

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Irraggiamento elettromagnetico e reazione di radiazione

Relatore:
Prof. Fiorenzo Bastianelli

Presentata da:
Giacomo Levrini

Anno Accademico 2017/2018

Dedicato a tutti coloro che posso
chiamare *famiglia*, che mi hanno
sostenuto e spronato in questo percorso
durato tre anni.

Una dedica particolare va a quelli che mi
hanno fatto sorridere, rinfrancando il mio
spirito durante il mio percorso.

*«Saper leggere il libro del mondo
con parole cangianti e nessuna scrittura
nei sentieri costretti in un palmo di mano
i segreti che fanno paura»*

[Khorakhané - Fabrizio De André]

Abstract

Il problema della reazione di radiazione e dell'auto-forza associata al moto di particelle puntiformi cariche è uno dei problemi fisici che al calare del XIX secolo e gli inizi del XX secolo fu di maggiore interesse per i fisici dell'epoca.

Ad oggi, tale fenomeno è stato declassato come problema minore dell'elettromagnetismo. Infatti, studiandolo dapprima con gli elementi di elettrodinamica classica e successivamente con l'elettrodinamica quantistica (QED), non sono mai state trovate soluzioni complete in grado di dare una risposta esaustiva al quesito.

Ripercorreremo quindi da un punto di vista storico gli studi effettuati da Abraham e Lorentz, per cercare una soluzione parziale al problema della reazione di radiazione dal punto di vista classico.

Indice

1	Le onde elettromagnetiche	1
1.1	Onde elettromagnetiche piane	1
1.1.1	Vettore di Poynting	4
1.2	Relatività ristretta	6
1.2.1	Trasformazioni di Lorentz e spaziotempo di Minkowski	6
1.2.2	Formalismo tensoriale	7
1.2.3	Elettromagnetismo in formalismo tensoriale	8
2	Irraggiamento delle cariche in moto	11
2.1	Potenziali di Liénard-Wiechert per una carica puntiforme	11
2.2	Formula di Larmor	15
3	Reazione di radiazione	19
3.1	Considerazioni preliminari	19
3.1.1	Stima dell'ordine di grandezza del dominio degli effetti radiativi	19
3.2	Modello classico di Abraham-Lorentz dell'elettrone	21
3.2.1	Energia e momento angolare dall'equazione del moto perturbata	23
3.3	Stima della auto-forza	24
A		31
A.1	Funzione di Green ritardata	31
A.2	Applicazione della formula di Larmor relativistica	33
	Bibliografia	37

Introduzione

L'elaborato proposto ha lo scopo di trattare il modello classico di *reazione di radiazione* per una carica accelerata (in principio venne applicato unicamente all'elettrone, ma la trattazione è estendibile a tutte le particelle puntiformi cariche), studiando quindi le caratteristiche della radiazione emessa, utilizzando un formalismo dato dagli studi sull'irraggiamento elettromagnetico.

Partendo dalle equazioni di Maxwell e dalla relatività ristretta, si darà una descrizione fisica della natura delle onde elettromagnetiche. Seguirà quindi una caratterizzazione del problema di emissione di radiazione elettromagnetica da particelle accelerate, studiando i potenziali caratteristici di Liénard-Wiechert per il moto di cariche ed i relativi campi associati, e dando una stima dell'energia della radiazione emessa dalla particella. Si arriverà infine a definire il modello classico di Abraham-Lorentz dell'elettrone, studiando le equazioni del moto per una carica puntiforme accelerata. Di seguito, una breve introduzione agli argomenti centrali di ogni capitolo.

Il primo capitolo introduce in maniera “selettiva” alcuni aspetti della natura delle onde elettromagnetiche e alcune notazioni e definizioni della relatività ristretta, andando a richiamare alcuni concetti utili alla trattazione degli argomenti centrali della tesi.

Il secondo capitolo presenta uno studio dell'irraggiamento elettromagnetico dovuto al moto di cariche accelerate, fornendo una notazione specifica e esemplificativa dei fenomeni di emissione radiativa.

Il terzo capitolo contiene la trattazione sul fenomeno fisico della reazione di radiazione, ed espone un modello per tale fenomeno rigorosamente classico, per il moto di elettroni accelerati.

L'appendice A contiene alcune dimostrazioni ed applicazioni del materiale presentato nei precedenti capitoli.

Capitolo 1

Le onde elettromagnetiche

Il fulcro della trattazione della reazione di radiazione associata a particelle in moto risiede nella natura delle onde elettromagnetiche. Sono proprio queste ultime a causare una variazione nelle equazioni del moto di particelle accelerate, in quanto producono un cambiamento dell'energia del sistema.

Studieremo quindi la natura delle onde elettromagnetiche, contestualizzando anche l'approccio energetico, al fine di richiamare definizioni e modelli per lo sviluppo degli argomenti centrali dell'elaborato.

1.1 Onde elettromagnetiche piane

In fisica, una qualsiasi perturbazione, istantanea o periodica, che si propaga con una velocità caratteristica è definita come *onda*. Di tali perturbazioni, alcune delle più comuni sono le *onde elettromagnetiche*. Queste ultime si propagano nello spazio senza la necessità di alcun mezzo di propagazione (cioè la loro propagazione avviene anche nel vuoto), e sono di fatto una propagazione di una perturbazione subita dai campi vettoriali elettrico (\mathbf{E}) e magnetico (\mathbf{B}).

Un'onda elettromagnetica viene completamente descritta dalle *equazioni di Maxwell* nel vuoto:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.1d)$$

dove $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$ e $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$ sono rispettivamente la costante dielettrica del vuoto e la permeabilità magnetica del vuoto.

Le equazioni 1.1 formano un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali lineari, che descrivono l'evoluzione spaziale e temporale di un'onda elettromagnetica che si propaga nel vuoto. Nel caso in cui l'onda elettromagnetica sia generata da una sorgente esterna, le equazioni 1.1 sono generalizzate aggiungendo

termini di sorgente come:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.2a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.2b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.2d)$$

dove ρ è la densità di carica elettrica e \mathbf{J} la densità di corrente. Le equazioni 1.2 permettono di capire di che:

1. Il campo \mathbf{E} può essere generato da una carica elettrica, o più in generale una distribuzione di carica ρ , o da un campo magnetico variabile nel tempo;
2. Il campo \mathbf{B} può essere generato da un moto di cariche elettriche, quindi una corrente \mathbf{J} , o da un campo elettrico variabile nel tempo.

In particolare, possiamo quindi banalmente dedurre che un'onda elettromagnetica si formi da una sorgente di campo variabile nel tempo, in quanto tale variazione produce a sua volta un nuovo campo variabile nel tempo, realizzando quindi una "catena" di perturbazioni, e quindi un'onda.

Non risulta però immediato che le equazioni di Maxwell contengano equazioni associate alla propagazione di onde. In effetti questo accade e per dedurlo ricordiamo la relazione

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

Possiamo ora ricavare dall'equazione 1.1b l'equazione delle onde, utilizzando le restanti definizioni della 1.1:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) \implies \\ \implies \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \implies \\ \implies \underbrace{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E})}_{=0} - \nabla^2 \mathbf{E} &= -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

e cioè

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.4)$$

Quest'ultima relazione rappresenta un'equazione differenziale vettoriale, che può essere convertita in 3 equazioni differenziali scalari per le componenti del campo \mathbf{E} (ed un analogo discorso è ricavabile per il campo \mathbf{B}). La forma più generale di quest'ultima uguaglianza è nota come equazione di d'Alambert o equazione delle onde:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad \text{dove } \psi = E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z, \mathbf{E}, \mathbf{B} \quad (1.5)$$

con v che corrisponde alla velocità di propagazione dell'onda.

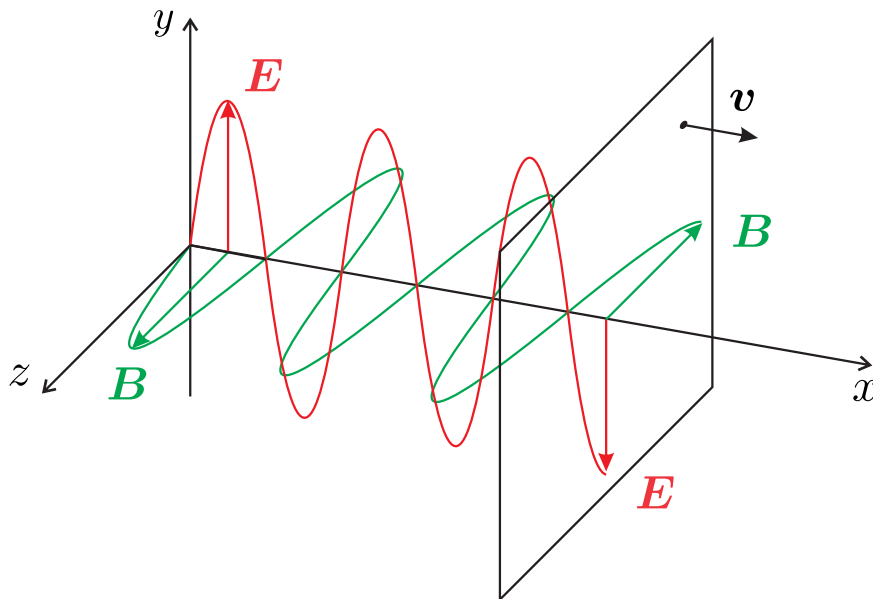


Figura 1.1: Andamento ondulatorio dei campi \mathbf{E} e \mathbf{B} che formano un'onda elettromagnetica. I campi e il fronte d'onda piano si propagano a velocità \mathbf{v} , con modulo $|\mathbf{v}| = c$.

In generale, si può facilmente verificare che soluzioni particolari sono le onde piane. Queste sono onde armoniche della forma seguente:

$$\psi = \psi_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad \text{con} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{\mathbf{k}} \quad (1.6)$$

dove T è il periodo di oscillazione dell'onda e λ è la lunghezza d'onda (con $\hat{\mathbf{k}}$ un versore), collegate da $\frac{\lambda}{T} = v$ dove v è la velocità di propagazione (o velocità di fase) dell'onda piana. Per verificarlo scegliamo il caso semplice di $\mathbf{k} = (k, 0, 0)$ allineato lungo l'asse x . Inserendo l'onda piana 1.6 nell'equazione 1.5 troviamo che

$$k^2 = \frac{1}{v^2} \omega^2 \quad (1.7)$$

e quindi

$$\frac{\lambda}{T} = v \quad (1.8)$$

Più in generale il vettore \mathbf{k} ha modulo $|\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$, detto anche numero d'onda angolare (numero di lunghezze d'onda contenute in 2π volte l'unità di misura della lunghezza), e direzione data dal versore $\hat{\mathbf{k}}$, che indica la direzione di propagazione dell'onda. Fissato \mathbf{k} si ha una soluzione di onda piana quando la frequenza angolare ha il valore

$$\omega^2 = v^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \quad (1.9)$$

È importante notare che, dato il principio di sovrapposizione (le equazioni sono lineari), una combinazione lineare di soluzioni di onda piana sono ancora soluzioni, per cui le onde piane (con in aggiunta anche le soluzioni con il seno) possono essere viste come una base completa su cui sviluppare in serie (integrali) di Fourier soluzioni generiche dell'equazione d'onda.

Tornando al caso delle onde elettromagnetiche, la loro velocità di propagazione nel vuoto è ricavabile confrontando la 1.4 con la 1.5. Otteniamo quindi la velocità della luce nel vuoto come:

$$c \equiv v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} \quad (1.10)$$

Naturalmente c coincide con la velocità della luce misurata sperimentalmente, univocamente definita in ogni sistema di riferimento inerziale (dal secondo postulato della relatività ristretta).

Possiamo rappresentare graficamente un'onda piana come un figura 1.1, facendo alcune considerazioni sulla geometria delle onde elettromagnetiche piane e su alcune proprietà dei campi \mathbf{E} e \mathbf{B} nel vuoto, valide in qualunque sistema di riferimento fisico:

- La velocità di propagazione dei due campi è unica, ed è definita dalla 1.10;
- I moduli dei campi sono legati dalla relazione $B = E/c$;
- Il vettore \mathbf{k} è chiamato numero d'onda e definisce la direzione di propagazione dell'onda;
- I vettori \mathbf{E} e \mathbf{B} sono ortogonali tra loro e alla direzione di propagazione dell'onda (ovvero la direzione di propagazione della perturbazione dei campi stessi), quindi al vettore \mathbf{k} ;
- Le onde elettromagnetiche sono onde trasversali, ovvero il moto rispetto alla variazione di equilibrio dei campi avviene ortogonalmente alla direzione di propagazione dell'onda stessa.

1.1.1 Vettore di Poynting

Cerchiamo ora di dare una descrizione energetica di un'onda elettromagnetica. Dall'elettromagnetismo è noto che se in una determinata regione sono presenti un campo \mathbf{E} o un campo \mathbf{B} allora in tale regione sarà presente una determinata quantità di energia, distribuita nello spazio con una data densità u . Nel vuoto, e in tutti i mezzi omogenei con le rispettive costanti associate, le densità di energia dei campi \mathbf{E} e \mathbf{B} sono date da

$$u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (1.11a)$$

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (1.11b)$$

$$u_{em} = u_e + u_m \quad (1.11c)$$

dove l'equazione 1.11c è la densità di energia *elettromagnetica istantanea* totale. Si noti che dalla 1.11b, sfruttando la relazione che lega i campi

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = u_e$$

cioè la 1.11c può essere scritta come

$$u_{\text{em}} = 2u_e = 2u_m = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0} \quad (1.12)$$

Cioè per un'onda elettromagnetica, i contributi energetici sono dati per metà dal campo elettrico e per metà dal campo magnetico.

A questo punto ricaviamo l'energia trasportata da un'onda elettromagnetica. Immaginiamo di essere in un mezzo omogeneo, in cui definiamo le costanti $\epsilon = \kappa_e \epsilon_0$ costante dielettrica del mezzo e $\mu = \kappa_m \mu_0$ permeabilità magnetica del mezzo, dove le $\kappa_{e,m}$ sono rispettivamente le costanti dielettrica relativa e permeabilità relativa, caratteristiche del materiale. Consideriamo un elemento di superficie $d\Sigma$, la cui normale $\hat{\mathbf{n}}_\Sigma$ forma un angolo α con la direzione di propagazione \mathbf{k} di un'onda elettromagnetica. In un tempo dt la superficie $d\Sigma$ è attraversata dall'energia contenuta nel volume dato dal solido con base $d\Sigma$ e altezza $v dt$, cioè

$$dU = u_{\text{em}} d\Sigma \cos \alpha v dt = \epsilon E^2 v \cos \alpha d\Sigma dt$$

da cui ricaviamo la potenza che attraversa la superficie

$$dP = \epsilon E^2 v \cos \alpha d\Sigma$$

Possiamo quindi definire da questa relazione il vettore:

$$\mathbf{S} = \epsilon E^2 \mathbf{v} \quad (1.13)$$

dove $\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{k}}$, avente la proprietà che il suo flusso attraverso $d\Sigma$ fornisce la potenza istantanea attraverso la superficie stessa:

$$dP = \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}_\Sigma = \epsilon E^2 v \cos \alpha d\Sigma = \epsilon E^2 v d\Sigma_0$$

dove $d\Sigma_0 = d\Sigma \cos \alpha$ è la superficie infinitesima lungo la direzione ortogonale a \mathbf{v} .

La definizione 1.13 può anche essere scritta in funzione dei campi nella forma:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (1.14)$$

e quindi integrando su una superficie finita Σ , la potenza istantanea che la attraversa è data dal flusso di \mathbf{S} :

$$P = \int_\Sigma \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}_\Sigma d\Sigma = \int_\Sigma (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_\Sigma d\Sigma \quad (1.15)$$

Il vettore \mathbf{S} è chiamato *vettore di Poynting*. Esso corrisponde fisicamente al flusso di energia del campo elettromagnetico che attraversa una superficie unitaria. La sua direzione e il suo verso coincidono con la direzione di propagazione dell'onda (cioè della velocità \mathbf{v}). Il suo modulo, ricordando che la forma del campo \mathbf{E} è dato dalla 1.6, per un'onda piana polarizzata linearmente che si propaga lungo l'asse x è:

$$|\mathbf{S}| = \epsilon E^2 |\mathbf{v}| = \epsilon v E_0^2 \cos^2(k_x x - \omega t) \quad (1.16)$$

e rappresenta l'energia elettromagnetica che attraversa la superficie ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda elettromagnetica nell'unità di tempo, cioè l'energia trasportata dall'onda stessa.

Risulta molto conveniente, in termini pratici, considerare anziché il flusso istantaneo di energia, il flusso medio per unità di superficie. Lo si può calcolare dal valore medio del vettore di Poynting, che per un'onda piana armonica polarizzata linearmente coincide con l'*intensità* dell'onda stessa, ovvero:

$$I = S_m = \epsilon v \frac{1}{T} \int_0^T E_0^2 \cos^2(k_x x - \omega t) dt = \frac{1}{2} \epsilon v E_0^2 = \epsilon v E_{\text{eff}}^2 \quad (1.17)$$

dove $E_{\text{eff}} = \frac{1}{2} E_0$ e rappresenta fisicamente il campo "efficace" che trasporta l'energia dell'onda elettromagnetica.

1.2 Relatività ristretta

A questo punto occorre introdurre la relatività ristretta, per fornire una spiegazione fisica degli effetti trattati nel capitolo 2. Proprio perché le onde elettromagnetiche si muovono a velocità prossime a c in mezzi omogenei (e pari a c soltanto nel vuoto) occorre tener conto degli effetti relativistici su alcuni sistemi che verranno studiati.

La relatività ristretta può essere considerata come un'estensione della meccanica newtoniana, che rende compatibile le trasformazioni tra sistemi di riferimento inerziali ai fenomeni elettromagnetici. La base della teoria della relatività sono due postulati:

1. Le leggi fisiche sono identiche in tutti i sistemi di riferimento inerziali;
2. La velocità della luce è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Vediamo quindi in cosa consiste effettuare una trasformazione tra sistemi di riferimento, utilizzando un sistema di coordinate quadridimensionale.

1.2.1 Trasformazioni di Lorentz e spaziotempo di Minkowski

Immaginiamo di considerare due sistemi di riferimento inerziali K e K' , di cui uno sia in moto con velocità v lungo l'asse x . Le equazioni 1.1 e 1.2 non sono invarianti per trasformazioni galileiane, ma lo sono per trasformazioni di Lorentz:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{\beta}{c} x \right) \quad (1.18a)$$

$$x' = \gamma (x - \beta ct) \quad (1.18b)$$

$$y' = y \quad (1.18c)$$

$$z' = z \quad (1.18d)$$

dove

$$\beta \equiv \frac{v}{c} \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Dalle 1.18 si può subito desumere che in ognuno dei due sistemi il tempo è relativo: la simultaneità di due eventi non ha più lo stesso significato in sistemi diversi.

I sistemi di riferimento K e K' sono sistemi 4-dimensionali, in cui la quarta coordinata aggiunta è il tempo:

$$x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (x^0, \mathbf{x}) \quad (1.19)$$

Essi costituiscono lo spaziotempo relativistico, o *spaziotempo di Minkowski*, in cui il vettore 1.19 prende il nome di quadrivettore posizione: esso individua nello spazio un evento, indicandone la posizione (*iperpiano presente*) e l'istante di tempo in cui esso avviene (passato, presente o futuro). Una rappresentazione grafica di tale spazio è data in figura 1.2.

Le trasformazioni di Lorentz ammettono un invariante, ed è definita dalla relazione:

$$s^2 \equiv +c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (1.20)$$

il termine definito dalla 1.20 è uno *scalare*: può essere calcolato sia con coordinate x^α che con coordinate x'^α , poiché invariante per lo scambio di sistema di riferimento inerziale.

Il significato fisico di s^2 può essere interpretato come la distanza invariante al quadrato di un evento di coordinate x^α dall'origine del sistema di riferimento (scelta in maniera arbitraria, in quanto priva di qualsiasi significato particolare). Quest'ultimo, nel grafico dello spazio-tempo in figura 1.2 può assumere tre tipi di valori, definendo quindi tre tipi di distanze:

- $s^2 < 0 \rightarrow$ distanza di tipo *spazio*;
- $s^2 = 0 \rightarrow$ distanza di tipo *luce*;
- $s^2 > 0 \rightarrow$ distanza di tipo *tempo*.

1.2.2 Formalismo tensoriale

Possiamo riscrivere le definizioni date nel paragrafo 1.2.1 con un nuovo formalismo, per alleggerire la notazione: riscriviamo le trasformazioni di Lorentz e la metrica di Minkowski in forma tensoriale. Indichiamo con:

$$\Lambda \equiv \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

la matrice di rango 2 associato alle trasformazioni di Lorentz, dalle componenti Λ^α_β , dove α indica l'indice di riga e β quello in colonna. Indichiamo invece con:

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

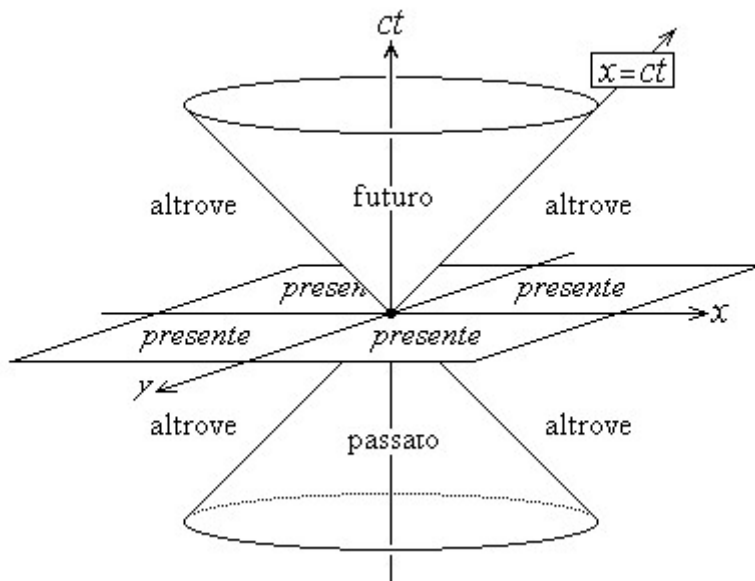


Figura 1.2: Rappresentazione grafica del cono-luce e della metrica di Minkowski.

la matrice della metrica di Minkowski, con elementi $\eta_{\alpha\beta}$. Utilizzando le nuove espressioni appena definite, possiamo quindi riscrivere il cambio di sistema di riferimento e l'invariante per le trasformazioni in forma tensoriale:

$$\begin{aligned}x'^{\alpha} &= \Lambda^{\alpha}_{\beta} x^{\beta} \\s^2 &= \eta_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta}\end{aligned}$$

Si noti che, tutte le trasformazioni di Lorentz devono rispettare la relazione:

$$\eta_{\gamma\delta} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}_{\gamma} \Lambda^{\beta}_{\delta} \quad (1.23)$$

Precisiamo infine che la posizione degli indici di un tensore (in alto o in basso) non è arbitraria, ma ha un significato ben preciso. Il 4-vettore posizione ha per definizione l'indice in alto (x^{α}) e la metrica ha 2 indici in basso ($\eta_{\alpha\beta}$), ed è proprio quest'ultima che permette di definire un 4-vettore con l'indice in basso:

$$x_{\alpha} = \eta_{\alpha\beta} x^{\beta} \quad (1.24)$$

Chiameremo i vettori con indice alto *contravarianti* e i vettori con indice basso *covarianti*.

1.2.3 Elettromagnetismo in formalismo tensoriale

Utilizzeremo ora il formalismo appena introdotto per riscrivere le equazioni di Maxwell con una notazione più compatta.

Per prima cosa, è necessario definire un tensore che descriva i comportamenti del campo elettromagnetico. Quest'ultimo deve avere 6 componenti indipendenti per le 6 componenti dei campi \mathbf{E} e \mathbf{B} . Risulta conveniente per descrivere tali componenti un tensore di rango 2 antisimmetrico, il quale per l'appunto possiede

6 componenti indipendenti (la condizione di antisimmetria è che sulla diagonale principale le componenti debbano essere nulle, mentre la parte triangolare sopra la diagonale sia quella sotto la diagonale, ma cambiata di segno). Definiamo quindi il *tensore del campo elettromagnetico* come:

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} = -F^{\beta\alpha} \quad (1.25)$$

Sappiamo inoltre, dalla teoria elettromagnetica, che i campi elettrici e magnetici possono essere espressi in funzione di un potenziale vettore \mathbf{A} a tre componenti e un potenziale scalare Φ . Grazie al formalismo tensoriale, è possibile combinare i due potenziale in un unico potenziale a 4 componenti:

$$A^\alpha = (A^0, \mathbf{A}) = (\Phi, \mathbf{A}) \quad (1.26)$$

risulta poi immediato dalla definizione di 4-potenziale verificare che

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$$

dove è stata utilizzata la metrica per abbassare gli indici e il simbolo di derivata ∂_α è definito come il 4-vettore gradiente:

$$\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad (1.27)$$

Possiamo quindi facilmente ricavare le componenti del tensore 1.25, separando gli indici in parte temporale e parte spaziale $\alpha = (0, i)$,

$$\begin{aligned} F_{i0} &= \partial_i A_0 - \partial_0 A_i = -\partial_i \Phi - \partial_0 A_i = E_i \\ F_{ij} &= \partial_i A_j - \partial_j A_i = \epsilon_{ijk} B_k \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\text{con } \epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{se } ijk \text{ permutazione pari } = (1, 2, 3), \dots \\ -1, & \text{se } ijk \text{ permutazione dispari } = (3, 2, 1), \dots \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1.29)$$

Per ottenere infine la forma delle equazioni Maxwell 1.2 con sorgente esterna, è necessario ricordare che tali sorgenti sono rappresentate dalla densità di carica elettrica ρ e dal vettore densità di corrente \mathbf{J} . Unendo le due definizioni si ricava il 4-vettore densità di corrente:

$$J^\alpha = (\rho c, \mathbf{J}) \quad \text{con } \mathbf{J} = \rho \mathbf{v} \quad (1.30)$$

da cui possiamo scrivere le *equazioni di Maxwell* della 1.2 nella forma compatta:

$$\begin{cases} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta \\ \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0 \end{cases} \quad (1.31)$$

Possiamo ora derivare nuovamente l'equazione delle onde direttamente in forma covariante. Considerando sorgenti nulle ($J^\alpha = 0$), possiamo prendere la divergenza ∂^γ della seconda equazione

$$\partial^\gamma \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial^\gamma \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial^\gamma \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0 \quad (1.32)$$

che si riduce, utilizzando $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 0$, all'equazione delle onde scritta in forma covariante

$$\partial^\gamma \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \quad (1.33)$$

Come vediamo, tutte le componenti del campo elettromagnetico soddisfano l'equazione delle onde.

Si noti, ricordando la 1.27, che l'operatore d'onda di d'Alambert $\partial^\gamma \partial_\gamma$ assume la forma usuale

$$\partial^\gamma \partial_\gamma = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (1.34)$$

Capitolo 2

Irraggiamento delle cariche in moto

Come già anticipato nel capitolo 1, le onde elettromagnetiche possono essere generate da campi variabili nel tempo. Nel caso specifico, dalle considerazioni fatte sulle equazioni 1.2, è proprio il moto di cariche a produrre un'onda elettromagnetica. Tale moto non può essere uniforme nella velocità: per osservare l'effettiva emissione di onde elettromagnetiche è necessario che le particelle vengano accelerate (in genere, tali fenomeni sono riscontrabili negli acceleratori di particelle).

L'irraggiamento, ovvero l'emissione di radiazione elettromagnetica, è un fenomeno fisico legato strettamente al moto di cariche *accelerate*, indifferentemente dalla natura di queste ultime. Per gli scopi dell'elaborato, verrà evidenziato particolare interesse nel moto accelerato di particelle cariche puntiformi, tralasciando gli effetti radiativi collegati a densità di carica o correnti macroscopiche, ambedue variabili nel tempo, od eventualmente citando superficialmente alcuni aspetti utili alla trattazione.

Per riuscire a descrivere efficacemente l'irraggiamento, risulta utile sviluppare un formalismo caratteristico del problema, che permetta di collegare direttamente l'emissione elettromagnetica di radiazione con le proprietà di traiettoria e caratteristiche del moto della particella carica.

La trattazione verterà sulla descrizione del comportamento di cariche puntiformi accelerate nel caso relativistico.

2.1 Potenziali di Liénard-Wiechert per una carica puntiforme

Una particella carica in moto accelerato genera un campo con caratteristiche molto differenti dal campo di interazione coulombiano. Tale campo può essere descritto dai potenziali di Liénard-Wiechert, potenziali scoperti dagli omonimi studiosi. Cerchiamo ora di ricavare tali campi, ripercorrendo il modello elaborato da Liénard e Wiechert, i quali si approcciarono a tale modello partendo dalla definizione della densità di carica.

Il 4-vettore densità di carica di una carica in moto relativistico è definito da:

$$J^\alpha(x') = qc \int d\tau V^\alpha(\tau) \delta^{(4)}[x' - r(\tau)] \quad (2.1)$$

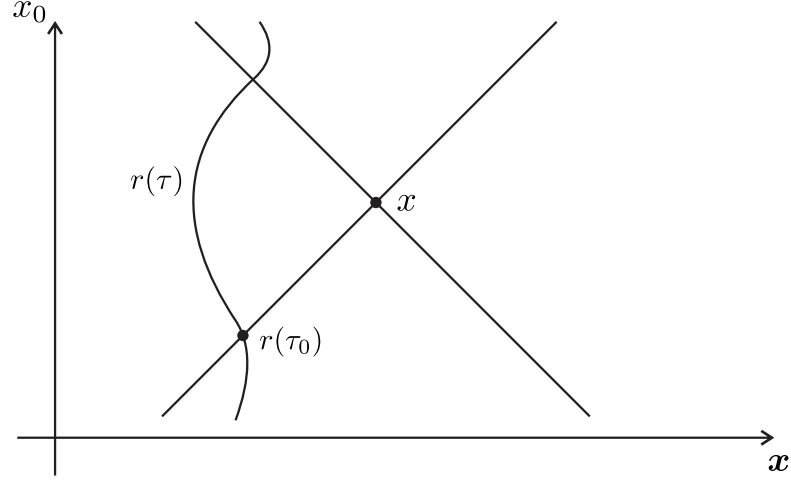


Figura 2.1: Rappresentazione schematica del cono-luce e della linea di universo di una particella accelerata, sotto le condizioni 2.4 e 2.5.

dove $V^\alpha(\tau) = \frac{dr^\alpha(\tau)}{d\tau}$ è la 4-velocità della particella ed $r^\alpha(\tau)$ la sua posizione nello spaziotempo di Minkowski e τ è il parametro di tempo proprio che descrive la linea di mondo della particella. Tralasciando la possibilità che vi siano campi esterni incidenti sulla particella, il 4-potenziale generato dalla carica in moto è ottenuto come

$$A^\alpha(x) = \frac{4\pi}{c} \int d^4x' D_r(x - x') J^\alpha(x') \quad (2.2)$$

dove $D_r(x - x')$ è la funzione di Green ritardata definita nella A.10 (In appendice A.1 è fornita una dimostrazione di questo e di come ricavare tale funzione di Green).

Sostituendo a questo punto la funzione di Green e la corrente definita nella 2.1, è possibile integrare su d^4x' per ricavare

$$A^\alpha(x) = 2q \int d\tau V^\alpha(\tau) \theta[x_0 - r_0(\tau)] \delta[(x - r(\tau))^2] \quad (2.3)$$

l'integrale a secondo membro dell'equazione 2.3 sul tempo proprio della carica da un contributo solo per $\tau = \tau_0$. Il parametro τ_0 è definito dalla condizione del cono-luce

$$[x - r(\tau_0)]^2 = 0 \quad (2.4)$$

e dalla condizione di ritardo

$$x_0 > r_0(\tau_0) \quad (2.5)$$

Il significato fisico delle condizioni è ben evidenziato nella figura 2.1: la funzione di Green è diversa da zero solo nel cono-luce del passato del punto di osservazione. La linea di universo della particella $r(\tau)$ interseca il cono-luce in due punti soltanto, uno anteriore ed uno posteriore al tempo x_0 . L'unico dei due che dà contributo ai campi in x^α è il punto antecedente $r^\alpha(\tau_0)$. A questo punto possiamo quindi esplicitare l'equazione 2.3, utilizzando la regola:

$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{\left| \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_i} \right|}$$

dove i punti x_i sono gli zeri della funzione $f(x)$, assumendo che quest'ultima sia lineare. A questo punto sfruttando

$$\frac{d}{d\tau}[x - r(\tau)]^2 = -2[x - r(\tau)]_\beta V^\beta(\tau) \quad (2.6)$$

calcolata nel punto $\tau = \tau_0$, possiamo esplicitare il 4-vettore potenziale, che risulta

$$A^\alpha(x) = \frac{qV^\alpha(\tau)}{V \cdot [x - r(\tau)]} \Big|_{\tau=\tau_0} \quad (2.7)$$

dove τ_0 è definito dalle condizioni 2.4 e 2.5.

I potenziali 2.7 sono chiamati *potenziali di Liénard-Wiechert*. Tali potenziali possono essere espressi in forma non covariante: il vincolo 2.4 implica che $x_0 - r_0(\tau_0) = |\mathbf{x} - \mathbf{r}(\tau_0)| \equiv R$, quindi

$$\begin{aligned} V \cdot (x - r) &= V_0[x_0 - r_0(\tau_0)] - \mathbf{V} \cdot [\mathbf{x} - \mathbf{r}(\tau_0)] \\ &= \gamma c R - \gamma \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} R \\ &= \gamma c R (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

dove $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore nella direzione di $\mathbf{x} - \mathbf{r}(\tau_0)$, e dove $V^\alpha(\tau) = \frac{dr^\alpha(\tau)}{d\tau} = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$ è stato separato nelle componenti temporale e spaziale, con $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ la velocità usuale e $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$. Possiamo quindi riscrivere i potenziali 2.7, dividendoli nella componente di potenziale elettrico Φ e di potenziale magnetico \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, t) &= \left[\frac{q}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}) R} \right]_{\text{rit}} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \left[\frac{q\boldsymbol{\beta}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}) R} \right]_{\text{rit}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

dove si noti che il pedice “rit” indica che la quantità tra parentesi quadre deve essere calcolata nell’istante ritardato $r_0(\tau_0) = x_0 - R$. Tale condizione di ritardo è dovuta al fatto che esiste un tempo di “accensione” della radiazione, ma rimandiamo per ora il problema, che verrà ampiamente discusso nel capitolo 3.

In caso di moto non relativistico di particelle cariche, si noti che i potenziali 2.9 si semplificano nei potenziali noti del campo elettromagnetico.

Campi elettromagnetici ricavati dai potenziali di Liénard-Wiechert

Ora è possibile applicare le definizioni di potenziali per calcolare i campi elettromagnetici $F^{\alpha\beta}$ a partire dalle equazioni 2.7 e 2.9. In realtà calcoleremo i campi direttamente dall’integrale 2.3.

Per ricavare $F^{\alpha\beta}$ occorre effettuare una derivazione del potenziale rispetto alle coordinate del punto di osservazione. Tale derivazione opera direttamente sulle funzioni δ e θ , introdotte nella 2.3. In particolare, la derivazione della funzione θ restituirà $\delta[x_0 - f_0(\tau)]$, riducendo la funzione al valore $\delta(-R^2)$. Tale derivata non ha alcun contributo sui campi, se non nel punto $R = 0$: escludendo quest’ultimo dalla trattazione, possiamo scrivere la derivata come

$$\partial^\alpha A^\beta = 2q \int d\tau V^\beta(\tau) \theta[x_0 - r_0(\tau)] \partial^\alpha \delta\{[x - r(\tau)]^2\} \quad (2.10)$$

dove il gradiente all'interno dell'integrale può essere scritta nella forma

$$\partial^\alpha \delta[f] = \partial^\alpha f \cdot \frac{d}{df} \delta[f] = \partial^\alpha \cdot \frac{d\tau}{df} \cdot \frac{d}{d\tau} \delta[f]$$

e dove $f = [x - r(\tau)]^2$ si ottiene quindi

$$\partial^\alpha \delta[f] = -\frac{(x-r)^\alpha}{V \cdot (x-r)} \frac{d}{d\tau} \delta[f]$$

Sostituendo tale espressione nella 2.10 ed integrando per parti si ottiene:

$$\partial^\alpha A^\beta = 2q \int d\tau \frac{d}{d\tau} \left[\frac{(x-r)^\alpha V^\beta}{V \cdot (x-r)} \right] \theta[x_0 - r_0(\tau)] \partial^\alpha \delta\{[x - r(\tau)]^2\} \quad (2.11)$$

Si noti che, come già anticipato, la derivazione della funzione θ non produce alcun contributo.

Siamo quindi giunti ad una forma analoga dell'equazione 2.3, dove la derivata sostituisce il termine $V^\alpha(\tau)$. Ricaviamo quindi il tensore intensità di campo per sostituzione

$$F^{\alpha\beta} = \left\{ \frac{q}{V \cdot (x-r)} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{(x-r)^\alpha V^\beta - (x-r)^\beta V^\alpha}{V \cdot (x-r)} \right] \right\}_{\tau=\tau_0} \quad (2.12)$$

dove si è volontariamente omessa ma non trascurata la dipendenza da τ di r^α e V^α . Inoltre il pedice della parentesi graffa evidenzia che per ottenere i campi, a seguito della derivazione, occorre esplicitare $F^{\alpha\beta}$ riferendosi al tempo τ_0 .

Dal tensore $F^{\alpha\beta}$, è possibile esplicitare le espressioni per i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} in funzione di velocità ed accelerazione delle particelle cariche. A tale proposito occorre ricordare alcune equazioni per esplicitare tali risultati:

$$\begin{aligned} (x-r)^\alpha &= (R, R\hat{\mathbf{n}}), \quad V^\alpha = (\gamma c, \gamma \boldsymbol{\beta} c) \\ \frac{dV^\alpha}{d\tau} &= (c\gamma^4 \boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}, c\gamma^2 \dot{\boldsymbol{\beta}} + c\gamma^4 \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})) \\ \frac{d}{d\tau} [V \cdot (x-r)] &= -c^2 + (x-r)_\alpha \frac{dV^\alpha}{d\tau} \end{aligned} \quad (2.13)$$

dove la notazione $\dot{\boldsymbol{\beta}} = d\boldsymbol{\beta}/dt$ sta ad indicare l'accelerazione della particella carica, divisa per la velocità della luce c . Combinando le espressioni della 2.13 e l'equazione 2.9, i campi 2.12 assumono le forme

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \left\{ \underbrace{q \left[\frac{(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta})}{\gamma^2 (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}})^3 R^2} \right]}_{\mathbf{E}_v} + \underbrace{\frac{q}{c} \left[\frac{\hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}})^3 R} \right]}_{\mathbf{E}_a} \right\}_{\text{rit}} \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \left\{ \underbrace{q \left[\frac{c(\boldsymbol{\beta} \times \hat{\mathbf{n}})}{\gamma^2 (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}})^3 R^2} \right]}_{\mathbf{B}_v} + \underbrace{q \left[\frac{\hat{\mathbf{n}} \times \{ \hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}})^3 R} \right]}_{\mathbf{B}_a} \right\}_{\text{rit}} = \\ &= \left[\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \right]_{\text{rit}} \end{aligned} \quad (2.14)$$

I campi definiti nella 2.14 sono scindibili in “campi di velocità”, indipendenti dall’accelerazione, e “campi di accelerazione”, dipendenti linearmente da $\dot{\boldsymbol{\beta}}$. Si noti quindi che i campi di velocità sono proporzionali ad un termine R^{-2} , hanno cioè una natura prevalentemente statica. I campi di accelerazione, al contrario, sono tipici dei campi di radiazione, in quanto le componenti \mathbf{E} e \mathbf{B} sono perpendicolari al raggio vettore e sono proporzionali ad R^{-1} .

Si noti infine che se si fossero sfruttate le equazioni per i potenziali 2.9 e le definizioni (che sono in realtà una generalizzazione delle 1.28)

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.15)$$

i risultati ottenuti sarebbero stati identici a quelli della 2.14.

2.2 Formula di Larmor

Avendo dato quindi finora una trattazione esaustiva dei campi e dei potenziali, occorre trattare il problema da un punto di vista energetico. La *formula di Larmor*, sia per il caso classico che per quello relativistico, descrive il fenomeno dell’irraggiamento dal punto di vista dell’energia, esplicitando analiticamente un’equazione per la potenza dissipata dalla particella nell’emissione di radiazione elettromagnetica. Ricaviamo quindi l’equazione.

Immaginiamo di osservare una carica accelerata in un sistema di riferimento in cui la sua velocità sia molto minore di quella della luce. In questo sistema quindi il campo di accelerazione della 2.14 si può scrivere nella forma

$$\mathbf{E}_a = \frac{q}{c} \left[\frac{\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{R} \right]_{\text{rit}} \quad (2.16)$$

Il flusso istantaneo di energia è dato dal vettore di Poynting, dalla 1.14:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}_a|^2 \hat{\mathbf{n}} \quad (2.17)$$

Ciò significa che la potenza irradiata, per unità di angolo solido

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} |R\mathbf{E}_a|^2 = \frac{q^2}{4\pi c} |\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})|^2 \quad (2.18)$$

Indicando poi con Θ l’angolo tra l’accelerazione $\dot{\boldsymbol{v}}$ ed $\hat{\mathbf{n}}$, come in figura 2.2, la potenza irradiata può essere scritta come

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3} |\dot{\boldsymbol{v}}|^2 \sin^2 \Theta \quad (2.19)$$

La potenza totale istantanea irradiata si ricava integrando su tutto l’angolo solido l’equazione 2.19, che diventa

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} |\dot{\boldsymbol{v}}|^2 \quad (2.20)$$

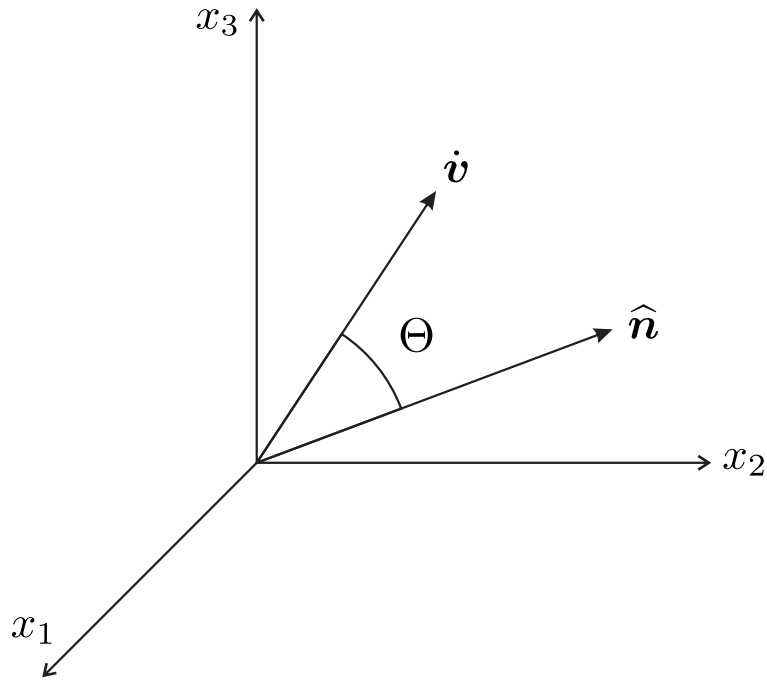


Figura 2.2: Rappresentazione dell'orientazione dei vettori $\dot{\mathbf{v}}$ ed $\hat{\mathbf{n}}$ in un sistema di riferimento arbitrario.

L'equazione 2.20 è comunemente nota come *formula di Larmor* per una carica accelerata non relativistica. Tale equazione può essere generalizzata al caso relativistico, sfruttando la covarianza per trasformazioni, estendendo quindi tale risultato a particelle in moto con qualsiasi velocità ammissibile fisicamente.

L'energia elettromagnetica irradiata si comporta come la componente temporale di un 4-vettore se sotto trasformazioni di Lorentz. Possiamo quindi sfruttare tale comportamento per dimostrare che la potenza P è Lorentz-invariante. Per ottenere ciò è necessario ricavare un invariante di Lorentz, che per moti non relativistici, $\beta \ll 1$ si riduca all'equazione 2.20. Non risulta immediato tale risultato, poiché sono molteplici i risultati che soddisfano tale condizione, per $\beta \rightarrow 0$

Una restrizione fondamentale sull'equazione che stiamo cercando viene fornita dalle equazioni 2.14: il risultato generale deve contenere solamente $\boldsymbol{\beta}$ e $\dot{\boldsymbol{\beta}}$. Cerchiamo quindi di ottenere la giusta formulazione, scrivendo l'equazione 2.20 come

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{m^2 c^3} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (2.21)$$

in cui m è la massa della particella e \mathbf{p} la sua quantità di moto. Possiamo scrivere la generalizzazione Lorentz-invariante:

$$P = -\frac{2}{3} \frac{q^2}{m^2 c^3} \frac{dp_\mu}{d\tau} \frac{dp^\mu}{d\tau} \quad (2.22)$$

dove $d\tau = dt/\gamma$ è il tempo proprio e p^μ il 4-vettore energia-impulso della particella carica. In effetti l'unico modo per ottenere un invariante di Lorentz è prendendo prodotti scalari di 4-vettori o di tensori di rango maggiore. Nel caso dell'equazione 2.22, il prodotto scalare di 4-vettori è l'unica formulazione che per $\beta \rightarrow 0$ si riduce

alla 2.21. Esplicitiamo quindi il prodotto scalare della 2.22, verificando che si riduce alla 2.21:

$$\begin{aligned} -\frac{dp_\mu}{d\tau} \cdot \frac{dp^\mu}{d\tau} &= \left(\frac{d\mathbf{p}}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dE}{d\tau}\right)^2 \\ &= \left(\frac{d\mathbf{p}}{d\tau}\right)^2 - \beta^2 \left(\frac{dp}{d\tau}\right)^2 \end{aligned}$$

dove sono stati usati i termini $E = \gamma mc^2$ di energia relativistica, $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$ di quantità di moto relativistica e $p = |\mathbf{p}|$ modulo della quantità di moto relativistica. Utilizzando queste stesse espressioni, possiamo ricavare dalla 2.21 un'espressione analoga per la potenza:

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c} \gamma^6 [(\dot{\boldsymbol{\beta}})^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2] \quad (2.23)$$

In generale, le equazioni 2.20 e 2.23 descrivono l'irraggiamento di particelle cariche accelerate, e mostrano che la potenza delle onde elettromagnetiche emesse è notevole per accelerazioni particolarmente elevate. Una applicazione dell'equazione relativistica per la potenza è presentata in appendice A.2.

Capitolo 3

Reazione di radiazione

3.1 Considerazioni preliminari

In molti problemi di elettrodinamica, in particolare riguardanti il moto di sorgenti di carica che generano campi elettromagnetici (come i modelli presentati nel capitolo 2), o il moto di una carica in regioni con campi elettromagnetici, l'effetto di emissione radiativa viene trascurato.

In realtà la radiazione sottrae alla particella energia, impulso e momento angolare, cioè la traiettoria del moto delle sorgenti radiative viene modificata dall'emissione stessa di radiazione. La trattazione di tutti i problemi di elettrodinamica dovrebbe quindi contenere un fattore correttivo dovuto a tale fenomeno, ma ciò non accade, per due motivi:

1. L'errore dovuto alla reazione di radiazione, misurato sperimentalmente, è trascurabile nella trattazione dei problemi sopracitati;
2. Da un punto di vista classico, una trattazione esaustiva degli effetti radiativi non è mai stata formulata, poiché la soluzione del problema è influenzata dalla natura stessa delle particelle elementari.

3.1.1 Stima dell'ordine di grandezza del dominio degli effetti radiativi

Per ricercare le soluzioni del problema, e capire perché spesso viene approssimato nelle trattazioni classiche, occorre studiare in quale tipo di dominio gli effetti radiativi sono o meno rilevanti. Si cercherà cioè di dare una stima semi-quantitativa, studiando il dominio in maniera qualitativa.

Sfruttando il principio di conservazione dell'energia, studiamo un modello in cui un campo di forze esterne produce un'accelerazione di ordine a su una particella di carica q per un tempo T . L'energia irradiata dalla particella è dell'ordine di:

$$E_{irr} \sim \frac{2q^2 a^2 T}{3c^3} \quad (3.1)$$

dall'equazione di Larmor 2.20.

Sulla base di questa definizione possiamo estrapolare un criterio per definire univocamente il dominio: se l'energia E_{irr} è trascurabile rispetto all'energia E_0 tipica del problema ci si aspetta che gli effetti della radiazione emessa siano omissibili. Se invece $E_{irr} \sim E_0$ o $E_{irr} > E_0$, gli effetti della reazione di radiazione iniziano ad avere un certo peso nella trattazione dei problemi elettrodinamici. Si definisce quindi la relazione:

$$E_{irr} \ll E_0 \quad (3.2)$$

come il criterio che sancisce il regime in cui gli effetti radiativi non sono rilevanti per la trattazione classica.

A questo punto occorre fornire una stima dell'energia E_0 , la cui definizione non è banale. Da quest'ultimo infatti verranno ricavati gli ordini di grandezza sulla scala dei tempi e, conseguentemente, sulla scala delle lunghezze degli effetti radiativi.

Consideriamo inizialmente un sistema di riferimento in cui una particella carica sia in quiete e sulla quale venga applicata una forza per un intervallo di tempo finito T . La sua energia "tipica" è banalmente l'energia cinetica della particella al termine del tempo in cui viene accelerata:

$$E_0 \sim m(aT)^2$$

quindi dal criterio 3.2:

$$\begin{aligned} \frac{2q^2 a^2 T}{3c^3} &\ll m(aT)^2 \implies \\ \implies T &\gg \frac{2}{3} \frac{q^2}{mc^3} \end{aligned}$$

da cui è utile definire un *tempo caratteristico* τ :

$$\tau = \frac{2}{3} \frac{q^2}{mc^3} \quad (3.3)$$

Si evince quindi, che per tempi lunghi rispetto a τ , la reazione di radiazione può essere trascurata. I suoi effetti modificano il moto, e quindi l'energia di un sistema solo quando la forza è applicata per tempi $T \sim \tau$ e in maniera improvvisa (il *tempo caratteristico* più lungo per le particelle cariche è detenuto dagli elettroni, sostituendo infatti i valori di carica e e massa m_e si ottiene $\tau = 6.26 \times 10^{-24}$ s).

Immaginiamo ora di studiare un sistema di riferimento di una particella in moto quasi-periodico con ampiezza caratteristica d e frequenza caratteristica ω_0 , quindi in accelerazione continua. La sua energia E_0 può essere identificata come l'energia meccanica del moto:

$$E_0 \sim m\omega_0^2 d^2$$

Le accelerazioni sono dell'ordine di $a \sim \omega_0^2 d$ e il tempo $T \sim 1/\omega_0$, sfruttando il criterio 3.2 si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{2q^2 a^2 T}{3c^3} &\ll m\omega_0^2 d^2 \implies \\ \implies \omega_0 \tau &\ll 1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

dove τ è stato definito nella 3.3.

Dato che $1/\omega_0$ è un tempo associato al moto meccanico della particella, si nota che se l'intervallo di tempo rilevante è lungo se confrontato con τ , allora gli effetti di reazione radiativa sul moto sono trascurabili.

Sempre dalla definizione 3.3 è possibile stimare anche su che scala spaziale, gli effetti della radiazione: assumendo che le particelle siano in moto con velocità prossime a c e trascurando gli effetti relativistici, si desume che l'ordine di grandezza delle lunghezze per gli effetti radiativi è di $d = c\tau \sim 10^{-15}\text{m}$.

Per la trattazione che quindi seguirà, si farà riferimento a forze esterne che agiscono sulle particelle, modificandone il moto su tempi dell'ordine di τ e su distanze all'ordine di $c\tau$.

3.2 Modello classico di Abraham-Lorentz dell'elettrone

Fino ad ora sono stati esposti modelli fisici in grado di spiegare i campi generati dalle particelle in moto (paragrafi 2.1 e 2.2), ma quale effetto portano questi campi sulla particella che li genera?

Cerchiamo di introdurre nelle equazioni del moto di un particella carica gli effetti della reazione di radiativa. Partendo dal modello più semplicistico, ovvero non trattando la particella relativisticamente e trascurando inizialmente l'emissione di radiazione, una particella di carica q e di massa m soggetta a una forza esterna \mathbf{F}_{est} , si muove secondo le ben note equazioni di Newton:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{est}} \quad (3.5)$$

La particella è quindi soggetta ad una accelerazione, questa emette radiazione con potenza data dalla formula di Larmor 2.20:

$$P(t) = \frac{2q^2}{3c^3} \dot{\mathbf{v}}^2 \quad (3.6)$$

ciò significa che l'emissione di radiazione provoca una variazione di energia nel sistema, modificandone il moto. Aggiungeremo quindi un termine di *reazione radiativa* di forza all'equazione 3.5:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{est}} + \mathbf{F}_{\text{rad}} \quad (3.7)$$

La forza \mathbf{F}_{rad} è quindi la *forza di reazione radiativa* da determinare. Per semplificare il calcolo, facciamo alcune considerazioni utili alla determinazione della forza stessa, nonché requisiti che la forza “deve” soddisfare:

- $\mathbf{F}_{\text{rad}} = 0$ se $\dot{\mathbf{v}} = 0$; la forza è nulla se il moto della carica non è accelerato poiché non avviene alcuna emissione di radiazione;
- $\mathbf{F}_{\text{rad}} \propto q^2$; ciò deriva dall'equazione 3.6 ($P(t) \propto q^2$) e dal fatto che il risultato della trattazione deve necessariamente valere sia per cariche positive che negative;

- \mathbf{F}_{rad} dipende da τ (sempre definito dalla 3.3), in quanto è l'unico parametro di scala a cui si possa fare riferimento.

Appurate tali precisazioni, determiniamo un'equazione per \mathbf{F}_{rad} che rispetti i canoni sopracitati. Possiamo assumere che il lavoro eseguito da tale forza sulla particella in un tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ finito sia uguale all'opposto dell'energia irradiata in uno stesso intervallo di tempo. Assumiamo quindi che nell'intervallo $[t_1, t_2]$ l'energia sia conservata, ovvero in formule dalla 3.6:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{v} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{2q^2}{3c^3} \dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}} dt$$

è possibile integrare per parti il secondo membro dell'equazione, da cui

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{v} dt = \frac{2q^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dt - \frac{2q^2}{3c^3} (\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}) \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Se inoltre il moto è tale che $(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}) = 0$ in t_1 e t_2 , oppure è periodico, segue che

$$\int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{F}_{\text{rad}} - \frac{2q^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}) \cdot \dot{\mathbf{v}} dt = 0$$

Possiamo quindi ricavare la *forza di reazione radiativa* dal termine fra parentesi, il quale deve annullarsi affinché l'integrale sia nullo, quindi:

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \frac{2q^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}} = m\tau \ddot{\mathbf{v}} \quad (3.8)$$

Possiamo quindi riscrivere l'equazione del moto 3.7, inserendo l'equazione della forza di radiazione (sempre riferita alla nozione di tempo caratteristico τ), la quale risulta:

$$m(\dot{\mathbf{v}} - \tau \ddot{\mathbf{v}}) = \mathbf{F}_{\text{est}} \quad (3.9)$$

L'equazione 3.9 prende il nome di *equazione di Abraham-Lorentz*. Essa può essere considerata come un'equazione che include approssimativamente gli effetti dell'emissione di radiazione sul moto della carica accelerata. L'unico difetto dell'equazione è che è del terzo ordine nel tempo, quindi non conforme alle classiche equazioni del moto newtoniane, che sono al secondo ordine. Ciò implica che le soluzioni, nel caso in cui la \mathbf{F}_{est} sia nulla debbano essere:

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \begin{cases} 0 \\ \mathbf{a} e^{\frac{t}{\tau}} \end{cases}$$

Risulta abbastanza chiaro che la seconda soluzione sia del tutto da rigettare, in quanto non fisica: essa implicherebbe che, in assenza di forza, esista una accelerazione \mathbf{a} (anche all'istante $t = 0$ c'è una accelerazione pari proprio ad \mathbf{a}) proporzionale ad un esponenziale ad argomento positivo, quindi divergente nel tempo.

Possiamo quindi immaginare che l'equazione 3.9 sia valida solamente se le correzioni radiative sono molto piccole, ovvero se possono essere trattate come una *perturbazione* che causa modifiche piccole all'equazione del moto della particella.

Utilizzando l'equazione del moto di ordine zero, 3.5, si può ottenere una stima della reazione di radiazione, sfruttando un metodo perturbativo, da cui risulta:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{est}} + \tau \frac{d\mathbf{F}_{\text{est}}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{est}} + \tau \left[\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{est}}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{F}_{\text{est}} \right] \quad (3.10)$$

che è una valida alternativa all'equazione 3.9, poiché risulta priva di comportamenti acausali. Una applicazione dell'equazione 3.10 è proposta di seguito.

3.2.1 Energia e momento angolare dall'equazione del moto perturbata

Nello studio del moto di una particella in un campo centrale di forze attrattive è possibile applicare l'equazione 3.10, per tener conto degli effetti radiativi. Se questi ultimi non fossero presenti, il moto della carica sarebbe determinato univocamente dall'energia e dal momento angolare del sistema, i quali sono conservati.

In condizioni di emissione a causa di accelerazioni non troppo violente, l'energia e il momento angolare variano apprezzabilmente solamente su tempi molto più lunghi del tempo caratteristico del moto. Dovremo quindi studiare il moto su periodi sufficientemente lunghi, che permettano di studiarne un effettivo cambiamento, descrivendo le variazioni sul lungo periodo con medie temporali sulle orbite imperturbate. Ricaviamo ora i valori medi di energia e di momento angolare.

Immaginiamo quindi che il campo centrale conservativo sia descritto da un potenziale $V(\mathbf{r})$. Senza considerare per il momento gli effetti radiativi, l'accelerazione della particella sarà:

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{1}{m} \left(\frac{dV}{dr} \right) \hat{\mathbf{r}} \quad (3.11)$$

Poiché non c'è radiazione, l'energia è conservata e quindi sappiamo che l'energia totale della particella è l'opposto della potenza di Larmor 2.20

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\frac{2q^2}{3c^3} (\dot{\mathbf{v}})^2 = -\frac{2q^2}{3m^2c^3} \left(\frac{dV}{dr} \right)^2 \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{dE}{dt} = -\frac{\tau}{m} \left(\frac{dV}{dr} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

dove si è sfruttata la definizione di tempo caratteristico 3.3.

Per le ipotesi fatte, possiamo sostituire il membro destro dell'equazione 3.12 con la sua media temporale, in quanto le variazioni di energia sono piccole per le singole orbite, perciò la variazione di energia può essere scritta come:

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle \simeq \frac{\tau}{m} \left\langle \left(\frac{dV}{dr} \right)^2 \right\rangle \quad (3.13)$$

dove si noti che il valor medio è definito, per una funzione generica, come:

$$\langle f(t') \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t f(t') dt'$$

La variazione del momento angolare si può ottenere considerando il prodotto vettoriale dell'equazione 3.10 per il raggio vettore \mathbf{r} . Dalla definizione di momento angolare $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ ricaviamo

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{\text{est}} + \tau \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{F}_{\text{est}}}{dt} = \tau \mathbf{r} \times (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{F}_{\text{est}} \quad (3.14)$$

dove la seconda uguaglianza segue dal fatto che la forza è centrale e indipendente dal tempo. Usando l'equazione 3.11, si nota che il membro destro dell'equazione 3.14 è

$$\tau \mathbf{r} \times (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{F}_{\text{est}} = \tau \mathbf{r} \times \left(-\frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \right) \mathbf{v}_{\perp} = -\frac{\tau}{m} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \mathbf{L} \quad (3.15)$$

Effettuando quindi una media della “torsione” sull'orbita, possiamo scrivere la variazione del momento angolare come:

$$\left\langle \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right\rangle \simeq -\frac{\tau}{m} \left\langle \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \right\rangle \mathbf{L} \quad (3.16)$$

Le equazioni 3.12 e 3.16 determinano la variazione nel tempo dell'orbita a causa dell'effetto della reazione di radiazione. Se la frequenza caratteristica del moto è ω_0 allora il valore medio della 3.16 si potrà scrivere

$$\frac{\tau}{m} \left\langle \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \right\rangle \sim \frac{\tau}{m} m \omega_0^2 = \omega_0^2 \tau$$

L'utilizzo maggiore di queste equazioni è la descrizione di orbite di muoni o pioni in cascata in passaggio da orbite a numeri quantici molto grandi attorno ad un nucleo verso numeri quantici più bassi.

3.3 Stima della auto-forza

La ricerca delle equazioni e la derivazione della forza di reazione di radiazione del paragrafo 3.2 non sono fisicamente consistenti, poiché mancano di rigore e non si fondano su nessun principio fondamentale.

La mancanza di tale sistema è quella di non riuscire a descrivere in maniera esaustiva la reazione radiativa che la particella esercita su sè stessa. Il primo nodo importante da affrontare, per descrivere in maniera sistematica il problema, è quello di considerare la struttura della distribuzione di carica e dell'auto-campo da essa generato.

Ripercorriamo quindi quello che fu per Abraham (nel 1903) e Lorentz (nel 1904) l'approccio per la risoluzione di tale problema, cercando di produrre un modello puramente elettromagnetico.

Consideriamo una singola particella, di carica q , con densità spaziale di carica $\rho(x)$ localizzata nel riferimento di quiete della particella. Poniamo un campo elettromagnetico esterno $(\mathbf{E}_{\text{est}}, \mathbf{B}_{\text{est}})$. La derivata temporale della somma dell'impulso meccanico e quello elettromagnetico in un volume noto è nulla, nella condizione in cui non vi sia flusso di impulso diverso da zero in entrata o uscita dal volume stesso. L'approssimazione utilizzata per la trattazione che seguirà prevede però che

l'impulso abbia una origine sia meccanica che elettromagnetica per una particella carica. Possiamo scrivere la legge di conservazione dell'impulso come:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_{\text{mecc}} + \frac{dG}{dt} &= 0 \quad \text{o equivalentemente} \\ \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_{\text{mecc}} &= \int_{\text{vol}} \left(\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B}\right) d^3x \end{aligned} \quad (3.17)$$

dove il termine integrato nella seconda equazione è definito come *densità di forza di Lorentz*. Si noti che l'integrale è esteso a tutto il volume della particella, poiché i campi integrati sono campi totali.

Al fine di far assumere la forma dell'equazione del moto alla 3.17, è necessario scomporre i campi nelle componenti esterne e in quelle di auto-campi, questi ultimi dovuti alla densità di carica ρ ed alla corrente \mathbf{J} caratteristici della particella:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{est}} + \mathbf{E}_{\text{auto}} \\ \mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{est}} + \mathbf{B}_{\text{auto}} \end{cases}$$

Scrivendo quindi l'equazione di Newton come

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} \equiv \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_{\text{mecc}} + \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_{\text{em}} = \mathbf{F}_{\text{est}} \quad (3.18)$$

si possono esplicitare i termini di forza esterna

$$\mathbf{F}_{\text{est}} = \int_{\text{vol}} \left(\rho \mathbf{E}_{\text{est}} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B}_{\text{est}}\right) d^3x \quad (3.19)$$

ed il contributo elettromagnetico

$$\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_{\text{em}} = - \int_{\text{vol}} \left(\rho \mathbf{E}_{\text{auto}} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B}_{\text{auto}}\right) d^3x \quad (3.20)$$

Si noti che se la variazione dei campi esterni della 3.19 è molto piccola all'interno del volume della particella, a questo punto la forza esterna diventa banalmente la forza di Lorentz agente su una particella di carica q in moto a velocità \mathbf{v} .

Dall'equazione 3.20 è possibile calcolare l'auto-forza, imponendo un modello di carica, che per semplicità avrà le seguenti condizioni:

- la particella deve essere istantaneamente in quiete;
- la distribuzione di carica deve essere a simmetria sferica e indeformabile;

Si otterranno quindi risultati non relativistici e non covarianti per le equazioni di Lorentz. Per una particella istantaneamente in quiete la 3.20 diventa:

$$\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_{\text{em}} = - \int_{\text{vol}} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}_{\text{auto}}(\mathbf{x}, t) d^3x \quad (3.21)$$

L'auto-campo può quindi essere espresso in termini degli auto-potenziali \mathbf{A} e Φ , dando

$$\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_{\text{em}} = \int_{\text{vol}} \rho(\mathbf{x}, t) \left[\nabla \Phi(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] d^3x \quad (3.22)$$

I potenziali, che possono essere scritti nella forma 1.26 sono dati da:

$$A^\alpha(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int [J^\alpha(\mathbf{x}', t')]_{\text{rit}} \frac{d^3x'}{R} \quad \text{con} \quad \mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}' \quad (3.23)$$

dove J^α è stato precedentemente definito nella 1.30.

Si presti particolare attenzione alla 4-corrente definita nella 3.23. Possiamo fare alcune considerazioni su di essa:

- Il termine J^α può anche essere definito come la densità di corrente di una carica in moto, come è stato definito nella 2.1. I potenziali risultanti sono infatti esprimibili come i *potenziali di Liénard-Wiechert* definiti nella 2.7;
- La 4-corrente viene calcolata in un istante t' ritardato, in quando esiste una differenza infinitesima dal tempo t , dell'ordine $\Delta t \sim r/c$ (con r dimensione lineare della particella) in cui la radiazione elettromagnetica viene emessa, e a seguito si “accende” la 4-corrente.

Per una distribuzione di carica fortemente localizzata, l'intervallo di “attivazione” non è realmente infinitesimo, ma comunque molto breve, tanto che il moto della particella viene modificato molto poco. È quindi possibile sviluppare in serie di Taylor attorno al tempo $t' = t$. Poiché il calcolo viene eseguito al tempo $t' = t - \frac{R}{c}$, ogni quantità ritardata ammette il seguente sviluppo:

$$[\dots]_{\text{rit}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{R}{c}\right)^n \frac{\partial^n [\dots]_{t'=t}}{\partial t^n} \quad (3.24)$$

Con tale sviluppo per la 4-corrente ritardata nella 3.23 la 3.22 diventa

$$\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_{\text{em}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!c^n} \int d^3x \int d^3x' \rho(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[\rho(\mathbf{x}', t) \nabla R^{n-1} + \frac{R^{n-1}}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right]$$

Considerando il termine della parte di potenziale scalare per $n = 0$, esso è proporzionale a

$$\int d^3x \int d^3x' \rho(\mathbf{x}, t) \rho(\mathbf{x}', t) \nabla \frac{1}{R}$$

che è semplicemente l'auto-forza elettrostatica; essa per distribuzioni di carica a simmetria sferica si annulla. Il termine $n = 1$ è identicamente nullo, quindi il primo contributo diverso da zero della parte del potenziale scalare viene dal termine con $n = 2$. Possiamo cambiare l'indice di sommatoria in modo da ottenere:

$$\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_{\text{em}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!c^{n+2}} \int d^3x \int d^3x' \rho(\mathbf{x}, t) R^{n-1} \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} \{\dots\} \quad (3.25)$$

dove

$$\{\dots\} = \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}', t) \frac{\nabla R^{n+1}}{(n+1)(n+2)R^{n-1}}$$

Sfruttando l'equazione di continuità per le densità di carica e di corrente, la parentesi graffa della 3.25 può essere scritta come

$$\{\dots\} = \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) - \frac{\mathbf{R}}{n+2} \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$$

Possiamo proseguire col calcolo, integrando per parti il secondo termine della 3.25

$$\begin{aligned} - \int d^3x' R^{n-1} \frac{\mathbf{R}}{n+2} \nabla' \cdot \mathbf{J} &= \frac{1}{n+2} \int d^3x' (\mathbf{J} \cdot \nabla') R^{n-1} \mathbf{R} \\ &= -\frac{1}{n+2} \int d^3x' R^{n-1} \left(\mathbf{J} + (n-1) \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{R}}{R^2} \mathbf{R} \right) \end{aligned}$$

ciò significa che effettivamente la parentesi graffa della 3.25 è

$$\{ \dots \} = \left(\frac{n+1}{n+2} \right) \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) - \left(\frac{n-1}{n+2} \right) \frac{(\mathbf{J} \cdot \mathbf{R}) \mathbf{R}}{R^2} \quad (3.26)$$

Per una distribuzione rigida di carica la corrente è

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}', t) = \rho(\mathbf{x}', t) \mathbf{v}(t)$$

Inoltre, se la distribuzione stessa è a simmetria sferica, non esistono direzioni rilevanti per il problema, se non la direzione della velocità $\mathbf{v}(t)$. Il risultato dell'integrazione sulle variabili d^3x e d^3x' è rilevante soltanto lungo la componente della 3.26 nella direzione di $\mathbf{v}(t)$. La 3.26 quindi è equivalente a:

$$\{ \dots \} = \rho(\mathbf{x}', t) \mathbf{v}(t) \left[\frac{n+1}{n+2} - \frac{n-1}{n+2} \left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{Rv} \right)^2 \right]$$

Nessuna delle direzioni di \mathbf{R} è privilegiata, hanno tutte la stessa probabilità. Ciò significa che il secondo termine nell'espressione appena scritta può essere sostituito dal suo valor medio, che è pari a $\frac{1}{3}$. Si ottiene quindi la seguente semplice forma finale per le parentesi graffe:

$$\{ \dots \} = \frac{2}{3} \rho(\mathbf{x}', t) \mathbf{v}(t) \quad (3.27)$$

Sostituendo quindi l'equazione appena ricavata, se sostituita nella 3.25 si ottiene una nuova equazione per l'auto-forza (si noti che per $n \geq 4$ sono stati trascurati i termini non lineari nelle derivate temporali di \mathbf{v}):

$$\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)_{\text{em}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{c^{n+2}} \frac{2}{3n!} \frac{\partial^{n+1} \mathbf{v}}{\partial t^{n+1}} \int d^3x' \int d^3x \rho(\mathbf{x}') R^{n-1} \rho(\mathbf{x}) \quad (3.28)$$

A questo punto per proseguire con il calcolo è necessario introdurre le trasformate di Fourier nel tempo per la forza esterna \mathbf{F}_{est} , per la velocità \mathbf{v} e per l'auto-forza \mathbf{F}_{auto} . Definiamo dapprima la trasformata di Fourier per $\mathbf{v}(\omega)$ come:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathbf{v}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Se quindi $(d\mathbf{p}/dt)_{\text{mecc}} = m_0(d\mathbf{v}/dt)$, la trasformata di Fourier per la forza definita dall'equazione 3.17 è

$$-i\omega M(\omega) \mathbf{v}(\omega) = \mathbf{F}_{\text{est}}(\omega) \quad (3.29)$$

dove

$$M(\omega) = m_0 + \frac{2}{3c^2} \sum_0^{\infty} \frac{(i\omega)^n}{n!c^n} \int d^3x \int d^3x' \rho(\mathbf{x}) R^{n-1} \rho(\mathbf{x}')$$

Nella sommatoria su n si può riconoscere la funzione di Green uscente $e^{i\omega R/c}/R$ per l'equazione d'onda. Possiamo quindi scrivere

$$M(\omega) = m_0 + \frac{2}{3c^2} \int d^3x \int d^3x' \rho(\mathbf{x}) \frac{e^{i\omega R/c}}{R} \rho(\mathbf{x}') \quad (3.30)$$

Per alcune densità di carica specifiche è possibile integrare esattamente il membro destro della 3.30, altrimenti si può ottenere una stima dalla media di $e^{i\omega R/c}/R$, ricordando che si è imposta la condizione di simmetria sferica.

Alternativamente, è possibile introdurre la trasformata di Fourier *spaziale* della densità di carica ed ottenere un'espressione differente per $M(\omega)$, cioè una “rappresentazione spettrale”. Definiamo il fattore di forma $f(\mathbf{k})$ tramite la trasformata in tre dimensioni

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{q}{(2\pi)^3} \int d^3k f(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (3.31)$$

dove q è la carica totale. Se $f(\mathbf{k}) = 1$ allora la carica sarà puntiforme. Sostituendo ed integrando, la 3.30 diviene

$$M(\omega) = m_0 + \frac{q^2}{3\pi^2 c^2} \int d^3k \frac{|f(\mathbf{k})|^2}{k^2 - (\frac{\omega}{c})^2} \quad (3.32)$$

dove ω è un numero complesso con una piccola parte immaginaria positiva.

Le equazioni 3.29 e 3.32 sono effettivamente soluzioni per il moto classico non relativistico di una particella carica estesa, comprendenti la reazione di radiazione. Non sono però complete nella loro descrizione della soluzione, in quanto in alcuni passaggi del calcolo sono state fatte approssimazioni di termini non lineari (per ottenere l'equazione 3.28) e si è assunto che la simmetria di carica fosse sferica ed immutabile durante il moto della carica.

L'equazione 3.32, studiata nel limite $\omega \rightarrow 0$, corrisponde alla massa fisica m della particella ($M(\omega) = m$), inclusiva dei contributi degli auto-campi:

$$m = m_0 + \frac{e^2}{3\pi^2 c^2} \int d^3k \frac{|f(\mathbf{k})|^2}{k^2} \quad (3.33)$$

da cui possiamo esprimere la massa effettiva $M(\omega)$ in termini di quest'ultima:

$$M(\omega) = m + \frac{q^2 \omega^2}{3\pi^2 c^4} \int d^3k \frac{|f(\mathbf{k})|^2}{k^2 [k^2 - (\frac{\omega}{c})^2]} \quad (3.34)$$

Conclusione

Il modello classico della reazione di radiazione è quindi un efficace strumento per lo studio del moto accelerato di cariche puntiformi, tuttavia presenta forti limitazioni pratiche dovute alle approssimazioni e alle condizioni esterne poste ai sistemi fisici in esame. I risultati previsti dalla teoria classica sono però applicabili, almeno in parte, ai sistemi di acceleratori di particelle: le equazioni di Abraham-Lorentz e le equazioni del moto modificate dalla reazione di radiazione permettono di fornire una stima piuttosto accurata della dissipazione di energia, nei sistemi di particelle fortemente accelerati.

Le soluzioni classiche del problema, trattate in larga misura nel capitolo 3, sono solamente soluzioni “parziali” del problema, anche se è necessario comunque specificare che le teorie di campo quantistiche, in particolare la QED, hanno fornito risultati teorici ancora più precisi sulle correzioni degli effetti radiativi negli esperimenti atomici.

In conclusione, il problema fisico della reazione di radiazione rimane tuttora privo di una soluzione completa dal punto di vista classico. I fisici moderni non sono più così interessati allo studio del modello, soprattutto perché a partire dagli anni 50 del novecento, a seguito del perfezionamento delle teorie di campo quantistico, il problema fu declassato come problema minore della fisica particellare, per lasciare spazio ad altre ricerche nella branca della fisica nucleare e subnucleare.

Appendice A

A.1 Funzione di Green ritardata

La *funzione di Green* associata ad un generico operatore L_x è definita come la soluzione di

$$L_x G(x, y) = \delta(x - y) \quad (\text{A.1})$$

Sfrutteremo la definizione di funzione di Green e le sue proprietà per ottenere una funzione di Green *ritardata*, molto utile nello studio di fenomeni radiativi.

Immaginiamo di avere dei campi elettromagnetici $F^{\alpha\beta}$ generati da una sorgente esterna J^α (nello spaziotempo di Minkowski). Tali campi soddisfano le equazioni di Maxwell non omogenee

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta$$

che possono essere scritte sotto forma dei potenziali che descrivono i campi, quindi possiamo esprimere l'equazione di cui sopra come

$$\square A^\beta - \partial^\beta(\partial_\alpha A^\alpha) = \frac{4\pi}{c} J^\beta$$

dove $\square \equiv \partial_\alpha \partial^\alpha$ è l'operatore di d'Alambert, e J^β sostanzialmente rappresenta la linea di mondo della particella.

Se i potenziali soddisfano la condizione di Lorentz $\partial_\alpha A^\alpha = 0$ allora questi sono soluzione dell'equazione d'onda 4-dimensionale

$$\square A^\beta = \frac{4\pi}{c} J^\beta \quad (\text{A.2})$$

La soluzione dell'equazione [A.2](#) può essere ricavata cercando la *funzione di Green* $D(x, x')$ che soddisfi la condizione

$$\square_x D(x, x') = \delta^{(4)}(x - x') \quad (\text{A.3})$$

dove $\delta^{(4)}(x - x') = \delta(x_0 - x'_0)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ è la funzione delta di Dirac 4-dimensionale, che da un punto di vista prettamente fisico rappresenta un impulso localizzato in un determinato punto dello spaziotempo. Se non sono presenti superfici di contorno, la funzione di Green dipende solo dalla differenza 4-vettoriale $z^\alpha = x^\alpha - x'^\alpha$, quindi $D(x, x') = D(x - x') = D(z)$ e la [A.3](#) diventa

$$\square_z D(z) = \delta^{(4)}(z)$$

Sfruttiamo ora la trasformata di Fourier per effettuare un passaggio dallo spazio delle coordinate allo spazio dei numeri d'onda. La trasformata di Fourier $\tilde{D}(k)$ della funzione di Green è definita da

$$D(z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \tilde{D}(k) e^{-ik \cdot z} \quad (\text{A.4})$$

dove $k \cdot z = k_0 z_0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{z}$. Poiché la rappresentazione della funzione $\delta^{(4)}(z)$ è definita come:

$$\delta^{(4)}(z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik \cdot z} \quad (\text{A.5})$$

si ricava che la funzione di Green nello spazio k è

$$\tilde{D}(k) = -\frac{1}{k \cdot k} \quad (\text{A.6})$$

e la funzione di Green $D(z)$ diviene

$$D(z) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ik \cdot z}}{k \cdot k} \quad (\text{A.7})$$

Poiché l'integrando della [A.7](#) ha delle singolarità, l'espressione di $D(z)$ è ambigua, ed acquista un senso ben definito andando a studiare opportunamente le singolarità. Integriamo innanzitutto su dk_0

$$D(z) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - \kappa^2} \quad \text{dove } \kappa = |\mathbf{k}| \quad (\text{A.8})$$

Considerando la variabile k_0 come complessa, è possibile svolgere l'integrale come un integrale di linea nel piano k_0 , sfruttando il teorema dei residui. L'integrando possiede due poli semplici per $k_0 = \pm\kappa$. Spostandoli opportunamente sotto o sopra la linea d'integrazione è possibile svolgere l'integrazione in modi diversi, ottenendo diverse funzioni di Green con differenti comportamenti. I cammini di integrazione aperti possono essere chiusi all'infinito, mediante un semicerchio nel semipiano superiore od inferiore, in funzione del segno di z_0 (ad esempio, per $z_0 > 0$ l'esponenziale $e^{-ik_0 z_0}$ tende ad infinito nel semipiano superiore; il percorso quindi deve essere chiuso nel semipiano inferiore per poter utilizzare il teorema dei residui).

Immaginiamo quindi di avere un cammino di integrazione γ , tale per cui se $z'_0 < 0$ l'integrale è nullo, e quindi non deve includere alcuna singolarità quando il cammino viene chiuso con il semicerchio (infinito) nel semipiano superiore. Allora se $z'_0 > 0$ l'integrale va fatto su un percorso chiuso con il semicerchio nel semipiano inferiore e diviene

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} dk_0 \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - \kappa^2} &= -2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - \kappa^2} \right) \\ &= -\frac{2\pi}{\kappa} \sin(\kappa z_0) \end{aligned}$$

Allora la funzione di Green [A.8](#) può essere scritta come

$$D_r(z) = \frac{\theta(z_0)}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \frac{\sin(\kappa z_0)}{\kappa}$$

dove

$$\theta(z_0) = \begin{cases} 0 & \text{se } z_0 < 0 \\ 1 & \text{se } z_0 > 0 \end{cases}$$

Integrando sulle coordinate angolari di \mathbf{k} si ottiene

$$D(z) = \frac{\theta(z_0)}{(2\pi)^2 R} \int_0^\infty d\kappa \sin(\kappa R) \sin(\kappa z) \quad (\text{A.9})$$

dove $R = |\mathbf{z}| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ è la distanza spaziale tra x^α e x'^α . Attraverso alcune manipolazioni matematiche la A.9 può essere scritta nella forma

$$D(z) = \frac{\theta(z_0)}{8\pi^2 R} \int_{-\infty}^\infty d\kappa [e^{i(z_0-R)\kappa} - e^{i(z_0+R)\kappa}]$$

Dato che $z_0 > 0$ e $R > 0$, il secondo integrale è sempre nullo, e quindi reintroducendo le variabili x e x' si ottiene la funzione di Green lungo il cammino di integrazione γ

$$D_r(x - x') = \frac{\theta(x_0 - x'_0)}{4\pi R} \delta(x_0 - x'_0 - R) \quad (\text{A.10})$$

La funzione di Green così ottenuta viene chiamata *funzione di Green ritardata*, in quanto nello spazio 4-dimensionale il tempo x'_0 della sorgente è sempre antecedente all'istante x_0 del punto di osservazione.

A.2 Applicazione della formula di Larmor relativistica

L'applicazione più comune per la formula 2.23, espressione della potenza irradiata, è negli acceleratori di particelle cariche. Le perdite di energie dovute all'irraggiamento possono ad arrivare a limitare fortemente la soglia massima di energia raggiungibile da un fascio di particelle cariche. Per una forza esterna applicata ad un ipotetico fascio (ad una determinata velocità di variazione della quantità di moto) la potenza irradiata da quest'ultimo è dato dalla formula 2.22, ed è proporzionale all'inverso del quadrato della massa delle particelle componenti il fascio. Basti pensare che per fasci di particelle come l'elettrone ($m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg), gli effetti di irraggiamento sono molto più comuni che per fasci con particelle come il protone ($m_p = 1.673 \times 10^{-27}$ kg, circa mille ordini di grandezza di differenza).

Per semplicità, consideriamo un fascio di elettroni ($e = 1.602 \times 10^{-19}$ C) in un acceleratore lineare, in cui il moto avviene lungo una sola direzione. Dall'equazione 2.22 la potenza irradiata da una singola particella risulta:

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left(\frac{dp}{dt} \right)^2 \quad (\text{A.11})$$

Possiamo quindi esprimere la velocità di variazione della quantità di moto come la variazione di energia per unità di lunghezza:

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left(\frac{dE}{dx} \right)^2 \quad (\text{A.12})$$

In un moto rettilineo uniformemente accelerato la potenza irradiata dipende solo dalle forze esterne, le quali determinano la velocità di variazione dell'energia della particella in funzione della distanza. La potenza *non dipende* quindi da energia o quantità di moto istantanee della particella. Il rapporto tra la potenza irradiata e quella fornita dall'esterno quindi è:

$$\begin{aligned} \frac{P}{(dE/dt)} &= \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \frac{1}{v} \left(\frac{dE}{dx} \right) \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} \\ &\xrightarrow{\beta \rightarrow 1} \frac{2}{3} \left(\frac{e}{mc^2} \right)^2 \left(\frac{dE}{dx} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

dove il limite imposto $\beta \rightarrow 1$ è valido solamente per particelle relativistiche. L'equazione A.13 mostra che la perdita di energia per radiazione in un acceleratore lineare è trascurabile fintanto che il guadagno energetico è dell'ordine di $mc^2 = 0.511\text{eV}$, su distanze di $e^2/mc^2 = 2.82 \times 10^{-13}\text{cm}$. I guadagni reali di energia sono tipicamente minori di 50MeV/m , quindi le perdite per radiazione sono completamente trascurabili negli acceleratori lineari, sia per gli elettroni che per le particelle cariche più pesanti.

Se invece ci poniamo in un acceleratore circolare (ad esempio il sincrotrone) le condizioni sulla quantità di moto e sull'energia cambiano: a causa del moto di rivoluzione intorno all'orbita, la quantità di moto \mathbf{p} varia rapidamente in direzione, mentre la variazione energetica per ogni giro è piccola, cioè:

$$\left| \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \right| = \gamma\omega|\mathbf{p}| \gg \frac{1}{c} \frac{dE}{d\tau} \quad (\text{A.14})$$

da cui è possibile scrivere la potenza irradiata 2.22 nella forma:

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \gamma^2 \omega^2 |\mathbf{p}|^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2 c}{\rho^2} \beta^4 \gamma^4 \quad (\text{A.15})$$

in cui è stata usata la definizione $\omega = (c\beta)/\rho$ dove ρ sta ad indicare il raggio dell'orbita. La perdita di energia δE dovuta alla radiazione, per ogni rivoluzione completa è quindi:

$$\delta E = \frac{2\pi\rho}{c\beta} P = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{\rho} \beta^3 \gamma^4 \quad (\text{A.16})$$

In realtà, il termine $1/\rho$ corrisponde a $1/2\pi$ volte l'integrale chiuso sulla traiettoria circolare $[1/\rho(s)]^2$. Per elettroni ad alte energie ($\beta \simeq 1$) la A.16 assume il valore

$$\delta E(\text{MeV}) = 8.85 \times 10^{-2} \frac{[E(\text{GeV})]^4}{\rho(\text{m})} \quad (\text{A.17})$$

Nei primi sincrotroni per elettroni i parametri $\rho \simeq 1\text{ m}$ ed $E_{\text{MAX}} \simeq 0.3\text{ GeV}$ portano ad una $\delta E_{\text{MAX}} \simeq 1\text{ keV}$, che è una perdita di energia considerevole rispetto al guadagno netto di alcuni kilovolt (kV) per giro. Per energie più alte del GeV, il limite sulla potenza della radiofrequenza necessaria per superare le perdite per irraggiamento diventa un parametro molto importante per la progettazione degli acceleratori.

La potenza irradiata negli acceleratori circolari di elettroni può anche essere espressa numericamente come

$$P(W) = 10^6 \delta E(\text{MeV})J(\text{A}) \quad (\text{A.18})$$

dove J è la corrente del fascio circolante. L'equazione [A.18](#) è valida nel caso in cui l'emissione della radiazione da parte di singoli elettroni del fascio circolante sia incoerente (le onde emesse non siano quindi in *fase*).

Bibliografia

- [1] M. Gasperini. *Manuale di Relatività Ristretta*. 1st. Springer, 2010. ISBN: 978-88-470-1604-0.
- [2] John David Jackson. *Classical electrodynamics*. 3rd ed. Wiley, 1999. ISBN: 9780471309321,047130932X.
- [3] Kurt Lechner. *Elettrodinamica classica: Teoria e applicazioni*. UNITEXT. Springer Milan, 2014. ISBN: 978-88-470-5210-9,978-88-470-5211-6.
- [4] C. Voci P. Mazzoldi M. Nigro. *Fisica Vol. II Elettromagnetismo Onde*. 2nd. EdiSES, 1998.