

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

SPAZIO-TEMPO DI DE SITTER

Relatore:
Prof. Roberto Balbinot

Presentata da:
Simone Cicolini

Anno Accademico 2016/2017

Indice

1	Cenni di Relatività Generale	4
1.1	Il Principio di Equivalenza	4
1.2	Particelle test in caduta libera	5
1.3	Il limite Newtoniano	8
1.4	Derivata Covariante	9
1.5	Il Tensore di Riemann	10
1.6	Il Tensore Energia-Impulso	12
1.7	Equazioni di Einstein	12
2	La soluzione di Schwarzschild	16
2.1	La metrica di Schwarzschild	16
2.2	Il problema delle singolarità	18
2.3	Estensione di Kruskal	22
3	La soluzione di de Sitter	26
3.1	Introduzione storica	26
3.2	La soluzione di de Sitter	27

Sommario

La presente tesi è un elaborato sulla teoria della Relatività Generale. Nel capitolo 1 si introduce la teoria, partendo dai difetti della teoria della Relatività Ristretta e dal Principio di Equivalenza, l'essenza della Relatività Generale, fino ad arrivare alla struttura delle equazioni di campo di Einstein. Nei capitoli 2 e 3 evidenzieremo come le ipotesi di simmetria sferica ci condurranno a due importanti soluzioni delle equazioni di Einstein, dovute a Schwarzschild e a de Sitter. Nel capitolo 2 si studierà la soluzione di Schwarzschild, dando particolare attenzione al legame tra le singolarità della soluzione e la scelta del sistema di coordinate. Il capitolo 2 farà da guida per la costruzione della soluzione di de Sitter in coordinate statiche, che verrà trattata nel capitolo 3 dopo una breve introduzione alla costante cosmologica.

1 Cenni di Relatività Generale

1.1 Il Principio di Equivalenza

La teoria della Relatività Ristretta è basata sui seguenti postulati:

1. *Le leggi della fisica sono le stesse per tutti i sistemi di riferimento inerziali.*
2. *La velocità della luce nel vuoto è un invariante.*

Il significato del primo principio è che ogni osservatore inerziale deve poter essere in grado di scrivere le equazioni della fisica nella stessa forma. Questi due principi formano un framework teorico a cui devono sottostare le teorie fisiche, il cui significato matematico è che le leggi della fisica devono coinvolgere solo quantità tensoriali sotto il gruppo di Lorentz. La teoria della Relatività Ristretta ha almeno due problemi

- privilegia una classe particolare di sistemi di riferimento (quelli inerziali) senza dare un preciso significato di sistema inerziale
- la gravità è esclusa dal quadro teorico imposto dalla teoria (teoria di Newton incompatibile)

La teoria della Relatività Generale risolve questi problemi basandosi sul Principio di Equivalenza, che a sua volta è basato sull'affermazione

Per tutti gli oggetti fisici, la massa gravitazionale m_g è uguale alla massa inerziale m_i .

Tale affermazione è stata dimostrata da Galileo nel famoso esperimento della torre di Pisa. Consideriamo una particella soggetta solamente a un campo gravitazionale omogeneo e costante (le altre interazioni fondamentali essendo governate da cariche di segno opposte possiamo annullarle)

$$m_g \vec{g} = m_i \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{m_g}{m_i} \vec{g} \quad (1.1.1)$$

Per cui se l'uguaglianza tra massa inerziale e massa gravitazionale è vera tutti i corpi subiranno la stessa accelerazione indipendentemente dalla loro massa, forma o composizione chimica. Einstein così intuì che per un osservatore all'interno di un ascensore in caduta libera non esiste nessun esperimento locale in grado di distinguere se la particella non è realmente soggetta a un'attrazione gravitazionale oppure se è in caduta libera, poichè l'osservatore subisce la stessa accelerazione della particella. Questo ci permette di identificare l'osservatore in caduta libera come il vero osservatore inerziale. Per tradurre matematicamente questa intuizione riscriviamo la (1.1.1) come

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{g} \quad (1.1.2)$$

Operando la seguente trasformazione non lineare

$$\vec{x}' = \vec{x} - \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \quad t' = t \quad (1.1.3)$$

si ottiene

$$\frac{d^2\vec{x}'}{dt'^2} = 0 \quad (1.1.4)$$

Abbiamo così trovato un sistema di coordinate che elimina il campo gravitazionale. A questo punto è importante sottolineare che le forze di tipo non gravitazionale possono essere rese nulle solo per oggetti puntiformi. Ad esempio considerando un regolo il cui centro di massa è in caduta libera, le forze elettromagnetiche e nucleari mantengono il regolo di una lunghezza fissa, e quindi le sue estremità non sono in caduta libera; così il sistema è inerziale solamente lungo la traiettoria del centro di massa. Sebbene matematicamente la nostra definizione di sistema inerziale vale solamente in un punto P , fisicamente possiamo assumere che il sistema inerziale sia definito in un intorno di P entro il quale gli strumenti di misura non sono sensibili alla presenza di gravità. Adesso possiamo formulare il Principio di Equivalenza

Per ogni punto P dello spazio tempo o più propriamente per ogni evento, è possibile scegliere un sistema di riferimento detto localmente inerziale tale che in un intorno sufficientemente piccolo di P le leggi della fisica sono quelle della relatività ristretta, ossia si è in assenza di gravità.

Un altro principio guida in Relatività Generale è il Principio di Covarianza Generale:

Un'equazione della fisica è vera in un arbitrario campo gravitazionale se

- L'equazione è vera in assenza di gravità, cioè obbedisce alle leggi della Relatività Ristretta.
- L'equazione è generalmente covariante, cioè lascia invariata la sua forma sotto generiche trasformazioni delle coordinate.

Praticamente ci suggerisce come descrivere gli effetti della gravità e discende dal Principio di Equivalenza stesso: quest'ultimo ci garantisce che ad ogni punto possiamo trovare un sistema locale di coordinate in cui la gravità è assente, in tale sistema si scrivono le equazioni della fisica secondo la Relatività Ristretta, e una volta rese generalmente covarianti saranno vere anche in un campo gravitazionale.

1.2 Particelle test in caduta libera

La domanda che sorge naturale ora è come la gravità influenza il moto delle particelle. La risposta scende dal Principio di Equivalenza stesso. Consideriamo una particella

soggetta solamente all'attrazione gravitazionale, il Principio di Equivalenza ci assicura che esiste un sistema di coordinate ξ^α in caduta libera *localmente* inerziale che rileverà la particella essere soggetta ad accelerazione nulla

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (1.2.1)$$

Consideriamo adesso un *generale* sistema di coordinate x^μ , per cui (1.2.1) diventa

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \\ &= \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Sfruttando la relazione

$$\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} = \delta_\mu^\lambda \quad (1.2.3)$$

possiamo scrivere l'equazione del moto in un generico sistema di coordinate in forma più compatta

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 \quad (1.2.4)$$

dove il punto indica la derivata rispetto al tempo proprio e abbiamo definito la *connessione affine* $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (1.2.5)$$

Il tempo proprio del sistema in caduta libera è dato da

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (1.2.6)$$

che può essere espresso anche in un qualsiasi sistema di riferimento

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.2.7)$$

dove abbiamo definito il tensore metrico $g_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \quad (1.2.8)$$

Lo stesso trattamento può essere usato per un fotone giungendo a conclusioni analoghe, con la differenza che τ va sostituito con un altro parametro, perchè per la luce non ha senso parlare di tempo proprio poichè $d\tau = 0$.

L'equazione (1.2.4) mostra che la connessione affine può essere interpretata come l'effetto della forza gravitazionale, infatti compare solo nella descrizione del moto della

particella da parte di un osservatore generico che osserverà la particella essere soggetta all'accelerazione gravitazionale, mentre un osservatore in caduta libera con la particella, in accordo col Principio di Equivalenza, la vedrà muoversi di moto rettilineo uniforme secondo la (1.2.1).¹ Esiste un'importante relazione tra la connessione affine e il tensore metrico. Infatti derivando $g_{\mu\nu}$ rispetto a x^λ

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} &= \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \\ &= \Gamma_{\lambda\mu}^\rho \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \eta_{\alpha\beta} \\ &= \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu}\end{aligned}\tag{1.2.9}$$

Sommando a questa equazione se stessa invertendo μ e λ e sottraendo se stessa invertendo ν e λ si avrà

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} &= g_{\kappa\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa + g_{\kappa\mu} \Gamma_{\lambda\nu}^\kappa \\ &\quad + g_{\kappa\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa + g_{\kappa\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\kappa \\ &\quad - g_{\kappa\lambda} \Gamma_{\nu\mu}^\kappa - g_{\kappa\mu} \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa \\ &= 2g_{\kappa\nu} \Gamma_{\lambda\nu}^\kappa\end{aligned}\tag{1.2.10}$$

Dove abbiamo usato la simmetria di $g_{\mu\nu}$ e di $\Gamma_{\lambda\mu}^\kappa$ per scambi degli indici μ e ν . Moltiplicando per l'inversa della metrica $g^{\nu\sigma}$ otteniamo infine

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right)\tag{1.2.11}$$

Questa equazione mostra che $g_{\mu\nu}$ è il potenziale gravitazionale, ossia le sue derivate determinano la connessione affine $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$.

Concludiamo osservando che al contrario di quanto la notazione potrebbe far credere, $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ non è un tensore. Passando da x^μ a un altro sistema di coordinate x'^μ

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu}^{\prime\lambda} &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \\ &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \right) \\ &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\tau \partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \right)\end{aligned}\tag{1.2.12}$$

¹Chiaramente nulla vieta all'osservatore in caduta libera di usare un sistema di coordinate tale che $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ sia diverso da zero, ma il Principio di Equivalenza ci assicura che per lui esiste sempre un sistema di coordinate locale ξ^α tale che $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$ ad ogni punto della traiettoria. Tale sistema di riferimento locale è chiamato *Gaussiano Normale*.

Quindi $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ si trasforma come

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\tau\sigma}^{\rho} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \quad (1.2.13)$$

Il primo termine è ciò che ci aspetteremmo se la connessione affine fosse un tensore, quindi la presenza del secondo termine distrugge le proprietà tensoriali.

1.3 Il limite Newtoniano

Studiamo ora il limite newtoniano, ovvero limite di campo debole e velocità in gioco molto minori della velocità della luce, in cui ci aspettiamo di recuperare la legge di gravitazione di Newton. Infatti la gravità di Newton descrive con grande precisione il moto dei corpi celesti, per cui affinché la teoria della Relatività Generale sia una buona teoria fisica deve essere compatibile con la teoria di Newton in qualche limite. Più concretamente tale limite significa considerare metriche statiche molto vicine alla metrica di Minkowsky

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu} \quad (1.3.1)$$

e velocità spaziale della particella

$$\vec{u} = \epsilon \vec{v} \quad (1.3.2)$$

dove $0 < \epsilon < 1$, in modo che possiamo espandere in ϵ e troncare al primo ordine l'equazione del moto (1.2.4). Quindi la connessione affine è data approssimativamente da

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} (g_{\mu\alpha,\nu} + g_{\nu\alpha,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}) \\ &= \frac{\epsilon}{2} g^{\lambda\alpha} (h_{\mu\alpha,\nu} + h_{\nu\alpha,\mu} - h_{\mu\nu,\alpha}) \\ &= \frac{\epsilon}{2} \eta^{\lambda\alpha} (\eta_{\mu\alpha,\nu} + \eta_{\nu\alpha,\mu} - \eta_{\mu\nu,\alpha}) + o(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

mentre la quadri-velocità

$$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = (1 + o(\epsilon^2), \epsilon \vec{v} + o(\epsilon^2)) = (1, \vec{0}) + \epsilon(0, \frac{d\vec{x}}{dt}) + o(\epsilon^2) \quad (1.3.4)$$

quindi

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} = \epsilon(0, \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}) + o(\epsilon^2) \quad (1.3.5)$$

Ricordando che $\eta_{\mu\nu}$ è diagonale e che le derivate rispetto al tempo della metrica sono nulle, trascurando i termini quadratici in epsilon l'equazione del moto diventa

$$0 = \frac{d^2 x^{\lambda}}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \simeq \epsilon \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{00}^i \simeq \epsilon \frac{d^2 x^i}{dt^2} - \frac{\epsilon}{2} \eta^{ii} h_{00,i} \quad (1.3.6)$$

sebbene la notazione può trarre in inganno, nell'ultima espressione non è intesa una sommatoria sull'indice i . Giunti a questa espressione troncata rimandando $\epsilon \rightarrow 1$ otteniamo

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\nabla \frac{h_{00}}{2} \quad (1.3.7)$$

Da cui è evidente che il risultato newtoniano $d^2 \vec{x}/dt^2 = -\nabla \phi$ è recuperato se il potenziale gravitazionale vale

$$\phi = -\frac{GM}{r} = \frac{h_{00}}{2} \quad (1.3.8)$$

otteniamo così l'interessante risultato

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00} = 1 + 2\phi \quad (1.3.9)$$

La (1.3.9) sarà utile successivamente nella derivazione delle equazioni di Einstein.

1.4 Derivata Covariante

Come abbiamo visto il Principio di Covarianza Generale richiede di poter esprimere le equazioni della fisica nella stessa forma in qualsiasi sistema di riferimento. Per cui le leggi della fisica devono coinvolgere solo quantità tensoriali. Una quantità fondamentale che non si comporta come un tensore è la derivata di un tensore. Per risolvere questo problema viene introdotta la derivata covariante.² Consideriamo un vettore che si trasforma come

$$V'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu} \quad (1.4.1)$$

La cui derivata da

$$\frac{\partial V'^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial V^{\nu}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} V^{\nu} \quad (1.4.2)$$

Il secondo termine nel membro destro distrugge il comportamento tensoriale. La (1.2.13) fa vedere che la connessione affine si comporta in maniera analoga. Mettendo insieme la derivata di un vettore e la connessione affine è possibile costruire un tensore chiamato *derivata covariante*

$$V^{\mu}_{;\lambda} \equiv \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\kappa} V^{\kappa} \quad (1.4.3)$$

che si trasforma come un tensore

$$V'^{\mu}_{;\lambda} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} V^{\nu}_{;\rho} \quad (1.4.4)$$

²Oltre a non essere un tensore, in varietà curve come lo Spazio-Tempo il concetto di derivata di un vettore perde significato perchè richiede di confrontare vettori appartenenti a spazi tangenti diversi, per cui bisogna generalizzare la nozione di derivata.

Si può estendere la derivata covariante a un tensore di rango generico. La derivata covariante rispetto a x^ρ di un tensore T_{\dots} vale $\partial T_{\dots}/\partial x^\rho$ più per ogni indice controvariante μ un termine $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ moltiplicato T con μ rimpiazzato da ν , meno per ogni indice covariante λ un termine $\Gamma_{\lambda\rho}^\kappa$ moltiplicato T con λ rimpiazzato da κ . Ad esempio

$$T_{\lambda;\rho}^{\mu\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^\rho} T_\lambda^{\mu\sigma} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu T_\lambda^{\nu\sigma} + \Gamma_{\nu\rho}^\sigma T_\lambda^{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\rho}^\kappa T_\kappa^{\mu\sigma} \quad (1.4.5)$$

La derivata covariante gode di proprietà algebriche analoghe a quella derivata ordinaria (regola di Leibniz, linearità...). In un sistema di riferimento localmente inerziale $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$ e $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, per cui la derivata covariante della metrica è nulla

$$g_{\mu\nu;\lambda} = 0 \quad (1.4.6)$$

Tuttavia il risultato (1.4.6) è un'equazione tensoriale ed è indipendente dal sistema di riferimento, per cui la derivata covariante della metrica è zero in ogni sistema di riferimento. Inoltre poichè la derivata covariante in assenza di gravità si riduce alla derivata ordinaria ($\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$) abbiamo una ricetta per descrivere l'effetto della gravità su un sistema: si scrivono le equazioni appropriate per la relatività ristretta in assenza di gravità, dopodiché si sostituisce $\eta_{\mu\nu}$ con $g_{\mu\nu}$ e le derivate parziali con le derivate covarianti. In accordo col Principio di Covarianza Generale, l'equazione risultante sarà vera anche in un arbitrario campo gravitazionale.

1.5 Il Tensore di Riemann

Per scrivere le equazioni che governano il campo gravitazionale (e quindi la metrica $g_{\mu\nu}$) abbiamo bisogno di un tensore costruito a partire dal tensore metrico e dalle sue derivate. Poichè è sempre possibile trovare un sistema di coordinate in un dato punto in cui le derivate prime della metrica si annullano, se usassimo solo il tensore $g_{\mu\nu}$ e le sue derivate prime gli unici tensori che potrebbero essere formati in quel sistema di coordinate sarebbero gli stessi di quelli che possono essere formati usando solamente il tensore $g_{\mu\nu}$. Ma se una relazione tensoriale è vera in un sistema di coordinate, è vera in qualsiasi sistema di coordinate. Perciò dobbiamo usare anche le derivate seconde. Un risultato della geometria differenziale ci dice che esiste un unico tensore costruito con la metrica le sue derivate prime e seconde e che sia lineare nelle derivate seconde: il tensore di Riemann

$$R_{\mu\nu\kappa}^\lambda = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda \quad (1.5.1)$$

o anche

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}(g_{\lambda\nu;\kappa\mu} - g_{\mu\nu;\kappa\lambda} - g_{\lambda\kappa;\nu\mu} + g_{\mu\kappa;\nu\lambda}) \quad (1.5.2)$$

Un importante teorema ci dice che

il tensore di Riemann si annulla se la metrica è intrinsecamente piatta e viceversa.

L'implicazione diretta è semplice da mostrare. Se la varietà è intrinsecamente piatta esiste un sistema di coordinate in cui il tensore metrico è quello di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ e le componenti della connessione affine nulle, e poichè si annullano ovunque anche le derivate della connessione affine saranno nulle. Di conseguenza anche il tensore di Riemann sarà nullo, e l'annullarsi di un tensore è un'affermazione che non dipende dal sistema di coordinate.

Il tensore di Riemann è simmetrico rispetto allo scambio di coppie di indici

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu} \quad (1.5.3)$$

e antisimmetrico per permutazioni dispari

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu} = +R_{\mu\lambda\kappa\nu} \quad (1.5.4)$$

Inoltre

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0 \quad (1.5.5)$$

La proprietà di antisimmetria implica che il tensore di Riemann può essere contratto in un solo modo per formare un tensore di rango 2

$$R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\mu\nu\kappa}^{\nu} \quad (1.5.6)$$

Chiamato tensore di Ricci. Contraendo ancora gli indici otteniamo lo scalare di curvatura

$$R = g^{\lambda\nu} g^{\mu\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa} \quad (1.5.7)$$

Deriviamo adesso un'importante identità differenziale che soddisfa il tensore di Riemann. In un sistema di coordinate localmente inerziale in un dato punto vale

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\eta} (g_{\lambda\nu,\kappa\mu} - g_{\mu\nu,\kappa\lambda} - g_{\lambda\kappa,\mu\nu} + g_{\mu\kappa,\nu\lambda}) \quad (1.5.8)$$

Permutando ciclicamente gli indici ν , κ e η otteniamo l'identità di Bianchi

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} + R_{\lambda\mu\eta\nu;\kappa} + R_{\lambda\mu\kappa\eta;\nu} = 0 \quad (1.5.9)$$

Ma un'equazione tensoriale non dipende dal sistema di coordinate, per cui sarà vera in generale. Poichè $g_{;\eta}^{\lambda\nu} = 0$ contraendo possiamo scrivere l'identità di Bianchi in una forma equivalente utile per la derivazione delle equazioni di Einstein

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \right)_{;\mu} = 0 \quad (1.5.10)$$

1.6 Il Tensore Energia-Impulso

In Relatività Ristretta , per un sistema di N particelle il tensore energia-impulso è definito come

$$T^{\mu\nu} = \sum_{n=1}^N p_n^\mu(t) \frac{dx_n^\nu(t)}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (1.6.1)$$

o equivalentemente , per rendere più evidente la natura tensoriale di $T^{\mu\nu}$

$$T^{\mu\nu} = \sum_{n=1}^N \int d\tau p_n^\mu \frac{dx_n^\nu}{d\tau} \delta^4(x - x_n(\tau)) \quad (1.6.2)$$

dove p_n^μ indica il quadri-impulso della particella n-esima. $T^{\mu\nu}$ è simmetrico per costruzione e rappresenta il flusso della componente μ del quadri-impulso attraverso la superficie con x^ν costante. Prendendo la divergenza del tensore energia impulso abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} T^{\mu i} &= - \sum_{n=1}^N p_n^\mu(t) \frac{dx_n^i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x_n^i} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \\ &= - \sum_{n=1}^N p_n^\mu(t) \frac{\partial}{\partial t} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \\ &= - \frac{\partial}{\partial t} T^{\mu 0} + \sum_{n=1}^N \frac{dp_n^\mu(t)}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \end{aligned} \quad (1.6.3)$$

cioè

$$T^{\mu\nu}_{,\nu} = \sum_{n=1}^N \frac{dp_n^\mu(t)}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (1.6.4)$$

Se le particelle sono libere e/o si scambiano energia solo per urti otteniamo la legge di conservazione

$$T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0 \quad (1.6.5)$$

In accordo col Principio di Covarianza generale, possiamo estendere questa equazione in Relatività Generale sostituendo la derivata parziale con derivata covariante

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad (1.6.6)$$

1.7 Equazioni di Einstein

Nei paragrafi precedenti abbiamo risposto alla domanda di come descrivere l'azione della gravità su particelle test usando semplicemente il Principio di Equivalenza. Ora ci chiediamo quali sono le sorgenti della gravità e come la determiniamo dalle sorgenti stesse. Il

Principio di Equivalenza ci è ancora d'aiuto, tuttavia per rispondere a questa domanda, ovvero per determinare le equazioni di campo, le congetture sono inevitabili.

Nel paragrafo precedente abbiamo mostrato che nel limite di campo debole la componente 00 del tensore metrico si può scrivere come

$$g_{00} = 1 + 2\phi \quad (1.7.1)$$

Poichè ϕ è il potenziale gravitazionale newtoniano, può essere espresso tramite l'equazione di Poisson

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \quad (1.7.2)$$

mentre la componente 00 del tensore energia impulso per la materia non relativistica è la densità di massa

$$T_{00} = \rho \quad (1.7.3)$$

Mettendo insieme le equazioni precedenti otteniamo

$$\nabla^2 g_{00} = 8\pi G T_{00} \quad (1.7.4)$$

Tale equazione è valida solo nel caso di campi deboli e statici generati da materia non relativistica, ma ci suggerisce che l'equazione che governa campi gravitazionali arbitrari potrebbe avere la forma

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (1.7.5)$$

Dove $G_{\mu\nu}$ è un tensore incognito costruito con la metrica, e poichè si tratta di un'equazione di evoluzione devono entrare almeno anche le derivate seconde della metrica. In generale esiste più di una scelta per $G_{\mu\nu}$, ma possiamo porre delle condizioni abbastanza stringenti che permettono di determinare la sua forma. Immaginiamo di espandere $G_{\mu\nu}$ in una somma di prodotti di derivate della metrica e di assegnare a ogni termine prodotto un numero N corrispondente al numero totale N di derivate che compaiono nel termine, siccome $G_{\mu\nu}$ deve avere le dimensioni di una derivata seconda ogni termine con $N \neq 2$ sarà moltiplicato per una certa costante di dimensioni di una lunghezza elevata alla $N - 2$. Di conseguenza in presenza di campi gravitazionali di una sufficientemente ampia (piccola) scala spazio-temporale i termini con $N > 2$ ($N < 2$) diventano trascurabili. Quindi se assumiamo che le equazioni di campo sono uniformi in scala dobbiamo avere solamente i termini con $N = 2$. Elenchiamo ora quali sono le proprietà che deve soddisfare $G_{\mu\nu}$:

A) Naturalmente $G_{\mu\nu}$ deve essere un tensore.

B) Abbiamo assunto $G_{\mu\nu}$ essere o lineare nelle derivate seconde o quadratico nelle derivate prime della metrica.

C) $G_{\mu\nu}$ deve essere simmetrico perchè $T_{\mu\nu}$ è simmetrico.

D) Poichè il tensore energia impulso è covariantemente conservato, lo stesso deve valere per $G_{\mu\nu}$

$$G_{\nu;\mu}^{\mu} = 0 \quad (1.7.6)$$

E) Nel limite di campo debole $G_{\mu\nu}$ si deve ridurre a

$$G_{00} = \nabla^2 g_{00} \quad (1.7.7)$$

Le condizioni A) e B) implicano che $G_{\mu\nu}$ deve essere costituito dalle contrazioni del tensore di Riemann $R_{\mu\nu\kappa}^\lambda$. Gli unici tensori che possono essere costruiti per contrazione del tensore di Riemann sono il tensore di Ricci $R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\kappa}^\lambda$ e lo scalare di curvatura $R = R_{\mu}^\mu$. Quindi $G_{\mu\nu}$ è del tipo

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R \quad (1.7.8)$$

Con C_1 e C_2 costanti da determinare. All'inizio Einstein provò con l'equazione $R_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ però quest'ultima non soddisfa D). Infatti l'identità di Bianchi ci dice che

$$G_{\nu;\mu}^\mu = \left(\frac{C_1}{2} + C_2 \right) R_{;\nu} \quad (1.7.9)$$

la proprietà D) implica che o $C_2 = -\frac{C_1}{2}$ oppure $R_{;\nu} = 0$ ovunque. La seconda possibilità è da escludere perchè implicherebbe $\partial T_{\mu}^\mu / \partial x^\nu = 0$ ovunque, ma questo non è vero in presenza di materia disomogenea non relativistica. Giungiamo così alla conclusione

$$G_{\mu\nu} = C_1 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \quad (1.7.10)$$

Possiamo determinare la costante C_1 sfruttando E). In condizioni non relativistiche e in campo debole abbiamo le relazioni $g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu}$ e $T_{ij} \ll T_{00}$; la seconda relazione implica $G_{00} \ll G_{ij}$, ovvero usando la (1.7.10)

$$R_{ij} \simeq \frac{1}{2} R g_{ij} \quad (1.7.11)$$

mentre la prima implica che lo scalare di curvatura risulta

$$R \simeq R_{\kappa\kappa} - R_{00} \simeq \frac{3}{2} R - R_{00} \quad \Rightarrow R \simeq 2R_{00} \quad (1.7.12)$$

Mettendo insieme quest'ultima con la (1.7.10) otteniamo

$$G_{00} \simeq 2C_1 R_{00} \quad (1.7.13)$$

Poichè siamo nel limite di campo debole, per calcolare la componente 00 del tensore di Ricci possiamo limitarci a usare solo la parte lineare del tensore di Riemann, cioè

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} (g_{\lambda\nu, \kappa\mu} - g_{\mu\nu, \kappa\lambda} - g_{\lambda\kappa, \mu\nu} + g_{\mu\kappa, \nu\lambda}) \quad (1.7.14)$$

dove la virgola indica la derivata parziale fatta rispetto agli indici dopo la virgola. Inoltre nel limite di campo debole abbiamo anche una metrica statica per cui tutte le derivate rispetto al tempo si annullano, quindi

$$R_{0000} \simeq 0 \quad R_{i0j0} \simeq \frac{1}{2}g_{00,ij} \quad (1.7.15)$$

Sostituendo nella (1.7.13) abbiamo

$$G_{00} \simeq C_1 \nabla^2 g_{00} \quad (1.7.16)$$

che è compatibile con la (1.7.7) se e solo se $C_1 = 1$. Otteniamo così le equazioni di campo cercate

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (1.7.17)$$

Di queste 16 equazioni, scritte nel 1915 da Einstein, solo 10 sono indipendenti poichè $G_{\mu\nu}$ è simmetrico. Inoltre l'identità di Bianchi $G^\mu_{\nu;\mu} = 0$ riduce a $10 - 4 = 6$ il numero di gradi di libertà. La non linearità delle equazioni di Einstein si traduce fisicamente nel fatto che la sorgente determina il campo gravitazionale che determina la curvatura dello spazio-tempo e che a sua volta influisce sul moto della sorgente generando un effetto a catena.

2 La soluzione di Schwarzschild

2.1 La metrica di Schwarzschild

Poco dopo che Einstein propose le sue equazioni di campo, Karl Schwarzschild trovò una soluzione all'esterno di un corpo omogeneo a simmetria sferica, cioè dove $T_{\mu\nu} = 0$. L'ipotesi di simmetria sferica e l'ipotesi che per grandi distanze dalla sorgente la metrica approssimi quella di Minkowski sono sufficienti per fissare la metrica.

Come è noto l'elemento di linea su una 2-sfera di raggio R è dato da

$$ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (2.1.1)$$

Per cui l'ipotesi più semplice che si può fare in 4 dimensioni è che la simmetria sferica porti a un elemento di linea della forma

$$ds^2 = A(t, r)dt^2 - 2B(t, r)dtdr - C(t, r)dr^2 - D(t, r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (2.1.2)$$

dove A,B,C,D sono funzioni da determinare, ovviamente la simmetria sferica impedisce che possano dipendere dagli angoli θ e φ . Non compaiono termini misti del tipo $d\theta d\varphi$ perché altrimenti non avremmo invarianza per le trasformazioni $\theta' = \pi - \theta$ e $\varphi' = -\varphi$. Possiamo applicare una trasformazione $r \rightarrow r' = D^{\frac{1}{2}}$ in modo che la coordinata radiale assuma il significato di raggio di una sfera di area $4\pi r'^2$

$$ds^2 = A'(t, r')dt^2 - 2B'(t, r')dtdr' - C'(t, r')dr'^2 - r'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (2.1.3)$$

Tuttavia r' non rappresenta il raggio proprio della sfera perché la distanza propria tra due punti si calcola come

$$\int_{r'_1}^{r'_2} \sqrt{C'(t, r')} dr' \neq r'_2 - r'_1 \quad (2.1.4)$$

e quindi lo spazio-tempo è in generale curvo. Sarebbe comodo far sparire i termini misti $dtdr'$, per fare questo introduciamo una nuova coordinata temporale t' definita da

$$dt' = I(t, r')(A'(t, r')dt - B'(t, r')dr') \quad (2.1.5)$$

dove $I(t, r')$ è un opportuno fattore integrante che rende dt' un differenziale esatto. Con questa sostituzione otteniamo

$$ds^2 = A'^{-1}I^{-2}dt'^2 - (C' - A'^{-1}B'^2)dr'^2 - r'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (2.1.6)$$

Definendo le funzioni ν e λ come segue

$$A'^{-1}I^{-2} = e^{\nu(t', r')} \quad (2.1.7)$$

e

$$C' - A'^{-1}B'^2 = e^{\lambda(t',r')} \quad (2.1.8)$$

e omettendo gli apici possiamo scrivere la metrica nella forma

$$ds^2 = e^{\nu(t,r)} dt^2 - e^{\lambda(t,r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (2.1.9)$$

Sostituendo nel tensore di Einstein troviamo che le uniche componenti diverse da zero sono

$$G_0^0 = e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \quad (2.1.10)$$

$$G_0^1 = -e^{-\lambda} r^{-1} \dot{\lambda} = -e^{-\lambda-\nu} G_1^0 \quad (2.1.11)$$

$$G_1^1 = -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \quad (2.1.12)$$

$$G_2^2 = G_3^3 = \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\frac{\nu' \lambda'}{2} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'}{r} - \frac{\nu'^2}{2} - \nu'' \right) + \frac{1}{2} e^{-\nu} \left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{2} \right) \quad (2.1.13)$$

dove abbiamo indicato con il punto la derivata rispetto a t e con l'apostrofo la derivata rispetto a r . L'ultima equazione è immediatamente uguale a zero se le equazioni (2.1.10),(2.1.11),(2.1.12) sono nulle, grazie all'identità di Bianchi contratta (1.5.10). Quindi le equazioni di Einstein da risolvere nel vuoto si riducono a

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0 \quad (2.1.14)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 0 \quad (2.1.15)$$

$$\dot{\lambda} = 0 \quad (2.1.16)$$

Sommando (2.1.14) e (2.1.15) abbiamo

$$\lambda' + \nu' = 0 \quad (2.1.17)$$

la cui integrazione è immediata

$$\lambda + \nu = h(t) \quad (2.1.18)$$

con h una funzione arbitraria solo del tempo. Inoltre λ può essere funzione solo di r a causa della (2.1.16), perciò la (2.1.14) è un'equazione differenziale ordinaria, che si può riscrivere come

$$\frac{d}{dr}(r e^{-\lambda}) = 1 \quad (2.1.19)$$

La cui soluzione è

$$e^\lambda = \left(1 + \frac{C}{r}\right)^{-1} \quad (2.1.20)$$

dove C è una costante di integrazione. L'elemento di linea diventa così

$$ds^2 = e^{h(t)} \left(1 + \frac{C}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{C}{r}\right)^{-1} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.1.21)$$

Possiamo ancora eliminare la funzione $h(t)$ introducendo una nuova coordinata temporale t'

$$t' = \int_a^t e^{\frac{1}{2}h(u)} du \quad (2.1.22)$$

in modo che l'unico elemento che varia è g_{00}

$$g'_{00} = 1 + \frac{C}{r} \quad (2.1.23)$$

Si noti che se $C=0$ la metrica si riduce a quella di Minkowski, ma a questo punto non conterrebbe nessuna informazione sulla sorgente nè la costante gravitazionale G (che infatti non compare nelle equazioni di campo nel vuoto). Infatti, per capire il significato fisico di C , guardiamo l'espressione di g_{00} (1.3.9) nel limite di campo debole, concludiamo che

$$C = -2GM \quad (2.1.24)$$

con M la massa totale della sorgente. Infine l'elemento di linea di Schwarzschild è

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.1.25)$$

Il valore di r in cui $r = 2GM$ è chiamato *Raggio di Schwarzschild*. Vale la pena notare che l'ipotesi di simmetria sferica ha portato anche ad un tensore metrico che non dipende dal tempo, infatti esiste un interessante risultato (Teorema di Birkhoff) che afferma che una soluzione nel vuoto a simmetria sferica è necessariamente statica.

2.2 Il problema delle singolarità

La soluzione di Schwarzschild diventa singolare nei punti $r = 0$ e $r = 2MG$. Ci chiediamo se queste singolarità sono rimovibili o meno, cioè se sono dovute alla particolare scelta del sistema di coordinate oppure rappresentano una vera singolarità fisica, intrinseca. Ad esempio in coordinate polari i poli sono punti singolari, ma la singolarità viene facilmente rimossa passando alle coordinate cartesiane. Sottolineiamo da subito che non esiste nessuna singolarità di Schwarzschild ($r = 2GM$) nel campo gravitazionale di qualsiasi oggetto conosciuto nell'universo. Infatti tale singolarità appare considerando l'equazione

di Einstein nel vuoto, e perciò non ha significato se $r = 2GM$ è all'interno del corpo, dove il tensore energia-impulso è diverso da zero. Si pensi che per il sole il raggio di Schwarzschild vale solamente 2.95 km! Per cui nella trattazione che segue supporremo la sorgente avere un raggio proprio molto minore di $2GM$, al limite puntiforme (buchi neri). Consideriamo l'invariante costruito con il tensore di Riemann, che nel nostro caso vale

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa}R^{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{48M^2G^2}{r^6} \quad (2.2.1)$$

Assume un valore finito per $r = 2GM$, e siccome è uno scalare assume un valore finito in ogni sistema di coordinate. Questo suggerisce che l'apparente singolarità di Schwarzschild è solo dovuta a un sistema di coordinate patologico, e pertanto rimovibile. Tuttavia nell'origine $r = 0$ questo invariante diverge e quindi questo punto deve essere interpretato come una singolarità intrinseca dello spazio-tempo. Il nostro obiettivo è di cercare un sistema di coordinate che descriva bene anche il raggio di Schwarzschild $r = 2GM$. A tale fine consideriamo in primo luogo le geodetiche radiali nulle, che come tutte le geodetiche possono essere ottenute da un principio variazionale, oppure in maniera più rozza ponendo semplicemente

$$ds^2 = d\theta^2 = d\varphi^2 = 0 \quad (2.2.2)$$

nell'elemento di linea di Schwarzschild (2.1.25). Da cui

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(\frac{1}{1 - \frac{2GM}{r}} \right) \quad (2.2.3)$$

dove il segno $+$ si riferisce ai raggi di luce uscenti radialmente, e il segno $-$ ai raggi di luce entranti radialmente. L'integrazione di questa equazione per il segno $+$ porta a

$$t = r + 2GM \ln |r - 2GM| + \text{costante} \quad (2.2.4)$$

mentre per il segno $-$

$$t = -(r + 2GM \ln |r - 2GM| + \text{costante}) \quad (2.2.5)$$

è importante studiare le congruenze di geodetiche radiali nulle perché essendo le traiettorie dei raggi di luce, definiscono in ogni punto dello spazio-tempo le inclinazioni dei coni di luce, e di conseguenza le possibili traiettorie di tutti i corpi massivi. Per cui in base alla (2.2.5) un osservatore lontano dalla sorgente dove la metrica tende a quella di Minkowski, "vedrà" una particella in caduta libera radiale impiegare un tempo infinito per raggiungere il raggio di Schwarzschild $r = 2GM$. Tuttavia dal punto di vista della particella, essa raggiungerà il raggio di Schwarzschild in un tempo proprio *finito*. Questo significa che la coordinata temporale t non è adatta a descrivere questo moto radiale. Quindi la trasformazione più semplice e adeguata è

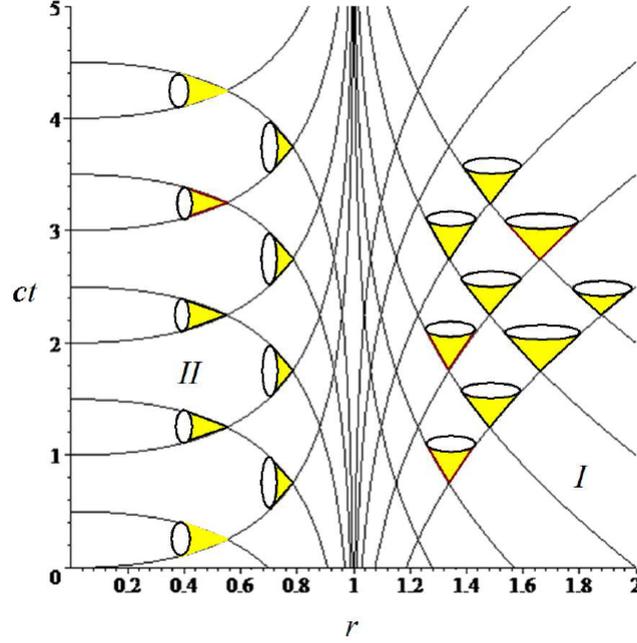


Figura 1: Spazio-tempo di Schwarzschild in coordinate di Schwarzschild

$$t \rightarrow \bar{t} = t + 2GM \ln(r - 2GM) \quad (2.2.6)$$

in modo da raddrizzare le geodetiche entranti, infatti la (2.2.5) diventa l'equazione di una retta inclinata di -45 gradi rispetto all'asse r

$$\bar{t} = -r + \text{costante} \quad (2.2.7)$$

Il differenziale della trasformazione è

$$d\bar{t} = dt + \frac{2GM}{r - 2GM} dr \quad (2.2.8)$$

Inserendo nella metrica di Schwarzschild otteniamo

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) d\bar{t}^2 - \frac{4GM}{r} d\bar{t}dr - \left(1 + \frac{2GM}{r}\right) dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (2.2.9)$$

chiamato elemento di linea di Eddington-Finkelstein, che è regolare in $r = 2GM$. In questo modo abbiamo esteso l'intervallo di regolarità delle coordinate da $2GM < r < \infty$ a $0 < r < \infty$. Possiamo semplificare l'elemento di linea di Eddington-Finkelstein applicando un'ulteriore trasformazione

$$\bar{t} \rightarrow v = \bar{t} + r \quad (2.2.10)$$

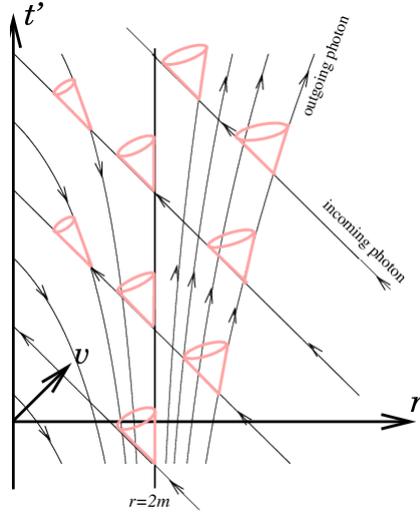


Figura 2: Spazio-tempo di Schwarzschild in coordinate di Eddington-Finkelstein avanzate

ottenendo le cosiddette coordinate di Eddington-Finkelstein avanzate, e la metrica risultante è

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dv^2 - 2dvdr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (2.2.11)$$

poiché $\bar{t} = -r + \text{costante}$, la congruenza di geodetiche radiali nulle è data da $dv = 0$. In queste coordinate i lati sinistri dei coni di luce sono tutti inclinati di -45 gradi rispetto all'asse r . Invece i lati destri dei coni di luci sono inclinati di 45 gradi all'infinito spaziale (proprio come in Minkowski) e man mano che r diminuisce si inclinano sempre di più fino a diventare verticali in $r = 2GM$, per cui la superficie $r = 2GM$ è chiamata *orizzonte degli eventi* perchè nessun evento al suo interno può influenzare gli eventi in $r > 2GM$ a causa della verticalità del lato destro del cono di luce. Questo lato continua a ruotare in senso antiorario per $r < 2GM$ e quindi a questo punto la particella avanzerà inevitabilmente verso la singolarità $r = 0$.

Passando dalle coordinate di Schwarzschild a quelle di Eddington-Finkelstein abbiamo guadagnato la regolarità in $r = 2GM$ ma abbiamo perso la simmetria per inversione temporale. Per ottenere la soluzione con il tempo invertito, cioè per le geodetiche radiali uscenti, invece di \bar{t} dobbiamo introdurre un'altra coordinata temporale

$$t \rightarrow t^* = t - 2GM \ln(r - 2GM) \quad (2.2.12)$$

e l'elemento di linea di Schwarzschild diventa

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^{*2} + \frac{4GM}{r} dt^* dr - \left(1 + \frac{2GM}{r}\right) dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (2.2.13)$$

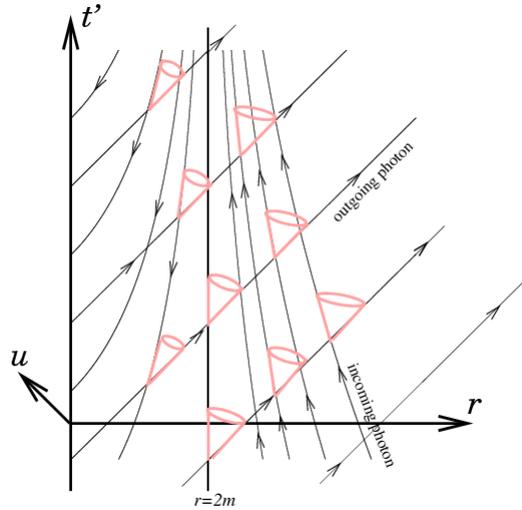


Figura 3: Spazio-tempo di Schwarzschild in coordinate di Eddington-Finkelstein ritardate

Di nuovo, possiamo semplificare l'elemento di linea di Eddington-Finkelstein applicando un'ulteriore trasformazione

$$t^* \rightarrow w = t^* - r \quad (2.2.14)$$

ottenendo le cosiddette coordinate di Eddington-Finkelstein ritardate, e la metrica risultante è

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dw^2 + 2dwdr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (2.2.15)$$

che è ancora una soluzione regolare per $0 < r < \infty$. Poiché $t^* = r + \text{costante}$, la congruenza di geodetiche radiali nulle è data da $dw = 0$. In queste coordinate i lati destri dei coni di luce sono tutti inclinati di 45 gradi rispetto all'asse r . Invece i lati sinistri dei coni di luce sono inclinati di 45 gradi all'infinito spaziale (proprio come in Minkowski) e man mano che r diminuisce si inclinano sempre di più fino a diventare verticali in $r = 2GM$, e quindi adesso la superficie $r = 2GM$ è un orizzonte degli eventi che agisce nella direzione opposta del tempo (buco bianco).

2.3 Estensione di Kruskal

Una varietà metrica è detta *massima* se qualsiasi geodetica che parte da un punto arbitrario può essere estesa per valori infiniti del parametro affine in entrambe le direzioni o termina in una singolarità non rimovibile. La soluzione avanzata (ritardata) di Eddington-Finkelstein, non è massima perché può essere estesa con regolarità, tranne in $r = 0$, solo la geodetica radiale entrante (uscende). Kruskal è riuscito a trovare la massima

estensione analitica della soluzione di Schwarzschild, ma anche in questo caso è presente la singolarità nell'origine $r = 0$ perchè è intrinseca.

L'idea di Kruskal è stata quella di raddrizzare simultaneamente sia le geodetiche radiali entranti che uscenti. Usando la coordinata nulla avanzata v e la coordinata nulla ritardata w introdotte nel paragrafo precedente abbiamo

$$dv = dt + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr, \quad dw = dt - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr \quad (2.3.1)$$

Sommando abbiamo

$$dt = \frac{1}{2}(dv + dw) \quad (2.3.2)$$

Sottraendo abbiamo

$$\frac{dr}{1 - \frac{2GM}{r}} = \frac{1}{2}(dv - dw) \quad (2.3.3)$$

la (2.3.3) integrata dà

$$r + 2GM \ln(r - 2GM) = \frac{1}{2}(v - w) \equiv x \quad (2.3.4)$$

Con queste sostituzioni la metrica di Schwarzschild diventa

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dv dw - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.3.5)$$

Per la simmetria sferica possiamo limitarci a considerare lo spazio in cui $d\varphi = d\theta = 0$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dv dw \quad (2.3.6)$$

Una metrica $g_{\mu\nu}$ si dice conformemente piatta se si può scrivere nella forma

$$g_{\mu\nu} = F \eta_{\mu\nu} \quad (2.3.7)$$

dove F è una funzione differenziabile delle coordinate non nulla. la metrica (2.3.5) è conformemente piatta in quanto in base alla (2.3.2) e alla (2.3.4) la possiamo scrivere nella forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) (dt^2 - dx^2) \quad (2.3.8)$$

Una trasformazione delle coordinate che lascia la metrica in coordinate doppiamente nulle e conformemente piatte deve essere del tipo

$$v \rightarrow v' = v'(v), \quad w \rightarrow w' = w'(w) \quad (2.3.9)$$

La trasformazione operata da Kruskal è

$$v' = e^{\frac{v}{4GM}} \quad (2.3.10)$$

$$w' = -e^{-\frac{w}{4GM}} \quad (2.3.11)$$

Usando la (2.3.4) otteniamo

$$v'w' = -(r - 2GM)e^{\frac{r}{2GM}} \quad (2.3.12)$$

e l'elemento di linea diventa

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{dv}{dv'} \frac{dw}{dw'} dv' dw' = \frac{16(GM)^2}{r} e^{-\frac{r}{2GM}} dv' dw' \quad (2.3.13)$$

Come prima, tramite la posizione

$$t' = \frac{1}{2}(v' + w'), \quad x' = \frac{1}{2}(v' - w') \quad (2.3.14)$$

Possiamo scrivere l'elemento di linea nella forma

$$ds^2 = \frac{16(GM)^2}{r} e^{-\frac{r}{2GM}} (dt'^2 - dx'^2) \quad (2.3.15)$$

dove r è determinata implicitamente dall'equazione

$$t'^2 - x'^2 = -(r - 2GM)e^{\frac{r}{2GM}} \quad (2.3.16)$$

Dalle (2.3.15),(2.3.16) è chiaro che le geodetiche radiali entranti e uscenti sono linee rette del tipo $t' = \pm x' + cost$ con il segno+ per le uscenti e il segno - per le entranti, di conseguenza i coni di luce sono tutti a 45 gradi nel piano (x', t') . Inoltre dalla (2.3.16) segue che in questo piano le superfici con $r = costante$ sono delle iperboli i cui asintoti sono le bisettrici del piano (x', t') . Questi asintoti rappresentano l'orizzonte degli eventi situato a $r = 2GM$, e pertanto dividono il piano in 4 zone distinte:

- I) punti del piano tali che $x' > 0, \quad |t'| < x'$
- II) punti del piano tali che $t' > 0, \quad |x'| < t'$
- III) punti del piano tali che $x' < 0, \quad |t'| < |x'|$
- IV) punti del piano tale che $t' < 0, \quad |x'| < |t'|$

Le regioni I e II corrispondono alle soluzioni di Eddington-Finkelstein avanzate, con la zona I corrispondente alla soluzione di Schwarzschild per $r > 2GM$ e la zona II corrispondente a una soluzione di buco nero. Le regioni I e IV corrispondono alle soluzioni di Eddington-Finkelstein ritardate, con la zona I corrispondente alla soluzione di Schwarzschild per $r > 2GM$ e la zona IV corrispondente a una soluzione di buco bianco. Invece la zona III è una nuova zona che è geometricamente uguale alla zona I e potrebbe rappresentare un altro universo, tuttavia se questa zona ha un senso fisico o meno è ancora un mistero.

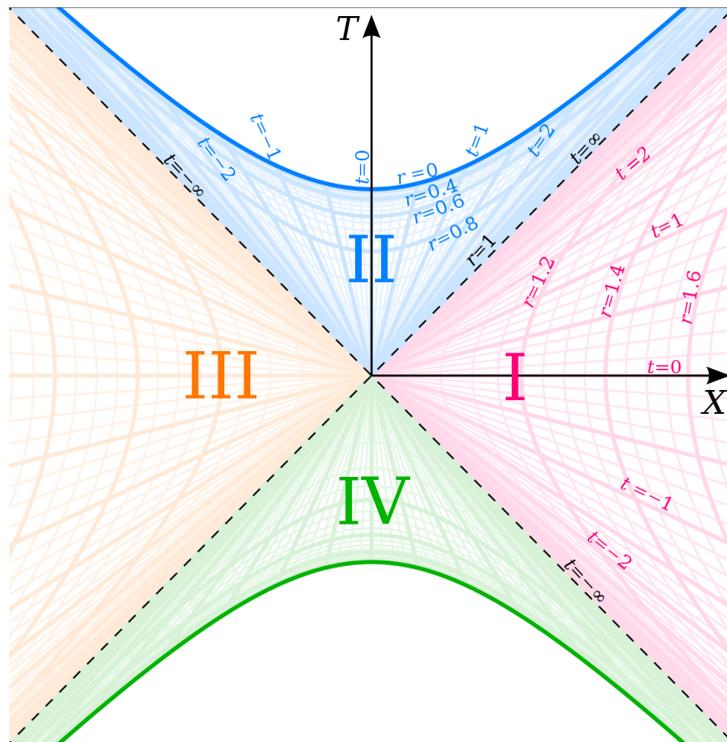


Figura 4: Diagramma di Kruskal per la soluzione di Schwarzschild. Le coordinate (T, X) giocano il ruolo delle coordinate (t', x') rispettivamente

3 La soluzione di de Sitter

3.1 Introduzione storica

L'equazione di campo (1.7.17) non permette di ottenere una soluzione di universo statico: costruendo $T_{\mu\nu}$ con la materia ordinaria (protoni, neutroni ecc.) e la radiazione (fotoni) si ottiene un universo che si espande oppure si contrae. Solo introducendo una costante Λ opportuna, invece, è possibile ottenere una soluzione statica. Questa fu la motivazione originaria per cui Einstein introdusse, nel 1917, la costante cosmologica, perdendo la straordinaria opportunità di anticipare la scoperta dell'espansione dell'universo che sarà fatta da Hubble nel 1929. Per cui Einstein, vittima del pregiudizio che l'universo dovesse essere statico, modificò le sue equazioni in

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (3.1.1)$$

$\Lambda g_{\mu\nu}$ è un tensore che soddisfa tutte le richieste A),B),C),D) del paragrafo 1.7 per cui è un termine che può far parte legittimamente delle equazioni di Einstein. Però non soddisfa la condizione E), quindi la costante Λ deve essere molto piccola in modo da non essere in contrasto con il successo della teoria della gravitazione di Newton. La costante cosmologica è inserita nel membro sinistro dell'equazione (3.1.1) ed è quindi vista da Einstein come un termine matematico che modifica la formulazione geometrica della teoria. Tuttavia le osservazioni di Hubble del redshift della luce delle galassie lontane, convinsero gli astronomi che l'universo è in espansione. Tale conclusione spinse Einstein a ritenere l'idea della costante cosmologica come "stabilizzatore dell'universo" il suo "più grave errore", e la rimosse dalle sue equazioni. Infatti già nel 1922 Alexander Friedmann con l'assunzione che l'universo sia omogeneo e isotropo (a grande scala) in ogni punto, risolvendo le equazioni (1.7.17) con il tensore energia-impulso di un fluido perfetto, formulò dei modelli che prevedevano l'espansione dell'universo. Negli ultimi anni però la costante cosmologica è tornata in gioco. Recentemente è stato scoperto che la velocità di espansione del nostro universo sta aumentando, e nessuno dei modelli di Friedmann prevede un'accelerazione positiva, questo significa che nell'universo è presente, anzi predominante, una componente di energia con caratteristiche gravitazionali repulsive, che va inserita nelle equazioni di campo di Einstein. In sostanza, a meno che non si trovi una valida alternativa alla Relatività Generale, la costante cosmologica è indispensabile per spiegare l'accelerazione dell'espansione dell'universo. L'esigenza è ora di capire quale sia la vera natura fisica della costante cosmologica. Di capire, cioè, quale forma di materia "esotica" o quale effetto fisico si nasconde dietro ad essa. Proprio per questo si è introdotto il termine più generale di *energia oscura* per denotare la componente ignota che accelera l'espansione dell'universo. Interpretandola come una forma di energia, oggi Λ compare nel membro destro delle equazioni di Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (3.1.2)$$

Nel prossimo paragrafo ci occuperemo di una soluzione della (3.1.2) in cui $T_{\mu\nu} = 0$ e Λ costante e positiva (effetto repulsivo), chiamata soluzione di de Sitter.

3.2 La soluzione di de Sitter

Nel vuoto l'equazione (3.1.2) vale

$$G_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} \quad (3.2.1)$$

Poiché siamo in un universo senza materia ovunque, nel cercare di risolvere la (3.2.1) possiamo fare le stesse assunzioni di simmetria sferica del paragrafo 2.1 e quindi in quanto segue procederemo come con la soluzione di Schwarzschild. Le componenti del tensore di Einstein misto sono

$$G_{\mu}^{\nu} = \Lambda g_{\mu}^{\nu} = \Lambda \delta_{\mu}^{\nu} \quad (3.2.2)$$

e le equazioni (2.1.14),(2.1.15),(2.1.16) diventano rispettivamente

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = \Lambda \quad (3.2.3)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = \Lambda \quad (3.2.4)$$

$$\dot{\lambda} = 0 \quad (3.2.5)$$

La (3.2.3) si può riscrivere come

$$\frac{d}{dr} (r e^{-\lambda}) = 1 - \Lambda r^2 \quad (3.2.6)$$

Integrando (3.2.6) otteniamo

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{\Lambda}{3} r^2 + \frac{const}{r} \quad (3.2.7)$$

La soluzione di de Sitter è una soluzione di vuoto ovunque, quindi si ottiene ponendo la costante d'integrazione nella (3.2.7) (che nel caso di Schwarzschild vale $-2GM$) uguale a zero. Quindi per avere la soluzione di de Sitter partendo da quella di Schwarzschild, basta fare la sostituzione $1 - 2GM/r \rightarrow 1 - \Lambda/3r^2$. Otteniamo così l'elemento di linea

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right) dt^2 - \left(1 - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (3.2.8)$$

che descrive la metrica di un universo vuoto ma con energia oscura. Notiamo che la (3.2.8) è singolare in $r = \sqrt{3/\Lambda}$. Per rimuovere la singolarità costruiamo le coordinate

di Eddington-Finkelstein e di Kruskal in analogia con quanto fatto per rimuovere la singolarità in (2.1.25). Le geodetiche radiali nulle sono ottenute ponendo $ds^2 = d\theta^2 = d\varphi^2 = 0$ nella (3.2.8)

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{1 - \frac{\Lambda}{3}r^2} = \pm \left(1 - \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}r\right)^{-1} \left(1 + \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}r\right)^{-1} \quad (3.2.9)$$

Integrando otteniamo

$$t = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{\Lambda/3}r}{1 - \sqrt{\Lambda/3}r} \right) + \text{costante} \quad (3.2.10)$$

dove il segno + si riferisce alle geodetiche radiali uscenti ($\frac{dt}{dr} > 0$ per $r < \sqrt{3/\Lambda}$) e il segno - si riferisce alle geodetiche radiali entranti ($\frac{dt}{dr} < 0$ per $r < \sqrt{3/\Lambda}$). Considerando il segno - costruiamo le coordinate di Eddington-Finkelstein avanzate tramite la trasformazione

$$t \rightarrow v = t + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{\Lambda/3}r}{1 - \sqrt{\Lambda/3}r} \right) \quad (3.2.11)$$

da cui otteniamo

$$dv = dt + \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} dr \quad (3.2.12)$$

L'elemento di linea (3.2.8) nelle coordinate di Eddington-Finkelstein avanzate diventa

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) dv^2 - 2dvdr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.2.13)$$

Allo stesso modo, considerando il segno + costruiamo le coordinate di Eddington-Finkelstein ritardate tramite la trasformazione

$$t \rightarrow w = t - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{\Lambda/3}r}{1 - \sqrt{\Lambda/3}r} \right) \quad (3.2.14)$$

da cui otteniamo

$$dw = dt - \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} dr \quad (3.2.15)$$

L'elemento di linea (3.2.8) nelle coordinate di Eddington-Finkelstein ritardate diventa

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) dw^2 + 2dwdr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.2.16)$$

Procediamo alla costruzione delle coordinate di Kruskal raddrizzando simultaneamente entrambe le geodetiche radiali. Sommando (3.2.12) e (3.2.15) abbiamo

$$dt = \frac{1}{2}(dv + dw) \quad (3.2.17)$$

Sottraendo (3.2.12) e (3.2.15) abbiamo

$$\frac{dr}{1 - \frac{\Lambda}{3}r^2} = \frac{1}{2}(dv - dw) \quad (3.2.18)$$

La (3.2.18) integrata dà

$$r = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \tanh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \frac{v - w}{2}\right) \quad (3.2.19)$$

Con queste sostituzioni la metrica (3.2.8) diventa

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) dv dw - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.2.20)$$

Le trasformazioni per passare alle coordinate di Kruskal sono in analogia delle (2.3.10),(2.3.11)

$$v' = -e^{-\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}v} \quad (3.2.21)$$

$$w' = e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}w} \quad (3.2.22)$$

l'espressione per r (3.2.19) diventa

$$r = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \frac{1 + v'w'}{1 - v'w'} \quad (3.2.23)$$

e l'elemento di linea in coordinate di Kruskal

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2(v', w')\right) \frac{dv}{dv'} \frac{dw}{dw'} dv' dw' - r^2(v', w')(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.2.24)$$

quindi

$$ds^2 = \frac{3}{\Lambda} \frac{1}{(1 - v'w')^2} \left(4dv' dw' - (1 + v'w')^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right) \quad (3.2.25)$$

Possiamo rendere esplicito il fatto che la (3.2.25) è una metrica conformemente piatta tramite la posizione

$$t' = \frac{1}{2}(v' + w'), \quad x' = \frac{1}{2}(v' - w') \quad (3.2.26)$$

Limitandoci a considerare la sola parte radiale

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) \frac{dv}{dv'} \frac{dw}{dw'} dv' dw' \\ &= \frac{3}{\Lambda} \left(1 + \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}r\right)^2 (dt'^2 - dx'^2) \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

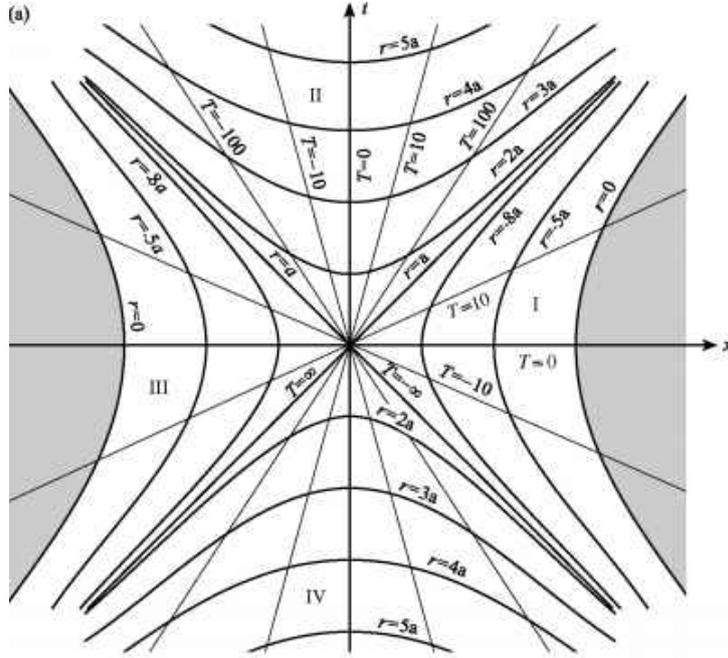


Figura 5: Diagramma di Kruskal per la soluzione di de Sitter.

dove r è determinata implicitamente dall'equazione

$$t'^2 - x'^2 = -\frac{1 - \sqrt{\Lambda/3}r}{1 + \sqrt{\Lambda/3}r} \quad (3.2.28)$$

L'equazione (3.2.28) rappresenta delle iperboli in funzione di r nel piano (t', x') riportate in figura 5, dove $a \equiv \sqrt{3/\Lambda}$ e $T \equiv t$. A causa del segno $-$ nel membro destro della (3.2.28), a differenza del diagramma di Kruskal per la soluzione di Schwarzschild, l'iperbole $r = 0$ adesso interseca l'asse x' anziché l'asse t' . Nel diagramma di Kruskal per la soluzione di Schwarzschild abbiamo visto che le bisettrici identificano l'orizzonte degli eventi del buco nero, allo stesso modo qui identificano l'orizzonte cosmologico a $r = \sqrt{3/\Lambda}$. La presenza dell'orizzonte cosmologico rispecchia il fatto che l'universo si espande talmente veloce in modo che esistono punti che non possono essere messi in contatto causale tra di loro. Infatti poichè i coni di luce sono tutti a 45 gradi, un raggio di luce che parte dalla zona II non raggiungerà mai la zona I. Inoltre poichè nelle zona II e nella zona IV la coordinata t è di tipo spazio un osservatore in queste regioni non può stare fermo, ma si muove verso r crescenti nella zona II e verso r decrescenti nella zona IV. Invece nella zona I se l'osservatore è accelerato può rimanere a r costante. Infine nella zona III la coordinata t decresce verso il futuro.

Concludiamo osservando che se nella (3.2.7) invece di porre la costante d'integrazione uguale a zero l'avessimo posta uguale a $-2GM$ avremmo ottenuto la soluzione di Schwarzschild-de Sitter

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.2.29)$$

In generale ci sono due orizzonti degli eventi, quello del buco nero (di Schwarzschild) e quello cosmologico di de Sitter. Bisogna notare che l'espansione dell'universo dovuto alla costante cosmologica dilata l'orizzonte di Schwarzschild. D'altra parte al crescere del parametro M i due orizzonti tendono ad avvicinarsi l'un l'altro. Questo significa che esiste una massima taglia di buco nero che può entrare nello spazio di de Sitter prima che l'orizzonte di Schwarzschild (che indicheremo con R_{bh}) raggiunge l'orizzonte cosmologico (che indicheremo con R_{cos}). Infatti analizzando la funzione $g_{tt}(r) = 1 - 2GM/r - \Lambda r^2/3$ troviamo che per $0 < GM\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} < \frac{1}{3\sqrt{3}}$ i due orizzonti sono situati a

$$R_{bh} = -\frac{2}{\sqrt{\Lambda}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos(3GM\sqrt{\Lambda}) - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (3.2.30)$$

$$R_{cos} = -\frac{2}{\sqrt{\Lambda}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos(3GM\sqrt{\Lambda}) + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (3.2.31)$$

La regione con $R_{bh} < r < R_{cos}$ è statica e può essere usata per modellare un corpo celeste sottoposto a un completo collasso gravitazionale in un universo in espansione accelerata. Invece se $GM\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ i due orizzonti degli eventi coincidono e in tal caso non esistono regioni dello spazio-tempo statiche.

Riferimenti bibliografici

- [1] Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology: principles and application of the General theory of Relativity*, Jhon Wiley and sons, 1972.
- [2] Ray d'Inverno, *Introduzione alla Relatività di Einstein*, Clueb, 2001.
- [3] Marcus Spradlin, Andrew Strominger and Anastasia Volovich, *Les Houches Lectures on de Sitter Space*, arXiv:hep-th/0110007v2 27 Nov 2001.
- [4] Kenneth A. Dennison and Thomas W. Baumgarte, *Schwarzschild-de Sitter Spacetimes, McVittie Coordinates, and Trumpet Geometries*, arXiv:07373v1 [gr-qc] 19 Oct 2017.
- [5] Jemal Guven and Dario Nunez, *Schwarzschild-de Sitter space and its perturbations*, Phys. Rev. D 42, 8 (1990)