

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Sistemi di coordinate regolari per la soluzione di Schwarzschild

Relatore:
Prof. Roberto Balbinot

Presentata da:
Isabel Maria Cornacchia

Anno Accademico 2017/2018

Sommario

In questa tesi triennale si vuole studiare la soluzione di Schwarzschild per le equazioni di Einstein nel vuoto nell'ambito della teoria della Relatività Generale. In particolare si esaminano i sistemi di coordinate regolari che descrivono la soluzione senza la singolarità in r_s , detto raggio di Schwarzschild.

Nel Capitolo 1 si studiano i principi di base che hanno portato Einstein a formulare la teoria di Relatività Generale, che generalizza la Relatività Ristretta e la teoria gravitazionale di Newton. Con l'aiuto di strumenti della geometria differenziale, in particolare il tensore di Riemann e lo scalare di Ricci, lo spazio-tempo viene descritto da una metrica curva, la cui curvatura è determinata dalla distribuzione e dal flusso di massa ed energia, che opera come sorgente gravitazionale. Si ricavano poi le equazioni di campo, un sistema di equazioni differenziali parziali al secondo ordine che descrivono la relazione tra il tensore di energia-impulso e la geometria dello spazio-tempo.

Il Capitolo 2 descrive la prima soluzione alle equazioni di campo, proposta da K. Schwarzschild nel 1916. In condizioni di sorgente di campo a simmetria sferica si studia la metrica nel vuoto e le sue caratteristiche. In particolare si considerano le geodetiche radiali nulle descritte in coordinate di Schwarzschild e si osserva il comportamento singolare in prossimità di r_s . Si studia quindi la natura della singolarità e si introduce il concetto di orizzonte degli eventi. Si considerano poi le geodetiche di particelle in caduta libera, descrivendole sia in funzione del tempo di Schwarzschild che in funzione del tempo proprio, e si analizzano le differenze dei moti che ne emergono.

Nel Capitolo 3 infine si introducono vari sistemi di coordinate che descrivono la soluzione di Schwarzschild senza singolarità in r_s . In particolare si ricavano le coordinate di Eddington-Finkelstein per descrivere geodetiche radiali nulle che abbiano un moto regolare attraverso l'orizzonte degli eventi nel futuro. Si studia poi la soluzione che corrisponde all'inversione temporale del caso precedente, ovvero per geodetiche nulle che attraversano l'orizzonte del passato, definendo quindi le regioni di buco nero e buco bianco. Si studiano inoltre le coordinate introdotte indipendentemente da Painlevé e Gullstrand per osservatori in caduta radiale con velocità iniziale nulla, in particolare si studiano le due soluzioni per entrambe le direzioni del moto degli osservatori. Si studia poi una famiglia di coordinate a un parametro che generalizza le coordinate PG e si dimostra che anche le EF appartengono alla stessa famiglia. Infine si ricavano le coordinate di Kruskal-Szekeres come estensione massimale della soluzione di Schwarzschild.

Indice

Notazione	1
1 Relatività Generale	2
1.1 La teoria della Relatività Generale	2
1.2 Tensore di Riemann	3
1.3 Tensore energia-impulso	5
1.4 Equazioni di campo di Einstein	5
2 Soluzione di Schwarzschild	8
2.1 Soluzione per simmetria sferica	8
2.2 Coordinate di Schwarzschild e singolarità	11
3 Sistemi di coordinate regolari	16
3.1 Coordinate di Eddington-Finkelstein	16
3.2 Coordinate di Painlevé-Gullstrand	19
3.3 Coordinate di Kruskal-Szekeres	23
Conclusioni	27
Bibliografia	29

Notazione

- ∇_a è l'operatore derivata covariante e agisce su un vettore come $\nabla_a v^b = \partial_a v^b + \Gamma^b_{ac} v^c$, dove Γ^b_{ac} indica il simbolo di Christoffel
- Il simbolo $'$ tra gli indici indica derivata parziale $v^a_{,b} = \partial_b v^a$ mentre $;$ indica derivata covariante $v^a_{;b} = \nabla_b v^a$
- In questa trattazione si farà uso della metrica con segnatura $(-+++)$
- Il tensore di Riemann definisce la curvatura di una varietà tramite il trasporto parallelo ed è dato da $R^c_{dab} v^d = [\nabla_a, \nabla_b] v^c$; le sue componenti sono definite nel seguente modo: $R^a_{bcd} := \Gamma^a_{bd,c} - \Gamma^a_{bc,d} + \Gamma^a_{kc} \Gamma^k_{bd} - \Gamma^a_{kd} \Gamma^k_{bc}$

Capitolo 1

Relatività Generale

1.1 La teoria della Relatività Generale

La Relatività Generale è la teoria che permette di estendere la Relatività Ristretta a includere anche la gravitazione. Fu pubblicata nel 1915 e cambiò radicalmente la concezione della gravità e dello spazio-tempo. Alla base della teoria di Einstein ci sono alcuni principi che lo hanno implicitamente o esplicitamente guidato alla formulazione della teoria e delle sue equazioni e vi è un un po' di controversia su quanti e quali siano quelli fondamentali, dovuta anche al fatto che ogni autore li formula in maniera diversa. Quello che però è riconosciuto come il principio chiave è il seguente:

Principio di Equivalenza: "Non è possibile elaborare un esperimento locale in grado di distinguere tra un moto di caduta libera in un campo gravitazionale e un moto uniformemente accelerato in assenza di un campo gravitazionale."

Secondo questo principio, quindi, un sistema di riferimento accelerato rispetto a un sistema di riferimento inerziale è localmente identico a un sistema a riposo in un campo gravitazionale, come si vede nella serie di esperimenti mentali dell'ascensore di Einstein. Una formulazione alternativa di questo principio afferma che la massa gravitazionale e quella inerziale sono equivalenti, dove quindi si postula a priori un'equivalenza che nella teoria Newtoniana è un risultato sperimentale: infatti l'uguaglianza tra le masse è misurata con una precisione di una parte su 10^{12} . Nella formulazione più debole invece si afferma che il campo gravitazionale si accoppia a tutto.

Una conseguenza importante di questo principio è che la metrica dello spazio-tempo non è più quella piana di Minkowski. Si considera una particella libera: nel suo sistema di riferimento la metrica locale è quella canonica di Minkowski η_{ab} e la sua equazione è

$$\frac{d^2 x^a}{d\tau^2} = 0 \quad (1.1)$$

essa quindi si muove in una geodetica di tipo tempo. Se invece si considera un sistema di riferimento non inerziale si usa un sistema di coordinate più generale, non quello canonico, e l'equazione diventa

$$\frac{d^2 x^a}{d\tau^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{d\tau} \frac{dx^c}{d\tau} = 0 \quad (1.2)$$

dove Γ_{bc}^a è la connessione metrica di g_{ab} , una metrica che si può supporre sempre piana ma diversa da η_{ab} . Il secondo termine dell'equazione indica la forza inerziale, ovvero quella dovuta al moto del sistema di riferimento. Siccome anche la forza gravitazionale si deve trattare come forza inerziale, come afferma il principio, anche ad essa si associa un termine in Γ_{bc}^a ma la metrica non può più essere piana, per poter distinguere il caso non gravitazionale. In questo modo Γ_{bc}^a diventa la connessione metrica di una metrica curva e, siccome è associata ad una forza, si interpreta g_{ab} come potenziale.

La teoria della Relatività Ristretta si basa sul principio che tutti gli osservatori inerziali sono equivalenti. Per tenere conto della gravitazione si devono includere anche osservatori non inerziali, che però dovrebbero essere in grado di dedurre le stesse leggi fisiche. Einstein propose allora come completamento logico del principio della relatività ristretta il [1]

Principio di Relatività Generale: "Tutti gli osservatori sono equivalenti."

Assumendo che ogni osservatore può essere associato a un sistema di riferimento, quindi a un sistema di coordinate, il principio afferma che le leggi, per essere equivalenti in tutti i sistemi, devono essere invarianti per trasformazioni di coordinate. Questa condizione si traduce matematicamente, con l'aiuto della geometria differenziale, nella seguente richiesta:

Principio di covarianza generale: "Tutte le leggi della fisica devono essere scritte sotto forma di equazioni covarianti rispetto alle trasformazioni generali di coordinate."

Questo equivale a dire che le equazioni devono essere in forma tensoriale.

I principi introdotti finora non danno ancora nessuna indicazione su come ottenere effettivamente le equazioni di campo per la teoria generale. Per trovare una formulazione delle leggi, partendo da quelle già note nella teoria ristretta, si adottano questi ulteriori principi che fungono da linea guida.

Principio di corrispondenza: "Nei limiti di campi gravitazionali deboli e di basse velocità rispetto a quella della luce, la teoria della Relatività Generale deve ridursi alla teoria newtoniana della gravitazione, mentre in assenza di campi gravitazionali deve ridursi alla teoria della Relatività Ristretta."

Principio di accoppiamento gravitazionale minimo: "Nel passaggio dalla teoria della Relatività Ristretta a quella Generale non si deve aggiungere alcun termine che sia esplicitamente legato al tensore di curvatura."

1.2 Tensore di Riemann

Le equazioni di campo della teoria di gravitazione di Newton sono equazioni differenziali parziali al secondo ordine del potenziale gravitazionale Φ . Dalle considerazioni fatte in precedenza, ovvero per il principio di corrispondenza, le equazioni di campo della Relatività Generale saranno quindi equazioni differenziali parziali al secondo ordine del potenziale g_{ab} ; inoltre, per il principio di covarianza, esse saranno

in forma tensoriale. L'unico tensore costituito dalla metrica e da sue derivate parziali prime e seconde, e lineari in quest'ultime, è il tensore di Riemann, per cui ci si aspetta che sia questo che compaia nelle equazioni di campo. In particolare si può considerare una sua contrazione, dal momento che nelle equazioni newtoniane nel vuoto si ha l'annullamento di un tensore contratto.

Il tensore di Riemann descrive la curvatura di una varietà e le sue componenti sono date da [2]

$$R^a{}_{bcd} := \Gamma^a{}_{bd,c} - \Gamma^a{}_{bc,d} + \Gamma^a{}_{kc}\Gamma^k{}_{bd} - \Gamma^a{}_{kd}\Gamma^k{}_{bc}, \quad (1.3)$$

dove Γ indica il simbolo di Christoffel. In un sistema di coordinate localmente inerziale si ha che $\Gamma^a{}_{cd} = 0$, quindi le componenti di R assumono la seguente forma:

$$R_{abcd} := g_{ak}R^k{}_{bcd} = \frac{1}{2}(g_{ad,bc} - g_{ac,bd} + g_{bc,ad} - g_{bd,ac}). \quad (1.4)$$

Per la simmetria di $g_{ab} = g_{ba}$ si deducono le seguenti proprietà di simmetria:

$$R_{abcd} = -R_{bacd} = -R_{abdc} = R_{cdab} \quad (1.5)$$

$$R_{abcd} + R_{adbc} + R_{acdb} = 0 \quad (1.6)$$

Inoltre si dimostra facilmente che valgono le identità di Bianchi:

$$R_{abcd;f} + R_{abfc;d} + R_{abdf;c} = 0 \quad (1.7)$$

Questa equazione, essendo un'equazione tensoriale, è valida in qualsiasi sistema di coordinate, non solo quello inerziale considerato in partenza, ed è di particolare importanza nella teoria di Relatività Generale.

Tornando alle caratteristiche di R_{abcd} , esso è antisimmetrico in a e b e in c e d , mentre è simmetrico a coppie di indici, ovvero in ab e cd . Da questa proprietà consegue che esiste una sola contrazione non nulla del tensore, a meno del segno, ed è il *tensore di Ricci*, definito come

$$R_{ab} := R^c{}_{acb} = R_{ba}. \quad (1.8)$$

Analogamente si definisce lo scalare di Ricci, o curvatura scalare, l'invariante

$$R := g^{cd}R_{cd} = g^{cd}g^{ab}R_{acbd}. \quad (1.9)$$

A partire dal tensore di Riemann e dalla metrica si definisce infine il *tensore di Einstein*

$$G^{ab} = R^{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}R = G^{ba} \quad (1.10)$$

e si ha che anch'esso è simmetrico e soddisfa la contrazione delle identità di Bianchi, equivalenti a

$$G^{ab}{}_{;b} = \nabla_b G^{ab} = 0. \quad (1.11)$$

Questo è il tensore che effettivamente compare nelle equazioni di campo e contiene la metrica e sue derivate parziali al secondo ordine, generalizzando il potenziale gravitazionale di Newton.

1.3 Tensore energia-impulso

Nella teoria newtoniana la sorgente della gravità è data dalla densità di massa ρ e la legge che dimostra come il campo gravitazionale determini la metrica è la seguente:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho, \quad (1.12)$$

con G costante gravitazionale. La soluzione per un punto materiale di massa m è data da

$$\Phi = -\frac{Gm}{r}. \quad (1.13)$$

Avendo generalizzato il potenziale Φ con il tensore di Einstein G^{ab} manca definire la sorgente del campo gravitazionale nella Relatività Generale. Essa non può essere solo la densità di massa classica perché non si terrebbe conto della sua equivalenza con l'energia; si può quindi pensare di considerare come sorgente la densità dell'energia totale. A questo proposito si introduce il tensore energia-impulso, che descrive la densità e il flusso di energia e quantità di moto nello spazio-tempo. In particolare le sue componenti T^{ij} sono definite come il flusso della componente i -esima della quantità di moto attraverso una superficie con coordinate x^j costanti. La quantità di moto è in questo caso il quadrimpulso P^i , quindi la componente T^{00} indica il flusso di energia, ovvero P^0 , attraverso una superficie a t costante, cioè è la densità di energia (e massa). Analogamente T^{i0} è la densità della (i -esima componente della) quantità di moto.

Si può dimostrare che T^{ij} è simmetrico e la sua espressione esplicita varia in base all'elemento che rappresenta: nella teoria generale i più rilevanti sono quelli per fluidi perfetti, per polvere (ovvero materia incoerente) e per il campo elettromagnetico.

Dal momento che T contiene tutte le informazioni su energia e quantità di moto, si può usare per esprimere le relative leggi di conservazione del quadrimpulso. In Relatività Ristretta la legge assume la forma

$$\partial_b T^{ab} = 0, \quad (1.14)$$

mentre in Relatività Generale, in un sistema di coordinate arbitrario, la forma differenziale della legge di conservazione diventa

$$\nabla_b T^{ab} = 0. \quad (1.15)$$

Quest'ultima è anche detta equazione del moto dell'energia-impulso, perché pone i limiti all'evoluzione dinamica del tensore. Da questa legge infatti si ricavano, per esempio, le equazioni di continuità dei fluidi.

1.4 Equazioni di campo di Einstein

Considerando il tensore di energia-impulso come la generalizzazione della densità di massa si prende T_{ab} come termine di sorgente nelle equazioni di campo. L'equivalenza di massa ed energia suggerisce che tutte le forme di energia agiscono come sorgente del campo gravitazionale ed è ciò che si affermava nella formulazione debole del principio di equivalenza.

Per scrivere l'equazione si può partire dalle proprietà 1.11 e 1.15, che suggeriscono la seguente proporzionalità tra i tensori:

$$G^{ab} = \kappa T^{ab}. \quad (1.16)$$

Determinando la costante κ , detta costante di accoppiamento, si ottiene la generalizzazione dell'eq. 1.12 in relatività. Il valore di κ si ottiene applicando il limite newtoniano, ovvero imponendo che le previsioni della Relatività Generale corrispondano alla teoria gravitazionale di Newton nelle condizioni appropriate. In particolare si ottiene

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} = 8\pi, \quad (1.17)$$

dove nell'ultima uguaglianza si è fatto uso delle unità relativistiche ($c = G = 1$). Le equazioni di campo di Einstein sono quindi:

$$G^{ab} = 8\pi T^{ab}, \quad (1.18)$$

che equivalgono a un sistema di 16 PDE (partial differential equations) al secondo ordine. Il numero di equazioni si riduce a 10 considerando la simmetria dei tensori G^{ab} e T^{ab} e sono da risolvere per i dieci componenti di g_{ab} con la sorgente T^{ab} nota. Le dieci equazioni però non sono linearmente indipendenti; dalle identità di Bianchi 1.11 si ha che ci sono in realtà quattro identità differenziali, una per ogni indice a . Questo è coerente con il fatto che un insieme di coordinate g_{ab} può essere sottoposto a una trasformazione di coordinate arbitraria (con quattro gradi di libertà), quindi dovrebbe essere impossibile determinare completamente g_{ab} solo dalle condizioni iniziali. Le equazioni differenziali indipendenti sono quindi sei e determinano le funzioni di g_{ab} che caratterizzano la geometria indipendentemente dalle coordinate.

Un'altra particolarità delle equazioni di Einstein è che sono non-lineari, quindi non rispettano il principio di sovrapposizione. Questo è dovuto alla presenza di termini quadratici in Γ nella definizione generale del tensore di Riemann 1.3. Tale proprietà rende più difficile la risoluzione delle equazioni perché date due soluzioni, una loro combinazione non è a sua volta soluzione. Fisicamente la non-linearità si manifesta nel fatto che il campo gravitazionale si accoppia con se stesso: il campo prodotto da una sorgente contiene energia, e quindi massa, che è a sua volta sorgente di un campo gravitazionale. La soluzione delle equazioni risulta quindi molto complicata e generalmente viene fatta numericamente; si riescono a ottenere soluzioni esatte solo attraverso approssimazioni di simmetria.

La prima soluzione esatta fu proposta da K. Schwarzschild nel 1916, un anno dopo la pubblicazione della teoria di Einstein, e parte dall'approssimazione di una simmetria sferica. Ulteriori soluzioni sono state trovate successivamente, quasi tutte imponendo particolari condizioni di simmetria. In alternativa, nei casi in cui le simmetrie siano assenti o molto deboli, si può ricorrere a metodi approssimativi. Questi metodi si basano su: la debolezza dei campi gravitazionali trovati in natura o approssimazioni di sorgenti isolate, in modo da sfruttare la debolezza del campo lontano da esse. Matematicamente l'approssimazione di campo debole consiste nel dare più importanza ai termini lineari di alcune equazioni, in modo da averle in forma lineare.

Di particolare importanza per il prossimo capitolo sono le equazioni di Einstein nel vuoto. In questo caso si ha $T_{ab} = 0$, quindi l'equazione 1.18 diventa

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 0. \quad (1.19)$$

Prendendo la traccia di 1.19 si ottiene che $R = 0$, quindi l'equazione nel vuoto si riduce a:

$$R_{ab} = 0. \quad (1.20)$$

Capitolo 2

Soluzione di Schwarzschild

2.1 Soluzione per simmetria sferica

In questo capitolo si vuole studiare la prima soluzione alle equazioni di campo di Einstein, proposta da K. Schwarzschild nel 1916. Essa è una soluzione che descrive il campo gravitazionale generato da una sorgente con simmetria sferica, elettricamente neutra e non rotante; in particolare, questa soluzione descrive la metrica all'esterno della sorgente, quindi nel vuoto. Date queste caratteristiche della sorgente si avrà che le soluzioni saranno statiche e a simmetria sferica. Prima di tutto si vuole quindi definire il significato di soluzioni statiche e soluzioni stazionarie [1].

Una soluzione è stazionaria se è indipendente dal tempo, ovvero può evolvere ma non in maniera esplicita rispetto al tempo. Una soluzione statica invece ha la restrizione più forte che non può evolvere, quindi è simmetrica rispetto al tempo per qualsiasi origine di tempo. In termini più specifici, uno spazio-tempo è detto *stazionario* se e solo se possiede un campo vettoriale di Killing di tipo tempo X^a . Uno spazio-tempo stazionario è detto *statico* se esiste una famiglia di ipersuperfici (di tipo spazio) ortogonale a X^a (quindi alle sue orbite), ovvero per cui vale la condizione $X_{[a}\nabla_b X_{c]} = 0$. Si trova quindi che nello spazio-tempo statico esiste un sistema di coordinate adattate al campo vettoriale di Killing di tipo tempo dove la metrica è indipendente dal tempo e non ci sono termini diagonali nell'elemento di linea che coinvolgano il tempo, ovvero $g_{0a} = 0$.

Uno spazio-tempo è invece detto essere a *simmetria sferica* se e solo se ammette tre campi vettoriali di Killing di tipo spazio X^a linearmente indipendenti le cui orbite sono chiuse e che soddisfano [1]

$$[X^1, X^2] = X^3, \quad [X^2, X^3] = X^1, \quad [X^3, X^1] = X^2. \quad (2.1)$$

In questo spazio-tempo esiste quindi un sistema di coordinate x^a , detto Cartesiano, in cui i campi di Killing assumono la seguente forma:

$$X^0 = 0, \quad X^a = \omega^a_b x^b \quad (2.2)$$

con $\omega_{ab} = -\omega_{ba}$.

Per determinare la metrica di Schwarzschild si può partire dalla sola richiesta di simmetria sferica, senza assunzioni sulla stazionarietà o staticità della soluzione; si

vedrà poi che questa condizione implica necessariamente la staticità, risultato noto come *teorema di Birkhoff*.

La simmetria sferica implica l'esistenza di un punto privilegiato, l'origine O , tale che il sistema è invariante per rotazioni spaziali intorno a O . Fissando il tempo e la distanza di un punto dall'origine, la rotazione di questo intorno ad O descrive una 2-sfera. Questo porta a introdurre le coordinate polari $(t, r, \vartheta, \varphi)$, dove la variazione di ϑ e φ non deve influire sull'elemento di linea, quindi possono comparire solo in un termine della forma $(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)$. Le coordinate t e r sono introdotte come coordinate arbitrarie, rispettivamente di tipo temporale e radiale, per completare l'insieme di coordinate in quattro dimensioni. Inizialmente si ha quindi l'elemento di linea nella seguente forma:

$$ds^2 = A(t, r)dt^2 - 2B(t, r)dtdr - C(t, r)dr^2 - D(t, r)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2). \quad (2.3)$$

Dal momento che la scelta del sistema di riferimento è arbitraria, si possono eseguire trasformazioni sulle coordinate t e r che non alterino la simmetria. In particolare si possono scegliere in modo che si annulli il termine $B(t, r)$ e che $D(t, r)$ sia uguale a r^2 : con questa trasformazione si ottiene che r indica il raggio vettore della 2-sfera, ovvero r è determinato in modo tale che la superficie totale equivalga a $4\pi r^2$. Infine risulta comodo scrivere le grandezze $A(t, r)$ e $C(t, r)$ in forma esponenziale, sempre tramite due funzioni di t ed r . Si ottiene così una forma più compatta [3]:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2). \quad (2.4)$$

La soluzione di Schwarzschild consiste nel determinare le funzioni incognite $\nu(t, r)$ e $\lambda(t, r)$ tramite le equazioni di Einstein nel vuoto.

La metrica covariante è

$$g_{ab} = \text{diag}(e^\nu, -e^\lambda, -r^2, -r^2 \sin^2\vartheta) \quad (2.5)$$

e, dal momento che è diagonale, la sua forma controvariante è

$$g^{ab} = \text{diag}(e^{-\nu}, -e^{-\lambda}, -r^{-2}, -r^{-2} \sin^{-2}\vartheta). \quad (2.6)$$

Imponendo l'annullamento delle componenti del tensore di Einstein si ottengono tre equazioni indipendenti:

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0 \quad (2.7)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 0 \quad (2.8)$$

$$\dot{\lambda} = 0 \quad (2.9)$$

dove l'apice indica la derivata rispetto a r e il punto la derivata rispetto a t . Sommando 2.7 e 2.8 si ottiene

$$\lambda' + \nu' = 0, \quad (2.10)$$

cioè, dall'integrazione,

$$\lambda + \nu = h(t). \quad (2.11)$$

Inoltre da 2.9 si ha che λ è indipendente dal tempo, quindi 2.7 diventa un'equazione differenziale ordinaria:

$$(re^{-\lambda})' = 1. \quad (2.12)$$

Integrando si ottiene, scegliendo come costante di integrazione $-2m$ per convenienza,

$$e^\lambda = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}. \quad (2.13)$$

A questo punto la metrica risulta essere

$$g_{ab} = \text{diag}[e^{h(t)}(1 - 2m/r), -(1 - 2m/r)^{-1}, -r^2, -r^2 \sin^2 \vartheta]. \quad (2.14)$$

Si può infine eliminare $h(t)$ trasformando t in una nuova coordinata t' definita come

$$t' = \int_c^t e^{\frac{1}{2}h(u)} du, \quad (2.15)$$

dove c è una costante arbitraria. L'unica componente della metrica che viene modificata da questa trasformazione è

$$g'_{00} = (1 - 2m/r). \quad (2.16)$$

Per cui, togliendo gli apici, si ottiene l'*elemento di linea di Schwarzschild*

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (2.17)$$

Questa è la soluzione a simmetria sferica valida per le equazioni nel vuoto ed è interessante osservare che essa è anche stazionaria, infatti è immediato vedere che $g_{ab,0} = 0$. Inoltre essa è anche statica perché è simmetrica rispetto al tempo, quindi invariante per riflessione del tempo $t \rightarrow t' = -t$, e invariante per traslazioni del tempo, ovvero rispetto alla trasformazione $t \rightarrow t' = t + \text{costante}$. Questo dimostra il teorema di Birkhoff [1], secondo cui una soluzione a simmetria sferica nel vuoto è necessariamente statica. Studiando infine il limite per $r \rightarrow \infty$ di 2.17 si ottiene la metrica piana della Relatività Ristretta in coordinate polari:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \quad (2.18)$$

questo significa che la soluzione di Schwarzschild è anche asintoticamente piatta e ciò permette di interpretare la metrica di Schwarzschild come il campo gravitazionale esterno di un corpo isolato.

L'interpretazione della costante m si può ottenere considerando il limite newtoniano, ovvero confrontando il comportamento di una particella di prova nel limite di campo debole ($r \rightarrow \infty$) con quello di una particella di prova nella teoria gravitazionale di Newton. Secondo questa teoria una massa puntiforme M situata nell'origine O genera un potenziale $\Phi = -GM/r$; il limite di campo debole afferma invece che a grandi distanze dalla sorgente la metrica si riduce a $g_{00} \simeq 1 + 2\Phi/c^2$. Sostituendo Φ si ottiene

$$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \quad (2.19)$$

e confrontando con 2.17 si ha che

$$m = \frac{GM}{c^2}, \quad (2.20)$$

in unità non relativistiche. Quindi se si interpreta la soluzione di Schwarzschild come una soluzione dovuta a una massa puntiforme situata all'origine, allora m è la massa della particella in unità relativistiche, ed è anche detta *massa geometrica*.

Una particolarità della soluzione di Schwarzschild è che presenta due singolarità nel regime di campo forte, una per $r = 0$ e una per $r = r_s \equiv 2m$, dove r_s è detto *raggio di Schwarzschild*. La natura delle singolarità verrà studiata in seguito ma si osserva che il valore numerico di $r = 2m$ per sorgenti ordinarie, quali il Sole e i pianeti, è molto minore del loro raggio; dal momento che la soluzione di Schwarzschild è valida solo per il vuoto all'esterno di esse è possibile ignorare entrambe le singolarità della metrica in questi casi. Per sorgenti puntiformi, o con raggio minore di r_s , il problema persiste.

2.2 Coordinate di Schwarzschild e singolarità

Per scrivere una soluzione delle equazioni di Einstein è necessario scegliere un sistema di coordinate: anche se non ci sono sistemi privilegiati per la soluzione, quindi qualsiasi trasformazione di coordinate continua a essere una soluzione valida, alcuni sistemi possono avere un significato geometrico legato alle coordinate. Inoltre se la metrica possiede certe proprietà di simmetria ci possono essere alcuni sistemi di coordinate che si adattano bene alle simmetrie, quindi risultano in qualche modo privilegiati.

Dato un sistema di coordinate non si può stabilire a priori quali abbiano un carattere spaziale o temporale, si può però stabilire se l'ipersuperficie data dalla coordinata $x^a = \text{costante}$ sia di tipo tempo, nulla o di tipo spazio in un punto: con la segnatura della metrica -2 , esse sono di tipo tempo se $g^{aa} > 0$, sono nulle se $g^{aa} = 0$ e sono di tipo spazio se $g^{aa} < 0$. In ogni punto in cui il sistema di coordinate è regolare le ipersuperfici possono avere qualsiasi carattere, sempre che i quattro campi vettoriali normali a queste superfici siano linearmente indipendenti. Quindi le ipersuperfici delle quattro coordinate possono essere tutte nulle, di tipo tempo o di tipo spazio o una combinazione delle tre.

Tornando alla soluzione di Schwarzschild, si studiano le coordinate $(t, r, \vartheta, \varphi)$. Dal momento che

$$g^{00} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, \quad g^{11} = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right), \quad g^{22} = -\frac{1}{r^2}, \quad g^{33} = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta}, \quad (2.21)$$

segue che $x^0 = t$ è una coordinata di tipo tempo, $x^1 = r$ è di tipo spazio finché $r > 2m$ e $x^2 = \vartheta$ e $x^3 = \varphi$ sono entrambe di tipo spazio. Dalla staticità della soluzione si ha che t è il tempo definito in maniera invariante, mentre r è la coordinata radiale della 2-sfera descritta in partenza, la cui area è $4\pi r^2$. Le coordinate di Schwarzschild $(t, r, \vartheta, \varphi)$ sono quindi le coordinate canoniche definite dalle simmetrie presenti nel sistema.

Un problema associato alle coordinate è dato dal fatto che generalmente un sistema di coordinate non copre l'intera varietà, per cui esistono punti in cui l'elemento di linea diventa degenere e la metrica non è più di rango 4: queste sono dette *singolarità di coordinate*, dal momento che sono dovute a un'impossibilità di descrivere lo spazio dovuta alla scelta del sistema di coordinate, e sono quindi singolarità rimovibili da una trasformazione di coordinate. Un esempio è dato dalle coordinate di Schwarzschild, che non coprono l'asse $\vartheta = 0, \pi$; utilizzando le coordinate cartesiane si può però rimuovere la degenerazione e ovviare al problema.

Per valutare una singolarità è utile utilizzare quantità indipendenti dal sistema di coordinate, in particolare si può considerare uno scalare che deriva del tensore di Riemann, detto l'invariante scalare di Kretschmann: [4]

$$K = R_{abcd}R^{abcd} = \frac{48m^2}{r^6}. \quad (2.22)$$

Si osserva che K ha un valore finito in $r = 2m$ ed essendo uno scalare assume questo valore in tutti i sistemi di coordinate: ciò significa che la singolarità in r_s è in realtà una singolarità di coordinate rimovibile. Per $r = 0$, invece, anche l'invariante diventa singolare; si tratta dunque di una singolarità fisica e irrimovibile.

L'interpretazione standard della soluzione di Schwarzschild è in generale una metrica con dominio $r_s < r < +\infty$. Trascurando la distribuzione materiale della sorgente, quindi considerando uno spazio-tempo tutto vuoto e la sorgente puntiforme in $r = 0$, si vuole studiare la soluzione di Schwarzschild nel vuoto per tutti i possibili valori di r . Si osserva che $r = 2m$ è un'ipersuperficie nulla che divide la varietà in due regioni disconnesse: una per $2m < r < +\infty$ e una per $0 < r < 2m$. Nella seconda regione si nota come per r e t si invertono i caratteri: r diventa infatti di tipo tempo e t di tipo spazio.

Per studiare il diagramma spazio-tempo nelle coordinate di Schwarzschild in dettaglio si considerano in primo luogo le geodetiche radiali nulle, che sono definite dalla condizione

$$ds^2 = \dot{\vartheta} = \dot{\varphi} = 0. \quad (2.23)$$

Utilizzando il metodo variazionale [1] si ha

$$2K \equiv g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 = 0, \quad (2.24)$$

dove il punto indica la derivata rispetto a un parametro affine u lungo la geodetica nulla. L'equazione di Eulero-Lagrange associata è

$$\frac{d}{du} \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t} \right] = 0, \quad (2.25)$$

che, integrando, diventa

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t} = k, \quad (2.26)$$

dove k è una costante. Sostituendo in 2.24 si ottiene

$$\dot{r} = \pm k, \quad (2.27)$$

da cui segue che r è un parametro affine. Si può ottenere quindi un'equazione per le geodetiche nella forma $t = t(r)$. Da 2.26 e 2.27 si ricava

$$\frac{dt}{dr} = \frac{dt/du}{dr/du} = \frac{\dot{t}}{\dot{r}}. \quad (2.28)$$

Considerando il segno positivo in 2.27 si ottiene

$$\frac{dt}{dr} = \frac{r}{r - 2m}, \quad (2.29)$$

che dall'integrazione risulta:

$$t = r + 2m \ln|r - 2m| + \text{costante}. \quad (2.30)$$

Nella regione esterna, ovvero con $r > 2m$, si ha

$$\frac{dr}{dt} > 0, \quad (2.31)$$

quindi r aumenta all'aumentare di t . Si definiscono quindi le curve 2.30 come una congruenza di geodetiche radiali nulle *uscenti*. Analogamente il segno negativo fornisce la congruenza di geodetiche radiali nulle *entranti*:

$$t = -(r + 2m \ln|r - 2m| + \text{costante}). \quad (2.32)$$

Si osserva che, come ci si poteva aspettare, con la trasformazione $t \rightarrow -t$ le curve uscenti e quelle entranti si invertono.

Il diagramma dello spazio-tempo dato da queste congruenze è illustrato in Figura 2.1, dove sono state fissate le coordinate ϑ e φ , quindi ogni punto (t, r) rappresenta una 2-sfera di area $4\pi r^2$. Per $r \rightarrow \infty$ le geodetiche hanno pendenza ± 1 come nei diagrammi di Relatività Ristretta, in accordo con il fatto che la soluzione è asintoticamente piatta. Per $r \rightarrow 2m$ invece la pendenza tende a $\pm\infty$ e il cono luce si restringe. Siccome le linee di universo delle particelle sono confinate dentro al cono luce (una particella non può superare la velocità della luce), il restringimento del cono forza la linea di universo a diventare più verticale: una particella raggiunge quindi $r = 2m$ a $t = +\infty$. Nella regione II ($0 < r < 2m$) il cono luce si ribalta, dal momento che r e t invertono il loro carattere. La coordinata r diventa di tipo tempo, quindi un osservatore in questa regione è obbligato a

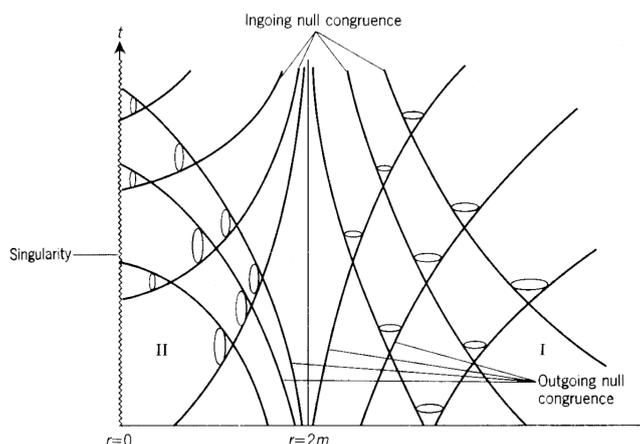


Figura 2.1: [1] Soluzione di Schwarzschild in coordinate di Schwarzschild.

una particella raggiunge quindi $r = 2m$ a $t = +\infty$. Nella regione II ($0 < r < 2m$) il cono luce si ribalta, dal momento che r e t invertono il loro carattere. La coordinata r diventa di tipo tempo, quindi un osservatore in questa regione è obbligato a

muoversi verso la singolarità in $r = 0$ poiché il trascorrere del tempo è rappresentato dal decrescere di r . Questo diagramma suggerisce dunque che sia una particella che un raggio di luce entranti impiegherebbero un tempo infinito per raggiungere il raggio di Schwarzschild; questo però non è ciò che accade veramente ma è una conseguenza dell'uso delle coordinate di Schwarzschild, solo per le quali r_s è una singolarità.

Per verificare che in realtà una particella raggiunge $r = 2m$ in un tempo finito si considera una particella libera radialmente entrante; essa si muove in una geodetica di tipo tempo data da

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} = k, \quad (2.33)$$

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 = 1, \quad (2.34)$$

dove il punto indica la derivazione rispetto al tempo proprio τ della particella, mentre la costante k dipende dalle condizioni iniziali. Si pone $k = 1$, che equivale a considerare la particella che arriva dall'infinito con velocità iniziale nulla, in modo che per r molto grande si ha che asintoticamente $t \simeq \tau$. Da 2.33 e 2.34 si ottiene quindi

$$\left(\frac{d\tau}{dr}\right)^2 = \frac{r}{2m}, \quad (2.35)$$

e integrando si ottiene

$$\tau - \tau_0 = \frac{2}{3(2m)^{\frac{1}{2}}}(r_0^{\frac{3}{2}} - r^{\frac{3}{2}}), \quad (2.36)$$

dove r_0 indica la posizione della particella al tempo proprio τ_0 . Questo risultato non ha singolarità per $r = 2m$, ovvero la particella ha una caduta continua verso $r = 0$ in un tempo proprio finito. Descrivendo questo moto tramite le coordinate di Schwarzschild si ottiene invece ciò che indicava il diagramma, ovvero un tempo infinito per raggiungere la superficie r_s ; utilizzando t infatti si ha che

$$\frac{dt}{dr} = \frac{\dot{t}}{\dot{r}} = -\left(\frac{r}{2m}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \quad (2.37)$$

e integrando

$$t - t_0 = -\frac{2}{3(2m)^{\frac{1}{2}}}(r_0^{\frac{3}{2}} - r^{\frac{3}{2}} + 6mr^{\frac{1}{2}} - 6mr_0^{\frac{1}{2}}) + 2m \ln \frac{[r^{\frac{1}{2}} + (2m)^{\frac{1}{2}}][r_0^{\frac{1}{2}} - (2m)^{\frac{1}{2}}]}{[r_0^{\frac{1}{2}} + (2m)^{\frac{1}{2}}][r^{\frac{1}{2}} - (2m)^{\frac{1}{2}}]}. \quad (2.38)$$

Si osserva che per r e r_0 molto maggiori di $2m$ i due risultati (2.36 e 2.38) sono simili mentre le differenze emergono nel comportamento vicino a $2m$; infatti per t vale

$$r - 2m = (r_0 - 2m)e^{-(t-t_0)/2m}, \quad (2.39)$$

ovvero per $t \rightarrow \infty$ si ha che $r - 2m \rightarrow 0$, quindi la particella si avvicina a r_s ma non lo raggiunge mai.

La differenza tra i due comportamenti nelle due coordinate è illustrata in Figura 2.2 e dimostra come il sistema di coordinate di Schwarzschild non sia appropriato per descrivere i moti intorno a r_s , anche se per distanze molto grandi t poteva essere visto come il tempo proprio di un osservatore a riposo lontano dall'origine.

Nelle coordinate utilizzate finora la varietà è suddivisa in due regioni disconnesse e solo una trasformazione di coordinate, come si approfondirà in seguito, può risolvere questa singolarità e descrivere meglio la regione interna a r_s . Prima di proseguire si vogliono riportare alcune proprietà [2] della superficie $r = 2m$.

Come visto in precedenza, nella regione interna la coordinata r diventa temporale, quindi qualsiasi linea di universo di tipo tempo o nulla ha come futuro $r = 0$: questo implica che qualsiasi particella o fotone che si trovi all'interno di $r = 2m$ cade inevitabilmente verso la vera singolarità $r = 0$ e non è possibile che esca nella regione esterna, ovvero non può essere vista da alcun osservatore al di fuori di r_s . La superficie è detta quindi *orizzonte degli eventi*, dal momento che rappresenta il confine oltre il quale nessun evento può essere osservato da un osservatore inerziale esterno. Essa si comporta come una membrana semipermeabile: le curve (nulle e di tipo tempo) dirette verso il futuro possono attraversarla solo dall'esterno all'interno.

La coordinata t , come accennato in precedenza, misura il tempo proprio di un osservatore distante dall'origine; la particella in caduta radiale raggiunge quindi r_s in un tempo proprio finito ma l'osservatore lontano la vede arrivare all'orizzonte asintoticamente in un tempo infinito. Se si considera una particella che emette un segnale periodico fino al raggiungimento dell'orizzonte allora partono solo un numero finito di impulsi, l'osservatore distante però li riceve sempre più distanti tra loro, finché, in prossimità di r_s , il tempo tra gli impulsi diventa asintoticamente infinito. Per un fotone in caduta radiale e un osservatore inerziale distante questo si traduce nell'effetto di *redshift gravitazionale*: i fotoni emessi da una sonda in caduta verso r_s vengono visti dall'osservatore statico con una frequenza più spostata verso il rosso. In particolare la superficie r_s è una *superficie di redshift infinito*.

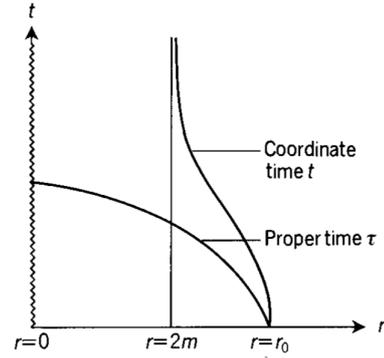


Figura 2.2: [1] *Particella in caduta radiale nei tempi t e τ .*

Capitolo 3

Sistemi di coordinate regolari

In generale, per dimostrare la continuità della soluzione attraverso r_s vi sono diversi approcci che portano a diversi sistemi di coordinate in cui si risolve la singolarità. Storicamente furono introdotti più sistemi di coordinate regolari in $r = 2m$, quello di Painlevé-Gullstrand (PG) nel 1921 e quello di Eddington nel 1924, ma in entrambi i casi non ci si accorse delle implicazioni che ciò aveva con la singolarità di Schwarzschild. Fu Lemaître nel 1933 il primo a riconoscere che questa singolarità fosse una singolarità di coordinata e propose un suo sistema. Nel 1954 Finkelstein riscoprì la metrica di Eddington e ne riconobbe l'importanza, furono così ribattezzate le coordinate di Eddington-Finkelstein (EF). Infine, tra quelli presi in considerazione in questo capitolo, il sistema di coordinate più conosciuto e utilizzato è quello di Kruskal-Szekeres (KS), scoperto indipendentemente dai due nel 1960. In seguito verranno approfonditi e confrontati tra loro i sistemi di coordinate menzionati, segnalandone i vantaggi e i limiti dell'uso.

3.1 Coordinate di Eddington-Finkelstein

L'idea alla base di queste coordinate è di cambiare la coordinata del tempo in modo che le geodetiche radiali nulle entranti diventino rette nel diagramma (t, r) di Figura 2.1. Dall'equazione 2.30 risulta che la trasformazione appropriata sia

$$t \rightarrow \bar{t} = t + 2m \ln(r - 2m), \quad (3.1)$$

per $r > 2m$. In questo modo nelle nuove coordinate $(\bar{t}, r, \vartheta, \varphi)$ l'equazione per le geodetiche nulle entranti (2.32) diventa

$$\bar{t} = -r + \text{costante}, \quad (3.2)$$

che è appunto una retta che forma un angolo di -45° con l'asse r . Dalla differenziazione di 3.1 si ha

$$d\bar{t} = dt + \frac{2m}{r - 2m} dr, \quad (3.3)$$

e sostituendolo nell'elemento di linea di Schwarzschild si ottiene la metrica nella forma di *Eddington-Finkelstein*:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) d\bar{t}^2 - \frac{4m}{r} d\bar{t}dr - \left(1 + \frac{2m}{r}\right) dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2). \quad (3.4)$$

Questa soluzione è regolare in $r = 2m$, in particolare è regolare in tutto $0 < r < 2m$; si tratta quindi di un'estensione del dominio delle coordinate da $2m < r < \infty$ a $0 < r < \infty$.

L'elemento di linea 3.4 si può riscrivere in maniera più semplice definendo il parametro

$$v = \bar{t} + r, \quad (3.5)$$

detto *parametro di tempo avanzato*. L'espressione che ne risulta è

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dv^2 - 2dvdr - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2), \quad (3.6)$$

Ponendo $ds^2 = 0$ si ottengono due equazioni per le geodetiche nulle:

$$v = v_0, \quad (3.7)$$

$$v = v_0 + 2[r + 2m \ln(r - 2m)], \quad (3.8)$$

dove v_0 è una costante. La prima equazione è regolare per tutti i valori di r e rappresenta i raggi entranti. La seconda equazione ha invece un asintoto in $r = 2m$, infatti si ha che $v \rightarrow -\infty$ per $r \rightarrow 2m$; questa equazione rappresenta i raggi uscenti.

In Figura 3.1 si riporta l'andamento di entrambe, dove si utilizza \bar{t} al posto di v . Si osserva che i coni luce, per la piatezza asintotica, sono ampi 45° per $r \rightarrow \infty$, equivalenti quindi a quelli della Relatività Ristretta, mentre tendono a restringersi spostandosi verso $r = 0$. In particolare essi sono delimitati a sinistra da rette a -45° in tutto lo spazio, che rappresentano le geodetiche nulle entranti, mentre il lato destro, ovvero le geodetiche nulle uscenti, è delimitato da curve che partono a 45° all'infinito, poi tendono a verticalizzarsi per r che decresce fino a $r = 2m$, dove la geodetica è perpendicolare all'asse, e infine si inclinano verso l'interno per $r < 2m$. Si nota dunque che i fotoni uscenti da $r = 2m$ non si spostano mai da quella coordinata. In questo diagramma, inoltre, si osserva meglio il comportamento di membrana semipermeabile dell'orizzonte: le geodetiche di tipo tempo o nulle che l'attraversano sono solo quelle provenienti dall'esterno verso l'interno, mentre quelle dentro a $r < 2m$ non hanno nessun futuro possibile all'esterno. Per questo motivo la regione $0 < r < 2m$ è detta *buco nero*: qualsiasi evento, particella o fotone, che si generi all'interno di questa regione non ne può uscire, mentre dall'esterno può entrare tutto (in un tempo finito).

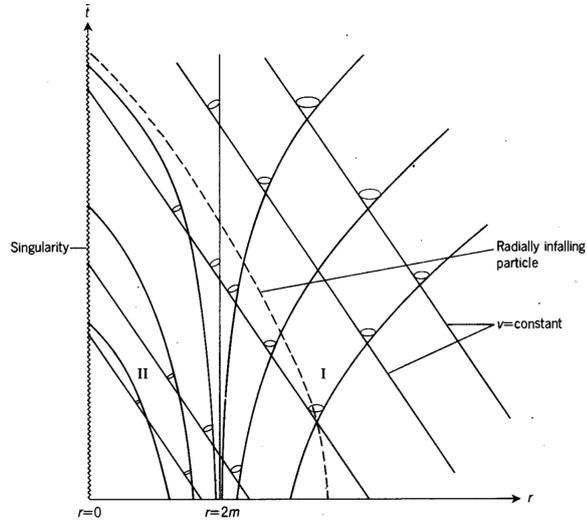


Figura 3.1: [1] *Soluzione di Schwarzschild in coordinate di Eddington-Finkelstein avanzate.*

Le coordinate avanzate $(v, r, \vartheta, \varphi)$ descrivono quindi bene la caduta radiale entrante ma per quella uscente presentano una anomalia in r_s , analoga a quella descritta da Schwarzschild.

Una proprietà interessante delle coordinate di Eddington-Finkelstein è che descrivono la metrica in due forme. Si osserva infatti che la soluzione 3.4 non è simmetrica rispetto al tempo: utilizzando la trasformazione opposta

$$t \rightarrow t^* = t - 2m \ln(r - 2m), \quad (3.9)$$

si ottiene la rettificazione delle geodetiche nulle uscenti. Tramite lo stesso procedimento, si può definire il *parametro di tempo ritardato*

$$w = t^* - r \quad (3.10)$$

e si ottiene l'elemento di linea

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dw^2 + 2dwdr - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2). \quad (3.11)$$

Le geodetiche nulle ($ds^2 = 0$) sono date dalle due equazioni

$$w = w_0, \quad (3.12)$$

$$w = w_0 - 2[r + 2m \ln(r - 2m)], \quad (3.13)$$

dove w_0 è una costante. Anche in questo caso la prima è regolare per tutti i valori di r ma, al contrario di v_0 , rappresenta i raggi uscenti. La seconda equazione, singolare in $r = 2m$, rappresenta invece i raggi entranti. Questa soluzione corrisponde infatti all'inversione del tempo nelle coordinate avanzate di Eddington-Finkelstein. In queste coordinate le curve che attraversano la superficie $r = 2m$ sono solo quelle di tipo tempo o nulle dirette verso il passato.

In Figura 3.2 si riporta il diagramma spazio-tempo nelle coordinate ritardate, usando t^* al posto di w . Si osserva che in questo caso hanno un comportamento regolare intorno a $r = 2m$ solo le geodetiche uscenti. Esse infatti sono tutte rette a 45° rispetto all'asse r , mentre le geodetiche entranti partono a -45° dall'infinito e tendono a verticalizzarsi al decrescere di r , finché, analogamente a prima, non diventano perpendicolari all'asse per $r = 2m$. Per $r < 2m$ tutte le curve entranti sono confinate in questa regione dall'asintoto verticale $r = 2m$. Per questo motivo la regione $0 < r < 2m$

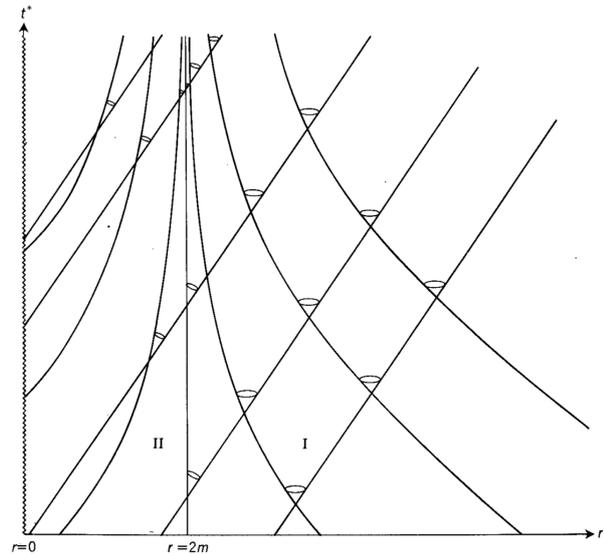


Figura 3.2: [1] Soluzione di Schwarzschild in coordinate di Eddington-Finkelstein ritardate.

nelle coordinate ritardate è detta *bucco bianco*: al contrario di quello nero, tutti gli eventi generati al suo interno ne escono in un tempo finito, mentre dall'esterno non entra niente.

Le coordinate di Eddington-Finkelstein presentano quindi due forme di descrivere la metrica: tramite $(v, r, \vartheta, \varphi)$, oppure tramite $(w, r, \vartheta, \varphi)$. Si osserva che per $r > 2m$ le due soluzioni sono semplicemente una trasformazione di coordinate reciproca; per $r < 2m$ invece i due sistemi differiscono sostanzialmente, in quanto coprono regioni diverse dello spazio-tempo [5]. Per le coordinate avanzate, infatti, $r < 2m$ è la regione in cui arrivano i raggi entranti, per quelle ritardate invece $r < 2m$ rappresenta la regione da cui arrivano i raggi uscenti.

Questo sistema di coordinate, in particolare quelle avanzate, risulta molto comodo per descrivere la caduta verso l'interno ed è utilizzato per lo studio del collasso gravitazionale e dei buchi neri [4]. Anche se la struttura non diagonale della metrica ne può rendere più complicato l'utilizzo, il fatto che r compaia esplicitamente può risultare più conveniente rispetto ad altri sistemi. Vi è però un limite in queste coordinate: quelle ritardate $(w, r, \vartheta, \varphi)$ descrivono bene l'uscita di particelle da $r = 0$ attraverso $r = 2m$ ma hanno lo stesso problema delle coordinate di Schwarzschild nel descrivere il moto opposto (ovvero qualsiasi particella entrante raggiungerebbe r_s in un tempo infinito); analogamente le coordinate avanzate $(v, r, \vartheta, \varphi)$ descrivono bene la caduta verso l'interno ma non quella uscente. Inoltre vi è un comportamento paradossale tra i due sistemi per le geodetiche in $r = 2m$: in coordinate avanzate le geodetiche descrivono fotoni entranti mentre in quelle ritardate si prevedono solo fotoni uscenti. Questo paradosso si risolve utilizzando un sistema di coordinate più regolare, come quello di Kruskal-Szekeres (studiato nel paragrafo 3.3).

3.2 Coordinate di Painlevé-Gullstrand

Un sistema di coordinate alternativo è proposto da Painlevé-Gullstrand e presenta una forma piuttosto semplice della metrica, simile a quella di EF. Si può infatti dimostrare che entrambi i sistemi appartengono alla stessa famiglia di coordinate, detta famiglia di Lake.

Per costruire questo sistema di coordinate regolare si parte dalla scelta di una famiglia di osservatori in moto libero a cui ancorare le coordinate [6]. Si considerano osservatori che si muovono lungo geodetiche radiali entranti di tipo tempo nello spazio-tempo di Schwarzschild, ovvero r decrescente e ϑ, φ costanti. Presa la metrica di Schwarzschild nella forma

$$ds^2 = f dt^2 - f^{-1} dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2), \quad (3.14)$$

con $f = 1 - 2m/r$, le equazioni delle geodetiche si possono esprimere al primo ordine come

$$\dot{t} = \frac{\tilde{E}}{f}, \quad \dot{r}^2 + f = \tilde{E}^2, \quad (3.15)$$

dove il punto indica la differenziazione rispetto al tempo proprio e $\tilde{E} = E/m$ è l'energia dell'osservatore per unità di massa (a riposo). Per il parametro d'energia

vale la relazione

$$\tilde{E} = \frac{1}{\sqrt{1-v_\infty^2}}, \quad (3.16)$$

dove v_∞ è la velocità iniziale dell'osservatore, ovvero quella in $r = \infty$.

Si considera il caso $\dot{r} < 0$: scegliendo osservatori con velocità iniziale nulla ($\tilde{E} = 1$), le equazioni delle geodetiche si riducono a $\dot{t} = 1/f$ e $\dot{r} = -\sqrt{1-f}$. Le componenti controvarianti della quadrivelocità dell'osservatore sono $u^\alpha = (\dot{t}, \dot{r}, 0, 0)$; quelle controvarianti sono invece date da $u_\alpha = (-1, -\sqrt{1-f}/f, 0, 0)$, quindi u_α è il gradiente di una qualche funzione T_- :

$$u_\alpha = -\partial_\alpha T_-, \quad (3.17)$$

dove

$$T_- = t + \int \frac{\sqrt{1-f}}{f} dr. \quad (3.18)$$

Dall'integrazione si ottiene

$$T_- = t + 4m \left(\sqrt{\frac{r}{2m}} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{r/2m} - 1}{\sqrt{r/2m} + 1} \right| \right). \quad (3.19)$$

Si prende T_- come nuova coordinata del tempo e si ottengono le coordinate di *Painlevè-Gullstrand* $(T_-, r, \vartheta, \varphi)$. Differenziando 3.18 e ricavandone l'espressione di dt

$$dt = dT_- - f^{-1} \sqrt{\frac{2m}{r}} dr, \quad (3.20)$$

si ottiene l'elemento di linea di *Painlevè-Gullstrand*:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dT_-^2 - 2\sqrt{\frac{2m}{r}} dT_- dr - dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2). \quad (3.21)$$

Si può esprimere in maniera equivalente come

$$ds^2 = dT_-^2 - \left(dr + \sqrt{\frac{2m}{r}} dT_-\right)^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2). \quad (3.22)$$

Questa metrica è regolare in $r = 2m$, in corrispondenza con il fatto che gli osservatori non vedono questo come punto singolare nel loro tempo proprio, mentre è ovviamente singolare in $r = 0$.

Se si considera il segno opposto di \dot{r} , ovvero invertendo il moto degli osservatori, tramite lo stesso procedimento si definisce una nuova coordinata del tempo T_+

$$T_+ = t - 4m \left(\sqrt{\frac{r}{2m}} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{r/2m} - 1}{\sqrt{r/2m} + 1} \right| \right). \quad (3.23)$$

In questo caso si descrivono osservatori che si muovono lungo geodetiche radiali uscenti e si ottiene la soluzione di *Painlevè-Gullstrand* nella forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dT_+^2 + 2\sqrt{\frac{2m}{r}} dT_+ dr - dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2). \quad (3.24)$$

La metrica è sempre regolare in $r = 2m$: in questo caso sono gli osservatori uscenti che non lo vedono come punto singolare.

Come per le coordinate EF, anche questo sistema ha dunque due forme di descrivere la metrica: tramite $(T_-, r, \vartheta, \varphi)$, oppure tramite $(T_+, r, \vartheta, \varphi)$. Dalle espressioni 3.21 e 3.24 si possono ricavare le seguenti relazioni per le geodetiche radiali nulle ($ds^2 = d\vartheta = d\varphi = 0$):

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \pm 2\sqrt{\frac{2m}{r}} \frac{dr}{dT_{\pm}} - \left(\frac{dr}{dT_{\pm}}\right)^2 = 0 \quad (3.25)$$

da cui

$$\frac{dr}{dT_-} = -\sqrt{\frac{2m}{r}} \pm 1, \quad (3.26)$$

$$\frac{dr}{dT_+} = \sqrt{\frac{2m}{r}} \pm 1. \quad (3.27)$$

Dall'integrazione si ottengono le due equazioni delle geodetiche [5]:

$$T_{\pm} = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2m}{r} + 1}}, \quad (3.28)$$

$$T_{\pm} = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2m}{r} - 1}}; \quad (3.29)$$

si osserva che l'integrazione risulta regolare nella prima equazione mentre la seconda è singolare in $r = 2m$. Come per le coordinate EF, quindi, si ottiene un'equazione regolare per i raggi entranti (T_-) e una singolare per quelli uscenti, oppure un'equazione regolare per i raggi uscenti (T_+) ma singolare per quelli entranti. Analogamente al caso EF, i due sistemi di coordinate PG sono, per $r > 2m$, una trasformazione di coordinate della soluzione di Schwarzschild; per $r < 2m$, invece, i due sistemi coprono regioni diverse dello spazio-tempo.

Come per le coordinate EF, anche questa metrica è in forma non diagonale ma comunque semplice da trattare [7] e contiene r in maniera esplicita; le coordinate PG sono quindi altrettanto utili per descrivere le due regioni più interessanti, quella di buco nero e quella con $r > 2m$.

Una proprietà particolare delle coordinate PG è che le superfici a $T_{\pm} = \text{costante}$ sono intrinsecamente piatte, infatti con $dT_{\pm} = 0$ si ottiene $ds^2 = -dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)$, ovvero la metrica di uno spazio tridimensionale piatto in coordinate polari. La curvatura dello spazio-tempo è quindi definita esclusivamente dalla componente non diagonale della metrica.

In figura 3.3 si mostrano le superfici a T_- costante nel diagramma di Kruskal, cioè nelle coordinate di Kruskal (t', x') . L'iperbole indica la singolarità di $r = 0$; le due rette diagonali rappresentano l'orizzonte del futuro (a $+45^\circ$) e quello del passato (a -45°) e si osserva graficamente quanto detto prima: tutte le superfici degli osservatori entranti attraversano solo l'orizzonte del futuro. Utilizzando T_+ si inverte il moto e si verificherebbe un moto regolare in $r = 2m$ solo per gli osservatori uscenti, che attraverserebbero quindi l'orizzonte del passato.

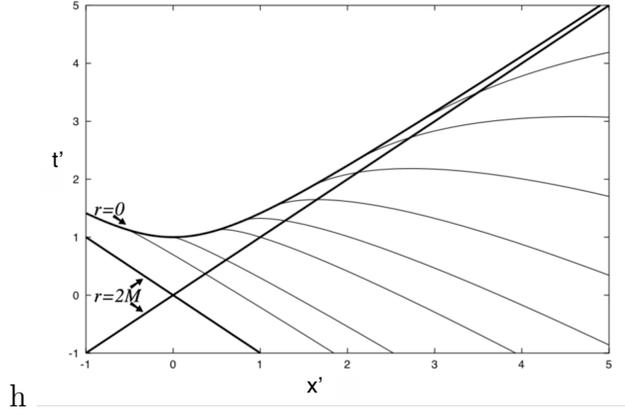


Figura 3.3: [7] *Superfici a T costante in un diagramma di Kruskal.*

Si possono generalizzare le coordinate PG ottenute per $\tilde{E} = 1$ ad altre famiglie di osservatori in moto, parametrizzandoli sempre attraverso la loro energia \tilde{E} . Risulta conveniente prendere il parametro

$$p = \frac{1}{\tilde{E}^2} = 1 - v_\infty^2, \quad (3.30)$$

limitandosi al dominio $0 < p \leq 1$, dove $p = 1$ riporta alle coordinate PG. Ad ogni valore di p in questo intervallo corrisponde una famiglia di osservatori e un sistema di coordinate distinto. Si osserva che l'intervallo $p > 1$ corrisponde a moti che non si estendono all'infinito e di conseguenza anche le coordinate appartenenti a questi osservatori non sarebbero definite ovunque [8].

Per costruire le coordinate PG generalizzate, parametrizzate da p , si procede analogamente a prima; in questo caso u_α è dato dal gradiente di T per una costante nella forma

$$u_\alpha = -\frac{1}{\sqrt{p}} \partial_\alpha T, \quad (3.31)$$

con

$$T = t + \int \frac{\sqrt{1-pf}}{f} dr, \quad (3.32)$$

quindi,

$$T = t + 2m \left(\frac{1-pf}{1-f} + \ln \left| \frac{1-\sqrt{1-pf}}{1+\sqrt{1-pf}} \right| - \frac{1-p/2}{\sqrt{1-p}} \ln \left| \frac{\sqrt{1-pf}-\sqrt{1-p}}{\sqrt{1-pf}+\sqrt{1-p}} \right| \right). \quad (3.33)$$

Differenziando e sostituendo nell'elemento di linea si ottiene

$$ds^2 = \frac{1}{p} dT^2 - p \left(dr + \frac{1}{p} \sqrt{1-pf} dT \right)^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (3.34)$$

La metrica continua a essere regolare in $r = 2m$ ma assume una forma più complicata e le superfici di $T = \text{costante}$ non sono più intrinsecamente piatte. La metrica di queste superfici diventa infatti $ds^2 = -pdr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$, dove la presenza

di p è abbastanza per produrre una curvatura; si hanno infatti componenti del tensore di Riemann non nulle, in particolare

$$R^\varphi_{\varphi\varphi} = -\frac{1-p}{p}, \quad R^{abcd}R_{abcd} = 4\frac{1-p^2}{(pr^2)^2}. \quad (3.35)$$

Studiando il limite per $p \rightarrow 1$ si ottiene l'espressione di T trovata in 3.19, quindi si torna alle coordinate PG originali; studiando invece il limite $p \rightarrow 0$ si osserva che si ottiene

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} T &= t + 2m \left(\frac{1}{1-f} + \ln \left| \frac{f}{1-f} \right| \right) \\ &= t + r + 2m \ln \left| \frac{r}{2m} - 1 \right| \\ &= \bar{t} + r \\ &= v, \end{aligned} \quad (3.36)$$

ovvero si ottengono le coordinate di Eddington-Finkelstein, che sono quindi membro di questa famiglia di coordinate generalizzate. Il valore $p = 0$ corrisponde infatti a osservatori con $\tilde{E} \rightarrow \infty$ o $v_\infty \rightarrow 1$, ovvero osservatori che partono dall'infinito con velocità simile a quella della luce; ciò è coerente con la discussione fatta sulle coordinate EF, che descrivevano appunto le geodetiche di tipo luce entranti.

Questa famiglia a un parametro di coordinate generalizzate fu scoperta da Keyall Lake risolvendo le equazioni di Einstein nel vuoto per uno spazio a simmetria sferica; egli definì un sistema di coordinate che comprendeva r e una coordinata arbitraria T ma non intuì la corrispondenza tra T e le famiglie di osservatori in moto libero. Questa relazione stretta tra le coordinate EF e PG è concorde con le analogie tra i due sistemi commentati in precedenza: entrambi possiedono due soluzioni, ognuna delle quali comprende una geodetica regolare e una singolare; una soluzione è regolare attraverso l'orizzonte del futuro mentre l'altra lo è per l'orizzonte del passato.

3.3 Coordinate di Kruskal-Szekeres

Le coordinate EF e PG estendono il dominio di r all'intervallo $0 < r < \infty$ ma questa non risulta essere l'*estensione massimale*, cioè un'estensione in cui la varietà abbia tutte le geodetiche di lunghezza infinita in entrambe le direzioni o terminante in una singolarità. L'estensione analitica massimale della soluzione di Schwarzschild fu trovata da Kruskal ed è inoltre unica. Essa si può ottenere, analogamente al procedimento di Eddington-Finkelstein, rettificando le geodetiche radiali nulle: in questo caso si opera simultaneamente sia sulle geodetiche entranti che su quelle uscenti.

Per prima cosa si decide di utilizzare le coordinate v e w di Eddington-Finkelstein come coordinate del piano (t, r) ; il sistema che ne risulta sarà legato a quello delle coordinate di Schwarzschild tramite le relazioni [4]

$$\frac{1}{2}(v - w) = r + 2m \ln(r/2m - 1), \quad (3.37)$$

$$\frac{1}{2}(v + w) = t. \quad (3.38)$$

L'elemento di linea in queste coordinate risulta

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dv dw - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2), \quad (3.39)$$

dove continua a essere presente una singolarità per $r = 2m$. Si osserva però che una qualsiasi ridefinizione $v' = F(v)$ e $w' = G(w)$ lascia le curve descritte da v e w (ovvero le geodetiche nulle entranti e uscenti) fisicamente invariate, quindi si cerca una trasformazione che elimini il termine singolare in $r = 2m$. In particolare, si trova che la trasformazione

$$w' \equiv -e^{-\frac{w}{4m}}, \quad (3.40)$$

$$v' \equiv e^{\frac{v}{4m}}, \quad (3.41)$$

permette di eliminare il coefficiente $(1 - 2m/r)$. In queste coordinate l'elemento di linea diventa

$$ds^2 = \left(\frac{32m^3}{r}\right) e^{-\frac{r}{2m}} dv' dw' - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2), \quad (3.42)$$

dove r ha ancora lo stesso significato, ovvero $4\pi r^2$ è l'area della 2-sfera, ma è determinata implicitamente come funzione di v' e w' :

$$\left(\frac{r}{2m} - 1\right) e^{\frac{r}{2m}} = -v'w'. \quad (3.43)$$

Le coordinate v' e w' , che indicano le geodetiche nulle entranti e uscenti, sono coordinate nulle, ovvero

$$\frac{\partial}{\partial w'} \frac{\partial}{\partial w'} = g_{w'w'} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v'} \frac{\partial}{\partial v'} = g_{v'v'} = 0. \quad (3.44)$$

Si possono sostituire con coordinate spaziali e temporali, definite come

$$x' \equiv \frac{1}{2}(v' - w'), \quad (3.45)$$

$$t' \equiv \frac{1}{2}(v' + w'), \quad (3.46)$$

e tali che

$$dt'^2 - dx'^2 = dv' dw'. \quad (3.47)$$

In questo modo si ottiene la metrica quadridimensionale nella forma di Kruskal-Szekeres:

$$ds^2 = \frac{32m^3}{r} \exp\left(-\frac{r}{2m}\right) (dt'^2 - dx'^2) - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2). \quad (3.48)$$

Questa metrica è regolare in $r = 2m$ ma è interessante studiare la singolarità all'origine. Rispetto alle nuove coordinate (t', x') , r è determinato da

$$\left(\frac{r}{2m} - 1\right) e^{\frac{r}{2m}} = x'^2 - t'^2; \quad (3.49)$$

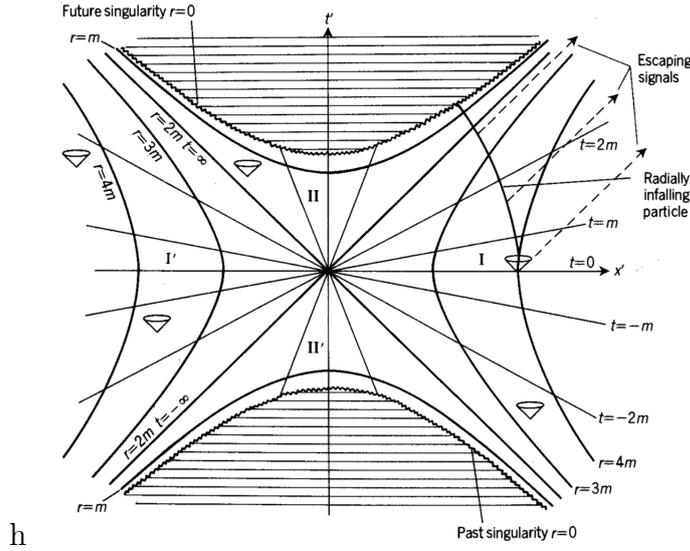


Figura 3.4: [1] *Diagramma spazio-tempo della soluzione di Kruskal.*

quindi la singolarità $r = 0$ si trova in $t'^2 - x'^2 = 1$, che dà luogo a due equazioni:

$$t' = +(1 + x'^2)^{1/2} \qquad t' = -(1 + x'^2)^{1/2}, \qquad (3.50)$$

ovvero a due singolarità. Analogamente, la regione esterna $r \gg 2m$ è data da $x'^2 \gg t'^2$, quindi nasconde in realtà due regioni:

$$x' \gg |t'|, \qquad x' \ll -|t'|. \qquad (3.51)$$

Questo mostra come le coordinate di Kruskal-Szekeres siano l'estensione massimale della varietà: esse infatti coprono tutta (o quasi) la varietà mentre quelle di Schwarzschild coprono solo una parte della varietà dello spazio-tempo.

Il diagramma (t', x') della soluzione di Kruskal è mostrato in Figura 3.4 e, come indicato all'inizio del paragrafo, le geodetiche nulle entranti e uscenti sono tutte rette di coefficiente angolare ± 1 , date dall'equazione $dx = \pm dt$ che deriva dalla condizione $ds^2 = 0$. Anche i coni di luce sono tutti ampi 45° , come nei diagrammi di relatività ristretta. Le due singolarità di $r = 0$ sono rappresentate da due iperboli, una detta *singolarità del passato* e l'altra *singolarità del futuro*. Quella del futuro è di tipo spazio ed è quindi inevitabile nella regione II, ovvero qualsiasi particella in caduta radiale ha il suo futuro in quella iperbole. Gli asintoti delle iperboli rappresentano l'orizzonte degli eventi $r = 2m$ e dividono lo spazio in quattro regioni, indicate con I, II, I' e II'. Le regioni I e II corrispondono alla soluzione nelle coordinate avanzate di Eddington-Finkelstein; la I è la regione di Schwarzschild $r > 2m$ e la II è detta buco nero, in quanto un osservatore in caduta radiale che attraversa l'asintoto ed entra in questa regione non ne può più uscire. Le regioni I e II' corrispondono invece alla soluzione nelle coordinate ritardate di Eddington-Finkelstein, dove II' è quella di buco bianco: un osservatore che si trova in questa regione deve essere stato originato nell'asintoto opposto e deve uscirne in una quantità di tempo finita; I' è invece una copia della regione I, ovvero della regione asintoticamente piatta della soluzione di Schwarzschild.

Le coordinate di Kruskal-Szekeres sono quindi le più complete, in termini di varietà coperta, come emerge dal loro diagramma: esso infatti comprende tutte le regioni osservate precedentemente nello studio delle coordinate EF e PG, che a loro volta estendevano il dominio di Schwarzschild. Queste coordinate però presentano alcuni svantaggi: il raggio r compare solo in maniera implicita, rispetto invece alle EF dove compare esplicitamente; inoltre il fatto che le coordinate coprano tutta la varietà porta ad avere due copie per ogni superficie $r = costante$, in particolare può risultare scomoda la presenza di due regioni asintotiche per $r \rightarrow \infty$. Ciononostante hanno un ampio utilizzo nello studio dei buchi neri e dello spazio-tempo di Schwarzschild grazie al modo intuitivo in cui si presenta il diagramma spazio-tempo.

Con questo si conclude la trattazione sui sistemi di coordinate regolari.

Conclusioni

In conclusione si riassume quanto fatto finora. Partendo dalla teoria gravitazionale di Newton e dalle considerazioni della Relatività Ristretta si sono ricavate le equazioni di campo della Relatività Generale. In seguito è stata studiata la soluzione di Schwarzschild nel vuoto, per sorgenti a simmetria sferica. Studiando i moti geodetici radiali è emersa la natura di orizzonte degli eventi e superficie di redshift infinito della superficie individuata da $r = r_s$. Come orizzonte degli eventi essa si comporta come membrana semipermeabile, ovvero una volta attraversata nessun corpo può tornarne fuori ed è destinato a cadere nella singolarità $r = 0$. Studiando la natura delle singolarità attraverso l'invariante di Kretschmann si è determinato che r_s è una singolarità di coordinate rimovibile, mentre $r = 0$ rappresenta una singolarità fisica irrimovibile.

Infine sono state introdotte le coordinate di Eddington-Finkelstein e quelle di Painlevé-Gullstrand per estendere il dominio di Schwarzschild e regolarizzarlo in r_s ; è stato inoltre visto come entrambi i sistemi presentano due soluzioni separate, corrispondenti a inversioni del tempo. Dallo studio delle geodetiche radiali nulle è stato dimostrato come ognuna delle soluzioni, in entrambi i sistemi, copre regioni diverse dello spazio-tempo. Infine sono state ricavate le coordinate di Kruskal-Szekeres come estensione massimale della soluzione di Schwarzschild e, analizzandone il diagramma, è stato osservato come effettivamente coprono l'intera varietà dello spazio-tempo, a meno della singolarità in $r = 0$.

Bibliografia

- [1] Ray d'Inverno. *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford University Press, 1992.
- [2] Bernard Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2009.
- [3] L. Landau e E. Lifshits. *Teoria dei campi*. Editori Riuniti, 1976.
- [4] Charles W. Misner, Kip S. Thorne e John Archibald Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, 1973.
- [5] W. G. Unruh. "Universal coordinates for Schwarzschild black holes". In: *arXiv:1401.3393 [gr-qc]* (2014).
- [6] H. P. Robertson e T. W. Noonan. *Relativity and cosmology*. Saunders, Philadelphia, 1968.
- [7] Karl Martel e Eric Poisson. "Regular coordinate systems for Schwarzschild and other spherical spacetimes". In: *Am.J.Phys.* 69 (2001) 476-480 (2000).
- [8] R. Gautreau. "Light cones inside the Schwarzschild radius". In: *Am. J. Phys.* 63, 431-439 (1995).