

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

---

Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Astronomia

# MECCANISMI DI TRASPORTO DELL'ENERGIA IN ASTROFISICA

Tesi di laurea

Presentato da:  
Ilona Rotaru

Relatore:  
Chiar.mo Prof. Daniele Dallacasa

---

Appello I  
Anno Accademico 2017/2018

# Indice

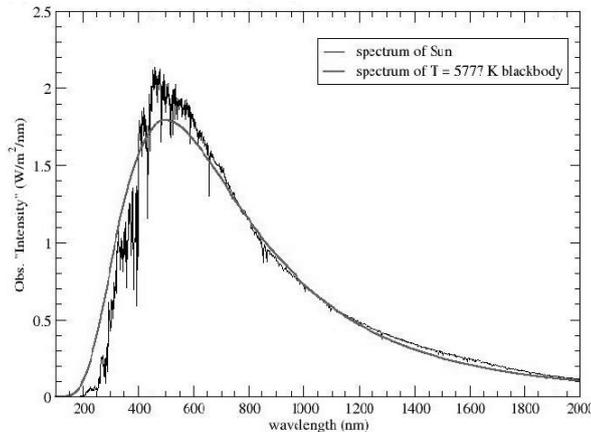
|   |          |
|---|----------|
| <b>Introduzione</b>                               | <b>1</b> |
| <b>1 Produzione dell'energia</b>                  | <b>2</b> |
| <b>2 Meccanismi di trasporto</b>                  | <b>5</b> |
| 2.1 Trasporto Radiativo . . . . .                 | 5        |
| 2.1.1 Libero cammino medio dei fotoni . . . . .   | 5        |
| 2.1.2 Equazione del trasporto radiativo . . . . . | 6        |
| 2.1.3 Opacità . . . . .                           | 7        |
| 2.1.4 Profondità ottica . . . . .                 | 8        |
| 2.1.5 Relazione Intensità-Flusso . . . . .        | 9        |
| 2.2 Trasporto Conduttivo . . . . .                | 10       |
| 2.3 Trasporto Convettivo . . . . .                | 10       |
| 2.3.1 Criterio di stabilità . . . . .             | 11       |
| 2.3.2 Flusso convettivo . . . . .                 | 12       |
| 2.4 Equazione generale del flusso . . . . .       | 13       |
| 2.5 Neutrini . . . . .                            | 13       |
| 2.5.1 Neutrini nelle stelle . . . . .             | 14       |

# Introduzione

I meccanismi di trasporto dell'energia in astrofisica sono tutti quei processi attraverso i quali l'energia si propaga dalle regioni in cui viene generata, verso lo spazio. Lo studio di tali meccanismi è molto importante in quanto rappresenta uno strumento fondamentale per la comprensione dell'Universo. L'energia viaggia attraverso lo spazio in diversi modi, per esempio, come radiazione elettromagnetica, radiazione gravitazionale o tramite particelle quali i neutrini e i raggi cosmici. Prima di analizzare come essa viene trasportata, è utile considerare quali sono i meccanismi di produzione. Questi ultimi sono numerosi, partendo da processi di emissione da particelle accelerate, arrivando a fenomeni più efficienti quali le reazioni di fusione nucleare o accrescimento gravitazionale dei Buchi Neri. In questo elaborato si prende in considerazione uno dei meccanismi più efficienti, dato dai processi di fusione nucleare che alimentano le stelle. Infatti la fonte di energia al centro di esse è estremamente funzionale in quanto produce quantità enormi di energia per un tempo lunghissimo, mantenendo la luminosità stellare per migliaia di anni. La struttura di una stella può essere rappresentata schematicamente da un piccolo nucleo a temperatura molto elevata, che produce energia, ed un involucro che trasporta questa energia verso la superficie, da cui viene poi irraggiata verso lo spazio. Un'importante caratteristica delle stelle è che esse emettono radiazione di corpo nero. Tale emissione ha una curva univocamente determinata per ogni temperatura secondo la Legge di Planck:

$$B_{\lambda}(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \quad (1)$$

Gli spettri stellari sono solcati da una serie di righe dovute all'assorbimento da parte del materiale degli strati più esterni (più freddo e opaco rispetto all'interno stellare).



**Figura 1:** Spettro del Sole a confronto con lo spettro di un Corpo Nero a  $T = 5777K$

Quindi, facendo riferimento alla struttura delle stelle, si studiano in seguito quali sono i meccanismi attraverso i quali l'energia viene trasportata dalle regioni nucleari in superficie ed irraggiata nello spazio.

# Capitolo 1

## Produzione dell'energia

Nel nucleo delle stelle, per via delle estreme condizioni di temperatura e pressione, la materia si trova in uno stato particolare, detto *plasma*. Un plasma è un fluido ionizzato, e le reazioni che avvengono al suo interno sono dette termo-nucleari in quanto sono indotte dal moto termico degli ioni. Il meccanismo di produzione dell'energia, tramite le reazioni termonucleari, si basa sul fatto che il nucleo di un atomo possiede una massa totale inferiore rispetto alla somma dei singoli nucleoni che lo costituiscono. Il difetto di massa,  $\Delta m$ , corrisponde all'energia liberata in seguito alla formazione del nucleo stesso tramite la formula per la conservazione di massa-energia:

$$E = \Delta mc^2 \quad (1.1)$$

Vi sono due possibili modi di produzione energetica:

- *reazione di fusione* in cui due nuclei leggeri interagiscono formando un nucleo più pesante con liberazione di energia;
- *reazione di fissione* in cui un nucleo molto pesante (appartenente al gruppo del Fe) si frammenta in nuclei leggeri, liberando energia.

In generale, assumendo un nucleo costituito da  $Z$  protoni e  $N$  neutroni, l'energia di legame del nucleo è:

$$E(Z, N) = [Zm_p + Nm_n - m(Z, N)]c^2 \quad (1.2)$$

che è anche l'energia necessaria per la frammentazione del nucleo nei singoli nucleoni che lo costituiscono. Le forze in gioco che favoriscono o si oppongono all'innesco delle reazioni termonucleari sono:

- l'*interazione forte* che è responsabile della formazione dei nuclei stabili ma ha un raggio di azione molto piccolo,  $r_0 \simeq 10^{-13} \text{cm}$ ;
- la *repulsione elettrostatica* che pone una barriera di potenziale data dal campo coulombiano, che si oppone all'avvicinamento di due protoni ed è  $\propto r^{-2}$ .

La reazione di fusione avviene se due nuclei riescono ad avvicinarsi ad una distanza inferiore di  $r_0$  vincendo la repulsione elettrostatica. Dal punto di vista della fisica classica è impossibile che ciò possa avvenire in quanto la repulsione è troppo forte rispetto all'energia termica delle particelle, al contrario, in Meccanica Quantistica (MQ) esiste una possibilità, data dall'Effetto Tunnel<sup>1</sup> che permette ai nuclei di attraversare la barriera di potenziale. L'ambiente ideale in cui possono avvenire le reazioni termonucleari

---

<sup>1</sup>Effetto Tunnel: la particella in MQ ha una probabilità non nulla di essere trasmessa attraverso la barriera di potenziale anche se la sua energia non sarebbe sufficiente a superarla.

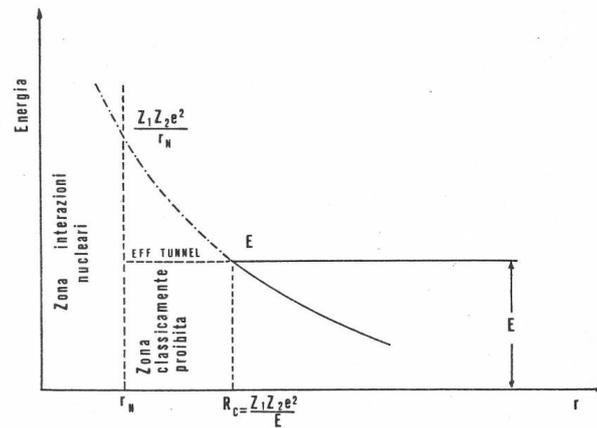


Figura 1.1: Potenziale Coulombiano

sono i nuclei di stelle in cui le densità sono estremamente elevate e le temperature superano i milioni di gradi Kelvin. Quando il nucleo raggiunge i 10 milioni di gradi Kelvin, si innesca la fusione di due atomi di idrogeno in un atomo di elio, attraverso il ciclo protone-protone rappresentato in Fig.1.2. Successivamente si creano condizio-

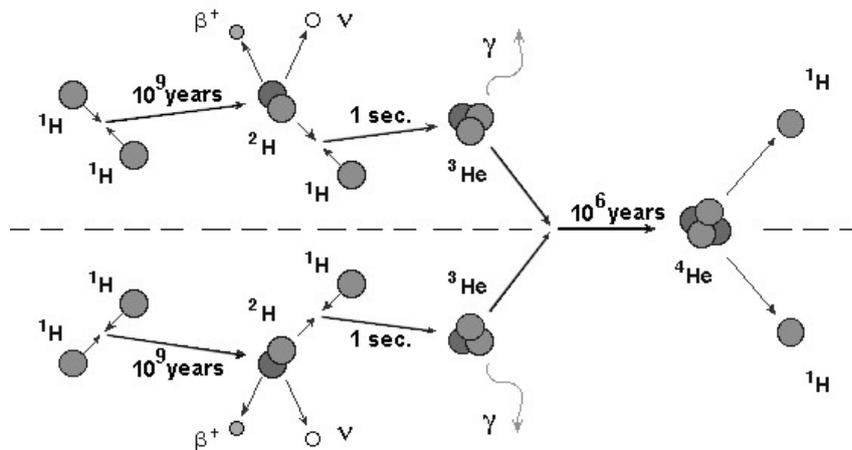


Figura 1.2: Schema per il ciclo PPI

ni per l'innesco di altri cicli, quali PP II, PP III, CNO per trasformare l'H in He a seconda delle abbondanze chimiche, temperature e densità raggiunte. Il bruciamento dell'idrogeno costituisce la principale sorgente di energia per la maggior parte della vita della stella, ma, nelle fasi evolutive successive, avvengono diverse reazioni che portano a sintetizzare nuclei via via più pesanti. In generale la vita di una stella è una sequenza di fasi di equilibrio caratterizzate dalla combustione nucleare al centro di un certo combustibile (in sequenza H, He, C, N, O ..., Fe), alternate a fasi transitorie, caratterizzate dalla contrazione del nucleo, dalla combustione dello stesso combustibile in gusci sottili attorno al nucleo (e quindi si hanno contributi in energia aggiunti a quella proveniente dal nucleo) e dalla contemporanea espansione dell'involuppo. Durante le lunghe fasi di combustione nel nucleo le caratteristiche strutturali delle stelle rimangono inalterate mentre durante le fasi di espansione e contrazione, la struttura stellare si modifica in maniera significativa.

Il tasso di produzione di energia,  $\varepsilon$ , rappresenta quanta energia viene prodotta da ciascuna catena di reazioni termonucleari ed è dato da :

$$\varepsilon = \sum_{n=1}^N E_i X_1 X_2 c_i \rho T^{-\frac{2}{3}} e^{-1.89(\frac{E_0}{kT})^{\frac{1}{3}}} \begin{bmatrix} erg \\ g \cdot s \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

dove N è il nr. di reazioni,  $E_i$  è l'energia per ciascuna catena di reazioni, mentre  $c$  è una funzione legata alla probabilità che, una volta entrati in contatto, i nucleoni formino effettivamente un nucleo stabile. Gli altri termini sono riferiti all'ambiente.

Infine, le stelle sono sfere di gas autogravitanti il cui fenomeno più evidente è l'irraggiamento. La perdita di energia in superficie deve essere controbilanciata da una sua produzione all'interno affinché la struttura sia stabile. In particolare, per ogni guscio sferico della struttura della stella, il bilancio energetico è dato dall'equazione:

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon \rho \quad (1.4)$$

dove  $L(r)$  rappresenta l'energia totale liberata in un secondo da un elemento di massa che dista  $r$  dal centro della stella. Il flusso di energia entrante/uscente da ciascun guscio, in funzione di  $L(r)$  è:

$$F = \frac{L(r)}{4\pi r^2} \begin{bmatrix} erg \\ cm^2 s \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

# Capitolo 2

## Meccanismi di trasporto

Il trasporto dell'energia è essenzialmente dettato dal gradiente termico  $\nabla T$ . In ciascun meccanismo di trasporto è necessario trovare un legame tra il flusso locale di energia ed il gradiente locale di temperatura. Queste sono infatti le manopole che guidano il flusso di energia verso l'esterno. I principali meccanismi di trasporto dell'energia sono:

| <i>Meccanismo</i>    | <i>Agenti</i> | <i>Caratteristiche</i>               |
|----------------------|---------------|--------------------------------------|
| Trasporto Radiativo  | Fotoni        | $\nabla T$ basso                     |
| Trasporto Conduttivo | Elettroni     | efficiente solo in ambiente degenere |
| Trasporto Convettivo | Bolle di gas  | $\nabla T$ alto                      |

Vi è anche un quarto meccanismo, dato dall'emissione e perdita di energia per neutrini. Questo è un'argomento molto importante in astrofisica e fa parte di un ambito estremamente ampio e complesso, perciò in questo elaborato non vi è una descrizione esaustiva, ma un'esposizione generale del fenomeno.

### 2.1 Trasporto Radiativo

La radiazione emessa da una sorgente, nella sua propagazione, attraversa mezzi diversi che ne alterano l'intensità per processi di assorbimento, diffusione o ulteriore emissione di radiazione. In tali circostanze, l'energia viene trasportata tramite i fotoni.

#### 2.1.1 Libero cammino medio dei fotoni

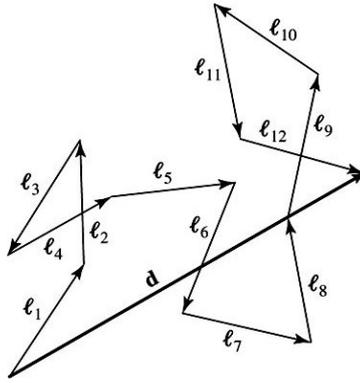
Il libero cammino medio,  $l$ , dei fotoni è la distanza tipica percorsa dal fotone prima di interagire con una particella, ed è dato da:

$$l = \frac{1}{\sigma \cdot n} \quad (2.1)$$

dove  $n$  è la densità di particelle nell'unità di volume [ $cm^{-3}$ ] e  $\sigma$  rappresenta la sezione d'urto legata alla probabilità dell'interazione (assorbimento/diffusione) tra un fotone e una particella [ $cm^2$ ]. Facendo riferimento alla Fig.2, si può valutare la distanza  $d$  complessiva percorsa da un fotone:

$$d \cdot d = l_1 \cdot l_1 + \dots + l_N \cdot l_N \quad \wedge \quad d^2 = Nl^2 + l^2[\cos\theta_{12} + \cos\theta_{13} + \dots + \cos\theta_{N(N-1)}] \quad (2.2)$$

Per un numero grande di scambi,  $N$ , la somma dei coseni tende a zero e quindi  $d^2 = Nl^2$  ovvero  $d = l\sqrt{N}$ . Risulta che il trasporto di energia per via radiativa può essere poco efficiente, infatti sono necessari 100 scambi per percorrere  $10l$  e 10000 scambi per



**Figura 2.1:** Moto casuale dei fotoni

percorrere  $100l$ . Tuttavia, poiché il flusso di fotoni non è ordinato bensì lo scambio avviene in maniera casuale (ciò implica un numero piuttosto grande di scambi), complessivamente il meccanismo risulta efficiente ed il risultato è un flusso netto di fotoni che procedono dall'interno verso l'esterno. Per esempio, i fotoni prodotti nel nucleo del Sole impiegano  $10^6$  anni per arrivare in superficie (pur viaggiando alla velocità della luce).

## 2.1.2 Equazione del trasporto radiativo

La struttura stellare viene divisa in gusci sferici assunti in equilibrio termodinamico locale (LTE)<sup>1</sup> e si valuta quanta radiazione arriva, quanta viene assorbita e quanta emessa. Si considera un flusso netto di fotoni che attraversa un elemento di volume di sezione unitaria e spessore  $dr$  posto ad una distanza  $r$  dal centro della stella. Nell'attraversare questo volume di materia stellare, per via delle interazioni con le particelle dell'ambiente, alcuni fotoni verranno sottratti al flusso netto uscente e redistribuiti isotropicamente nella stella. Definito  $F_{rad}$  il flusso di energia, per unità di tempo e di superficie, il momento  $dp$  trasportato dalla radiazione all'elemento di volume è:

$$dp = \frac{dF_{rad}}{c} = \frac{F_{rad} dr}{c l} \quad (2.3)$$

dove  $l$  è il libero cammino medio dei fotoni. Ma il trasferimento di momento non è altro che una pressione, in particolare,  $dp$  è l'opposto della variazione  $dP_{rad}$  della pressione esercitata dalla radiazione su  $dr$  quindi:

$$dP_{rad} = -\frac{F_{rad} dr}{c l} \quad (2.4)$$

Si introduce una nuova variabile fondamentale, detta opacità  $\kappa_{rad}$ , legata al libero cammino medio dei fotoni dalla relazione  $\kappa_{rad}\rho = l^{-1}$ . Essa esprime una misura della resistenza offerta dalla materia al passaggio della radiazione ed è espressa in  $cm^2g^{-1}$ . È possibile ora riscrivere l'equazione 2.4 :

$$\frac{dP_{rad}}{dr} = -\frac{\kappa_{rad}\rho}{c} F_{rad} \quad (2.5)$$

<sup>1</sup>Una stella non è in perfetto equilibrio termodinamico perché c'è un flusso di radiazione uscente dalla superficie e la temperatura della stella cambia strato per strato. Per questo si parla di LTE: la T dei vari strati cresce verso l'interno ma è costante ed uniforme all'interno di ciascuno strato. L'assunzione di LTE consente di ritenere ancora valide le leggi statistiche per il TE (Maxwell-Boltzmann, Saha, Kirchhoff) localmente in ogni guscio.

L'assunzione di LTE fornisce una pressione di radiazione  $P_{rad} = aT^4/3$ , dove si è introdotta  $a \simeq 7,57 \cdot 10^{-15} [erg \cdot cm^{-3} \cdot K^{-4}]$ , costante della densità di radiazione. Quindi :

$$\frac{dP_{rad}}{dr} = \frac{4}{3} a T^3 \frac{dT}{dr} \quad (2.6)$$

da cui l'equazione del trasporto radiativo:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa_{rad}\rho}{4acT^3} F_{rad} \quad (2.7)$$

Tale equazione descrive un concetto fondamentale per cui il flusso radiativo c'è solo se si ha  $dT/dr \neq 0$ .

### 2.1.3 Opacità

L'opacità è causata da una serie di processi atomici che possono essere così schematizzati:

- *Assorbimento bound-bound*,  $\kappa_{BB}$ : è l'assorbimento di un fotone da parte di un elettrone legato ad un atomo. Dopo l'assorbimento, l' $e^-$  è ancora legato ma si trova in uno stato di energia maggiore. A questo processo sono utili solamente i fotoni con un'energia corrispondente alla transizione dell' $e^-$ , quindi questo è un processo selettivo e l'assorbimento avverrà ad una frequenza  $\nu_{BB}$  tale che  $h\nu_{BB} = E_n - E_{n-1}$ . Ciò avviene nelle atmosfere stellari dove possono esserci  $e^-$  allo stato legato, mentre risulta poco importante negli interni dove gran parte degli atomi è ionizzata;
- *Assorbimento bound-free*,  $\kappa_{BF}$ : è un processo di fotoionizzazione in cui un  $e^-$  legato ad uno ione riceve abbastanza energia da poter passare ad uno stato libero. Anche questo è un processo selettivo poiché contribuiscono solo i fotoni con energia maggiore di una soglia data dall'energia di ionizzazione;
- *Assorbimento free-free*,  $\kappa_{FF}$ : è l'assorbimento di un fotone da parte di un  $e^-$  libero. In questo caso non ci sono restrizioni per l'energia del fotone;
- *Diffusione*,  $\kappa_S$ : può essere interpretato come una collisione tra due corpuscoli ed è il processo dominante in regioni di altissima T dove gli atomi sono completamente ionizzati. Esso ritarda l'uscita dei fotoni dalla stella poiché causa la deviazione continua della direzione di propagazione dei fotoni.

| <i>Opacità</i> | <i>Assorbimento</i> | <i>Processo inverso</i>       |
|----------------|---------------------|-------------------------------|
| bound-bound    | fotoeccitazione     | emissione spontanea/stimolata |
| bound-free     | fotoionizzazione    | emissione per ricombinazione  |
| free-free      |                     | emissione per bremsstrahlung  |

Nella Fig.2.2 è rappresentato l'andamento dell'opacità con la T, in scala logaritmica. Si nota come vi sia un aumento dell'opacità fino a  $\text{Log}T \simeq 4$  dove si ha un picco per la ionizzazione dell'H e la prima ionizzazione dell'He. Per  $\text{Log}T \simeq 4.6$  si ha un picco più debole per la seconda ionizzazione dell'He e poi segue un decremento con  $\kappa \propto T^{-3.5}$  per assorbimenti BF e FF mentre a grandi T tende ad un valore costante dovuto alla diffusione.

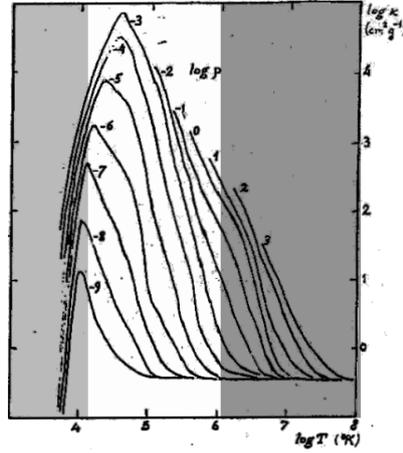


Figura 2.2: Opacità

Questi processi contribuiscono alla diminuzione del flusso di radiazione ad una data frequenza  $\nu$ , e quindi dell'energia trasportata dai fotoni. In generale l'opacità complessiva è:  $\kappa_\nu = \kappa_{BF}(\nu) + \kappa_{FF}(\nu) + \kappa_S(\nu)$ . Si trascura  $\kappa_{BB}$  poiché efficiente solo in ambienti relativamente freddi. Per ottenere un valore medio dell'opacità si deve operare una media pesata poiché gli intervalli di frequenze in cui  $\kappa$  è minore daranno un maggior contributo al trasporto dell'energia. In condizione di equilibrio termodinamico, data la Legge di Planck per l'emissione da corpo nero in funzione della  $\nu$ :

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (2.8)$$

l'opacità media si ottiene tramite la Media di Rosseland:

$$\frac{1}{\bar{\kappa}} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dB_\nu}{dT} d\nu} \quad (2.9)$$

Questa trattazione del trasporto radiativo è valida per gli interni stellari dove le collisioni sono frequenti e il libero cammino medio delle particelle è molto più piccolo delle dimensioni del sistema.

### 2.1.4 Profondità ottica

Per una trattazione più specifica del trasporto radiativo è utile definire una nuova funzione, detta *profondità ottica*,  $\tau$ :

$$\tau_\nu = \int_0^s \kappa_\nu \rho ds \quad (2.10)$$

L'equazione del trasporto radiativo può essere espressa in funzione della profondità ottica considerando la seguente funzione:

$I(\nu)$  = intensità specifica che determina la quantità di radiazione, avente frequenza tra  $\nu$  e  $\nu + d\nu$ , che passa nell'unità di tempo attraverso un'area  $dA$  entro un angolo solido  $d\Omega$  :

$$I_\nu = \frac{dE}{\cos\theta \cdot dA \cdot dt \cdot d\Omega \cdot d\nu} \left[ \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{Hz} \cdot \text{ster}} \right] \quad (2.11)$$

Tenendo in considerazione i due fattori che contribuiscono alla riduzione dell'intensità di un fascio di radiazione:

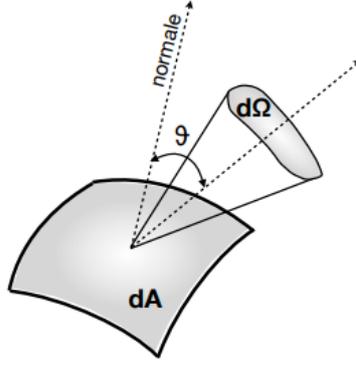


Figura 2.3: Intensità specifica

- assorbimento di alcuni fotoni con  $\kappa_\nu \rho =$  coefficiente di assorbimento [ $cm^{-1}$ ];
- emissione di fotoni dal gas locale con  $j_\nu =$  coefficiente di emissione [ $erg\ cm^{-3}s^{-1}ster^{-1}Hz^{-1}$ ].

La variazione dell'intensità del fascio è dato da due termini:

$$dI_\nu = -I_\nu \kappa_\nu \rho ds + j_\nu \rho ds \quad (2.12)$$

Definita la funzione sorgente  $S_\nu = j_\nu / \kappa_\nu \rho$  e data  $d\tau_\nu = \kappa_\nu \rho ds$ , l'equazione del trasporto radiativo diventa:

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu \quad (2.13)$$

Assumendo che la funzione sorgente sia costante, la soluzione dell'equazione del trasporto radiativo è:

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu}) \quad (2.14)$$

Ci sono due casi limite:

- *otticamente sottile* :  $\tau_\nu \ll 1$  :  $I_\nu \simeq I_\nu(0) + [S_\nu - I_\nu(0)]\tau_\nu$ ;
- *otticamente spesso* :  $\tau_\nu \gg 1$  :  $I_\nu \simeq S_\nu$ .

### 2.1.5 Relazione Intensità-Flusso

La relazione tra l'intensità specifica ed il flusso precedentemente definito, è data dalle seguenti relazioni (con riferimento alla Fig.2.3):

$$dE = I_\nu \cdot \cos\theta \cdot dA \cdot dt \cdot d\Omega \cdot d\nu = \delta F_\nu \cdot dA \cdot dt \cdot d\nu \quad (2.15)$$

dove  $\delta F_\nu = I_\nu \cdot \cos\theta \cdot d\Omega$  è il contributo al flusso dato dalla radiazione lungo la direzione considerata per  $I_\nu$ . Per ottenere  $F_\nu$  occorre integrare su tutto l'angolo solido:

$$F_\nu = \int_{4\pi} I_\nu \cos\theta d\Omega \quad (2.16)$$

## 2.2 Trasporto Conduttivo

Nonostante gli elettroni abbiano un'energia molto maggiore di quella dei fotoni, la conduzione non è il meccanismo più efficiente di trasporto di energia negli interni stellari. Il motivo è che il libero cammino medio dei fotoni è molto maggiore di quello degli elettroni. Tuttavia si ha un caso particolare in cui tale meccanismo diventa importante. In un ambiente degenere gli elettroni non possono cedere energia a particelle meno energetiche dato che tutti gli stati di energia minore sono occupati, di conseguenza il loro libero cammino medio diventa grande ed il trasporto di energia efficiente. Ciò avviene, per esempio, nelle Nane Bianche<sup>2</sup>.

Il flusso di energia associato alla conduzione è :

$$F_{cond} = -\Lambda \frac{dT}{dr} \quad (2.17)$$

dove  $\Lambda$  è un fattore determinato dalla teoria dei gas degeneri, ed è definita in funzione di un'opacità  $\kappa_c$  :

$$\Lambda = \frac{4acT^3}{3\kappa_c\rho} \quad (2.18)$$

In analogia con il trasporto radiativo, il flusso si esprime come:

$$F_{cond} = -\frac{4acT^3}{3\kappa_c\rho} \frac{dT}{dr} \quad (2.19)$$

Quando la conduzione diventa importante, si definisce un flusso complessivo  $F$ :

$$F = F_{rad} + F_{cond} = -\frac{4ac}{3} \frac{\kappa}{\rho} T^3 \frac{dT}{dr} \quad (2.20)$$

con  $\kappa = 1/\kappa_{rad} + 1/\kappa_{cond}$ .

## 2.3 Trasporto Convettivo

Il gradiente di temperatura, formulato nei paragrafi precedenti, può dare luogo ad una instabilità che porta all'instaurarsi di moti di materia su larga scala e quindi al trasporto di energia per convezione. Qualitativamente si creano dei flussi circolari di materia, dette celle convettive, che rimescolano il gas trasportando energia dalle regioni più calde verso quelle più fredde. Per la descrizione di tale meccanismo si considera l'*ipotesi di adiabaticità*: si assume che la cella di gas, nel suo tragitto, non scambi calore con l'esterno e che il calore venga rilasciato nell'ambiente solo quando la cella giunge alla fine del suo libero cammino medio.

Non esiste al momento una trattazione esatta del moto turbolento cui sono soggette le celle convettive, di conseguenza si assumono delle approssimazioni. In particolare si fa riferimento alla *Teoria della lunghezza di rimescolamento*, MLT (Mixing Length Theory), utilizzata per la parametrizzazione del libero cammino medio delle celle convettive:

$$l = \alpha H_p \quad (2.21)$$

---

<sup>2</sup>La nana bianca è una stella che ha completato la fusione dell'H in He nel proprio nucleo ed è lo stadio finale dell'evoluzione di una stella con una massa  $\leq 8M_{SOLE}$ .

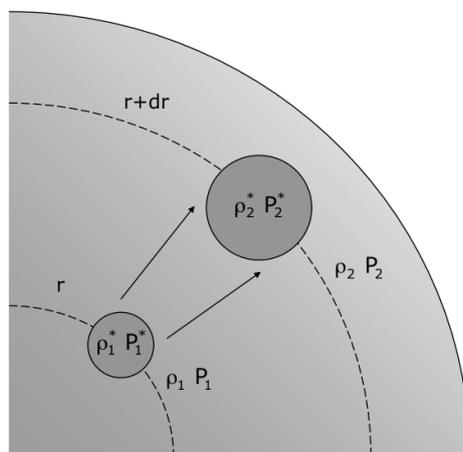
dove  $\alpha$  è un parametro libero scelto in modo che le strutture convettive teoriche riproducano le osservazioni<sup>3</sup>, e  $H_p$  è la distanza in corrispondenza della quale la pressione varia di un fattore  $1/e$ .

### 2.3.1 Criterio di stabilità

Dato un elemento di materia a distanza  $r$  dal centro della stella, si suppone che esso subisca uno spostamento radiale verso l'esterno. Questo elemento si espande finché la sua pressione non stabilisce un equilibrio con quella dell'ambiente esterno. Si definiscono :

- $\rho_1^*, P_1^*$  e  $\rho_2^*, P_2^*$  i parametri della cella rispettivamente in  $r$  e in  $r+dr$ ;
- $\rho_1, P_1$  e  $\rho_2, P_2$  i parametri dell'ambiente rispettivamente in  $r$  e in  $r+dr$ .

come rappresentato in Fig. 2.4:



**Figura 2.4:** Convezione di una cella di gas

L'elemento viene trasportato in maniera adiabatica quindi  $P \propto \rho^\gamma$  con  $\gamma = c_p/c_v$ . In  $r$  cella e ambiente sono omogenei quindi  $\rho_1^* = \rho_1$ ,  $P_1^* = P_1$  e  $T_1^* = T_1$  mentre in  $r+dr$  si ha ancora  $P_2^* = P_2$  mentre  $\rho$  e  $T$  cambiano. La condizione di stabilità contro la convezione è data dalla densità:  $\rho_2^* > \rho_2$ , quindi in questo caso non c'è convezione in quanto la cella è più densa (e dunque più fredda) dell'ambiente.

Attraverso alcuni passaggi algebrici è possibile scrivere il criterio di stabilità come:

$$\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{1}{P} \left| \frac{dP}{dr} \right| > \frac{1}{T} \left| \frac{dT}{dr} \right| \quad (2.22)$$

Il fattore :

$$\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \left| \frac{dP}{dr} \right| = \left. \frac{dT}{dr} \right|_{ad} \quad (2.23)$$

rappresenta il *gradiente adiabatico* e può essere riscritto meglio tramite :

$$\frac{dT}{dr} \frac{dr}{dP} \frac{P}{T} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \quad \wedge \quad \frac{dT}{dP} \frac{P}{T} = \frac{d \log T}{d \log P} = \nabla \quad (2.24)$$

<sup>3</sup>Nel caso del Sole, il parametro  $\alpha$  viene calibrato confrontando le dimensioni degli elementi previste dalla teoria con quelle della granulazione (evidenza di convezione) osservata sulla superficie del Sole e si ha  $\alpha=1.5$ .

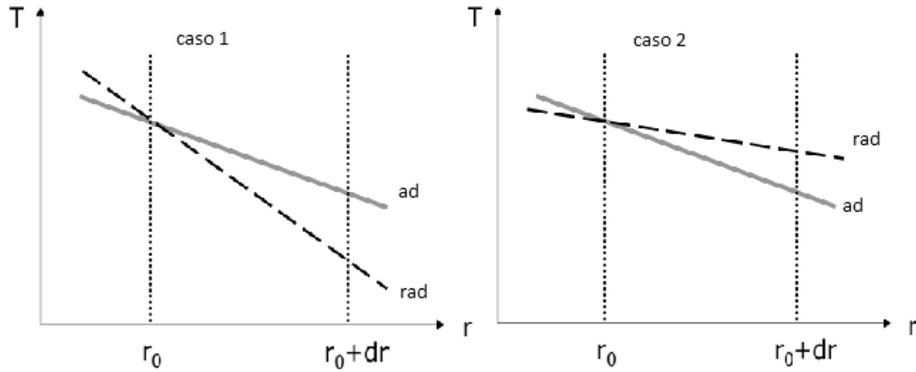
si ottiene  $\nabla_{ad} = (1 - 1/\gamma)$  che definisce il gradiente termico rispetto alla pressione in condizione adiabatiche. Quindi il criterio diventa:

$$\nabla_{ad} > \nabla_{rad} \quad (2.25)$$

Questa relazione prende il nome di *Criterio di Schwarzschild* e rappresenta la condizione che i gradienti verificano in assenza di convezione. Si hanno perciò due casi:

1.  $\nabla_{ad} < \nabla_{rad}$  c'è convezione ;
2.  $\nabla_{ad} > \nabla_{rad}$  non c'è convezione.

Graficamente questi casi vengono rappresentati in Fig. 2.5:



**Figura 2.5:** Criterio di Stabilità

### 2.3.2 Flusso convettivo

Le condizioni che favoriscono l'innesco del trasporto convettivo dell'energia sono:

- l'opacità, che aumenta con  $\nabla_{rad}$  e ciò è caratteristico delle regioni più esterne dove si ha una ionizzazione parziale del gas<sup>4</sup>;
- il flusso, che aumenta con il gradiente radiativo di temperatura ed è dominante nelle zone più interne dove il tasso di produzione di energia nucleare dipende fortemente dalla temperatura.

Il flusso convettivo  $F_{conv}$  è definito come:

$$F_{conv} = \frac{1}{2} c_p \Delta T \rho v \quad (2.26)$$

dove  $c_p \Delta T$  è l'energia termica per grammo di materia trasportata dalla cella convettiva che si sposta a pressione costante, mentre  $\rho v$  è il flusso di massa. Per valutare la velocità degli elementi convettivi, si considera:

- Poiché la cella sale, la sua  $\rho$  è minore di quella dell'ambiente e quindi la sua  $T$  è maggiore. Definito  $\Delta T$  l'eccesso di temperatura, ad esso corrisponde una carenza di densità  $\Delta \rho \simeq -(\rho/T)\Delta T$ ;
- Ciascuna cella è soggetta alla forza di gravità nell'unità di volume,  $f = g(\rho/T)\Delta T$ ;

<sup>4</sup>Nelle regioni in cui si ha una ionizzazione parziale del gas, il gradiente adiabatico diminuisce da 0.4 fino ad un minimo di 0.1

- Il lavoro compiuto è  $L = f \cdot l$  ed è uguale all'energia cinetica  $\rho v^2/2$ .

Si ricava quindi una velocità:

$$v = \sqrt{2gl \frac{\Delta T}{T}} \quad (2.27)$$

che si deve sostituire nell'espressione per il flusso:

$$F_{conv} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rho \sqrt{\frac{gl}{T}} c_p \Delta T^{\frac{3}{2}} \quad (2.28)$$

Inoltre,  $F_{conv}$  può essere riscritto in funzione dei gradienti di temperatura come :

$$F_{conv} = \frac{1}{2} \rho v c_p \alpha (\nabla - \nabla_{ad}) T \quad (2.29)$$

## 2.4 Equazione generale del flusso

È possibile esprimere anche il flusso radiativo in funzione del gradiente di temperatura a partire dalla formula derivata nel paragrafo 2.1:

$$F_{rad} = -\frac{4ac}{3\kappa\rho} T^3 \frac{dT}{dr} = -\frac{4ac}{3\kappa\rho} T^3 \frac{dT}{dP} \frac{dP}{dr} \frac{T}{P} \frac{P}{T} \quad (2.30)$$

e dato che:

$$\nabla = \frac{dT}{dP} \frac{P}{T} \quad \wedge \quad \frac{1}{H_p} = -\frac{1}{P} \frac{dP}{dr} \quad (2.31)$$

risulta:

$$F_{rad} = \frac{4ac}{3\kappa\rho} \frac{T^4}{H_p} \nabla \quad (2.32)$$

Allora, tenendo conto del flusso convettivo definito dalla (2.29), l'equazione generale del flusso risulta :

$$F = F_{rad} + F_{conv} \quad (2.33)$$

Negli strati esterni, dove  $\varepsilon = 0$  (non c'è produzione di energia), si ha la Legge di Stefan-Boltzmann:

$$F_{rad} + F_{conv} = \sigma T_{eff}^4 = \frac{L}{4\pi R^2} \quad (2.34)$$

dove  $\sigma = 5.7 \cdot 10^{-5} [erg \ s^{-1} cm^{-2} K^{-4}]$  è la costante di Stefan-Boltzmann.

La  $T_{eff}$  è la temperatura effettiva di una sorgente (in questo caso della stella alla fotosfera) ed è derivata dal flusso totale integrato su tutte le frequenze emesse da quella sorgente. Tale temperatura si ottiene uguagliando il flusso osservato al flusso di un Corpo Nero alla stessa  $T$  ( $= T_{eff}$ ):  $F_{CN} = \sigma T_{eff}^4 [erg \ cm^{-2} s^{-1}]$ . Infatti gli spettri stellari sono approssimati quali spettri di corpo nero, solcati da righe o bande spettrali.

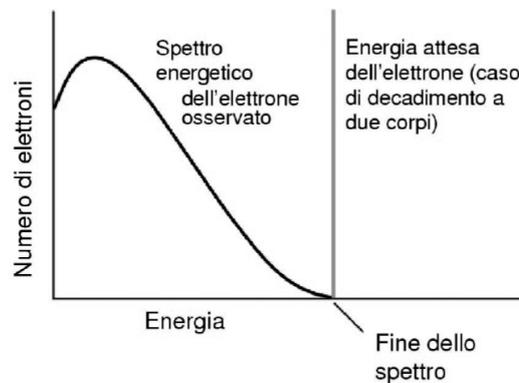
## 2.5 Neutrini

I neutrini sono particelle prive di una carica elettrica e con massa<sup>5</sup> quasi nulla. Buona parte di essi è originata da reazioni termonucleari che avvengono negli interni delle stelle. Per l'emissione dei neutrini è fondamentale il decadimento nucleare  $\beta$ , che può essere:

<sup>5</sup> $m_\nu \approx 10^{-4} m_{e^-}$  con  $m_{e^-} \simeq 9.1 \cdot 10^{-28} g$ .

- *decadimento*  $\beta^-$ : trasformazione di un neutrone in un protone con emissione di un elettrone e un antineutrino :  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$ ;
- *decadimento*  $\beta^+$ : trasformazione di un protone in un neutrone, con emissione di un positrone e un neutrino:  $p \rightarrow n + e^+ + \nu$ .

L'esistenza del neutrino venne ipotizzata per la prima volta in seguito ad un disaccordo tra teoria e sperimentazione. Facendo riferimento al processo  $\beta^-$ , un nucleo a riposo decade secondo la relazione:  $(Z, N) \rightarrow (Z + 1, N - 1) + e^-$ , per la conservazione dell'energia e dell'impulso le due particelle devono rimbalzare nella stessa direzione e verso opposto. Inoltre, dato che il nucleo ha massa molto maggiore di quella dell' $e^-$ , la sua velocità è trascurabile rispetto a quella dell' $e^-$  perciò l' $e^-$  deve essere emesso con energia costante, pari all'energia totale rilasciata nel decadimento. I dati sperimentali erano in disaccordo con tale previsione teorica, come mostrato in Fig.2.6. Si osserva che, invece di un'energia costante, l'elettrone possiede uno spettro continuo di energia, fino ad un valore massimo previsto (corrispondente all'energia totale rilasciata) e quindi sembra che sia violata la conservazione dell'energia e dell'impulso.



**Figura 2.6:** Distribuzione dell'energia trasportata dall' $e^-$  nel decadimento  $\beta^-$  del nucleo.

La soluzione fu trovata da Pauli, nel 1930. Egli ipotizzò l'esistenza di una nuova particella, che inizialmente prese il nome di *neutrone* e successivamente fu chiamata da Fermi<sup>6</sup> *neutrino*. Tale particella, secondo l'ipotesi di Pauli, veniva creata in seguito al decadimento  $\beta$ , e non era soggetta nè alle interazioni elettromagnetiche, nè alle interazioni nucleari forti. Oggi è noto che i neutrini emessi dal *decadimento*  $\beta^+$  e  $\beta^-$  sono diversi: nel primo caso viene emesso un *neutrino*  $\nu$  (associato ad un positrone), nel secondo viene emesso un *antineutrino*  $\bar{\nu}$  (associato ad un elettrone). In seguito sono state scoperte altre famiglie di cui fanno parte il *neutrino muonico* e *tauonico*. Nel 1954 fu ideato un esperimento molto complesso che, in tanti mesi di lavoro, ha portato finalmente alla prova sperimentale dell'esistenza del neutrino.

## 2.5.1 Neutrini nelle stelle

I neutrini vengono continuamente prodotti dagli oggetti astrofisici. Come i fotoni, essi possono avere energia bassa, paragonabile a quella della CMB, ma anche altissima ( $> 10^6$  volte l'energia corrispondente alla massa del protone)<sup>7</sup>. A differenza dei fotoni, essi sono estremamente difficili da rilevare. Uno dei metodi di produzione sono le reazioni termonucleari che avvengono nei nuclei stellari. Dato che i neutrini hanno una

<sup>6</sup>Enrico Fermi formulò la teoria matematica del decadimento  $\beta$ .

<sup>7</sup>L'energia tipica dei fotoni della radiazione cosmica di fondo (CMB) è  $\simeq 10^{-3} eV$  mentre l'energia corrispondente alla massa del protone a riposo è  $m_p c^2 = 938.3 MeV$ .

probabilità molto bassa di essere assorbiti dalla materia, a densità  $\rho \simeq 1g \cdot cm^{-3}$  il loro cammino libero medio è  $\approx 10^{20}cm \gg R$ , con R raggio di una stella generica. Di conseguenza si assume che essi non interagiscano con la materia e, una volta prodotti, sfuggano dalla stella. La produzione di neutrini rappresenta quindi una perdita netta di energia ed è indirettamente un meccanismo di trasporto della stessa di cui si deve tener conto. L'energia trasportata dai neutrini deve essere costantemente valutata in quanto sottrae energia al nucleo, raffreddandolo. Per esempio, in alcune reazioni di combustione dell'idrogeno, si hanno le seguenti perdite di energia per neutrini:

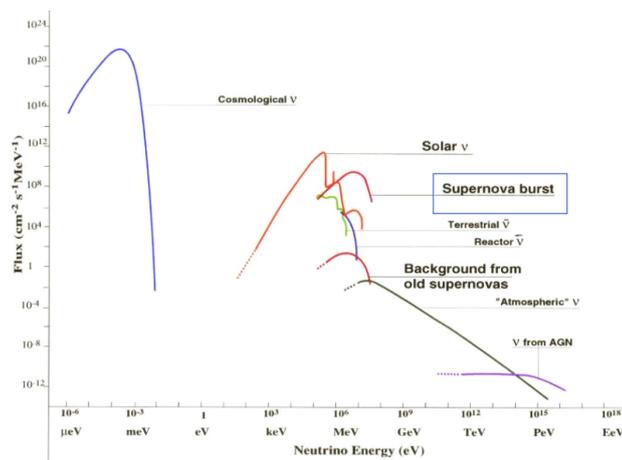
- catena Protone-Protone I: il 2% dell'energia totale ( $\approx 0.5$  MeV da 26.2 MeV);
- catena Protone-Protone II: il 4% dell'energia totale ( $\approx 1$  MeV da 25.7 MeV);
- catena Protone-Protone III: il 28% dell'energia totale ( $\approx 7.5$  MeV da 19.3 MeV).

In questo caso semplicemente si sottrae l'energia emessa per neutrini dalla produzione energetica totale.

Un caso particolare è la fase finale della vita di una stella che ha sviluppato, nella sua evoluzione, un nucleo di Ferro<sup>8</sup>. In questa fase nel nucleo si arresta la produzione energetica, quindi viene a mancare la pressione di radiazione che mantiene la stella in equilibrio e si va incontro ad un collasso gravitazionale. Le condizioni estreme del nucleo fanno sì che i fotoni contribuiscano a scindere i nuclei pesanti per *fotodisintegrazione* e si verificano processi di *cattura elettronica* (decadimento  $\beta^-$  inverso) da protoni liberi:



In caso di materia estremamente densa ( $\rho > 10^{11}g \cdot cm^{-3}$ ), i processi di assorbimento e diffusione impediscono ai neutrini di scappare liberamente dal nucleo che collassa e dalla materia circostante. Tuttavia, la materia è molto più opaca alla radiazione che ai neutrini quindi l'energia viene trasportata quasi interamente dai neutrini e solo per 1/100 sotto forma di radiazione elettromagnetica. In Fig.2.7 si mostra il flusso di neutrini dall'esplosione di una supernova in confronto ad altre sorgenti naturali.



**Figura 2.7:** Esplosione di una SN nel centro della galassia a confronto con altre sorgenti naturali di neutrini

L'energia trasportata dai neutrini è pressoché il 99% dell'energia totale emessa nel collasso gravitazionale.

<sup>8</sup>Si tratta di stelle con massa  $M > 8M_{SOLE}$ , le quali, alla fine della loro evoluzione di riducono ad una stella di neutroni. È il caso delle Supernove di tipo II.

# Bibliografia

- [1] Prof. Ferraro F.R., *Astrofisica Stellare*, Dispense, 2016
- [2] M. Salaris, S. Cassisi, *Evolution of Stars and Stellar Populations*, John Wiley & Sons, 2005
- [3] Cesare Chiosi, *Struttura ed evoluzione delle stelle*, Dispense
- [4] Lorenzo Zaninetti, *Guida all'Astrofisica Galattica*, Dispense, 2018
- [5] M. Spurio, S. Braibant, G. Giacomelli, *Particelle e Interazioni Fondamentali*, Springer, 2012
- [6] H. Karttunen, P.Kroger, H. Oja, M. Poutanen, K.J. Donner, *Fundamental Astronomy*, Springer, 2007