

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

**SVILUPPO IN MULTIPOLI DEI CAMPI
ELETTROMAGNETICI PRODOTTI DA
CORRENTI LOCALIZZATE CON
APPLICAZIONI**

Relatore:
Prof.Roberto Zucchini

Presentata da:
Roberto Rubboli

Anno Accademico 2016/2017

A Valentina

Sommario

In questa tesi viene studiato il campo elettromagnetico generato da una distribuzione di carica e corrente arbitraria utilizzando il formalismo dell'espansione in multipoli. Sono trattati in particolare i casi di regime di campo vicino e lontano. Vengono inoltre discussi i problemi di una distribuzione con simmetria rotazionale intorno ad un asse e della radiazione prodotta da una carica elettrica in moto lungo una generica traiettoria. Infine, utilizzando i risultati ottenuti, sono analizzate due particolari applicazioni: l'antenna lineare e l'acceleratore circolare.

Indice

Introduzione	I
1 Trasformazioni di gauge	1
2 Sviluppo in multipoli	3
3 Espansione in multipoli del campo elettromagnetico	5
4 Regime di campo vicino e di campo lontano	13
5 Potenza irradiata nel regime di radiazione	19
6 Distribuzione di carica simmetrica rispetto ad un asse	25
7 Antenna lineare	32
8 Radiazione prodotta da una carica puntiforme in moto	37
9 Acceleratore circolare	39
Bibliografia	42

Introduzione

L'elettrodinamica classica si occupa dello studio dei campi elettromagnetici e in particolare dei rapporti tra essi e le cariche elettriche che costituiscono le sorgenti di tali campi. I primi studi vennero condotti all'inizio XIX secolo sulla base degli esperimenti effettuati dal fisico danese H.C.Oersted da J.B.Biot, F.Savart, A.M.Ampere e M.Faraday. Quest'ultimo gettò le basi dell'elettromagnetismo analizzando per primo il legame tra elettricità e magnetismo.

Un contributo di fondamentale importanza nello sviluppo della teoria fu dato da J. C. Maxwell che alla fine del XIX secolo, sulla base degli studi condotti da Faraday, nel suo libro *Treatise on Electricity and Magnetism*(1873) formulò matematicamente il concetto di linea di forza, introdusse i concetti di campo elettromagnetico e di corrente di spostamento e fondò l'elettrodinamica dei dielettrici.

Maxwell sintetizzò inoltre la teoria dell'elettromagnetismo attraverso quattro equazioni in grado di spiegare tutti i fenomeni classici di natura elettromagnetica sia nel caso stazionario che nel caso non stazionario unificando in un'unica teoria l'elettricità, il magnetismo e l'ottica.

Nel 1905 A.Einstein con la teoria della relatività speciale stabilì tra elettricità e magnetismo un legame ancora più forte.

È interessante notare inoltre che nelle moderne teorie di campo questi ultimi vengono pensati come entità che permeano l'intero spazio ai quali le cariche elettriche si accoppiano.

In questa tesi viene studiato il campo elettromagnetico generato da una distribuzione di carica e corrente arbitraria utilizzando il formalismo dell'espansione in multipoli. Nella prima parte vengono introdotte le equazioni fondamentali dell'elettrodinamica e studiati

i principali aspetti delle trasformazioni di gauge. Viene poi analizzato lo sviluppo in multipoli dei potenziali scalare e vettore nel caso particolare della gauge di Lorentz e vengono ottenute le espressioni del campo elettrico ed di induzione magnetica. Sono quindi trattati i casi del regime di campo vicino e lontano derivando un'espressione per la potenza totale nel regime di radiazione. Per la sua semplicità e per l'importanza nelle applicazioni pratiche si è studiato il problema di una distribuzione con simmetria rotazionale attorno ad un asse. Tali risultati sono poi utilizzati per calcolare il campo elettromagnetico irradiato da un'antenna lineare. Infine viene considerato il caso di una carica puntiforme in moto lungo una traiettoria generica, in particolare in un acceleratore circolare.

Capitolo 1

Trasformazioni di gauge

L'elettrodinamica classica si basa su quattro equazioni fondamentali dette *Equazioni di Maxwell* dalle quali è possibile ottenere l'espressione del campo elettromagnetico generato da una arbitraria distribuzione di carica ρ, \mathbf{j} :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (1.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (1.1d)$$

Dalle *equazioni di Maxwell* (1.1a),(1.1d) è possibile dimostrare l'equazione di conservazione della carica

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (1.2)$$

La relazione (1.2) è di fondamentale importanza e verrà utilizzata frequentemente nel corso della presente trattazione.

Inoltre, considerando le *equazioni di Maxwell* (1.1c),(1.1b) si può dedurre che è possibile definire un campo scalare Φ e un campo vettoriale \mathbf{A} per i quali il campo elettrico e induzione magnetica \mathbf{E}, \mathbf{B} si scrivono

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.3a)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.3b)$$

Φ e \mathbf{A} sono chiamati rispettivamente potenziale scalare e potenziale vettore.

I potenziali Φ , \mathbf{A} non sono univocamente determinati, infatti, si dimostra che possono esistere infinite scelte parametrizzate da una funzione di campo scalare f che soddisfa le seguenti relazioni

$$\Phi' = \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \quad (1.4a)$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla f \quad (1.4b)$$

Questa proprietà è detta invarianza di gauge e le coppie Φ , \mathbf{A} e Φ' , \mathbf{A}' sono dette gauge equivalenti.

Utilizzando le *equazioni di Maxwell* (1.1a),(1.1d) è possibile verificare che Φ , \mathbf{A} soddisfano le seguenti relazioni

$$\nabla^2 \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = -4\pi\rho \quad (1.5a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left[\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right] = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (1.5b)$$

Tra tutti i potenziali Φ , \mathbf{A} ammessi si può inoltre effettuare una scelta attraverso una ulteriore condizione che solitamente assume la forma

$$\Gamma[\Phi, \mathbf{A}] = 0 \quad (1.6)$$

Questa scelta in generale fissa parzialmente l'invarianza di gauge (1.4).

Un caso particolare della (1.6) è rappresentato dal gauge di Lorentz definito dalla seguente condizione

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (1.7)$$

L'invarianza di gauge residua rispetto alla condizione (1.7) è data dalle funzioni f che soddisfano l'equazione

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad (1.8)$$

Nel gauge di Lorentz le equazioni (1.5) prendono la forma

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \quad (1.9a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (1.9b)$$

Capitolo 2

Sviluppo in multipoli

In generale l'equazione d'onda scalare non omogenea ha la forma:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4\pi f \quad (2.1)$$

dove $\psi = \psi(\mathbf{x}, t)$ e $f = f(\mathbf{x}, t)$ sono detti rispettivamente campo d'onda scalare e sorgente scalare. Il calcolo delle soluzioni dell'equazione (2.1) per una sorgente generica f può risultare molto complicato.

Sotto opportune condizioni può essere effettuato uno sviluppo in serie delle soluzioni rendendo esplicita la dipendenza dal vettore posizione \mathbf{x} e da opportuni coefficienti chiamati momenti di multipolo.

Considerando un numero maggiore di termini della serie si può ottenere una stima sempre più accurata della soluzione.

Lo sviluppo in multipoli è valido se

$$f(\mathbf{x}', t) \approx 0, \quad \text{per } |\mathbf{x}'| \gg d; \quad (2.2)$$

$$|f(\mathbf{x}', t)| \gg \left| \frac{d}{c} \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}', t) \right| \gg \left| \left(\frac{d}{c} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\mathbf{x}', t) \right| \gg \dots, \quad \text{per } |\mathbf{x}'| \leq d; \quad (2.3)$$

e

$$d \ll |\mathbf{x}| \quad (2.4)$$

Le condizioni sopra devono essere valide ad ogni istante di tempo.

L'equazione (2.2) implica che la sorgente sia localizzata in un intorno dell'origine di

dimensione lineare d , mentre la (2.4) indica che la lunghezza d deve essere molto minore della distanza del punto di osservazione \mathbf{x} dall'origine.

L'interpretazione fisica della (2.3) segue dal ragionamento seguente.

Possiamo infatti calcolare il valore di f nell'istante $t' = t + d/c$ attraverso uno sviluppo in serie di Taylor

$$f(\mathbf{x}, t') = f(\mathbf{x}, t) + \frac{d}{c} \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{c} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) + \dots \quad (2.5)$$

Se vale la condizione (2.3) la serie è rapidamente convergente e $f(\mathbf{x}, t') \approx f(\mathbf{x}, t)$. La (2.3) implica quindi che la variazione della sorgente nel tempo che l'interazione elettromagnetica impiega a percorrere la distanza d sia trascurabile.

Quando le (2.2),(2.3),(2.4) sono soddisfatte ψ_f^\pm ammette l'espansione:

$$\psi_f^\pm(\mathbf{x}, t) \approx \left[\frac{f^{(0)}(t_\pm)}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{f}^{(1)}(t_\pm) \cdot \hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^2} \mp \frac{\dot{\mathbf{f}}^{(1)}(t_\pm) \cdot \hat{\mathbf{x}}}{c|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{f}^{(2)}(t_\pm) \cdot \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^3} \right. \\ \left. + \frac{\dot{\mathbf{f}}^{(2)}(t_\pm) \cdot \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}}{c|\mathbf{x}|^2} + \frac{\ddot{\mathbf{f}}^{(2)}(t_\pm) \cdot \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}}{3c^2|\mathbf{x}|} + \frac{\ddot{f}^{(2)}(t_\pm)}{3c^2|\mathbf{x}|} \right]_{t_\pm = t \pm |\mathbf{x}|/c} \quad (2.6)$$

dove

$$f^{(0)}(t) = \int d^3 \mathbf{x}' f(\mathbf{x}', t) \quad (2.7a)$$

$$\mathbf{f}^{(1)}(t) = \int d^3 \mathbf{x}' f(\mathbf{x}', t) \mathbf{x}' \quad (2.7b)$$

$$\mathbf{f}^{(2)}(t) = \int d^3 \mathbf{x}' f(\mathbf{x}', t) \frac{3\mathbf{x}' \mathbf{x}' - \mathbf{x}'^2 \mathbf{1}}{2} \quad (2.7c)$$

$$f'^{(2)}(t) = \int d^3 \mathbf{x}' f(\mathbf{x}', t) \frac{|\mathbf{x}'|^2}{2} \quad (2.7d)$$

sono i momenti di multipolo che caratterizzano la sorgente f . I precedenti risultati si generalizzano anche nel caso in cui la funzione d'onda $\psi(\mathbf{x}, t)$ e la sorgente $f(\mathbf{x}, t)$ siano grandezze vettoriali

Capitolo 3

Espansione in multipoli del campo elettromagnetico

Nel gauge di Lorentz i potenziali Φ, \mathbf{A} si ottengono risolvendo le equazioni (1.9).

Poichè le relazioni (1.9) hanno la stessa forma dell'equazione (2.1) è possibile risolverle, sotto opportune condizioni, utilizzando lo sviluppo in multipoli (2.6).

La densità di carica ρ e quella di corrente \mathbf{j} devono soddisfare le condizioni (2.2),(2.3),(2.4) che si traducono nel presente caso

$$\rho(\mathbf{x}', t) \approx 0, \quad \mathbf{j}(\mathbf{x}', t) \approx 0, \quad \text{per } |\mathbf{x}'| \gg d; \quad (3.1)$$

$$|\rho(\mathbf{x}', t)| \gg \left| \frac{d}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}', t) \right| \gg \left| \left(\frac{d}{c} \right)^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}(\mathbf{x}', t) \right| \gg \dots, \quad \text{per } |\mathbf{x}'| \leq d; \quad (3.2a)$$

$$|\mathbf{j}(\mathbf{x}', t)| \gg \left| \frac{d}{c} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}(\mathbf{x}', t) \right| \gg \left| \left(\frac{d}{c} \right)^2 \frac{\partial^2 \mathbf{j}}{\partial t^2}(\mathbf{x}', t) \right| \gg \dots, \quad \text{per } |\mathbf{x}'| \leq d; \quad (3.2b)$$

e

$$d \ll |\mathbf{x}| \quad (3.3)$$

Come già discusso in precedenza, la condizione (3.1) implica che la distribuzione di carica sia localizzata in una regione di dimensioni d , mentre le (3.2) impongono che la variazione

relativa di ρ, \mathbf{j} nel tempo d/c sia trascurabile.

Inoltre per la (3.3) il punto di osservazione \mathbf{x} deve essere lontano dall'origine dove la sorgente è localizzata. Si definiscono le seguenti grandezze

$$q(t) = \int d^3\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}', t) \quad (3.4a)$$

$$\mathbf{p}(t) = \int d^3\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}', t) \mathbf{x}' \quad (3.4b)$$

$$\mathbf{Q}(t) = \int d^3\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}', t) \frac{3\mathbf{x}'\mathbf{x}' - \mathbf{x}'^2 \mathbf{1}}{2} \quad (3.4c)$$

$$\mathbf{m}(t) = \int d^3\mathbf{x}' \frac{1}{2c} \mathbf{x}' \times \mathbf{j}(\mathbf{x}', t) \quad (3.4d)$$

dove $q, \mathbf{p}, \mathbf{Q}, \mathbf{m}$ sono chiamati rispettivamente *carica elettrica*, *momento di dipolo elettrico*, *momento di quadrupolo elettrico* e *momento di dipolo magnetico* della distribuzione di carica ρ, \mathbf{j} e sono una funzione scalare, vettoriale, diadica simmetrica senza traccia e vettoriale.

Lo sviluppo risulta

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, t) = & \left[\frac{q}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{p}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{\dot{\mathbf{p}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}}}{c|\mathbf{x}|} + \right. \\ & \left. + \frac{\mathbf{Q}(t_-) \cdot \cdot \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^3} + \frac{\dot{\mathbf{Q}}(t_-) \cdot \cdot \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}{c|\mathbf{x}|^2} + \frac{\ddot{\mathbf{Q}}(t_-) \cdot \cdot \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}{3c^2|\mathbf{x}|} \right]_{t_- = t - |\mathbf{x}|/c} \end{aligned} \quad (3.5a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = & \left[\frac{\dot{\mathbf{p}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}}}{c|\mathbf{x}|} + \frac{\dot{\mathbf{Q}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}}}{3c|\mathbf{x}|^2} + \frac{\ddot{\mathbf{Q}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}}}{3c^2|\mathbf{x}|} \right. \\ & \left. + \frac{\mathbf{m}(t_-) \times \hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{\dot{\mathbf{m}}(t_-) \times \hat{\mathbf{x}}}{c|\mathbf{x}|} \right]_{t_- = t - |\mathbf{x}|/c} \end{aligned} \quad (3.5b)$$

I potenziali Φ, \mathbf{A} sono calcolati al tempo $t_- = t - |\mathbf{x}|/c$ detto tempo ritardato.

Infatti, ad un generico istante di tempo t , il campo elettromagnetico rivelato in un punto \mathbf{x} non è prodotto dall'onda emessa al tempo t ma da quella emessa ad un tempo precedente poichè l'interazione elettromagnetica si propaga nel vuoto alla velocità finita c e impiega quindi un tempo non nullo a percorrere una qualsiasi distanza.

Dimostrazione (3.5). Le equazioni per i potenziali Φ, \mathbf{A} nel gauge di Lorentz (1.9) hanno la stessa forma della (2.1) ed è possibile quindi risolverle utilizzando lo sviluppo in multipoli (2.6) sostituendo $\psi_f(\mathbf{x}, t)$ e $f(\mathbf{x}, t)$ prima con Φ e ρ e poi con \mathbf{A} e \mathbf{j}/c .

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \left[\frac{\rho^{(0)}(t_-)}{|\mathbf{x}|} + \frac{\boldsymbol{\rho}^{(1)}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{\dot{\boldsymbol{\rho}}^{(1)}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}}}{c|\mathbf{x}|} + \frac{\boldsymbol{\rho}^{(2)}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^3} \right. \\ \left. + \frac{\dot{\boldsymbol{\rho}}^{(2)}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}}{c|\mathbf{x}|^2} + \frac{\ddot{\boldsymbol{\rho}}^{(2)}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}}{3c^2|\mathbf{x}|} + \frac{\dot{\rho}'^{(2)}(t_-)}{3c^2|\mathbf{x}|} \right]_{t_- = t - |\mathbf{x}|/c} \quad (3.6a)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \left[\frac{j^{(0)}(t_-)}{c|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{j}^{(1)}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}}}{c|\mathbf{x}|^2} + \frac{\dot{\mathbf{j}}^{(1)}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}}}{c^2|\mathbf{x}|} \right]_{t_- = t - |\mathbf{x}|/c} \quad (3.6b)$$

dove i momenti sono dati dalle espressioni (vedi (2.7))

$$\rho^{(0)}(t) = \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, t) \quad (3.7a)$$

$$\boldsymbol{\rho}^{(1)}(t) = \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \quad (3.7b)$$

$$\boldsymbol{\rho}^{(2)}(t) = \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{3\mathbf{x}\mathbf{x} - \mathbf{x}^2 \mathbf{1}}{2} \quad (3.7c)$$

$$\rho'^{(2)}(t) = \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{|\mathbf{x}|^2}{2} \quad (3.7d)$$

$$\mathbf{j}^{(0)}(t) = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \quad (3.7e)$$

$$\mathbf{j}^{(1)}(t) = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \quad (3.7f)$$

L'espansione di \mathbf{A} è stata troncata ai primi tre termini per ragioni che diverranno chiare in seguito.

In accordo con i momenti definiti precedentemente (vedi (3.4)) possiamo identificare

$$\rho^{(0)}(t) = q(t) \quad (3.8a)$$

$$\boldsymbol{\rho}^{(1)}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (3.8b)$$

$$\boldsymbol{\rho}^{(2)}(t) = \mathbf{Q}(t) \quad (3.8c)$$

Inoltre definiamo

$$\rho'^{(2)}(t) = Q'(t) \quad (3.9)$$

Per l'equazione di conservazione della carica (1.2) si ha

$$\begin{aligned}
\dot{q}(t) &= \frac{d}{dt} \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, t) \\
&= \int d^3\mathbf{x} \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \\
&= - \int_{E^3} d^3\mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \\
&= - \oint_{\partial E^3} d^2\mathbf{x} \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = 0
\end{aligned} \tag{3.10}$$

dove nell'ultimo passaggio si è fatto uso del teorema di Guass.

L'ultimo integrale è nullo perchè l'integrazione viene fatta sulla frontiera dello spazio delle configurazioni dove la densità di corrente \mathbf{j} è nulla essendo la sorgente localizzata in una regione di spazio di lunghezza caratteristica d .

Ancora per l'equazione (1.2) e la seguente identità

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot (\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)\mathbf{x}) - (\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t))\mathbf{x} \tag{3.11}$$

si ha

$$\begin{aligned}
\mathbf{j}^{(0)}(t) &= \int d^3\mathbf{x} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \\
&= \int d^3\mathbf{x} \left[\nabla \cdot (\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)\mathbf{x}) - (\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t))\mathbf{x} \right] \\
&= \oint_{\partial E^3} d^2\mathbf{x} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)\mathbf{x}) - \int d^3\mathbf{x} (\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t))\mathbf{x} \\
&= \int d^3\mathbf{x} \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}, t)\mathbf{x} \\
&= \frac{d}{dt} \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{x} \\
&= \dot{\mathbf{p}}(t)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

dove nella seconda riga l'integrale di superficie è nullo per considerazioni analoghe a quelle fatte immediatamente sopra.

Possiamo poi scomporre la diade $\mathbf{j}^{(1)}(t)$ in una parte antisimmetrica, una simmetrica senza traccia e una contenente la traccia

$$\mathbf{j}^{(1)}(t) = \mathbf{j}^{(1)ts}(t) + \mathbf{j}^{(1)a}(t) + \frac{1}{3}j^{(1)t}(t)\mathbf{1} \tag{3.14}$$

Le tre parti risultano

$$\mathbf{j}^{(1)ts}(t) = \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{1}{2}(\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)\mathbf{x} + \mathbf{x}\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)) - \frac{1}{3}\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{x}\mathbf{1} \right] \quad (3.15a)$$

$$\mathbf{j}^{(1)a}(t) = \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{2}(\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)\mathbf{x} - \mathbf{x}\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)) \quad (3.15b)$$

$$j^{(1)t}(t) = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{x} \quad (3.15c)$$

$$(3.15d)$$

Per la seguente identità

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)\mathbf{x} + \mathbf{x}\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)) - \frac{1}{3}\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{x}\mathbf{1} = \\ & \frac{1}{3} \left[\nabla \cdot \left(\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \frac{3\mathbf{x}\mathbf{x} - \mathbf{x}^2\mathbf{1}}{2} \right) - (\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)) \frac{3\mathbf{x}\mathbf{x} - \mathbf{x}^2\mathbf{1}}{2} \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

e l'equazione (1.2), risulta che

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^{(1)ts}(t) &= \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{1}{2}(\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)\mathbf{x} + \mathbf{x}\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)) - \frac{1}{3}\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{x}\mathbf{1} \right] \\ &= \frac{1}{3} \int d^3\mathbf{x} \left[\nabla \cdot \left(\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \frac{3\mathbf{x}\mathbf{x} - \mathbf{x}^2\mathbf{1}}{2} \right) - (\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)) \frac{3\mathbf{x}\mathbf{x} - \mathbf{x}^2\mathbf{1}}{2} \right] \\ &= \frac{1}{3} \oint_{\partial E^3} d^2\mathbf{x} \mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \frac{3\mathbf{x}\mathbf{x} - \mathbf{x}^2\mathbf{1}}{2} \right) - \frac{1}{3} \int d^3\mathbf{x} (\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)) \frac{3\mathbf{x}\mathbf{x} - \mathbf{x}^2\mathbf{1}}{2} \\ &= \frac{1}{3} \int d^3\mathbf{x} \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \frac{3\mathbf{x}\mathbf{x} - \mathbf{x}^2\mathbf{1}}{2} \\ &= \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{3\mathbf{x}\mathbf{x} - \mathbf{x}^2\mathbf{1}}{2} \\ &= \frac{1}{3} \dot{\mathbf{Q}}(t) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Utilizzando il prodotto esterno e il duale di Hodge definiti rispettivamente dalle relazioni $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a}\mathbf{b} - \mathbf{b}\mathbf{a}$, $(*\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, dove \mathbf{a} , \mathbf{b} sono due vettori qualsiasi, si può dimostrare l'identità

$$*(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \quad (3.18)$$

Considerando la (3.18) e la definizione di momento di dipolo magnetico (3.4d) si ha

$$\begin{aligned}
\mathbf{j}^{(1)a}(t) &= \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{2} (\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)\mathbf{x} - \mathbf{x}\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)) \\
&= - \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{2} \mathbf{x} \wedge \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \\
&= - \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{2} * (\mathbf{x} \times \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)) \\
&= -c * \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{2c} \mathbf{x} \times \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \\
&= -c * \mathbf{m}(t)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Per l'identità

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{x} = \nabla \cdot (\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \frac{\mathbf{x}^2}{2}) - (\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)) \frac{\mathbf{x}^2}{2} \tag{3.20}$$

si ha inoltre che

$$\begin{aligned}
j^{(1)t}(t) &= \int d^3\mathbf{x} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{x} \\
&= \int d^3\mathbf{x} \left[\nabla \cdot (\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \frac{\mathbf{x}^2}{2}) - (\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)) \frac{\mathbf{x}^2}{2} \right] \\
&= \oint_{\partial E^3} d^2\mathbf{x} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \frac{\mathbf{x}^2}{2}) - \int d^3\mathbf{x} (\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)) \frac{\mathbf{x}^2}{2} \\
&= \int d^3\mathbf{x} \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \frac{\mathbf{x}^2}{2} \\
&= \frac{d}{dt} \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{\mathbf{x}^2}{2} \\
&= \dot{Q}(t)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Utilizzando l'equazione (3.14) e i risultati (3.17), (3.19), (3.21) possiamo quindi riscrivere la diade $\mathbf{j}^{(1)}(t)$ in funzione di $\dot{Q}(t)$, $\mathbf{m}(t)$, $\dot{Q}'(t)$

$$\mathbf{j}^{(1)}(t) = \frac{1}{3} (\dot{Q}(t) + \dot{Q}'(t)\mathbf{1}) - c * \mathbf{m}(t) \tag{3.22}$$

$\mathbf{j}^0(t)$ e $\mathbf{j}^1(t)$ risultano quindi legati alle derivate prime dei momenti di multipolo presenti nell'espansione del potenziale scalare Φ come conseguenza, in ultima analisi, dell'equazione di conservazione della carica.

Risulta ora chiaro perchè l'espansione di \mathbf{A} sia stata troncata ai momenti del primo ordine.

Infatti, se così non fosse stato, si sarebbero considerati termini trascurabili perchè contenenti derivate dei multipoli di ordine superiore rispetto a quelle già presenti nell'espansione del potenziale scalare Φ .

Sostituendo tutte le espressioni trovate nelle equazioni (3.6a),(3.6b) otteniamo

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \left[\frac{q}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{p}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{\dot{\mathbf{p}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}}}{c|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{Q}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^3} + \frac{\dot{\mathbf{Q}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}}{c|\mathbf{x}|^2} + \frac{\ddot{\mathbf{Q}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}}{3c^2|\mathbf{x}|} + \frac{\ddot{\mathbf{Q}}'(t_-)}{3c^2|\mathbf{x}|} \right]_{t_- = t - |\mathbf{x}|/c} \quad (3.23a)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \left[\frac{\dot{\mathbf{p}}(t_-)}{c|\mathbf{x}|} + \frac{\dot{\mathbf{Q}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}}}{3c|\mathbf{x}|^2} + \frac{\ddot{\mathbf{Q}}'(t_-) \hat{\mathbf{x}}}{3c|\mathbf{x}|^2} + \frac{\ddot{\mathbf{Q}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}}}{3c^2|\mathbf{x}|} + \frac{\ddot{\mathbf{Q}}'(t_-) \hat{\mathbf{x}}}{3c^2|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{m}(t_-) \times \hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{\dot{\mathbf{m}}(t_-) \times \hat{\mathbf{x}}}{c|\mathbf{x}|} \right]_{t_- = t - |\mathbf{x}|/c} \quad (3.23b)$$

Il termine in $\ddot{\mathbf{Q}}'(t_-)$ nell'equazione (3.23b) può essere rimosso con una trasformazione di gauge utilizzando la funzione scalare

$$f(\mathbf{x}, t) = -\frac{\dot{\mathbf{Q}}'(t - |\mathbf{x}|/c)}{3c|\mathbf{x}|} \quad (3.24)$$

La funzione f rappresenta fisicamente un'onda sferica uscente e perciò soddisfa l'equazione d'onda (1.8). Con una trasformazione di questo tipo quindi il gauge di Lorentz è preservato.

Utilizzando le espressioni dei potenziali (3.5) e la equazioni (1.3) si ottiene lo sviluppo in multipoli dei campi \mathbf{E} e \mathbf{B}

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = & \left[\frac{q\hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{3\mathbf{p}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{p}(t_-)}{|\mathbf{x}|^3} + \frac{3\dot{\mathbf{p}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{p}}(t_-)}{c|\mathbf{x}|^2} + \frac{\hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{p}}(t_-))}{c^2|\mathbf{x}|} + \frac{5\mathbf{Q}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} - 2\mathbf{Q}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^4} \right. \\ & + \frac{5\dot{\mathbf{Q}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} - 2\dot{\mathbf{Q}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}}}{c|\mathbf{x}|^3} + \frac{2\ddot{\mathbf{Q}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} - \ddot{\mathbf{Q}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}}}{c^2|\mathbf{x}|^2} \\ & \left. + \frac{\hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{Q}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}})}{3c^3|\mathbf{x}|} + \frac{\hat{\mathbf{x}} \times \dot{\mathbf{m}}(t_-)}{c|\mathbf{x}|^2} + \frac{\hat{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{m}}(t_-)}{c^2|\mathbf{x}|} \right]_{t_- = t - |\mathbf{x}|/c} \quad (3.25a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = & \left[-\frac{\hat{\mathbf{x}} \times \dot{\mathbf{p}}(t_-)}{c|\mathbf{x}|^2} - \frac{\hat{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{p}}(t_-)}{c^2|\mathbf{x}|} - \frac{\hat{\mathbf{x}} \times \dot{\mathbf{Q}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}}}{c|\mathbf{x}|^3} \right. \\
& - \frac{\hat{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{Q}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}}}{c^2|\mathbf{x}|^2} - \frac{\hat{\mathbf{x}} \times \ddot{\ddot{\mathbf{Q}}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}}}{3c^3|\mathbf{x}|} + \frac{3\mathbf{m}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{m}(t_-)}{|\mathbf{x}|^3} \\
& \left. + \frac{3\dot{\mathbf{m}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{m}}(t_-)}{c|\mathbf{x}|^2} + \frac{\hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{m}}(t_-))}{c^2|\mathbf{x}|} \right]_{t_- = t - |\mathbf{x}|/c}
\end{aligned} \tag{3.25b}$$

Utilizzando le seguenti identità

$$\nabla \frac{f(|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|} = \frac{\hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|} \left[\dot{f}(|\mathbf{x}|) - \frac{f(|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|} \right] \tag{3.26a}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \nabla \frac{f(|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|} = & \frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{x}|^2} \left[\dot{f}(|\mathbf{x}|) - \frac{f(|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|} \right] \\
& + \frac{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|} \left[\ddot{f}(|\mathbf{x}|) - \frac{3\dot{f}(|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|} + \frac{3f(|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|^2} \right]
\end{aligned} \tag{3.26b}$$

si verifica facilmente che i potenziali Φ , \mathbf{A} dati dall'equazione (3.5) possono essere riscritti come

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{|\mathbf{x}|} - \nabla \cdot \left[\frac{\mathbf{p}(t - |\mathbf{x}|/c)}{|\mathbf{x}|} \right] + \nabla \nabla \cdot \left[\frac{\mathbf{Q}(t - |\mathbf{x}|/c)}{3|\mathbf{x}|} \right] \tag{3.27a}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\dot{\mathbf{p}}(t - |\mathbf{x}|/c)}{c|\mathbf{x}|} - \nabla \cdot \left[\frac{\dot{\mathbf{Q}}(t - |\mathbf{x}|/c)}{3c|\mathbf{x}|} \right] + \nabla \times \left[\frac{\mathbf{m}(t - |\mathbf{x}|/c)}{|\mathbf{x}|} \right] \tag{3.27b}$$

Applicando le formule (1.3) ai potenziali Φ , \mathbf{A} dati dalle (3.27) e sfruttando le (3.26), la simmetria e la traccia nulla della diade $\mathbf{Q}(t)$ e l'identità

$$\begin{aligned}
\nabla \nabla \nabla \frac{f(|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|} = & \frac{\hat{\mathbf{x}}\mathbf{1} + \mathbf{1}\hat{\mathbf{x}} + (\hat{\mathbf{x}}\mathbf{1})^t}{|\mathbf{x}|^2} \left[\ddot{f}(|\mathbf{x}|) - \frac{3\dot{f}(|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|} + \frac{3f(|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|^2} \right] \\
& + \frac{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|} \left[\ddot{\ddot{f}}(|\mathbf{x}|) - \frac{6\ddot{f}(|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|} + \frac{15\dot{f}(|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|^2} - \frac{15f(|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|^3} \right]
\end{aligned} \tag{3.28}$$

dove si è utilizzata la notazione $((\hat{\mathbf{x}}\mathbf{1})^t)_{ijk} = \delta_{ik}x_j$, si ottengono le equazioni (3.25).

Capitolo 4

Regime di campo vicino e di campo lontano

Il *regime di campo vicino* è definito dalle condizioni

$$|\rho(\mathbf{x}', t)| \gg \left| \frac{|\mathbf{x}'|}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}', t) \right| \gg \left| \left(\frac{|\mathbf{x}'|}{c} \right)^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}(\mathbf{x}', t) \right| \gg \dots, \quad \text{per } |\mathbf{x}'| \leq d; \quad (4.1a)$$

$$|\mathbf{j}(\mathbf{x}', t)| \gg \left| \frac{|\mathbf{x}'|}{c} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}(\mathbf{x}', t) \right| \gg \left| \left(\frac{|\mathbf{x}'|}{c} \right)^2 \frac{\partial^2 \mathbf{j}}{\partial t^2}(\mathbf{x}', t) \right| \gg \dots, \quad \text{per } |\mathbf{x}'| \leq d; \quad (4.1b)$$

Ragionando come già fatto per le condizioni (3.1) e sostituendo d con $|\mathbf{x}|$ è immediato verificare che le condizioni (4.1) implicano che la variazione relativa di ρ o \mathbf{j} nel tempo $|\mathbf{x}|/c$ sia trascurabile.

Per questo motivo, il *regime di campo vicino* è anche detto *regime quasistatico*.

In questa condizione l'espansione in multipoli dei campi \mathbf{E} , \mathbf{B} risulta data dai soli termini con il numero più basso di derivate valutati al tempo t invece che al tempo ritardato $t_- = t - |\mathbf{x}|/c$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{q\hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{3\mathbf{p}(t) \cdot \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{p}(t)}{|\mathbf{x}|^3} + \frac{5\mathbf{Q}(t) \cdot \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}} - 2\mathbf{Q}(t) \cdot \hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^4} \quad (4.2a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{3\mathbf{m}(t) \cdot \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{m}(t)}{|\mathbf{x}|^3} \quad (4.2b)$$

Dimostrazione (4.2). Indichiamo con $\mu(t)$ un generico momento di multipolo che in gene-

rale si può scrivere come (vedi eq.(3.4))

$$\mu(t) = \int d^3 \mathbf{x}' w(\mathbf{x}', t) P^k(\mathbf{x}') \quad (4.3)$$

dove $w(\mathbf{x}, t)$ rappresenta ρ o una componente di \mathbf{j} mentre P^k è un polinomio omogeneo di grado k .

Possiamo derivare la (4.3)

$$\frac{d^n \mu(t)}{dt^n} = \int d^3 \mathbf{x}' \frac{\partial^n w}{\partial t^n}(\mathbf{x}', t) P^k(\mathbf{x}') \quad (4.4)$$

e stimarne l'ordine di grandezza come

$$\left| \frac{d^n \mu(t)}{dt^n} \right| \sim d^{k+3} \max_{\mathbf{x}'} \left| \frac{\partial^n w}{\partial t^n}(\mathbf{x}', t) \right| \quad (4.5)$$

dove d è la dimensione lineare della regione dove è localizzata la distribuzione di carica. Identificando quindi sostanzialmente l'ordine di grandezza di un momento con la derivata di ρ o \mathbf{j} e considerando le condizioni di *regime di campo vicino* (4.1) possiamo scrivere

$$|\mu(t)| \gg \frac{|\mathbf{x}|}{c} |\dot{\mu}(t)| \gg \left(\frac{|\mathbf{x}|}{c} \right)^2 |\ddot{\mu}(t)| \gg \dots \quad (4.6)$$

Poichè l'equazione (4.6) è valida per ogni istante di tempo, risulta valida anche quando t è sostituito da $t - |\mathbf{x}|/c$.

L'espansione (3.25) per la (4.6) è quindi dominata dai termini con il numero più basso di derivate di ogni momento.

Inoltre perchè, come già sottolineato, le condizioni (4.1) di *regime di campo vicino* implicano che la distribuzione di carica non vari apprezzabilmente in un tempo $t = |\mathbf{x}|/c$, il tempo ritardato $t_- = t - |\mathbf{x}|/c$ può essere sostituito da t .

Il *regime di campo lontano* è definito dalle condizioni

$$|\rho(\mathbf{x}', t)| \ll \left| \frac{|\mathbf{x}|}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}', t) \right| \ll \left| \left(\frac{|\mathbf{x}|}{c} \right)^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}(\mathbf{x}', t) \right| \ll \dots, \quad \text{per } |\mathbf{x}'| \leq d; \quad (4.7a)$$

$$|\mathbf{j}(\mathbf{x}', t)| \ll \left| \frac{|\mathbf{x}|}{c} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}(\mathbf{x}', t) \right| \ll \left| \left(\frac{|\mathbf{x}|}{c} \right)^2 \frac{\partial^2 \mathbf{j}}{\partial t^2}(\mathbf{x}', t) \right| \ll \dots, \quad \text{per } |\mathbf{x}'| \leq d; \quad (4.7b)$$

Le condizioni (4.7), ragionando come già fatto per le condizioni di *regime di campo vicino*, implicano che la variazione relativa della distribuzione di carica in un tempo $t = |\mathbf{x}|/c$ non sia trascurabile.

I campi \mathbf{E} e \mathbf{B} sono dati dalle seguenti espressioni

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \left[\frac{q\hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{\hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}} \times \dot{\mathbf{p}}(t_-))}{c^2|\mathbf{x}|} + \frac{\hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{Q}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}})}{3c^3|\mathbf{x}|} + \frac{\hat{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{m}}(t_-)}{c^2|\mathbf{x}|} \right]_{t_- = t - |\mathbf{x}|/c} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \left[-\frac{\hat{\mathbf{x}} \times \dot{\mathbf{p}}(t_-)}{c^2|\mathbf{x}|} - \frac{\hat{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{Q}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}}}{3c^3|\mathbf{x}|} + \frac{\hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{m}}(t_-))}{c^2|\mathbf{x}|} \right]_{t_- = t - |\mathbf{x}|/c} \quad (4.9)$$

Dimostrazione (4.8). Considerando le condizioni (4.7) e ragionando in modo analogo a quanto fatto per ottenere le espressioni (4.2) si ha

$$|\mu(t)| \ll \frac{|\mathbf{x}|}{c} |\dot{\mu}(t)| \ll \left(\frac{|\mathbf{x}|}{c} \right)^2 |\ddot{\mu}(t)| \ll \dots \quad (4.10)$$

dove μ indica una generica componente di un momento di multipolo.

Lo sviluppo in multipoli (3.25) è perciò dominato dai termini contenenti le derivate dei momenti di ordine superiore.

Quando il termine Coulombiano nell'equazione (4.8) può essere trascurato, cioè nelle condizione in cui $q \approx 0$ oppure per grandi valori di $|\mathbf{x}|$, si ha il cosiddetto *regime di radiazione* caratterizzato dalle seguenti condizioni

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (4.11a)$$

$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (4.11b)$$

$$|\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)| = |\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)| \sim \frac{1}{|\mathbf{x}|} \quad (4.11c)$$

Il *regime di radiazione* rappresenta perciò un caso particolare del *regime di campo lontano*.

Nell'analisi sopra sono state definite due lunghezze caratteristiche: la dimensione della sorgente d e la distanza del punto di osservazione dall'origine \mathbf{x} .

Definiamo inoltre λ la lunghezza d'onda del campo elettromagnetico risultante per cui $\lambda \approx c\tau$ dove τ è il periodo caratteristico dell'onda elettromagnetica.

Dalle formule (3.25) si nota come τ coincida con il periodo tipico di variazione relativa della sorgente ρ, \mathbf{j} in quanto i campi sono funzione dei momenti di multipolo a loro volta dipendenti da ρ, \mathbf{j} .

Le condizioni (3.1) implicano, per quanto detto in precedenza, che la variazione della sorgente nel tempo $t = d/c$ sia trascurabile e quindi risultano equivalenti alla disuguaglianza $\tau \gg d/c$ da cui segue

$$d \ll \lambda \quad (4.12)$$

E' facile vedere, facendo un ragionamento esattamente analogo a quello fatto immediatamente sopra sostituendo $|\mathbf{x}|$ con d , che le equazioni (4.1) fissano il rapporto relativo tra gli ordini di grandezza di λ e $|\mathbf{x}|$.

Si ha infatti

$$|\mathbf{x}| \ll \lambda \quad \text{regime di campo vicino} \quad (4.13a)$$

$$\lambda \ll |\mathbf{x}| \quad \text{regime di campo lontano} \quad (4.13b)$$

L'ordine di grandezza dei momenti di multipolo può essere stimato utilizzando le definizioni (3.4)

$$q \sim q_0 \quad (4.14a)$$

$$p \sim q_0 d \quad (4.14b)$$

$$Q \sim q_0 d^2 \quad (4.14c)$$

$$m \sim \frac{q_0}{c} d \frac{d}{\tau} = \frac{q_0 d^2}{\lambda} \quad (4.14d)$$

dove q_0 è la carica caratteristica della sorgente.

Nella trattazione seguente si utilizzerà la notazione A_b dove A indica il campo elettrico o magnetico a cui ci si riferisce e b identifica il multipolo considerato.

Si indicherà con la lettera q la carica elettrica, mentre con $\mathbf{p}, \mathbf{Q}, \mathbf{m}$ si farà riferimento rispettivamente ai momenti di: *dipolo elettrico*, *quadrupolo elettrico* e *dipolo magnetico*.

Nel *regime di campo vicino* l'ordine di grandezza dei termini che contengono i momenti

di multipolo presenti nelle espressioni dei campi \mathbf{E} e \mathbf{B} dati dalle equazioni (4.2) è

$$E_q \sim \frac{q}{r^2} \sim \frac{q_0}{r^2} \quad B_q \sim 0 \quad (4.15a)$$

$$E_p \sim \frac{p}{r^3} \sim \frac{q_0 d}{r^3} \quad B_p \sim 0 \quad (4.15b)$$

$$E_Q \sim \frac{Q}{r^4} \sim \frac{q_0 d^2}{r^4} \quad B_Q \sim 0 \quad (4.15c)$$

$$E_m \sim 0 \quad B_m \sim \frac{m}{r^3} \sim \frac{q d^2}{\lambda r^3} \quad (4.15d)$$

$$(4.15e)$$

dove $r \sim |\mathbf{x}|$.

Dalle (4.15) e la condizione (3.2) necessaria affinché sia valido lo sviluppo in multipoli segue che

$$E_m \sim 0 \ll E_Q \sim E_p \frac{d}{r} \ll E_p \sim E_q \frac{d}{r} \ll E_q \quad (4.16a)$$

$$B_q \sim B_Q \sim B_p \sim 0 \ll B_m \sim E_q \frac{d^2}{r \lambda} \quad (4.16b)$$

Nel *regime di campo vicino* quindi il campo elettrico è approssimativamente quello Coulombiano di una carica elettrica q , essendo i contributi degli altri termini trascurabili. Inoltre l'unico termine non nullo del campo induzione magnetica \mathbf{B} è quello di momento magnetico che è a sua volta molto più piccolo del termine Coulombiano del campo elettrico.

Nel *regime di radiazione*, utilizzando cioè le equazioni (4.8) trascurando il termine Coulombiano nell'espressione del campo elettrico \mathbf{E} , l'ordine di grandezza dei termini risulta

$$E_p \sim B_p \sim \frac{\ddot{p}}{c^2 r} \sim \frac{p}{c^2 \tau^2 r} \sim \frac{q_0 d}{\lambda^2 r} \quad (4.17a)$$

$$E_Q \sim B_Q \sim \frac{\ddot{Q}}{c^3 r} \sim \frac{Q}{c^3 \tau^3 r} \sim \frac{q_0 d^2}{\lambda^3 r} \quad (4.17b)$$

$$E_m \sim B_m \sim \frac{\ddot{m}}{c^2 r} \sim \frac{m}{c^2 \tau^2 r} \sim \frac{q_0 d^2}{\lambda^3 r} \quad (4.17c)$$

$$(4.17d)$$

Dalle (4.17) e per la (4.12)

$$E_m \sim B_m \sim E_Q \sim B_Q \sim E_p \frac{d}{\lambda} \sim B_p \frac{d}{\lambda} \ll E_p \sim B_p \quad (4.18)$$

In generale quindi il contributo dominante ai campi elettrico \mathbf{E} e a quello induzione magnetica \mathbf{B} è dato dai termini di dipolo elettrico. Si farà riferimento a questo risultato quando si tratterà la radiazione emessa da una carica in moto nel *regime di radiazione*.

Capitolo 5

Potenza irradiata nel regime di radiazione

La potenza irradiata nel punto \mathbf{x} lungo la direzione $\hat{\mathbf{x}}$ per unità di angolo solido da una generica distribuzione di carica è data da

$$\frac{dP}{do}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{S}(\mathbf{x}, t)|\mathbf{x}|^2 \cdot \hat{\mathbf{x}} \quad (5.1)$$

dove $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ è il *vettore di Poynting* definito dalla relazione

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (5.2)$$

Nel *regime di radiazione* si ha

$$\frac{dP}{do}(\mathbf{x}, t) = \frac{c}{4\pi} (|\mathbf{x}| \mathbf{E}(\mathbf{x}, t))^2 = \frac{c}{4\pi} (|\mathbf{x}| \mathbf{B}(\mathbf{x}, t))^2 \quad (5.3)$$

Dimostrazione (5.3). Utilizzando la definizione (5.2), l'identità

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (5.4)$$

e la (4.11b) si ottiene che

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) &= \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \\
&= \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \times (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) \\
&= \frac{c}{4\pi} \left[\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)^2 \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{x}} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \right] \\
&= \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)^2 \hat{\mathbf{x}}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Sostituendo la (5.5) nell'equazione (5.1) si ottiene immediatamente la prima parte della (5.3). La seconda parte può essere dimostrata in modo analogo.

Inoltre considerando lo sviluppo in multipoli dei campi \mathbf{E} e \mathbf{B} (4.8) si ottiene

$$\frac{dP}{do} = \frac{1}{4\pi c^3} \left| -\hat{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{p}}(t_-) - \frac{1}{3c} \hat{\mathbf{x}} \times (\ddot{\mathbf{Q}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{m}}(t_-)) \right|_{t_- = t - |\mathbf{x}|/c}^2 \tag{5.6}$$

Dimostrazione (5.6). Il *regime di radiazione* rappresenta un caso particolare del *regime di campo lontano*. Sostituendo quindi l'espansione in multipoli del campo \mathbf{B} data dall'equazione (4.9) nella seconda parte della (5.3) si ottiene immediatamente la (5.6)

La potenza totale irradiata può essere ottenuta integrando la potenza per unità di angolo solido su una sfera unitaria

$$P(|\mathbf{x}|, t) = \int d^2\hat{\mathbf{x}} \frac{dP}{do}(|\mathbf{x}|\hat{\mathbf{x}}, t) \tag{5.7}$$

dove $d^2\hat{\mathbf{x}}$ è l'usuale elemento di area vettoriale. Il risultato dell'integrazione è

$$P(|\mathbf{x}|, t) = \frac{2}{3c^3} \left[\ddot{\mathbf{p}}(t_-)^2 + \frac{1}{30c^2} \ddot{\mathbf{Q}}(t_-)^2 + \ddot{\mathbf{m}}(t_-)^2 \right]_{t_- = t - |\mathbf{x}|/c} \tag{5.8}$$

Dimostrazione (5.8). Sviluppando il quadrato della relazione (5.6), utilizzando le identità vettoriali

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \tag{5.9}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \tag{5.10}$$

e considerando la proprietà del prodotto misto per cui

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \quad (5.11)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{dP}{do}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c^3} & \left[\ddot{\mathbf{p}}(t_-)^2 - (\ddot{\mathbf{p}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}})^2 + \frac{1}{9c^2} [(\ddot{\mathbf{Q}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}})^2 - (\ddot{\mathbf{Q}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}})^2] \right. \\ & + \ddot{\mathbf{m}}(t_-)^2 - (\ddot{\mathbf{m}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}})^2 + 2\ddot{\mathbf{p}}(t_-) \times \ddot{\mathbf{m}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}} \\ & + \frac{2}{3c} [\ddot{\mathbf{p}}(t_-) \cdot (\ddot{\mathbf{Q}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}}) - (\ddot{\mathbf{p}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}})(\ddot{\mathbf{Q}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}) \\ & \left. + \frac{2}{3c} \ddot{\mathbf{m}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}} \times (\ddot{\mathbf{Q}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}}) \right]_{t_- = t - |\mathbf{x}|/c} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Integrando l'espressione (5.12) si ottiene la potenza totale.

I termini che contengono un numero dispari di fattori $\hat{\mathbf{x}}$ danno un contributo nullo all'integrazione perchè, essendo l'elemento d'area $d^2\hat{\mathbf{x}}$ invariante sotto arbitrarie rotazioni, i valori $\hat{\mathbf{x}}$ e $-\hat{\mathbf{x}}$ contribuiscono con uguale peso.

Si ha che

$$\int d^2\hat{\mathbf{x}} = 4\pi \quad (5.13)$$

essendo l'integrale di superficie di una sfera unitaria.

Inoltre dati due vettori qualsiasi \mathbf{a}, \mathbf{b}

$$\int d^2\hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{a} \mathbf{b} = k_2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (5.14)$$

con k_2 una costante da determinare.

Infatti, l'integrale (5.14) è una funzione rotazionalmente invariante, lineare e simmetrica dei vettori \mathbf{a}, \mathbf{b} . La costante k_2 può essere determinata utilizzando un sistema di coordinate sferiche ponendo $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{e}_3$

$$\begin{aligned} k_2 &= \int d^2\hat{\mathbf{x}} (\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_3)^2 \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos^2 \theta \\ &= -2\pi \int_1^{-1} du u^2 \\ &= -2\pi \left[\frac{u^3}{3} \right]_1^{-1} = \frac{4\pi}{3} \end{aligned} \quad (5.15)$$

dove si è fatto uso del cambio di variabile $u = \cos \theta$.

Infine dati quattro arbitrari vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ si ha

$$\begin{aligned} \int d^2 \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} \cdots \mathbf{abcd} &= \int d^2 \hat{\mathbf{x}} (\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{a})(\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{b})(\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{c})(\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{d}) \\ &= k_4 [\mathbf{a} \cdot \mathbf{bc} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{db} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{cb} \cdot \mathbf{d}] \end{aligned} \quad (5.16)$$

perchè l'integrale è una funzione rotazionalmente invariante, lineare e simmetrica dei quattro vettori.

k_4 è un'altra costante da determinare ed è la stessa per tutti gli addendi perchè come si vede facilmente dall'equazione (5.16) l'integrando è simmetrico rispetto ai vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$.

k_4 può essere calcolata utilizzando le coordinate sferiche come sopra e ponendo $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{d} = \mathbf{e}_3$

$$\begin{aligned} 3k_4 &= \int d^2 \hat{\mathbf{x}} (\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_3)^4 \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos^4 \theta \\ &= -2\pi \int_1^{-1} du u^4 \\ &= -2\pi \left[\frac{u^5}{5} \right]_1^{-1} = \frac{4\pi}{5} \end{aligned} \quad (5.17)$$

dove $u = \cos \theta$.

Nel proseguo si ometterà di indicare la dipendenza esplicita degli elementi dal tempo per non appesantire troppo la notazione.

In generale, data una matrice \mathbf{A} , si ha la seguente identità

$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} \cdot \left(\sum_{ij} \mathbf{A}_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \right) \cdot \hat{\mathbf{x}} = \sum_{ij} \mathbf{A}_{ij} \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \cdot \hat{\mathbf{x}} \quad (5.18)$$

dove $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ indica il prodotto diadico tra due vettori della base canonica. Integrando la (5.18) ed utilizzando la relazione (5.14) si ottiene

$$\begin{aligned} \int d^2 \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} &= \sum_{ij} A_{ij} \int d^2 \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_i \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_j \\ &= \sum_{ij} A_{ij} \frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \\ &= \frac{4\pi}{3} \text{tr} \mathbf{A} \end{aligned} \quad (5.19)$$

perciò sostituendo nella relazione (5.19) $\mathbf{A} = \ddot{\mathbf{Q}} \cdot \ddot{\mathbf{Q}}$

$$\begin{aligned} \int d^2 \hat{\mathbf{x}} (\ddot{\mathbf{Q}} \cdot \hat{\mathbf{x}})^2 &= \int d^2 \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{Q}} \cdot \ddot{\mathbf{Q}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \frac{4\pi}{3} \text{tr} (\ddot{\mathbf{Q}} \cdot \ddot{\mathbf{Q}}) \\ &= \frac{4\pi}{3} \sum_{ij} \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} = \frac{4\pi}{3} \ddot{\mathbf{Q}} \cdot \ddot{\mathbf{Q}} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Nel calcolo della traccia si è utilizzato il fatto che \mathbf{Q} è simmetrica.

Facendo uso della relazione (5.16) e sviluppando in componenti si ottiene

$$\begin{aligned} \int d^2 \hat{\mathbf{x}} (\ddot{\mathbf{Q}} \cdot \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}})^2 &= \int d^2 \hat{\mathbf{x}} \sum_{ijkl} \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{kl} \hat{x}_i \hat{x}_j \hat{x}_k \hat{x}_l \\ &= \sum_{ijkl} \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{kl} \int d^2 \hat{\mathbf{x}} \hat{x}_i \hat{x}_j \hat{x}_k \hat{x}_l \dots \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \\ &= \sum_{ijkl} \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{kl} \frac{4\pi}{15} [\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl}] \\ &= \frac{4\pi}{15} [(tr \ddot{\mathbf{Q}})^2 + 2 \ddot{\mathbf{Q}} \cdot \ddot{\mathbf{Q}}] = \frac{8\pi}{15} \ddot{\mathbf{Q}} \cdot \ddot{\mathbf{Q}} \end{aligned} \quad (5.21)$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che la traccia di \mathbf{Q} è nulla. Inoltre per la (5.14) e facendo uso del simbolo di Levi-Civita ϵ_{ijk}

$$\int d^2\hat{\mathbf{x}} \ddot{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{x}} \times (\ddot{\mathbf{Q}} \cdot \hat{\mathbf{x}}) = \int d^2\hat{\mathbf{x}} \sum_i \ddot{m}_i \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \hat{x}_j (\ddot{\mathbf{Q}} \cdot \hat{\mathbf{x}})_k \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} &= \int d^2\hat{\mathbf{x}} \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \ddot{m}_i \hat{x}_j \sum_l \ddot{Q}_{kl} \hat{x}_l \\ &= \sum_{ijkl} \epsilon_{ijk} \ddot{m}_i \ddot{Q}_{kl} \frac{4\pi}{3} \delta_{jl} \\ &= \frac{4\pi}{3} \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \ddot{m}_i \ddot{Q}_{kj} = 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

L'ultimo passaggio segue dal fatto che la matrice \mathbf{Q} è simmetrica e dalle proprietà del tensore ϵ_{ijk} .

Tenendo conto dei risultati precedenti

$$\begin{aligned} P(|\mathbf{x}|, t) &= \frac{1}{4\pi c^3} \left[\int d^2\hat{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{p}}(t_-)^2 - \int d^2\hat{\mathbf{x}} (\dot{\mathbf{p}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}})^2 \right. \\ &\quad + \int d^2\hat{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{m}}(t_-)^2 - \int d^2\hat{\mathbf{x}} (\dot{\mathbf{m}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}})^2 \\ &\quad \left. + \frac{1}{9c^2} \left[\frac{4\pi}{3} \ddot{\mathbf{Q}}(t_-) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}(t_-) - \frac{8\pi}{15} \ddot{\mathbf{Q}}(t_-) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}(t_-) \right] \right] \\ &= \frac{1}{4\pi c^3} \left[4\pi \dot{\mathbf{p}}(t_-)^2 - \frac{4\pi}{3} \dot{\mathbf{p}}(t_-)^2 + 4\pi \dot{\mathbf{m}}(t_-)^2 - \frac{4\pi}{3} \dot{\mathbf{m}}(t_-)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{9c^2} \left[\frac{4\pi}{3} \ddot{\mathbf{Q}}(t_-)^2 - \frac{8\pi}{15} \ddot{\mathbf{Q}}(t_-)^2 \right] \right] \\ &= \frac{2}{3c^3} \left[\dot{\mathbf{p}}(t_-)^2 + \frac{1}{30c^2} \ddot{\mathbf{Q}}(t_-)^2 + \dot{\mathbf{m}}(t_-) \right]_{t_- = t - |\mathbf{x}|/c} \end{aligned} \quad (5.24)$$

L'equazione (5.8) è perciò dimostrata.

Capitolo 6

Distribuzione di carica simmetrica rispetto ad un asse

In questo capitolo si analizzeranno le espressioni del campo elettromagnetico nel caso di una distribuzione di carica possibilmente dipendente dal tempo con asse di simmetria rotazionale.

Lo studio è particolarmente interessante per le notevoli semplificazioni delle espressioni del campo elettromagnetico risultante.

Scegliamo per semplicità e senza perdere di generalità il versore \mathbf{e}_3 dell'asse z di un sistema di riferimento cartesiano diretto lungo l'asse di simmetria della distribuzione di carica.

La densità di carica e di corrente ρ, \mathbf{j} soddisfano quindi le seguenti relazioni

$$\rho(\mathbf{R}\cdot\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t) \quad (6.1a)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{x}, t) = \mathbf{R}\cdot\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \quad (6.1b)$$

dove \mathbf{R} identifica una generica rotazione attorno all'asse \mathbf{e}_3 , cioè tale che $\mathbf{R}\cdot\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3$. I momenti di multipolo in questo particolare caso soddisfano perciò le relazioni

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{R}\cdot\mathbf{p}(t) \quad (6.2a)$$

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{R}\cdot\mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{R}^t \quad (6.2b)$$

$$\mathbf{m}(t) = \mathbf{R}\cdot\mathbf{m}(t) \quad (6.2c)$$

e possono essere riscritti nella forma

$$\mathbf{p}(t) = p(t)\mathbf{e}_3 \quad (6.3a)$$

$$\mathbf{Q}(t) = Q(t)\frac{3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 - \mathbf{1}}{2} \quad (6.3b)$$

$$\mathbf{m}(t) = m(t)\mathbf{e}_3 \quad (6.3c)$$

dove $p(t), Q(t), m(t)$ sono funzioni scalari.

Dimostrazione (6.2)-(6.3). Data una arbitraria rotazione \mathbf{R} attorno all'asse di simmetria si ha che

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{R}^t \cdot \mathbf{x}, t) \quad (6.4)$$

Infatti \mathbf{R}^t rappresenta una rotazione in senso opposto ma con stesso asse di rotazione di \mathbf{R} perciò la densità di carica è simmetrica anche rispetto alla trasformazione \mathbf{R}^t .

Inoltre utilizzando la relazione (6.1b) e considerando che $\mathbf{R}^t = \mathbf{R}^{-1}$ si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^t \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \\ &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{R}^t \cdot \mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (6.5)$$

Tenendo conto delle definizioni (3.4) risulta

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \\ &= \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{R}^t \cdot \mathbf{x}) \mathbf{x} \\ &= \int d^3\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}', t) \mathbf{R} \cdot \mathbf{x}' \\ &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{p}(t) \end{aligned} \quad (6.6)$$

dove si è usata l'uguaglianza (6.4), il cambio di variabile $\mathbf{x}' = \mathbf{R}^t \mathbf{x} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}$ con Jacobiano unitario perchè una generica rotazione ha determinante in modulo uguale ad 1 ed il fatto che l'elemento di volume $d^3\mathbf{x}$ è invariante per rotazioni cioè $d^3\mathbf{R} \cdot \mathbf{x} = d^3\mathbf{x}$.

Inoltre sempre per la (6.4) e considerando che il modulo quadro di una vettore e la diade unità sono invarianti sotto una rotazione e la diade $\mathbf{x}\mathbf{x}$ con il cambio di variabile $\mathbf{x}' = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}$ si trasforma come

$$\mathbf{x}\mathbf{x} = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{x}')(\mathbf{R} \cdot \mathbf{x}') = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{x}')(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{R}^t) = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{x}'\mathbf{x}') \cdot \mathbf{R}^t \quad (6.7)$$

si ha

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}(t) &= \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{3\mathbf{x}\mathbf{x} - \mathbf{x}^2\mathbf{1}}{2} & (6.8) \\
&= \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{R}^t\mathbf{x}, t) \frac{3\mathbf{x}\mathbf{x} - \mathbf{x}^2\mathbf{1}}{2} \\
&= \int d^3\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}', t) \mathbf{R} \cdot \frac{3\mathbf{x}'\mathbf{x}' - \mathbf{x}'^2\mathbf{1}}{2} \cdot \mathbf{R}^t \\
&= \mathbf{R} \cdot \int d^3\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}', t) \frac{3\mathbf{x}'\mathbf{x}' - \mathbf{x}'^2\mathbf{1}}{2} \cdot \mathbf{R}^t \\
&= \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{R}^t
\end{aligned}$$

Infine tenendo in considerazione l'equazione (6.1b) ed il già citato cambio di variabile

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}(t) &= \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{2c} \mathbf{x} \times \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) & (6.9) \\
&= \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{2c} \mathbf{x} \times \mathbf{R} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{R}^t \cdot \mathbf{x}, t) \\
&= \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{2c} \mathbf{R} \cdot \mathbf{x}' \times \mathbf{R} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}', t) \\
&= \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{2c} \mathbf{R} \cdot (\mathbf{x}' \times \mathbf{j}(\mathbf{x}', t)) \\
&= \mathbf{R} \cdot \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{2c} \mathbf{x}' \times \mathbf{j}(\mathbf{x}', t) \\
&= \mathbf{R} \cdot \mathbf{m}(t)
\end{aligned}$$

(6.10)

Le relazioni (6.2) sono perciò dimostrate.

Le (6.3a) e (6.3c) sono immediate considerando il fatto che vettori invarianti per arbitrarie rotazioni attorno all'asse \mathbf{e}_3 devono necessariamente essere proporzionali ad esso. Analogamente la diade $\mathbf{Q}(t)$, poichè soddisfa la relazione $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{R}^t$ per ogni rotazione attorno ad \mathbf{e}_3 , deve essere proporzionale ad una combinazione lineare senza traccia delle diadi $\mathbf{1}$ ed $\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$ essendo queste ultime le uniche invarianti sotto tali rotazioni. L'unica combinazione possibile è $3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 - \mathbf{1}$, da cui la (6.3b) segue immediatamente.

Le equazioni (6.3) mostrano come considerazioni di simmetria possano portare informazioni sulla struttura dei momenti della distribuzione.

Nel regime di campo vicino i campi \mathbf{E} , \mathbf{B} sono dati dalle espressioni

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{q}{|\mathbf{x}|^2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{p(t)}{|\mathbf{x}|^3} (3\mathbf{e}_3 \cdot \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{e}_3) \\ &\quad + \frac{3Q(t)}{2|\mathbf{x}|^4} [(5(\mathbf{e}_3 \cdot \hat{\mathbf{x}})^2 - 1)\hat{\mathbf{x}} - 2\mathbf{e}_3 \cdot \hat{\mathbf{x}} \mathbf{e}_3] \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \frac{m(t)}{|\mathbf{x}|^3} (3\mathbf{e}_3 \cdot \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{e}_3)\end{aligned}\tag{6.11a}$$

Nel regime di campo lontano i campi sono dati invece da

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{q}{|\mathbf{x}|^2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\ddot{p}(t - |\mathbf{x}|/c)}{c^2 |\mathbf{x}|} \hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}_3) \\ &\quad + \frac{\ddot{Q}(t - |\mathbf{x}|/c)}{2c^3 |\mathbf{x}|} \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_3 \hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}_3) + \frac{\ddot{m}(t - |\mathbf{x}|/c)}{c^2 |\mathbf{x}|} \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}_3\end{aligned}\tag{6.12a}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= -\frac{\ddot{p}(t - |\mathbf{x}|/c)}{c^2 |\mathbf{x}|} \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}_3 - \frac{\ddot{Q}(t - |\mathbf{x}|/c)}{2c^3 |\mathbf{x}|} \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_3 \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}_3 \\ &\quad + \frac{\ddot{m}(t - |\mathbf{x}|/c)}{c^2 |\mathbf{x}|} \hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}_3)\end{aligned}\tag{6.12b}$$

Dimostrazione (6.11)-(6.12). Sostituendo le espressioni dei momenti (6.3) nelle (4.2) e nelle (4.7) e considerando i seguenti risultati

$$\begin{aligned}\frac{5Q(t) \cdot \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} - 2Q(t) \cdot \hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^4} &= 5 \frac{3Q(t)(\mathbf{e}_3 \cdot \hat{\mathbf{x}})^2 \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}}{2|\mathbf{x}|^4} - \frac{Q(t)(3(\mathbf{e}_3 \cdot \hat{\mathbf{x}})\mathbf{e}_3 - \hat{\mathbf{x}})}{|\mathbf{x}|^4} \\ &= \frac{15Q(t)(\mathbf{e}_3 \cdot \hat{\mathbf{x}})^2 \hat{\mathbf{x}} - 5Q(t)\hat{\mathbf{x}}}{2|\mathbf{x}|^2} \\ &\quad - \frac{6Q(t)(\mathbf{e}_3 \cdot \hat{\mathbf{x}})\mathbf{e}_3 - 2Q(t)\hat{\mathbf{x}}}{2|\mathbf{x}|^4} \\ &= \frac{3Q(t)}{2|\mathbf{x}|^4} [(5(\mathbf{e}_3 \cdot \hat{\mathbf{x}})^2 - 1) \cdot \hat{\mathbf{x}} - 2\mathbf{e}_3 \cdot \hat{\mathbf{x}} \mathbf{e}_3] \\ \frac{\hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}} \times \ddot{Q}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}})}{3c^3 |\mathbf{x}|} &= \ddot{Q}(t_-) \frac{\hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}} \times ((3\mathbf{e}_3 \cdot \hat{\mathbf{x}})\mathbf{e}_3 - \hat{\mathbf{x}}))}{6c^3 |\mathbf{x}|} \\ &= \frac{\ddot{Q}(t - |\mathbf{x}|/c)}{2c^3 |\mathbf{x}|} \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_3 \hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}_3)\end{aligned}\tag{6.13}$$

si ottengono immediatamente le equazioni (6.11),(6.12).

Le espressioni per la potenza differenziale e totale nel *regime di radiazione* si riscrivono

$$\begin{aligned} \frac{dP}{do}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\ddot{p}(t - |\mathbf{x}|/c)^2}{4\pi c^3} (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}_3)^2 + \frac{\ddot{Q}(t - |\mathbf{x}|/c)^2}{16\pi c^5} (\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_3 \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}_3)^2 \\ &+ \ddot{p}(t - |\mathbf{x}|/c) \frac{\ddot{Q}(t - |\mathbf{x}|/c)}{4\pi c^4} \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_3 (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}_3)^2 + \frac{\ddot{m}(t - |\mathbf{x}|/c)^2}{4\pi c^3} (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}_3)^2 \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\mathbf{P}(|\mathbf{x}|, t) = \frac{2\ddot{p}(t - |\mathbf{x}|/c)^2}{3c^3} + \frac{\ddot{Q}(t - |\mathbf{x}|/c)^2}{30c^5} + \frac{2\ddot{m}(t - |\mathbf{x}|/c)^2}{3c^3} \quad (6.15)$$

Dimostrazione (6.14)-(6.15). Inserendo le relazioni (6.3) nella (5.6) e facendo uso dell'identità (5.9) si ha

$$\begin{aligned} \frac{dP}{do}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi c^3} \left| -\hat{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{p}}(t_-) - \frac{1}{3c} \hat{\mathbf{x}} \times (\ddot{\mathbf{Q}}(t_-) \cdot \hat{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{m}}(t_-)) \right|^2 \\ &= \frac{1}{4\pi c^3} \left| -\ddot{p}(t_-) \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}_3 - \frac{1}{3c} \ddot{Q}(t_-) \hat{\mathbf{x}} \times \left(\frac{3(\mathbf{e}_3 \cdot \hat{\mathbf{x}}) \mathbf{e}_3 - \hat{\mathbf{x}}}{2} \right) + \ddot{m}(t_-) \hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}_3) \right|^2 \\ &= \frac{1}{4\pi c^3} \left| -(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}_3) \left(\ddot{p}(t_-) + \frac{\ddot{Q}(t_-)}{2c} \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_3 \right) + \ddot{m}(t_-) \hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}_3) \right|^2 \\ &= \frac{1}{4\pi c^3} (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}_3)^2 \left[\left(\ddot{p}(t_-) + \frac{\ddot{Q}(t_-)}{2c} \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_3 \right)^2 + \ddot{m}(t_-)^2 \right] \\ &= \frac{1}{4\pi c^3} (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}_3)^2 \left[\ddot{p}(t_-)^2 + \frac{\ddot{Q}(t_-)^2}{4c^2} (\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_3)^2 + 2\ddot{p}(t_-) \frac{\ddot{Q}(t_-)}{2c} \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_3 + \ddot{m}(t_-)^2 \right] \\ &= \frac{\ddot{p}(t - |\mathbf{x}|/c)^2}{4\pi c^3} (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}_3)^2 + \frac{\ddot{Q}(t - |\mathbf{x}|/c)^2}{16\pi c^5} (\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_3 \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}_3)^2 \\ &\quad + \ddot{p}(t_-) \frac{\ddot{Q}(t_-)}{4\pi c^4} \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_3 (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}_3)^2 + \frac{\ddot{m}(t - |\mathbf{x}|/c)^2}{4\pi c^3} (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}_3)^2 \end{aligned} \quad (6.16)$$

L'equazione (6.14) risulta perciò dimostrata. Sviluppando il quadrato

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(t_-)^2 &= \frac{(3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 - \mathbf{1})^2}{4} \mathbf{Q}(t_-)^2 \\ &= \frac{9\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 - 3\mathbf{1} \cdot \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 - 3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{1} + \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}}{4} \mathbf{Q}(t_-)^2 \\ &= \frac{9(\mathbf{e}_3^2)^2 - 3\mathbf{e}_3^2 - 3\mathbf{e}_3^2 + tr\mathbf{1}}{4} \mathbf{Q}(t_-)^2 \\ &= \frac{3}{2} \mathbf{Q}(t_-)^2 \end{aligned} \quad (6.17)$$

e sostituendo le (6.3) nella (5.8) si ottiene immediatamente l'equazione (6.15).

La particolare simmetria della distribuzione di carica rende più conveniente riscrivere in coordinate sferiche le espressioni ottenute in precedenza.

Nel *regime di campo vicino* i campi \mathbf{E} , \mathbf{B} si scrivono

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r, \theta, \phi, t) = \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r + \frac{p(t)}{r^3} (2 \cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta) \\ + \frac{3Q(t)}{2r^4} [(3 \cos^2 \theta - 1) \mathbf{e}_r + \sin(2\theta) \mathbf{e}_\theta] \end{aligned} \quad (6.18a)$$

$$\mathbf{B}(r, \theta, \phi, t) = \frac{m(t)}{r^3} (2 \cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta) \quad (6.18b)$$

Nel *regime di campo lontano*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r, \theta, \phi, t) = \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r + \frac{\ddot{p}(t-r/c)}{c^2 r} \sin \theta \mathbf{e}_\theta + \frac{\ddot{Q}(t-r/c)}{2c^3 r} \cos \theta \sin \theta \mathbf{e}_\theta \\ - \frac{\ddot{m}(t-r/c)}{c^2 r} \sin \theta \mathbf{e}_\phi \end{aligned} \quad (6.19a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(r, \theta, \phi, t) = \frac{\ddot{p}(t-r/c)}{c^2 r} \sin \theta \mathbf{e}_\phi + \frac{\ddot{Q}(t-r/c)}{2c^3 r} \cos \theta \sin \theta \mathbf{e}_\phi \\ + \frac{\ddot{m}(t-r/c)}{c^2 r} \sin \theta \mathbf{e}_\theta \end{aligned} \quad (6.19b)$$

La potenza differenziale nel *regime di radiazione* risulta

$$\begin{aligned} \frac{dP}{\sin \theta d\theta d\phi}(r, \theta, \phi, t) = \frac{\ddot{p}(t-r/c)^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta + \frac{\ddot{Q}(t-r/c)^2}{16\pi c^5} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ + \frac{\ddot{m}(t-r/c)^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta + \frac{\ddot{p}(t-r/c)\ddot{Q}(t-r/c)}{4\pi c^4} \cos \theta \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (6.20)$$

mentre la potenza totale è data da

$$P(r, t) = \frac{2\ddot{p}(t-r/c)^2}{3c^3} + \frac{\ddot{Q}(t-r/c)^2}{30c^5} + \frac{2\ddot{m}(t-r/c)^2}{3c^3} \quad (6.21)$$

Dimostrazione (6.18),(6.19),(6.20),(6.21).

Utilizzando un sistema di coordinate sferiche r, θ, ϕ dove θ e ϕ indicano rispettivamente

l'angolo polare e quello azimutale si hanno le seguenti relazioni

$$|\mathbf{x}| = r \quad (6.22a)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{e}_r \quad (6.22b)$$

$$\mathbf{e}_3 = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta \quad (6.22c)$$

Sostituendo le (6.22) nelle (6.11),(6.12),(6.14),(6.15) e riarrangiando le funzioni trigonometriche si ottengono le (6.18),(6.19),(6.20),(6.21).

Un caso particolare è rappresentato dalla condizione di simmetria sferica dove ogni asse è di simmetria per la distribuzione di carica nel senso sopra definito.

Le formule (6.3) risultano quindi valide per ogni scelta dell'asse \mathbf{e}_3 il che implica che i momenti siano identicamente nulli

$$\mathbf{p}(t) = 0 \quad (6.23a)$$

$$\mathbf{Q}(t) = 0 \quad (6.23b)$$

$$\mathbf{m}(t) = 0 \quad (6.23c)$$

$$(6.23d)$$

Il campo lontano dalla sorgente è quindi semplicemente quello Coulombiano di una carica puntiforme $q(t)$.

Capitolo 7

Antenna lineare

Un'antenna lineare è un dispositivo costituito da due bracci uguali aperti realizzati con un conduttore elettrico sui quali scorre una corrente elettrica variabile nel tempo.

Si considera il caso di un'antenna lineare di spessore trascurabile, lunghezza l , simmetrica rispetto al centro dove è alimentata e diretta lungo l'asse z (vedi figura (7.1))

La carica elettrica e la densità di corrente sono dati da

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \int_{-l/2}^{l/2} dz \delta(\mathbf{x} - z\mathbf{e}_3) \lambda(z, t) \quad (7.1a)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \int_{-l/2}^{l/2} dz \delta(\mathbf{x} - z\mathbf{e}_3) i(z, t) \mathbf{e}_3 \quad (7.1b)$$

dove λ, i rappresentano rispettivamente la densità di carica e di corrente dell'antenna. Per ragioni di simmetria dell'antenna e perchè il sistema sia globalmente neutro valgono le seguenti condizioni

$$\lambda(-z, t) = -\lambda(z, t) \quad (7.2)$$

$$i(-z, t) = i(z, t) \quad (7.3)$$

Inoltre la corrente deve essere nulla alle estremità dell'antenna

$$i(\pm l/2, t) = 0 \quad (7.4)$$

Per la legge di conservazione della carica (1.2) λ, i devono soddisfare le relazione

$$\frac{\partial i}{\partial z}(z, t) + \frac{\partial \lambda}{\partial t}(z, t) = 0 \quad (7.5)$$

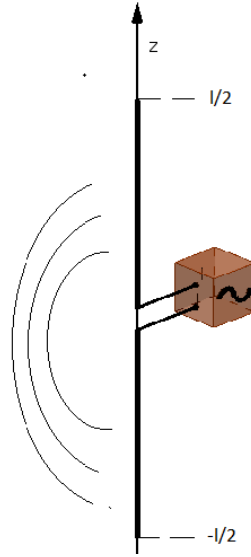


Figura 7.1: Antenna lineare alimentata al centro

Dimostrazione (7.5). Utilizzando le relazioni (7.2), e le proprietà della funzione delta di Dirac si ha

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \int_{-l/2}^{l/2} dz \delta(\mathbf{x} - z\mathbf{e}_3) \frac{\partial \lambda}{\partial t}(z, t) \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) &= \int_{-l/2}^{l/2} dz' \mathbf{e}_3 \cdot \nabla (\delta(\mathbf{x} - z'\mathbf{e}_3)) i(z', t) \\ &= \int_{-l/2}^{l/2} dz' \frac{\partial}{\partial z} (\delta(\mathbf{x} - z'\mathbf{e}_3)) i(z', t) \\ &= - \int_{-l/2}^{l/2} dz' \frac{\partial}{\partial z'} (\delta(\mathbf{x} - z'\mathbf{e}_3)) i(z', t) \\ &= \int_{-l/2}^{l/2} dz' \delta(\mathbf{x} - z'\mathbf{e}_3) \frac{\partial i}{\partial z'}(z', t) \end{aligned} \quad (7.7)$$

Nel secondo integrale è fatto uso della variabile di integrazione z' per distinguerla dalla coordinata z del punto di osservazione. Sostituendo i precedenti risultati nell'equazione di conservazione della carica (1.2) si ottiene immediatamente la (7.5).

Si vuole studiare il campo elettromagnetico generato dall'antenna utilizzando il formalismo dell'espansione in multipoli nel *regime di radiazione* che come già sottolineato rappresenta un caso particolare del *regime di campo lontano*.

Devono quindi valere le condizioni (3.1),(3.2),(3.3) e (4.13b).

L'antenna è localizzata in un intorno dell'origine di dimensioni lineari l perciò la (3.1) risulta automaticamente soddisfatta.

La (3.2), per quanto già detto, è equivalente alla condizione (4.12) e quindi, considerando anche la (4.13b), vale la seguente doppia disuguaglianza

$$l \ll \lambda \ll |\mathbf{x}| \quad (7.8)$$

dove λ è la tipica lunghezza d'onda della radiazione emessa e \mathbf{x} è il punto di osservazione del campo elettromagnetico.

Il sistema è simmetrico rispetto all'asse z del sistema di riferimento cartesiano scelto perciò i momenti di multipolo hanno la forma (6.3).

Si ottengono le seguenti espressioni

$$q = 0 \quad (7.9a)$$

$$p(t) = 2 \int_0^{l/2} dz \lambda(z, t) z \quad (7.9b)$$

$$Q(t) = 0 \quad (7.9c)$$

$$m(t) = 0 \quad (7.9d)$$

L'unico momento non nullo è quindi quello di dipolo elettrico.

Dimostrazione (7.9). Sostituendo le relazioni (7.1) nelle (3.4), considerando le (7.2) e

scambiando l'ordine di integrazione si ha

$$\begin{aligned}
 q &= \int d^3 \mathbf{x} \int_{-l/2}^{l/2} dz \delta(\mathbf{x} - z \mathbf{e}_3) \lambda(z, t) & (7.10a) \\
 &= \int_{-l/2}^{l/2} dz \lambda(z, t) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}(t) &= \int d^3 \mathbf{x} \int_{-l/2}^{l/2} dz \delta(\mathbf{x} - z \mathbf{e}_3) \lambda(z, t) \mathbf{x} & (7.10b) \\
 &= \int_{-l/2}^{l/2} dz \lambda(z, t) z \mathbf{e}_3 \\
 &= 2 \int_0^{l/2} dz \lambda(z, t) z \mathbf{e}_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}(t) &= \int d^3 \mathbf{x} \int_{-l/2}^{l/2} dz \delta(\mathbf{x} - z \mathbf{e}_3) \lambda(z, t) \frac{3\mathbf{x}\mathbf{x} - \mathbf{x}^2 \mathbf{1}}{2} & (7.10c) \\
 &= \int_{-l/2}^{l/2} dz z^2 \frac{3\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 - \mathbf{1}}{2} \\
 &= \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m}(t) &= \frac{1}{2c} \int d^3 \mathbf{x} \times \int_{-l/2}^{l/2} dz \delta(\mathbf{x} - z \mathbf{e}_3) i(z, t) \mathbf{e}_3 & (7.10d) \\
 &= \frac{1}{2c} \int_{-l/2}^{l/2} dz i(z, t) z \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 \\
 &= \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

Le (7.9) sono perciò dimostrate.

Sostituendo le (7.9) nelle equazioni (6.19) e trascurando il termine Coulombiano nel campo elettrico si ottengono immediatamente le espressioni dei campi \mathbf{E} , \mathbf{B} in coordinate sferiche generati dall'antenna nel *regime di radiazione*

$$\mathbf{E}(r, \theta, \phi, t) = \frac{\ddot{p}(t - r/c)}{c^2 r} \sin \theta \mathbf{e}_\theta \quad (7.11)$$

$$\mathbf{B}(r, \theta, \phi, t) = \frac{\ddot{p}(t - r/c)}{c^2 r} \sin \theta \mathbf{e}_\phi \quad (7.12)$$

dove il momento di dipolo elettrico $p(t)$ è dato dalla (7.9b).

I campi \mathbf{E} , \mathbf{B} generati da un'antenna lineare nel *regime di radiazione* risultano quindi diretti rispettivamente lungo i versori \mathbf{e}_θ ed \mathbf{e}_ϕ .

Capitolo 8

Radiazione prodotta da una carica puntiforme in moto

Si consideri una carica q_0 puntiforme che descrive una traiettoria $\mathbf{x}(t)$.

In questo caso, la densità di carica e di corrente sono date da

$$\rho(\mathbf{x}, t) = q_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) \quad (8.1a)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = q_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) \dot{\mathbf{x}}(t) \quad (8.1b)$$

dove $\delta(\mathbf{x})$ è la funzione delta di Dirac. Sostituendo le (8.1) nelle (3.4) ed utilizzando le proprietà della delta di Dirac si ottengono immediatamente i momenti di multipolo

$$q = q_0 \quad (8.2a)$$

$$\mathbf{p}(t) = q_0 \mathbf{x}(t) \quad (8.2b)$$

$$\mathbf{Q}(t) = q_0 \frac{3\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t)^2 \mathbf{1}}{2} \quad (8.2c)$$

$$\mathbf{m}(t) = \frac{q_0}{2c} \mathbf{x}(t) \times \dot{\mathbf{x}}(t) \quad (8.2d)$$

Si vuole studiare la radiazione emessa dalla carica nel *regime di radiazione* utilizzando il formalismo dell'espansione in multipoli per cui devono essere soddisfatte le condizioni (3.1), (3.3), (4.12) e (4.13b). La (3.1) implica che la carica sia confinata in una regione di dimensioni d attorno all'origine mentre per la (4.12) e la (4.13b) si ha che

$$d \ll \lambda \sim c\tau \ll |\mathbf{x}| \quad (8.3)$$

dove τ è il tempo caratteristico del moto della particella. La prima parte della (8.3) in questo contesto ha una semplice interpretazione fisica infatti, considerando che è possibile stimare l'ordine di grandezza della velocità della particella come $\dot{x} \sim d/\tau$, si ha la relazione

$$|\dot{\mathbf{x}}(t)|/c \ll 1 \quad (8.4)$$

da cui segue che il moto non deve essere relativistico.

Per quanto detto in precedenza (vedi eq.(4.18)), il termine di dipolo elettrico nel *regime di radiazione* risulta dominante e perciò, essendo diverso da zero nel caso presente, è possibile trascurare i termini contenenti gli altri momenti di multipolo.

Sostituendo quindi la (8.2b) nelle (4.8), trascurando il termine Coulombiano nel campo elettrico e considerando solo il contributo dato dal dipolo elettrico si ottengono immediatamente le espressioni per i campi \mathbf{E} e \mathbf{B}

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{q_0}{c^2} \frac{\hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}(t - |\mathbf{x}|/c))}{|\mathbf{x}|} \quad (8.5a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = -\frac{q_0}{c^2} \frac{\hat{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}(t - |\mathbf{x}|/c)}{|\mathbf{x}|} \quad (8.5b)$$

In modo analogo, sostituendo la (8.2b) nelle (5.6),(5.8) si ottengono le relazioni per la potenza differenziale e totale

$$\frac{dP}{do}(\mathbf{x}, t) = \frac{q_0^2}{4\pi c^3} (\hat{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}(t - |\mathbf{x}|/c))^2 \quad (8.6a)$$

$$P(|\mathbf{x}|, t) = \frac{2}{3} \frac{q_0^2}{c^3} \ddot{\mathbf{x}}(t - |\mathbf{x}|/c)^2 \quad (8.6b)$$

L'equazione (8.6b) è nota come *equazione di Larmor*.

Capitolo 9

Acceleratore circolare

Come caso particolare della trattazione precedente, si consideri il caso di una particella puntiforme di carica q_0 in moto lungo una traiettoria circolare di raggio r_0 con velocità angolare costante ω (vedi figura (9.1)).

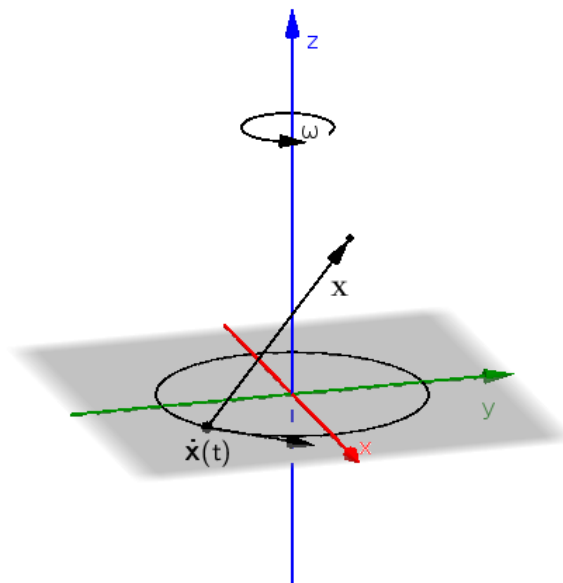


Figura 9.1: Acceleratore circolare

Considerando che $\lambda \sim c/\omega$ e che nel presente caso $d \sim r_0$, la (8.3) si riscrive

$$r_0 \ll c/\omega \ll |\mathbf{x}| \quad (9.1)$$

dove \mathbf{x} è il punto di osservazione del campo elettromagnetico. La traiettoria della particella $\mathbf{x}(t)$ è

$$\mathbf{x}(t) = r_0[\cos(\omega t)\mathbf{e}_1 + \sin(\omega t)\mathbf{e}_2] \quad (9.2)$$

I campi \mathbf{E} , \mathbf{B} sono dati dalle relazioni

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{q_0\omega^2}{c^2} \frac{\hat{\mathbf{x}} \times (\mathbf{x}(t - |\mathbf{x}|/c) \times \hat{\mathbf{x}})}{|\mathbf{x}|} \quad (9.3a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = -\frac{q_0\omega^2}{c^2} \frac{\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{x}(t - |\mathbf{x}|/c)}{|\mathbf{x}|} \quad (9.3b)$$

Dimostrazione (9.3). Dalla (9.2) segue che

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = -\omega^2\mathbf{x}(t) \quad (9.4)$$

Sostituendo la (9.4) nelle espressioni generali ricavate in precedenza per una carica puntiforme in moto (8.5), si ottengono immediatamente le (9.3).

La potenza differenziale e quella totale sono date da

$$\frac{dP}{do}(\mathbf{x}, t) = \frac{(q_0\omega^2)^2}{4\pi c^3} (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{x}(t - |\mathbf{x}|/c))^2 \quad (9.5a)$$

$$P(|\mathbf{x}|, t) = \frac{2}{3} \frac{(q_0\omega^2)^2}{c^3} \mathbf{x}(t - |\mathbf{x}|/c)^2 \quad (9.5b)$$

Dimostrazione (9.5). Sostituendo la (9.4) nelle espressioni generali (8.6) si ottengono immediatamente le (9.5).

Per la particolare geometria del sistema, risulta conveniente riscrivere le espressioni ottenute in precedenza in coordinate sferiche.

Il campo elettrico e induzione magnetica \mathbf{E} , \mathbf{B} risultano

$$\mathbf{E}(r, \theta, \phi, t) = \frac{q_0 \omega^2 r_0}{c^2 r} [\cos(\omega(t - r/c) - \phi) \cos \theta \mathbf{e}_\theta + \sin(\omega(t - r/c) - \phi) \mathbf{e}_\phi] \quad (9.6a)$$

$$\mathbf{B}(r, \theta, \phi, t) = \frac{q_0 \omega^2 r_0}{c^2 r} [-\sin(\omega(t - r/c) - \phi) \mathbf{e}_\theta + \cos(\omega(t - r/c) - \phi) \cos \theta \mathbf{e}_\phi] \quad (9.6b)$$

Dimostrazione (9.6). Sostituendo le seguenti identità

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}| &= r \\ \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{e}_r \\ \mathbf{x}(t) &= r_0 [\cos(\omega t) (\sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_r + \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_\theta - \sin \phi \mathbf{e}_\phi \\ &\quad + \sin(\omega t) (\sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_r + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_\theta + \cos \phi \mathbf{e}_\phi)] \end{aligned} \quad (9.7)$$

nelle (9.3) ed utilizzando le proprietà delle funzioni trigonometriche si ottengono le (9.6).

La potenza differenziale e totale si riscrivono

$$\frac{dP}{\sin \theta d\theta d\phi}(r, \theta, \phi, t) = P_0 \frac{1 - \sin^2 \theta \cos^2(\omega(t - r/c) - \phi)}{2} \quad (9.8a)$$

$$P(r, t) = \frac{4\pi}{3} P_0 \quad (9.8b)$$

dove

$$P_0 = \frac{(q_0 r_0 \omega^2)^2}{2\pi c^3} \quad (9.9)$$

è la scala intrinseca della potenza dell'acceleratore.

Dimostrazione (9.8) Sostituendo le (9.7) nelle (9.5) si ottengono immediatamente le (9.8).

Bibliografia

- [1] Jackson, J. D. (1999), *Classical Electrodynamics (3rd ed.)*, Wiley.
- [2] Feynman, Richard P. (2005), *The Feynman Lectures on Physics (2nd ed.)*, Addison-Wesley.
- [3] Maxwell, James Clerk (1873), *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Dover.
- [4] Purcell, Edward Mills (1985), *Electricity and Magnetism*, McGraw-Hill.
- [5] Lifshitz, Evgeny; Landau, Lev (1980), *The Classical Theory of Fields (4th ed.)*, Butterworth-Heinemann.
- [6] Zangwill, A. (2013), *Modern Electrodynamics (1st ed.)*, Cambridge.
- [7] Griffiths, David J. (1998), *Introduction to Electrodynamics (3rd ed.)*, Prentice Hall.
- [8] Greiner, Walter; Reinhardt, Joachim (2008), *Quantum Electrodynamics (4rd ed.)*, Springer.
- [9] Reitz, John R.; Milford, Frederick J.; Christy, Robert W. (2008), *Foundations of Electro-magnetic Theory (4th ed.)*, Addison Wesley.