

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Matematica

**STUDIO DI INVARIANTI  
TOPOLOGICI ATTRAVERSO  
APPLICAZIONI LISCE  
E CAMPI DI VETTORI**

Tesi di Laurea Triennale in Geometria

**Relatore:**  
Chiar.mo Prof.  
Stefano Francaviglia

**Presentata da:**  
Giuseppe Bianco

**Sessione 3**  
**Anno Accademico 2017/2018**



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
1.1	Funzioni lisce, derivate e spazi tangenti per varietà . . . . .	6
1.2	Valori regolari . . . . .	9
1.3	Alcuni utili risultati . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Teorema del grado di Hopf</b>	<b>13</b>
2.1	Omotopia e grado . . . . .	13
2.2	Il grado di Brouwer . . . . .	19
2.3	Cobordismo . . . . .	27
2.4	Teorema del grado di Hopf . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Teorema di Poincarè-Hopf</b>	<b>47</b>
3.1	Indice somma e mappa di Gauss . . . . .	47
3.2	Un Teorema di Hopf . . . . .	58
3.3	Caratteristica di Eulero-Poincarè . . . . .	63
3.4	Teorema di Poincarè-Hopf . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Applicazioni</b>	<b>75</b>
4.1	Teorema fondamentale dell'algebra . . . . .	75
4.2	Teorema del punto fisso di Brouwer . . . . .	77
4.3	I campi, il genere ed il teorema di Poincarè-Hopf . . . . .	79
4.4	I solidi platonici . . . . .	82



# Capitolo 1

## Introduzione

Studieremo alcune caratteristiche di una varietà attraverso le proprietà dei vettori su tale varietà in particolare vedremo che alcune proprietà introdotte su vettori non dipendono dalla scelta di essi ma solo dallo spazio su cui lavorano ovvero sono degli invarianti topologici ed in modo analogo vedremo che alcune proprietà delle derivate (la non singolarità) delle funzioni fra varietà, in alcuni punti del dominio (controimmagini della funzione nei valori regolari), descrivono le funzioni stesse. Nella prima parte introdurremo il grado per funzioni su varietà orientate con e senza bordo ed alcuni concetti generali sul cobordismo così da avere gli strumenti necessari ad enunciare un teorema di Hopf che afferma che l'omotopia liscia fra funzioni è equivalente all'aver stesso grado. Nella seconda parte tratteremo, dopo qualche generalità sui campi, l'indice somma, in un punto, associato ad un campo e la mappa di Gauss n-dimensionale su varietà con bordo, come funzione particolare, e vedremo come il grado per queste mappe definite su un bordo a valori nella sfera traduca il comportamento del campo associato all'interno della frontiera stessa ovvero proveremo un teorema di Hopf in cui sotto certe ipotesi si ha l'eguaglianza fra indice somma e grado della mappa di Gauss sulla frontiera; introdurremo la caratteristica di Eulero-Poincaré così da poter enunciare il teorema di Poincaré-Hopf che afferma che l'indice somma di ogni campo su di una superficie è uguale alla caratteristica di Eulero-Poincaré di tale superficie. Come applicazioni avremo il teorema del punto fisso di Brouwer, l'esistenza ed unicità dei cinque solidi platonici, ed il teorema fondamentale dell'algebra. Tutta la discussione avrà come struttura intima [I] e tutto ciò che è stato aggiunto è servito a mostrare la potenza degli strumenti acquisiti e la connessione profonda fra argomenti a prima vista distanti, per quel che ho potuto ho inserito [II], un libro ben diverso ma ugualmente ricco e condotto con suprema grazia attraverso argomenti spinosi.

## 1.1 Funzioni lisce, derivate e spazi tangenti per varietà

**Definizione 1** (mappe lisce). Siano  $U \subseteq R^k$  e  $V \subseteq R^l$  insiemi aperti, una funzione o mappa  $f : U \rightarrow V$  si dice **liscia** se tutte le sue derivate parziali (rispetto alle diverse variabili), di tutti gli ordini (numero di derivate nelle varie variabili), sono continue (ovvero è  $C^\infty$  rispetto a tutte le variabili); per  $X \subseteq R^k$  e  $Y \subseteq R^l$  qualsiasi,  $f : X \rightarrow Y$  si dirà liscia se  $\forall x \in X \exists U \subseteq R^k$  aperto con  $x \in U$  ed  $\exists F : U \rightarrow R^l$  liscia che coincide con  $f$  su  $U \cap X$ .

**Osservazione 1.1.0.1** (diffeomorfismi). Avremo per la regola della derivata composta che se  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  sono lisce allora tale è anche  $g \circ f : X \rightarrow Z$ , anche la funzione identità da  $X$  in sé è liscia allora per avere un gruppo possiamo considerare l'insieme delle funzioni lisce  $f : X \rightarrow Y$  tali che l'inversa esiste ed è liscia e tali funzioni le diremo **diffeomorfismi**, inoltre proprio per la regola della catena, il fatto che l'inversa di un diffeomorfismo è un diffeomorfismo e che l'identità è liscia e coincide con la sua inversa, si ha che l'esser diffeomorfi è una relazione di equivalenza e quindi spesso ragioneremo a meno di tale relazione identificando insieme fra cui esiste almeno un diffeomorfismo.

**Definizione 2** (varietà). Una **varietà liscia** di dimensione  $m$  è un sottoinsieme  $M \subseteq R^k$  tale che  $\forall x \in M \exists W \cap M$  intorno del punto  $x$  diffeomorfo ad un insieme aperto  $U \subseteq R^m$  ovvero almeno localmente attraverso mappe regolari posso vederlo con proprietà euclidee.

**Notazione 1.** Ogni diffeomorfismo  $g : U \rightarrow W \cap M$  si dice una **parametrizzazione** della regione  $W \cap M$ , sfruttando le coordinate euclidee dell'aperto  $U$  ovvero la corrispondenza fra numeri e punti, viceversa ogni diffeomorfismo inverso  $W \cap M \rightarrow U$  si dirà sistema di coordinate per  $W \cap M$ , sfruttando la corrispondenza fra punti e numeri.

**Definizione 3** (spazio tangente). Sia  $f : M \rightarrow N$  funzione liscia fra varietà lisce, assoceremo  $\forall x \in M \subseteq R^k$  uno spazio vettoriale, in realtà affine (ma si può sempre traslarlo nell'origine o fissare un sistema di coordinate a posteriori),  $TM_x$  di dimensione  $m$  detto **spazio tangente** ad  $M$  in  $x$  ed i cui elementi sono i vettori tangenti ad  $M$  in  $x$  (eventualmente traslati nell'origine).

**Definizione 4** (differenziale). La derivata (direzionale) o **differenziale**  $df_x$  sarà una mappa lineare fra  $TM_x$  e  $TN_{f(x)}$ , vedendo  $TM_x$  come migliore approssimazione lineare di  $M$  nell'intorno di  $x$  così da avere  $df_x$  come migliore approssimazione lineare di  $f$  sostituendo dominio e codominio originali con tali iperpiani (rispettivamente  $TM_x$  e  $TN_{f(x)}$ ).

**Osservazione 1.1.0.2** (per insiemi aperti...). Nel caso di insiemi aperti  $U \subseteq R^k$  lo spazio tangente ad  $U$ ,  $TU_x$ , è tutto  $R^k$  così che  $df_x : TU_x \rightarrow TN_{f(x)}$  sarà  $df_x : R^k \rightarrow R^l$  e quindi essendo in ambiente euclideo si ha la definizione

## 1.1. FUNZIONI LISCE, DERIVATE E SPAZI TANGENTI PER VARIETÀ 7

canonica di derivata (direzionale):

$$df_x(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f(x+th) - f(x))}{t}$$

per  $x \in X$  e  $h$  vettore in  $R^k$  e  $t$  scalare in  $R$ ; fissato il punto  $x$  è una applicazione lineare nell'argomento  $h$ , tale applicazione si rappresenterà come la matrice  $l \times k$  delle derivate parziali il cui elemento generico è  $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_x$  con  $i = 1, \dots, l$  e  $j = 1, \dots, m$ .

**Osservazione 1.1.0.3** (...e non solo). In realtà ci possiamo sempre ricondurre al caso di insiemi aperti come definito sopra usando opportune parametrizzazioni: siano  $M$  e  $N$  rispettivamente di dimensione  $m$  ed  $n$ ,  $f : M \rightarrow N$ , e sia  $x \in M$  e siano  $\phi : U \rightarrow M$   $\psi : V \rightarrow N$  le parametrizzazioni con aperti, di dimensioni opportune ovvero  $U \subseteq R^m$  e  $V \subseteq R^n$  (con  $x \in \phi(U)$  e  $f(x) \in \psi(V)$ ), delle due varietà in modo che  $f(\phi(U)) \subseteq \psi(V)$  e tali che  $\phi(0) = x$  e  $\psi(0) = f(x)$  allora  $h = \psi^{-1} \circ f \circ \phi : U \rightarrow V$  e quindi essendo le parametrizzazioni diffeomorfismi, esistono le inverse e vale  $f = \psi \circ h \circ \phi^{-1}$  e definiamo la derivata  $df_x : TM_x \rightarrow TN_{f(x)}$  come  $d\psi_{\psi^{-1}(f(x))} \circ dh_{\phi^{-1}(x)} \circ d\phi_x^{-1}$  e  $h(0) = (\psi^{-1} \circ f \circ \phi)(0) = (\psi^{-1} \circ f)(x) = \psi^{-1}(f(x)) = 0$  allora  $d\psi_0 \circ dh_0 \circ d\phi_x^{-1}$ , anche in questo caso nulla dipende dalla particolare carta scelta.

**Osservazione 1.1.0.4.** Per  $f : U \subseteq R^k \rightarrow V \subseteq R^l$  diffeomorfismo si ha che  $k = l$  e  $df_x : R^k \rightarrow R^l$  è non singolare :  $f^{-1} \circ f = Id_U$  e  $df_{f(x)}^{-1} \circ df_x = Id_{R^k}$  e così invertendo l'ordine, quindi  $df_x$  ha una inversa sinistra e destra ovvero è invertibile e  $df_x$ , il cui rango è per definizione minore o uguale al numero di colonne e di righe ovvero  $k$  e  $l$ , è tale che il suo rango è maggiore o uguale di  $k$  e  $l$ , essendo il rango del prodotto ( $Id_{R^k}$  e  $Id_{R^l}$  ovvero  $r$  e  $l$ ) minore o uguale del rango dei fattori (in particolare di  $df_x$ ), quindi per forza  $k=l$ .

Quindi possiamo tornare a definire in modo analitico lo spazio tangente  $TM_x$  per varietà lisce qualsiasi  $M$ :

**Definizione 5** (spazio tangente). Scegliendo una parametrizzazione  $g : U \subseteq R^m \rightarrow M \subseteq R^k$  di un intorno di  $x \in M$  con  $g(u) = x$  e  $U$  aperto, avremo  $dg_u : R^m \rightarrow R^k$  e diremo  $TM_x = dg_u(R^m)$ .

**Osservazione 1.1.0.5.** Questo è uno spazio vettoriale di dimensione  $m$  e tale costruzione non dipende dalla parametrizzazione ovvero è ben definito senza specificare la parametrizzazione e così sarà ad esempio anche il vettore perpendicolare al piano tangente, che pur potendosi definire con le parametrizzazioni è intrinsecamente individuato, ovvero il vettore normale, essendo un oggetto geometrico legato univocamente al piano tangente, che non dipende dalla parametrizzazione, sarà anch'esso invariante per riparametrizzazioni, questo sarà intuitivamente il vettore che localmente "entra" o "esce" e non "scivola" sulla superficie dell'insieme.

**Osservazione 1.1.0.6.** I risultati visti sopra su spazi tangenti per aperti valgono ragionando localmente con le parametrizzazioni anche per varietà lisce,

inoltre una sottovarietà  $N$  di una varietà  $M$  è tale che  $\forall x \in N$  il suo spazio tangente  $TN_x$  è contenuto nello spazio tangente della varietà iniziale  $TM_x$ .

**Notazione 2.** Sia il "semipiano superiore"  $R_+^m = \{(x_1, \dots, x_m) \in R^m | x_m \geq 0\}$  con frontiera  $\{(x_1, \dots, x_m) \in R^m | x_m = 0\}$ .

**Definizione 6** (varietà con bordo). Una **varietà di dimensione  $m$  con bordo** è un insieme  $M \subseteq R^m$  tale che  $\forall x \in M \exists U \subseteq R^m$  e  $V \subseteq R_+^m$  tale che l'aperto  $U \cap M$  è diffeomorfo a  $V$  sottoinsieme aperto di  $R_+^m$ . Si dicono punti interni i punti per cui l'intorno è diffeomorfo ad intorni aperti o alla parte interna di  $R_+^m$  e punti di frontiera quelli i cui intorni sono diffeomorfi alla frontiera di  $R_+^m$  ovvero ai punti di  $R^m$  con  $m$ -esima coordinata nulla. L'interno,  $\text{int}(M)$  sarà ancora una varietà di dimensione  $m$ , mentre la frontiera, indicata con  $\partial M$ , sarà una varietà di dimensione  $m-1$  e  $\text{int}(M) \cup \partial M = M$ . La definizione di spazio tangente è quella vista sopra sia per punti interni che di frontiera ed in entrambi i casi è uno spazio affine di dimensione (vettoriale)  $m$ ; se la frontiera è vuota si parlerà di varietà senza frontiera. Analogamente al caso generale anche il bordo è una sottovarietà parametrizzabile, con una parametrizzazione ereditata dall'insieme di cui è il bordo.

**Osservazione 1.1.0.7.** Definizioni analoghe, a quelle usate sopra, ma più generali in ambito topologico valgono usando omeomorfismi piuttosto che diffeomorfismi, noi useremo le più particolari definizioni date sopra in ambito differenziale trattando sempre di funzioni lisce fra varietà e volendo fare delle derivate e non volendo perder regolarità solo per ipotesi troppo deboli sulla parametrizzazione.

**Definizione 7.** Una sottovarietà di  $M$  è una varietà  $N$  tale che  $N \subseteq M$ , la codimensione di  $N$  in  $M$ , con  $N$  di dimensione  $k$  inclusa in una varietà  $M$  di dimensione  $n$  (con  $k \leq n$ ), è  $n - k$ .

**Osservazione 1.1.0.8.** Un fatto usato tacitamente sarà che se abbiamo due varietà lisce anche il prodotto cartesiano di esse sarà tale, usando le parametrizzazioni  $\phi, \psi$  delle due varietà e considerando la parametrizzazione del prodotto  $\phi \times \psi$  e quindi anche tale varietà è indipendente dalla parametrizzazione valendo ciò per le due varietà che la compongono.

**Notazione 3.** Indicheremo con  $|x|$  il modulo di  $x$  se  $x$  è un numero reale o la norma se è un vettore di  $R^n$ .

**Esempio 1.**  $h : \{x \in R^n | |x| < 1\} \rightarrow R^n$   $h(x) = \frac{x}{1-|x|}$  è liscia (essendo una combinazione lineare di cose lisce) ed ha come inversa  $h'(y) = \frac{y}{1+|y|}$  infatti  $h \circ h'(y) = \frac{\frac{y}{1+|y|}}{1-|\frac{y}{1+|y|}|} = \frac{\frac{y}{1+|y|}}{1+\frac{|y|}{1+|y|}} = y$  e  $h' \circ h(x) = \frac{\frac{x}{1-|x|}}{1+|\frac{x}{1-|x|}|} = \frac{\frac{x}{1-|x|}}{1+\frac{|x|}{1-|x|}} = x$  ovvero ho un diffeomorfismo fra la palla aperta  $\{x \in R^n | |x| < 1\}$  ed  $R^n$ .

**Esempio 2** (proiezione stereografica). Useremo spesso anche la **proiezione stereografica** che porta la sfera  $S^n$  in  $R^n$  che per ogni punto  $(p)$  della sfera "proietta" la sfera sul piano tangente alla sfera nel punto  $p'$ , antipodale a  $p$  (ovvero dalla parte opposta di  $p$  rispetto al centro lungo la retta per il centro



e  $p$ ), portando ogni punto ( $q$ ) della sfera nel punto di intersezione del piano tangente a  $p'$  con la retta per  $p$  e  $q$  ovvero  $h : S^n - p \rightarrow R^n$  e tale funzione porta aperti della sfera in spazi  $n$ -dimensionali dello spazio euclideo in modo diffeomorfo; questa parametrizzazione è utile perchè "compattifica" ad esempio nel caso del piano ottengo il piano proiettivo che ha un punto in più detto "punto all'infinito" e che corrisponde al limite (senza direzione) aumentando il modulo all'infinito per i punti nel piano mentre per i punti "canonici" al finito ho una corrispondenza 1-1 fra i punti della sfera e quelli del piano, nel caso di tale punto all'infinito ad essi corrispondono tutte le successioni di punti che scappano all'infinito e non rendono compatto l'insieme, inoltre con due diverse proiezioni da due diversi punti posso ottenere una parametrizzazione completa della sfera.

## 1.2 Valori regolari

**Definizione 8** (punti regolari). Sia  $f : M \rightarrow N$  funzione liscia fra varietà lisce di uguale dimensione,  $x \in M$  si dice **punto regolare** di  $f$  se  $df_x$  è non singolare (ha rango massimo) ovvero come matrice quadrata (avendo uguale dimensione gli spazi tangenti) è invertibile e quindi per il teorema della funzione inversa  $f$  porta un intorno di  $x \in M$  diffeomorficamente in un aperto di  $N$ .

**Definizione 9** (valori regolari). Diremo  $y \in N$  **valore regolare** se  $f^{-1}(y)$  è costruito solo da punti regolari e quindi per il teorema della funzione inversa localmente esiste  $f^{-1}$ , se  $df_x$  è singolare  $x$  si dirà punto critico (generalizzando il concetto usuale nel caso di più variabili e quindi considerando la matrice) e  $f(x)$  si dirà **valore critico**, quindi  $\forall y \in N$  sarà un valore critico o regolare a seconda che la controimmagine tramite  $f$  contenga o meno punti singolari.

**Osservazione 1.2.0.1.** Se  $M$  è compatto e  $y \in N$  valore regolare allora  $f^{-1}(y)$ , che è sempre discreto, o vuoto infatti  $\forall$  ricoprimento di  $M$ ,  $f^{-1}(y_i)$  con  $y_i \in N$  ed  $i \in I$  insieme di indici qualsiasi discreto (purchè  $M \subseteq \cup_{i \in I} f^{-1}(y_i)$ ), per compattezza, esiste un sottoricoprimento finito  $f^{-1}(y_j)$  con  $j \in J$  insieme finito; in generale  $f^{-1}(y)$  è un compatto essendo un chiuso (controimmagine di un chiuso mediante una funzione continua) in un compatto  $M$ .

**Definizione 10.** Per  $f : M \rightarrow N$  con  $M$  compatto e  $y \in N$  valore regolare diremo  $\#f^{-1}(y)$  il numero di punti di  $f^{-1}(y)$ .

**Osservazione 1.2.0.2** (costante localmente). Variando localmente  $y$  nei valori regolari tale funzione è costante :  $\forall y \exists V, N \supseteq V \ni y$  tale che  $\#f^{-1}(y) = \#f^{-1}(y')$   $\forall y' \in V$  per esempio chiamando i punti di  $f^{-1}(y)$   $x_1, \dots, x_k$  e considerando intorni disgiunti di tali punti  $U_1, \dots, U_k$  e le immagini diffeomorfe attraverso  $f$ ,  $V_1, \dots, V_k$  allora quanto sopra vale per  $V = V_1 \cap \dots \cap V_k - f(M - U_1 \cap \dots \cap U_k)$ .

**Osservazione 1.2.0.3** (una varietà fondamentale...). Si ha (vedi p.11 di [I] e p.5 di [III]) che per  $f : M \rightarrow N$  liscia con  $m = \dim M \geq \dim N = n$  ed  $y \in N$  valore regolare per  $f$  allora  $f^{-1}(y) \subseteq M$  è una varietà liscia di dimensione  $m - n$

e quindi tutta la strumentazione generale sviluppata per varietà si adatterà come caso particolare alla controimmagine dei valori regolari.

**Osservazione 1.2.0.4** (...un'altra varietà fondamentale). Vale un risultato corrispondente a quello citato sopra nell'osservazione 1.2.0.3 infatti si ha qualcosa di analogo considerando  $M$  varietà, con frontiera, e dimensione di  $M$  strettamente maggiore di  $N$ , varietà senza frontiera,  $y$  valore regolare per  $f$  e  $f|_{\partial M}$  allora  $f^{-1}(y) \subseteq M$  è una varietà  $(m-n)$ -dimensionale con frontiera  $\partial f^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap \partial M$  (per una prova di tale fatto vedi [I] p.13 oppure [III] p.6).

Per una semplice verifica delle proprietà citate sopra: lo spazio tangente è ben definito (non dipende dalla parametrizzazione) e così il vettore normale allo spazio tangente, la frontiera è una varietà di dimensione uno in meno rispetto alla varietà di cui è il bordo, vedi [III] ed in generale, per queste verifiche e per una introduzione molto piana e dettagliata vedi [IV].

### 1.3 Alcuni utili risultati

**Teorema 1** (Teorema della funzione inversa). Se  $df_x : R^k \rightarrow R^k$  è non singolare allora  $f$  porta un aperto  $U$  contenente  $x$  in un aperto  $f(U)$  contenente  $f(x)$  ovvero  $f$  è aperta e biettiva e con inversa liscia ovvero esiste un intorno di  $x$ , tale che  $f$  ristretta ad esso è diffeomorfa ad un intorno di  $f(x)$ .

*Dimostrazione.* vedi un qualsiasi buon libro di analisi. □

**Osservazione 1.3.0.1** (Caratterizzazione delle uno-varietà). Vale che le uno-varietà lisce (e connesse) sono unioni disgiunte di circonferenze e segmenti ovvero sono diffeomorfe ad  $S^1$  o a intervalli, di ogni tipo, di numeri reali (per una prova di tale fatto vedi appendice di [I]) quindi i punti di frontiera delle uno-varietà sono quelle dei segmenti e quindi sono sempre un numero pari.

**Teorema 2** (Lemma di Sard). Sia  $f : U \subseteq R^m \rightarrow R^n$  liscia,  $U$  aperto e  $C = \{\text{insieme dei punti critici di } f \text{ ovvero i punti } x \text{ di } U \text{ tali che } df_x \text{ ha rango } < n\}$  allora  $f(C) \subseteq R^n$  ha misura di Lebesgue nulla ovvero considerando  $f : M \rightarrow N$  fra varietà quasi ogni  $y \in N$  è valore regolare per  $f$  infatti divido il dominio in classi a seconda dell'immagine ed i punti in cui il determinante del differenziale si annulla sono un insieme di misura nulla, essendo tale quello dei valori critici, quindi in quasi tutti i punti ho che il determinante del differenziale non si annulla; nel seguito avremo dominio e codominio di uguale dimensione restrizione che qui è stata evitata.

*Dimostrazione.* vedi il capitolo 3 di [I]. □

**Osservazione 1.3.0.2** (Proprietà del differenziale fra varietà). Per  $M$  e  $N$ , varietà di dimensioni  $m$ ,  $n$ , con  $y$  valore regolare per  $f : M \rightarrow N$  si ha che

lo spazio nullo di  $df_x : TM_x \rightarrow TN_y$  è uguale allo spazio tangente della sottovarietà  $(f(y)^{-1})$  di dimensione  $m - n$  (per il risultato citato nell'osservazione 1.2.0.3 sopra) da cui si ha che ha senso considerare lo spazio tangente a  $f(y)^{-1}$  in  $x$  come un sottospazio vettoriale dello spazio tangente ad  $M$  in  $x$  ovvero vale  $T(f(y)^{-1})_x \subseteq TM_x$ , spazio vettoriale di dimensione  $m - n$ , ed il complemento ortogonale di  $T(f(y)^{-1})_x$  è isomorfo a  $TN_y$ ; infatti per la prima osservazione basta vedere che per l'inclusione (ovvero l'identità ristretta a  $f(y)^{-1}$ )  $f(y)^{-1} \rightarrow M$  e tramite  $f$  rispettivamente  $f(y)^{-1}$  va in  $y$  e  $M$  in  $N$  allora passando agli spazi tangenti e considerando l'applicazione  $df_x$ ,  $T(f(y)^{-1})_x$  va nell'unico spazio vettoriale 0-dimensionale ovvero lo 0 ("ovvero un punto per l'origine") e  $TM_x$  va in  $TN_y$  quindi effettivamente il nucleo di  $df_x$  è  $T(f(y)^{-1})_x$  la seconda affermazione segue dal fatto che per ogni applicazione lineare, come è  $df_x$  essendo  $f$  liscia, si ha l'uguaglianza sulle dimensioni :  $\dim(TM_x) = \dim(\text{dominio}(df_x)) = \dim(\text{im}(df_x)) + \dim(\text{ker}(df_x)) = \dim(\text{im}(df_x)) + \dim(T(f(y)^{-1})_x)$  e  $\text{im}(df_x) \subseteq TN_y$  e  $\dim(TN_y) = n$  quindi si ha  $\dim(\text{im}(df_x)) = \dim(TM_x) - \dim(T(f(y)^{-1})_x) = m - (m - n) = n$  quindi  $\text{im}(df_x) = TN_y$  (essendo l'unico sottospazio di dimensione  $n$  in uno spazio di dimensione  $k$  lo spazio stesso) ovvero è suriettiva e poichè il perpendicolare di uno spazio di dimensione  $h$  in uno spazio di dimensione  $k$  ha dimensione  $k-h$  allora  $(T(f(y)^{-1})_x)^\perp$  complementare di  $T(f(y)^{-1})_x$  di dimensione  $m-n$  in  $TM_x$  di dimensione  $m$  avrà proprio dimensione  $n$  quindi un'applicazione suriettiva fra spazi di uguale dimensione (infatti posso pensare a  $TM_x$  come alla somma diretta di  $T(f(y)^{-1})_x$  e del suo perpendicolare ma poichè  $T(f(y)^{-1})_x$  va a 0, la posso pensare come un'applicazione da  $(T(f(y)^{-1})_x)^\perp$  in  $TN_y$ ) è anche iniettiva e si ha che  $(T(f(y)^{-1})_x)^\perp$  e  $TN_y$  sono isomorfi essendo tale applicazione anche lineare ovvero essendo un isomorfismo.

**Osservazione 1.3.0.3.** Siano  $GL_p$  insieme delle matrici quadrate invertibili di ordine  $p$  (di dimensione  $p \times p$ ) ovvero  $GL_p = \{M \in R^p | \det(M) \neq 0\}$  tale insieme non è connesso perchè controimmagine di uno sconnesso  $(R - \{0\})$  tramite la funzione determinante che è continua ed ha due componenti connesse  $\{M \in R^p | \det(M) > 0\} = \bigcup_{c>0} \{M \in R^p | \det(M) = c\}$  e  $\{M \in R^p | \det(M) < 0\} = \bigcup_{c<0} \{M \in R^p | \det(M) = c\}$  oppure sempre usando la continuità del determinante se avessi una sola componenete potrei passare dalle matrici a determinante positivo a quelle a determinante negativo e quindi avrei un punto in cui il determinante si annulla ma tale elemento non sta nell'insieme e quindi non posso mai connettere due matrici con determinante di segno differente, che le varie componenti siano "connesse" lo si vede :  $A, B$  a determinante concorde es positivo allora esiste  $B^{-1}$  a determinante positivo e pure  $AB^{-1}$  a determinante positivo che porta  $B$  in  $A$ , analogamente per matrici a determinante negativo avendo  $AB^{-1}$  determinante ancora positivo.

**Osservazione 1.3.0.4** (Teorema del gradiente, versione 2-dimensionale). Siano  $D$  aperto e  $f : D \subseteq R^2 \rightarrow R$  differenziabile nel senso che al primo ordine si può approssimare con una funzione lineare (ovvero, in generale,  $\forall x, y \in R^k$  esiste  $L(h, k)$  lineare negli incrementi tale che  $f(x + h, y + k) = f(x, y) + L(h, k) + o(\sqrt{h^2 + k^2})$ ) allora il teorema del gradiente afferma che per ogni vettore fis-

sato la derivata direzionale della funzione  $f$  lungo quel versore è  $\nabla f$  volte il versore stesso ovvero fissato il versore  $v$   $d_v(f(x, y)) = \nabla(f(x, y))v$  dove a sinistra si ha una matrice ed a destra il prodotto righe per colonne fra due vettori colonna. In particolare se esiste  $(x_0, y_0)$  tale che  $\nabla(f(x_0, y_0)) \neq 0$ , per Cauchy-Schwarz, vale  $|d_v(f(x_0, y_0))| = |\nabla(f(x_0, y_0))v| \leq (|\nabla f(x_0, y_0)|)$  quindi per  $v = \nabla f(x_0, y_0)/(|\nabla f(x_0, y_0)|)$  ho la direzione di massima crescita, nel senso della derivata direzionale, della funzione.

## Capitolo 2

# Teorema del grado di Hopf

### 2.1 Omotopia e grado

Partiamo con una definizione che, pur sembrando inizialmente restrittiva, poi verrà ampliata:

**Definizione 11** (grado). *Sia  $f : S^n \rightarrow S^n$  liscia, se  $y$  è un valore regolare come sopra (pag 9, definizione 9) abbiamo che la classe resto modulo due (per l'osservazione 1.2.0.1 la controimmagine di un valore regolare è finita e quindi ha senso considerarne la classe resto) di  $f^{-1}(y)$  non dipende dalla scelta di  $y$ , nè localmente (come già visto nell'osservazione 1.2.0.2) nè globalmente (come vedremo nel teorema 5 di pagina 18) e tale classe resto si dirà **grado** di  $f$ .*

Per estendere questa nozione introduciamo un concetto di topologia importante ed alcune considerazioni connesse: l'omotopia.

**Definizione 12** (omotopia). *Siano  $f, g : X \rightarrow Y$  funzioni continue con  $X$  ed  $Y$  spazi topologici qualsiasi,  $f$  e  $g$  si dicono **omopote** se  $\exists$  continua  $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  con  $F(x, 0) = f(x)$  e  $F(x, 1) = g(x) \forall x \in X$ , tale funzione si dice **omotopia** fra  $f$  e  $g$ , analoga definizione di omotopia liscia se la funzione  $F$  è liscia.*

**Osservazione 2.1.0.1.** *Tale funzione  $F$  è continua (o liscia) nel primo parametro  $x$  infatti ogni singola funzione assunta a  $t$  fissato è continua ed anche nel secondo parametro  $t$  infatti il concetto intuitivo che corrisponde a tale nozione è quello di "deformare con continuità"  $f$  in  $g$  (o viceversa) attraverso una famiglia di funzioni  $F(x, t)$  continue in  $x$  con indice  $t$  che suggestivamente si può pensare come un parametro temporale che scorre in modo che si passi dall'istante 0 corrispondente ad  $f(x)$  all'istante 1 corrispondente a  $g(x)$  mediante una successione di istanti in cui la funzione corrispondente è pure continua, tale famiglia di funzioni si potrà indicare con  $F_t(x)$ . Pensando alle funzioni di  $x$  come punti possiamo vedere  $F_t(x)$  come cammino continuo dipendente da  $t$  fra  $f(x)$  e  $g(x)$  ovvero con passi continui (in  $t$ ) si salta attraverso funzioni continue (in  $x$ ); in*

modo grafico possiamo pensare a  $x$  come coordinata sulla curva fissata corrispondente al  $t$  scelto e  $t$  come coordinata che varia fra le curve della famiglia ovvero "t dice quale curva, x in che punto su tale curva".

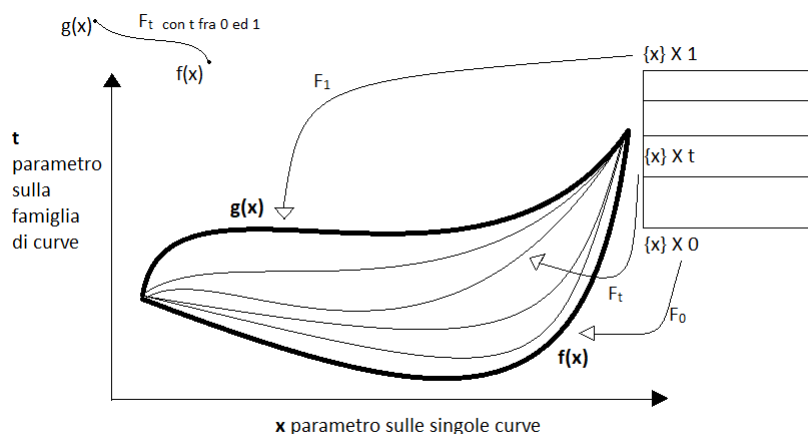


Figura 2.1: relazione di omotopia

**Teorema 3.** La relazione di "esser omotope" è di **equivalenza** sull'insieme  $C(X, Y)$  delle funzioni continue da  $X$  a  $Y$ .

*Dimostrazione.* Tale relazione è:

**riflessiva**  $F(x, t) = f(x)$  indipendente dal parametro  $t$  è evidentemente continua essendolo  $f(x)$  e connette  $f(x)$  a sè stessa;

**simmetrica** se  $F(x, t)$  è un omotopia fra  $f(x)$  e  $g(x)$  allora  $G(x, t) = F(x, 1-t)$  è un omotopia fra  $g(x)$  e  $f(x)$  infatti è continua in  $x$  per definizione di  $F(x, t)$  e  $G(x, 0) = F(x, 1) = g(x)$  e  $G(x, 1) = F(x, 0) = f(x)$ ;

**transitiva** se  $F(x, t)$  è un omotopia fra  $f(x)$  e  $g(x)$  e se  $G(x, t)$  è un omotopia fra  $g(x)$  e  $h(x)$  allora

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{per } t \in [0, 1/2] \\ G(x, 2t - 1) & \text{per } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

è un omotopia fra  $f$  e  $h$  infatti è continua sulle due parti essendo uguale a  $F(x, t)$  e  $G(x, t)$  che sono continue ed anche in  $1/2$  è continua valendo secondo entrambe le definizioni  $g(x)$ , inoltre  $H(x, 0) = F(x, 0) = f(x)$  e  $H(x, 1) = G(x, 1) = h(x)$ .

□

Analogo risultato vale per funzioni lisce ovvero per l'omotopia liscia considerando che la regolarità si conserva nella composizione e nella riparametrizzazione degli intervalli.

**Esempio 3.** Per  $Y \subseteq R^k$ , con  $Y$  convesso così che le combinazioni convesse siano ancora nell'insieme, e  $f, g : X \rightarrow Y$  funzioni continue qualsiasi si ha che  $F(x, t) = tg(x) + (1 - t)f(x)$  è un'omotopia fra  $f$  e  $g$  infatti è continua perché combinazione lineare di cose continue e si ha che  $F(x, 0) = f(x)$  e  $F(x, 1) = g(x)$ .

**Osservazione 2.1.0.2** (equivalenza omotopica). Data  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X$  si dice *inversa destra (sinistra)* di  $f$  se  $f \circ g : Y \rightarrow Y$  è omotopa all'identità di  $Y$  ( $g \circ f : X \rightarrow X$  è omotopa all'identità di  $X$ ); se esistono entrambe,  $f$  si dice *equivalenza omotopica*, ed  $X$  ed  $Y$  si diranno *omotopicamente equivalenti* (per esempio spazi omeomorfi sono omotopicamente equivalenti infatti l'omeomorfismo è proprio l'equivalenza omotopica).

**Osservazione 2.1.0.3** (composizioni). Siano  $f_1, g_1 : X \rightarrow Y$  e  $f_2, g_2 : Y \rightarrow Z$  funzioni continue con  $f_1$  omotopa a  $g_1$  e  $f_2$  omotopa a  $g_2$  allora  $f_2 \circ f_1 : X \rightarrow Z$  è omotopa a  $g_2 \circ g_1 : X \rightarrow Z$  infatti siano  $F'(x, t)$  omotopia fra  $f_1(x)$  e  $g_1(x)$  e  $F''(y, t)$  omotopia fra  $f_2(y)$  e  $g_2(y)$  allora fissato  $x$ ,  $F'(x, t)$  è un valore nel codominio, e  $F''(F'(x, t), t)$  è una funzione di  $t$  tale che  $t \rightarrow (y(x, t) = F'(x, t), t) \rightarrow F''(F'(x, t), t)$  e fissato  $t$ , ovvero entrambe le funzioni nelle due famiglie, si ha  $F''(y(x, t), t) \circ F'(x, t)$  ovvero la funzione che rende omotope le composizioni è  $F''(F'(x, t), t) = F''(y(x, t), t) \circ F'(x, t) : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  e vale

$$\begin{cases} F''(F'(x, t), t) = f_2(f_1(x)) & \text{per } t = 0 \\ F''(F'(x, t), t) = g_2(g_1(x)) & \text{per } t = 1 \end{cases}$$

e composizioni di applicazioni continue in entrambi i parametri è continua in entrambi i parametri quindi effettivamente è un'omotopia.

**Definizione 13** (isotopia). Siano  $X$  ed  $Y$  spazi topologici e  $f, g : X \rightarrow Y \subseteq X$  omeomorfismi si parlerà di **isotopia** invece che di omotopia per l'omeomorfismo  $H(x, t) : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  che connette  $f$  e  $g$  ovvero tale che con  $x$  fissato allo scorrere di  $t$   $H_t(x)$  porti  $f(x)$  in  $g(x)$ .

**Osservazione 2.1.0.4.** In contesto differenziale noi useremo, senza perder di generalità considerando funzioni suriettive a costo di sostituire il codominio con l'immagine,  $f$  e  $g$  diffeomorfismi e quindi parleremo di isotopia liscia avendo  $H(x, t)$ , tale che fissato  $t \in [0, 1]$  è diffeomorfismo, nella variabile  $x$ , fra  $X$  e  $Y$ . Chiaramente anche questa relazione è di equivalenza con considerazioni identiche a quanto fatto nel caso dell'omotopia osservando che la regolarità si conserva nel riparametrizzare l'intervallo.

Ora torniamo alla definizione di grado data all'inizio del capitolo e la estendiamo alla luce del seguente risultato :

**Teorema 4.** *Siano  $f, g : M \rightarrow N$  funzioni continue, omotope in modo liscio fra loro, con  $M$  compatto senza bordo ed  $N$  connesso e di uguale dimensione, allora se  $y \in N$  è un valore regolare per  $f$  e  $g$  vale che  $\#f^{-1}(y) = \#g^{-1}(y) \bmod 2$  ovvero coincidono come classe resto modulo due.*

*Dimostrazione.*  $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$  omotopia liscia fra  $f$  e  $g$ :

se  $y$  è valore regolare per  $F$  allora  $F^{-1}(y)$  è una varietà compatta di dimensione uno con bordo infatti, per il risultato richiamato nell'osservazione 1.2.0.4 del primo capitolo, poichè  $M \times [0, 1]$  ha dimensione  $m + 1$  mentre  $N$  ha dimensione  $m$  tale varietà ha effettivamente dimensione 1 e la sua frontiera è l'insieme stesso intersecato la frontiera dell'insieme che lo contiene ovvero  $F^{-1}(y) \cap \partial(M \times [0, 1])$  con  $\partial(M \times [0, 1]) = (M \times 0 \cup M \times 1)$  quindi

$$F^{-1}(y) \cap (M \times 0 \cup M \times 1) = f^{-1}(y) \times 0 \cup g^{-1}(y) \times 1$$

infatti  $F$  in  $\{0\}$  è  $f$  e  $F$  in  $\{1\}$  è  $g$  allora il numero di punti di frontiera per  $F^{-1}(y)$  è  $\#f^{-1}(y) + \#g^{-1}(y)$  ma le uno-varietà hanno sempre un numero di punti di frontiera pari, per l'osservazione 1.3.0.1 citata nel primo capitolo, quindi  $\#f^{-1}(y) + \#g^{-1}(y)$  è pari e quindi  $\#f^{-1}(y) = \#g^{-1}(y) \bmod 2$ .

se  $y$  non è valore regolare per  $F$  sappiamo (pag 9, osservazione 1.2.0.2) che  $\#f^{-1}(y')$  e  $\#g^{-1}(y')$  sono localmente costanti come funzioni di  $y'$  variando sui valori regolari quindi  $\exists V_1$  e  $V_2 \subseteq N$  intorno di  $y$  tali che  $\#f^{-1}(y') = \#f^{-1}(y) \forall y' \in V_1$  e  $\#g^{-1}(y') = \#g^{-1}(y) \forall y' \in V_2$  quindi prendendo un  $y''$  valore regolare per  $F$  (che esiste per la densità dei valori regolari nell'immagine ovvero per il corollario di Brown, conseguenza del lemma di Sard richiamato nella seconda sezione del primo capitolo) in  $V_1 \cap V_2$  si ha per il punto sopra che  $\#f^{-1}(y'') = \#g^{-1}(y'') \bmod 2$  e quindi

$$\#f^{-1}(y) = \#f^{-1}(y'') \equiv \#g^{-1}(y'') = \#g^{-1}(y)$$

□

**Notazione 4.** *D'ora in poi parleremo sempre di omotopia e isotopia come di omotopia e isotopia lisce, salvo specifiche, considerando in contesto differenziale funzioni lisce.*

**Osservazione 2.1.0.5** (grado sulle classi di omotopia). *Dal risultato sopra abbiamo che il grado di una funzione dipende solo dalla sua classe di omotopia e varrà una definizione uguale a quella data sopra (pag 13, def 11) considerando esclusivamente la classe di omotopia e specificandone un solo rappresentante.*

**Lemma 1.** *Siano  $y$  e  $z$  punti interni di  $N$  varietà liscia e connessa, allora esisterà un diffeomorfismo  $h : N \rightarrow N$  isotopo all'identità su  $N$  che porta  $y$  in  $z$ .*



*Dimostrazione.* Costuiamo l'isotopia da  $R^n$  in sè che lascia fissi i punti fuori dalla sfera unitaria n-dimensionale (aperta) e porta l'origine in ogni punto fissato della sfera, con  $g : R^n \rightarrow R$  liscia e definita da

$$\begin{cases} g(x) > 0 & \text{per } \|x\| < 1 \\ g(x) = 0 & \text{per } \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

allora  $\forall v \in S^{n-1}$  considero l'equazione differenziale sulle componenti dei vettori di  $R^n : \frac{dx_i}{dt} = v_i g(x_1, \dots, x_n)$  con  $i = 1, \dots, n$  in cui l'i-esima componente si incrementa di  $g(x)$ , scalare, volte l'i-esima componente del vettore fissato  $v$ , si ha una unica soluzione, di questo problema di Cauchy n-dimensionale,  $x = x(t)$ , ovvero con  $x$  dipendente dal tempo,  $\forall w \in R^n$  fissato dato iniziale tale che  $x(0) \equiv w$ , e scriveremo la soluzione in modo da rappresentare tutte le informazioni, fissata la funzione  $x = x(t)$ ,  $F_t(w)$  (in modo intuitivo si può dire  $x(t) = F_t(w)$  in cui la funzione a sinistra rappresenta la soluzione generica senza il dato iniziale che invece è specificato nell'espressione a destra in cui però la funzione  $x(t)$  non è specificata); per risultati sulle equazioni differenziali abbiamo che  $F_t(x)$  è definito  $\forall t \in R$  e  $\forall w \in R^n$  e dipende in modo liscio da essi, per definizione di  $F_t(x)$  si ha che  $F_0(w) = w$  infine  $F_s \circ F_t(w)$  è  $F_s \circ x(t)$  con dato iniziale  $x(0) \equiv w$  ovvero  $x(t+s)$  con dato iniziale  $x(0)$ , nella variabile  $s$ ,  $\equiv w \equiv x(0)$  nella variabile  $(t+s)$  quindi  $F_s \circ F_t(w) = F_{t+s}(w)$ . Per definizione  $F_t(x)$  è un diffeomorfismo da  $R^n$  in sè, è isotopa all'identità attraverso un isotopia che fissa tutti i punti fuori dalla sfera unitaria infatti per  $\|x\| \geq 1$  si ha che  $\frac{dx_i}{dt} = v_i g(x_1, \dots, x_n) = 0$  ovvero  $x_i = \text{costante}$   $\forall i = 1, \dots, n$  e  $\forall x$  tale che  $\|x\| < 1$  inoltre, scegliendo  $v_i$  e  $t$  ovvero variando le i-esime coordinate dei vettori, tale diffeomorfismo porta l'origine in ogni punto della sfera unitaria (ad esempio con traslazioni, la cui derivata è una costante, sulle varie componenti). Sfrutteremo questa tipologia di isotopie per risolvere il problema. Possiamo dire che due punti sono isotopi se esiste una isotopia che li connette, non introduciamo tale nozione nella sua generalità perchè ci porterebbe a parlare di cammini e di relazioni di equivalenza sui punti di un insieme rispetto all'esser connessi tramite funzioni continue con detti punti come estremi finali ed iniziali, anch'essi immagini di funzioni continue con dominio un intervallo (per un assaggio vedi pag 164,[IX]). Tale nozione è in modo simile a quanto visto con l'omotopia e l'isotopia una relazione di equivalenza: l'identità porta un punto in sè ed è un isotopia, se un isotopia porta  $x_0$  in  $x_1$  l'isotopia inversa che porta  $x_1$  in  $x_0$  esiste semplicemente mutando i parametri del dominio (vedi pag 14, teorema 3), la transitività deriva dal fatto che composizioni di omotopie è un omotopia spezzando il dominio in modo corretto (vedi sempre pag 14, teorema 3). Per  $y$  punto interno e regolare, di  $N$  varietà connessa, esiste, per il teorema della funzione inversa, un intorno diffeomorfo ad  $R^n$  ed usando la costruzione dell'isotopia come sopra abbiamo che tutti i punti di intorni sufficientemente piccoli di  $y$  sono isotopi ad  $y$  ovvero le classi di isotopie (insiemi di punti isotopi fra loro) essendo intorni aperti sono insiemi aperti e ragionando sui diversi valori regolari  $y \in N$  abbiamo anche una partizione dell'interno, avendo usato degli aperti, di  $N$  in insiemi disgiunti ma l'interno di  $N$  è connesso quindi non lo posso rappresentare come unione di più

aperti disgiunti quindi la classe di isotopia è unica ovvero tutti i punti interni di  $N$  sono equivalenti attraverso un isotopia ovvero esiste un isotopia che porta, per ogni coppia di punti fissati, l'uno nell'altro.  $\square$

Per un'altra prova di questo fatto vedi p.6 di [IV].

**Teorema 5.** *Siano  $M$  compatto senza frontiera,  $N$  connesso per  $y$  e  $y'$  valori regolari di  $f : M \rightarrow N$  si ha che  $\#f^{-1}(y) = \#f^{-1}(y') \bmod 2$ ; avrà allora senso definire tale comune valore, indipendente del valore regolare, come grado della funzione  $f : \deg_2 f$ .*

*Dimostrazione.* Per il lemma 1 di pagina 16  $\exists h$  da  $N$  in  $M$  diffeomorfismo isotopo all'identità che porta  $y$  in  $y'$  allora essendo  $h$  un diffeomorfismo (quindi il suo differenziale è invertibile ed ha determinante non nullo)  $y'$  sarà un valore regolare anche per  $h \circ f$  infatti  $(h \circ f)^{-1}(y') = (f^{-1} \circ h^{-1})(y') = f^{-1}(y)$  avendo  $h(y) = y'$  e  $\forall x \in f^{-1}(y)$  il differenziale di  $h \circ f$  è  $dh_{f(x)} df_x$  ma  $df_x$  ha determinante non nullo per la regolarità di  $y$  e  $dh_{f(x)}$  ha determinante non nullo perchè è un isomorfismo essendo il differenziale di un diffeomorfismo così è non nullo anche il determinante di  $h \circ f \forall x \in f^{-1}(y)$ ; inoltre  $h \circ f$  è omotopa a  $f$  (ad esempio con  $H(x, t) = f(x) + t(h(x) \circ f(x) - f(x))$  con  $t$  scalare in  $[0, 1]$ ). Abbiamo quindi per il teorema 4 di pagina 16 che  $\#(h \circ f)^{-1}(y') = \#f^{-1}(y') \bmod 2$  ma  $(h \circ f)^{-1}(y') = f^{-1} \circ h^{-1}(y') = f^{-1}(y)$  quindi  $\#f^{-1}(y) = \#f^{-1}(y') \bmod 2$ .  $\square$

Abbiamo così mostrato componendo il teorema 5 ed il teorema 4 che tale classe resto non dipende dal valore regolare nè dalla funzione ma solo dalla classe di omotopia della funzione ed è ben definita l'operatore che ad una funzione associa il suo grado modulo 2 anche sulle classi di omotopia (ovvero è un invariante omotopico). Infatti se ho due funzioni omotope e lisce con uguale immagine ( $f, g : M \rightarrow N$ ), avendo (dal teorema di Sard) che l'immagine dei punti critici di una mappa liscia ha misura nulla e nell'insieme dei punti critici di  $f$  e  $g$ , posso sempre trovare valori regolari (per la loro densità nel codominio) per entrambe le funzioni scelte, così da avere come equivalenza mod2:

$$\deg_2 f = \#f^{-1}(y) = \#g^{-1}(y) = \deg_2 g$$

ovvero abbiamo che la relazione di avere uguale grado mod2 è conseguenza (è più debole, meno descrittiva) dell'appartenere alla stessa classe di omotopia (proprietà più particolare) ovvero  $f, g : M \rightarrow N$ ,  $f$  omotopa (in modo liscio) a  $g \Rightarrow \deg_2 f = \deg_2 g$ . Introduciamo nella prossima sezione una nozione di grado più specifica che ci permetterà di invertire l'implicazione ovvero di avere un'equivalenza, nell'insieme delle funzioni lisce, fra la relazione di omotopia e l'aver uguale "grado" in un senso che dobbiamo ancora specificare.

## 2.2 Il grado di Brouwer

Per estendere la nozione di grado data nella sezione precedente introduciamo una caratteristica delle varietà tralasciata nella sezione 1.1 del primo capitolo: l'orientazione delle varietà.

**Definizione 14** (orientazione). Una **orientazione** per uno spazio vettoriale reale finito dimensionale è una classe di equivalenza di vettori (in realtà basi infatti sono indipendenti e dello stesso numero della dimensione dello spazio) ordinati tali che  $(v_1, \dots, v_m)$  determina la stessa orientazione della base  $(v'_1, \dots, v'_m)$  se  $\forall i = 1, \dots, m$   $v'_i = \sum_{j=1}^m a_{i,j} v_j$  con  $\det(a_{i,j}) > 0$ , orientazione opposta se  $\det(a_{i,j}) < 0$ , potremo denominare la classe di basi positivamente orientate  $+1$  ed la classe di basi negativamente orientate  $-1$ .

**Osservazione 2.2.0.1.** L'aver uguale orientazione rispetto ad una base fissata è una **relazione di equivalenza**: ogni base corrisponde a sè stessa attraverso l'identità che ha determinante positivo e quindi ha uguale orientazione, se una base  $v$  va in un'altra  $w$  con una matrice  $A$  a determinante positivo allora la seconda va nella prima con l'inversa  $A^{-1}$ , che esiste essendo il determinante non nullo e che ha come determinante  $1/\det(A)$  positivo ovvero ho ancora conservato l'orientazione infine se  $v$  va in  $w$  con  $A$ , a determinante positivo, e  $w$  va in  $z$  con  $B$ , a determinante positivo, allora  $v$  va in  $z$  con  $BA$  che ha determinante positivo. Quindi se una base ha orientazione positiva o negativa rispetto ad una base fissata possiamo considerarne le matrici di cambiamento di base che avranno determinante positivo e negativo (e tali matrici, associate a tali applicazioni, esistono e sono la matrice identità  $n$ -dimensionale e la matrice identità  $n$ -dimensionale con un  $-1$  lungo la diagonale principale nell'intersezione della  $i$ -esima riga e  $i$ -esima colonna, ovvero la matrice associata ad una riflessione  $r_i$  tal che  $r_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ ) e mutando con matrici a determinante positivo il determinante cambierà in valore ma non di segno ed avrà senso considerare le due classi indicandole, a meno di cambiamenti di base con matrici a determinante positivo, come  $+1$  e  $-1$  (usando ad esempio come rappresentanti le matrici citate sopra); da notarsi che ho solo matrici a determinante non nullo, avendo considerato isomorfismi, e quindi le due classi sopra descritte sono una classificazione esaustiva delle tipologie di matrici di cambio di base e quindi di basi rappresentate mediante tali matrici rispetto ad una base fissata.

**Osservazione 2.2.0.2.** Per il calcolo esplicito di verifica che due diffeomorfismi che preservano l'orientazione hanno stesso segno si devono considerare le parametrizzazioni delle varietà e ricondursi mediante diffeomorfismi allo spazio tangente ovvero al caso vettoriale definito sopra si veda p.8 di [III].

**Osservazione 2.2.0.3.** Per ogni spazio vettoriale, fissata una base, si hanno due orientazioni (il caso  $\det(a_{i,j}) = 0$  significherebbe che una base viene mandata in un insieme di vettori non linearmente indipendenti, mentre qui si ragiona su trasformazioni, tramite applicazioni lineari o matrici, che mandano basi in

basi ovvero isomorfismi).  $R^m$  ha come orientazione positiva quella data dalla base canonica  $(1,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0), \dots, (0,\dots,0,1)$ .

**Definizione 15** (varietà orientata). Una **varietà liscia orientata** è una varietà  $M$  insieme alla scelta di una orientazione per ogni spazio tangente  $TM_x$ ,  $\forall x \in M$ , tali che si adattino fra loro ovvero  $\forall x \in M \exists U \subseteq M$  intorno di  $x$  ed esiste un diffeomorfismo  $h$  da  $U$  in un aperto di  $R^m$  (o  $R^m_+$  per varietà con bordo) che preserva l'orientazione ovvero tale che  $\forall x \in U$  l'isomorfismo  $dh_x$  porta l'orientazione scelta di  $TM_x$  nell'orientazione canonica di  $R^m$ . Ciò vale con  $\dim(M) \geq 1$ : per il caso di dimensione nulla passeremo dal caso di dimensione 1 e definiremo l'orientazione sulla frontiera come quella ereditata dallo insieme più grande. Una varietà si dirà orientabile se può esser orientata, senza averne specificata l'orientazione.

**Definizione 16** (orientazioni per un punto). Per  $M$  connesso e orientabile per ogni punto esistono solo due orientazioni, usando che ciò vale nel caso vettoriale, ovvero rispetto ad una base fissata si guarda l'orientazione di  $TM_x$  che è ben definita per sopra e sarà  $+1$  o  $-1$  e la si dirà segno nel punto  $x$  e la si indicherà con  $\text{sgn}(x)$ .

**Osservazione 2.2.0.4** (spazio tangente e frontiera). Se  $M$  connesso e orientabile ha un bordo  $\forall x \in \partial M$  si hanno tre tipologie di vettori nello spazio tangente  $TM_x$  (ovvero tangenti ad  $M$  in un punto della sua frontiera) a seconda di come si comportano rispetto alla frontiera di  $TM_x$ : vettori tangenti alla frontiera ( $T(\partial M_x)$ ), che formano un sottospazio  $(m-1)$ -dimensionale, vettori che "escono" ovvero non appartengono a  $T(\partial M_x)$  e puntano verso la parte opposta di  $M$  rispetto alla frontiera, vettori che "entrano" ovvero che sono opposti a quelli che escono e che rispetto alla frontiera puntano verso  $M$ ; questi due ultimi insiemi di vettori costituiscono due insiemi (aperti di dimensione  $m$ ) con frontiera  $T(\partial M_x)$  e complementari in  $R^m$  ovvero si è diviso, a seconda del comportamento rispetto alla frontiera, l'intero  $R^m$  in due aperti di dimensione  $m$  ed un chiuso fra essi, ovvero come loro frontiera, di dimensione  $m-1$ .

**Osservazione 2.2.0.5** (orientazioni e frontiere). Possiamo anche vedere l'orientazione non come "fissata" ma come "ereditata" ovvero in modo analitico mi riconduco al caso euclideo:  $dh_x$  essendo localmente un diffeomorfismo non può annullarsi e quindi la carta locale data dalla coppia diffeomorfismo  $h$  e intorno aperto  $U$  del punto  $x$  inducono una orientazione sulla varietà, mediante un orientazione per lo spazio tangente  $TM_x$ , in generale quindi ricoperto lo spazio con carte avrà delle orientazioni e dirò lo spazio orientato. Ogni orientazione di  $M$  (per  $\dim(M) \geq 2$ ) determina un orientazione di  $\partial M$ :  $\forall x \in \partial M$ , scelta una base positiva  $(v_1, \dots, v_m)$  di  $TM_x$  in modo che  $(v_2, \dots, v_m)$  siano tangenti alla frontiera ovvero appartengano a  $T(\partial M_x)$  che ha dimensione  $m-1$  e che  $v_1$  punti verso l'esterno,  $(v_2, \dots, v_m)$  sarà la base di  $T(\partial M_x)$  e ne determinerà l'orientazione facendo questo per ogni punto di  $T(\partial M_x)$  (da notarsi che l'affermazione intuitiva di "ereditare" coincide con il fatto che una parametrizzazione di un insieme induce una parametrizzazione della frontiera e quindi posso confrontare

se il diffeomorfismo definito sul bordo, che è la restrizione di quello definito su tutta la varietà, ha la stessa orientazione di quello definito su tutta la varietà). In realtà potremo pensare a  $v_1$  come vettore normalizzato ed ortogonale ovvero il vettore normale allo spazio tangente generato da  $(v_2, \dots, v_m)$ . Se  $M$  ha dimensione 1 allora possiamo anche dare orientazione ai punti (ovvero ad insiemi di dimensione 0) dicendo che l'orientazione sarà  $+1$  o  $-1$  a seconda che un vettore con l'orientazione positiva, in  $x$ , punti verso l'esterno o l'interno.

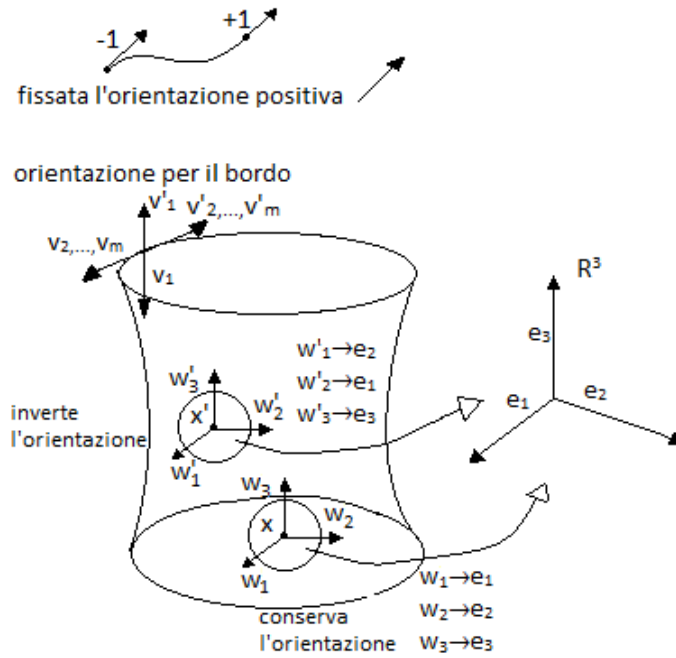


Figura 2.2: alcuni esempi di orientazione e grado

Siamo pronti ad estendere la nozione di grado della sezione precedente e a vedere che come in quel caso anche qui la funzione ed il grado hanno un qualche legame con la varietà preimmagine della funzione, in tal caso con l'orientazione indotta:

**Definizione 17** (grado). *Sia  $f : M \rightarrow N$  liscia,  $M, N$  varietà  $n$ -dimensionali orientate senza frontiera, per  $M$  compatto e  $N$  connesso (in modo che la cardinalità di  $f^{-1}(y)$  è finita) definiamo il grado di  $f$  : sia  $x \in M$  punto regolare di  $f$  così che  $df_x : TM_x \rightarrow TN_{f(x)}$  sia un isomorfismo fra spazi vettoriali orientati, dalle corrispondenti basi, definiamo il segno di  $df_x$  come  $+1$  o  $-1$  a seconda che tale isomorfismo conservi o inverta l'orientazione ovvero come il segno del determinante  $df_x$  e per ogni valore regolare  $y \in N$  definiamo  $deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} segno\ df_x$ .*

**Osservazione 2.2.0.6** (localmente costante). *Tale intero come nel caso di  $\deg_2 f$  è localmente costante come funzione di  $y$ , essendo localmente i determinanti dei differenziali dei diffeomorfismi costanti in segno infatti se  $df$  cambiasse segno si annullerebbe per il teorema degli zeri essendo il determinante continuo e quindi non si avrebbe più  $df$  isomorfismo, ed è definita su un insieme denso di  $N$  essendo per il teorema di Sard l'immagine dei punti regolari attraverso  $f$  di misura nulla, potremo quindi approssimare punti dell'immagine con valori regolari. Per una prova, più diretta di quella che elaboreremo noi, che il grado è globalmente costante, rispetto ai valori regolari, basata sul locale vedi p.10-11 di [III] e per una basata semplicemente sulla definizione vedi p.3 di [V]. In modo analitico: per le ipotesi su dominio e codominio  $f^{-1}(y)$  è finito  $=\{x_1, \dots, x_n\}$  allora per il teorema della funzione inversa  $f$  è localmente un diffeomorfismo per ogni intorno  $U_i$  di  $x_i$  che va in un intorno  $V_i$  di  $y$  inoltre se cambiasse segno il determinante del differenziale essendo continuo si dovrebbe annullare e quindi non sarebbe più un isomorfismo, quindi il segno dei differenziali dei diffeomorfismi ristretti agli intorni è costante inoltre essendo  $\{x_1, \dots, x_n\}$  punti distinti e finiti posso supporre  $U_i$  disgiunti a due a due e  $M - \bigcup_{1 \leq i \leq n} U_i$  è chiuso e quindi un compatto essendo sottoinsieme di  $M$  compatto e quindi attraverso  $f$ , che è differenziabile e quindi continua, va in un compatto di  $N$  che per costruzione non contiene  $y$  allora  $W = \bigcap_{1 \leq i \leq n} V_i - (f(M - \bigcup_{1 \leq i \leq n} U_i))$  è un intorno aperto di  $y$  e per le osservazioni sul teorema della funzione inversa che l'intorno  $U_i$  va in modo biiettivo nell'intorno  $V_i$ ,  $f^{-1}(W) \subseteq f^{-1}(\bigcap_{1 \leq i \leq n} V_i) \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} U_i$  quindi per ogni  $y'$  in  $W$  (essendo qui suriettiva)  $f^{-1}(y')$  consiste di un solo punto (essendo ivi iniettiva) per ogni  $U_i$  (ovvero la preimmagine ha cardinalità localmente costante su ogni intorno) con lo stesso grado di  $x_i$  per quanto detto sui determinanti dei diffeomorfismi quindi  $\deg(f, y) = \deg(f, y')$ . In realtà arriveremo a provare come nel caso del grado modulo 2 che il grado è costante su tutti i valori dell'immagine ovvero dipende solo dalla funzione.*

Come nella sezione 2.1 arriveremo a dire che :

**Teorema 6:**  $\deg(f, y)$  non dipende dalla scelta del valore regolare  $y$ .

**Teorema 7:**  $f, g$  omotope in modo liscio allora  $\deg f = \deg g$ .

Quindi, in modo analogo a quanto fatto per  $\deg_2(f)$ , anche per  $\deg(f)$  tale definizione avrà senso, senza specificare il valore regolare  $y$ , e sarà costante sulle classi di omotopia, ovvero sarà sufficiente specificare il grado sui rappresentati di queste.

**Lemma 2.** *Sia  $M$  frontiera di una varietà compatta orientata  $M'$  ed  $M$  sia orientata come frontiera di  $M'$ . Se  $f : M \rightarrow N$  si può estendere ad una mappa liscia  $F : M' \rightarrow N$  allora  $\forall y \in N$  regolare  $\deg(f, y) = 0$ .*

*Dimostrazione.* A seconda del comportamento di  $y$  rispetto ad  $F$ :

**y regolare per  $F$**  e quindi anche per  $f$  che è la restrizione di  $F$  sulla frontiera allora applicando il risultato citato nell'osservazione 1.2.0.4 di pagina 10

ad  $M'$  di dimensione  $m + 1$  (con  $M$  di dimensione  $m$  sua frontiera) e  $N$  di dimensione  $m$  si ha che  $F^{-1}(y)$  è una 1-varietà compatta e quindi per l'osservazione 1.3.0.1 di pagina 10 è unione finita di segmenti o archetti (intervalli di numeri reali) e circonferenze e come nell'osservazione già citata gli unici punti della frontiera di  $F^{-1}(y)$  sono quelli degli archetti o segmenti che intersecano  $M$  ovvero la frontiera di  $M'$ . Sia  $A \subseteq F^{-1}(y)$  uno di questi archetti quindi essendo una componente di una varietà 1-dimensionale sarà  $\partial A = \{a\} \cup \{b\}$ , con  $a$  e  $b$  punti di  $M$ . L'orientazione per  $M'$  e  $N$  determina un'orientazione per  $A$  infatti dato  $x$  in  $A$ ,  $(v_1, \dots, v_{m+1})$  base positiva per  $TM'_x$ , vedendo  $x$  come punto di  $M'$ , con  $v_1$  tangente ad  $A$  (infatti è una varietà unidimensionale quindi anche il suo spazio tangente è 1-dimensionale e quindi contiene un solo vettore linearmente indipendente) allora  $v_1$  determina un'orientazione positiva su  $TA_x$  se e solo se  $dF_x : TM'_x \rightarrow TN_{f(x)}$  porta il resto della base  $(v_2, \dots, v_{m+1})$  in una base positivamente orientata di  $TN_{f(x)}$  (considerando due spazi vettoriali di uguale dimensione  $m$ ) ovvero  $A$  ha orientazione positiva se data una base di  $m$  elementi che tramite l'isomorfismo  $dF_x$  va in una base positiva del codominio, la posso completare in modo che sia ancora una base positiva di  $m+1$  elementi di  $TM'_x$ ; diremo  $v_1(x)$  questo vettore unitario nello spazio tangente ad  $A$  in  $x$  che ne determina un'orientazione positiva per come appena definito. Tale funzione di  $x$  è liscia (per il trasporto parallelo), e per continuità indica la tangente, e ad un estremo, per esempio,  $a$ , punta all'esterno ed all'altro estremo,  $b$ , all'interno quindi per la definizione 16 di pagina 20 ( $F$  sui punti della frontiera di  $A \subseteq M$  è  $f$ )  $\text{segno}(df_a) = +1$ ,  $\text{segno}(df_b) = -1$  quindi  $\text{segno}(df_a) + \text{segno}(df_b) = 0$  allora poichè  $F$  è  $f$  sulla frontiera  $M$  e  $y$  è regolare, per ipotesi, oltre che per  $f$  anche per  $F$  si ha, ragionando sui punti  $x$  di  $M$ , della frontiera di  $M'$ , e sommando su tutti gli archetti  $A_i$  che compongono  $F^{-1}(y)$  (con  $i \in I$  e  $I$  di cardinalità finita), che:

$$\begin{aligned} \deg(f, y) &= \sum_{x \in F^{-1}(y)} \text{segno } df_x = \sum_{x \in \bigcup_{\{A_i \subseteq F^{-1}(y), i \in I\}} A_i \cap M} \text{segno } df_x = \\ &= \sum_{x \in \bigcup_{\{A_i \subseteq F^{-1}(y), i \in I\}} \partial A_i} \text{segno } df_x = \sum_{\{i \in I \mid A_i \subseteq F^{-1}(y)\}} \sum_{x = \{a_i, b_i\} = \partial A_i} \text{segno } df_x \end{aligned}$$

e per quanto visto sopra ogni addendo della somma è 0 quindi l'intera somma è 0 e si ha  $\deg(f, y) = 0$ .

**y regolare per  $f$ , ma non per  $F$**  allora  $\deg(f, y)$  è costante in un intorno  $U$  di  $y$  infatti in un intorno del punto il determinante del differenziale, che è non nullo in un punto, rimane positivo o negativo perchè essendo il determinante continuo se cambiasse segno si annullerebbe nell'intorno mentre per il teorema della funzione inversa sappiamo che se il differenziale è non nullo localmente esiste un intorno in cui la funzione è un diffeomorfismo e quindi il suo differenziale è diverso da 0; per l'intero ragionamento vedi l'osservazione 2.2.0.6 di pagina 21. Per quanto detto possiamo in tale

intorno scegliere un valore regolare  $y'$  anche per  $F$  (infatti anche per  $F$  vale il teorema di Sard e quindi l'immagine dei punti critici ha misura nulla e l'insieme dei valori regolari è denso) e lì, essendo la funzione grado localmente costante e valendo le ipotesi del punto sopra :

$$\deg(f, y) = \deg(f, y') = \deg(F, y') = 0$$

□

Per un ragionamento analitico in ogni dettaglio della prova di questo fatto vedi [VIII].

**Lemma 3.** *Sia  $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$  omotopia liscia fra  $f(x) = F(x, 0)$  e  $g(x) = F(x, 1)$ , allora  $\forall y \in N$  valore regolare per  $f$  e  $g$   $\deg(f, y) = \deg(g, y)$ .*

*Dimostrazione.* La varietà  $(M^n \times [0, 1]) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  si può orientare come prodotto ed avrà come frontiera  $M^n \times \{0\}$  e  $M^n \times \{1\}$ , il primo con orientazione negativa, il secondo positiva allora, poichè  $F$  ristretta rispettivamente a  $(M^n \times \{0\})$  e  $(M^n \times \{1\})$  sarà  $f$  e  $g$  (ovvero vedremo tali funzioni come restrizioni di una funzione più generale e con tali valori al bordo), il grado per un valore regolare  $y$  sarà  $\deg(F(x, 1), y) - \deg(F(x, 0), y)$  ovvero  $\deg(g(x), y) - \deg(f(x), y)$  (in cui abbiamo specificato  $x$  come argomento quindi rispettivamente  $g(x)$  e  $f(x)$  sono proprio le funzioni e non i valori in  $x$  di esse) infatti:

$$\begin{aligned} \deg(F, y) &= \sum_{x \in F^{-1}(y)} \text{segno } dF_x = \sum_{x \in F^{-1}(y) \cap \partial(M^n \times [0, 1])} \text{segno } dF_x = \\ &= \sum_{x \in (F^{-1}(y) \cap ((M^n \times \{0\}) \cup (M^n \times \{1\})))} \text{segno } dF_x = \\ &= \sum_{x \in ((F^{-1}(y) \cap (M^n \times \{0\})) \cup (F^{-1}(y) \cap (M^n \times \{1\})))} \text{segno } dF_x = \\ &= \sum_{x \in g^{-1}(y)} \text{segno } dg_x - \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{segno } df_x = \deg(g(x), y) - \deg(f(x), y) \end{aligned}$$

applicando il lemma 2 sopra con  $M^n \times [0, 1] = M'$ ,  $\partial(M^n \times [0, 1]) = (M^n \times \{0\}) \cup (M^n \times \{1\}) = M = \partial M'$  e  $F$  funzione liscia, si ha che la differenza fra i gradi di  $f$  e  $g$  è 0 (essendo  $y$  regolare per  $f$  e  $g$  e quindi, nei bordi, anche per  $F$  che coincide con esse):  $0 = \deg(F, y) = \sum_{x \in F^{-1}(y)} dF_x = \sum_{x \in F_1^{-1}(y)} \text{sgn}(dF_1(y)) - \sum_{x \in F_0^{-1}(y)} \text{sgn}(dF_0(y)) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} \text{sgn}(dg_x) - \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn}(df_x) = \deg(g(x), y) - \deg(f(x), y)$ . □

**Osservazione 2.2.0.7.** *Ragionando su  $TM_x$  di dimensione  $m$  l'identità  $d(\text{id}(x))_x = \text{id}(x)$  (con  $x$  a pedice un punto fissato di  $M$  ed  $x$  come argomento generica variabile nel dominio  $M$ ) conserva l'orientazione ovvero porta una base positiva di  $\mathbb{R}^m$  in una positiva di  $TM_x$  (in realtà la matrice di cambiamento di base è proprio la matrice identità), con la famiglia di diffeomorfismi  $H(x, t)$  si ha che*



una base  $v$  in una base essendo  $d(H(x, t))_x$  isomorfismo e quindi il determinante della matrice dei coefficienti  $a_{i,j}$  di una base  $(v_1, \dots, v_m)$  rispetto all'altra  $(v'_1, \dots, v'_m)$  tali che  $v'_i = \sum_{j=1}^m a_{i,j} v_j$  non si annulla ovvero  $\det((a_{i,j})_{i,j}) \neq 0$  quindi partendo dall'identità che ha tale determinante uguale ad  $1 > 0$  e variando in tale famiglia di funzioni in cui il determinante dei coefficienti non si annulla si arriva pure ad una funzione il cui determinante sarà  $> 0$  (ragionando con funzioni continue, per il teorema degli zeri, se ci fosse una variazione di segno vi sarebbe anche uno zero cosa che non è); in particolare  $h$  isotopa all'identità conserverà l'orientazione essendo ciò valido per l'identità.

Infine per arrivare al teorema 6 :  $y, z$  valori regolari per  $f : M \rightarrow N$  per il lemma 1 di pagina 16 esiste un diffeomorfismo  $h : N \rightarrow N$  che porta  $y$  in  $z$  ed isotopo all'identità, allora  $\exists H : M \times [0, 1] \rightarrow N$  tale che  $H(x, 0) = h(x)$  e  $H(x, 1) = id(x)$  inoltre  $h$  così definita preserva l'orientazione, per come visto nell'osservazione sopra, ed è iniettiva essendo un diffeomorfismo;  $h(x)$  è omotopa ad  $id(x)$ , allora  $h \circ f$  è omotopa a  $id \circ f = f$  (vedi l'osservazione 2.1.0.3 a pagina 15), per definizione di grado

$$\begin{aligned} \deg(h \circ f, h(y)) &= \sum_{x \in (h \circ f)^{-1}(h(y))} \text{segno } d(h \circ f)_x = \\ &= \sum_{x \in (f^{-1} \circ h^{-1})(h(y))} \text{segno } d(h)_{f(x)} df_x = \sum_{x \in (f^{-1})(y)} \text{segno } d(h)_{f(x)} df_x \end{aligned}$$

e poichè abbiamo che  $h$  conserva l'orientazione il segno di  $d(h)_{f(x)}$  vale  $+1$  e quindi il termine di destra sopra (essendo il segno del prodotto il prodotto dei segni il che si vede sui determinanti: per  $A, B$  matrici vale  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ ) è uguale a  $\sum_{x \in (f^{-1})(y)} \text{segno } df_x = \deg(f, y)$  inoltre per il lemma 3 appena sopra (avendo che ogni valore regolare per  $f$  lo è anche per  $h$  essendo un diffeomorfismo infatti il determinante di  $dh$  non si annulla su alcun  $f(x)$  e quindi se  $df_x$  ha determinante non nullo in un punto tale è anche  $d(h \circ f)_x$ )  $\deg(h \circ f, z) = \deg(f, z)$  allora per  $z = h(y)$  si ha che

$$\deg(f, y) = \deg(h \circ f, h(y)) = \deg(h \circ f, z) = \deg(f, z)$$

ovvero abbiamo provato l'analogo del teorema 5 di pagina 18:

**Teorema 6.** *L'intero  $\deg(f, y)$  non dipende dalla scelta del valore regolare  $y$ .*

Inoltre per conseguenza del lemma 3 di pagina 24 abbiamo che il grado è costante sulle classi di omotopia ovvero vale anche l'analogo del teorema 4 di pagina 16 (senza specificare il valore regolare in cui calcolo il grado come conseguenza del teorema 6 appena sopra):

**Teorema 7.**  *$f$  omotopa (in modo liscio) a  $g$  allora  $\deg(f) = \deg(g)$ .*

**Osservazione 2.2.0.8.** *Da qui abbiamo, ad esempio, come conseguenza che un diffeomorfismo che inverte l'orientazione, la cui base associata ha orientazione*

opposta rispetto ad una base fissata, ovvero ha grado  $-1$ , per il lemma 3 non può esser omotopa all'identità che ha grado  $1$ . Perchè vari l'orientazione sappiamo che è sufficiente che il determinante del cambio di base, fra la base canonica dello spazio euclideo associato e lo spazio tangente, abbia determinante minore di  $0$  quindi un esempio è dato dall'inversione di una coordinata sulla sfera  $S^n$ , ovvero una coordinata  $i$ -esima va nella sua opposta, la diremo riflessione rispetto alla  $i$ -esima coordinata  $r_i : (x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}) \rightarrow (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_{n+1})$  con  $i=1, \dots, n+1$ , un caso particolare è dato dalla mappa antipodale sulla sfera  $S^n$  che è la composizione  $r_1 \circ r_2 \circ \dots \circ r_{n+1}$  e manda  $x$  in  $-x$ , e poichè manda ogni vettore della base canonica nel suo opposto si ha che la matrice dei coefficienti di cambio di base ha  $n+1$   $-1$  sulla diagonale e quindi per le proprietà del determinante si ha che il determinante di tale matrice è  $(-1)^{(n+1)}$  volte il determinante dell'unità che è  $1$ : in modo analitico ponendo mappa antipodale  $= r$  con  $y = r(x) = -x : \deg(r, y) = \sum_{x \in r^{-1}(y)} \text{segno } dr(x) = \sum_{x \in \{-x\}} \text{segno } dr(x) = \sum_{x=-x} \text{segno } dr(x)$  ovvero ho una somma su un solo punto ed il determinante della matrice di cambio di base è indipendente dal punto ed è  $(-1)^{n+1}$  essen-

do la matrice 
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix};$$
 nel caso di  $r_i$  un solo degli elementi sulla

diagonale, l' $i$ -esimo, è  $-1$  e quindi il grado è proprio  $-1$ . Si ha quindi che per  $n$  pari avendo la mappa grado  $-1$  tale mappa antipodale non può esser omotopa all'identità cosa che invece accade per  $n$  dispari infatti alla fine del capitolo vedremo, l'opposto del teorema 7 di pagina 25 visto in questa sezione, ovvero che se due mappe hanno uguale grado sono omotope (risultato non ottenibile, fino ad ora, ma pur valido sotto le dovute ipotesi, per varietà non orientabili, anche con il grado modulo 2).

Anticipiamo qui una nozione importante che rivedremo in seguito :

**Definizione 18** (campo di vettori). Un **campo** (liscio) **di vettori** tangenti a  $M \subseteq R^m$  di dimensione  $k$ , è una mappa (liscia)  $v : M \rightarrow R^m$  tale che  $\forall x \in M$   $v(x) \in TM_x = R^k$  (anche l'insieme delle immagini spesso si dirà definire un campo sull'insieme  $M$ ). Analoga definizione si dà ragionando localmente nell'intorno di  $x$  ovvero  $v(x)$  è una mappa da  $U$  intorno di  $x \in M$  a  $TM_x$  e questo è il modo di vedere che è una mappa liscia ovvero ragionando localmente nel caso euclideo.

Per una buona definizione di tale nozione vedi p.8 di [IV].

**Esempio 4.** Per  $S^n \subseteq R^{n+1}$   $v(x)$  è tangente e  $x$  è radiale quindi, usando il prodotto scalare di  $R^{n+1}$ ,  $v(x) \bullet x = 0$  inoltre se  $\forall x \in M$   $v(x) \neq 0$  possiamo normalizzarlo in modo che  $v(x) \bullet v(x) = 1 \forall x \in M$  quindi senza perdita di generalità il campo lo penseremo, con abuso di notazione, come  $v(x) := \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$  ovvero come funzione da  $S^n$  in sè (questo ci condurrà ad introdurre la mappa di Gauss).

**Osservazione 2.2.0.9** (palla pelosa). *Proviamo che su  $S^n \subseteq R^{n+1}$  esiste un campo di vettori (tangente) liscio e non nullo se e solo se  $n$  è dispari:*

$\Rightarrow$  sia  $F : S^n \times [0, \pi] \rightarrow S^n$  un omotopia con  $F(x, \theta) = x \cos(\theta) + v(x) \sin(\theta)$ , si ha che  $F(x, \theta) \bullet F(x, \theta) = \|x\|^2 \cos^2(\theta) + \|v(x)\|^2 \sin^2(\theta) + 2v(x) \bullet x \cos(\theta) \sin(\theta)$  ma  $x \bullet v(x) = 0$  e  $\|v(x)\| = 1$  per definizione e  $\|x\| = 1$  essendo sulla sfera unitaria quindi  $F(x, \theta) \bullet F(x, \theta) = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) + 0 = 1$  ovvero effettivamente  $F$  ha come codominio  $S^n$  e  $F(x, 0) = x + 0 = x$  e  $F(x, \pi) = -x + 0 = -x$  quindi ho che l'identità di  $S^n$  è omotopa alla mappa antipodale ma per  $n$  pari ciò era impossibile per l'osservazione 2.2.0.8 vista sopra, mentre per  $n$  dispari questa è una vera omotopia, che può esistere (ed effettivamente esisterà per il teorema finale del capitolo), e si ha che  $x \bullet F(x, \theta) = \|x\|^2 \cos(\theta) + x \bullet v(x) \sin(\theta) = \cos(\theta) + 0 = \cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \pi/2$  quindi, per un certo  $\theta$  fissato, ho trovato un campo non nullo e tangente (perpendicolare ad  $x$  che è radiale) che, in realtà sostituendo, è proprio la funzione  $v(x)$  che in ogni punto dà il vettore tangente alla sfera, ma ciò per sopra vale solo per  $n$  dispari.

$\Leftarrow$  se  $n$  è dispari  $= 2k-1$ ,  $S^n = S^{2k-1}$  è in  $R^{n+1} = R^{2k}$  ovvero in uno spazio euclideo di dimensione pari, allora

$$v(x_1, \dots, x_{2k}) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \dots, x_{2k}, -x_{2k-1})$$

è un campo vettoriale non nullo e tangente in ogni punto a  $S^n$  infatti  $x \bullet v(x) = 0 \forall x \in S^n$ .

Per un'altra tipologia di argomento vedi[VII].

## 2.3 Cobordismo

Il grado di una mappa  $f : M \rightarrow N$  lo abbiamo definito nel caso di  $\dim M = \dim M' = m$  qui si avrà un generalizzazione di tale concetto per  $f : M \rightarrow S^p$  con  $M$  varietà compatta, senza frontiera ( $\partial M = \emptyset$ ). Siano  $N, N'$  varietà compatte  $n$ -dimensionali sottovarietà di  $M$  (quindi  $\partial N, \partial N' \subseteq \partial M = \emptyset$  ovvero  $\partial N, \partial N' = \emptyset$ ) diremo l'intero  $m - n$  codimensione delle due varietà rispetto alla varietà  $M$ .

**Definizione 19** (cobordismo).  $N$  è **cobordante** con  $N'$  in  $M$  se esiste  $\epsilon$  positivo tale che  $(N \times [0, \epsilon] \cup N' \times [1 - \epsilon, 1]) \subseteq M \times [0, 1]$  si può estendere ad una varietà compatta  $M' \subseteq M \times [0, 1]$  tale che  $\partial M' = N \times \{0\} \cup N' \times \{1\}$  e tale che  $M' \cap (M \times \{0\} \cup M \times \{1\}) = \partial M'$  ovvero non interseca la frontiera ( $M \times \{0\} \cup M \times \{1\}$ ) dell'insieme che lo contiene  $M \times [0, 1]$  in altri punti oltre a quelli della sua frontiera; ovvero si può costruire dati  $N$  e  $N'$  come "lati" una varietà, contenuta in  $M \times [0, 1]$ , che ha queste due varietà come unici "lati" ed interseca i bordi di  $M \times [0, 1]$  solo in tali "lati" assegnati: un cobordismo sarà  $(M', N, N')$  se il bordo di  $M'$  è unione disgiunta di  $N$  e  $N'$  ovvero  $\partial M' = N \sqcup N'$ .

**Teorema 8** (cobordismo come relazione di equivalenza).  $L'$  "esser cobordanti" è una relazione di equivalenza nell'insieme delle sottovarietà di uguale dimensione di una varietà fissata.

*Dimostrazione.* Infatti è una relazione:

**riflessiva**  $N$  è cobordante con sè stesso ponendo  $M' = N \times [0, 1]$  che ha come "lati" proprio  $N$  ed  $N$ ;

**simmetrica** se  $M'$  collega  $N$  ad  $N'$  ovvero  $(N \times [0, \epsilon] \cup N' \times [1 - \epsilon, 1]) \subseteq M'$  allora traslando la parametrizzazione, ovvero percorrendola in senso inverso, si ha che  $M''$  collega  $N'$  ad  $N$  con  $(N' \times [0, \epsilon] \cup N \times [1 - \epsilon, 1]) \subseteq M''$ ;

**transitiva** se  $M'$  varietà compatta collega  $N$  ad  $N'$  ovvero  $(N \times [0, \epsilon] \cup N' \times [1 - \epsilon, 1]) \subseteq M'$  e se  $M''$  varietà compatta collega  $N'$  ad  $N''$  ovvero, a meno di traslazioni del parametro,  $(N' \times [1, 1 + \epsilon] \cup N'' \times [2 - \epsilon, 2]) \subseteq M''$  usando che unione di compatti è compatta si ha che  $M' \cup M''$  collega  $N$  ad  $N''$  e riparametrizzando in modo opportuno, a doppia velocità ovvero rispettivamente  $[0, \epsilon/2]$ ,  $[(1 - \epsilon)/2, 1/2]$ ,  $[1/2, (1 + \epsilon)/2]$  e  $[(2 - \epsilon)/2, 2/2]$ , così che si stia nell'intervallo  $[0, 1]$ , si ha che  $(N \times [0, \epsilon] \cup N'' \times [1 - \epsilon, 1]) \subseteq (M' \cup M'')$ .

□

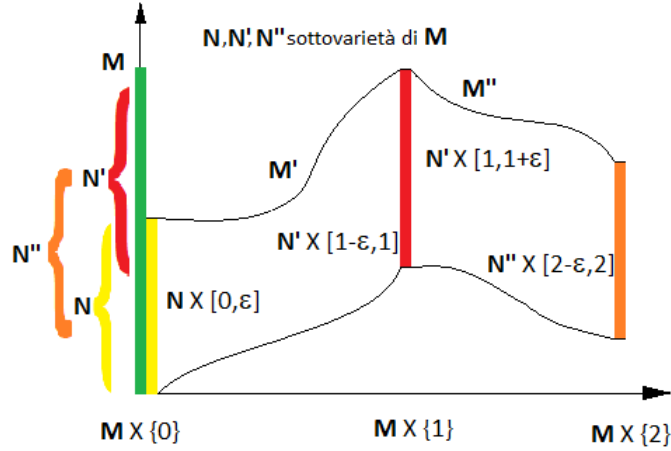


Figura 2.3: il cobordismo come relazione di equivalenza

**Definizione 20** (cobordismo con cornice). Una "inquadratura" di una sottovarietà  $N \subseteq M$  è una funzione liscia che assegna ad ogni punto della varietà una base dello spazio perpendicolare al tangente alla sottovarietà ( $N^\perp$  ovvero il perpendicolare di  $N$  rispetto all'insieme  $M$ ) nel punto  $(x)$ , ovvero ho un'associazione  $\varsigma$  fra  $x \in N$  ed una base dello spazio  $TN_x^\perp \subseteq TM_x$   $\varsigma(x) = v_1(x), \dots, v_{m-n}(x)$ ; la coppia  $(N, \varsigma)$  si dice una sottovarietà inquadrata di  $M$ . Due sottovarietà inquadrate  $(N, \varsigma)$  e  $(N', \varsigma')$  con  $\varsigma(x)$  come sopra e  $\varsigma'(x) = w_1(x), \dots, w_{m-n}(x)$  sono **inquadrate cobordanti** o **cobordanti con**

**cornice** se esiste un **cobordismo**  $M' \subseteq M \times [0, 1]$  fra  $N$  e  $N'$  ed una "cornice"  $\zeta$  di  $M'$  tale che 
$$\begin{cases} u_i(x, t) = (v_i(x), 0) & \text{per } (x, t) \in N \times [0, \epsilon) \\ u_i(x, t) = (w_i(x), 0) & \text{per } (x, t) \in N' \times (1 - \epsilon, 1] \end{cases}$$
 per  $i=1, \dots, m-n$  e  $\zeta = (u_1, \dots, u_{m-n})$  ovvero i vettori perpendicolari agli spazi tangenti a  $M'$  nei bordi rispettivamente nell'intorno di  $M \times \{0\}$  ( $M \times [0, \epsilon)$ ) e nell'intorno di  $M \times \{1\}$  ( $M \times (1 - \epsilon, 1]$ ) sono quelli di  $N$  e  $N'$ ; ovvero abbiamo una incorniciatura dell'insieme che ha bordi assegnati e che in tali bordi ha lo stesso spazio perpendicolare ai tangenti dei bordi stessi ovvero la stessa cornice.

**Teorema 9** (cobordismo con cornice come relazione di equivalenza). *L' "esser inquadrate cobordanti con cornice" è una relazione di equivalenza nell'insieme delle sottovarietà di uguale dimensione di una varietà fissata.*

*Dimostrazione.* Tale relazione è:

**riflessiva**  $N \times [0, 1]$  ha come bordi  $N$  e  $N$  ovvero è un cobordismo fra  $N$  e se stesso e ha la stessa base di vettori perpendicolare al piano tangente nei due bordi;

**simmetrica** dati  $(N, \zeta)$  e  $(N', \zeta')$  inquadrate e cobordanti tramite  $M'$  e  $\zeta$  come nella definizione sopra allora per la simmetria del cobordismo semplice anche  $N'$  e  $N$  sono cobordanti sempre tramite  $M'$  a meno di traslazione nell'intervallo ( $M'$  connette  $N'$  con  $N$  ovvero  $(N' \times [0, \epsilon] \cup N \times [1 - \epsilon, 1]) \subseteq M'$ ) e dati  $\zeta(x) = v_1(x), \dots, v_{m-n}(x)$  e  $\zeta'(x) = w_1(x), \dots, w_{m-n}(x)$  la cornice  $\zeta' = (u'_1, \dots, u'_{m-n})$  definita in modo analogo

$$\begin{cases} u_i(x, t) = (w_i(x), 0) & \text{per } (x, t) \in N' \times [0, \epsilon) \\ u_i(x, t) = (v_i(x), 0) & \text{per } (x, t) \in N \times (1 - \epsilon, 1] \end{cases}$$
 è una inquadrate che verifica le richieste;

**transitiva** siano  $(N, \zeta)$  e  $(N', \zeta')$  inquadrate e cobordanti e  $(N', \zeta')$  e  $(N'', \zeta'')$  inquadrate e cobordanti sappiamo che il cobordismo semplice è transitivo quindi esiste un insieme  $M' \cup M''$  che connette  $N$  ad  $N''$  inoltre avendo le cornici  $\zeta = (u_1, \dots, u_{m-n})$  e  $\zeta' = (u'_1, \dots, u'_{m-n})$  con  $\zeta(x) = v_1(x), \dots, v_{m-n}(x)$  e  $\zeta(x)' = w_1(x), \dots, w_{m-n}(x)$  e  $\zeta(x)'' = z_1(x), \dots, z_{m-n}(x)$

si ha, traslando i parametri 
$$\begin{cases} u_i(x, t) = (v_i(x), 0) & \text{per } (x, t) \in N \times [0, \epsilon) \\ u_i(x, t) = (w_i(x), 0) & \text{per } (x, t) \in N' \times (1 - \epsilon, 1] \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'_i(x, t) = (w_i(x), 0) & \text{per } (x, t) \in N' \times [1, 1 + \epsilon) \\ u'_i(x, t) = (z_i(x), 0) & \text{per } (x, t) \in N'' \times (2 - \epsilon, 2] \end{cases}$$
 e quindi percorrendo a

velocità doppia il tutto ottengo  $\zeta'' = \omega_1(x), \dots, \omega_{m-n}(x)$  tale che

$$\begin{cases} \omega_i(x, t) = (v_i(x), 0) & \text{per } (x, t) \in N \times [0, \epsilon) \\ \omega_i(x, t) = (z_i(x), 0) & \text{per } (x, t) \in N'' \times (1 - \epsilon, 1] \end{cases}$$

□

**Osservazione 2.3.0.1.** *Poichè questa è una relazione di equivalenza, analogamente a quanto accade per il cobordismo semplice, possiamo identificare sottovarietà di  $M$  che possono esser connesse con una varietà con bordo, incorniciata,*

inclusa in  $M \times [0, 1]$  e con bordo le due varietà date ovvero connesso due varietà con una varietà inclusa in un insieme e con estremi assegnati (analogamente al cobordismo semplice) in modo però che anche le orientazioni nei due bordi siano coerenti alle orientazioni dei "lati" assegnati.

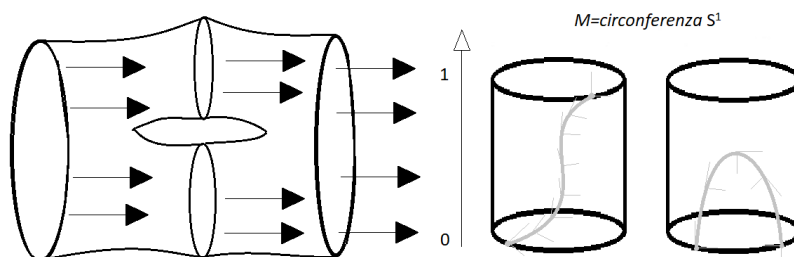


Figura 2.4: il cobordismo con cornice come relazione di equivalenza, il trasposto parallelo ed il cobordismo fra punti con orientazione opposta.

**Osservazione 2.3.0.2.** Una base positiva è tale che la matrice di cambiamento di base rispetto ad una base assunta positiva, ad esempio la base canonica di  $\mathbb{R}^n$ , abbia determinante positivo; da notare che essendo i cambiamenti di base, diffeomorfismi (il cui differenziale sono isomorfismi), il loro determinante, che è una funzione continua, se cambia segno ovvero passa da positivo a negativo allora deve avere uno zero il che è assurdo avendo come cambio di base solo diffeomorfismi (i cui differenziali sono isomorfismi) che hanno sempre determinante non nullo quindi partendo da una base in una delle due classi positiva o negativa di orientazione rispetto ad una base assunta come positiva, tramite diffeomorfismi non posso variare di classe in modo continuo ovvero ho due componenti sconnesse, all'interno della classe dei diffeomorfismi, come vedremo dopo nel corso della dimostrazione del lemma 4 di pagina 32 sfruttando il risultato richiamato nell'osservazione 1.3.0.3 a pagina 11.

**Definizione 21** (varietà di Pontryagin). Sia  $f : M \rightarrow S^p$  con  $y \in S^p$  valore regolare ovvero  $f(y)^{-1}$  contiene solo punti  $x$  regolari ovvero tali che  $df_x$  ha determinante non nullo allora  $f$  induce una inquadatura della varietà  $f(y)^{-1}$ : scegliendo una base orientata positivamente, per come chiarito appena sopra,  $\varsigma = (v_1, \dots, v_p)$  (che non è una cornice) dello spazio tangente  $T(S^p)_y$ , che ha dimensione  $p$ , per definizione  $\forall x \in f(y)^{-1} df_x : TM_x \rightarrow T(S^p)_y$ , per quanto provato nell'osservazione 1.3.0.2 del primo capitolo,  $T(f(y)^{-1})_x$  va in  $0$  e tramite un isomorfismo  $(T(f(y)^{-1})_x)^\perp$  va in  $T(S^p)_y$  quindi esiste un unico vettore, dipendente unicamente dal punto  $x \in (f(y)^{-1})$  ovvero che dipende da  $y$ ,  $w_i \in (T(f(y)^{-1})_x)^\perp \subseteq TM_x$  che va in  $v_i \in S^p$  attraverso la mappa biettiva  $df_x$ , abbiamo così una base (infatti un isomorfismo ovvero un'applicazione biettiva lineare manda basi in basi) dello spazio  $(T(f(y)^{-1})_x)^\perp$ , derivante dalla base dell'immagine, che, per il risultato già citato nell'osservazione 1.3.0.2 a pagina 10, ha proprio dimensione  $p$ , la dimensione di  $S^p$ , ovvero una cornice di  $f(y)^{-1}$

composta dai vettori  $w_1, \dots, w_p$ , (che dipendono da  $x$  ovvero  $w_1(x), \dots, w_p(x)$  e tale dipendenza è liscia essendo tale quella di  $df_x$  da  $x$ ), e la indicheremo con  $\xi = f^*\zeta$  (che può fare ricordare che come  $df_x$  manda  $(T(f(y)^{-1})_x)^\perp$  in  $T(S^p)_y$  così  $f^*$  manda una base di  $T(S^p)_y$  in una base di  $(T(f(y)^{-1})_x)^\perp$ ) diremo la varietà incorniciata  $(f(y)^{-1}, f^*\zeta)$ .

Sapendo che  $f(y)^{-1}$  è una varietà di dimensione  $m-p$ , varietà di Pontryagin associata ad  $f$ , questo avendo fissati  $f$ ,  $y$  e  $\zeta$  e facendo variare  $x$  in funzione del quale abbiamo determinato una base  $w_1(x), \dots, w_p(x)$ ; sempre considerando la stessa mappa  $f : M \rightarrow S^p$  avremo diverse varietà di Pontryagin associate a diversi valori regolari  $y$  mentre variando sui punti regolari  $x$  non cambio la varietà ma cambio solo localmente la base degli spazi  $(T(f(y)^{-1})_x)^\perp$  composta dai  $w_1(x), \dots, w_p(x)$  e così anche variando la base  $\zeta$  otterrò diverse varietà di Pontryagin però vale che tutte queste varietà incorniciate (in cui è fissata la funzione  $f$  e varia il valore regolare  $y$  e la base  $\zeta$ ) appartengono tutte ad una stessa classe di cobordismo incorniciato ovvero vale:

**Teorema 10.** *Siano  $y, y'$  valori regolari di  $f : M \rightarrow S^p$  e  $\zeta, \zeta'$  due basi positivamente orientate di  $T(S^p)_y$  allora  $(f(y)^{-1}, f^*\zeta)$  e  $(f(y')^{-1}, f^*\zeta')$  sono inquadrato e cobordanti.*

Vale che questa costruzione in realtà è anche ben definita semplicemente indicando la classe di omotopia liscia della funzione  $f$  e considerando le classi di cobordismo incorniciato ed essendo entrambe le relazione (l'esser omotope e l'esser cobordanti con cornice) di equivalenza ottengo:

**Teorema 11.** *Due mappe  $f, f' : M \rightarrow S^p$  sono omotope (in modo liscio) se e solo se le varietà di Pontryagin associate sono inquadrato e cobordanti. Ovvero ho una corrispondenza 1-1 sulle rispettive classi di equivalenza: due funzioni appartengono alla stessa classe di omotopia (liscia) se e solo se le rispettive varietà di Pontryagin appartengono alla stessa classe di cobordismo (inquadrato).*

Per funzioni a valori nella sfera vi è associazione univoca fra preimmagini con il cobordismo ed omotopia delle funzioni ovvero si identificano le preimmagini con il cobordismo incorniciato e le funzioni con l'omotopia e ad ogni classe di omotopia si associa una sola varietà, quella di Pontryagin e viceversa; inoltre quanto sopra (il fatto che il punto  $y$  nel passaggio alle classi di equivalenza non sia determinante) è coerente con il teorema 7 di pagina 25 per cui due funzioni omotope hanno anche uguale grado (ma non viceversa) e ciò non dipende dal valore regolare  $y$  infatti per il secondo teorema avremo che due funzioni omotope hanno associate due varietà di Pontryagin equivalenti che per il primo teorema non dipendono dal punto  $y$  per cui abbiamo che avere uguale grado non è equivalente ad avere varietà di Pontryagin cobordanti però abbiamo che se due funzioni originano due varietà di Pontryagin cobordanti di certo per il secondo teorema di sopra le funzioni hanno anche stesso grado e se l'esser cobordanti fra tali varietà non fosse indipendente dal valore regolare si rischierebbe di non avere uguaglianza di grado contro l'ipotesi di omotopia; in realtà vedremo proprio che l'ingrediente che mancava per invertire l'implicazione (funzioni omotope allora hanno uguale grado) era il cobordismo con cornice e le varietà di Pontryagin.

**Teorema 12.** *Ogni sottovarietà  $N \subseteq M$  con  $M$  di dimensione  $m$  incorniciata compatta  $(N, \xi)$  di codimensione  $p$ , ovvero di dimensione  $m - p$ , è la varietà di Pontryagin di una qualche mappa liscia  $f : M \rightarrow S^p$  ovvero è una  $(f(y)^{-1}, f^*\zeta)$ .*

Ovvero abbiamo una corrispondenza anche fra varietà incorniciate cobordanti generiche e varietà di Pontryagin infatti queste ultime sono per definizione esempi di varietà incorniciate cobordanti ma per il teorema appena sopra tutte le varietà cobordanti con cornice si generano così, in particolare per ogni dimensione  $m$ ,  $p$  possiamo avere dei rappresentanti delle classi di cobordismo usando delle varietà di Pontryagin e viceversa avendo per ogni dimensione delle varietà cobordanti inquadrate, delle dimensioni opportune, (essendo le definizioni valide per ogni caso) le varietà di Pontryagin associate che sono particolari varietà cobordanti.

Proviamo che le varietà di Pontryagin non dipendono dalla base scelta  $\zeta$  e  $\zeta'$ :

**Lemma 4.** *Fissata  $f : M \rightarrow S^p$   $\zeta$  e  $\zeta'$  due basi positivamente orientate di  $T(S^p)$  nel punto  $y$  allora le varietà di Pontryagin  $(f(y)^{-1}, f^*\zeta)$  e  $(f(y)^{-1}, f^*\zeta')$  sono cobordanti ed inquadrate.*

*Dimostrazione.* Scelgo un "cammino" liscio (R) fra  $\zeta = (v_1, \dots, v_p)$  e  $\zeta' = (v'_1, \dots, v'_p)$  (visti come punti) nello spazio di tutte le basi positive di  $T(S^p)_y$ , ciò è lecito poichè si può identificare lo spazio delle basi positive con lo spazio delle matrici invertibili di dimensione  $p$  a determinante positivo ad esempio fissando una base positiva (b) e mandando ogni base (B) nella matrice di cambiamento di base rispetto alla base scelta (b) ovvero nella matrice di cambiamento di base fra B e b (in realtà noi considereremo la matrice di cambiamento di base fra B e b, basi positive) e lo spazio delle matrici a determinante positivo è connesso, per quanto detto nell'osservazione 1.3.0.3 del capitolo 1, per il cammino in  $GL_p^+$  (ovvero le matrici invertibili con determinante positivo) considero il polinomio a coefficienti reali non nullo  $P$ , allora il luogo degli zeri è discreto essendo finito ed al massimo ha cardinalità uguale al grado del polinomio quindi l'insieme dove non si annulla è denso nell'insieme dei numeri complessi, in particolare prenderò un cammino connesso (per archi essendo lui stesso l'arco), senza zeri, che esiste perchè gli zeri sono discreti, che prese A ed I rispettivamente una matrice a determinante positivo di ordine  $p$  e la matrice identità di ordine  $p$ , le connette:  $P(t) = \det(A + t(I - A))$  tale che  $P(0) = \det(A) > 0$  e  $P(1) = \det(I) = 1 > 0$  ed è infinitamente derivabile ed una curva  $\gamma(t)$  da  $[0, 1]$  a valori in  $C$  tal che  $\gamma(0) = 0$  e  $\gamma(1) = 1$  e  $P(\gamma(t)) \neq 0 \forall t \in [0, 1]$  continua e derivabile ovvero il supporto di  $\gamma$  non contiene gli zeri del polinomio, allora prendendo, con C e D in  $GL_p^+$  ovvero tale che esista  $D^{-1}$ ,  $A = D^{-1}C$   $P'(t) = A + \gamma(t)(I - A) = D^{-1}C + \gamma(t)(I - D^{-1}C)$  e moltiplicando a sinistra per D ottengo  $P(t)'' = C + \gamma(t)(D - C)$  che vale C e D rispettivamente per  $\gamma(t) = 0$  e  $\gamma(t) = 1$  ovvero esplicitando le matrici  $P(t)''_{C,D} = C + \gamma(t)(D - C)$ . Quindi abbiamo una inquadatura del cobordismo  $f(y)^{-1} \times [0, 1]$  ovvero abbiamo un cobordismo inquadrate fra le due sottovarietà  $(f(y)^{-1}, f^*\zeta)$  e  $(f(y)^{-1}, f^*\zeta')$  infatti il cobordismo fra  $f(y)^{-1}$  e  $f(y)^{-1}$  è noto per definizione ed è dato da  $f(y)^{-1} \times [0, 1]$  inoltre il cammino (R) costruito porta la base  $\zeta$  nella base  $\zeta'$



ovvero pensando all'immagine per ogni punto del cammino (R) da  $[0, 1]$  nello spazio delle basi positive come alla base  $(u_1(x, t), \dots, u_p(x, t))$  con  $x \in f(y)^{-1}$  e  $t$  che varia con continuità. Analiticamente abbiamo che, fissato  $x \in f(y)^{-1}$ , R porta ogni base  $(b_0)$  in ogni altra base  $(b_1)$  usando  $P''$  che porta ogni matrice  $(B_0)$  in ogni altra matrice  $(B_1)$  e vedendo queste come matrici di cambiamento di base rispetto ad una base fissata, entrambi hanno come dominio  $[0, 1]$  ovvero  $R(t)_{b_0, b_1} = P''(t)_{B_0, B_1}$  con  $t \in [0, 1]$  e  $B_0, B_1$  matrici corrispondenti rispettivamente a  $b_0, b_1$  fissata una base  $b$ , allora avremo che  $R(t)_{b_0, b_1} = (u_1(t), \dots, u_p(t))$  e quindi per definizione di  $R(t)_{b_0, b_1}$  si avrà, facendo ora anche variare  $x$  in  $f(y)^{-1}$ ,  $R(x, t)_{b_0(x), b_1(x)} = (u_1(x, t), \dots, u_p(x, t))$  che per costruzione soddisfa le ipotesi ponendo:

$$b_0(x) = \varsigma, \quad b_1(x) = \zeta' \begin{cases} u_i(x, t) = (v_i(x), 0) & \text{per } (x, t) \in f(y)^{-1} \times [0, \epsilon) \\ u_i(x, t) = (v'_i(x), 0) & \text{per } (x, t) \in f(y)^{-1} \times (1 - \epsilon, 1] \end{cases} \quad \text{e}$$

l'inquadratura che renderà il tutto cobordante ed inquadrato sarà proprio  $\zeta = (u_1(x, t), \dots, u_p(x, t))$ .  $\square$

Allora non sarà ambiguo parlare di varietà inquadrata di Pontryagin come della varietà  $f(y)^{-1}$  senza specificare la base  $\varsigma$  scelta.

**Lemma 5.** *Se  $y \in S^p$  è un valore regolare per  $f : M \rightarrow S^p$  e  $z \in S^p$  è sufficientemente vicino a  $y$  allora  $f(y)^{-1}$  e  $f(z)^{-1}$  sono cobordanti ed inquadrati, esplicitamente, con una base  $\varsigma$  qualsiasi scelta, ma anche con basi diverse per il lemma sopra,  $(f(y)^{-1}, f^*\varsigma)$  e  $(f(z)^{-1}, f^*\varsigma)$  saranno cobordanti ed inquadrati.*

*Dimostrazione.* Poichè l'insieme dei punti critici per la funzione  $f$  ovvero, formalmente,  $\{x \in R^p \mid \text{rango}(df_x) < p \text{ ossia } \det(df_x) = 0\}$  è un insieme chiuso essendo la controimmagine di un chiuso (il punto 0) attraverso una funzione continua (il determinante) ed per definizione di misura nulla sarà anche limitato quindi è, essendo in  $R^p$ , un compatto (analogamente usando la densità dei valori regolari) e tale sarà l'immagine attraverso la  $f$  (che è regolare quindi continua) che darà quindi un compatto e un chiuso nel codominio, allora  $\exists \epsilon > 0$  tale che ci sia tutto un intorno di raggio  $\epsilon$  di  $y$  che contiene solo valori regolari per  $f$  allora dato  $z \in S^p$  tale che  $|z - y| < \epsilon$  prendo una famiglia di rotazioni  $r_t$  da  $S^p$  in sè tali

$$\text{che } r_1(y) = z, \text{ e come funzioni } \begin{cases} r_t = \text{identità} & \text{per } t \in [0, \epsilon_1) \\ r_t = r_1 & \text{per } t \in (1 - \epsilon_1, 1] \end{cases} \quad \text{e } r_t^{-1}(z) \text{ è sul}$$

grande cerchio da  $y$  a  $z$  coerentemente col fatto che per  $t \in [0, \epsilon_1)$  è  $r_t^{-1}(z) = z$  e per  $t \in (1 - \epsilon_1, 1]$  è  $r_t^{-1}(z) = y$  quindi l'applicazione rotazione porta lungo il grande cerchio per  $y$  e  $z$ ,  $y$  in  $z$ . Definiamo l'omotopia  $F : M \times [0, 1] \rightarrow S^p$   $F(x, t) = r_t \circ f(x)$  per la definizione di  $\epsilon$ -intorno ho che  $z$  per ogni  $t$  è un valore regolare della  $r_t \circ f(x)$  infatti la rotazione è biettiva ed ha determinante sempre non nullo e nell' $\epsilon$ -intorno ciò vale anche per  $f$  quindi  $d(r_t \circ f)_z = d(r_t)_{f(z)} \circ df_z$  è non nullo (analogamente  $(r_t \circ f)^{-1}(z) = f^{-1} \circ (r_t^{-1}(z))$  con  $r_t^{-1}(z)$  che dà  $y$  o  $z$  a seconda del valore di  $t$  e comunque viaggia sul cerchio massimo fra  $y$  e  $z$  contenuto nell' $\epsilon$ -intorno quindi per certo  $(r_t^{-1}(z))$  è un valore regolare per  $f$ ) allora  $z$  è un valore regolare per  $F(x, t)$  e per definizione  $F^{-1}(z) \subseteq M \times [0, 1]$  è una varietà liscia di dimensione  $m + 1 - p$ , per il risultato richiamato nell'osservazione

1.2.0.3 nella seconda sezione del primo capitolo, ed è un cobordismo inquadrato fra le sottovarietà di  $M \times [0, 1]$  di dimensione  $m - p$  ( $r_0 \circ f$ )<sup>-1</sup>( $z$ ) =  $f$ <sup>-1</sup>( $z$ ) e ( $r_1 \circ f$ )<sup>-1</sup>( $z$ ) =  $f$ <sup>-1</sup>  $\circ$   $r_1$ <sup>-1</sup>( $z$ ) =  $f$ <sup>-1</sup>( $y$ ) ovvero coincidente con  $f$ <sup>-1</sup>( $z$ ) per  $t = 0$  e  $f$ <sup>-1</sup>( $y$ ) per  $t = 1$  quindi  $F$ <sup>-1</sup>( $y$ ) è l'insieme con bordo ( $\partial F$ <sup>-1</sup>( $z$ )) i due

insiemi assegnati ovvero  $\begin{cases} F^{-1}(z) = f^{-1}(z) & \text{per } t \in [0, \epsilon_1) \\ F^{-1}(z) = f^{-1}(y) & \text{per } t \in (1 - \epsilon_1, 1] \end{cases}$  ed aver trovato

l'insieme cobordante fra i due assegnati bordi è sufficiente infatti per i rispettivi perpendicolari agli spazi tangenti ai bordi posso per il lemma sopra scegliere una qualsiasi base orientata positivamente.  $\square$

**Osservazione 2.3.0.3.** *Analogamente al caso del grado che da costante localmente diventa globalmente costante anche qui nel caso del cobordismo fra preimmagini possiamo passare in modo identico da locale a globale ragionando sui valori regolari: vedi il già citato [III] p.10-11 e p.14.*

**Lemma 6.** *Se  $f, g : M \rightarrow S^p$  sono omotopicamente lisce ed  $y$  è un valore regolare per entrambe allora  $f$ <sup>-1</sup>( $y$ ) è cobordante e incorniciato con  $g$ <sup>-1</sup>( $y$ ).*

*Dimostrazione.* Usiamo l'omotopia  $F$  tale che  $\begin{cases} F(x, t) = f(x) & \text{per } t \in [0, \epsilon) \\ F(x, t) = g(x) & \text{per } t \in (1 - \epsilon, 1] \end{cases}$

per qualche  $\epsilon$  positivo che esiste per ipotesi e preso un valore regolare  $z$  per  $F(x, t)$  per ogni  $t$ , che si può supporre esista essendo una funzione liscia che al variare di  $t$  è pure liscia in  $x$ , ovvero tale che  $d(F(x, t))_z$  sia non singolare per ogni  $t$  (e quindi rispettivamente per  $t \in [0, \epsilon)$  e  $t \in (1 - \epsilon, 1]$  ovvero  $d(f(x))_z$  e  $d(g(x))_z$  siano non singolari) e sia tale valore regolare  $z$  vicino ad  $y$  in modo che si possa applicare il lemma appena sopra ad  $f$  e  $g$  e quindi  $f(y)$ <sup>-1</sup> sia cobordante e incorniciato con  $f(z)$ <sup>-1</sup> e  $g(y)$ <sup>-1</sup> con  $g(z)$ <sup>-1</sup> quindi  $F$ <sup>-1</sup>( $z$ )  $\subseteq$   $M \times [0, 1]$  è un cobordismo (come nel lemma sopra, per il lemma 4, la cornice, ovvero la base sui perpendicolari degli spazi tangenti ai bordi, si può scegliere in un qualsiasi modo mantenendo il cobordismo incorniciato) fra

$f(z)$ <sup>-1</sup> e  $g(z)$ <sup>-1</sup> infatti  $\begin{cases} F(z, t)^{-1} = f^{-1}(z) & \text{per } t \in [0, \epsilon) \\ F(z, t)^{-1} = g^{-1}(z) & \text{per } t \in (1 - \epsilon, 1] \end{cases}$  e quindi per la

transitività del cobordismo (con cornice) anche  $f(y)$ <sup>-1</sup> e  $g(y)$ <sup>-1</sup> sono cobordanti (con cornice).  $\square$

**Osservazione 2.3.0.4.** *Una dimostrazione immediata si poteva ottenere rafforzando le ipotesi e chiedendo che  $y$  fosse esplicitamente valore regolare di almeno una omotopia fra le due funzioni ovvero  $y = z$  e notando che  $\partial F$ <sup>-1</sup> =  $f$ <sup>-1</sup>( $z$ )  $\times$   $\{0\} \cup g$ <sup>-1</sup>( $z$ )  $\times$   $\{1\} = \partial(f$ <sup>-1</sup>( $z$ )  $\times$   $[0, \epsilon)) \cup \partial(g$ <sup>-1</sup>( $z$ )  $\times$   $[1 - \epsilon, 1])$ .*

Ora possiamo provare il teorema 10 di pagina 31 che afferma che :  $y, z$  valori regolari di  $f : M \rightarrow S^p$  e  $\varsigma, \varsigma'$  due basi positivamente orientate di  $T(S^p)_y$  allora  $(f(y)$ <sup>-1</sup>,  $f^*\varsigma$ ) e  $(f(z)$ <sup>-1</sup>,  $f^*\varsigma')$  sono inquadrate e cobordanti:

*Dimostrazione.* Dati  $y, z$  valori regolari per  $f : M \rightarrow S^p$  possiamo scegliere come nel lemma 5 di pagina 33 una rotazione  $r_t : S^p \rightarrow S^p$  tale che  $r_0 =$

identità e  $r_1(y) = z$  allora ponendo l'omotopia  $F(x, t) = r_t \circ f$ , che è liscia perchè composizione di cose lisce, ho un omotopia esplicita fra  $f = id \circ f$  e  $r_1 \circ f$  (quest'ultima come visto nel lemma 5 di pagina 33 ha  $z$  come valore regolare) allora per il lemma 6 appena sopra ho che  $f(z)^{-1}$  e  $(r_1 \circ f)^{-1}(z) = f^{-1} \circ r_1^{-1}(z) = f^{-1}(y)$  avendo un valore regolare comune  $z$  sono cobordanti (e incorniciate infatti per il lemma 4 di 32 non serve considerare le basi della cornice).  $\square$

**Lemma 7.** *Sia  $N \subseteq M$  un cobordismo incorniciato di codimensione  $p$  ovvero di dimensione  $m - p$  con una cornice ovvero una scelta della base  $\varsigma$  del perpendicolare allo spazio tangente composta da  $p$  vettori, inoltre  $N$  sia compatto e  $\partial N = \partial M = \emptyset$  allora vale che qualche intorno di  $N$  in  $M$  è diffeomorfo al prodotto  $N \times R^p$ , ovvero ho un diffeomorfismo fra varietà di dimensione  $m$ , ed in particolare il diffeomorfismo può esser scelto in modo che  $x \in N$  corrisponda a  $(x, 0) \in N \times R^p$  ed in modo che la base  $\varsigma$  del perpendicolare allo spazio tangente corrisponda alla base canonica di  $R^p$ .*

*Dimostrazione.*  $M$  è lo spazio euclideo  $R^m = R^{n+p}$  sia  $g : N \times R^p \rightarrow M$   $g(x, t_1, \dots, t_p) = x + t_1 v_1 + \dots + t_p v_p$  in cui la somma a destra è una somma diretta e  $dg_{(x, 0, \dots, 0)}$  è non singolare, per come vedremo in modo esplicito dopo, quindi vale il teorema della funzione inversa e quindi  $g$  porta in modo diffeomorfo (tramite un'applicazione differenziabile ed invertibile) un certo aperto di  $(x, 0) \in N \times R^p$  in un insieme aperto dell'immagine ovvero  $g$  porta  $N \times U_\epsilon$  in modo diffeomorfo e suriettivo in un insieme aperto ma  $U_\epsilon$  è diffeomorfo all'intero spazio euclideo  $R^p$  attraverso la mappa vettoriale da  $U_\epsilon$  in  $R^p$   $u \rightarrow u/(1 - |u|^2/\epsilon^2)$  infatti  $|u| < \epsilon$  e  $(|u|^2/\epsilon^2) < 1$  e quindi  $(1 - |u|^2/\epsilon^2) > 0$  e per  $|u| \rightarrow 0$  tale mappa tende al valore 0 e per  $|u| \rightarrow \epsilon$  il valore immagine esplose andando a zero il denominatore, (anche per  $\epsilon$  piccolo essendo il denominatore infinitesimo di ordine superiore rispetto al numeratore e quindi andando a zero più velocemente del numeratore il rapporto diverge) ovvero copre ogni valore anche molto distante dall'origine, per la definizione di  $g$ ,  $g(x, 0) = x$  ovvero usando l'inversa  $g^{-1}$  che localmente, nell'intorno di  $(x, 0)$ , è ben definita,  $x \in N$  va, attraverso  $g^{-1}$ , in  $(x, 0) \in N \times R^p$  e per quanto vedremo nell'osservazione appena sotto per  $dg_{(x, 0)}$ ,  $g$  fissando  $x$  manda ordinatamente  $t_i$  in  $t_i v_i$  ovvero, restringendomi, e spezzando sulle diverse componenti essendo una somma diretta, alla parte con dominio  $R^p$  avendo sulla parte definita in  $N$  l'identità, la funzione  $g$  manda  $(t_1, \dots, t_p)$  in  $(t_1 v_1, \dots, t_p v_p)$  e quindi un vettore della base canonica di  $R^p$  con  $i$ -esima componente 1 e tutte le altre nulle viene mandato in  $v_i$ , quindi la base canonica va ordinatamente nella base  $\varsigma$  e quindi il diffeomorfismo inverso  $g^{-1}$  che localmente esiste essendo iniettivo e suriettivo sull'intorno aperto di  $x$  porta la base  $\varsigma$  nella base canonica di  $R^p$  come voluto.

$M$  **generale** accenniamo un ragionamento possibile: sostituiamo le linee rette in  $R^{n+p}$  con le geodetiche sulla superficie  $M$  e sia  $g(x, t_1, \dots, t_p)$  il punto finale della geodetica di lunghezza  $|t_1 v_1 + \dots + t_p v_p|$  con punto iniziale  $x$

e con velocità iniziale il versore  $t_1 v_1 + \dots + t_p v_p / |t_1 v_1 + \dots + t_p v_p|$  quindi  $g : N \times U_\epsilon \rightarrow M$  è ben definita e liscia per  $\epsilon$  piccolo; costruita tale funzione il resto procede come nel caso euclideo.  $\square$

Verifichiamo alcuni fatti citati nella dimostrazione:

**Osservazione 2.3.0.5.** Sia  $g : N \times R^p \rightarrow M$   $g(x, t_1, \dots, t_p) = x + t_1 v_1 + \dots + t_p v_p$ , come sopra, proviamo che  $dg_{(x,0,\dots,0)}$  è una matrice diagonale a blocchi : nel blocco in alto a sinistra  $n \times n$  che ha per riga  $i$ -esima il gradiente di  $x$  rispetto alla  $i$ -esima variabile  $x_i$  e nel blocco in basso a destra  $p \times p$  per righe i vettori della base

$$\zeta \text{ ovvero } v_1, \dots, v_p \text{ infatti è } \begin{bmatrix} \partial x_1 / \partial x_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \partial x_2 / \partial x_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \partial(t_{p-1} v_{p-1}) / \partial t_{p-1} & \\ 0 & \cdots & \cdots & \partial(t_p v_p) / \partial t_p & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} +1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & +1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & v_{p-1} & \\ 0 & \cdots & v_p & \end{bmatrix} \text{ quindi il suo determinante è uguale in un qualsiasi}$$

punto ed è il prodotto dei determinanti dei blocchi sulla diagonale: il blocco in alto a sinistra ha determinante 1, quello in basso a destra è la matrice in cui per righe si hanno vettori linearmente indipendenti (essendo una base) quindi il determinante è non nullo quindi anche il prodotto dei determinanti è non nullo, infine può esser vista come funzione sulle due componenti del prodotto  $(f_1, f_2)$  con  $f_1$  l'identità su  $N$  e  $f_2$  l'applicazione su  $R^p$  che manda la base canonica nella base  $\zeta$  del perpendicolare allo spazio tangente quindi  $T_x(N) + (T_x(N))^\perp = R^m$ .

**Osservazione 2.3.0.6.** Indipendentemente dal teorema della funzione inversa provo che  $g$ , come definita sopra, porta in modo diffeomorfo (tramite un'applicazione differenziabile ed invertibile) un certo aperto di  $(x, 0) \in N \times R^p$  in un insieme aperto dell'immagine: esplicitamente si ha che  $g$  è 1-1 in un intorno intorno  $N \times U_\epsilon$  di  $N \times 0$  per  $\epsilon$  piccolo e  $U_\epsilon$  l' $\epsilon$ -intorno dello 0 in  $R^p$ , per avere che mappa intorni in intorni come voluto in modo diffeomorfo. Se esistessero  $(x, u), (x', u')$  in  $N \times R^p$  con  $|u|$  e  $|u'|$  piccoli in modo da stare nell' $\epsilon$  intorno dell'origine in  $R^p$  e tali che  $g(x, u) = g(x', u')$  per la compattezza di  $N$  (per ogni successione esiste una sottosuccessione convergente ad un punto dell'insieme) posso scegliere una sequenza di coppie con  $x$  che converge a un punto  $(x_0)$  e  $x'$  che converge ad un punto  $(x'_0)$  e  $u \rightarrow 0$  e  $u' \rightarrow 0$  ma allora per definizione di  $g$  al limite per  $(t_1, \dots, t_p) \rightarrow 0$  si ha che  $x'_0 = g(x'_0, 0, \dots, 0) = g(x_0, 0, \dots, 0) = x_0$  e così sempre al limite per  $u \rightarrow 0, u' \rightarrow 0$  ho essendo  $g(x', 0, \dots, 0) = g(x, 0, \dots, 0)$  che  $x' = g(x', 0, \dots, 0) = g(x, 0, \dots, 0) = x$  e quindi dovendo esser  $x' + t'_1 v_1 + \dots + t'_p v_p = g(x', t'_1, \dots, t'_p) = g(x', u') = g(x, u) = g(x, t_1, \dots, t_p) = x + t_1 v_1 + \dots + t_p v_p$  si ha anche che  $(t_1 - t'_1) v_1 + \dots + (t_p - t'_p) v_p = 0$  e quindi, per definizione di base, essendo una somma di vettori linearmente indipendenti essa è nulla se e solo se

tutti i coefficienti sono nulli ovvero  $(t_1 - t'_1, \dots, t_p - t'_p) = 0$  inteso come vettore nullo  $p$ -dimensionale (analogamente per mostrare che è iniettiva potevo direttamente usare questo ragionamento e notare che, per costruzione, la differenza è una somma diretta dei vettori  $x, v_1, \dots, v_p$  ed una somma diretta è nulla se e solo se tutti i suoi addendi sono nulli quindi la differenza dei coefficienti scalari dei vettori della base  $\varsigma: t_1 - t'_1, \dots, t_p - t'_p$  sono tutti nulli e così anche la differenza vettoriale  $x - x'$ ) ovvero dall'ipotesi  $g(x', u') = g(x, u)$  ho ricavato  $x' = x$  e  $u = u'$  ovvero  $g$  nell'intorno è iniettiva.

Proviamo il teorema 12 di pagina 32 che afferma che ogni sottovarietà  $N \subseteq M$  con  $M$  di dimensione  $m$  incorniciata compatta  $(N, \xi)$  di codimensione  $p$  è la varietà di Pontryagin di una qualche mappa  $f: M \rightarrow S^p$ :

*Dimostrazione.* Sia  $N \subseteq M$  una varietà incorniciata compatta senza frontiera per il lemma sopra possiamo rappresentare con una mappa (diffeomorfismo)  $g: N \times R^p \rightarrow V \subseteq M$  un intorno  $V$  di  $N$  in  $M$  e definire la proiezione  $\pi: V \rightarrow R^p$  tale che  $\pi \circ g: N \times R^p \rightarrow R^p$  si abbia  $(\pi \circ g)(x, y) = y$ , il vettore  $p$ -dimensionale  $0$  è un valore regolare infatti  $(\pi \circ g)(x, 0) = 0$  e  $dg$  è non singolare essendo un isomorfismo indipendentemente dal punto in cui lo si calcoli e poichè il rango di un prodotto (che qui è l'identità su  $R^p$  e quindi ha rango  $p$ ) è minore o uguale al rango dei fattori e poichè  $g$  è un diffeomorfismo si ha che  $\text{rango}(dg) = n + p = m > p$  e quindi  $p \leq \text{rango}(d\pi)$  ovvero  $\pi$  è non singolare (analiticamente:  $(\pi \circ g)(x, y) = y$  diventa  $(d\pi \circ dg) = d(\text{identità}_{R^p}) = \text{identità}_{R^p}$  e sui ranghi  $\{\text{rango}(d\pi), m\} = \{\text{rango}(d\pi), \text{rango}(dg)\} \geq \text{rango}(\text{identità}_{R^p}) = p$  ciò implica per le dimensioni del codominio e per quanto appena visto che  $p \leq \text{rango}(d\pi) \leq p$  ovvero  $\text{rango}(d\pi) = p$  quindi è non singolare) per ogni punto, in particolare  $0$  è un valore regolare essendo la matrice sempre non singolare anche in  $0$  che è la retroimmagine dello  $0$  stesso e intendendo l'inversa di  $\pi$  come la funzione che assegna ad un punto tutto l'insieme delle sue possibili controimmagini ad esempio allo  $0$  associa tutti gli elementi in  $V$  che sono proiettati nello zero di  $R^p$  allora da  $(\pi \circ g)(x, 0) = 0$  si ha  $(g)(x, 0) = \pi^{-1}(0)$  ed invertendo localmente  $g$  il che è lecito per il lemma sopra ho che come insieme  $g^{-1} \circ \pi^{-1}(0) = \{(x, 0) \in N \times R^p \text{ con } x \text{ variabile e libero}\}$  ovvero tutto  $N$ , con la sua cornice, che per il lemma 4 di pagina 32 non abbiamo dovuto specificare (in realtà anche considerando le basi tutto funziona per il lemma sopra la proiezione  $\pi$  manda la base standard dello spazio euclideo  $R^p$  nella base della cornice), scegliamo una mappa liscia  $\phi: R^p \rightarrow S^p$  che mappa ogni punto  $x$  tale che  $|x| \geq 1$  nel punto base  $s_0$  e porta la palla unitaria aperta  $p$ -dimensionale in  $S^p - \{s_0\}$  per esempio  $\phi(x) = h_{s_0}^{-1}(x/\lambda(|x|^2))$  con  $h_{s_0}^{-1}$  proiezione stereografica inversa dal punto  $s_0$  con  $\lambda$  funzione di variabile reale liscia decrescente (in modo che sia continua) tale che  $\lambda(t) > 0$  per  $t < 1$  e  $\lambda(t) = 0$  per  $t \geq 1$  così per  $|x|^2 \geq 1$  per definizione di proiezione stereografica  $\phi(x) = h_{s_0}^{-1}(x/\lambda(|x|^2)) = h_{s_0}^{-1}(\infty) = s_0$  con  $\infty$  indicando il punto all'infinito e per  $|x|^2 < 1$   $\phi(x)$  è ben definita perchè  $\lambda$  è non nulla e tramite la proiezione stereografica inversa tale punto al finito va in modo biiettivo nella sfera privata del punto all'infinito infine è liscia poichè è composizione di cose lisce e definita in modo regolare anche lungo la sfera

unitaria per decrescenza di  $\lambda$  nell'avvicinarsi vicino al bordo della sfera. Allora  $f : M \rightarrow S^p$  e  $f(x) = \phi(\pi(x))$  per  $x \in V$  e  $f(x) = s_0$  per  $x \notin V$  allora  $f$  è liscia perchè composizione di cose lisce e per  $z \in V$ , poichè esiste localmente l'inversa di  $g$ , posso trovare  $(x, y) \in N \times R^p$  tali che attraverso  $\pi$   $g(x, y) = z \in V$  vada in  $y \in R^p$  e attraverso  $f$   $g(x, y) = z \in V$  vada in  $\phi(y) \in S^p$  e il valore di  $f$  in un punto tende a  $s_0$  solo se l'argomento di  $\phi$  è tale che  $|\pi(z)|$  va ad 1 ma vedendo  $z$  in funzione di  $g$  ciò accade se  $|\pi(g(x, y)) = y|$  va ad 1 ovvero se considero un intorno sufficientemente grande di  $N$  in  $N \times R^p$  ovvero  $N \times S^p$  e, mediante il diffeomorfismo, un intorno sufficientemente grande di  $N$  in  $M$  ovvero quando sono vicino ad uscire da  $V$  per cui la definizione data rende  $f$  liscia inoltre  $f$  nel punto  $\phi(0)$ , ovvero nei valori  $z \in V$  tali che  $\pi(z) = 0$  ovvero nell'insieme  $\{z = g(x, y) | \pi(g(x, y)) = y = 0\}$  ovvero in  $N \subseteq N \times R^p$ , è regolare ovvero  $\forall x \in f^{-1}(\phi(0))$   $df_x$  ha rango massimo infatti  $f$  è definita usando  $\phi$  e  $\pi$  con  $\phi$  definita su  $S^p - s_0$  e  $\pi(z) = 0$ , localmente, sono i punti di  $N$  e quindi tramite diffeomorfismo mi riduco a  $f$  definita su  $V$  ovvero considererò  $f = \phi \circ \pi$  e così l'immagine tramite  $\phi$  sarà solo  $S^p - s_0$  ed  $f$  così definita è un diffeomorfismo e quindi il differenziale è un isomorfismo infatti  $\pi$  per quanto detto sopra ha rango massimo  $p$  quindi  $f = \phi \circ \pi$  diventa  $df = d\phi d\pi$  ed i due fattori hanno entrambi rango  $p$  e così anche il rango di  $df$ , che è minore o uguale al numero di righe ed il numero di colonne ovvero  $p$  e  $m$  con  $p < m$ , essendo per definizione il prodotto di matrici di rango  $p$  deve avere rango  $p$  che per le sue dimensioni è il massimo ovvero è non singolare, posso quindi per definizione considerare la corrispondente varietà di Pontryagin, senza specificare la cornice come visto nel lemma 4 di pagina 32 (in realtà anche qui per il lemma sopra è tutto corretto: per ogni dettaglio vedi p.18 di [III] ) che è  $f^{-1}(\phi(0)) = (\phi \circ \pi)^{-1}(\phi(0)) = \pi^{-1} \circ \phi^{-1} \circ \phi(0) = \pi^{-1}(0)$  ovvero è proprio la varietà incorniciata  $N$ , quindi ho trovato la mappa  $f$  di cui  $N$  in un certo valore regolare (e per il teorema 10 di pagina 31 anche modificando localmente il valore non varia la classe di cobordismo incorniciato) è la varietà incorniciata.  $\square$

**Osservazione 2.3.0.7.** *Per un estensione di questo fatto per varietà con cornice di codimensione  $n$  in un compatto con frontiera  $(M \times [0, 1])$  viste come la preimmagine, che è una varietà, di una qualche mappa  $F : M \times [0, 1] \rightarrow S^n$  vedi p.18 di [III].*

Proviamo che la varietà di Pontryagin determina la classe di omotopia della funzione, invertendo, in un qualche senso il lemma 6 di pagina 34 :

**Lemma 8.** *Siano  $f, g : M \rightarrow S^p$  funzioni lisce con un comune valore regolare  $y$  e  $\varsigma$  una base di  $T(S^p)_y$  allora se le associate varietà incorniciate di Pontryagin  $(f^{-1}(y), f^*\varsigma)$ ,  $(g^{-1}(y), g^*\varsigma)$  sono uguali allora  $f$  e  $g$  sono omotope in modo liscio.*

*Dimostrazione.* Sia  $N = f^{-1}(y) = g^{-1}(y)$  essendo uguali per ipotesi  $f^{-1}(y) = g^{-1}(y)$ , il fatto che  $f^*\varsigma = g^*\varsigma$  significa che fissata una base positiva  $\xi = (v_1, \dots, v_p)$  di  $T(S^p)_y$  per ogni  $x \in N$   $df_x$  e  $dg_x$  mappano  $TM_x$  in  $T(S^p)_y$  ed in particolare  $T(f^{-1}(y))_x = T(g^{-1}(y))_x$  va a 0 con rispettivamente  $df_x$  e  $dg_x$  e

$T(f^{-1}(y))_x^\perp = T(g^{-1}(y))_x^\perp$  va in modo surriettivo in  $T(S^p)_y$  tramite rispettivamente  $df_x$  e  $dg_x$ , ed esiste un unico vettore  $w_i \in T(f^{-1}(y))_x^\perp = T(g^{-1}(y))_x^\perp$  che tramite  $df_x$  e  $dg_x$  va in  $v_i$  ma allora variando sui  $v_i$  essendo  $df_x$  e  $dg_x$  isomorfismi ottengo due basi uguali di uno stesso spazio che attraverso tali isomorfismi vanno in una stessa base quindi come applicazioni lineari definite sulle basi ed a valori fissati estendendo per linearità ho che su  $T(f^{-1}(y))_x^\perp = T(g^{-1}(y))_x^\perp$   $df_x$  e  $dg_x$  coincidono ma allora poichè  $T(f^{-1}(y))_x = T(g^{-1}(y))_x$  per entrambe è lo spazio nullo ho che le due applicazioni coincidono proprio su  $TM_x$  ovvero sono uguali come funzioni e ciò vale  $\forall x \in N$ . Se  $f$  coincide con  $g$  fuori da un intorno  $V$  di  $N$  usando la proiezione stereografica di centro  $y$ ,  $h_y : S^p - y \rightarrow R^p$  definisco

$$\text{l'omotopia } \begin{cases} L(x, t) = f(x) & \text{per } x \in V \\ L(x, t) = h_y^{-1} [t \cdot (h_y(f(x)) + (1-t) \cdot h_y(g(x)))] & \text{per } x \in M - N \end{cases}$$

così che su  $M - N$   $f$  e  $g$  siano omotope infatti per  $t = 0$  ottengo  $L(x, 0) = g(x)$  per  $t = 1$  ottengo  $L(x, 1) = f(x)$ , cerchiamo ora di deformare  $f$  in modo che coincida con  $g$  in qualche intorno di  $N$  in modo da non variare  $f^{-1}(y)$  ovvero non aggiungendo nuovi punti che vanno a  $y$  tramite  $f$ . Per il lemma 7 di pagina 35 posso vedere un intorno  $V$  di  $N$  come parametrizzato con una mappa  $N \times R^p \rightarrow V \subseteq M$  e  $V$  sufficientemente piccolo in modo che  $f(V)$  e  $g(V)$  non contengano l'antipodale ( $y'$ ) di  $y$  sulla sfera ovvero il punto ottenuto come intersezione della sfera e della retta per  $y$  e l'origine della sfera oltre ad  $y$  stesso, identificando inoltre  $S^p - y'$  con  $R^p$  attraverso la proiezione stereografica dal punto  $y'$  otteniamo le mappe  $F, G : N \times R^p \rightarrow R^p$  associate rispettivamente a  $f$  e  $g$  nell'intorno di  $f^{-1}(y)$  punto comune:  $f, g : V \rightarrow S^p$  e  $V \rightarrow N \times R^p$  con il diffeomorfismo ( $k$ ) dato dal lemma 7 di pagina 35 e ciò vale anche usando il diffeomorfismo inverso ( $k^{-1}$ ) che localmente nell'intorno esiste e porta  $N \times R^p \rightarrow V$  e per costruzione  $V$  è tale che le due funzioni  $f$  e  $g$  ristrette all'intorno  $V$  abbiano come immagine  $S^p - y'$ ; inoltre usando  $k^{-1}$  tale che  $d(k^{-1})_{(x,0)} : T(N)_x \times R^p \rightarrow T_{k(x,0)}V$  e che porta  $T(N)_x \times \{0\}$  in modo identico in  $T(N)_x$  e la base di  $R^p$  nella base della cornice, inoltre  $df_x$  porta  $T(N)_x$  in  $0$  e  $(T(N)_x)^\perp$  in modo isomorfo in  $T(S^p)_x$  e porta una base della cornice ( $f^*(\zeta)$ ) nella base da cui proviene nella definizione ( $\zeta$ ), inoltre  $dh_y$  manda la base ( $\zeta$ ) di  $T(S^p)_y$  nella base standard di  $R^p$  quindi  $dF_{(x,0)}, dG_{(x,0)} : T(N)_x \times R^p \rightarrow R^p$  sono proiezioni in  $R^p$  ovvero identità su  $R^p$ . Quindi usando la proiezione stereografica  $h_{y'} : S^p - y' \rightarrow R^p$  e variando in tale modo, mediante tali mappe, il dominio ed il codominio di  $f$  e  $g$  ottengo rispettivamente  $F$  e  $G$  tali  $F = h_{y'} \circ f \circ k^{-1} : N \times R^p \rightarrow V \rightarrow S^p \rightarrow R^p$  e  $G = h_{y'} \circ g \circ k^{-1} : N \times R^p \rightarrow R^p$  con inoltre la proiezione stereografica che manda il polo opposto, ovvero il punto della sfera opposto a quello da cui si proietta, nello 0 del piano e così la proiezione inversa manda lo 0 nel polo opposto di  $y'$  che per definizione di antipodale è proprio  $y$  e quindi vale che  $h_{y'}^{-1}(0) = y$  inoltre l'immersione  $N \rightarrow N \times R^p$  è il diffeomorfismo preso valutato sull'intorno più grande possibile di  $N$  senza però uscire da esso ovvero senza intersecare  $M - N$  quindi  $F^{-1}(0) = (h_{y'} \circ f \circ k^{-1})^{-1}(0) = (k \circ f^{-1} \circ h_{y'}^{-1})(0) = (k \circ f^{-1})(y) = k(N) = N \times \{0\}$  e  $G^{-1}(0) = (h_{y'} \circ g \circ k^{-1})^{-1}(0) = (k \circ g^{-1} \circ h_{y'}^{-1})(0) = (k \circ g^{-1})(y) = k(N) = N \times \{0\}$  e poichè vale che  $(f^{-1}(y), f^*\zeta), (g^{-1}(y), g^*\zeta)$  sono varietà incorniciate di Pontrya-

gin con le notazioni usate nella dimostrazione del teorema 12 di pagina 32,  $f$  e  $g$  sono rispettivamente  $f(x) = \phi(\pi(x))$  e  $g(x) = \phi(\pi(x))$  per  $x$  in  $V$  e con  $\phi(x) = h_y^{-1}(x/\lambda(|x|^2))$  e  $(\pi \circ k^{-1}) : N \times R^p \rightarrow R^p$  che manda  $(x, y)$  in  $y$  e vale che  $\forall x \in N$   $dF_{(x,0)} = (dh_{y'})_{f(x)} df_{k^{-1}(x,0)=x} dk_{(x,0)}^{-1} = (dh_{y'})_{f(x)} d\phi_{\pi(x)} d\pi_x dk_{(x,0)}^{-1} = (dh_{y'})_{f(x)} dh_0^{-1} d\pi_x dk_{(x,0)}^{-1}$  ma poichè  $(\pi \circ k^{-1})(x, y) = y$  si ha che  $d\pi \circ d(k^{-1}) = \text{identità}_y$  e quindi  $dF_{(x,0)} = \text{identità}_y$  ovvero è la proiezione su  $R^p$  da  $(x, y)$  in  $y$  in modo del tutto analogo per  $dG_{(x,0)}$  sostituendo  $df$  a  $dg$  e ragionando sugli stessi punti  $x \in N$  essendo  $f^{-1}(y) = N = g^{-1}(y)$ . Cerco ora una costante  $c$  tale che  $\forall x \in N$  e  $u \in R^p, 0 < |u| < c$  valga  $F(x, u) \cdot u > 0$  e  $G(x, u) \cdot u > 0$  usando il prodotto scalare in  $R^p$  così che essendo l'angolo compreso fra  $u$  e  $F(x, u)$ ,  $G(x, u)$  minore di  $\pi/2$  anche l'angolo fra  $F(x, u)$  e  $G(x, u)$  sarà sempre, anche quando saranno dalle parti opposte (nei due semipiani distinti individuati dalla retta per  $u$ ) rispetto a  $u$  comunque minore di  $\pi$  e quindi saranno nella stessa metà di piano, delimitato dalla perpendicolare ad  $u$  in  $R^p$  (ovvero esisterà almeno una componente  $i$  tale che  $F(x, u)$  e  $G(x, u)$  hanno entrambi  $i$ -esima coordinata positiva o negativa) così l'omotopia  $(1-t)F(x, u) + tG(x, u)$  fra  $F$  (ottenuta per  $t = 0$ ) e  $G$  (ottenuta per  $t = 1$ ), finchè  $|u| < c$ , non porta alcun nuovo punto in  $0$ , ovvero non aggiunge punti a  $N$  nel considerare  $(F(x, u))^{-1}$  e  $(G(x, u))^{-1}$ , infatti è una combinazione convessa (un segmento che le congiunge) fra funzioni che sono nella stessa metà di piano e quindi non esce dal semipiano ed in particolare non passo per l'origine perchè se un punto del segmento fosse l'origine i due estremi starebbero uno dalla parte opposta dell'altro rispetto all'origine e non potrebbero appartenere alla stessa metà di piano (infatti nel passare da una parte all'altra dell'origine anche la coordinata  $i$ -esima da positiva a negativa cambierebbe di segno). Proviamo allora che vale  $F(x, u) \cdot u > 0$  e  $G(x, u) \cdot u > 0$ , per lo sviluppo di Taylor in più variabili al secondo ordine (ciò è lecito perchè  $dF_x$  manda  $T(N)_x = dk_{(x,0)}(T(N)_x \times \{0\})$  in  $0$  quindi posso pensare ad  $F$  come ristretta da  $R^p$  in sè ed in modo analogo per  $dG_x$ ), avendo costruito  $F$  e  $G$  mediante composizione di funzioni lisce, vale la disuguaglianza  $|F(x, t) - u| \leq c_1|u|^2$  per  $|u| \leq 1$  e moltiplicando scalarmente per  $|u|$  ottengo una disuguaglianza scalare  $|(F(x, t) - u) \cdot u| \leq c_1|u|^3$  e prendendo la parte negativa del valore assoluto ho  $-F(x, t) \cdot u \leq -|u|^2 + c_1|u|^3$  e quindi  $F(x, t) \cdot u \geq |u|^2 - c_1|u|^3 > 0$  (ovvero  $|F(x, t)|^2 + |u|^2 - |F(x, t) - u|^2 > |F(x, t)|^2 + |u|^2 - c_1^2|u|^4 > |u|^2 - c_1^2|u|^4 > 0$  e tale ultima disuguaglianza vale solo per  $1/c_1 > |u|$  in cui il primo termine è  $2 F(x, t) \cdot u$  ottenuto sviluppando  $|F(x, t) - u|^2 = (|F(x, t) - u|) \cdot (|F(x, t) - u|)$ ) e dove l'ultima disuguaglianza vale, assumendo  $|u| > 0$  per avere denominatore non nullo, per  $|u|^2 > c_1|u|^3$  ovvero  $1/|u| > c_1$  ovvero  $1/c_1 > |u|$  in definitiva per avere questa stima serve che  $0 < |u| < \min\{1, 1/c_1\} = c$  in modo identico vale sostituendo  $F$  con  $G$  (cambia solo  $c_1$  che sarà  $c_2$  e quindi  $c$  sarà il minimo fra  $c_1, c_2$  e  $1$ ) e quindi ho le stime volute su  $F$  e  $G$ . Usiamo, per evitare che i punti si muovano troppo, una mappa liscia, cut-off,  $\lambda : R^p \rightarrow R$  tale che  $\lambda(u) = 1$  per  $|u| \leq c/2$  e  $\lambda(u) = 0$  per  $|u| \geq c$  allora ridefiniamo l'omotopia con tale riscaldamento lineare  $H_t(x, u) = (1 - \lambda(u)t)F(x, u) + \lambda(u)tG(x, u)$  ovvero così ho una deformazione liscia, che non aggiunge punti alla controimmagine di  $y$  tramite  $f$ , che porta  $H_0(x, u) = F(x, u)$  in una mappa che per  $|u| \leq c/2$ ,



dove  $\lambda(u) = 1$ , coincide con  $H_1(x, u) = G(x, u)$  e per  $|u| \geq c$ , dove  $\lambda(u) = 0$ , coincide ancora con  $F(x, u)$  e senza zeri poichè  $F(x, u)$  e  $G(x, u)$  stanno nella stessa parte di piano, e così tramite combinazione convessa (esempio lungo un segmento che congiunge  $F(x, u)$  e  $G(x, u)$  che per quanto detto sopra sta tutto in una parte di piano senza zeri), non si aggiunge alcun nuovo punto ad  $N = F^{-1}(0) = G^{-1}(0)$  ovvero alla controimmagine di  $y$  tramite  $f$  poichè nè  $F$  nè  $G$  hanno uno zero nel  $c$ -intorno di  $N$  ovvero in  $N \times \{u \in \mathbb{R}^p \mid |u| < c\}$ . Quindi ritornando a  $f$  e  $g$  abbiamo l'omotopia anche per punti vicini all'intorno di  $N$ :  $F = h_{y'} \circ f \circ k^{-1}, G = h_{y'} \circ g \circ k^{-1} : V \rightarrow N \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p \rightarrow S^p$  e per quanto sopra l'omotopia vale per  $F$  e  $G$  in  $N \times \{u \in \mathbb{R}^p \mid |u| < c\}$  allora mediante il diffeomorfismo  $k$  va in  $V$  e l'omotopia in tale caso, dividendo a seconda di interni vicini (in cui coincide, per  $t$  opportuno, con  $G$  e  $F$  e poi con  $g$  e  $f$ ) o lontani di  $N$  a seconda del modulo di  $u$  come sopra, diventa definendola su  $N \times \mathbb{R}^p$   $H_t(x, u) = (1 - \lambda(u)t)F(x, u) + \lambda(u)tG(x, u) = (1 - \lambda(u)t)(h_{y'} \circ f \circ k^{-1})(x, u) + \lambda(u)t(h_{y'} \circ g \circ k^{-1})(x, u)$  e definendola su  $V$   $H_t(x, u) = (1 - \lambda(u)t)(h_{y'} \circ f(x) + \lambda(u)t(h_{y'} \circ g(x)))$  dividendo sempre a differenza dell'intorno (per  $|u| < c/2$  è un'omotopia fra  $F$  e  $G$  ovvero per  $|u| < c/2$ , nell' $\epsilon$ -intorno di  $N$ , per  $\epsilon$  minore di  $c/2$  con  $c$  stimato sopra, è un'omotopia fra  $f$  e  $g$ ), ciò va poi unito all'altra omotopia trovata per complementari di interni di  $N$   $L(x, t) = h_y^{-1}[t \cdot (h_y(f(x)) + (1 - t) \cdot h_y(g(x)))]$ .  $\square$

Proviamo il teorema 11 di pagina 31 che afferma che due mappe  $f, g : M \rightarrow S^p$  sono omotope (in modo liscio) se e solo se le varietà di Pontryagin associate sono inquadrate e cobordanti:

*Dimostrazione.*  $\Rightarrow$  se  $f, g$  sono omotope in modo liscio ed  $y$  è un valore regolare per entrambe allora per il lemma 6 di pagina 34  $f^{-1}(y)$  è cobordante ed incorniciata con  $g^{-1}(y)$  in cui ha senso non specificare la base della cornice per il lemma 4 di pagina 32;

$\Leftarrow$  dato un cobordismo inquadrate  $(M', \zeta)$  fra gli insiemi  $f^{-1}(y)$  e  $g^{-1}(y)$  allora costruisco un'omotopia  $F : M \times [0, 1] \rightarrow S^p$  fra  $f$  e  $g$  che varia, allo scorrere di  $t$ , in un insieme di funzioni  $F_t(x)$ , della variabile  $x$  in  $M$  e  $t$  fissato scalare, analogo a quello costruito nella prova del teorema 6 di pagina 34 e tale che ogni funzione  $(F_t(x))$  dia origine ad una varietà di Pontryagin ovvero  $(F_t(x)^{-1}(y), F_t(x)^*\zeta')$  allora essendo  $F$  un'omotopia fra  $f$  e  $g$  vale che in  $t = 0$  e  $t = 1$  coincide con  $f$  e  $g$  ovvero, in  $y$  che è regolare per  $f$  e  $g$  e quindi anche per  $F_t$  in  $t = 0$  e  $t = 1$ , ottengo che le varietà di Pontryagin sono proprio uguali  $(F_0^{-1}(y)) = (f^{-1}(y))$  e  $(F_1^{-1}(y)) = (g^{-1}(y))$ , avendo senso non specificare le basi per il lemma 4 di pagina 32, quindi ho trovato, senza specificare le basi, un insieme  $F_t^{-1}(y)$  che per il teorema 12 di pagina 32 è la varietà di Pontryagin originata da  $F_t$  che realizza il cobordismo cercato ovvero ho due funzioni le cui varietà di Pontryagin associate sono non solo cobordanti ma anche coincidenti e quindi per il lemma sopra  $f = F_0$  è omotopa in modo liscio a  $F_1 = g$  quindi (per la transitività dell'omotopia)  $f$  è omotopa in modo liscio a  $g$

coerentemente con la costruzione iniziale in cui  $F$  si era detta un omotopia fra  $f$  e  $g$ . □

Tutto quanto visto sopra ovvero i teoremi 10, 11, 12 si possono generalizzare a varietà  $M$  con bordo ragionando su mappe che portano il bordo in un punto fissato  $s_0$  ovvero con  $M$  che va in  $S^p$  e  $\partial M$  va in  $s_0$  e analogamente a quanto visto nel teorema 12 abbiamo una corrispondenza, in tal caso 1-1, fra tali mappe (mentre prima avevamo mappe da  $M$  a  $S^p$ ) ed i cobordismi incorniciati delle sottovarietà  $N \subseteq \text{int}(M)$  di codimensione  $p$  (mentre prima non si parlava di parte interna coincidendo essa con tutto l'insieme).

## 2.4 Teorema del grado di Hopf

Cerchiamo ora, ragionando in modo meno rigoroso, di giungere ad un risultato importante ovvero cerchiamo di invertire l'affermazione (implicazione): funzioni omotope (allora) hanno stesso grado.

**Osservazione 2.4.0.1** (in preparazione...verso la conclusione...). *Sia  $M$  varietà connessa, compatta, orientata, senza frontiera di dimensione  $m = p$ , una sottovarietà incorniciata di codimensione  $p$  ovvero di dimensione 0 sarà un insieme finito di punti con una base di  $p$  elementi dello spazio tangente ad  $M$ , nel punto, per ciascuno di essi e diremo che il segno nel punto ( $\text{sgn}(x)$ ) sarà  $+1$  o  $-1$  a seconda che rispetto ad una base scelta sia concorde o opposta: quanto detto è solo un caso particolare, con qualche attenzione, della definizione 14 nella sezione 2.2 in cui avevamo definito l'orientazione indotta da una varietà  $M'$  di dimensione  $p$  alla sua frontiera  $\partial M'$  di dimensione  $p - 1$  in modo che preso un punto  $x$  della frontiera e scelta una base orientata positivamente  $(v_1, \dots, v_p)$  di  $TM'_x$  in modo che  $(v_2, \dots, v_p)$  siano tangenti alla frontiera nel punto,  $v_1$  punti verso l'esterno ed avevamo anche citato il caso di  $p=1$  in cui  $\partial M$  ha dimensione nulla dicendo che il punto ha segno  $+1$  o  $-1$  a seconda che il vettore nel punto punti verso l'esterno o l'interno. Supponiamo di avere due punti  $a, b$  con tali caratteristiche e con uguale orientazione ad esempio  $+1$  possiamo costruire un cobordismo incorniciato fra essi infatti poichè  $M$  è connesso esiste un arco (varietà 1-dimensionale) fra essi che possiamo supporre essere un cammino liscio da  $[0, 1]$  in  $M \times [0, 1]$  fra  $(a, 0) \in M \times \{0\}$  e  $(b, 1) \in M \times \{1\}$ , ora dobbiamo solo dare una cornice ovvero una orientazione per gli ortogonali dei tangenti: usiamo lo spazio euclideo e vediamo  $M \times [0, 1] \subseteq R^{m+1}$ ,  $\forall x \in M \times [0, 1]$ ,  $T(M \times [0, 1])_x$  è una varietà liscia di dimensione  $m + 1$  immersa in  $R^{m+1}$  determiniamo la base ad un estremo ovvero determiniamo ora la base di  $T(M \times [0, 1])_{(a,0)}$  che spezzando, e questo vale in generale per varietà con bordo  $M$  e  $M'$ : si orienta  $M \times M'$  in  $(x, x')$  scegliendo una base  $v$  di  $T(M)_x$  e una base  $v'$  di  $T(M')'_x$  ed avremo per  $T(M \times M')_{(x,x')} = T(M)_x \times T(M')'_x$  la base  $(v \times 0, 0 \times v')$  e l'orientazione della base prodotto sarà il prodotto delle orientazioni ragionando sulle matrici, sulle diverse componenti indipendenti sarà costituita da una base per  $T(M)_a$  e una di  $T([0, 1])_0$  ovvero, spezzando in componenti secondo  $M$  e*

secondo  $R \supseteq [0, 1]$ , da  $((\zeta, 0), (0, 1))$  che assumiamo abbia l'orientazione positiva essendo come matrice una matrice a blocchi con blocco in alto a sinistra  $m \times m$  assunto come di una base positiva rispetto ad una base fissata in  $T(M)_{(a)}$ , e quindi con determinante positivo, ed in basso a destra avendo un blocco  $1 \times 1$  con determinante  $1 > 0$  quindi il determinante sarà il prodotto dei determinanti dei blocchi lungo la diagonale principale e sarà positivo; ora trasliamo e ruotiamo la base così determinata lungo il cammino (liscio, esistendo per ogni punto un vettore velocità che varia in modo liscio) in modo che per ogni punto della curva ad ogni istante di tempo l'ultimo vettore, che varierà nel tempo, sia sempre tangente alla varietà 1-dimensionale ovvero alla curva e perpendicolare allo spazio generato dai primi  $m$  vettori (e questi vettori sono appunto la base del perpendicolare allo spazio tangente ovvero sono una cornice), tali rotazioni per continuità preservano l'orientazione quindi esisterà una base  $\zeta'$  di  $m$  elementi di  $T(M)_{(b)}$  tale che completata in modo canonico con  $(0, 1)$ , con le convenzioni di sopra dove la prima componente è un vettore  $m$ -dimensionale ed il secondo è uno scalare, in modo identico a sopra, così che  $(\zeta', 0), (0, 1)$  sia una base positiva di  $T(M \times [0, 1])_{(b, 1)}$  e inoltre tale base per il ragionamento visto nella prova del lemma 4 pagina 32 si può portare con un cobordismo inquadrate, mediante rotazioni, nella base positiva iniziale dello spazio tangente ad  $M \times [0, 1]$  in  $(a, 0)$ . In modo del tutto analogo si può costruire una cobordismo con cornice fra un insieme vuoto e l'unione di due punti in cui la base del perpendicolare dello spazio tangente è orientata in modo opposto nei due punti.

Prepariamoci ora alla prova basata sui risultati accumulati fino ad ora. Non sarà restrittivo parlare di varietà 1-dimensionali come di curve e di segmenti o intervalli come  $[0, 1]$  (a limite anche di archi di circonferenza come  $S^1$ ) per l'osservazione 1.3.0.1 a pagina 10.

**Osservazione 2.4.0.2.** Citiamo ora il ragionamento enunciato in [I] pur seguendo noi più nel dettaglio [III]: per come specificate le orientazioni nei punti nell'osservazione sopra, si ha che (in modo analogo al caso generale proprio per la definizione 14 della sezione 2.2), variando sui punti  $x$  nella 0-varietà,  $\sum \text{sgn}(x)$  è  $\sum \text{segno}(df(x))$  con  $f$  mappa liscia fra  $M$  e la sfera  $S^m$  ovvero, richiamando la definizione di grado della mappa in un punto, abbiamo che per  $f : M \rightarrow S^p$   $\text{deg}(f) = \sum \text{segno}(df(x)) = \sum \text{sgn}(x)$ , quindi vale  $\text{deg}(f) = \sum \text{sgn}(x)$ , in cui le somme si sono fatte variando  $x$  in  $f^{-1}(y)$ ; la classe di cobordismo incorniciato di una varietà 0-dimensionale è univocamente determinato da  $\sum \text{sgn}(x)$  proprio perchè tale intero determina (in modo esauritivo per come vedremo sotto nella dimostrazione analitica nel caso generale) come sono orientati gli spazi perpendicolari ai tangenti ovvero sente solo le differenze perchè punti con orientamento opposto possono, per quanto detto alla fine dell'osservazione sopra, esser connessi tramite un cobordismo incorniciato con l'insieme vuoto, ovvero si possono non considerare i punti che a coppie hanno orientamento opposto, e quindi per sopra ciò vale sul grado della mappa, inoltre posso sempre ridurmi da sottovarietà incorniciate qualsiasi a varietà di Pontryagin per il teorema 12 di pagina 32 ma allora, per il teorema 11 di pagina 31, essendo varietà di Pontryagin cobordanti con cornice se e solo se le mappe

associate alle varietà sono omotope in modo liscio ottengo che  $f, g$  hanno uguale grado  $\Leftrightarrow \sum \text{sgn}(x)$  per le due mappe è uguale  $\Leftrightarrow$  ottengo una stessa classe di cobordismo di una varietà 0 dimensionale  $\Leftrightarrow$  una stessa classe di cobordismo usando varietà di Pontryagin opportune  $\Leftrightarrow f, g$  sono omotope. Abbiamo allora ottenuto, a meno di qualche verifica, il teorema del grado di Hopf, considerando in particolare funzioni a valori sulla sfera  $p$ -dimensionale  $S^p \subseteq R^{p+1}$  con  $m = p$ :

**Teorema 13** (Teorema di Hopf). *Sia  $M$  varietà di dimensione  $m$  connessa, compatta, orientata e senza frontiera allora due mappe da  $M$  in  $S^p$  sono omotope in modo liscio se e solo se hanno lo stesso grado.*

Nella sezione 2.2 avevamo già ottenuto che l'omotopia liscia implicava avere lo stesso grado ora, a meno di specifiche sul codominio, vale anche l'implicazione inversa. Ovvero abbiamo che l'applicazione fra classi di omotopia di funzioni da  $M$  in  $S^p$  ed interi è ben definita (come sapevamo) ed iniettiva (come appena visto) inoltre è suriettiva infatti per ogni intero fissato possiamo scegliere, nel modo più semplice, un insieme di  $k$  punti tutti con base positiva o negativa a seconda del segno di  $k$  (per  $k=0$  uso la mappa costante) e per il teorema 12 di pagina 32 questa varietà deriva da una certa mappa, che avrà grado  $k$  proprio per la definizione di grado abbiamo quindi che il grado è un'applicazione biettiva dagli interi alle classi di omotopia. Proviamo ora in modo più analitico quanto visto sopra in particolare per quanto visto nella sezione 2 del capitolo 2 è sufficiente provare che due funzioni con uguale grado sono omotope:

*Dimostrazione.* Per  $y$  valore regolare di  $S^p$  ed una base positivamente orientata dello spazio tangente  $T(S^p)_y$  il grado di una mappa  $f$  è uguale, per la definizione data nell'osservazione sopra, alla somma algebrica sui punti della preimmagine delle orientazioni nei punti ovvero  $\sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn}(x)$  inoltre una cornice assegna mediante  $(df_x)^{-1}$  per ogni  $x \in f^{-1}(y)$  ad una base positivamente orientata in  $T(S^p)_y$  una base in  $T(f^{-1}(y))_x \subseteq TM_x$  e che la base sia positiva o negativa dipende dal fatto che  $(df_x)$  preservi l'orientazione o meno (infatti se  $\det(df_x) > 0$  ovvero  $df_x$  preserva l'orientazione allora  $\det((df_x)^{-1}) = \det(df_x)^{-1}$  che è ancora positivo ed analogamente se  $\det(df_x) < 0$  ovvero se  $df_x$  inverte l'orientazione). Supponiamo  $\deg(f) = \deg(g) = k > 0$  ovvero abbiamo scelto una classe di funzioni di grado  $k$  che preserva l'orientazione, analogamente funziona usando  $-k$  ovvero avendo diffeomorfismi che invertono l'orientazione:

$m \geq 2$  Pensiamo senza perdita di generalità, elidendo i punti con orientazione opposta in  $f^{-1}(y)$  e così in  $g^{-1}(y)$  con un cobordismo con l'insieme vuoto finché non rimangono punti con orientazione concorde il che è possibile per quanto detto alla fine della osservazione sopra, al caso in cui la controimmagine di  $f$  e  $g$  in  $y$  contiene  $k$  punti tutti con orientazione positiva connettiamo allora tali punti con cobordismi che non si intersecano (vale infatti per il risultato citato in [III] a pagina 19 che se due sottovarietà uno dimensionali si intersecano in una varietà di dimensione  $\geq 3$  allora per ogni insieme aperto della varietà ambiente che contenga l'intersezione esiste una curva che coincide con una delle due curve fuori

dall'intorno e nell'intorno non interseca l'altra quindi usando come cobordismi delle varietà 1-dimensionali, infatti connettiamo dei punti, ovvero varietà 0-dimensionali, possiamo supporre che tali curve negli intorni non si intersechino applicando a tutte le intersezioni possibili il risultato citato in modo da ottenere curve con uguali estremi ma senza alcuna intersezione e così la loro unione dà un cobordismo esplicito fra  $f^{-1}$  e  $g^{-1}$  ovvero formalmente siano, dopo eventuali semplificazioni di punti discordi  $x_1, \dots, x_k$  punti in  $f^{-1}$  e  $z_1, \dots, z_k$  punti in  $g^{-1}$  allora indicando con  $\gamma_{x_i, y_i}$  le 1-varietà senza intersezione costruite come sopra, si ha che  $\cup_{i=1, \dots, k} \gamma_{x_i, y_i}$  è il cobordismo cercato, come insieme (il cobordismo formale si ottiene pensando a  $\gamma$  come dipendente da  $t$  in modo che in  $(t=)0 \forall i = 1, \dots, k \gamma_{x_i, y_i} = x_i$  e in  $(t=)1 \forall i = 1, \dots, k \gamma_{x_i, y_i} = y_i$  ovvero abbiamo  $\gamma_{x_i, y_i}(t)$  con  $t \in [0, 1]$ ). Allora come esplicitato nell'osservazione sopra possiamo anche mettere una cornice per ogni componente connessa con archi in modo da avere, fissate le basi  $\zeta$  e  $\zeta'$  rispettivamente di  $T(f^{-1}(y))_x$  e  $T(g^{-1}(y))_x$ , un cobordismo con cornice fra  $(f^{-1}(y), f^*\zeta)$  e  $(g^{-1}(y), g^*\zeta')$  quindi per il teorema 11 di pagina 31 le due funzioni sono omotope in modo liscio.

$m = 1$  Ragioniamo come prima non potendo però muovere le curve come vogliamo, perchè non c'è abbastanza "spazio", abbiamo che per il risultato citato nell'osservazione 1.3.0.1 a pagina 10  $M$  è diffeomorfo ad  $S^1$  o ad intervalli, possiamo assumere quindi  $M = S^1$ , proviamo allora che il grado mappa le classi di omotopia delle funzioni da  $S^1 = M$  in  $S^1$  in modo biiettivo negli interi così da avere come conseguenza che se due funzioni hanno uguale grado sono anche omotope : questo è un risultato noto ma cerchiamo di mostrarlo con quanto sappiamo. Sia  $x \notin f^{-1}(y) \cup g^{-1}(y)$  e prendiamo la proiezione stereografica 1-dimensionale dal punto  $x$ ,  $h : S^1 - x \rightarrow \mathbb{R}$  siano  $\{x_1, \dots, x_m\} = f^{-1}(y)$  elencando le controimmagini in modo che percorrendo in senso orario, a partire da  $x$ ,  $S^1$ , trovo prima quelle con indice minore ovvero  $x_i$  prima di  $x_{i+1}$  ovvero  $x_i$  è l' $i$ -esimo elemento incontrato muovendosi in questo modo; ora prendiamo un punto (con orientazione negativa) in cui il segno è -1 e consecutivo o precedente (nell'ordine descritto sopra) ce ne sia uno con segno +1 ad esempio siano  $x_i$  con segno -1 e  $x_{i+1}$  con segno +1 allora, per quanto detto nell'osservazione sopra, possiamo costruire, con la proiezione stereografica, un cobordismo incorniciato attraverso l'insieme vuoto fra i due punti con orientazione opposta che non intersechi il cammino costante che connette gli altri punti e facendo questo finchè non abbiamo eliminato a due a due i punti vicini con orientamento opposto così da averne solo con orientamento concorde infatti per induzione dall'alto, so che se ho  $n$  punti con un segno ed  $m$  con un altro con  $n \leq m$  al massimo possono esser vicini tutti gli  $m$  e gli  $n$  ma esisteranno esattamente due punti in cui vi è un cambio di segno ed in cui posso applicare il ragionamento, se ne rimane 1 in un verso ed  $m - n + 1$  nell'altro esisteranno due indici vicini tali che i corrispondenti punti hanno segni opposti e così ottengo  $m - n$  punti concordi. Per quanto sopra ho ottenuto  $k$  punti con orientamento positivo  $\{x_1, \dots, x_k\}$  che per costruzione

è cobordante con cornice a  $f^{-1}(y)$  facciamo lo stesso con  $g^{-1}(y)$  così da ottenere  $\{x'_1, \dots, x'_k\}$  che per costruzione sarà ancora cobordante con cornice a  $g^{-1}(y)$  infine costruiamo un cobordismo con cornice fra  $\{x_1, \dots, x_k\}$  e  $\{x'_1, \dots, x'_k\}$  così da concludere, per la transitività del cobordismo con cornice, che  $f^{-1}(y)$  e  $g^{-1}(y)$  sono cobordanti con cornice. Infatti con la proiezione stereografica possiamo costruire cammini lisci disgiunti fra tali punti e facendo l'unione di ciascuno di questi cobordismi con cornice fra coppie di elementi (per come fatto nell'altro caso della prova) ottengo un cobordismo con cornice fra i due insiemi  $(f^{-1}(y), f^*\zeta)$  e  $(g^{-1}(y), g^*\zeta')$  quindi ancora per il teorema 11 di pagina 31 le due funzioni sono omotope in modo liscio.

□

**Osservazione 2.4.0.3** (ancora il grado modulo due). *Citiamo un risultato, in modo discorsivo, che richiama la nozione, apparentemente, più stretta data nella sezione 1 infatti si ha che il ruolo che ha il grado di Brouwer per le varietà orientate è il medesimo di quello che ha il grado modulo due per le varietà non orientate: per  $M$  non orientabile possiamo partire da un punto e dopo un giro completo ottenere nello stesso punto una base con l'orientazione opposta proprio perchè non è ben definita un orientazione; anche qui, parlando di mappe a valori nella sfera  $S^p$  di dimensione  $p=m$  piuttosto che valori in  $N$ , dopo aver richiamato alcune nozioni sul grado e qualche conto, vale un risultato analogo a quello sopra:*

**Teorema 14.** *Sia  $M$  varietà di dimensione  $m$ , connessa, non orientabile e senza frontiera allora due mappe da  $M$  in  $S^p$  sono omotope se e solo se hanno lo stesso grado modulo 2.*

Da questo capitolo si sarebbe potuti proseguire per una via più analitica, passando attraverso alcuni accenni interessanti ad esempio la teoria delle k-forme, Gauss-Green, il teorema della divergenza ed in generale il teorema di Stokes, per un approccio vedi [XIV] in cui quanto esposto sopra si è integrato con le forme differenziali.

## Capitolo 3

# Teorema di Poincarè-Hopf

### 3.1 Indice somma e mappa di Gauss

**Osservazione 3.1.0.1** (ancora sul campo di vettori). *Abbiamo visto in modo formale nella definizione 18 di pagina 26 cos'è un campo di vettori su una varietà, a noi ora, per introdurre un'idea delicata, servirà meno e ragioneremo su campi del tipo  $v : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , avevamo notato che la mappa manda la sfera  $S^n$  in sé. Quanto detto finora nasconde un po' l'origine dinamica che nella definizione 18 pagina 26 non era stata osservata, infatti sarebbe un'applicazione (regolare o  $C^\infty$ ) che va da  $M$  varietà a  $TM$  spazio tangente ad essa (in modo formale, senza specificare il punto), ovvero all'unione degli spazi tangenti nei diversi punti (di fatto è il fibrato tangente) tale che per ogni punto  $p(t)$  associa il vettore  $v(p(t))$  che sta in  $TM_{p(t)}$  ovvero con notazioni tradizionali associa al punto  $(p(t))$  il vettore velocità nel punto  $(p'(t))$  che per definizione è tangente al punto ovvero sta nel codominio indicato; quindi noi considereremo come campo a seconda delle situazioni una mappa definita sia sull'insieme  $M$  nel complesso sia localmente su una collezione di suoi aperti ovvero passeremo spesso dalla visione globale a quella in carte per una definizione rigorosa dobbiamo però fare un po' di lavoro considerando il caso più semplice degli intorni e dello spazio euclideo. Possiamo pensare al campo come ad una applicazione che per ogni punto della superficie assegna le forze agenti o le accelerazioni sentite dal punto nel moto lungo la superficie, ovvero come l'ambiente influenza la dinamica degli oggetti. Ora supponiamo esista uno zero isolato della funzione  $v(x)$  ovvero  $\exists z$  tale che  $v(z) = 0$ , il campo  $\frac{v(x)}{\|v(x)\|}$  non è definito in  $z$  (diremo zero degenerare quello in cui la derivata del campo si annulla) però sulla superficie di una piccola sfera (di raggio  $\epsilon$ ) centrata in  $z$  ( $\partial B_\epsilon(z)$ ) la mappa  $v(x)$  è definita e l'immagine sarà nella sfera unitaria ( $S^n$ ).*

**Definizione 22** (indice di un campo vettoriale). *Diremo **indice**  $\iota$  della mappa  $v(x)$  (ovvero del campo liscio  $v : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ) nello zero  $z$  il grado (di Brouwer) della mappa  $v : \partial B_\epsilon(z) \rightarrow S^n$  con  $B_\epsilon(z)$  piccolo intorno dello zero  $z$ , che non contiene altri zeri, con  $\partial B_\epsilon(z)$  orientata come bordo di tale palla e pensando*

la superficie sferica (detta ipersfera)  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$  come frontiera della palla unitaria  $(n+1)$ -dimensionale chiusa  $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| \leq 1\}$  con l'orientazione che deriva dalla palla stessa.

**Osservazione 3.1.0.2.** Questa costruzione non dipende dal raggio  $\epsilon$  scelto infatti essendo il campo  $v$  nel complesso liscio i campi  $v'_1$  e  $v'_2$  ristretti alle due sferette  $(B_{\epsilon'}(z)$  e  $B_{\epsilon''}(z))$  saranno omotopi in modo liscio proprio attraverso il campo  $v$  (visto come omotopia) e quindi per quanto visto sul grado le due funzioni avranno uguale grado e quindi l'indice sarà lo stesso e quindi ben definito. Per una prova che questa definizione è sensata, assumendo però altre ipotesi, vedere p.6-7 di [V].

Questo intero rispecchierà alcune proprietà topologiche del campo vettoriale nell'intorno del punto e vedremo che questo intero è invariante sotto diffeomorfismi del dominio.

Cerchiamo di capire il concetto molto semplice che ci sta sotto:

**Osservazione 3.1.0.3** (in modo dinamico...). *Pensando il campo come dato e ragionando vicino allo zero del campo in un intorno senza altri zeri (il che è lecito supponendo gli zeri isolati ed avendo essi misura nulla), infatti se nell'interno della palleta si hanno altri zeri spezzando in altre sferette più piccole si ha che l'indice del campo sugli zeri è la somma degli indici su ogni singolo zero usando che nella regione esterna agli intorni degli zeri, non ho zeri, e posso estendere dal bordo all'interno e quindi lì la mappa ha grado 0 per il lemma 2 di pagina 22, osserviamo l'angolo compreso fra il vettore del campo in un punto ed una direzione fissata e muovendoci su una curva, esempio su una circonferenza ovvero il bordo di una palla centrata nello zero, all'interno di tale intorno possiamo determinare a meno di  $2\pi$  in modo univoco l'angolo del campo rispetto alla direzione fissata chiedendo che sia continua rispetto alla distanza percorsa lungo la curva ovvero che vari con continuità lungo essa oppure chiedendo la regolarità del campo ovvero che l'insieme dei vettori vari in modo continuo muovendosi nel dominio del campo, all'istante finale abbiamo che il vettore avrà la stessa direzione dell'istante iniziale ovvero nel girare lungo la curva avrà compiuto un multiplo intero di  $2\pi$  di rotazioni e l'indice sarà proprio tale intero (finito) contando come positive le rotazioni in senso antiorario e negative quelle in senso orario e detto  $\alpha(\theta)$  angolo di rotazione del vettore del campo rispetto ad una direzione fissata dopo aver percorso un angolo  $\theta$  sulla circonferenza si avrà  $\alpha(2\pi) - \alpha(0) = 2\pi j$  con  $j$  intero che indica l'avvolgimento del campo rispetto alla direzione fissata. Inoltre tale rappresentazione non dipende dal raggio (vedi p.4 di [VIII]) e non dipende dal punto iniziale scelto come non dipende dalla curva scelta e non sente deformazioni o perturbazioni, purchè piccole; in generale se si calcola la "variazione angolare" girando attorno ad un punto regolare per il campo senza alcun zero dentro la superficie delimitata dalla curva, il risultato è zero così che si possa scegliere qualsiasi campo vettoriale costante e parallelo come direzione di riferimento del nostro campo. Se pensiamo invece ad un campo come all'insieme dei vettori tangenti, nello spazio tangente, ad un punto su una superficie chiusa (regolare tanto da possedere per ogni punto un*



vettore che varia con continuità nell'intorno ovvero si ha almeno una derivata prima continua per ogni punto che ne rappresenta la velocità) anche il vettore (che posso supporre di lunghezza unitaria quindi un versore) normale varierà con continuità e sarà definito dove esiste il piano tangente ovvero dappertutto ad esclusione di alcuni punti (singolari) in cui non ho alcun vettore definito ovvero non esiste la tangente ovvero la derivata si annulla, il campo in tale caso si dirà regolare sulla superficie. Ragionando come sopra prendendo una curva chiusa semplice (senza autointersezioni) attorno a tale punto senza altri punti singolari all'interno di essa curva, localmente come già visto posso definire un campo tangente non singolare e definire l'indice come sopra ovvero la variazione angolare del nuovo campo locale rispetto ad un campo fissato diviso per  $2\pi$ . La differenza di indice fra due campi su una superficie in un punto è la differenza delle variazioni dei due campi muovendosi attorno al punto singolare (vedendo il campo come derivate o insieme di vettori velocità) o zero del campo (vedendo il campo come costituito intrinsecamente da vettori) e questa definizione ha senso anche senza saper l'indice dei singoli campi intorno al punto e senza specificare il campo di riferimento infatti contano solo le variazioni angolari che non sentono tali differenze.

Vediamo ora alcuni concetti simili:

**Osservazione 3.1.0.4** (l'indice di avvolgimento). *L'indice di avvolgimento di  $v(\Gamma)$  (campo definito sul supporto della curva  $\gamma$ ) attorno all'origine (o un punto fissato non appartenente alla curva) traduce il fatto che fissato un osservatore nell'origine per seguire la curva nel suo moto (ovvero il moto di un oggetto sulla curva) tale osservatore deve ruotare attorno a sè stesso un certo numero di volte (multipli di  $2\pi$ ) ovvero viceversa la curva si avvolge attorno al punto un certo numero di volte (con avvolgimenti in senso orario contati come negativi e quelli in senso antiorario come positivi). Analiticamente l'angolo che ci interessa è quello fra un vettore fissato e quello applicato nel medesimo punto dopo aver percorso la curva secondo la sua orientazione. Usando un po' di analisi complessa :  $\gamma(t) = \rho e^{i\phi(t)} = |\gamma(t)|e^{i\phi(t)}$  parametrizzazione della curva (e sua decomposizione polare) con dominio l'intervallo  $[a, b]$  e  $\gamma(a) = \gamma(b)$  perchè chiusa, abbiamo che  $e^{i\log|\gamma(b)|+i\phi(b)} = e^{i\log|\gamma(a)|+i\phi(a)}$  semplificando  $e^{i(\phi(b)-\phi(a))} = 1$  quindi  $\phi(b) = \phi(a) \text{ mod } 2\pi$  che è il difetto angolare dopo un giro sulla curva e inoltre se  $z = \gamma(t) = e^{\log|\gamma(t)|+i\phi(t)}$   $dz = (d\log|\gamma(t)| + i\phi(t)')e^{\log|\gamma(t)|+i\phi(t)}$  quindi  $dz/z = (d\log|\gamma(t)| + i\phi(t)')$  e  $\int_{\gamma} dz/z = \int_a^b (d\log|\gamma(t)| + i\phi(t)')dt$  ma il logaritmo dove è definito è esatto ovvero dà contributo nullo quindi tale integrale rimane  $i(\phi(b) - \phi(a))$  ma per sopra tale differenza è un multiplo intero di  $2\pi$  quindi diviso  $2\pi$  è un intero ed ha quindi senso definire il numero di avvolgimento di  $\gamma$  rispetto al punto  $0$  come  $W(\gamma, 0) = \frac{\phi(b)-\phi(a)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} dz/z$  da qui segue che considerando la funzione elevamento a potenza complessa  $g : z \in C \rightarrow z^k \in C$  vale  $dg(z)/g(z) = kz^{k-1}dz/z^k = (k dz)/z$  e quindi  $W(f(\gamma), f(0)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} dg(z)/g(z) = \frac{k}{2\pi i} \int_{\gamma} dz/z = kW(\gamma, 0)$  quindi considerando la curva complessa  $\gamma(t) = \cos(t) + i\sin(t)$  con  $t$  nell'intervallo  $[0, 2\pi]$  la curva gira 1 volta attorno all'origine mentre  $f(\gamma(t))$  gira  $k$  volte (in senso positivo per la para-*

metrizzazione della curva) attorno a  $f(0)$  analogamente per il coniugato della potenza  $\bar{z}^k$ , la cui derivata è per linearità (della derivata)  $k \bar{dz}/z$  quindi l'unica differenza è che ora percorrerò nell'immagine la curva in senso opposto ma sempre  $k$  volte e l'indice di avvolgimento sarà  $-k$ . Questo è un invariante topologico ovvero se una curva ha un certo indice di avvolgimento rispetto ad un punto anche l'immagine mediante un omeomorfismo ha lo stesso indice di avvolgimento rispetto all'immagine omeomorfa del punto ed anche variando la posizione del punto senza attraversare la curva ovvero senza cambiare regione delimitata dalla curva l'indice rimane lo stesso e viceversa deformando con continuità la curva senza toccare il punto si ha che l'indice rimane lo stesso ovvero è un invariante omotopico.

**Osservazione 3.1.0.5** (grado topologico). Questo è un concetto generale che misura il numero di avvolgimenti di una funzione fra spazi topologici della stessa dimensione come nel caso dell'indice di avvolgimento anch'esso è un invariante omotopico ovvero è invariante per deformazioni continue; a noi sarà sufficiente analizzare la mappa  $\frac{v(x)}{\|v(x)\|}$  da  $S^1$  (analogamente per  $S^n$ ) in sé ovvero con  $\Gamma = S^1$ , tale mappa si può vedere dinamicamente come un archetto o laccio che si avvolge scorrendo sulla circonferenza un certo numero di volte e quindi come nel caso dell'indice di avvolgimento, avremo un intero positivo o negativo a seconda che l'avvolgimento sia in senso antiorario o orario. In realtà abbiamo visto già qualcosa di simile...infatti per  $M = N = S^n$  il grado di Brouwer ed il grado topologico coincidono.

In particolare un concetto un po' più intuitivo e dinamico è quello descritto in modo discorsivo, dopo la definizione analitica, nell'osservazione 3.1.0.3 che ne è l'analogo considerando delle curve (per esempio piane) e traduce il comportamento del campo sui punti della curva in un intorno, non soffermiamoci sulle ipotesi generali e apprezziamo piuttosto le analogie:

**Definizione 23** (indice per una curva). Dato un campo vettoriale  $v(x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  continuo ed una curva chiusa ("sufficientemente regolare" in modo tale da "disegnarla" e da avere quasi dappertutto un unico vettore tangente ad essa: ad esempio  $C^1$  a tratti)  $\gamma$  parametrizzata dalla funzione continua (o  $C^1$ )  $\gamma(t)$  con  $t$  che varia in un intervallo, il cui supporto non contenga punti critici o singolari (o zeri) del campo ovvero tale che  $v(\gamma(t)) \neq 0 \forall t$  nell'intervallo (tali punti sono problematici perchè considerando il campo indotto sulla curva traducono il fatto che non esiste un vettore tangente alla curva ben definito). Così per ogni punto della curva il campo associa un vettore applicato in quel punto, e tale vettore è non nullo, allora percorrendo tutta la curva possiamo veder come varia il vettore del campo allo scorrere del parametro  $t$  della curva; tale variazione è continua ed in "quasi" ogni punto della curva dopo un giro completo lungo la curva il vettore del campo deve esser unico (per ipotesi di regolarità della curva) altrimenti non esisterebbe la tangente e non sarebbe  $C^1$  a tratti; ciò significa che i vettori del campo percorrendo la curva compiono giri multipli di  $2\pi$ . Il numero di giri (che per quanto detto è un intero) si dice indice del campo  $v(x)$  lungo la curva  $\Gamma$ .

**Osservazione 3.1.0.6.** Questo indice è un invariante omotopico ovvero se de-formo con continuità la curva (continua) chiusa (senza farle attraversare il punto critico ovvero senza che il punto cambi regione delimitata dalle varie parti della curva, infatti attraversando il punto critico annullerei il campo e non esisterebbe più un vettore tangente e così non sarebbe più definito l'angolo) anche l'angolo varierà con continuità essendo il campo vettoriale continuo e quindi dovendo l'angolo avere valori discreti si ha che l'angolo non varia affatto ovvero è stabile per perturbazioni, purchè piccole.

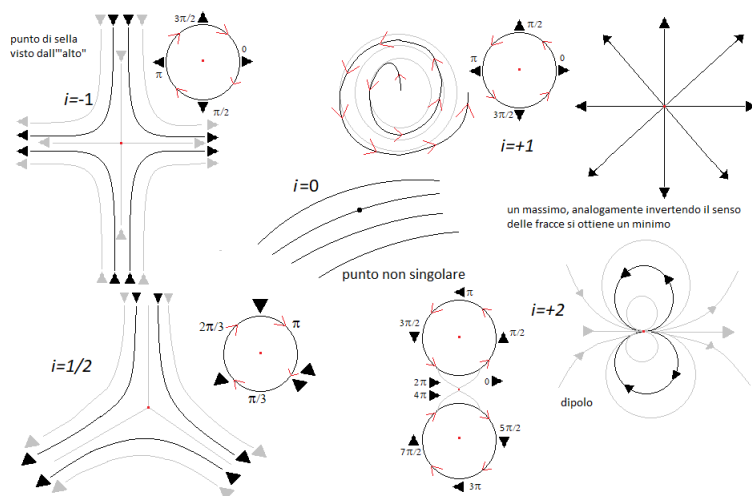


Figura 3.1: esempi di gradi per campi vettoriali osservando la rotazione rispetto ad una direzione fissata dei vettori del campo

**Osservazione 3.1.0.7** (dalla definizione 23 alla definizione 22). Dalla definizione di indice di una curva vista sopra si potrebbe dare una definizione di indice di un punto considerando attorno al punto un intorno senza punti critici (ciò è possibile essendo uno zero isolato) ed una circonferenza centrata nello zero (il cui raggio per invarianza omotopica non conta come pure la scelta di una curva particolare come la circonferenza) così calcolando l'indice del campo sulla curva chiusa rispetto al punto interno otteniamo la definizione 22. Per punti non critici si ha indice nullo infatti restringendomi con intorni sempre più piccoli attorno al punto, l'angolo fra i vettori del campo, che variano con continuità, diventerà sempre più piccolo ed infine nullo e così sarà per invarianza omotopica per ogni altra curva che non contenga punti critici.

Come visto per tale concetto abbiamo diverse nozioni equivalenti ed altre sono ancora possibili:

**Osservazione 3.1.0.8.** Citiamo questa costruzione proprio perchè riconnette la nozione di indice di campo e di spazio tangente in modo molto piano. Un elemento di linea sulla superficie è determinato da un vettore non nullo su essa e

così da tutti i suoi multipli non nulli e lo penseremo come una retta nello spazio tangente. Un campo regolare di elementi di linea in una regione è una famiglia di curve nella regione in modo che per ogni punto della regione gli elementi di linea sono tangenti alla curva in quel punto ovvero penseremo ai vettori come ai vettori "velocità" o tangenti delle curve ovvero dei "moti" (ideali) quindi la sostanza fisica del campo sono le curve ma ciò che ci è permesso vedere ed analizzare sono solo i vettori ovvero i moti istantanei, oppure le forze ovvero quantità legate ai moti stessi ma mediante derivazione, quindi risolvere il problema ovvero trovare le curve servirà un'operazione di integrazione di equazioni differenziali. Se esiste un campo regolare in una regione tranne che in un singolo punto e se non si può estendere per continuità in modo unico il campo anche nel punto, detto punto si dirà avere una singolarità ovvero nel punto non è definita alcuna tangente ovvero il vettore "velocità" che corrisponde alla derivata prima è nullo. Definiamo l'indice in una singolarità isolata del campo di elementi di linea usando una curva chiusa semplice con una sola singolarità all'interno e nessuna su essa quindi poichè il campo sulla superficie dà un vettore per ogni punto della superficie ne assegna uno anche per ogni punto della curva e quindi esiste un campo (di elementi di linea) indotto sulla curva che pensiamo come parametrizzata in  $[0, 1]$  e scegliendo una delle due possibili direzioni date dagli elementi di linea nel punto della curva corrispondente allo 0 abbiamo "inversioni" ovvero ammettendo uno spostamento massimo di  $\pi/2$  nei due sensi orario ed antiorario), una direzione fissata (ereditata dal campo) per ogni punto e misureremo la variazione angolare nel muoversi lungo la curva rispetto ad un campo definito in tutta la regione e costante per ogni punto e definiremo l'indice come  $1/2\pi$  la variazione angolare del campo attorno alla curva rispetto ad un campo costante fissato. Non abbiamo specificato nè la curva nè il campo costante di riferimento perchè l'indice non dipende da essi infatti considerando il campo di elementi di linea  $A$  ed il campo costante  $B$  se prendo un altro campo costante  $C$  allora vale che la variazione di  $A$  rispetto a  $B$  è la somma delle variazioni di  $A$  rispetto a  $C$  e di  $C$  rispetto a  $B$  e prendendo la curva sufficientemente piccola così che la differenza fra i campi localmente vari può rendere la variazione di  $C$  rispetto a  $B$  piccola a piacere essendo entrambi continui e senza singolarità ma essendo tale differenza un multiplo intero di  $2\pi$ , per definizione di indice, tale differenza sarà nulla e quindi le differenze di  $A$  rispetto a  $B$  e  $C$  sono uguali, inoltre per la stessa definizione di indice abbiamo che l'indice è un intero mentre la variazione angolare è una quantità che varia con continuità quindi l'indice è indipendente (per piccole perturbazioni) dalla curva.

Ad esempio potremmo anche volgerci verso la fisica vedendo i campi come realizzazione di una forza o la fisica matematica vedendo i vettori di campo come gradiente di una certa funzione definita sulla superficie si può cercare di risolvere (integrare) delle equazioni differenziali la cui soluzione (unica se si ha sufficiente regolarità essendo un problema di Cauchy) sono le linee di flusso ovvero le curve che per ogni punto hanno come vettore tangente, o velocità, il vettore del campo in quel punto. Estendiamo la definizione di indice alle funzioni fra varietà:

**Definizione 24.** Siano  $M$  e  $N$  varietà con campi vettoriali e sia  $f : M \rightarrow N$ , allora il campo  $v(x)$  su  $M$  corrisponde attraverso  $f$  al campo  $v'(x')$  su  $M'$  se  $\forall x \in M$   $df_x$  porta  $v(x)$  in  $v'(f(x))$  ovvero la funzione definita sugli spazi vettoriali tangenti porta un vettore tangente nel dominio, applicato nel punto  $x$  nel vettore tangente al codominio, applicato nell'immagine attraverso  $f$  del punto  $x$ . Per  $f$  diffeomorfismo tale corrispondenza è biunivoca e  $v'(x')$  è univocamente determinato da  $v(x)$  infatti in tal caso esiste (localmente)  $f^{-1}$  e sarà  $x' = f(x)$  e  $v'(x') = v'(f(x)) = df_x \circ v(x)$  e quindi come funzioni  $v' = df \circ v \circ f^{-1}$ . Per passare al caso delle varietà useremo quindi carte locali per ricondurci al caso euclideo, vedendo la varietà come globalmente immersa nello spazio euclideo oppure localmente, ovvero in modo del tutto identico alla definizione data ad inizio capitolo per i campi in generale.

Il grado (e quindi l'indice) è una proprietà locale quindi avrà senso restringersi al caso euclideo:

**Lemma 9.** Ogni diffeomorfismo  $f$  che preserva l'orientazione da  $R^m$  in sé è isotopo all'identità.

*Dimostrazione.* Assumiamo per esempio che  $f(0) = 0$ , la derivata direzionale  $m$ -dimensionale in  $0$  è  $df_0(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tx) - f(0x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tx)}{t}$  definiamo l'isotopia  $F : R^m \times [0, 1] \rightarrow R^m$  tale che

$$\begin{cases} F(x, t) = \frac{f(tx)}{t} & \text{per } 0 < t \leq 1 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tx)}{t} = df_0(x) & \text{per } t = 0 \end{cases}$$

inoltre è definita in modo che sia diffeomorfismo essendo tale  $f$  e nel punto di possibile discontinuità è definita proprio in modo che abbia la regolarità richiesta per esempio per  $g_1, \dots, g_m$  regolari (lisce)  $f(x) = x_1 g_1(x) + \dots + x_m g_m(x)$ , allora per la definizione di  $F(x, t)$  si ha che  $F(x, t) = \frac{x_1 t g_1(tx) + \dots + x_m t g_m(tx)}{t} = x_1 g_1(tx) + \dots + x_m g_m(tx)$  che è definita anche al limite per  $t \rightarrow 0$ ; la presunta esistenza delle funzioni lisce si basa su un risultato (provato a p.5 in [VIII]) che afferma che per  $f$  da un intorno convesso  $V$  ad  $R$  che si annulla in  $0$ , esistono funzioni differenziabili sull'intorno  $V$  tali che  $(\partial f / \partial x_i)(0) = g_i(0) \forall i = 1, \dots, n$  e tali che  $f = \sum_{i=1}^n x_i g(x_1, \dots, x_n) \forall (x_1, \dots, x_n) \in V$  quindi al limite vale  $F(x, t) = \sum_{i=1}^n (\partial f / \partial x_i)(0) x_i = df(x)_0$ . Quindi poichè  $F(x, 1) = f(x)$  e  $F(x, 0) = df_0(x)$  e  $df_0(x)$  essendo isomorfismo lineare è isotopo all'identità, per la transitività dell'isotopia si ha che  $f(x)$  è isotopo all'identità.  $\square$

**Osservazione 3.1.0.9.** Un fatto utile, intravisto appena sopra, che è una semplice constatazione, è che lavorando con diffeomorfismi, per il teorema della funzione inversa, nell'intorno il determinante è costante in segno e quindi nel caso conservi l'orientazione si può deformare il diffeomorfismo, almeno localmente dove esiste, isotopicamente fino all'identità, nel caso inverte l'orientazione fino ad una riflessione e poichè il grado è un invariante isotopico avremo, come si vedrà in modo dettagliato poi, grado rispettivamente  $+1$  e  $-1$  e avremo due classi di isotopia che rappresentano localmente ed in modo esaustivo tutti

*i possibili comportamenti dei diffeomorfismi infatti per le due classi di diffeomorfismi (quelle a determinante positivo e negativo in cui il moltiplicare per matrici a determinante positivo è un'operazione interna) posso scegliere come rappresentanti proprio l'identità e la riflessione.*

**Osservazione 3.1.0.10** (l'analogo del lemma 9 di pagina 53 per i diffeomorfismi che invertono l'orientazione ovvero  $\det(df_x) < 0$ ). *Ogni diffeomorfismo che inverte l'orientazione si costruisce con una riflessione ed un diffeomorfismo che preserva l'orientazione ovvero vale l'analogo del lemma 9 sopra ovvero un diffeomorfismo che inverte l'orientazione è isotopo ad una riflessione.*

**Lemma 10.** *Se il campo  $v(x)$  su  $U$  corrisponde attraverso il diffeomorfismo  $f : U \rightarrow U'$  al campo  $v'(x') = df \circ v \circ f^{-1}(x')$  su  $U'$  allora l'indice di uno zero isolato  $z$  per  $v(x)$  è uguale all'indice di  $v'(x')$  in  $f(z)$  che effettivamente è uno zero infatti  $(df \circ v \circ f^{-1})(f(z)) = (df \circ v)(z) = 0$ .*

*Dimostrazione.* E' sufficiente per semplicità supporre  $z = 0 = f(z)$  ed  $U \subseteq R^m$  intorno aperto convesso :

$f$  **preserva l'orientazione** allora per il lemma 9 sopra (chiamando  $F(x, t) = f_t(x)$ ) costruisco una famiglia di funzioni (inclusioni in  $R^m$ ) nel parametro  $t$   $f_t : U \rightarrow R^m$  tali che  $f_t(x) \in R^m$  e tali che  $f_0 = \text{identità}$  e  $f_1 = f$  e  $f_t(0) = 0 \forall t \in [0, 1]$  ovvero tutte queste funzioni in 0 valgono 0 come la funzione identità e la funzione  $f$  (e tale 0 è uno zero isolato) e rendono la funzione assegnata isotopa all'identità. Sia  $v_t$  il campo su  $f_t(U)$  corrispondente al campo  $v$  su  $U$  tramite il diffeomorfismo  $f_t(x)$  ovvero tale che sull'immagine sia la funzione  $df_t \circ v \circ f_t^{-1}$  (con dominio l'immagine  $f_t(U)$ ); tali campi di vettori sono definiti e non nulli in una sfera sufficientemente piccola centrata in 0 (visto come immagine) infatti in 0, essendo  $f_t(0) = 0$  e  $v(0) = 0$  ho  $(df_t \circ v \circ f_t^{-1})(0) = (df_t \circ v)(0) = 0$  ma essendo 0 uno zero isolato per  $v(x)$  non ho altri suoi zeri nelle vicinanze di 0 e così vale per  $f_t(x)$  avendola costruita con tale zero isolato. Allora

$$\begin{aligned} \deg(v_t, 0) &= \sum_{x \in v_t^{-1}(0)} \text{segno } d(v_t)_x = \\ &= \sum_{x \in \{0\}} \text{segno } d(v_t)_x = \sum_{x=0} \text{segno } d(f_t)_0 d(v)_0 d(f_t^{-1})_0 \end{aligned}$$

essendo  $f_t^{-1}(0) = 0$  e  $v(0) = 0$ , ma per ipotesi  $f$  mantiene la sua orientazione e così  $f^{-1}$  infatti se la matrice del cambiamento di base ha determinante positivo  $\alpha$  allora la matrice di cambiamento di base inversa è proprio la matrice inversa che avrà come determinante  $1/\alpha$  che sarà pure positivo, e così in modo analogo per  $f_t$  e  $f_t^{-1}$  infatti se variasse l'orientazione varrebbe il segno del determinante e così si annullerebbe ed otterrei nuovi zeri, oltre a quelli di  $v$ , per il campo  $v'$ , cosa che nel piccolo intorno dello zero ho assunto non accadere quindi sia  $f_t$  che  $f_t^{-1}$  conservano l'orientazione ovvero i loro differenziali sono entrambi positivi quindi tale somma

si riduce a dire che  $\deg(v_t, 0) = \text{segno } d(v)_0 = \deg(v, 0) = \deg(v_0, 0)$  e questo per ogni  $t \in [0, 1]$  ovvero anche per  $t = 1$  dove, per costruzione,  $v_1 = v'$  quindi si ha che (il grado) l'indice di  $v = v_0$  è uguale (al grado) all'indice di  $v' = v_1$ .

**$f$  inverte l'orientazione** per esempio  $f$  sia la riflessione  $r$ , infatti abbiamo sempre parlato, come in tal caso, di due classi di diffeomorfismi e sappiamo che la riflessione è un rappresentante per i diffeomorfismi che invertono l'orientazione come l'identità lo è per quelli che la conservano ovvero vale un'osservazione analoga al lemma 9 di 53, per un accenno vedi l'osservazione 3.1.0.10 di pagina 54; allora come sopra si avrà essendo  $r$  lineare che la funzione  $v'$  corrisponde alla funzione  $(dr \circ v \circ r^{-1}) = (r \circ v \circ r^{-1})$  e se poniamo  $v(x) := v(x)/|v(x)|$  abbiamo che

$$v'(x') := v'(x')/|v'(x')| = \frac{(r \circ v \circ r^{-1})(x')}{|(r \circ v \circ r^{-1})(x')|}$$

ma  $r$  non modifica il modulo quindi ciò è uguale a  $\frac{(r \circ v \circ r^{-1})(x')}{|v(x)|}$  e come sopra abbiamo che, essendo  $r$  ed  $r^{-1}$  una opposta dell'altra e  $r(0) = 0 = r^{-1}(0)$  e  $v(0) = 0$ ,

$$\begin{aligned} \deg(v', 0) &= \sum_{x \in v'^{-1}(0) = v^{-1}(0)} \text{segno } d(v')_x = \\ &= \sum_{x \in \{0\}} \text{segno } d(r)_0 d(v)_0 d(r^{-1})_0 = \sum_{x=0} \text{segno } d(r)_0 d(v)_0 d(r^{-1})_0 \end{aligned}$$

ma  $dr$  e  $dr^{-1}$  sono in ogni punto matrici uguali e con entrambe determinante  $-1$  (per la forma della matrice vedi l'osservazione 2.2.0.8 di pagina 25) che quindi non contribuisce al segno ovvero  $\deg(v', 0) = \text{segno } d(v)_0 = \deg(v, 0)$  quindi  $v$  e  $v'$  hanno uguale grado e quindi uguale indice.

□

**Osservazione 3.1.0.11.** *C'è un collegamento fra l'indice del campo  $v$  in uno zero  $z$  e le derivate di  $v$  in  $z$  (infatti legati al campo si hanno le curve, i cui vettori del campo sono i tangenti, che rappresentano le proprietà del campo tali curve si vedono come soluzioni (integrazioni) di equazioni differenziali ad esempio  $dx_i/dt = v_i(x_1, \dots, x_m)$ ). Sia  $v : U \rightarrow R^m$  con  $U$  aperto e  $dv_z : R^m \rightarrow R^m$  il campo di vettori  $v$  si dice non degenerare se la trasformazione lineare  $dv_z : R^m \rightarrow R^m$  è non singolare (da cui ho che  $z$  è uno zero isolato infatti per  $z'$  vicino a  $z$  ho che vale  $v(z') = v(z) + dv_{(z')}(z' - z) + \dots$  e per  $z' \neq z$  e  $v(z) = 0$  e  $v(x)$  campo non singolare allora vale come approssimazione al primo ordine  $v(z') = dv_{(z')}(z' - z)$  e tale valore nell'intorno non si annulla).*

Possiamo ora definire l'indice per un campo vettoriale qualsiasi  $w(z)$  sulla varietà  $M$ , e in modo meno libero di quanto fatto finora chiarendo l'idea intuitiva di campo su una varietà:

**Definizione 25** (indice  $\iota$ ). *Lavorando con varietà lisce (differenziabili) localmente ho intorno  $U$  omeomorfi allo spazio euclideo di dimensione opportuna e così definirò il campo  $w'(x)$  in analogia a quanto fatto, nel caso euclideo e nella definizione 24 di pagina 52, usando la parametrizzazione (diffeomorfismo)  $g : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow M$  della varietà nell'intorno  $M$  di  $z$ , ovvero la parametrizzazione di un intorno e con  $dg_{g^{-1}(z)} : \mathbb{R}^k \rightarrow TM_z$  isomorfismo fra spazi vettoriali e supponiamo esista in qualche senso un campo  $w'$  su un aperto  $M$  intorno di  $z$  coperto dalla mappa  $g$  allora scriveremo, per come fatto nella definizione 24 di pagina 52, tale campo come  $w' = dg \circ w \circ g^{-1} : M \rightarrow TM_z$  con  $w$  opportuna mappa da  $U$  in  $\mathbb{R}^k$  da notarsi che dominio e codominio corrispondono a quelli intuitivi fino ad ora considerati, e quindi scrivendo  $w$  in funzione di  $w'$  avremo  $w = (dg)^{-1} \circ w' \circ g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  (il che ha senso essendo  $g$  diffeomorfismo e quindi esistendo l'inversa del differenziale  $dg$  che è un isomorfismo) che si potrà studiare con i metodi definiti nel caso euclideo avendo proprio dominio e codominio della definizione canonica e trattata, definiamo inoltre l'indice  $\iota$  di  $w$  in  $z$  come l'indice del corrispondente campo su  $U$  attraverso  $g^{-1}$  ovvero, per come visto sopra, della funzione  $dg^{-1} \circ w \circ g$  definita su  $U$ , su cui per la definizione 22 sappiamo cos'è l'indice, nel punto corrispondente a  $z$  attraverso  $g^{-1}$  ovvero  $g^{-1}(z)$  che è zero della nuova funzione essendolo  $z$  per  $w$  infatti  $(dg^{-1} \circ w \circ g)(g^{-1}(z)) = (dg^{-1} \circ w)(z) = 0$ ; per il lemma 10 abbiamo che questo indice è invariante tramite diffeomorfismi (locali sull'intorno) quindi non serve specificare quale diffeomorfismo (carta) si è scelto.*

**Osservazione 3.1.0.12.** *L'indice di un campo si definirà solo per uno zero perchè per il lemma 2 di pagina 22 se non ci fosse uno zero il campo si estenderebbe a tutta un palletta nell'intorno dello zero (vedendo  $M' =$ intorno del punto e  $M =$ curva su cui si calcola la variazione e con  $v(x)$  funzione definita sull'intorno) inoltre ci si può sempre ricondurre a zeri non degeneri ovvero  $\{x \in M' \mid v(x) = 0, dv_x \text{ non singolare}\}$  approssimando in modo opportuno gli zeri degeneri ossia  $\{x \in M' \mid v(x) = 0, dv_x \text{ singolare}\}$  infatti si può sostituire il campo iniziale  $v$  con uno zero degenero isolato con un nuovo campo  $v'$  in modo che abbia dentro un piccolo intorno dello zero  $B_\epsilon$  solo uno zero non degenero, fuori da un intorno più grande dello zero  $B_{\epsilon'}$  con  $\epsilon < \epsilon'$  coincidano e fra essi ovvero in  $B_{\epsilon'} - B_\epsilon$  non vi siano altri zeri (per la prova di tale fatto vedi p.3 di [X] oppure a partire da altre ipotesi, vedere [V] p.6).*

Introduciamo ora una idea interessante che in realtà è molto simile a quanto già visto (traducendo il comportamento sulla frontiera di un intorno del campo all'interno) e renderà rigoroso, come si vedrà nel seguito, l'appello alle diverse definizioni equivalenti date (definizione 22 e 23) :

**Definizione 26** (mappa di Gauss). *Sia  $\Gamma : M \rightarrow S^{m-1}$  con  $\dim M = m - 1$  ed  $M$  orientabile, tale che  $\forall x \in M, \Gamma(x)$  è perpendicolare a  $M$  in  $x$  ovvero è perpendicolare a  $TM_x$  (possiamo anche supporlo vettore di norma unitaria), tale funzione si dirà **mappa di Gauss**. Nel nostro caso abbiamo che  $M = \partial M'$  con  $M' \subseteq \mathbb{R}^m$  di dimensione  $m$  (e quindi  $M$  di dimensione  $m - 1$ ) varietà compatta con frontiera in  $\mathbb{R}^m$  e avremo che  $\Gamma(x)$  è un vettore normale alla superficie che punta verso l'esterno della varietà  $M'$  rispetto alla frontiera  $M$  nel punto  $x$ .*



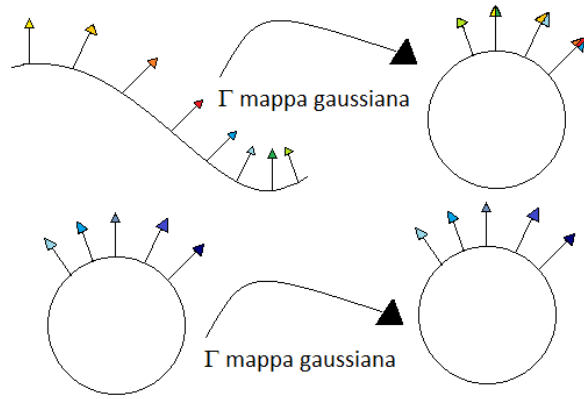


Figura 3.2: esempi di mappa di Gauss bidimensionale

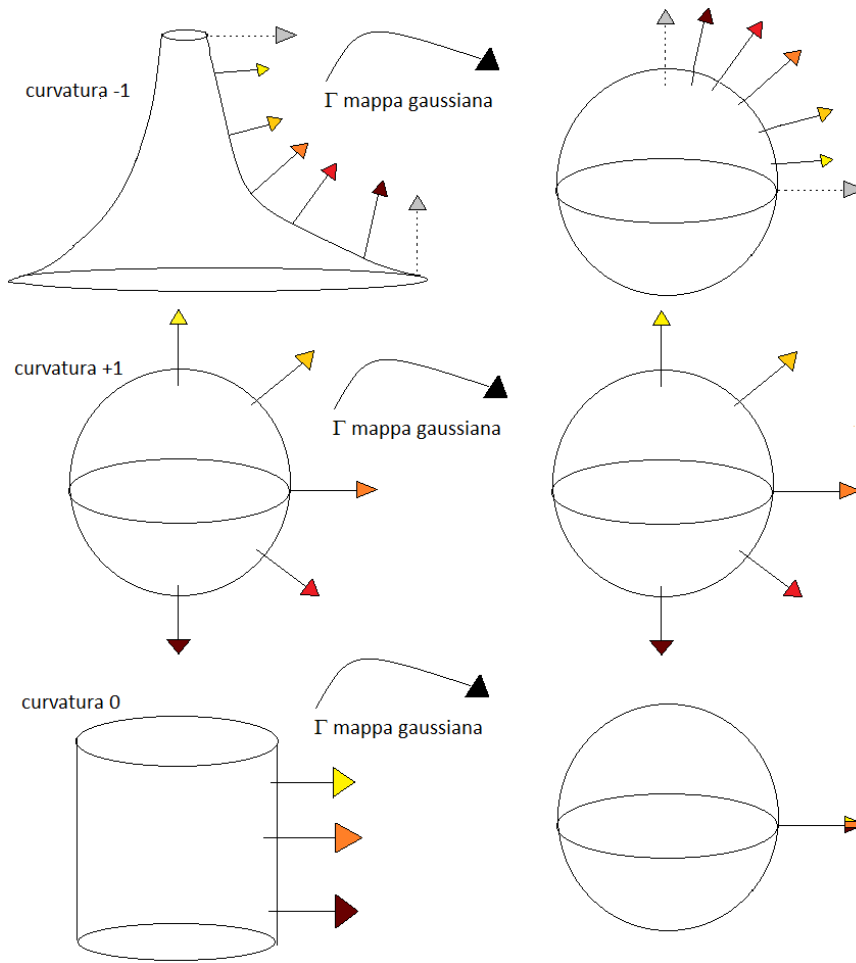


Figura 3.3: esempi di mappa di Gauss tridimensionale

### 3.2 Un Teorema di Hopf

Abbiamo ora un risultato importante che collega il grado di un campo vettoriale (vista come particolare funzione) su un insieme (in realtà sarà una varietà compatta  $m$ -dimensionale con frontiera,  $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ) ovvero l'indice  $\iota$  al grado della mappa di Gauss dalla frontiera di  $U$  nello spazio euclideo  $m$  dimensionale ovvero della mappa che assegna ad un punto di  $\partial U$  il vettore unitario normale alla frontiera in quel punto:

**Teorema 15.** *Sia  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  campo vettoriale liscio con zeri isolati e  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  e  $\dim(U) = m$ , se  $v(x)$  punta esternamente rispetto a  $U$  lungo  $\partial U$ , allora l'indice somma ovvero la somma degli indici  $\sum_{\text{sugli zeri di } v(x)} \iota$  è uguale al grado della mappa di Gauss da  $\partial U$  a  $S^{m-1}$ .*

*Dimostrazione.* Poichè il vettore lungo il bordo punta sempre verso l'esterno ivi non si annulla mai quindi abbiamo che tutti gli zeri del campo sono interni. Togliendo un intorno (per esempio una palletta  $B_\epsilon(z_i)$  di raggio  $\epsilon$ ) attorno ad ogni zero  $z_i$  dalla varietà  $U$  otteniamo una nuova varietà, con frontiera,  $U' = U - (\bigcup_{z_i|v(z_i)=0} B_\epsilon(z_i))$ . La mappa  $v(x) := \frac{v(x)}{|v(x)|}$  manda tale insieme  $U'$  (su cui è ben definita non avendo più zeri per  $v(x)$ ) in  $S^{m-1}$  e la si può vedere come estensione della stessa funzione definita solo sulla frontiera ovvero, a meno di omotopia (che non varia il grado), della mappa di Gauss  $\Gamma$  (a meno di orientare i vettori nel senso corretto) da  $M = \partial U' = \partial U \cup \bigcup_{z|v(z)=0} B_\epsilon(z)$  a  $S^{m-1}$  quindi vale il lemma 2 di pagina 22 e quindi  $\deg(\Gamma, y) = 0$  e per teorema 6 di pagina 25 non dipende dal valore regolare, quindi  $v(x)$  vista come definita su tutto  $U'$ , sulla frontiera diventa  $\Gamma$  il cui grado è 0 quindi ogni indice  $\iota$  è nullo e così la somma degli indici o gradi del campo per ogni valore regolare  $y$  sulla frontiera di  $U'$ :

$$\sum_{\text{zeri di } v(x)|(\partial U') \text{ in } U'} \iota = \sum_{z:\text{zeri di } v(x)|(\partial U') \text{ in } U'} \deg(v(x), z) = 0$$

Per sopra  $v(x)$  su  $\partial U$  è omotopo alla mappa di Gauss (l'unica differenza è dove puntano i vettori sulla frontiera rispetto all'insieme) quindi per il teorema 7 di pagina 25  $\deg(v(x)|\partial U) = \deg(\Gamma)$ , il grado sulle altre parti di frontiera aggiunte in  $U'$  ovvero su  $\partial U' - \partial U$  è per la definizione 22 di pagina 47  $\iota$  su ogni sferetta e quindi in totale è  $-\sum \iota$  infatti il campo punta fuori dalle sferette centrate nello zero ma dentro l'insieme  $U'$  ovvero come segno, l'orientazione rispetto  $U'$ , derivante da quella costruita ovvero quella delle sferette, è negativa (l'orientazione indotta da  $U'$  sulla sua frontiera è opposta a quella indotta sulla sferetta di raggio  $\epsilon$  e centro  $z_i$  da quella della palletta di raggio  $\epsilon$  e centro  $z_i$ ) quindi si ha che

$$0 = \sum_{\text{zeri di } v(x)|(\partial U') \text{ in } U'} \iota = \sum_{\text{zeri di } v(x)|(\partial U) \text{ in } U'} \iota + \sum_{\text{zeri di } v(x)|(\partial U' - \partial U) \text{ in } U'} \iota$$

ma  $\iota$  su  $\partial U$  è  $\deg(v(x)|\partial U) = \deg(\Gamma)$  e quindi

$$\sum_{\text{zeri di } v(x)|(\partial U) \text{ in } U} \iota + \sum_{\text{zeri di } v(x)|(\partial U' - \partial U) \text{ in } U'} \iota = \deg(\Gamma) - \sum_{\text{zeri di } v(x)|(\partial U' - \partial U)} \iota$$

□

In particolare  $\sum \iota$  non dipende dalla scelta del campo  $v(x)$  e quindi dipende solo dall'insieme (varietà) su cui considero l'insieme di vettori.

**Lemma 11.** *L'indice di  $v(x)$  in uno zero non degenere (punto  $z$  tale che  $v(z) = 0$  ma  $dv_z$  è invertibile) è  $+1$  o  $-1$  a seconda che il determinante di  $dv_z$  sia positivo o negativo.*

*Dimostrazione.* A meno di traslazione poniamo  $z = 0$  e pensiamo a  $v(x) : U \rightarrow R^m$  come diffeomorfismo (infatti  $dv_z : R^m \rightarrow R^m$  è un isomorfismo e quindi per il teorema della funzione inversa localmente esiste l'inversa) da un intorno (convesso)  $U_0$  di  $z$  ad  $R^m$  allora:

**se  $dv_z$  ha determinante maggiore di 0** ovvero  $v(x)$  conserva l'orientazione nell'intorno  $U_0$  quindi per il lemma 9 di pagina 53 allora localmente il diffeomorfismo  $v(x)$  è isotopo all'identità ovvero si può deformare in modo liscio e per il lemma 10 di pagina 54 lavorando con diffeomorfismi per la definizione di isotopia ho che non ho introdotto nuovi zeri infatti dal campo  $v$  ottengo il campo  $v'$  (=identità) tale che  $v' = (df \circ v \circ f^{-1})$  con  $f$  diffeomorfismo (come pure  $v$  e  $v'$ ) e quindi  $df \neq 0$  ed esiste  $f^{-1}$  che localmente è biettiva quindi avendo già uno zero ( $f^{-1}(0) = 0$ ) non ne ha altri, l'indice di  $v(x)$  nello zero è lo stesso di  $v'$  (=identità nell'immagine) dello zero attraverso  $f$  e l'indice dell'identità è il grado, essendo biettiva  $v'$ , su ogni punto nella somma  $\sum_{x \in v'^{-1}(y)} \text{segno } dv'_x$  ho un solo addendo ed il  $dv'_x$  è, essendo l'identità lineare, ancora l'identità, il cui determinante è  $+1$  quindi ho una sola somma con un solo termine  $+1$  e quindi il grado è  $+1$ .

**se  $dv_z$  ha determinante minore di 0** ovvero  $v(x)$  inverte l'orientazione nell'intorno  $U_0$  allora analogamente a sopra per l'osservazione 3.1.0.10 di pagina 54 ho che ogni diffeomorfismo che inverte l'orientazione si può deformare in modo liscio in una riflessione ovvero ho una isotopia fra essi; da ciò essendo pure la riflessione  $r$  biettiva non ho localmente altri zeri essendo già 0 mandato in 0, si ha quindi che, come sopra, la somma nella definizione di grado si riduce ad un solo addendo e poichè la miglior approssimazione lineare è sè stessa ed il determinante della riflessione è  $-1$  l'indice (nel punto corrispondente tramite il diffeomorfismo) della riflessione è  $-1$  e così quello di ogni diffeomorfismo isotopico ad esso e quindi in particolare per il nostro campo  $v(x)$ .

□

Ora in generale per uno zero di un campo  $w(x)$  su una varietà  $M \subseteq \mathbb{R}^m$   $w : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $dw_z : TM_z \rightarrow \mathbb{R}^m$  si ha in realtà che vale di più :

**Lemma 12.** *La derivata  $dw_z$  porta  $TM_z$  in sè (ovvero si può considerare come una mappa lineare da  $TM_z$  in sè), se la mappa lineare ha determinante diverso da zero allora (vale  $w(z') = w(z) + dw_{(z)}(z' - z) + \dots$  per  $z' \neq z$  vicino a  $z$ , e sia  $z$  uno zero ovvero come valore sia  $w(z) = 0$  e come funzione  $w(x)$  sia non singolare, ovvero il suo determinante è non nullo, allora vale come approssimazione al primo ordine  $w(z') = dw_{(z)}(z' - z)$  e tale valore nell'intorno non si annulla)  $z$  è uno zero isolato di  $w$  e ha indice  $+1$  o  $-1$  a seconda che il determinante della mappa lineare  $dw_x$  sia maggiore o minore di  $0$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $h : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow M$  parametrizzazione (carta) di un intorno aperto di  $z$  con  $h(u) = z$  e sia  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  vettore con  $i$ -esima coordinata  $1$  e le altre nulle ovvero l' $i$ -esimo vettore della base canonica di  $\mathbb{R}^m$  e sia  $t_i = dh_u(e_i)$  ovvero la  $i$ -esima colonna della matrice  $dh_u$  ovvero la derivata parziale rispetto alla  $i$ -esima variabile  $u_i$  del dominio  $U$  (ovvero la  $i$ -esima riga del differenziale che è uguale alla  $i$ -esima colonna essendo  $h$  regolare e valendo il lemma di Schwarz)  $\partial h / \partial u_i$  allora  $t_1, \dots, t_m$  formano una base di  $TM_{h(u)}$  infatti se  $M$  ha dimensione  $m$  tale è anche la dimensione di  $TM_{h(u)}$  e  $t_1, \dots, t_m$  sono un insieme di vettori linearmente indipendenti essendo la parametrizzazione  $h$  un diffeomorfismo e quindi  $dh_u$  non singolare, ovvero con colonne e righe non linearmente dipendenti, e per quanto osservato sopra proprio i  $t_1, \dots, t_m$  sono le righe e le colonne. Cerco l'immagine di  $t_i$ , ovvero  $t_i(u)$ , attraverso la mappa  $dw_z = dw_{h(u)}$  da  $TM_z$  in sè, per la regola delle derivate composte  $dw_{h(u)}(t_i) = dw_{h(u)} \circ dh_u(e_i) = d(w \circ h)_u(e_i)$  ovvero la  $i$ -esima colonna o riga (essendo anche la composizione regolare) del differenziale di  $w$  composto  $h$  calcolato in  $u$  ovvero  $\partial w(h(u)) / \partial u_i$ ; inoltre sia  $v = \sum_{j=1}^m v_j e_j$  il campo di vettori su  $U$  che corrisponde al campo di vettori  $w$  su  $M$  (attraverso il diffeomorfismo  $h$ ) allora poichè  $dh_u$  porta,  $\forall x \in U$   $v(x)$  in  $w(h(x))$  e per la il lemma 10 di pagina 54 vale che  $w = dh_u \circ v \circ h^{-1}$  e componendo con la inversa di  $dh_u$  (che esiste essendo un diffeomorfismo) a sinistra e con  $h$  a destra si ha  $v = dh_u^{-1} \circ w \circ h$  e per linearità  $w(h(u)) = dh_u(v) = \sum_{j=1}^m v_j dh_u(e_j) = \sum_{j=1}^m v_j t_j$  quindi per la regola della derivata del prodotto  $\partial w(h(u)) / \partial u_i = \sum_{j=1}^m (\partial v_j / \partial u_i) t_j + \sum_{j=1}^m v_j (\partial t_j / \partial u_i)$  infine valutando il tutto in  $u = h^{-1}(z)$  zero di  $v$  (infatti per sopra essendo  $z$  zero di  $w$   $v(h^{-1}(z)) = dh_u^{-1} \circ w(z) = 0$ ) quindi  $v_j = 0 \forall j = 1, \dots, m$  e componendo i due fatti sopra vale

$$dw_{z=h(u)}(t_i) = \sum_{j=1}^m (\partial v_j / \partial u_i) t_j$$

quindi  $dw_z$  mappa  $TM_z$  in sè infatti per definizione la variabile di dominio è  $t_i \in TM_z$ , inoltre i  $t_1, \dots, t_m$  formano una base per cui è sufficiente vedere che l'immagine di ciascuno di essi è combinazione lineare degli stessi  $t_1, \dots, t_m$  come visto sopra, così che per linearità l'immagine di ogni elemento di  $TM_z$  è opportuna combinazione dei  $t_1, \dots, t_m$  ovvero è ancora in  $TM_z$ ;  $dw_z$ , vista come mappa lineare da  $TM_z$  in sè, ha per l'equazione sopra che l' $i$ -esima colonna di

$dw_z$  è  $\sum_{j=1}^m (\partial v_j / \partial u_i) t_j$  ovvero l'elemento della riga  $j$ -esima e colonna  $i$ -esima è  $\partial v_j / \partial u_i$  ovvero i suoi coefficienti sono gli stessi della matrice  $dv_u$  e per tale campo  $v(x)$  avevamo l'ipotesi che fosse non degenera ovvero che la sua matrice fosse non singolare e quindi tale è anche il nostro campo  $w(x)$  inoltre questo è un campo definito su un aperto  $U \subseteq R^m$  a valori in  $R^m$  e quindi si può applicare il lemma 11 di pagina 59.  $\square$

Ora sia  $M \subseteq R^k$  compatto senza frontiera e sia  $N_\epsilon$  l' $\epsilon$ -intorno chiuso di  $M$  per esempio  $\{x \in R^k \mid |x - y| \leq \epsilon, y \in M\}$  che per  $\epsilon$  piccolo è una varietà liscia con frontiera. Vediamo ora un risultato analogo a quello visto (teorema 15 pagina 58) per varietà con bordo anche per varietà senza bordo considerando la mappa di Gauss non più con dominio nella frontiera ma negli intorni  $N_\epsilon$  su cui ha senso essendo una varietà chiusa, liscia, con bordo proprio l'insieme dei vettori  $y$  di distanza  $\epsilon$  da  $x$ :

**Teorema 16.** *Per ogni campo di vettori  $v(x)$  su  $M \subseteq R^k$  con solo zeri isolati non degeneri ovvero tale che  $dv(x)$  negli zeri sia non singolare allora si ha che l'indice somma, ovvero la somma degli indici,  $\sum \iota$ , è uguale al grado della mappa di Gauss  $\Gamma : \partial N_\epsilon \rightarrow S^{k-1}$ . Come per il teorema 15 di pagina 58 quindi la somma  $\sum \iota$  non dipende dalla scelta del campo vettoriale.*

*Dimostrazione.* Per  $x \in N_\epsilon$  sia  $r : R^k \rightarrow M$  la proiezione su  $M$  ovvero tal che  $r(x) \in M$  sia il punto di  $M$  più vicino ad  $x \in N_\epsilon$  (infatti per ogni punto  $N_\epsilon$  possiamo associare il punto in  $M$  lontano al massimo  $\epsilon$  e tale mappa è liscia),  $x - r(x)$  è perpendicolare allo spazio tangente  $TM_{r(x)}$  (ovvero sta nello spazio affine normale alla superficie  $x + R^{k-m}$ ) se ciò non fosse  $r(x)$  non sarebbe il punto più vicino ad  $x$  proprio per come si definisce la minima distanza in ambiente euclideo in cui le varietà sono immerse, ovvero come proiezione perpendicolare, quindi il vettore  $x - r(x)$  deve esser localmente (ovvero intorno ad  $r(x)$ ) ortogonale allo spazio tangente in  $r(x)$  che è l'approssimazione lineare (euclidea) della varietà nel punto; quindi per  $\epsilon$  piccolo (esistendo  $N_\epsilon$ )  $r(x)$  è regolare e definita. Sia  $dist(x) = |x - r(x)|^2 = (x - r(x)) \bullet (x - r(x))$  come funzione di  $x$  allora il suo gradiente (l'analogo del differenziale per funzioni a valori reali), per la linearità della derivata e vedendo  $x$  e  $r(x)$  rispetto alla base canonica di  $R^k$  si ha che  $\nabla dist(x) = \nabla(x - r(x)) \bullet (x - r(x)) = \nabla(\sum_{i=1}^k (x_i - r(x)_i)^2 e_i) = \sum_{i=1}^k (\partial(x_i - r(x)_i)^2 / (\partial x_i)) e_i = \sum_{i=1}^k (2(x_i - r(x)_i) e_i) = 2(x - r(x))$ . Per ogni punto  $x$  della superficie di livello  $dist(\epsilon^2)^{-1}$ , che è quindi la frontiera di un particolare  $\epsilon$  intorno  $N_\epsilon$  (intuitivamente una palletta  $k$ -dimensionale centrata in  $r(x)$  e di raggio  $\epsilon$ , dove l' $y$  variabile nella definizione di  $N_\epsilon$  ora è  $r(x)$ ), il vettore di norma unitaria che punta fuori (non sta sulla superficie) è dato da  $\Gamma(x) := \nabla(dist(x)) / |\nabla(dist(x))| = (x - r(x)) / \epsilon$  infatti per il teorema del gradiente richiamato nel primo capitolo il gradiente indica la direzione di massima crescita della funzione, ovvero in tal caso esce dalla superficie in accordo con quanto detto sopra ovvero che il vettore  $(x - r(x))$  è localmente ortogonale allo spazio tangente, tale funzione in realtà è proprio la mappa gaussiana definita sulla frontiera di un intorno  $N_\epsilon$  di  $M$ . Estendiamo  $v$  definito su  $M$  ad un campo vettoriale  $w$  nell'intorno  $N_\epsilon$  ovvero un po' oltre  $M$  con

$w(x) = (x - r(x)) + v(r(x))$  ovvero sommando un vettore di lunghezza al massimo  $\epsilon$  che punta fuori dalla frontiera ad un vettore del campo  $v(x)$  nel punto  $r(x) \in M$  e, essendo  $v(r(x)) \in TM_{r(x)}$  e  $x - r(x) \in TM_{r(x)}^\perp$ , si ha che per  $x \in \partial N_\epsilon$   $w(x) \bullet \Gamma(x) = (x - r(x) + v(r(x)))(x - r(x))/\epsilon = (x - r(x))^2/\epsilon = \epsilon^2/\epsilon = \epsilon$  quindi essendo il prodotto scalare positivo, al massimo differiscono di  $\pi/2$  e quindi anche  $w(x)$  punta verso l'esterno lungo la frontiera. Poichè  $w(x)$  è somma di elementi ortogonali perchè sia zero è necessario che entrambi siano zero ovvero nei punti di  $M$  zeri del campo  $v(x)$  annullo sia la componente del campo essendo uno zero sia l'altro contributo essendo in  $M$  dove vale  $r(x) = x$ ; inoltre per  $z \in M$  zero di  $v(x)$  (e per sopra anche per  $w(x)$ ) vale  $dw_z(h) = d_z(h - r(h)) + d_z(v \circ r(h)) = 1 - d_z(r(h)) + d_{r(z)}v \cdot d_z r(h) = 1 - 1 + d_z v(h) \cdot 1 = d_z v(h) \forall h \in TM_z$  essendo  $r(h) = h$  ovvero  $r = \text{identità}$  e  $dw_z(h) = d_z(h) + d_z(v(r(h))) = h \forall h \in TM_z^\perp$ , ovvero come funzione è l'identità, essendo  $h - r(h) = h \in TM_z^\perp$  vedendo  $r(h)$  come origine del piano affine  $TM_z^\perp$  e  $dv_z(h) = 0$  poichè  $h \in TM_z^\perp$ . Abbiamo allora che sullo spazio tangente  $\det dw_z = \det dv_z$  (e quindi negli zeri  $z$ ,  $w$  è non degenerare valendo ciò per  $v$ ) infatti ragionando sulla "geometria"  $dv_z : TM_z \rightarrow R^k$ , e l'estensione  $w$  di  $v$  all'intorno è tale che  $dw_z : (TN_\epsilon)_z \rightarrow R^k$  con  $TM_z \subseteq (TN_\epsilon)_z$  e quindi ha senso dire che in  $TM_z$  coincidono, mentre con  $h \in (TM_z)^\perp \forall t \in R$   $r(x + th) = r(x)$  proprio per definizione di proiezione su  $M$  inoltre l'espressione analitica di  $dw_z(h)$  per  $h \in (TM_z)^\perp$  è  $\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{x + \eta h - r(x + \eta h) + v(r(x + \eta h)) - x + r(x) - v(r(x))}{\eta}$  che, valendo  $r(x + \eta h) = r(x)$ , dà  $\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\eta h}{\eta} = h$  come matrice quindi  $dw_z$ , dividendo nelle prime  $m$  e poi le ultime  $k-m$  componenti, in alto a sinistra sulla diagonale principale  $m \times m$  è costituita da  $dv_z$  mentre il secondo blocco in basso a destra  $(k-m) \times (k-m)$  è l'identità su  $R^{k-m}$ . Quindi per la definizione di indice (definizione 22 pagina 47) e grado (definizione 17 pagina 21) l'indice di  $w$  nello zero  $z \in M$  è uguale all'indice di  $v$  nello zero  $z \in M$  quindi applicando il teorema 15 di pagina 58 con  $U = N_\epsilon$  e  $v = w$  campo con zeri isolati non degeneri, quelli di  $v(x)$ , ho che l'indice somma di  $w(x)$  è uguale al grado della mappa di Gauss definita su  $\partial N_\epsilon$  ed a valori in  $S^{k-1}$  e l'indice somma di  $w(x)$  è uguale a quello di  $v(x)$  così per ogni campo  $v(x)$  si ha che l'indice somma del campo è uguale alla mappa Gauss.  $\square$

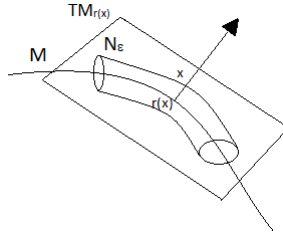


Figura 3.4: come "estendere" un campo definito su una varietà senza frontiera alla frontiera stessa

**Osservazione 3.2.0.1.** *Una prova intrinseca del fatto che l'indice di campo è indipendente dal campo stesso sia nelle ipotesi del teorema 15 che del teorema 16 ovvero sia con campo definito su una varietà con frontiera, in modo che lungo la frontiera i vettori del campo puntino fuori, sia senza frontiera, nel caso particolare di una  $M$  varietà compatta, si ha mostrando, definito il campo  $w_t = tw_0 + (1-t)w_1$  con  $t \in [0, 1]$  che l'insieme  $C = \{t | \iota_{w_t} = \iota_{w_0}\}$  sia aperto e chiuso ovvero è tutto l'insieme  $[0, 1]$  e quindi in particolare  $w_0 = w_1$ . Per maggiori dettagli vedi p.4 di [XI].*

**Osservazione 3.2.0.2** (qualitativamente...). *Preso la sfera  $m$ -dimensionale ( $S^m$ ) sia  $v$  un campo sulla superficie sferica che punta verso il polo nord. Al polo sud tale campo è radiale verso l'"esterno" (esce dal punto) quindi ha indice  $+1$ , al polo nord vedo tutti i vettori che puntano verso tale punto ovvero vanno verso l'"interno" quindi ha indice  $(-1)^m$ ; quindi l'indice somma è  $0$  oppure  $2$  a seconda che  $m$  sia dispari o pari ovvero ogni campo su una sfera  $m$ -dimensionale con  $m$  pari ha uno zero, altrimenti la somma sarebbe degenera e quindi nulla, come già visto più in generale in 2.2.0.9 a pagina 27. In realtà per ogni varietà compatta senza frontiera di dimensione dispari l'indice somma è nullo infatti ragionando sui determinanti delle matrici, cambiando  $v$  con  $-v$  l'indice è moltiplicato per  $(-1)^m$  (per le proprietà del determinante su matrici  $m \times m$  si ha raccogliendo un meno per ogni colonna  $\det(d(-v)_x) = \det(-d(v)_x) = (-1)^m \det(d(v)_x)$ ) ma poichè l'indice somma è un invariante, per definizione di  $\iota$  si ha che  $\sum \iota = (-1)^m \sum \iota$  e per  $m$  dispari vale che  $\sum \iota = 0$  ( $\sum \iota(v) = \sum \iota(-v) = -\sum \iota(v)$  quindi  $\sum \iota = 0$ ). Per il teorema di Poincarè-Hopf, che vedremo a fine capitolo, avremo che tale superficie avrà caratteristica di Eulero-Poincarè nulla.*

### 3.3 Caratteristica di Eulero-Poincarè

Ora introduciamo un concetto affascinante di grande generalità che nato dalla geometria piana è stato esteso alla topologia: la caratteristica  $\chi$  di Eulero-Poincarè. Per una trattazione esaustiva della caratteristica di Eulero con gli strumenti della topologia e della combinatoria e con esempi ed applicazioni ed anche altre modalità di dimostrazione vedi oltre che [II] sempre di Heinz Hopf [XII], per un approccio diverso come una introduzione, euristica e tematica carina mi è sembrata [XIII]; per una via più orientata alla topologia algebrica che qui è stata esposta più brevemente ed in modo meno rigoroso nel capitolo 3 vedi [XV].

**Definizione 27** (in modo costruttivo...). *Un poligono è una figura geometrica piana delimitata da una spezzata chiusa semplice, ovvero non autointersecante, ossia da un insieme ordinato di segmenti rettilinei concatenati l'uno all'altro e tali che il punto iniziale del primo e il punto finale dell'ultimo coincidano (segmenti consecutivi allineati saranno come un unico segmento) e con punti di intersezione fra i diversi segmenti i soli estremi dei segmenti stessi, i segmenti*

che compongono la spezzata si dicono lati ed i punti in cui i segmenti si incontrano si dicono vertici. Una definizione analoga vale per il poliedro che è la versione tridimensionale del poligono in cui le facce sono un numero finito di poligoni con intersezioni vuote, in un punto (vertice) o in un segmento (spigolo), ogni spigolo appartiene esattamente a due facce ovvero è il lato di due poligoni, (e, come nel caso del poligono, facce complanari saranno una unica faccia); nel caso  $n$ -dimensionale parliamo di politopo  $n$ -dimensionale. Il politopo  $n$ -dimensionale con minore numero di vertici si dice *simplexso  $n$ -dimensionale* (0-dimensionale il punto, 2-dimensionale il triangolo, 3-dimensionale il tetraedro). Vale che il *simplexso  $n$  dimensionale* ha  $n+1$  vertici, affinemente indipendenti, i *simplessi* saranno gli elementi dei **complessi simpliciali** che sono unioni di *simplessi* con intersezione in facce comuni e considerando un complesso simpliciale abbiamo una discretizzazione, detta triangolazione, dello spazio. In modo molto simile a livello intuitivo, ma più generale, abbiamo la definizione di **complesso di celle** che è uno spazio topologico unione di celle; una cella  $n$ -dimensionale chiusa/aperta è uno spazio omeomorfo ad una palla chiusa/aperta  $n$ -dimensionale, ed unendo assieme questi elementi abbiamo un complesso di celle. A noi sarà sufficiente, unendo un po' le due terminologie, definire una 2-cella convessa come l'insieme (convesso) di punti delimitato da un insieme finito di segmenti rettilinei (lati) che si intersecano in punti (vertici) e una 3-cella convessa come l'insieme (convesso) dei punti la cui frontiera è una collezione finita di 2-celle convesse. Quindi in senso lato potremo pensare alle 2-celle come a superfici piane e alle 3-celle come a volumi tridimensionali. Definiamo ora la caratteristica di Eulero-Poincarè in tutta la sua generalità: siano

$V$  =numero di vertici(0-celle) della 3-cella

$E$  =numero di lati(1-celle) della 3-cella

$F$  =numero di 2-celle della 3-cella

proveremo in diversi modi che per 3-celle convesse vale

$$\chi = V - E + F = 2$$

ed in generale per un complesso di celle o complesso simpliciale (al massimo  $n$  dimensionale) varrà

$$\chi = \sum_{j=0}^n (-1)^j k_j$$

con  $k_j$  numero dei *simplessi  $j$ -dimensionali* all'interno del complesso simpliciale o delle  $j$ -celle all'interno del complesso di celle. Un fatto fondamentale è che questa quantità non dipende dalla triangolazione o dalla decomposizione in celle o *simplessi* (ovvero anche potendo variare i singoli  $k_j$  la somma algebrica così definita è la medesima); inoltre questo è un invariante topologico (sotto omeomorfismi) ed omotopico (sotto equivalenza omotopica, per la definizione vedi l'osservazione 2.1.0.2 di pagina 15).



Cerchiamo ora di vedere, senza troppo rigore, il risultato nel caso dei poliedri in diverse maniere per poi arrivare in analogia al caso generale, rimanendo sempre a livello intuitivo:

**Osservazione 3.3.0.1** (con le proiezioni e un po' di conti...). *Consideriamo un poliedro convesso semplice ovvero equivalente alla palla tridimensionale allora possiamo proiettare la sua superficie (in realtà il suo scheletro ovvero i suoi lati e vertici) in una palla (di raggio unitario) attorno a un suo punto e così considerando le immagini di tale proiezione abbiamo una rete di poligoni sferici sulla palla (i vertici vanno in un punto, i lati in archi di cerchi massimi, le facce poligonale in una sezione di superficie sferica delimita da archi di cerchi massimi ovvero da un poligono sferico) e così facendo ricopriamo tutta la sfera. Vale che la somma degli angoli  $\sum_i \alpha_i$  di un poligono sferico convesso è  $(\text{numero lati(poligono)}-2)\pi + \text{area(poligono)}$ . Proviamo tale fatto per induzione: per  $n=3$  abbiamo un triangolo sferico e la formula vale per risultati di trigonometria sferica su una sfera di raggio unitario (in realtà il ragionamento vale egualmente specificando i raggi), per induzione lo si vede spezzando il poligono di  $n+1$  lati in un poligono di  $n$  lati (ottenuto togliendo due lati adiacenti e connettendo gli estremi non comuni ai lati tolti con un altro lato) e in un triangolo (i cui lati giacciono ancora dentro al poligono originale per convessità) quindi per il nuovo poligono più piccolo si ha somma dei lati uguale a  $(n-2)\pi + \text{area(poligono-triangolo)}$  mentre per il triangolo si ha  $\pi + \text{area(triangolo)}$  quindi sommando il nuovo poligono al triangolo la somma degli angoli è uguale a  $(n-1)\pi + \text{area(poligono)}$ . Allora per ogni addendo di tale formula sommiamo su ogni poligono ( $P_j$ ), il cui numero è  $F$  essendo tali le facce del poliedro, e con  $i$  che varia fra gli angoli  $\alpha$ , o i lati  $n$ , del poligono  $P_j$  e  $j$  che varia nell'insieme dei poligoni abbiamo che  $\sum_{i,j} \alpha_{i,j} = 2\pi V$  poichè ogni vertice contribuisce per un angolo giro di  $2\pi$  e la somma a sinistra varia su tutti gli angoli interni dei vertici di tutti i poligoni,  $\sum_j n_j = 2E$  infatti ogni lato circonda due poligoni e nella somma a sinistra verrebbe contato due volte e moltiplicando per  $\pi$  vale  $\sum_j \pi n_j = 2\pi E$  e  $\sum_{j=1}^F 2\pi = 2\pi F$  e  $\sum_j \text{area}(P_j) = 4\pi$  infatti ho coperto interamente tutta la sfera una ed una sola volta (con un'applicazione iniettiva e suriettiva sulla sfera) infatti ho usato un'unione di poligoni con intersezione solo nei lati e nei punti (la cui misura è nulla) quindi l'area della superficie sferica è uguale alla somma delle aree dei poligoni, mettendo tutto assieme con  $i$  che varia fra gli angoli del poligono  $P_j$  e  $j$  che varia fra i poligoni si ha :*

$$\sum_{i,j} \alpha_{i,j} = \left( \sum_j n_j \right) \pi - \sum_j 2\pi + \sum_j \text{area}(P_j)$$

e per quanto sopra

$$2\pi V = 2\pi E - 2\pi F + 4\pi$$

ovvero

$$2 = V - E + F$$

**Osservazione 3.3.0.2.** *Notiamo una conseguenza dell'osservazione 3.3.0.1: prendiamo una 2-cella con  $N$  lati e la suddividiamo in  $(F)$  2-celle allora per*

ogni 2-cella vale per risultati di geometria classica che la somma degli  $(n)$  angoli è uguale a  $(n - 2)\pi$  con  $n$  il numero dei lati ( $\sum_{j=1}^n \alpha_j = (n - 2)\pi$ ) allora sommando su tutte le 2-celle (indice  $i$ ) so che la somma degli angoli interni è  $2\pi$  volte i vertici interni ( $V'$ ) che danno un contributo di un angolo giro più la somma degli angoli di vertici non interni della cella  $i$ -esima ( $\beta_i$ ) ( $\sum_i^F \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} = 2\pi V' + \sum_i^F \beta_i$ ) poi la somma dei lati ( $n_i$ ) di ogni 2-cella è la somma dei lati esterni ( $N$ ), contati una volta, ed interni ( $E'$ ), contati due volte, e moltiplicandola per  $\pi$  ( $\sum_i^F n_i \pi = 2\pi E' + \pi N$ ) infine vale  $\sum_{i=1}^F 2\pi = 2\pi F$  quindi sommando su  $i$  che varia da 1 ad  $F$  la prima identità e sostituendo le quantità fra parentesi vale  $2\pi V' + \sum_i^F \beta_i - 2\pi E' - \pi N + 2\pi F = 0$  ma anche per la due cella complessiva vale  $\sum_{j=1}^n \alpha_j = (n - 2)\pi$  (ovvero con queste notazioni  $\sum_{i=1}^F \beta_i = (N - 2)\pi$ ) quindi l'equazione sopra diventa dividendo per  $2\pi$   $V' - E' + F = 1$  ma per definizione di vertici e lati interni si ha che ogni lato esterno corrisponde ad un vertice esterno e quindi sono entrambi  $N$  e  $E' + N = E$  e  $V' + N = V$  quindi vale  $V - E + F = 1$ : un altro risultato sulla caratteristica in questo caso su una suddivisione.

**Osservazione 3.3.0.3** (con delle suddivisioni). *Una suddivisione di un poliedro è una divisione delle sue facce (2-celle) in una rete di lati e vertici in modo che quando due facce (2-celle) hanno un lato in comune ogni nuovo vertice della rete di lati in quella faccia originaria deve coincidere con un nuovo vertice trovato anche in un'altra faccia con la suddivisione. Siano  $P_1$  e  $P_2$  poliedri, il secondo una suddivisione del primo, allora si ha che  $\chi(P_1) = \chi(P_2)$  con  $\chi = V - E + F$ . Ragioniamo sulle possibili operazioni che si possono fare creando una rete sulle facce di un poliedro e sui cambiamenti che inducono nella caratteristica per quanto visto nell'osservazione sopra: in un lato di  $P_1$  introduciamo un nuovo vertice allora in  $P_2$  abbiamo un nuovo vertice ed un nuovo lato ovvero in totale abbiamo un vertice interno e due lati la cui differenza è  $-1$  così come in  $P_1$  non avevamo vertici interni ed avevamo un solo lato la cui differenza è sempre  $-1$ . Suddividiamo una faccia aperta di  $P_1$  in due 2-celle allora per quanto detto nella nota sopra il contributo a  $\chi(P_2)$  dei nuovi vertici, lati e facce è  $V - E + F = +1$  ma anche il contributo iniziale a  $\chi(P_1)$  era  $+1$  (infatti si aveva solo una faccia) quindi abbiamo provato che la caratteristica è invariante per suddivisione. Allora analogamente all'osservazione 3.3.0.1 di pagina 65 prendendo  $P$  e  $Q$ , due 3-celle convesse e proiettandole entrambe da un punto interno ad esse sulla superficie sferica centrata in tale punto, ottengo due reti di lati e vertici di  $P$  e  $Q$  sulla superficie sferica e considero  $S$  una rete i cui lati sono le suddivisioni dei lati di  $P$  e  $Q$  con i loro punti di intersezione, ed i vertici di  $S$  sono i vertici di  $P$  e  $Q$  più i loro punti di intersezione; per definizione  $S$  è una suddivisione sia di  $P$  che  $Q$  quindi  $\chi(Q) = \chi(S) = \chi(P)$  ovvero tutti i poliedri convessi hanno la stessa caratteristica in particolare per i tetraedri vale che  $\chi(P) = V - E + F = 4 - 6 + 4 = 2$  quindi tutte le 3-celle convesse hanno  $\chi(P) = 2$*

Abbiamo allora provato in due modi che nel caso bidimensionale la caratteristica  $V - E + F$ , un caso particolare della definizione citata all'inizio della se-

zione, ovvero (il numero 0-simplessi)-(il numero di 1-simplessi) + (il numero di 2-simplessi) è 2.

**Osservazione 3.3.0.4** (un altro po' di conti). *Ripensiamo al concetto di suddivisione sopra accennato e rendiamolo indipendente chiarendo un poco anche quanto usato nelle due osservazioni precedenti : una rete nello spazio euclideo è una collezione finita di punti (vertici), linee rette (lati) che connettono tali punti senza punti dentro i lati; il segmento si indicherà coi punti finali ed iniziali che connette. Una rete su una superficie sferica è una collezione di punti (vertici) e archi di grandi cerchi (lati) che connettono i vertici ed ogni coppia di punti è connessa al massimo da un archetto e senza punti all'interno dei lati. Diremo una componente (C) della rete una parte non connessa alle altre attraverso elementi della rete. Citiamo questo risultato (teorema di Jordan) : sulla superficie di una sfera ogni poligonale (costituita da archi) chiusa semplice (che non si autointerseca) divide la superficie sferica in esattamente due regioni aperte. Proviamo che vale  $V - E + F = 1 + C$  procediamo per induzione sul numero di lati : se non ho lati ho solo vertici isolati (V) ed una faccia e tali punti sono le sue componenti (C) essendo non collegati da punti della rete ovvero da lati quindi  $V - E + F = V + 0 + 1 = 1 + C$ . Un vertice libero è quello da cui "esce" un lato ovvero tale che esiste un lato con orientazione verso l'esterno rispetto al vertice. Vale che se una rete ha dei lati e non contiene vertici liberi allora esiste una poligonale (di archi) semplice chiusa fatta di lati della rete infatti se la rete contiene un lato esiste un vertice  $p_1$  tale che  $p_1p_2$  sia un lato che esce, per esempio, da  $p_2$  ma  $p_2$  non può esser libero quindi esiste  $p_3$  tale che  $p_2p_3$  sia un lato che esce da  $p_3$  e per ipotesi distinto da  $p_1p_2$  così ottengo una catena di vertici  $p_1, \dots, p_n$  connessi uno all'altro da lati e ogni gruppo di tre punti consecutivi ha vertici distinti per l'orientamento dei rispettivi lati, ma nella rete ho solo un numero finito di vertici quindi arriverò ad un punto in cui incontrerò nuovamente un vertice già visto ovvero  $\exists r < n$  tale che  $p_r = p_n$  ho così che  $p_r, \dots, p_n$  è una poligonale chiusa con almeno tre lati distinti. Ora provo che se  $V - E + F = 1 + C$  vale per una rete con  $n$  lati vale anche per una rete con  $n+1$  lati e lo farò rimuovendo un lato e vedendo che le due somme a destra e sinistra pur variando continuano ad esser uguali. Se la rete ha vertici liberi sia esso  $p$  e lo connetto a  $p'$  se anch'esso è libero tolgo il lato  $pp'$  il che lascia  $V$  e  $F$  invariati infatti non ho aggiunto facce nè vertici  $E$  cala di uno perchè ho tolto un lato,  $C$  aumenta di uno perchè ho isolato  $p$  da  $p'$  quindi vale ancora  $V - E + F = 1 + C$  ciò vale anche se  $p'$  non è libero infatti le variazioni nelle quantità interessate saranno le medesime e togliendo il lato (decremento  $E$  di uno) isolo  $p'$  dal resto (incremento  $C$  di uno). Se la rete non ha vertici liberi applico il risultato sopra ed esiste un poligono chiuso e tolgo un lato di questo poligono così lascio  $V$  e  $C$  invariati infatti non cambio il numero di vertici e non sconnetto nulla infatti i due estremi del lato tolto sono comunque collegati dal poligono,  $E$  cala di uno togliendo un lato e  $F$  cala di uno infatti i punti all'esterno ed all'interno del poligono appartenevano a due 2-celle diverse che ora sono una sola. Così facendo ho ridotto il numero di lati ed ho conservato l'uguaglianza che per il caso con  $n$  lati so, per ipotesi induttiva, esser valida.*

**Osservazione 3.3.0.5.** *Anche se fino ad ora non è servito chiariamo, in modo più preciso, la definizione di una triangolazione di una superficie (di cui la suddivisione è un caso generale): è data da una famiglia finita di sottospazi chiusi che ricoprono la superficie e da una famiglia finita di omeomorfismi da triangoli del piano alle superfici chiuse, diremo le immagini dei vertici/lati del triangolo vertici/lati della triangolazione il tutto in modo che gli insiemi in cui ho suddiviso la superficie abbiano intersezioni vuote oppure un solo punto oppure due punti ed il lato che li connette. Parleremo in seguito di celle e triangolazioni nello stesso contesto ma ciò non è contraddittorio nè restrittivo infatti possiamo sempre ridurre un complesso di celle ad un complesso di triangoli ovvero triangolarlo. Assumiamo di poter creare reti anche su superfici con genere diverso da quello della sfera (che ha genere 0) ovvero, per sopra, di poter triangolare qualsiasi superficie infatti vale che ogni superficie ha una triangolazione e per un compatto essa è finita e la caratteristica sulla superficie sarà la caratteristica della triangolazione su essa e non dipende della triangolazione eseguita, inoltre da una suddivisione posso sempre ricavare una triangolazione quindi nei nostri ragionamenti avremmo sempre potuto, in ultima istanza ricodurci a triangolazioni e non è restrittivo pensare alle triangolazioni come casi particolari, ma non troppo, delle suddivisioni.*

Cerchiamo ora con queste assunzioni, ragionando sulle triangolazioni di provare un'altra relazione importante fra la caratteristica e la topologia dell'insieme:

**Osservazione 3.3.0.6** (ora verso la topologia ... per induzione). *Diamo una definizione di **genere** di una superficie un po' intuitiva per far percepire la generalità del discorso. Il genere di una superficie orientabile chiusa è il suo numero di "buchi", intuitivamente possiamo ottenere una superficie di genere voluto tagliando via un numero doppio di circonferenze da una sfera ed unendole a due a due in modo che non si intersechino. Come esempi: la sfera ha genere 0, il toro ha genere 1 ed in generale un  $g$ -toro è un toro con  $g$  fori ed ha genere  $g$ ; un fatto profondo è che questa è una classificazione in classi di equivalenza (attraverso omeomorfismi) esaustiva nell'insieme delle superfici topologiche orientabili chiuse infatti vale che ogni 2-varietà connessa, compatta, orientabile e senza bordo è omeomorfa ad un  $g$ -toro ovvero ad una toro con  $g$ -buchi ovvero ad una somma connessa di  $g$  tori e  $g$  sarà il genere della varietà. La somma connessa è un modo di "incollare" le superfici: triangolo le superfici, identifico due triangoli e come nuovo insieme considero le due superfici meno la parte interna o faccia del triangolo identificato. Quindi come rappresentanti posso usare proprio le superfici citate sopra che apparentemente sembrano troppo semplici ma in realtà catturano tutte le caratteristiche determinanti della questione. La definizione analitica di genere, che lasciamo sempre a livello intuitivo, è il massimo numero di curve chiuse semplici (senza autointersezioni) distinte e disgiunte che si posso tracciare sulla superficie e lungo cui posso "tagliare" (ovvero la relazione opposta del passaggio al quoziente) senza che la superficie si sconnetta in componenti connesse distinte, quindi una superficie di genere  $p$  ammette di certo almeno  $p+1$  particolari curve che con tale operazione di "taglio" la dividono in*

almeno due componenti connesse. Come per la sfera per ogni superficie  $S$  di genere  $g$  ogni rete  $P$  su essa ha caratteristica  $\chi(S)$  in modo analogo a quanto fatto nell'osservazione 3.3.0.3 con una suddivisione delle due reti. Infatti si ha che la caratteristica è una funzione del solo genere della superficie e non dipende dalla suddivisione e per una superficie  $S$  di genere  $g$  vale  $\chi(S) = 2 - 2g$  (come slogan "ogni 'buco' fa calare di 2 la caratteristica della superficie"); non proveremo, nei due passi base, che questa funzione è ben definita sulle classi di equivalenza ovvero che dipende solo dal genere, per cui la nostra è solo una verifica e non una dimostrazione infatti servirebbe la prova dei risultati citati sopra per eleggere questi a rappresentanti, a meno di omeomorfismi, delle superfici di genere corrispondente quindi "proviamo" (o meglio verifichiamo) questo asserto per induzione sul genere:

**genere 0** il caso di una superficie di genere 0 (sfera) è stato analizzato in dettaglio nelle osservazioni 3.3.0.1 e 3.3.0.3 (infatti il fatto di poter proiettare un poliedro sulla superficie sferica e calcolarne lì la caratteristica è valido poichè la caratteristica è la medesima infatti hanno stesso genere non avendo buchi) e sui poligoni sferici, vale che la caratteristica della triangolazione o suddivisione è  $\chi(S^2) = 2 - 2 \cdot 0 = 2$ ;

**genere 1** il caso di superficie di genere 1 (toro): triangoliamo il toro e attraverso un taglio verticale (assumiamo che questa operazione di taglio-calcolo della caratteristica-cuci non vari la caratteristica come appare intuitivamente) il toro, diventa un cilindro che è equivalente alla sfera meno due circonferenze (2-celle) infatti se presa una sfera, togliamo da essa due triangoli (o circonferenze), ottenendo, a meno di omeomorfismi, un "cilindro", e identifichiamo (nel senso della somma connessa specificato sopra in nota) un triangolo con l'altro otteniamo un toro, ovvero abbiamo che la caratteristica (nel senso della triangolazione) del toro, che è la somma connessa una sfera meno due triangoli, è la caratteristica della triangolazione, sulla superficie sferica così ottenuta. La sfera di tal tipo ha perso 2 facce 6 lati e 6 vertici ovvero la caratteristica della triangolazione della sfera che, per quanto visto in più modi, è 2 diventa 0 infatti il calare di due per ogni "buco" è proprio legato al fatto che un  $g$ -toro è somma connessa di  $g$  tori, e come caso iniziale un toro è somma connessa di una sfera, e quindi per ogni somma connessa di due oggetti triangolati, rispetto all'unione degli elementi (vertici, lati e facce) delle due triangolazioni dei due oggetti, si perdono 6 lati, 6 vertici e 2 facce e solo la perdita delle due facce fa sì che la triangolazione della nuova superficie abbia la somma algebrica  $F-E+V$  (ovvero la caratteristica classica) diminuita di 2 ovvero vale in tutta generalità che con  $S$  di caratteristica  $s$  e  $S'$  di caratteristica  $s'$  la somma connessa di  $S$  e  $S'$  ha caratteristica  $s+s'-2$  infatti triangolate le superfici, di caratteristica  $S$  e  $S'$ , abbiamo privato entrambe le triangolazioni di un triangolo che abbiamo identificato e poi abbiamo unito tutti i triangoli della superficie quindi se  $S=F-E+V$  e  $S'=F'-E'+V'$  allora  $S''=F''-E''+V''$  con  $F''=F+F'-2$ ,  $E''=E+E'-3$ ,  $V''=V+V'-3$  quindi  $S''=F+F'-2-(E+E'-3)+V+V'-3=S+S'-2$ . Nel nostro caso avendo la somma di una sfera, di genere

0, con sè stessa, una costruzione analoga vale con due sfere a cui tolgo due triangoli per ciascuna ed identificando un triangolo di una con un triangolo dell'altra quindi la caratteristica totale della somma connessa delle due sfere è quella delle due sfere che è 4 a cui ho tolto 4 facce dei 4 triangoli ovvero ancora la caratteristica totale della triangolazione della superficie complessiva è 0, vale che la caratteristica è  $\chi(\text{toro}) = 2 - 2 = 0$ ;

**genere g** per una superficie di genere g (che per la nostra semplice tipologia di superfici descriviamo dicendo che ha g "buchi") la dividiamo in un toro meno una 2-cella (triangolo) ed una superficie di genere g-1 meno una 2 cella (triangolo) rispettivamente con caratteristica  $\chi(\text{toro}) - 1 = 0 - 1 = -1$  (avendo tolto tre vertici, tre lati ed una faccia dalla triangolazione iniziale del toro che è tale che la sua caratteristica, per quanto visto sopra, sia nulla) e  $\chi(g-1) - 1$  (avendo tolto tre vertici, tre lati ed una faccia dalla triangolazione iniziale) e, per le nostre assunzioni, mettendoli insieme non alteriamo la caratteristica totale quindi  $\chi(g) = \chi(g-1) - 2$  e unendo ciò all' ipotesi induttiva  $\chi(g-1) = 2 - 2(g-1) = 4 - 2 \cdot g$  si ha  $\chi(g) = 2 - 2 \cdot g$  e quindi abbiamo verificato l'identità richiesta con passo base  $\chi(0) = \chi(\text{sfera}) = 2$  e  $\chi(1) = \chi(\text{toro}) = 0 = 2 - 2 \cdot 1$ . Sorvoliamo sui dettagli del fatto notevole che si possa passare nella caratteristica di Eulero del poliedro, delle celle o delle triangolazioni, alla caratteristica per superficie di genere qualsiasi. Infatti questo è basato su altri risultati come il fatto che la caratteristica di una superficie non dipende dalla tassellazione (triangolazione) ma solo dalla superficie. Siamo quindi passati da  $\chi(P) = V - E + F$  definita sui poliedri (P) a  $\chi(S) = 2 - 2g$  definita sulle superfici (S) di genere g (suddivise in classi a seconda del genere).

### 3.4 Teorema di Poincarè-Hopf

Arriveremo a mostrare che una caratteristica delle superfici (la caratteristica di Eulero-Poincarè) è strettamente legata alle funzioni o meglio ai campi su di esse (l'indice somma) in particolare dobbiamo arrivare a dimostrare che la caratteristica di Eulero-Poincarè per varietà compatte è uguale all'indice somma di un qualsiasi (coerentemente col fatto che l'indice somma non dipende dal particolare campo) campo vettoriale liscio con zeri isolati sulla varietà (per varietà con bordo il campo dovrà puntare fuori dalla frontiera per ogni punto della frontiera):

**Teorema 17** (Teorema di Poincarè-Hopf). *M varietà compatta, con o senza frontiera, con orientazione come specificato, v campo liscio su M allora la caratteristica di Eulero della varietà è uguale alla somma degli indici calcolata negli zeri del campo :*

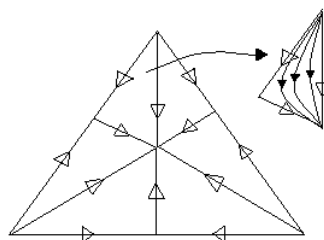
$$\chi(M) = \sum_{\text{su tutti gli zeri isolati}} \iota$$

Ripercorriamo i risultati visti così da arrivare al risultato, in particolare vediamo cosa sappiamo per tutto quanto sopra:

Sfruttando il teorema di immersione di Whitney che afferma che ogni varietà liscia  $m$ -dimensionale, con  $m$  maggiore di uno, si può immergere in uno spazio euclideo di dimensione  $2m$  in modo iniettivo: a noi interesserà solo il fatto che si possa immergere in uno spazio euclideo di dimensione finita, si ha che  $M$  si può immergere in uno spazio euclideo di dimensione opportuna, quindi tutti i casi di varietà immerse in  $R^k$  usati fino ad ora non sono per nulla particolari. Ora abbiamo  $M$  compatto e contenuto in  $R^k$  con  $k$  opportuno, analogamente a quanto fatto nella dimostrazione del teorema 16 di pagina 61 per ogni punto di  $M$  prendiamo un intorno  $N_\epsilon$  nello spazio  $R^k$  ed "estendiamo" il campo  $v(x)$  su  $M$  al campo  $w(x)$  su  $N_\epsilon$ , come già visto, tali campi hanno gli stessi zeri e gli stessi indici, abbiamo che il campo  $w(x)$  punta esternamente rispetto alla frontiera e applicando il teorema 15 di pagina 58 l'indice somma di  $v(x)$  che è uguale all'indice somma di  $w(x)$  è uguale al grado della mappa di Gauss da  $\partial N_\epsilon$  in  $S^{k-1}$  quindi, come noto, l'indice somma non dipende dal campo vettoriale non degenerare su  $M$  ed è sufficiente trovare un campo per cui valga  $\sum \iota = \chi(M)$  perchè ciò valga per ogni campo sulla varietà  $M$ . Sarà sufficiente provare allora che l'indice somma in tutti gli zeri di un campo particolare (o delle sue singolarità vedendo il campo, regolare, come formato da vettori tangenti che variano con continuità ovvero vettori velocità o derivate continue) è uguale alla caratteristica della superficie. A costo di esser ripetitivi introduciamo però ora una nuova prova (molto semplice e dinamica) del fatto che l'indice somma non dipende dal campo, ciò in realtà non sarà una perdita di tempo perchè permetterà in modo sintetico di impadronirci del contesto in cui costruiremo un campo specifico di cui sapremo calcolare l'indice somma e inoltre darà una certa uniformità al tutto.

*Dimostrazione.* **L'indice somma è indipendente dal campo** proviamo che la somma sui poli  $\sum_{j=1}^n \iota$  è uguale per ogni campo ovvero è un invariante della superficie. Consideriamo  $v$  e  $w$  due campi di vettori regolari e suddividiamo la superficie in celle in modo da avere al massimo una singolarità per un solo campo all'interno dei lati della rete sulla superficie (ciò è possibile essendo un numero finito le singolarità) ovvero consideriamo le 2-celle sufficientemente piccole in modo da avere in esse al più un zero per  $v$  o  $w$ ; la differenza di indici per  $v$  e  $w$  in ogni zero di ogni 2-cella è  $1/2\pi$  volte la differenza della direzione fra  $v$  e  $w$  percorrendo la frontiera della 2-cella in senso positivo ma sommando su tutte le 2-celle troviamo che la somma totale della differenza degli indici nei poli è nulla infatti ogni lato è il bordo di esattamente due 2-celle e le percorro nei due sensi opposti quindi a due a due tali contributi si eliminano; infatti l'indice è collegato solamente a come si avvolge il campo lungo la frontiera della 2-cella che contiene lo zero e quindi ho che la somma sugli zeri della differenza degli indici dei due campi è nulla e quindi l'indice somma di  $v$  è uguale a quello di  $w$ .

**un campo particolare** costruiamo un campo di cui si possa calcolare l'indice somma: discretizziamo (con un omeomorfismo fra la superficie ed un complesso simpliciale o con una deformazione continua tra la superficie



ed il politopo) la superficie ovvero dividiamo (suddivisione baricentrica) la superficie in modo che ogni 2-cella sia un triangolo (per comodità ma ciò non è restrittivo e come già detto nulla dipende dalla particolare suddivisione) ed in ogni triangolo aggiungo altri quattro punti: i punti medi dei tre lati ed un punto all'interno e connetto il punto all'interno con i tre punti medi ed i tre vertici del triangolo con orientamento verso il centro e con l'orientamento dei lati opposto rispetto alla parte del vertice (uscente) e verso il punto medio del lato stesso (entrante). Ho così diviso il triangolo iniziale in sei triangoli e definisco un nuovo campo vettoriale (che sarà un campo gradiente di una funzione definita sul triangolo con minimo nel centro, massimi nei vertici e punti di sella nei punti medi dei lati) che sulla frontiera coincide con quanto detto sopra ovvero abbiamo così definito un campo con uno zero in ogni vertice, lato, 2-cella e con ogni altro punto regolare e l'indice per lo zero di ogni vertice (V) per gli esempi fatti nella sezione 3.1 è +1 infatti il campo lì è radiale verso l'esterno (sorgente) e così anche per l'indice dello zero nella 2-cella (F) che è radiale verso l'interno (buca) infine l'indice per ogni zero nei lati (E) è -1 essendo un punto di sella quindi, corrispondendo ogni singolarità all'interno della 2-cella/sui lati/sui vertici al numero di 2-celle/lati/vertici, vale che  $\sum \iota = V + F - E = \chi$ . La costruzione generale si fa orientando il campo in modo che cresca andando dal semplice i-esimo nella direzione del semplice (i-1)-esimo e per continuità nella direzione di tutti i semplici più piccoli (le frecce andranno dal complesso (i-1)-esimo al complesso i-esimo e per continuità a tutti i complessi di dimensione maggiore), in particolare gli 0-simplessi saranno ancora dei massimi e gli n-simplessi ancora dei minimi.

**nel caso di campo con zeri degeneri** in realtà potremmo approssimare zeri degeneri con zeri non degeneri per l'osservazione 3.1.0.12 di pagina 56 vediamo ora un'idea simile su come ragionare: prendiamo un campo vettoriale  $v(x)$  definito su un aperto  $U$  con uno zero isolato, degenere, in un punto  $z$  e presa una funzione scalare  $\lambda : U \rightarrow [0, 1]$  che assume il valore 1 in  $N_1$  vicino a  $z$  e 0 lontano da  $z$  fuori da  $N_0 \supseteq N_1$  ovvero una funzione cut-off (nell'intorno di  $z$  non ci sono altri zeri di  $v$  essendo uno zero isolato) allora preso  $y$  piccolo (minore del  $\inf_{N_0 - N_1} |v|$ ) valore regolare di  $v(x)$  che possiamo supporre esista per il lemma di Sard, definiamo il nuovo campo  $v'(x) := v(x) - \lambda(x)y$  che è non degenere in  $N_1$  dove abbiamo i soli zeri di



$v'$  (infatti, nell'intorno  $N_0$  non ho aggiunto nuovi zeri : negli zeri di  $v'$  si ha che vale  $v(x) = \lambda(x)y$  e per la scelta di  $y$  sui moduli vale  $|v(x)| = \lambda|y|$  il che è assurdo allora per  $N_0 - N_1$  non ho alcun zero di  $v(x)'$ , in  $N_1$  vale  $v'(x) := v(x) - y$  e  $dv'(x) := dv(x)$  e  $v'$  si annulla solo dove  $v(x) - y = 0$  ovvero sugli  $x$  tali che  $v(x) = y$  ovvero sulla preimmagine di  $y$  tramite  $v$  ed in tali zeri  $v$  è non degenerare e così, avendo uguale differenziale, anche  $v'$  è non degenerare (si hanno zeri non degeneri anche per un intorno di  $z$  un po' maggiore di  $N_1$  fin dove  $\lambda$  non è nulla). Abbiamo così ottenuto zeri non degeneri, verificiamo che anche l'indice non cambia: per definizione l'indice somma degli zeri in  $N_0$  è il grado di  $v/|v|$  sulla frontiera di  $N_0$  ma su essa per costruzione  $v' = v$  e per il teorema 15 di pagina 58 è uguale al grado della mappa (gaussiana)  $v(x) := v'(x)/|v'(x)|$  che va da  $\partial N_0$  in  $S^{m-1}$  e per come visto nel teorema citato, imitando tutti i passi della dimostrazione con intorni attorno agli zeri interni e considerando la frontiera iniziale e quella del nuovo insieme senza zeri di  $v'$  il grado dovrà esser nullo essendo la restrizione alla frontiera, orientata, di una mappa liscia definita su tutto l'insieme e quindi l'indice somma degli zeri interni di  $v'$  considerandone le frontiere è uguale all'indice di  $v$  nell'unico zero in  $N_0$ , ed essendo sulla frontiera di tale insieme  $v = v'$  vale proprio che l'indice non è alterato passando da  $v(x)$  degenerare a  $v'(x)$  non degenerare e per quest'ultimo campo vale il risultato visto sopra ed in tale insieme  $N_0$  i due campi hanno gli stessi zeri e quindi i due indici coincidono. Così per ogni campo su una varietà compatta, ragionando localmente, posso sostituire un campo con zeri isolati e degeneri sulla varietà con un campo vettoriale non degenerare senza variare l'indice somma.

**nel caso di varietà con bordo** sia  $M \subseteq R^k$  varietà con frontiera come visto nel teorema 16 di pagina 61 posso "estendere" ogni campo che punta esternamente rispetto alla frontiera di  $M$  ad un intorno  $N_\epsilon$  in modo che punti esternamente anche rispetto a  $\partial N_\epsilon$ . Con questa operazione però si perde regolarità per esempio  $N_\epsilon$  non è più  $C^\infty$  bensì  $C^0$  ovvero continuo e non necessariamente differenziabile tuttavia si può mostrare che le richieste di differenziabilità non sono necessarie oppure pervenire al risultato con vie del tutto diverse ovvero si possono indebolire le ipotesi e vedere che sono sufficienti a concludere oppure seguire un'altra strada.

□

Per una prova basata sulla teoria di Morse, semplici e concetti un po' più fini di topologia algebrica vedi [XVI] ed [VIII].

**Osservazione 3.4.0.1** (qualche applicazione). *Una varietà differenziale è pettinabile se ammette un campo vettoriale (sufficientemente regolare) mai nullo. Per il teorema di Poincaré-Hopf menzionato sopra, una varietà compatta pettinabile deve avere caratteristica di Eulero zero perchè la somma sugli indici degli zeri è la somma su nessun termine ovvero la somma nulla. Per la sfera vale, sfruttando il teorema di Poincaré-Hopf, che, come già visto nell'osservazione 3.2.0.2 di pagina 63 ad esempio invertendo l'orientazione con l'antipodale,*

$\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$  e per  $n=2m$  ovvero  $n$  pari si ha  $\chi(S^{2m}) = 1 + (-1)^{2m} = 2$  quindi l'indice somma essendo la somma degli indici di ogni campo sulla sfera deve almeno avere uno zero altrimenti tale somma, sugli zeri del campo, sarebbe nulla cosa che accade per  $S^n$  con  $n$  dispari; per questo motivo, con la nuova terminologia, la sfera di dimensione pari, ovvero immersa in uno spazio euclideo di dimensione dispari, non è pettinabile, mentre tale è la sfera di dimensione dispari: questo è il teorema della palla pelosa. In modo analogo per una superficie chiusa  $N$  orientabile con un campo liscio non nullo l'indice somma è una somma su nessun termine ed è 0 quindi la caratteristica di Eulero è nulla  $\chi(N) = 0$  ovvero, richiamando un risultato visto nell'osservazione 3.3.0.6 di pagina 68 della sezione precedente, si è su una superficie di genere  $g$ , tale che,  $2-2g = \chi(N) = 0$  ovvero di genere  $g=1$  ovvero un toro (a meno di equivalenza). Vale in generale però anche il viceversa ovvero se la caratteristica di Eulero è nulla si ha un campo senza zeri quindi una varietà compatta orientata possiede un campo di vettori che non si annulla se e solo se la sua caratteristica è 0 (per un'idea ed i rimandi alla dimostrazione vedi p.11 di [V]).



$x = x_0/(1 - z_0)$  e  $y = y_0/(1 - z_0)$  ovvero  $h_n$  manda  $(x_0, y_0, z_0) \in S^2 - \{(0, 0, 1)\}$  in  $(x_0/(1 - z_0), y_0/(1 - z_0)) \in C$  viceversa il punto  $B = (w_0, z_0)$  del piano  $C$  va nel punto  $A = (w, z, v)$  di intersezione della retta per il punto ed il polo nord e la superficie della sfera unitaria ovvero considerando  $B$  come  $(w_0, z_0, 0) \in R^3$  ho le equazioni  $w/w_0 = z/z_0 = v - 1/ - 1$  ovvero ottengo le due equazioni  $w = w_0(1 - v)$  e  $z = z_0(1 - v)$  ponendo che  $w^2 + z^2 + v^2 = 1$  ottengo  $w_0^2(1 - v)^2 + z_0^2(1 - v)^2 + v^2 = 1$  ovvero  $(w_0^2 + z_0^2 + 1)v^2 - 2(w_0^2 + z_0^2)v + (w_0^2 + z_0^2 - 1) = 0$  e cercando la soluzione di tale equazione di secondo grado  $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2(w_0^2 + z_0^2) \pm 2}{2(w_0^2 + z_0^2 + 1)}$  ovvero ritrovo  $v = 1$  ovvero il polo nord (che però non considero appartenente alla sfera) e  $v = (w_0^2 + z_0^2 - 1)/(w_0^2 + z_0^2 + 1)$  quindi sostituendo  $w = w_0(1 - v) = w_0(w_0^2 + z_0^2 + 1 - (w_0^2 + z_0^2 - 1))/(w_0^2 + z_0^2 + 1) = 2w_0/(w_0^2 + z_0^2 + 1)$  ed analogamente per  $z$  sostituendo all'espressione sopra  $z_0$  al  $w_0$  al numeratore quindi abbiamo che il punto  $(w_0, z_0) \in C$  va attraverso  $h_n^{-1}$  nel punto  $(2w_0/(w_0^2 + z_0^2 + 1), 2z_0/(w_0^2 + z_0^2 + 1), (w_0^2 + z_0^2 - 1)/(w_0^2 + z_0^2 + 1)) \in S^2 - \{(0, 0, +1)\}$  analogamente per le proiezioni dal polo sud scambiando il punto  $(0, 0, 1)$  con  $(0, 0, -1)$  ho che  $(x_0, y_0, z_0) \in S^2 - \{(0, 0, -1)\}$  va attraverso  $h_s$  in  $(x_0/1 + z_0, y_0/1 + z_0) \in C$  e  $(w_0, z_0) \in C$  va attraverso  $h_s^{-1}$  in  $(2w_0/(w_0^2 + z_0^2 + 1), 2z_0/(w_0^2 + z_0^2 + 1), (-w_0^2 - z_0^2 + 1)/(w_0^2 + z_0^2 + 1)) \in S^2 - \{(0, 0, -1)\}$  allora per  $z \in C$   $h_s \circ h_n^{-1}(z_0, z_1) = h_s \circ (2z_0/(z_0^2 + z_1^2 + 1), 2z_1/(z_0^2 + z_1^2 + 1), (z_0^2 + z_1^2 - 1)/(z_0^2 + z_1^2 + 1)) = (2z_0/(z_0^2 + z_1^2 + 1)/(1 + (z_0^2 + z_1^2 - 1)/(z_0^2 + z_1^2 + 1)), 2z_1/(z_0^2 + z_1^2 + 1)(1 + (z_0^2 + z_1^2 - 1)/(z_0^2 + z_1^2 + 1))) = (z_0, z_1)/(z_0^2 + z_1^2)^2 = z/|z|^2 = 1/\bar{z}$  allora  $z$  va in  $1/\bar{z}$  attraverso  $h_s \circ h_n^{-1}$  allora attraverso l'applicazione inversa  $h_n \circ h_s^{-1}$  va nell'inverso di  $1/\bar{z}$  che è  $1/\bar{z}$  infatti è un' involuzione ( $1/1/\bar{z} = 1/1/z = z$ ) quindi se  $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$  con  $a_0 \neq 0$ ,  $Q(x) = h_s \circ h_n^{-1} \circ P \circ h_n \circ h_s^{-1}(z) = 1/P(1/\bar{z}) = 1/(1/(\bar{z}^n)(a_0 + a_1 \bar{z}^1 + \dots + a_n \bar{z}^n)) = z^n/(\bar{a}_0 + \bar{a}_1 z^1 + \dots + \bar{a}_n z^n)$  in un intorno di 0 allora è regolare poichè  $h_s^{-1}$  porta lo 0 di  $C$  nel punto  $(0, 0, 1)$ , si ha quindi che  $f(x) = h_s^{-1} \circ Q \circ h_s$  è liscia in un intorno del polo nord. Sappiamo per regolarità che  $f$  ha solo un numero finito di punti critici infatti  $P$  non è un diffeomorfismo solo negli zeri della derivata  $P'(z) = \sum_{j=1}^n a_{n-j} j z^{j-1}$  ed ha solo un numero finito di zeri essendo la derivata non identicamente nulla, i valori regolari di  $f$  saranno quelli di una sfera con l'esclusione alcuni punti ed essendo connessa  $\sharp f(y)^{-1}$  sarà, non solo localmente, costante, in tale insieme, e  $\sharp f(y)^{-1}$  non potendo esser nulla dappertutto non è nulla in nessun punto, allora  $f$  è suriettiva, (avendo ogni insieme  $f^{-1}(y)$  almeno un elemento) e quindi esistono elementi in  $f(0)^{-1}$  e quindi attraverso la trasformazione biunivoca  $h_n$  e la sua inversa si ha che anche  $h_n \circ f \circ h_n^{-1} = P(x)$  avrà uno zero in corrispondenza dello zero di  $f$  quindi il polinomio complesso  $P$  ha uno zero.  $\square$

Fra le molteplici dimostrazioni di tale fatto vi è una anche prova basata sul teorema di Poincaré-Hopf: vedi [XVII].

## 4.2 Teorema del punto fisso di Brouwer

Vediamo ora una semplice applicazione della definizione di mappe fra varietà data nell'introduzione. Per un'argomentazione simile ma differente volta a provare tale fatto vedi [VII]. Sia  $M$  varietà compatta con bordo, proviamo ora due risultati preliminari :

**Lemma 13.** *Non esiste alcuna funzione  $f : M \rightarrow \partial M$  liscia che lascia fissa  $\partial M$ .*

*Dimostrazione.* Per assurdo supponiamo esista tale  $f$  e sia  $y \in \partial M$  un valore regolare per  $f$  lo sarà anche per  $f|_{\partial M}$ , che per ipotesi è l'identità, infatti  $d(\text{funzione identità})_y = \text{matrice identità}$  che per nessun  $y$  è singolare avendo sempre, indipendentemente da  $y$ , determinante 1; poichè vale il risultato già citato nell'osservazione 1.2.0.4 di pagina 10 (vedi p.13 di [I]), analogo a quello richiamato nell'osservazione 1.2.0.3 di pagina 9, che afferma che dati  $M$  varietà con bordo di dimensione  $m$  ed  $N$  varietà di dimensione  $n$  con  $m > n$  e data  $f : M \rightarrow N$  se  $y \in N$  è un valore regolare per  $f$  e per  $f|_{\partial M}$  allora  $f(y)^{-1} \subseteq M$  è una varietà liscia di dimensione  $m - n$  con frontiera, la quale è proprio l'intersezione della frontiera di  $M$  con  $f(y)^{-1}$   $f(y)^{-1}$  è una varietà liscia di dimensione 1 (che è la differenza di dimensioni fra  $M$  e  $\partial M$ ) con  $\partial f(y)^{-1} = f(y)^{-1} \cap \partial M = \{y\}$  infatti  $f$  sulla frontiera è l'identità quindi, essendo  $y$  sulla frontiera, l'intersezione si riduce a  $\{y\} \cap \partial M = \{y\}$  l'insieme di livello  $f(y)^{-1}$  è un compatto e le varietà uno-dimensionali compatte sono unioni disgiunte di cerchi e segmenti per quanto detto nell'osservazione 1.3.0.1 di pagina 10 (vedi appendice di [I]) quindi ha un numero di punti di frontiera pari (quelli dei segmenti) e quindi si ha un assurdo avendo stabilito che la frontiera era formata da un solo punto.  $\square$

**Esempio 5.** *Il disco  $n$ -dimensionale  $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$  è una varietà compatta con frontiera,  $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$  la sfera  $n$ -dimensionale (ovvero immersa nello spazio  $n$ -dimensionale ma come insieme di dimensione  $n - 1$ ) quindi abbiamo come caso particolare di tale lemma che la funzione identità dalla sfera  $S^{n-1}$  in sé non si può estendere ad alcuna applicazione liscia dal disco  $D^n$  ad  $S^{n-1}$ .*

Proviamo una versione (più debole ovvero con più ipotesi) del teorema del punto fisso usando delle funzioni lisce:

**Lemma 14.** *Ogni mappa liscia  $g : D^n \rightarrow D^n$  ha un punto fisso ovvero tale che  $g(x) = x$ .*

*Dimostrazione.* Per assurdo supponiamo non esista  $g$  con punti fissi, sia  $x \in D^n$  e sia  $f(x) \in S^{n-1}$  il punto della sfera più vicino a  $x$  sulla retta che congiunge  $x$  a  $g(x)$  ovvero quello dalla parte di  $x$ , chiaramente poichè  $g$  dipende solo da  $x$ , per tale costruzione, anche  $f$  dipende solo da  $x$ . Ho così costruito una funzione da  $D^n$  a  $S^{n-1}$  tale che fissa tutti i punti della frontiera proprio per la costruzione fatta inoltre tale funzione è liscia poichè per costruzione tale funzione

dà come immagine un punto sulla retta passante per  $x$  con direzione  $x - g(x)$ , normalizzando tale vettore, si ottiene  $f(x) = x + tu$  con il vettore  $u = \frac{x-g(x)}{|x-g(x)|}$  e lo scalare  $t = -x \bullet u + \sqrt{1 - x \bullet x + (x \bullet u)^2}$  che è ben definito essendo il termine sotto radice positivo infatti  $x \in D^n$  e quindi  $x \bullet x = x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1$  e sulla frontiera vale l'uguale quindi  $t$  diventa  $-x \bullet u + \sqrt{(x \bullet u)^2} = 0$  e quindi  $f(x) = x$  ovvero fissa tutti i punti della frontiera come voluto e quindi anche la scelta dello scalare è opportuna e coerente con l'interpretazione geometrica e tale funzione è una combinazione lineare di cose lisce ( $g(x)$  per ipotesi,  $u$  per definizione) quindi è liscia. Per il lemma 13 sopra ciò non è possibile.  $\square$

Ora proviamo il teorema del punto fisso (di Brouwer) anche per funzioni continue riconducendoci al lemma sopra in cui il risultato vale per funzioni lisce approssimando funzioni continue con funzioni lisce:

**Teorema 19.** *Ogni funzione continua  $G : D^n \rightarrow D^n$  ha un punto fisso.*

*Dimostrazione.* Per il teorema di approssimazione di Weistrass si ha che ogni funzione reale di variabile reale continua definita su un intervallo si può approssimare a piacere (con errore fissato) con un polinomio di grado opportuno ovvero esiste una successione di polinomi che converge alla funzione non solo puntualmente ma in modo uniforme (ovvero secondo il massimo della norma della funzione valutata nell'intero intervallo) ovvero il massimo della norma della differenza va a 0, ovvero i polinomi sono densi nell'insieme delle funzioni continue definite su un intervallo. A noi servirà una versione un po' più generale ma non troppo che è l'analogo della versione sopra, ambientata negli spazi euclidei, come  $R^n$ , con la relativa distanza e con compatti al posto di intervalli il che per noi è sufficiente lavorando con  $D^n$ . quindi per quanto detto esiste una funzione polinomiale  $P' : R^n \rightarrow R^n$  (dipendente da  $\epsilon$  ma non da  $x$ ) tale che  $|P'(x) - G(x)| < \epsilon \forall x \in D^n$  e  $\forall \epsilon > 0$  ovvero sono vicini in modo uniforme rispetto all'intervallo e per avere che il polinomio porti i punti dentro a  $D^n$  in punti dentro a  $D^n$  prendiamo  $P(x) := P'(x)/(1+\epsilon)$  infatti vale, per  $x \in D^n$ , per la disuguaglianza triangolare  $|P(x)| := |P'(x)|/(1+\epsilon) \leq (|P'(x) - G(x)| + |G(x)|)/(1+\epsilon) < (\epsilon + 1)/(1+\epsilon) = 1$  e  $|P(x) - G(x)| = |P'(x)/(1+\epsilon) - G(x)| \leq |P'(x) - (1+\epsilon)G(x)| \leq |P'(x) - G(x)| + \epsilon|G(x)| \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$ . Se  $G(x) \neq x \forall x \in D^n$  ovvero non esiste un punto fisso per  $G$  allora la funzione  $|G(x) - x|$  avrebbe un minimo (che esiste essendo una funzione continua su un compatto) positivo ( $\mu$ ) possiamo scegliere  $2\epsilon = \mu$  e quindi vale  $|P(x) - G(x)| < \mu \forall x \in D^n$  e  $\forall x \in D^n$  vale  $P(x) \neq x$  infatti se esistesse  $x'$  tale che  $P(x') = x'$  per la disuguaglianza triangolare  $|G(x') - x'| \leq |G(x') - P(x')| + |P(x') - x'| < \mu + 0 = \mu$  il che è assurdo per l'ipotesi che il minimo sia  $\mu$  e quindi  $P(x) \neq x \forall x \in D^n$  ovvero  $P$  è una mappa liscia dal disco in sè senza punti fissi e questo è assurdo per la versione del teorema del punto fisso per funzioni lisce vista nel lemma appena sopra.  $\square$

### 4.3 I campi, il genere ed il teorema di Poincarè-Hopf

Mettiamo ora insieme tutto ciò che abbiamo fatto nel capitolo 3:

**Osservazione 4.3.0.1.** *Abbiamo già introdotto nella sezione 3 del capitolo 3 (osservazione 3.3.0.6 di pagina 68) il genere ed abbiamo mostrato che vale per una superficie  $S$  di genere  $g$  (ovvero appartenente alla classe di equivalenza delle superfici con genere  $g$ ) che  $\chi(S) = 2 - 2g$  allora possiamo provare in un modo alternativo il teorema di Poincarè-Hopf mostrando che l'indice somma ovvero la somma degli indici negli zeri (o singolarità pensando il campo come insieme di vettori tangenti) di un qualsiasi campo sulla superficie (che è anche il campo di elementi di linea sulla superficie) con un numero finito di zeri (o singolarità) è la caratteristica della superficie usando la sua definizione in funzione del genere. Chiameremo singolarità i punti in cui non è definito il campo proprio per enfatizzarne la natura dinamica. Come nella prova già vista del teorema di Poincarè-Hopf del capitolo 3 cerchiamo di dare un'idea, trattando casi specifici ma non troppo, di ciò che succede:*

**genere 0, la sfera** con i grandi cerchi per i due poli: ciascuno di essi è una singolarità di indice  $+1$  in particolare uno sarà un massimo e l'altro un minimo a seconda dell'orientazione dei vettori ovvero che escano o entrino dal polo quindi la somma degli indici dei due zeri è  $2$  e vale  $2 = \sum \iota = 2 - 2g = 2 - 0 = 2$ ;

**genere 0, la sfera** con la proiezione stereografica dal piano alla sfera di un campo parallelo di elementi di linea sul piano: abbiamo il polo nord che è un dipolo e quindi una singolarità di indice  $+2$  infatti i vettori che attraversano tutto il piano, esempio orizzontalmente lungo la direzione delle ascisse, andando da ascissa  $-\infty$  ad ascissa  $+\infty$ , proiettate sulla sfera sono curve chiuse con estremo finale ed iniziale coincidenti con il polo nord che è "il" punto all'"infinito" ; quindi ancora l'indice somma è la somma su una sola singolarità di indice  $+2$  che è uguale a  $2 - 2g = 2 - 0 = 2$ ;

**genere 0** una superficie immersa in uno spazio euclideo e considero la coordinata verticale ed il corrispondente insieme di livello: abbiamo due singolarità come massimi, una come minimo di indice  $+1$  ed un punto di sella con indice  $-1$  allora l'indice somma è la somma sulle quattro singolarità ed è  $+2$  che è uguale a  $2 - 2g = 2 - 0 = 2$ ;

**genere 1, un toro:** non ha singolarità e quindi vale l'identità  $0 = \sum \iota = 2 - 2 \cdot 1 = 0$ ;

**genere 1, un toro** visto come insieme di livello delle ascisse: ha due singolarità con indice  $+1$  e due singolarità con indice  $-1$  ovvero due punti di massimo o minimo a seconda del verso dei vettori e due punti di sella quindi vale ancora  $0 = +1 + 1 - 1 - 1 = \sum \iota = 2 - 2 \cdot 1 = 0$ ;

**genere  $g$** , immergiamo la superficie in uno spazio euclideo di dimensione opportuna: avendo  $g$  "buchi" si hanno  $2g$  punti di sella con indice  $-1$  e  $2$  punti di massimo o minimo con indice  $+1$  quindi vale proprio  $\sum \iota = 2 - 2g$  e così si procede per induzione infatti aggiungendo un "buco" ovvero aumentando di uno il genere si aggiungono due punti di sella che hanno indice  $-1$  che corrispondono proprio nell'identità al decremento nel termine alla destra aggiungendo di uno il genere.

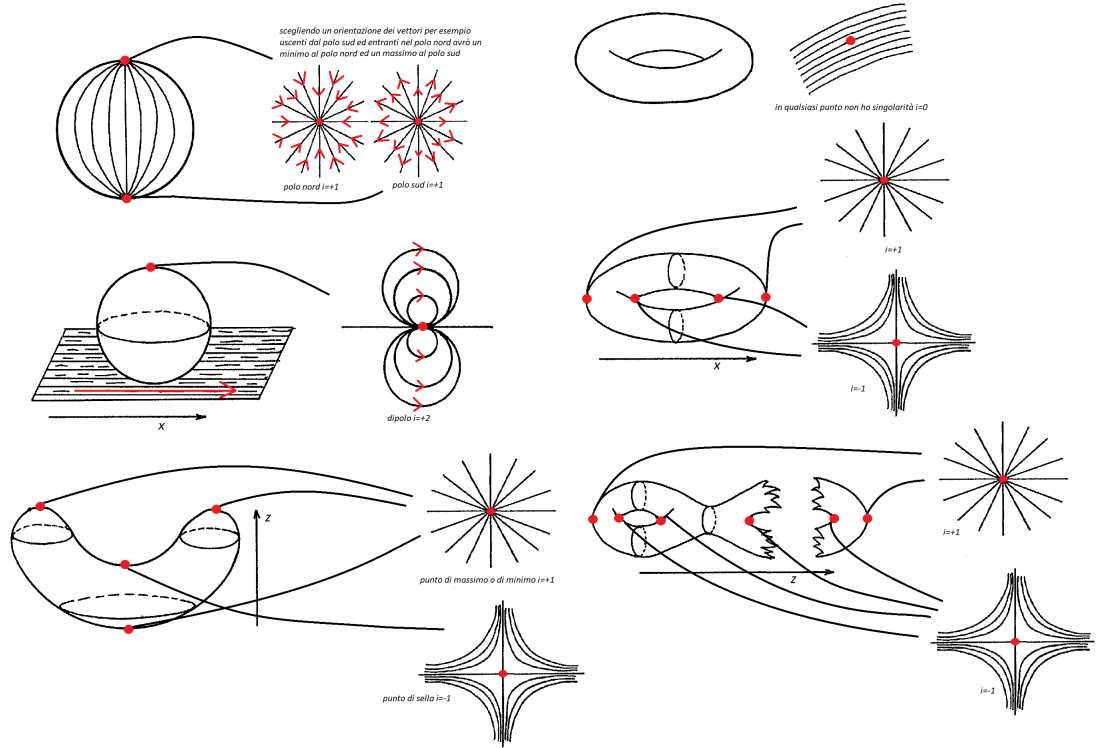


Figura 4.1: diversi esempi di validità della formula  $\chi(g) = g - 2$  con il  $g$  a sinistra che indica la classe di superfici di genere  $g$  ed il  $g$  a destra che è un intero ed indica il genere.

**Osservazione 4.3.0.2** (quanto ci sarebbe ancora da dire...). *Elenco qui alcuni argomenti che nel corso dello studio mi sono apparsi strettamente, inaspettatamente e splendidamente intrecciati e che sarebbe stato bello indagare:*

**curvatura totale ed indice di campo** Altri argomenti legati fra loro citati nel capitolo 3 sono la curvatura totale (una quantità in cui compare la curvatura) e l'indice nelle singolarità di un campo di elementi di linea su una superficie chiusa orientabile (lavorando in modo identico a quanto visto nelle osservazioni preliminari nella sezione 1 del capitolo 3 ovvero



nelle definizioni 22, 23 e nelle altre nozioni citate in nota). Questo è un fatto notevole perchè coinvolge anche la metrica infatti tale risultato porta a descrivere la metrica mediante la topologia e viceversa infatti per quanto citato sopra avendo un collegamento fra indice somma e metrica e per il teorema di Poincarè-Hopf avendo un legame fra indice somma e caratteristica nel senso topologico si ha così un legame fra la topologia (il genere) e la metrica (la curvatura).

**orientazioni, superfici e mappa gaussiana** *Un fatto interessante sarebbe stato indagare le applicazioni della la curvatura gaussiana in tutta la sua generalità: infatti avremmo potuto definire tale mappa nel contesto delle superfici chiuse astratte ovvero come mappa sferica e quindi vedere che il grado di tale mappa è determinato dalla tipologia di ricoprimenti nei punti dell'immagine e anche dal genere della superficie che è una proporzione di quanta superficie della sfera è ricoperta come immagine della mappa sferica. La mappa di Gauss è connessa anche ad un altro argomento affrontato in un altro modo: l'orientazione; infatti se esiste una mappa di Gauss si può orientare la superficie e la scelta della mappa è equivalente alla scelta di una orientazione.*

**curvatura gaussiana e mappa gaussiana** *Infine a coronamento del tutto è da notare che la curvatura gaussiana nasce come proprietà descritta dinamicamente dalla mappa di Gauss nel caso bidimensionale e tridimensionale quindi anche la mappa gaussiana che è legata alla curvatura sarà legata, per il primo risultato citato, anche all'indice del campo. Esplicitiamo un poco questo legame perchè è molto semplice ed intuitivo. Nel caso di curve piane regolari del tipo  $\gamma(t)$ , di cui esiste sempre il vettore tangente, dopo aver definito in qualche modo una lunghezza  $L$  per le curve ed aver parametrizzato in lunghezza d'arco la curva stessa  $\gamma(s)$ , in modo da avere una forma semplice per essa, si definisce la curvatura piana per una curva parametrizzata a velocità unitaria essere  $d^2\gamma(s)/ds^2 = d(d\gamma(s)/ds)/ds$  la variazione del vettore tangente di norma unitaria al variare della ascissa curvilinea (ovvero la coordinata "intrinseca" sulla curva) ovvero il rapporto fra la variazione angolare del vettore tangente ( $d\tau$ ) lungo la curva rispetto alla lunghezza di curva percorsa ( $ds$ ) e definizione analoga si potrebbe dare per la normale che è perpendicolare alla tangente ed ha variazione uguale ad essa essendo rigidamente solidale al sistema di riferimento che scivola lungo la curva, il vantaggio della normale è che è unica e quindi è ben definita la variazione di essa come vettore nel piano e nello spazio. Possiamo allora definire un applicazione  $\Gamma$  che mappa la curva nella circonferenza  $S^1$  e che porta un punto della curva nel punto intersezione fra la circonferenza ed il punto finale del vettore normale al punto sulla curva applicato nell'origine di  $S^1$ ; vale che il rapporto fra le lunghezze lungo la circonferenza ( $L_\Gamma(s_0, s)$ ) fra un punto fissato ( $\Gamma(s_0)$ ) ed un punto ( $\Gamma(s)$ ) immagine di un punto variabile di coordinata ( $s$ ) sulla curva e la lunghezza sulla curva ( $L(s_0, s)$ ) fra un punto fissato di coordinata ( $s_0$ ) ed un punto variabile di ascissa ( $s$ ) è, al limite quando i due punti si avvicinano*

(per  $s$  che va ad  $s_0$ ), la curvatura ( $k$ ) locale nel punto fissato della curva ( $k(s_0) = \lim_{s \rightarrow s_0} L_\Gamma(s_0, s)/L(s_0, s)$ ). Nel caso di una superficie abbiamo un qualcosa di analogo mappando un punto della superficie  $((x_0, y_0))$  in un punto sulla sfera  $S^2$  tale che quest'ultimo sia il punto finale del vettore normale alla superficie nel punto considerato applicato nell'origine della sfera, questa si dirà mappa sferica ( $\Gamma$ ). Analogamente a quanto fatto sopra prendendo una piccola area ( $A$ ) attorno al punto della superficie considerato  $((x_0, y_0))$  e l'area immagine attraverso la mappa sferica ( $\Gamma(A)$ ) ovvero una piccola area attorno al punto, immagine del punto della superficie, sulla sfera ( $\Gamma(x_0, y_0)$ ) si avrà che la curvatura ( $K$ ) della regione nell'intorno del punto  $((x_0, y_0))$ , con la regione  $A$  che si rimpicciolisce attorno al punto è  $K(x_0, y_0) = \lim_{A \rightarrow 0} \Gamma(A)/A$  e la curvatura sarà positiva o negativa a seconda che  $\Gamma$  nell'intorno del punto conservi o inverta l'orientazione (il che è anche visibile geometricamente in alcuni esempi citati nella sezione 1 del capitolo 3).

**teorema di Gauss-Bonnet** *Certamente per arrivare a tale risultato, che lega la curvatura alla topologia, avremmo dovuto fare altre scelte in particolare si sarebbe dovuto definire la curvatura per curve e superfici almeno per enunciare il teorema, e poi avremmo dovuto introdurre le varietà riemanniane il che non sarebbe stato possibile nè per lo spazio, nè per la difficoltà del problema. Notevole però rimane che anche questo è un caso in cui l'approccio analitico (metrica, curvatura, derivate, mappe lisce) cattura un aspetto topologico (genere, caratteristica) e viceversa.*

## 4.4 I solidi platonici

Ora vediamo un'applicazione dei concetti (caratteristica di Eulero-Poincarè) introdotti nel capitolo 3 in particolare come corollario dell'osservazione 3.3.0.1 a pagina 65 proviamo che:

**Teorema 20.** *Esistono solo cinque poliedri regolari o solidi platonici.*

*Dimostrazione.* Lavoriamo sui poligoni a seconda dei lati da cui sono composti e del comportamento di essi rispetto alle facce e ai vertici (ovvero gli indici  $m$ ,  $n$  varieranno sul numero di lati): sia  $F_n$  il numero di facce del poliedro con  $n$  lati, quindi per definizione di  $F$  si ha

$$F = \sum_{n \geq 3}^{\infty} F_n \quad (4.1)$$

come già visto nell'osservazione citata poichè ogni lato di ogni poligono è in comune fra due poligoni quindi

$$\sum_{n \geq 3}^{\infty} nF_n = 2E \quad (4.2)$$

sia  $V_m$  il numero di vertici in cui si incontrano  $m$  lati allora

$$V = \sum_{m \geq 3}^{\infty} V_m \quad (4.3)$$

ma ogni lato contiene due vertici ovvero sommando sui lati che connettono due vertici conto due volte, secondo ciascun vertice, i lati perciò vale

$$\sum_{m \geq 3}^{\infty} mV_m = 2E \quad (4.4)$$

Un poliedro regolare, però, è tale che tutte le sue facce hanno lo stesso numero di lati  $n$  :  $F = F_n$  e i suoi vertici hanno tutti lo stesso numero di lati  $m$  che si intersecano :  $V = V_m$  le serie in 4.1 e in 4.3 si riducono ad un termine (rispettivamente  $n'F_{n'}$  e  $m'V_{m'}$  avendo il poliedro scelto facce tutte con  $n'$  lati e  $m'$  spigoli uscenti da ogni vertice) e sostituendole in 4.2 e 4.4 si ha che  $n'F_{n'} = 2E$   $m'V_{m'} = 2E$  e poichè vale per il poliedro regolare

$$2 = V_{m'} - E + F_{n'} = 2E/m' - E + 2E/n'$$

ovvero  $2m'n' = E(2n' - m'n' + 2m')$  e  $m', n'$  per definizione di poliedro devono almeno esser maggiori o uguali di 3 (ci devono esser almeno 3 lati che si incontrano in un vertice e le facce devono avere almeno 3 lati) e se  $m', n'$  fossero entrambi uguali a 4 si avrebbe un assurdo avendo nella parte destra dell'equazione 0 ed a sinistra un prodotto di due numeri non nulli, e così se entrambi fossero strettamente maggiori di tre si avrebbe  $1/E = 1/m' - 1/2 + 1/n' < 0$  il che è assurdo quindi almeno uno dei due deve esser uguale a 3, per esempio  $m'$ , ed in modo identico  $n'$  per simmetria dell'equazione, ed in tal caso si ottiene  $1/E = 1/3 - 1/2 + 1/n' = -1/6 + 1/n'$  ma  $E > 0$  quindi  $n'$  (e così  $m'$ ) può esser solo 3,4,5; facendo tutte le combinazioni ottengo le cinque coppie (3,3),(3,4),(4,3),(3,5),(5,3) che come visto sopra determinano in modo univoco  $E$  e quindi in funzione di questo  $V$  e  $F$ . Ho così mostrato che vi sono solo cinque possibili poliedri regolari.  $\square$



# Bibliografia

- [I] John Willard Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, the university press of Virginia, 1965, basato sulle note di David.W.Weaver. Ho usato questo libro come schema di tutta la discussione.
- [II] Heinz Hopf, *Differential geometry in the large*, Springer, basato su letture del 1946 e 1956. Questo libro è stata una preziosa scoperta.
- [III] Joshua Bosshardt, *The Hopf degree theorem*, articolo reperito online. Sommario di alcuni argomenti trattati che reputo ottimo proprio per i dettagli che non sfugge di trascurare.
- [IV] Jonathan Libgober, *The Euler characteristic, Poincaré-Hopf Theorem and applications*. Articolo disponibile online, molto chiaro, con una visione molto matura, ottimo come sintesi ed utile come confronto per altre vie da seguire per arrivare al medesimo risultato.
- [V] Alex Wright e Kael Dixon, *The Poincaré-Hopf theorem*, articolo non pubblicato disponibile in rete.
- [VI] Innokentij Zotov e Axel Sarlin, *The Poincaré-Hopf theorem*, articolo molto utile per l'aspetto onnicomprensivo e qualitativo disponibile online.
- [VII] John Willard Milnor, *Analytic proofs of the "hairy ball theorem" and the Brouwer fixed point theorem*, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 85, No. 7 (Aug. - Sep., 1978), pp. 521-524.
- [VIII] Luigi Caputi, *Il teorema di Poincaré-Hopf*, 29 aprile 2013, articolo non pubblicato disponibile in rete.
- [IX] Marco Manetti, *Topologia*, Springer, 2008.
- [X] Stefano Francaviglia, *GeoSup 2013*. Schizzi degli argomenti di alcune dimostrazioni, dispensa disponibile online.

- [XI] Hong Wang, Seminaire: Poincare-Hopf Theorem, 9 novembre 2012 articolo disponibile in rete.
- [XII] Heinz Hopf, Selected Chapters of Geometry, note di un corso estivo tenuto a Zurigo nel 1940 disponibile online.
- [XIII] Alberto Saracco, Caratteristica di Eulero-Poincaré, curvatura di Gauss e tassellazione di superfici architettoniche, dipartimento di matematica e facoltà di architettura, Università di Parma, presentazione informale della caratteristica di Eulero disponibile online.
- [XIV] Elia Barilli, Teoria del grado, tesi di laurea in matematica, Alma Mater Studiorum, Università di Bologna.
- [XV] Annalisa Bruno, La caratteristica di Eulero e il teorema di Poincaré-Hopf, tesi di laurea in matematica, Università degli Studi di Ferrara.
- [XVI] Oliver Knill, A graph theoretical Poincarè-Hopf theorem, Jan 4, 2012, articolo disponibile online.
- [XVII] Piotr Josevich, The Poincaré-Hopf Index Theorem and the Fundamental Theorem of Algebra, Brown University, articolo disponibile in rete.