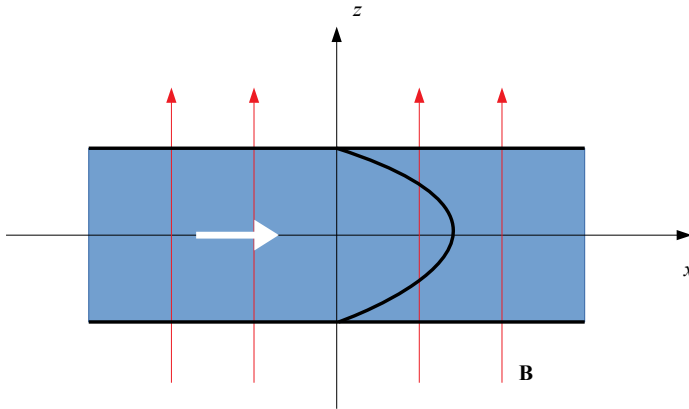


Figura 2.3: campo di velocità di un fluido non conduttore.

- se $M \gg 1$ il profilo di velocità si appiattisce e si accentua il campo magnetico prodotto dal fluido (ovvero, si accentua il trascinamento delle linee di campo).

Ricordando la definizione del parametro Δ dalla (2.32), possiamo scrivere

$$M = \frac{aB_0}{c} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} \quad (2.72)$$

così da notare che M si annulla nel caso in cui $\sigma = 0$, ovvero nel caso in cui fluido non conduca, oppure in cui $B_0 = 0$, ovvero nel caso in cui non vi sia un campo magnetico esterno, non c'è alcuna differenza tra il flusso di Hartmann e il normale flusso di un fluido non conduttore in un condotto. Prendendo il quadrato di M e ricordando la (1.78), si può notare che

$$M = \sqrt{\frac{\eta_m}{\eta}} \quad (2.73)$$

per cui il numero di Hartmann fornisce una indicazione sul rapporto tra viscosità dinamica e magnetica.

Possiamo ora esprimere la soluzione del problema (rappresentata in fig. 2.4) utilizzando la (2.71), ottenendo la velocità al centro del condotto come

$$v_0 = \frac{ac\gamma}{B_0\sqrt{\sigma\eta}} \frac{\cosh M - 1}{\sinh M} \quad (2.74)$$

da cui il profilo di velocità

$$v_x(z) = \frac{ac\gamma}{B_0\sqrt{\sigma\eta}} \frac{\cosh M - \cosh\left(M\frac{z}{a}\right)}{\sinh M} \quad (2.75)$$

la velocità media

$$\bar{v}_x = \frac{\gamma c^2}{\sigma B_0^2} (M \coth M - 1) \quad (2.76)$$

e il campo magnetico

$$B_x(z) = -\frac{4\pi a\gamma}{B_0} \frac{\frac{z}{a} \sinh M - \sinh\left(M\frac{z}{a}\right)}{\sinh M} \quad (2.77)$$

Possiamo ora ricavare la corrente elettrica (rappresentata in fig. 2.5). Ricordando la (1.35) applicata all'espressione per B_x , otteniamo

$$J_y(z) = -\frac{c\gamma}{B_0} \frac{\sinh M - M \cosh\left(M\frac{z}{a}\right)}{\sinh M} \quad (2.78)$$

Si può facilmente verificare che la corrente totale è nulla:

$$I = \int_{-a}^a J_y(z) dz = 0 \quad (2.79)$$

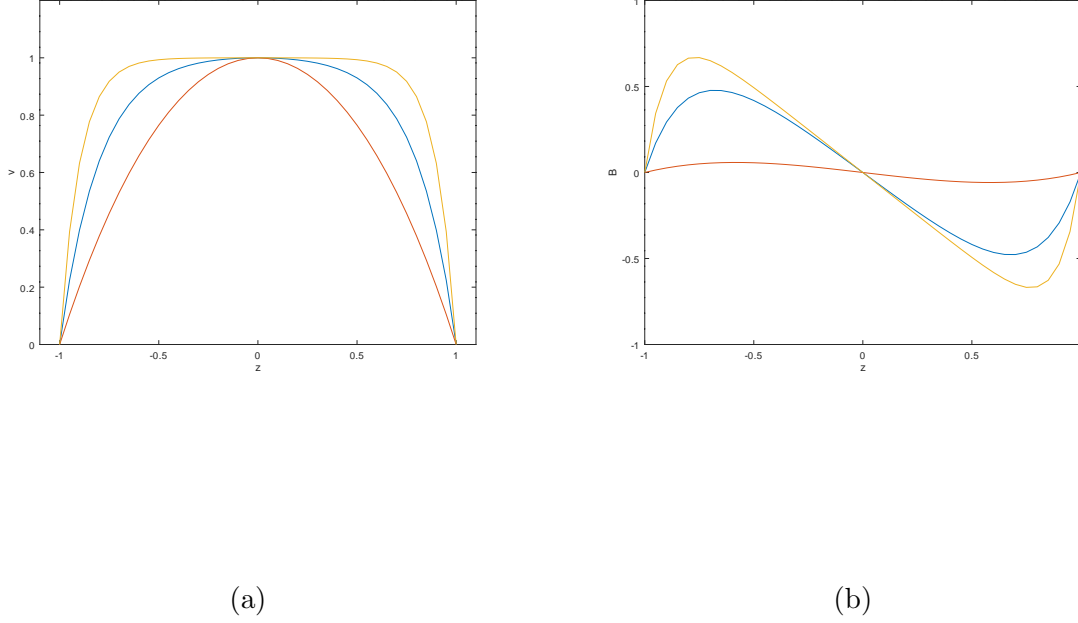


Figura 2.4: Grafici relativi alla velocità (a) e al campo magnetico (b) per $M = 1, 5, 10$, rispettivamente in rosso, azzurro e giallo.

Ricordando infine la (1.40), possiamo trovare il campo elettrico (ancora fig. 2.5):

$$\begin{aligned}
 E_0 &= \frac{J_y}{\sigma} + \frac{1}{c} B_0 v_x = \\
 &= -\frac{c\gamma}{B_0\sigma} \frac{\sinh M - M \cosh\left(\frac{Mz}{a}\right)}{\sinh M} + \frac{a\gamma}{\sqrt{\sigma\eta}} \frac{\cosh M - \cosh\left(\frac{Mz}{a}\right)}{\sinh M} \\
 &= -\frac{c\gamma}{B_0\sigma} + \frac{a\gamma}{\sqrt{\sigma\eta}} \frac{\cosh\left(\frac{Mz}{a}\right)}{\sinh M} + \frac{a\gamma}{\sqrt{\sigma\eta}} \coth M - \frac{a\gamma}{\sqrt{\sigma\eta}} \frac{\cosh\left(\frac{Mz}{a}\right)}{\sinh M} \\
 &= \frac{a\gamma}{\sqrt{\sigma\eta}} \coth M - \frac{c\gamma}{B_0\sigma}
 \end{aligned} \tag{2.80}$$

da cui possiamo trovare

$$E_0 = \frac{B_0}{c} \bar{v}_x \tag{2.81}$$

Dato che $\bar{v}_x \ll c$ si ha che $E_0 \ll B_0$, come supposto nel calcolare il tensore di Maxwell (2.8). Ovviamente in prossimità delle pareti, la corrente è data solamente dal campo elettrico, ovvero

$$J_y(\pm a) = \sigma E_0 \quad (2.82)$$

La forza ponderomotrice, come visto precedentemente, ostacola il moto relativo tra il liquido e le linee del campo magnetico.

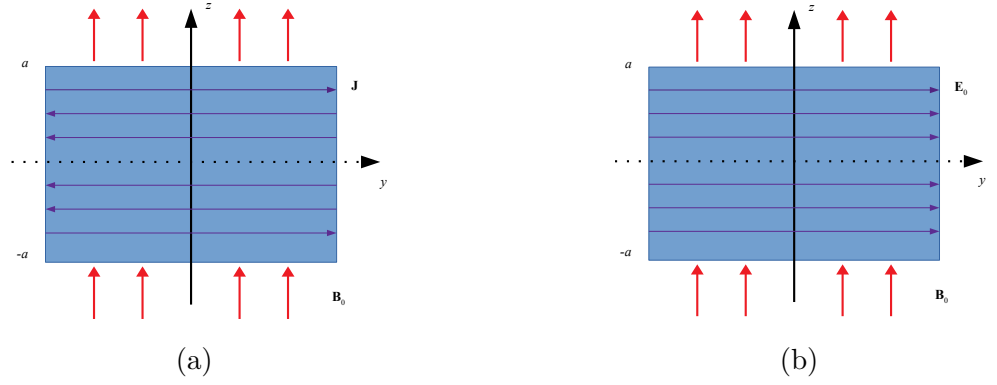


Figura 2.5: Rappresentazione delle linee di campo della densità di corrente (a) e del campo elettrico (b)

2.4 L'interpretazione della soluzione

Ora che disponiamo della soluzione del problema di Hartmann, facciamo un riepilogo che ci permette di individuare i meccanismi di produzione del campo magnetico in un fluido conduttore

1. il fluido è sottoposto a vincoli esterni, che sono il campo magnetico esterno $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}}$ e la dinamica che porta alla presenza di un campo di velocità $\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{x}}$;
2. essendo un liquido conduttore, sarà presente sulle cariche libere una forza di Lorentz $F_y = \frac{q}{c} v_x B_0$;
3. si osserva un campo elettrico, il quale, nel sistema di riferimento del laboratorio, avrà forma $\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{y}}$ e che avrà come componente nel sistema di riferimento del liquido $E_y = E_0 - \frac{1}{c} v_x B_z = \frac{B_0}{c} (\bar{v}_x - v_x)$;
4. dal campo elettrico è generata una densità di corrente elettrica $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ che avrà come componente non nulla $J_y = \frac{\sigma B_0}{c} (\bar{v}_x - v_x)$;

5. per la legge di Ampère (ovvero la (1.35)) viene generato un aggiuntivo campo magnetico in direzione x per il quale vale

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{B_0}{\chi_m}(\bar{v}_x - v_x)$$

6. si ha quindi un campo magnetico totale dato da $\mathbf{B} = B_x \hat{\mathbf{x}} + B_z \hat{\mathbf{z}}$, il cui effetto appare come un trascinamento delle linee di campo;
7. si ha infine una forza esercitata dal campo magnetico totale $\mathbf{f} = \frac{1}{c}(J_y B_x \hat{\mathbf{x}} - J_x B_y \hat{\mathbf{y}})$ che ostacola il moto relativo tra il liquido e le linee di campo.

Il riassunto appena presentato rappresenta quindi un base interpretativa per l'interazione tra un liquido conduttore, descritto dalla MHD, e un campo magnetico esterno. Spogliato dei dettagli delle formule, il riassunto permette infatti di capire in che modo avviene il trascinamento delle linee di campo, tramite la produzione di un campo magnetico aggiuntivo.

2.5 Lo Strato di Hartmann

Come è comune nei problemi di fluidodinamica, è istruttivo studiare lo *strato limite*, ovvero la forma del campo di velocità nei pressi di una superficie solida. Consideriamo una situazione analoga al problema di Hartmann, in cui abbiamo un fluido con una velocità $\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{x}}$, dove $v = v(y)$. Questa volta però studiamo la situazione in presenza di una sola parete solida posta in corrispondenza del piano $y = 0$; ovviamente la velocità tenderà asintoticamente ad un valore v_∞ uniforme per $y \rightarrow \infty$ (v. fig. 2.6).

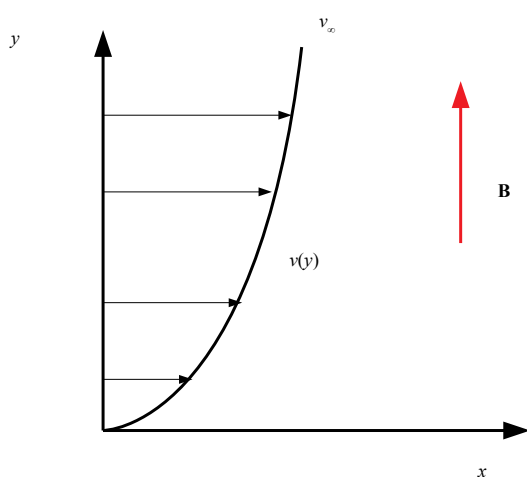


Figura 2.6: andamento della velocità per un flusso con parete lungo il piano xy .

Applichiamo un campo magnetico $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{y}}$. Diversamente dal caso delle due pareti, ci interessa ora solamente l'andamento in prossimità della pareti, per cui possiamo ignorare l'effetto del moto fluido sul campo magnetico; in questo modo dobbiamo risolvere solamente l'equazione del moto. Sfruttiamo l'annullarsi della divergenza della corrente $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, dove

$$\mathbf{J} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \quad (2.83)$$

Ricordando che

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (2.84)$$

e che, essendo \mathbf{B} uniforme, $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, l'equazione del moto diventa

$$\nabla \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0 \quad (2.85)$$

in cui si è fatto uso della definizione di vorticità. In questo caso si avrà che

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v} = -\frac{dv}{dy} \hat{\mathbf{z}} \quad (2.86)$$

da cui possiamo dedurre che \mathbf{B} e $\boldsymbol{\Omega}$ sono perpendicolari. L'equazione del moto si riduce per questo a $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, ovvero, facendo uso del potenziale elettrico ϕ , si ottiene l'equazione di Poisson $\nabla^2 \phi = 0$. In assenza di differenze di potenziale imposte dall'esterno, si ottiene dunque $\phi = 0$ e $\mathbf{E} = 0$, per cui nel sistema di riferimento del laboratorio non c'è alcun campo elettrico.

La corrente elettrica si riduce quindi a

$$\mathbf{J} = \frac{\sigma}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{\sigma B v}{c} \hat{\mathbf{z}} \quad (2.87)$$

La forza ponderomotrice si ricava come

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\frac{\sigma B^2 v}{c^2} \hat{\mathbf{x}} \quad (2.88)$$

in cui l'equazione rende evidente l'azione di questa forza come una forza di attrito.

La componente x della (1.37) diventa

$$-\frac{dp}{dx} + \eta \frac{d^2 v}{dy^2} - \frac{\sigma B^2 v}{c^2} = 0 \quad (2.89)$$

Il gradiente di pressione può essere ricavato studiando questa equazione nel limite $y \rightarrow \infty$, in cui esso deve bilanciare la forza magnetica:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\sigma B^2 v_\infty}{c^2} \quad (2.90)$$

così si ottiene l'equazione del moto nella forma

$$\eta \frac{d^2 v}{dy^2} - \frac{\sigma B^2}{c^2} (v - v_\infty) \quad (2.91)$$

Introducendo la stessa lunghezza di scala introdotta in (2.32), si arriva infine a

$$\frac{d^2}{dy^2} (v - v_\infty) - \frac{v - v_\infty}{\Delta^2} \quad (2.92)$$

la cui soluzione è

$$v(y) = v_\infty (1 - e^{-y/\Delta}) \quad (2.93)$$

Si ritrova quindi il risultato già individuato nel caso del moto tra due pareti. Lo strato di Hartmann ha spessore circa uguale a Δ , al contrario del caso fluidodinamico in cui esso dipende dalla geometria e dalla velocità caratteristica del problema. Inoltre, essendo Δ inversamente proporzionale al campo magnetico, lo strato limite riduce il proprio spessore al crescere del campo magnetico.

Capitolo 3

Il Nucleo Terrestre

3.1 Composizione e cinematica del Nucleo terrestre

Una interessante applicazione della MHD è lo studio della generazione del *campo geomagnetico medio*, ovvero del campo magnetico prodotto dall'interno della Terra¹ (si ignorano quindi i contributi della crosta). La regione del pianeta di nostro interesse è quindi il *Nucleo*, la regione interna con raggio $R = 3485$ km, volume $V = 1.70 \times 10^{20} \text{m}^3$ e massa $M = 1.88 \times 10^{24} \text{kg}$, che quindi rappresenta il 16% del volume e il 31% della massa dell'intero pianeta. Questo può essere compreso alla luce dei modelli comunemente utilizzati per lo studio della formazione ed evoluzione dei pianeti rocciosi: lo sviluppo per accrescimento porta alla conversione di gran parte dell'energia cinetica degli oggetti che collidono in calore, fino alla fusione totale del protopianeta. In queste condizioni può avvenire una *differenziazione gravitativa*, che porta alla stratificazione dei materiali presenti in maggiori quantità dal più pesante (nel Nucleo) al più leggero (sulla superficie), mescolati con elementi presenti in quantità minori che si aggregano per affinità chimica. Non sorprende quindi che il Nucleo sia formato per la maggior parte da ferro (*Fe*), l'elemento più pesante che si forma nel processo di *nucleosintesi stellare*.

Solitamente si divide il Nucleo terrestre in due parti: rispettivamente:

- il *Nucleo interno*, con raggio $R = 1225$ km, volume $V = 7.70 \times 10^{18} \text{m}^3$, e massa $M = 9.24 \times 10^{22}$ kg, che quindi rappresenta il 19% del raggio, meno dell'1% della massa e 1.5% della massa della Terra;
- il *Nucleo esterno*, che rappresenta la porzione restante.

La composizione chimica e lo stato di aggregazione delle due regioni presentano alcune differenze. Il Nucleo esterno è prevalentemente formato da ferro (*Fe*) allo stato liquido,

¹Per una trattazione che includa i contributi di ordine superiore del campo magnetico, si rimanda a [6] e [7]

diluito da zolfo (S), che ne diminuisce la densità di circa il 10%; questi elementi reagiscono, formando del solfuro di ferro (FeS) il quale, alle temperature tipiche del Nucleo, è miscibile con Fe . Il miscuglio $Fe-FeS$ costituisce gran parte del Nucleo, infatti si ha un 86% di Fe e un 12% di S , a cui si aggiungono alcuni elementi minori, tra cui il nichel (Ni) che rappresenta buona parte del rimanente 2%. Il Nucleo interno si è formato per solidificazione del metallo liquido ed è costituito da un lega di Fe all'80% e Ni al 20%.

La densità del Nucleo aumenta all'aumentare della profondità da un valore di circa 10 g/cm³ fino a 13 g/cm³. Essendo tale variazione abbastanza piccola, possiamo assumere per semplicità che valga un'equazione di stato $\rho = \text{costante}$.

Si può con buona approssimazione considerare il Nucleo esterno come un liquido newtoniano, omogeneo, isotropo e incompressibile. Il moto sarà quindi descritto dalla (1.37) e dall'equazione di continuità $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, considerando che il fluido è sottoposto ad un campo di gravità \mathbf{g} e si trova in un sistema rotante con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ (ignoriamo per ora il campo magnetico).

Il campo di gravità è responsabile, in presenza di differenze di densità, della *forza di galleggiamento*, presente in questo caso per due fattori:

- la solidificazione della lega $Fe-Ni$ accresce il Nucleo interno e impoverisce di Ni il Nucleo esterno;
- la temperatura aumenta radialmente con la profondità, riducendo la densità del liquido alle profondità maggiori.

Il moto del Nucleo esterno è quindi descritto da un sistema di equazioni accoppiate, formato dall'equazione di Navier-Stokes (vedi (1.37)) nel caso di un guscio sferico in rotazione, sottoposto ad una forza di galleggiamento, dall'equazione del calore e dall'equazione di continuità. Il sistema non presenta una soluzione analitica generale, ma da uno studio qualitativo si possono ricavare due fenomeni fondamentali per la generazione del campo:

- l'*elicità* del moto, per la quale il moto del fluido in un serbatoio chiuso tende ad essere confinato su piani perpendicolari all'asse di rotazione, per cui in combinazione con la forza di Coriolis otteniamo un moto a *rulli*, ovvero forma dei cilindri paralleli all'asse di rotazione percorsi alternativamente in senso orario e antiorario. Dato che i rulli terminano su una superficie sferica, le condizioni al contorno impongono una piccola velocità parallela all'asse di rotazione, descrivendo traiettorie elicoidali.
- la *rotazione differenziale*, causata dalla tendenza del liquido a conservare il proprio momento angolare durante il moto radiale di galleggiamento. Si può ricavare che il Nucleo interno ruota ad una velocità angolare maggiore di quella del mantello di circa 1°/anno.

A questo punto aggiungiamo il fatto che il Nucleo è un materiale conduttore immerso in un campo magnetico: ci sarà quindi una forza di volume aggiuntiva che dipenderà dal campo magnetico. L'interazione tra campo magnetico e il liquido può essere descritta dalla MHD.

3.2 La generazione del campo geomagnetico

Il moto elicoidale del campo del Nucleo terrestre fornisce il meccanismo di generazione del campo geomagnetico medio. Infatti la presenza di un campo magnetico esterno causa la generazione di correnti elettriche, la cui persistenza è permessa grazie all'*effetto dinamo*, per il quale si ha una conversione di energia meccanica, causata in questo caso dal moto convettivo, in energia elettrica. Questa dinamo magnetoidrodinamica, detta anche *geodinamo*, può essere realizzata con un liquido conduttore nel quale $R_m \gg 1$, condizione per la quale nell'equazione idromagnetica (ossia la (1.45)), il termine avvevativo prevale su quello diffusivo. Così l'effetto principale del moto nel fluido è quello di stiramento e torsione delle linee di campo, mentre l'attenuazione dovuta alla diffusione è trascurabile. Possiamo studiare un modello meccanico di dinamo, detta *dinamo a disco di Faraday* (v. fig. 3.1) per capire come avvenga questa interazione. Il sistema è costituito da un cilindro metallico che ruota a velocità angolare costante ω attorno al proprio asse ed è sottoposto ad un campo magnetico uniforme \mathbf{B}_0 parallelo all'asse.

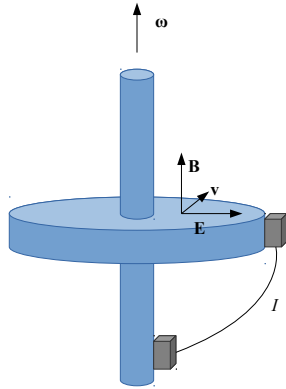


Figura 3.1: Dinamo a disco di Faraday.

Nel sistema di laboratorio si ha che

$$\mathbf{E} = 0 \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \quad (3.1)$$

Le cariche libere q presenti sul disco subiranno una forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{qvB_0}{c} \hat{\mathbf{r}} \quad (3.2)$$

Essendo le cariche libere elettroni ($q < 0$), la forza sarà diretta verso l'asse del disco, producendo una corrente diretta verso l'esterno. Nel sistema di riferimento solidale con il disco si ha

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} \quad (3.3)$$

e la forza di Lorentz avrà solamente il contributo elettrico (essendo $\mathbf{v}' = 0$)

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}' = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{qvB_0}{c} \hat{\mathbf{r}} \quad (3.4)$$

Nasce quindi una forza elettromotrice

$$\mathcal{E} = \int_0^{r_0} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{c} \int_0^{r_0} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} \quad (3.5)$$

dove r_0 è il raggio del disco. Data la forma dei campi nel sistema di riferimento rotante e ricordando che $v = \omega r$, si può scrivere che

$$\mathcal{E} = \frac{\omega B_0}{c} \int_0^{r_0} r dr = \frac{\omega B_0 r_0^2}{2c} \quad (3.6)$$

che può essere utilizzata per produrre una corrente elettrica $I = \mathcal{E}/R$, dove R è la resistenza del circuito. Per mantenere tale corrente è necessario fornire energia meccanica tramite un momento torcente $\mathbf{N} = N\hat{\mathbf{z}}$ che deve produrre una potenza $W = \omega N$ uguale a quella dissipata dalla resistenza, cioè $W = \mathcal{E}I = I^2 R$. Da ciò si ottiene che il momento deve essere proporzionale al quadrato della corrente

$$N = \frac{RI^2}{\omega} \quad (3.7)$$

e inserendo l'espressione per \mathcal{E} trovata in precedenza, si può trovare che

$$W = \frac{\omega^2 B_0^2 r_0^4}{4c^2 R} \quad (3.8)$$

Una apparente incongruenza del modello della geodinamo è il fatto che il campo geomagnetico è dovuto alla presenza di correnti nel Nucleo, ma queste sono presenti solamente nel caso in cui sia presente un campo magnetico esterno: la soluzione è la *dinamo autoalimentata*. Anche in questo caso, ci si può aiutare facendo uso di un modello meccanico. Prendiamo lo stesso apparato dell'esempio precedente, in cui per il filo che collega il disco all'asse è avvolto attorno all'asse stesso, formando un solenoide. Detta L l'induttanza di tale solenoide, la corrente è fornita dall'equazione

$$L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E} - RI \quad (3.9)$$

Il flusso magnetico attraverso la superficie S del disco è dato da

$$\Phi = \int_S B_z dS = 2\pi \int_0^{r_0} B_z r dr \quad (3.10)$$

dove B_z comprende anche il contributo del campo B_1 prodotto dalla corrente. Dato che B_1 è circa costante su S , lo è anche B_z , per cui lo si può estrarre dall'integrale

$$\Phi = 2\pi B_z \int_0^{r_0} r dr \quad (3.11)$$

che confrontato con l'espressione per \mathcal{E} , fornisce

$$\mathcal{E} = \frac{\omega B_0}{c} \frac{\Phi}{2\pi B_z} \quad (3.12)$$

Poiché $B_0 \approx B_z$ possiamo scrivere che

$$\mathcal{E} = \frac{\omega \Phi}{2\pi c} \quad (3.13)$$

Detta M la mutua induttanza tra circuito e disco, si ha $\Phi = cMI$, per cui

$$\mathcal{E} = \frac{\omega MI}{2\pi} \quad (3.14)$$

L'equazione del circuito diventa

$$L \frac{dI}{dt} = \left(\frac{\omega M}{2\pi} - R \right) I \quad (3.15)$$

la cui soluzione è

$$I(t) = I_0 \exp \left[\frac{1}{L} \left(\frac{\omega M}{2\pi} - R \right) t \right] \quad (3.16)$$

Se l'argomento dell'esponenziale è positivo, ovvero se la velocità angolare ω è tale per cui $\omega M > 2\pi R$, si ha una soluzione crescente a partire dal valore iniziale I_0 . Essendo il campo magnetico di un solenoide proporzionale alla corrente, anche \mathbf{B}_1 cresce esponenzialmente, fino a che, una volta a regime, si può rimuovere il campo iniziale \mathbf{B}_0 . L'aumento del campo \mathbf{B}_1 è accompagnato da un aumento del momento \mathbf{N} , il quale, nei casi reali, tende a raggiungere un valore critico tale per cui

$$\omega = \frac{2\pi R}{M} \quad (3.17)$$

Ci troviamo quindi con un modello meccanico che ci può aiutare nel capire il comportamento della geodynamo, nonostante il fatto che il questo modello di dinamo non può

essere direttamente applicato al Nucleo, in quanto in esso abbiamo un dominio sferico semplicemente connesso che ha conducibilità uniforme. La geodinamo è quindi un sistema con *retroazione*, ovvero la sua evoluzione dipende dagli stati in cui si trovata in precedenza. Esso può spiegare il campo magnetico terrestre stabile, generato da un debole campo iniziale e mantenuto grazie ad una fonte di energia. Si ritiene che il campo magnetico iniziale sia il *campo magnetico interplanetario* presente all'epoca della formazione del Nucleo, attualmente dell'ordine di qualche decina di μG (ossia qualche nT).

3.3 La rappresentazione di Mie

Per affrontare l'applicazione dei concetti sul trascinamento delle linee di campo al caso del Nucleo terrestre, conviene introdurre il concetto di *rappresentazione o decomposizione di Mie*, secondo la quale dato un campo vettoriale solenoidale \mathbf{B} , ovvero un campo vettoriale per cui $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, esistono due campo scalari P e Q per i quali

$$\mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla P) + \mathbf{r} \times \nabla Q \quad (3.18)$$

dove il primo termine è la componente *poloidale*

$$\mathbf{B}_P = \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla P) \quad (3.19)$$

e il secondo è la componente *toroidale*

$$\mathbf{B}_T = \mathbf{r} \times \nabla Q \quad (3.20)$$

Si definisce poloidale un campo con componente toroidale nulla, mentre è detto toroidale un campo con componente poloidale nulla. Si può dimostrare che tale decomposizione è simmetrica, in quanto il rotore di un campo toroidale risulta essere un campo poloidale e viceversa. Infatti, calcolando il rotore di \mathbf{B}

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla P) + \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla Q) \quad (3.21)$$

Il primo termine del secondo membro si può sviluppare come

$$\nabla \times \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla P) = \nabla [\nabla \cdot (\mathbf{r} \times \nabla P)] - \nabla^2 (\mathbf{r} \times \nabla P) \quad (3.22)$$

dove la divergenza si può riscrivere come

$$\nabla \cdot (\mathbf{r} \times \nabla P) = \nabla P \cdot (\nabla \times \mathbf{r}) - \mathbf{r} \cdot (\nabla \times \nabla P) = 0 \quad (3.23)$$

che è nullo in quanto $\nabla \times \mathbf{r} = 0$ e il rotore di un gradiente è identicamente nullo. Usando l'identità

$$\nabla^2 (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = \mathbf{r} \times \nabla^2 \mathbf{a} + 2\nabla \times \mathbf{a} \quad (3.24)$$

per un generico campo \mathbf{a} , risulta che

$$\nabla^2(\mathbf{r} \times \nabla P) = \mathbf{r} \times \nabla^2(\nabla P) = \mathbf{r} \times \nabla(\nabla^2 P) \quad (3.25)$$

Quindi il rotore di \mathbf{B}_P risulta essere

$$\nabla \times \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla P) = -\mathbf{r} \times \nabla(\nabla^2 P) \quad (3.26)$$

e possiamo quindi notare come il rotore del campo \mathbf{B} sia anch'esso scomposto in un campo toroidale e uno poloidale

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla Q) - \mathbf{r} \times \nabla(\nabla^2 P) \quad (3.27)$$

Se ne deduce quindi che

$$(\nabla \times \mathbf{B})_P = \nabla \times \mathbf{B}_T \quad (\nabla \times \mathbf{B})_T = \nabla \times \mathbf{B}_P \quad (3.28)$$

La componente toroidale \mathbf{B}_T di un campo \mathbf{B} è tangenziale rispetto alle superfici sferiche $r = \text{costante}$, poiché

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}_T = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \nabla Q) = 0 \quad (3.29)$$

dato che un prodotto vettoriale con fattore \mathbf{r} sarà sempre perpendicolare ad esso. Invece la componente poloidale ha il rotore tangenziale alle stesse superfici, infatti

$$\mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}_P) = (\nabla \times \mathbf{B})_T = -\mathbf{r} \cdot [\mathbf{r} \times \nabla(\nabla^2 P)] \quad (3.30)$$

Essendo il campo magnetico solenoidale per le (1.1), esso si può esprimere come rotore di un potenziale vettore, ovvero $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ e tale potenziale può essere scelto in modo che $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Per quanto visto sopra si ottiene che

- la componente poloidale di \mathbf{B} è data dal rotore della componente toroidale di \mathbf{A} ,

$$\mathbf{B}_P = (\nabla \times \mathbf{A})_P = \nabla \times \mathbf{A}_T \quad (3.31)$$

- la componente toroidale di \mathbf{B} è uguale al rotore della componente poloidale di \mathbf{A}

$$\mathbf{B}_T = (\nabla \times \mathbf{A})_T = \nabla \times \mathbf{A}_P \quad (3.32)$$

Le stesse considerazioni possono essere ripetute per la densità di corrente elettrica, in quanto, per la (1.35), si ha che essa è direttamente proporzionale al rotore del campo magnetico (v. fig. 3.2), per cui

- un campo magnetico toroidale è associato ad una corrente poloidale;
- un campo magnetico poloidale è associato ad una corrente toroidale.

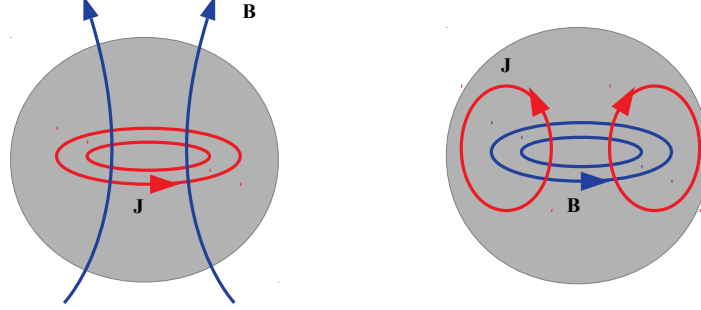


Figura 3.2: Rappresentazione del legame tra campi toroidali e correnti poloidali e viceversa.

Consideriamo ora il caso di un campo \mathbf{B} con simmetria assiale. Se i campi P e Q non dipendono dalla coordinata azimutale ϕ , il vettore ∇Q non ha componente ϕ e giace sui piani che contengono l'asse z . La componente toroidale di \mathbf{B} sarà $\mathbf{B}_T = \mathbf{r} \times \nabla Q$ che sarà una componente azimutale. Quindi in coordinate sferiche (r, θ, ϕ) , le componenti poloidale e solenoidale del campo $\mathbf{B} = (B_r, B_\theta, B_\phi)$ saranno

$$\mathbf{B}_P = (B_r, B_\theta, 0) \quad \mathbf{B}_T = (0, 0, B_\phi) \quad (3.33)$$

Dato che il campo geomagnetico è in un dipolo, si potrebbe pensare che il campo terrestre abbia simmetria assiale. In coordinate cilindriche (r, ϕ, z) si dovrebbe avere una corrente toroidale $\mathbf{J} = (0, J_\phi, 0)$ e un campo magnetico poloidale $\mathbf{B} = (B_r, 0, B_z)$, ma questa struttura non è possibile per il *teorema di Cowling* per il quale il moto di un fluido con condubilità elettrica finita non può generare un campo magnetico stazionario dotato di simmetria assiale. Infatti in assenza di sorgenti, le linee di campo di \mathbf{B} sono anelli racchiusi l'uno dentro l'altro. A mano a mano che si considerano anelli sempre più piccoli, il campo tende ad annullarsi, per cui esiste una circonferenza, detta *anello neutro*, su cui il campo magnetico è nullo. L'esistenza del campo neutro non si concilia con la presenza di una corrente toroidale, dato che per la (1.40) nel sistema dell'osservatore, si ha

$$J_\phi = \sigma \left[E_\phi + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_\phi \right] \quad (3.34)$$

Nel caso in cui $\mathbf{B} = 0$ la corrente è dovuta solamente al campo elettrico $J_\phi = \sigma E_\phi$. Allora il rotore di \mathbf{E} è diverso da 0 e per le (1.1) il campo \mathbf{B} non può essere stazionario.

Dal teorema di Cowling possiamo dedurre che il campo geomagnetico ha una ulteriore componente toroidale non osservabile, in quanto confinata nel Nucleo. Questo

confinamento può essere spiegato notando che il mantello terrestre ha una condubilità trascurabile rispetto al mantello, per cui si può considerare un isolante.

3.4 L'evoluzione delle linee di campo nel Nucleo terrestre

Si può ora studiare la generazione del campo magnetico e come variano le linee di campo. Supponiamo che al tempo $t = 0$ sia presente un campo poloidale, espresso in coordinate sferiche come $\mathbf{B}_P = (B_r, B_\theta, 0)$, e non vi siano campi toroidali $\mathbf{B}_T = 0$. La rotazione differenziale genera un campo di velocità toroidale $v = (0, 0, v_\phi)$. Essendo il prodotto vettoriale tra questa velocità e il campo toroidale nullo, possiamo notare che la componente toroidale della (1.45) sarà

$$\frac{\partial \mathbf{B}_T}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_P) + \chi_m \nabla^2 \mathbf{B}_T \quad (3.35)$$

Per tempi piccoli, si ha $\mathbf{B}_T \approx 0$ per cui

$$\frac{\partial \mathbf{B}_T}{\partial t} \simeq \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_P) \quad (3.36)$$

per cui si deduce l'insorgere di un campo toroidale da un campo poloidale, a causa del trascinarsi delle linee di campo per il cosiddetto *effetto* ω (v. fig. 3.3). Al crescere di \mathbf{B}_T interviene anche il termine diffusivo, fino ad arrivare ad una situazione stazionaria, descritta da

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_P) + \chi_m \nabla^2 \mathbf{B}_T = 0 \quad (3.37)$$

che si può riscrivere in forma adimensionale

$$R_m \nabla' \times (\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'_P) + \chi_m \nabla'^2 \mathbf{B}'_T = 0 \quad (3.38)$$

dove R_m è dato dalla (1.66). Ne segue che $|\mathbf{B}_T| \approx R_m |\mathbf{B}_P|$, ovvero nel caso in cui il trascinarsi prevale ($R_m \gg 1$) si ha un campo toroidale molto più forte del campo poloidale.

Per effetto dell'elicità, una linea di campo piana viene deformata in una curva sghemba. I segmenti della linea assumono la forma di un cappio che ruota al di fuori del piano formato dalla linea e dalla velocità iniziale del liquido, per il cosiddetto *effetto* α (v. fig. 3.3). I cappi che giacciono su piani ortogonali alle linee di campo toroidali formano per diffusione un campo poloidale.

Abbiamo quindi ritrovato che, nel caso in cui la forza magnetica sia dominante, viene riprodotto lo schema concettuale del problema Hartmann, in cui il moto del fluido è determinato dall'evoluzione delle linee di campo magnetico. Il moto del Nucleo terrestre è in realtà sottoposto ad altre forze che ne modificano la dinamica in modo significativo.

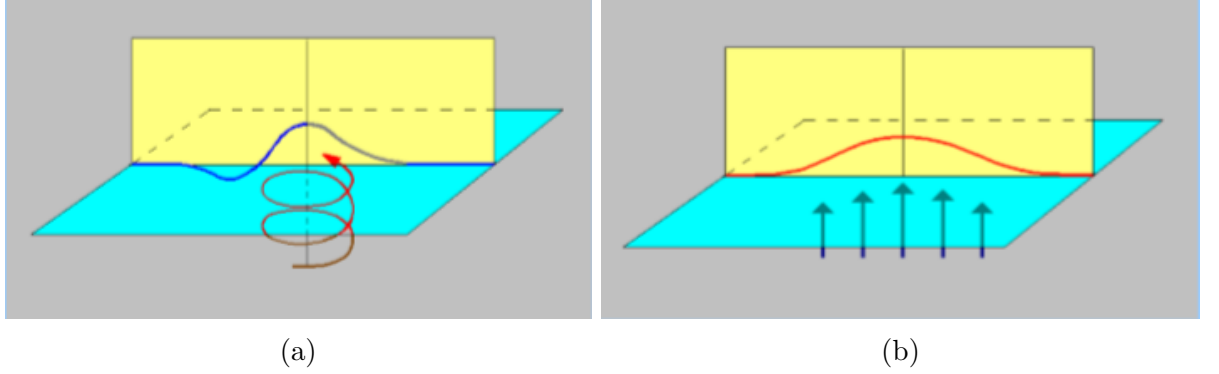


Figura 3.3: Rappresentazione degli effetti α (a) e ω (b).

3.5 Dinamica del Nucleo terrestre

Per lo studio dinamico del Nucleo terrestre, dobbiamo considerare, oltre all'interazione magnetoidrodinamica, anche tutte le altre forze di volume e inserirle nella (1.37). Consideriamo per prima la forza di gravità: assumendo che il Nucleo abbia simmetria sferica, l'accelerazione di gravità è data da

$$g(r) = \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r r'^2 \rho(r') dr' \quad (3.39)$$

Si può assumere inoltre che la densità sia costante, ottenendo

$$g(r) = \frac{4}{3} \pi \rho G r \quad (3.40)$$

o vettorialmente

$$\mathbf{g}(r) = -\frac{4}{3} \pi \rho G \mathbf{r} \quad (3.41)$$

Con $\rho = 11 \text{ g/cm}^3$, l'accelerazione sulla superficie del Nucleo ha valore $g \simeq 10^3 \text{ Gal}$, ovvero all'incirca lo stesso valore che si misura sulla superficie terrestre. Possiamo descrivere il Nucleo utilizzando la pressione p , supponendo che si trovi in uno stato di sforzo idrostatico. Si ha quindi che

$$\frac{dp}{dr} + \rho g = 0 \quad (3.42)$$

Tenendo conto della (3.41) e imponendo la condizione al contorno $p(R) = p_0$, dove R è il raggio del Nucleo e p_0 la pressione esercitata dal mantello, la soluzione dell'equazione è data da

$$p(r) = p_0 + \frac{2}{3} \pi \rho^2 G (R^2 - r^2) \quad (3.43)$$

Per quanto riguarda lo stato termico, possiamo elaborare un modello termico elementare nel quale continuiamo a considerare il Nucleo come una sfera di raggio R e

supponiamo che abbia conducibilità termica κ uniforme (che vale $40 - 60 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$) e una produzione di calore costante H . L'equazione del calore è data da

$$\kappa \nabla^2 T + H = 0 \quad (3.44)$$

che possiamo scrivere in coordinate sferiche come

$$\kappa \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) + H = 0 \quad (3.45)$$

Imponiamo come condizioni al contorno che

$$T(R) = T_0 \quad \frac{dT}{dr}(0) = 0 \quad (3.46)$$

così da ottenere la soluzione

$$T(r) = T_0 + \frac{H}{6\kappa} (R^2 - r^2) \quad (3.47)$$

Il flusso di calore radiale è dato da

$$q_r = -\kappa \frac{dT}{dr} \quad (3.48)$$

che in questo caso diventa

$$q_r(r) = \frac{H}{3} r \quad (3.49)$$

Conviene fare uso della *approssimazione di Boussinesq*: si trascurano le variazioni di ρ dovute a p , ma non quelle dovute a T o alla separazione di elementi più leggeri; si considerano inoltre variazioni delle grandezze termodinamiche abbastanza piccole da poter essere considerate lineari. Per questo poniamo

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \rho' \quad \rho' \ll \rho_0 \\ p &= p_0 + p' \quad p' \ll p_0 \\ T &= T_0 + T' \quad T' \ll T_0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Introducendo la *viscosità cinematica* $\nu = \eta/\rho$, riscriviamo la (1.37) come

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (3.51)$$

Il termine dovuto al gradiente di pressione può essere riscritto facendo uso delle (3.50)

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \frac{\nabla p_0 + \nabla p'}{\rho_0 + \rho'} = \frac{\nabla p_0 + \nabla p'}{\rho_0} \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0} \right)^{-1} \quad (3.52)$$

che, grazie allo sviluppo binomiale $(1+x)^{-1} = 1-x+\dots$, si può scrivere al primo ordine

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \frac{\nabla p_0}{\rho_0} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} - \frac{\nabla p_0}{\rho_0^2} \rho' \quad (3.53)$$

All'equilibrio idrostatico si ha che $\nabla p = \rho_0 \mathbf{g}$, per cui

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \mathbf{g} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} - \frac{\rho'}{\rho_0} \mathbf{g} \quad (3.54)$$

Inseriamo questa relazione nella (1.37) e poniamo $\rho_0 \simeq \rho$ ottenendo

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p' + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \rho' \mathbf{g} \quad (3.55)$$

dove $\mathbf{f} = \rho' \mathbf{g}$ è la forza di galleggiamento. Tale forza si può esplicitare nel caso del nucleo terrestre tenendo conto della (3.41), ottenendo

$$\mathbf{f} = -\frac{4\pi}{3} G \rho \rho' \mathbf{r} \quad (3.56)$$

La dipendenza della densità dalla temperatura può essere ottenuta, nell'approssimazione di Boussinesq, da uno sviluppo al primo ordine

$$\rho(T) = \rho(T_0) + \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_p (T - T_0) \quad (3.57)$$

Ricordando la (3.50) e definendo il *coefficiente di dilatazione termica*

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (3.58)$$

otteniamo

$$\rho' = -\rho_0 \alpha T' \quad (3.59)$$

Ponendo infine $\rho_0 \simeq \rho$, troviamo che la forza di galleggiamento in questo modello è data da

$$\mathbf{f} = \frac{4\pi}{3} G \rho^2 \alpha T' \mathbf{r} \quad (3.60)$$

Essendo il liquido in rotazione attorno ad un proprio asse, nel sistema rotante verrà avvertita la *forza di Coriolis*

$$\mathbf{f} = -2\rho \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (3.61)$$

dove $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare, e \mathbf{v} è il campo di velocità. L'equazione del moto diventa quindi

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \right] = -\nabla p' + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \rho' \mathbf{g} \quad (3.62)$$

che nel modello a densità uniforme diventa

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\frac{\nabla p'}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \frac{4\pi}{3} G \rho' \mathbf{r} \quad (3.63)$$

dove

$$\rho' = -\rho \alpha T' \quad (3.64)$$

Avendo variazioni di densità causate da variazioni di temperatura, possiamo avere convezione termica. Per risolvere l'equazione del moto, è quindi necessario accoppiarla con l'equazione del calore che, trascurando la dissipazione viscosa, è data da

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = \kappa \nabla^2 T + H \quad (3.65)$$

Adottando la (3.50), si ottiene che

$$T(\mathbf{x}, t) = T_0(r) + T'(\mathbf{x}, t) \quad (3.66)$$

dove T_0 è la soluzione stazionaria trovata per il modello elementare e $T' \ll T_0$. Tenendo conto che

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T'}{\partial t} \quad (3.67)$$

sostituendo la (3.47) nella (3.65) si ottiene

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T_0 \right) = \kappa \nabla^2 (T_0 + T') + H \quad (3.68)$$

che si riduce, tenendo conto della soluzione stazionaria, a

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T_0 + \mathbf{v} \cdot \nabla T' \right) = \kappa \nabla^2 T' \quad (3.69)$$

dove possiamo scrivere

$$\nabla T_0 = \frac{dT_0}{dr} \hat{\mathbf{r}} = -\frac{H}{3\kappa} \mathbf{r} \quad (3.70)$$

da cui

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T' = \frac{H}{3\kappa} \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} + \chi \nabla^2 T' \quad (3.71)$$

dove è stata introdotto la *diffusività termica*

$$\chi = \frac{\kappa}{\rho c_p} \quad (3.72)$$

Perciò la variazione di temperatura T' soddisfa l'equazione del calore in cui è presente un termine aggiuntivo di produzione del calore proporzionale alla velocità radiale. La descrizione completa per la convezione è quindi data dal sistema di equazioni comprendente l'equazione del moto, l'equazione del calore e l'equazione di continuità, ovvero

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\frac{\nabla p'}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{4\pi}{3} G \rho \alpha T' \mathbf{r} \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T' = \frac{H}{3\kappa} \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} + \chi \nabla^2 T' \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \end{cases} \quad (3.73)$$

Il sistema presenta equazioni non lineari e accoppiate per le quali non è possibile trovare una soluzione analitica. Possiamo però analizzare gli ordini di grandezza relativi alle varie forze presenti nell'equazione del moto, così da stabilire quale sia l'effetto dinamico dominante. A tale scopo possiamo utilizzare alcuni *numeri adimensionali*, per i quali è necessario conoscere quale sia pressapoco il valore di alcune grandezze tipiche del sistema in esame. Assumiamo quindi, come già specificato in precedenza, che il Nucleo terrestre abbia una densità uniforme $\rho \approx 11 \text{ g cm}^{-3}$, sottoposto ad una accelerazione di gravità $g \approx 100 \text{ Gal}$. Aggiungiamo a questo elenco anche la viscosità $\eta \approx 10^{-1} \text{ cm s}^{-1}$, la conducibilità elettrica $\sigma \approx 3 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ e le grandezze cinematiche tra cui la velocità angolare $\omega \approx 7 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$, una velocità caratteristica $V \approx 10^{-1} \text{ cm s}^{-1}$ e una lunghezza caratteristica $L \approx 10^8 \text{ cm}$.

Introduciamo per primo il *numero di Reynolds*, che rappresenta il rapporto tra le forze inerziali e le forze viscosi. Essendo le prime dell'ordine di V^2/L e le seconde $\nu V/L^2$, esso sarà dato da

$$Re = \frac{VL}{\nu} \quad (3.74)$$

che nel caso del Nucleo è circa $Re \approx 10^9$ ovvero siamo in presenza di moti turbolenti. Il rapporto tra le forze viscosi e la forza di Coriolis (dell'ordine di ωV) è dato da *numero di Ekman*

$$Ek = \frac{\nu}{\omega L^2} \quad (3.75)$$

per cui nel Nucleo, essendo $Ek \approx 10^{-14}$, si ha che la forza di Coriolis domina sulle forze viscosi. Il rapporto tra il termine avvevativo e la forza di Coriolis è dato dal *numero di Rossby*, definito come

$$Ro = \frac{V}{\omega L} \quad (3.76)$$

che nel nostro caso vale $Ro \approx 10^{-5}$. Definiamo anche il rapporto tra la forza di galleggiamento, dell'ordine di $\alpha g \Delta T$, e la forza di Coriolis

$$R = \frac{\alpha g \Delta T}{\omega V} \quad (3.77)$$

detto anche *numero di Rayleigh*, che, assumendo la differenza di temperatura caratteristica attorno a 1000°C , porta a $R \approx 10^4$, che indica che la forza di galleggiamento è importante. un ulteriore numero adimensionale di cui ci serviamo è il numero di Hartmann che calcoliamo grazie alla (2.73): se $B = 10 \text{ G}$, si ottiene una viscosità magnetica $\eta_m \approx 10^{13} \text{ P}$, per cui $M \approx 10^7$. Essendo M molto grande, ci aspettiamo che il campo magnetico abbia una grande influenza sul moto del liquido. Infine ricordiamo il *numero di Reynolds magnetico*, definito in (1.66), che per il nucleo terrestre ha un valore $R_m \approx 10^3$: questo significa, come visto precedentemente, che il trascinamento delle linee di campo magnetico prevale sulla diffusione di quest'ultimo, per cui il moto è fondamentale per la determinazione del valore di B .

In conclusione la dinamica del Nucleo è quella di un fluido in simmetria sferica dominato dalla forza di galleggiamento nei moti verticali e dalla forza di Coriolis nei moti orizzontali, perturbato dalle forze viscosive, in gran parte trascurabili, e dalle forze magnetiche. Queste ultime, pur non essendo il contributo principale, rappresentano un ingrediente indispensabile per la comprensione della dinamica del Nucleo, dato che, analogamente a quanto visto analiticamente nel caso del flusso di Hartmann, il moto del fluido e l'evoluzione del campo magnetico terrestre sono problemi fortemente accoppiati.

Conclusioni

In questa tesi è stato affrontato uno studio sul moto dei fluidi conduttori. Il tema portante è stato il forte accoppiamento tra l'evoluzione dei campi magnetico e di velocità, come abbiamo potuto apprezzare nel caso del flusso di Hartmann: il moto di un fluido conduttore in un campo magnetico uniforme innesca la produzione di un campo magnetico interno che ha l'effetto di una forza di attrito e che produce un campo di forze che modifica in modo sostanziale i profili di velocità. Queste considerazioni vengono poi riscontrate nel caso del Nucleo terrestre: innescato anch'esso da un campo magnetico esterno, produce il campo magnetico principale terrestre secondo lo stesso schema.

La trattazione generale della magnetoidrodinamica porta, tra le varie cose, all'introduzione del numero di Hartmann, parametro che ci consente di determinare quanto il campo magnetico influenzi il moto, e del numero di Reynolds magnetico, che descrive l'influenza del campo di velocità sulla generazione del campo magnetico. Questi numeri adimensionali, insieme a quelli più comunemente utilizzati in fluidodinamica, permettono l'analisi dei contributi delle varie forze nella dinamica del Nucleo. Emerge che le forze magnetiche, pur non rappresentando il contributo maggiore, sono determinanti nella generazione e mantenimento del campo geomagnetico, grazie all'effetto della *dinamo autoalimentata*. Il campo geomagnetico principale viene scomposto nelle sue componenti toroidale e poloidale ed è stato visto come queste sia in grado di alimentarsi l'un l'altra. Così, grazie alla magnetoidrodinamica, siamo in grado di capire il funzionamento del campo magnetico poloidale che siamo in grado di osservare continuamente attorno a noi.

Appendice A: il sistema CGS in elettromagnetismo

Nonostante il fatto che il SI (sistema internazionale di unità di misura) rappresenti oggi lo standard metrologico, in letteratura persiste talvolta l'uso del sistema CGS di unità di misura, specialmente in ambiti che riguardano l'elettromagnetismo, l'astronomia o la geofisica. La scelta del sistema di unità di misura non influenza in alcun modo le formulazioni della dinamica o della termodinamica, in quanto le unità sono definite in modo da differire solamente di un fattore moltiplicativo, creando una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi. Nell'elettromagnetismo invece la scelta del sistema di unità implica la scelta tra differenti formulazioni equivalenti delle leggi fisiche, in quanto le definizioni delle unità elettromagnetiche differiscono. Nel presente testo si è fatto uso del sistema CGS *gaussiano*, nel quale l'unità di misura della carica elettrica è lo *statcoulomb* (statC), che è una unità derivata dalle unità meccaniche fondamentali (cm, g, s), definita a partire dalla legge di Coulomb

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (3.78)$$

che permette di calcolare la forza a cui sono sottoposte due cariche Q_1 e Q_2 poste a distanza r . Da questa legge si può ricavare che lo statcoulomb è definito come

$$1 \text{ statC} = 1 \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ s}^{-1} \quad (3.79)$$

La legge di Coulomb nel SI è solitamente scritta come

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (3.80)$$

mettendo in evidenza la *costante dielettrica del vuoto* ϵ_0 .

Confrontando le due formulazioni della legge, si può notare che la conversione di unità per la carica elettrica è data da

$$Q_G = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} Q_{SI} \quad (3.81)$$

L'unità di misura del campo elettrico è definita a partire dalla relazione per il campo prodotto da una particella puntiforme

$$E = \frac{Q}{r^2} \quad (3.82)$$

da cui si può ricavare che il campo è misurato in *Gauss* (G) la cui definizione è ovviamente

$$1 \text{ G} = \text{g}^{1/2} \text{cm}^{-1/2} \text{s}^{-1} \quad (3.83)$$

Un'ulteriore differenza è data dalla definizione dell'unità del campo magnetico, che qui possiamo analizzare a partire dal campo elettrico. Nel caso di un'onda piana, nel sistema internazionale vale la relazione

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = c\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \quad (3.84)$$

Tale relazione nel sistema gaussiano è data da

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \quad (3.85)$$

per cui si può ricavare che la conversione nei due sistemi è data da

$$\mathbf{B}_G = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} \mathbf{B}_{SI} \quad (3.86)$$

dove μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto.

Con l'ausilio dell'analisi dimensionale, si può quindi "tradurre" una formula nel sistema gaussiano in una nel SI con le seguenti sostituzioni, ricavate dalle relazioni (3.81) e (3.85)

$$\mathbf{B} \rightarrow c\mathbf{B} \quad Q \rightarrow \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} Q \quad (3.87)$$

Appendice B: la notazione indiciale

Nell'affrontare temi legati soprattutto, ma non unicamente, alla meccanica dei continui, può risultare agevole la cosiddetta *notazione tensoriale*. Data una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e un vettore $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$, si introduce la notazione $\mathbf{v} \equiv v_i$. Equivalentemente per un tensore di rango 2 di componenti

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \quad (3.88)$$

si introduce la notazione $T \equiv T_{ij}$; la generalizzazione a tensori di rango qualsiasi è immediata. In questo modo possiamo riscrivere ogni equazione tensoriale utilizzando la notazione indiciale, così da ottenere una equazione scritta per la componente i -esima del vettore (o per la componente ij -esima nel caso di un tensore di rango 2, ecc...), sottintendendone la validità qualsiasi valore abbiano gli indici tra $\{1, 2, 3\}$.

Conviene introdurre alcuni elementi:

- la *convenzione di Einstein*, per la quale è sempre sottintesa la somma su tutti i valori possibili per gli indici ripetuti all'interno di uno stesso monomio. Ad esempio, dati due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} , si ha

$$a_i b_i = \sum_{i=1,2,3} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (3.89)$$

mentre la notazione $a_i b_j$ indica il tensore che ha per elemento ij -esimo il prodotto tra la i -esima componente di \mathbf{a} e la j -esima componente di \mathbf{b} . Per cui, per capire il rango di una equazione in notazione indiciale, dobbiamo contare solamente gli indici *liberi*, ovvero non ripetuti all'interno di un monomio.

- la *delta di Kronecker* δ_{ij} definita come

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (3.90)$$

- il *tensore di Levi-Civita* ϵ_{ijk} definito come

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } i, j, k \text{ sono una permutazione pari di } 1, 2, 3 \\ -1 & \text{se } i, j, k \text{ sono una permutazione dispari di } 1, 2, 3 \\ 0 & \text{altrimenti, ovvero almeno due indici sono tra loro uguali} \end{cases} \quad (3.91)$$

- la notazione "*con virgola*" per la derivazione, per la quale ogni grandezza si intende derivata rispetto alle componenti il cui indice compare dopo la virgola. Ad esempio, la scrittura $F_{i,j}$ vuole indicare la derivata rispetto ad x_j del vettore F_i .

Bibliografia

- [1] Landau, L. D. e Lifshitz, E. M. *Electrodynamics of Continuous Media*. Pergamon Press, London, 1960.
- [2] Jackson, J. D *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, New York, 1962.
- [3] Melchior P. *The Physics of the Earth's Core: An Introduction*. Pergamon Press, London, 1986.
- [4] Davidson P. A. *An Introduction to Magnetohydrodynamics*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 2001.
- [5] Hartmann, J. *Theory of the laminar flow of an electrically conductive liquid in a homogeneous magnetic field*. Fys. Med., 15, 1-27, 1937.
- [6] Campbell, W. A. *Introduction to Geomagnetic Fields*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 2003.
- [7] Backus, G., Parker, R. e Constable, C. *Foundations of Geomagnetism*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.