

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

EFFETTI DELLE ONDE GRAVITAZIONALI ATTRAVERSO LA DEVIAZIONE GEODETICA

Relatore:

Dott. Roberto Balbinot

Presentata da:

Andrea Calcinari

Sessione II

Anno Accademico 2016/2017

A Tiamat.

Sommario

L'intento perseguito nel redigere questa tesi è quello di illustrare la teoria alla base delle onde gravitazionali per giungere ad intuire i metodi che ne consentono la rilevazione.

Le onde gravitazionali sono una naturale conseguenza della Teoria della Relatività Generale di Einstein di cui si riporta una semplice introduzione nel primo capitolo, non senza sottolineare l'importanza del formalismo geometrico e tensoriale che permette la descrizione dei fenomeni in questione. Le equazioni di campo di Einstein descrivono il campo gravitazionale come curvatura dello spaziotempo, questa è rappresentata propriamente dal tensore di Riemann che determina in particolare l'accelerazione relativa di due geodetiche, esaminata nel secondo capitolo. Si passa poi a studiare l'approssimazione di campo debole, necessaria per linearizzare le equazioni di Einstein e per mostrare che, con la corretta condizione di gauge, la perturbazione metrica soddisfa un'equazione d'onda. Il capitolo terzo si conclude quindi con un'analogia tra le onde gravitazionali e quelle elettromagnetiche, la quale prosegue nel capitolo seguente dove si analizzano le soluzioni sotto forma di onde piane. Qui emergono caratteristiche peculiari riguardanti la natura della perturbazione gravitazionale che, una volta adottato un gauge appropriato, permette di dedurre che solo due sono le polarizzazioni fisicamente rilevanti e la loro trasversalità rispetto alla direzione dell'onda. Infine, nel quinto capitolo, si evince che è necessario un sistema di particelle per la rilevazione di un'onda perché la grandezza cardine da osservare è la separazione tra due geodetiche e come questa varia al passaggio dell'onda. In questo modo viene mostrata la causa degli effetti mareali, e studiando diverse disposizioni di particelle di prova si confermano le caratteristiche della radiazione gravitazionale anticipate nel quarto capitolo, come la polarizzazione e la natura quadripolare. Alcune considerazioni matematiche finali elucideranno come le proprietà delle onde suggeriscono con molta naturalezza l'esistenza di una radiazione di gravità, in analogia a quella elettromagnetica. Infine si accennerà alle idee chiave che hanno suggerito la costruzione di rilevatori di onde e come questi debbano funzionare. La trattazione termina con uno sguardo alle recenti scoperte e alle aspettative future.

Indice

Sommario	i
1 Introduzione alla Teoria della Relatività Generale	1
1.1 Relatività Speciale	1
1.2 Principi di passaggio dalla Speciale alla Generale	2
1.3 Alcune nozioni di geometria differenziale	4
1.3.1 Definizioni	4
1.3.2 Leggi di trasformazione	6
1.3.3 Tensori	7
1.3.4 Derivata covariante	8
1.3.5 Geodetiche	10
1.4 Equazioni di Einstein	12
1.4.1 Tensore di Riemann e curvatura	12
1.4.2 Tensore energia-impulso come sorgente	16
1.4.3 Equazioni di campo	18
2 Equazioni dello spostamento geodetico	21
2.1 Deviazione geodetica Newtoniana	21
2.2 Deviazione geodetica in Relatività Generale	23
3 Approssimazione di campo debole e equazione d'onda	27
3.1 Campo gravitazionale debole	27
3.1.1 Trasformazioni di Lorentz	28
3.1.2 Trasformazioni di gauge	29
3.2 Equazioni di Einstein per un campo debole	30
3.2.1 Teoria linearizzata	30
3.2.2 Gauge di Lorentz	32
3.3 Equazione d'onda	34
3.3.1 Onde elettromagnetiche e gravitazionali	35
4 Soluzioni sotto forma di onde piane	39
4.1 Analogia elettrodinamica	39
4.2 Gauge trasverso a traccia nulla	40
4.3 Polarizzazione e natura quadripolare	44
5 Effetti delle onde gravitazionali	49
5.1 Influenza di un'onda su una singola particella	49
5.2 Deviazione geodetica indotta da un'onda	50
5.2.1 Distanza propria	50

5.2.2	Forze di marea	52
5.2.3	Anello di particelle	55
5.3	Alcune considerazioni interessanti	59
5.4	Rilevazione delle onde	62
5.4.1	Recenti e future osservazioni	65
A	Connessione affine	67
A.1	Legge di trasformazione	67
A.2	Γ in termini de tensore metrico	68
B	Prova che $G_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$	69
C	Il tensore di Einstein linearizzato	71
C.1	Nella forma normale	71
C.2	Nella forma barrata	72

Capitolo 1

Introduzione alla Teoria della Relatività Generale

Da Newton a Einstein

La Gravitazione Newtoniana è descritta attraverso forze che agiscono *istantaneamente*. Se si posizionasse una nuova massa in un qualche punto dello spazio, Newton afferma che ogni altra massa, a prescindere da quanto lontana, sentirebbe immediatamente dell'attrazione gravitazionale della nuova. Questa è una descrizione intrinsecamente non-relativistica in quanto dell'informazione viene trasmessa istantaneamente in punti arbitrariamente lontani dello spazio, quindi con velocità infinita. La Teoria della Relatività Speciale (Einstein, 1905) è in grado di spiegare l'elettrodinamica in maniera eccellente pur essendo in contrasto con la gravità Newtoniana. Ecco perchè si abbandonò non senza fatica l'idea di interazione a distanza istantanea e quindi era necessaria una nuova teoria che spiegasse la gravitazione e che fosse in accordo con la Relatività Speciale. Einstein propose nel 1916 la sua teoria della Relatività Generale, la quale spiega la gravitazione come conseguenza geometrica della curvatura dello spaziotempo, curvatura che a sua volta è conseguenza della presenza di materia. Prima di studiare tale teoria è utile considerare brevemente la Relatività Speciale e riepilogare il formalismo e gli strumenti matematici per affrontare il problema da un punto di vista geometrico.

1.1 Relatività Speciale

Uno studio approfondito della teoria esula dagli scopi presenti quindi si riportano solo alcuni risultati importanti, utili per il proseguimento.

La Relatività Generale è una generalizzazione della Speciale, in cui Einstein stabilì che le leggi della fisica devono essere valide e formalmente identiche in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Accanto a questo presupposto giace il postulato che afferma che la velocità della luce nel vuoto è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Come conseguenza, il concetto Newtoniano di spazio e tempo assoluti viene distrutto infatti le misure spaziali e temporali dipendono dal moto dell'osservatore e sono correlate tramite le trasformazioni di Lorentz (nate a causa della non invarianza galileiana delle equazioni di Maxwell). Con queste lo spazio e il tempo si unificano in un unico ente quadridimensionale detto spaziotempo e solo la separazione spaziotemporale tra due eventi è indipendente dal sistema di riferimento, ma non le coordinate degli eventi che i singoli sistemi di riferimento misurano. Tale separazione è quindi uno scalare (un invariante relativistico) e se gli eventi si trovano alle coordinate (t, x, y, z) e $(t + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$,

questa sarà:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.1)$$

L'intervallo ds^2 ha un significato fisico importante:

- se $ds^2 < 0$ si dice che l'intervallo è di tipo tempo. Infatti esiste un sistema di riferimento inerziale in cui le coordinate spaziali dei due eventi sono le stesse e la separazione temporale è detta *tempo proprio*. Qui i due eventi possono trovarsi sulla stessa linea di mondo di una particella materiale.
- se $ds^2 > 0$ la separazione è di tipo spazio. Infatti si può trovare un sistema di riferimento inerziale in cui gli eventi hanno la stessa coordinata temporale e l'intervallo spaziale tra i due è detto *distanza propria*. In questo caso i due eventi non possono stare nella stessa linea di mondo di una particella materiale.
- se $ds^2 = 0$ l'intervallo è di tipo luce e infatti i due eventi possono trovarsi nella linea di mondo di un fotone.

L'equazione (1.1) cela la metrica di Minkowski, infatti può essere riscritta esplicitandola, in notazione tensoriale

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.2)$$

dove si adotta la convenzione di Einstein per la somma e gli indici assumono i valori (0,1,2,3) che corrispondono a (t, x, y, z) . In generale le componenti del tensore metrico $g_{\mu\nu}$ possono essere complicate funzioni della posizione ma nel caso dello spaziotempo di Minkowski, con $c = 1$, la metrica è piuttosto semplice:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \quad (1.3)$$

Si noti che la convenzione della segnatura è $(-, +, +, +)$, in accordo con l'equazione (1.1).

La gravitazione Newtoniana non trova posto nella descrizione meccanica della Relatività Speciale ed inoltre un altro problema andava risolto: cosa accade per sistemi di riferimento *non* inerziali? L'eleganza del formalismo di Minkowski si applica solo a sistemi di riferimento in moto relativo uniforme. Einstein ha cercato una teoria completamente covariante in cui le leggi della fisica (inclusa la gravità) vengono descritte allo stesso modo in ogni sistema di riferimento e per ogni tipo di moto relativo. Il passaggio cardine è stato quello di realizzare che gravità e accelerazione sono di fatto equivalenti. Si accorse poi, che la gravitazione altro non è che l'effetto della geometria dello spaziotempo.

1.2 Principi di passaggio dalla Speciale alla Generale

I principi base sui quali si costruisce la Relatività Generale, celati già nelle ultime righe della precedente sezione, si riuniscono nel cosiddetto **Principio di Equivalenza** il quale si presenta in due forme.

Il *principio di equivalenza debole* assume l'equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale. A priori non c'è motivo per cui le due masse debbano essere identiche sebbene sperimentalmente risultano uguali fino ad un altissimo grado di precisione. Conseguenza di questo assioma è che gli oggetti in caduta libera sono i veri osservatori inerziali in cui tutte le forze gravitazionali sono annullate. Il sistema di riferimento è inerziale solo localmente, nella regione di spaziotempo in cui il campo gravitazionale è uniforme.

Il *principio di equivalenza forte* afferma che localmente (cioè in un sistema di riferimento inerziale) tutte le leggi della fisica hanno la loro forma usuale dettata dalla Relatività Speciale, eccezione fatta per la gravità che semplicemente scompare. Non c'è dunque distinzione possibile tra un sistema di riferimento inerziale che è in caduta libera in un campo gravitazionale uniforme, e un sistema di riferimento che è lontano da ogni massa sorgente di campi gravitazionali (quindi dove è possibile usare lo spaziotempo piatto di Minkowski). Analogamente un'accelerazione di una qualsiasi sorta non può essere distinta da un campo gravitazionale uniforme: gravità e accelerazione sono equivalenti.

Il passaggio dalla Relatività Speciale alla Generale è dunque questo: è possibile definire puntualmente (o localmente) un sistema di riferimento inerziale dove la gravità è quindi svanita e le leggi della fisica sono descritte dalla Relatività Speciale, poichè la metrica si può ridurre a quella dello spaziotempo di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. In generale un campo gravitazionale non è necessariamente uniforme e per una teoria completamente covariante, in cui quindi le leggi della fisica sono le stesse in *ogni* sistema di riferimento, è necessario introdurre un nuovo formalismo matematico dal settore della geometria differenziale. La descrizione coinvolgerà tensori e operatori più generali degli usuali adatti per gli spazi piatti. Le leggi della fisica saranno strutturalmente identiche ma espresse con quantità tensoriali che verranno introdotte nella prossima sezione, così come per esempio l'operazione di derivazione si generalizzerà nel caso di spazi curvi.

Questo concetto è talvolta detto *principio di covarianza generale*, il quale appunto afferma che le leggi della fisica in un sistema di riferimento generale si ottengono da quelle della Relatività Speciale sostituendo quantità tensoriali del gruppo di Lorentz con quantità tensoriali della varietà spaziotemporale (concetto che verrà definito a breve).

L'universo è dunque una varietà quadridimensionale, la quale possiede una curvatura intrinseca, generata dalle masse che vi si trovano all'interno. Localmente si può però approssimare tale varietà con uno spazio piatto (che verrà detto *normale*, si pensi ad uno spazio tangente) che puntualmente è esattamente lo spaziotempo di Minkowski e che approssima localmente una metrica più generale $g_{\mu\nu}$. E' necessario ora sviluppare il formalismo matematico che permette di affrontare il problema geometricamente.

1.3 Alcune nozioni di geometria differenziale

La gravitazione si trasforma, con la Relatività Generale, in geometria. Il concetto di linea retta nello spazio euclideo si generalizza con quello di geodetica. Lo spaziotempo di Minkowski è piatto e obbedisce infatti all'assioma di parallelismo di Euclide. La sua metrica però è diversa: i fotoni viaggiano su linee di mondo rette di lunghezza propria pari a zero. La geometria di Minkowski è dunque piatta ma non Euclidea. La Relatività Speciale è però solo un caso particolare in cui la metrica assume la forma semplice come nell'equazione (1.3). Le equazioni di Einstein mostreranno infatti che la geometria dello spaziotempo è determinata dalla materia che questo contiene e quindi per studiare a fondo la gravitazione bisogna introdurre alcuni concetti di geometria.

1.3.1 Definizioni

Si comincia con la nozione di **varietà**: una varietà è uno spazio topologico che è localmente piatto come lo spazio Euclideo n -dimensionale \mathbb{R}^n . La nozione di continuità è definita e il numero di parametri indipendenti con cui si può parametrizzare continuamente la varietà è detta dimensione. Una varietà *differenziabile* è sia continua che differenziabile in ogni suo punto. In Relatività Generale si tratta con *varietà metriche o Riemanniane*: varietà differenziabili su cui è stata definita una metrica.

Una mappa è in generale un'applicazione da un aperto della varietà \mathcal{M} a \mathbb{R}^n :

$$\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1.4)$$

Una carta è la coppia (A, ϕ) dove $A \subseteq \mathcal{M}$ e ϕ è una mappa continua e invertibile che per semplicità si denoterà $\phi = x^i$. In altre parole la mappa di una carta è l'insieme delle n coordinate reali per l'aperto su cui è definita.

Una collezione di carte \mathcal{A} si chiama *atlante* se copre l'intera varietà \mathcal{M} :

$$\mathcal{A} = \{(A_i, \phi_i) : U_i A_i \supseteq \mathcal{M}\} \quad (1.5)$$

Matematicamente la varietà è la classe di equivalenza di atlanti. Quindi si possono scegliere le carte arbitrariamente e dunque le proprietà del punto della varietà *non* dipendono dalle coordinate scelte (concetto fondamentale in Relatività Generale).

Una **curva** è una mappa continua da un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ alla varietà \mathcal{M} :

$$\gamma : I \rightarrow \mathcal{M} \quad (1.6)$$

Quindi date le coordinate (la carta) ϕ per la porzione di varietà che include la curva, si può

scrivere:

$$\phi \circ \gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1.7)$$

il che è di solito scritto come $x = x(\lambda)$ dove λ è il parametro reale che identifica i punti sulla curva e x^i sono le coordinate nella carta.

Una **funzione** (o scalare) è una applicazione:

$$f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.8)$$

Introducendo una carta ϕ , la composizione $f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dà un preciso significato alla solita notazione $f = f(x^i)$, che tuttavia non distingue f da $f \circ \phi^{-1}$.

Un **vettore** \vec{v} in un punto P della varietà è un'applicazione che associa ad ogni funzione f definita in un intorno di P , la derivata di f lungo la curva γ passante per P , cioè:

$$v_{\vec{\gamma}} : f \rightarrow \left. \frac{df}{d\lambda} \right|_{\lambda_P} \quad (1.9)$$

dove $\gamma(\lambda_P) = P$ e f sta per $f \circ \gamma = f(\lambda)$.

Utilizzando una carta ϕ definita nell'intorno di P , si può scrivere:

$$\begin{aligned} v_{\vec{\gamma}}(f) &= \left. \frac{d(f \circ \gamma)}{d\lambda} \right|_{\lambda_P} = \left. \frac{d}{d\lambda} (f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \gamma) \right|_{\lambda_P} \\ &= \left. \frac{d}{d\lambda} f(x^i(\lambda)) \right|_{\lambda_P} = \left. \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{d\lambda} \right|_{\lambda_P} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Omettendo la funzione generica f , si avrà:

$$v_{\vec{\gamma}} = \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{d}{d\lambda} \quad (1.11)$$

Questo risultato dà un significato ben preciso, nonchè indipendente dalle coordinate, alla nozione di vettore come tangente alla curva γ in P . Il significato geometrico di tale definizione è immediato, si può infatti scrivere il vettore come:

$$\vec{v} = \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^i} = v^i \vec{e}_i \quad (1.12)$$

dove $\vec{e}_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ è un vettore coordinato di base, cioè il vettore tangente alla linea coordinata definita da costanti x^j per $j \neq i$. Ricapitolando, si rappresentano i vettori come tangenti a curve della varietà. Una volta che è stato specificato il sistema di coordinate, si possono scrivere le componenti di un vettore definito in ogni punto della varietà rispetto alla base generata da $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ in ogni punto. Poichè esistono n curve coordinate indipendenti e n parametri, si viene a definire

uno spazio vettoriale in ogni punto della varietà detto *spazio tangente* T_P . Puntualmente, per ogni P , $T_P = \mathbb{R}^n$. Un *campo vettoriale* sarà un'applicazione che mappa ogni punto della varietà in un vettore, cioè assegna ad ogni punto un vettore tangente $v(P) \in T_P$.

Una **1-forma** è un funzionale lineare che agisce su un vettore ed è la controparte geometrica di quello che veniva chiamato covettore in una letteratura meno moderna. Quindi una 1-forma \tilde{w} nel punto P della varietà \mathcal{M} agisce sui vettori nello spazio tangente

$$\tilde{w} : T_P \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.13)$$

Quindi ad esempio una contrazione di una 1-forma con un vettore per formare uno scalare, la si può scrivere con le seguenti notazioni equivalenti

$$\tilde{w}(\vec{v}) = \vec{v}(\tilde{w}) = \langle \tilde{w}, \vec{v} \rangle = w_i v^i \in \mathbb{R} \quad (1.14)$$

Si noti che la linearità implica che l'azione di una 1-forma su un vettore generico è completamente definita dalla sua azione su una base di T_P . Le 1-forme che agiscono sullo stesso T_P formano uno spazio vettoriale T_P^* duale di T_P . Analogamente a quanto detto per i vettori, un campo di 1-forme sarà un'applicazione che associa una 1-forma in T_P^* in ogni punto della varietà.

Come visto, la base di T_P si denota con $\{\vec{e}_i\}$. La base di T_P^* non necessita di essere correlata agli \vec{e}_i , tuttavia poichè si tratta di funzionali lineari, è conveniente introdurre la base duale per le 1-forme tale che

$$\tilde{e}^i(\vec{v}) = \tilde{e}^i(v^j \vec{e}_j) = v^i \quad (1.15)$$

o equivalentemente:

$$\tilde{e}^i(\vec{e}_j) = \delta_j^i \quad (1.16)$$

Se si effettua un cambio di coordinate i vettori e le 1-forme non cambiano, ma solo le loro componenti si trasformano ed in un modo tale da mantenere lo scalare generato dalla loro contrazione immutato.

1.3.2 Leggi di trasformazione

Si supponga di effettuare un cambio di coordinate. Si considerano un vettore ed una 1-forma definite come sopra e si passa da un sistema di coordinate ad un nuovo, denotato $x^{i'}$.

Per le componenti di un vettore si avrà

$$v^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} v^j \quad (1.17)$$

Questa equazione è detta legge di trasformazione per vettori. Se si denota la nuova base con

$$\vec{e}_{i'} = \frac{\partial}{\partial x^{i'}} \quad (1.18)$$

allora la legge di trasformazione (1.17) segue dalla definizione di vettore e dal confronto di \vec{v} espresso come (si usa la regola della catena)

$$\vec{v} = v^j \frac{\partial}{\partial x^j} = v^j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^{i'}} \quad (1.19)$$

con \vec{v} espresso direttamente in termini delle coordinate nuove $\{\vec{e}'_i\}$

$$\vec{v} = v^{i'} \frac{\partial}{\partial x^{i'}} \quad (1.20)$$

Analogamente all'equazione (1.17), si ottiene la legge di trasformazione per le 1-forme

$$w'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} w_j \quad (1.21)$$

dove si noti che la matrice Jacobiana della generica trasformazione è l'inversa di quella con cui si trasformano i vettori. Dalla definizione (1.18) si trova la relazione tra i vettori di base nei due sistemi di coordinate

$$\vec{e}'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \vec{e}_j \quad (1.22)$$

la quale è formalmente identica all'equazione precedente. Questo fa intuire che la base dei vettori \vec{e}_i si trasforma come una 1-forma, il che non stupisce poichè come detto un vettore scritto come nell'equazione (1.12) rimane lo stesso al cambio di coordinate, cambieranno infatti opportunamente le sue componenti e la base.

Con un ragionamento del tutto analogo si può mostrare che la base duale si trasforma con la matrice inversa rispetto a quella con cui si trasformano le 1-forme, il che implica che si trasforma esattamente come un vettore

$$\tilde{e}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \tilde{e}^j \quad (1.23)$$

1.3.3 Tensori

Avendo definito vettori e 1-forme, si procede con il definire un oggetto geometrico più generale detto **tensore**. Un tensore di tipo (l, m) , definito su una varietà n-dimensionale è un operatore lineare che mappa l 1-forme e m vettori in un numero reale. La legge di trasformazione di un tensore segue dalla linearità e dalle leggi di trasformazione di vettori e 1-forme, in modo che lo scalare che si ottiene saturando tutti gli indici è indipendente dalla scelta di coordinate.

$$A_{r_1 r_2 \dots r_m}^{u_1 u_2 \dots u_l} = \frac{\partial x^{u_1}}{\partial x^{t_1}} \dots \frac{\partial x^{u_l}}{\partial x^{t_l}} \frac{\partial x^{q_1}}{\partial x^{r'_1}} \dots \frac{\partial x^{q_m}}{\partial x^{r'_m}} A_{q_1 q_2 \dots q_m}^{t_1 t_2 \dots t_l} \quad (1.24)$$

Si noti che un vettore è un tensore di tipo $(1,0)$ e una 1-forma è un tensore di tipo $(0,1)$.

Si definisce ora il **tensore metrico** $g_{\mu\nu}$ che è di fondamentale importanza in Relatività Generale poichè si considerano varietà Riemanniane. Questo è un tensore di tipo $(0,2)$ il quale mappa due vettori in un numero reale, con le proprietà di essere simmetrico e non degenere.

Due esempi sono la metrica Euclidea δ_{ij} o quella di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. Allora per quanto detto sopra la trasformazione di un tensore (0,2), per esempio appunto del tensore metrico $g_{\mu\nu}$, sarà

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{\nu'}} g_{ij} \quad (1.25)$$

In varietà Riemanniane, quindi con una metrica definita, si possono introdurre distanze e angoli, quindi si può definire il modulo di un vettore, l'angolo tra due di essi appartenenti ad un spazio tangente T_P di un punto P , e quindi di fatto una metrica definisce automaticamente un prodotto scalare. Formalmente si parla di campo tensoriale metrico, il quale permette di definire percorsi su tutta la varietà associando ad ogni punto di \mathcal{M} un tensore metrico.

Con le nozioni di geometria l'equazione (1.2) acquista un preciso significato. Il tensore metrico agisce sui vettori spostamento per dare uno scalare, appunto l'intervallo ds^2 , che è invariante (si evince rapidamente dalla posizione degli indici e quindi dalle possibili contrazioni). Il tensore metrico è utile per definire 1-forme e vettori associati, abbassando e alzando gli indici: dato un vettore v^μ , si definisce la 1-forma v_ν come

$$v_\nu = g_{\mu\nu} v^\mu \quad (1.26)$$

e viceversa per definire vettori date 1-forme, dove però si userà l'inversa della metrica $g^{\mu\nu}$. Questo processo di alzare e abbassare gli indici si estende a tensori di ogni rango così che ad esempio il prodotto scalare di due vettori si può scrivere come

$$g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu = g^{\mu\nu} v_\mu w_\nu = v_\mu w^\mu \quad (1.27)$$

1.3.4 Derivata covariante

Si vuole dare un significato alla nozione di parallelismo anche senza aver definito una metrica sulla varietà. Per confrontare vettori definiti in punti diversi della varietà, è necessario prima trasportarne uno parallelamente. Qui entra in gioco la derivata covariante, la quale sarà fondamentale anche per definire formalmente il concetto di geodetica, ampiamente utilizzato nel seguito della trattazione.

Si vuole trasportare parallelamente un vettore \vec{w} lungo la curva γ parametrizzata da λ , tangente al campo vettoriale \vec{v} . Si associerà a \vec{w} un vettore $\vec{w}_{-\Delta\lambda}$ dove $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$ identifica un punto spostato sulla curva. Allora si definisce derivata covariante di \vec{w} rispetto a \vec{v} nel punto $P(\lambda_0)$, il vettore dato dal limite

$$\nabla_{\vec{v}} \vec{w}|_{\lambda_0} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\vec{w}_{-\Delta\lambda}(\lambda_0) - \vec{w}(\lambda_0)}{\Delta\lambda} \quad (1.28)$$

Questo vettore si annulla se il vettore trasportato parallelamente coincide con l'originale vettore in P . Per le funzioni scalari, non identificando esse una direzione, la derivata covariante coincide con la derivata totale

$$\nabla_{\vec{v}} f = \frac{df}{d\lambda} \quad (1.29)$$

Meno banalmente, per un vettore si avrà

$$\begin{aligned}\nabla_{\vec{v}}\vec{w} &= \nabla_{v^i\vec{e}_i}(w^j\vec{e}_j) = v^i\nabla_{\vec{e}_i}(w^j\vec{e}_j) \\ &= v^i[(\nabla_{\vec{e}_i}w^j)\vec{e}_j + w^j(\nabla_{\vec{e}_i}\vec{e}_j)]\end{aligned}\quad (1.30)$$

Ora si definiscono i simboli di Christoffel (o connessione affine) tramite la relazione

$$\nabla_{\vec{e}_i}\vec{e}_j = \Gamma_{ji}^k\vec{e}_k \quad (1.31)$$

Questi per i e j fissati sono vettori nonostante la struttura indiciale faccia pensare siano tensori, infatti si dimostra (Appendice A.1) che si trasformano come segue

$$\Gamma'_{ji}{}^k = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{i'}} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{j'} \partial x^{i'}} \quad (1.32)$$

I simboli di Christoffel sostanzialmente descrivono come i vettori di base cambiano in punti diversi della varietà mentre ci si muove lungo una coordinata. Per gli scopi presenti, si considererà sempre una connessione affine simmetrica, cioè

$$\Gamma_{ji}^k = \Gamma_{ij}^k \quad (1.33)$$

che significa che nella varietà non vi è *torsione*.

Dalla definizione (1.31) segue che la derivata covariante di un vettore si può scrivere come

$$\nabla_{\vec{v}}\vec{w} = v^i \left[\left(\frac{\partial w^j}{\partial x^i} \right) \vec{e}_j + w^j \Gamma_{ji}^k \vec{e}_k \right] = v^i \left[\frac{\partial w^k}{\partial x^i} + w^j \Gamma_{ji}^k \right] \vec{e}_k \quad (1.34)$$

dove si è usato il fatto che una componente di un vettore è uno scalare e la derivata covariante si riduce alla parziale. Si introduce la notazione indiciale con i simboli $';$ per indicare la derivata covariante e $'$ per indicare l'usuale derivata parziale, i quali si posizionano davanti all'indice rispetto a cui si deriva. Allora estrapolando solo le componenti dall'equazione sopra, si avrà

$$w_{;i}^k = v^i w_{,i}^k + \Gamma_{ji}^k v^i w^j \quad (1.35)$$

Ora, essendo $v^i = \frac{dx^i}{d\lambda}$ si riconosce che il primo termine è di fatto l'usuale derivata lungo \vec{v}

$$v^i \frac{\partial w^k}{\partial x^i} = \frac{dw^k}{d\lambda} \quad (1.36)$$

Infine, per comodità, si omette talvolta il vettore \vec{v} lungo cui si deriva, il quale entra solo moltiplicativamente, e si chiama derivata covariante di \vec{w} il tensore (1,1)

$$w_{;i}^k = w_{,i}^k + \Gamma_{ji}^k w^j \quad (1.37)$$

In analogia ai vettori, la derivata covariante di una 1-forma \tilde{w} sarà il tensore (0,2)

$$w_{k;i} = w_{k,i} - \Gamma_{ki}^j w_j \quad (1.38)$$

Questa derivazione si ottiene sfruttando il fatto che la derivata covariante di uno scalare coincide con la derivata totale e che contraendo un vettore ed una 1-forma si ottiene uno scalare. Poi si utilizza la nozione di derivata covariante per vettori e le usuali regole di derivazione in modo da ottenere la derivata covariante di una 1-forma (e volendo di tensori di qualsiasi rango).

E' facile dimostrare che la derivata covariante del tensore metrico è nulla, cioè per ogni μ, ν, γ

$$g_{\mu\nu;\gamma} = 0 \quad ; \quad g_{;\gamma}^{\mu\nu} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla g = 0 \quad (1.39)$$

Questo segue ad esempio richiedendo che il prodotto scalare (cf. equazione (1.27)) di due vettori la cui derivata covariante lungo \vec{v} sia nulla, non cambi lungo la curva di \vec{v} tangente.

Esprimendo l'equazione (1.39) in specifici sistemi di riferimento si può ottenere un'equazione per i simboli di Christoffel in termini delle derivate del tensore metrico, usando la derivata covariante di un tensore che segue per analogia a quelle di vettori e 1-forme

$$g_{\mu\nu;\beta} = g_{\mu\nu,\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} g_{\alpha\nu} - \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} g_{\mu\alpha} = 0 \quad (1.40)$$

Ora permutando gli indici, sommando opportunamente le equazioni risultanti ed usando la simmetria di g e di Γ (si veda appendice A.2), si ricava

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} (g_{lj,k} + g_{lk,j} - g_{jk,l}) \quad (1.41)$$

un'espressione dei simboli di Christoffel in termini delle derivate prime della metrica, la quale sarà utile in seguito.

1.3.5 Geodetiche

Con gli strumenti sviluppati si è finalmente pronti a ricavare l'equazione geodetica. Una **geodetica** è una curva preferita lungo la quale il vettore tangente è trasportato parallelamente. In questo modo è possibile definire su una varietà il concetto di linea retta o meglio, se dotata di una metrica, di curva estremante.

Sia \vec{v} il vettore tangente alla curva γ parametrizzata da $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora γ è una geodetica se

$$\nabla_{\vec{v}} \vec{v}|_P = 0 \quad \forall P \in \gamma \quad (1.42)$$

Riscrivendo l'equazione in un sistema di riferimento locale, dove $\gamma \in \mathcal{M}$ è mappata in $x^k = x^k(\lambda) \in \mathbb{R}^n$, si ha

$$v_{;j}^k = v^j \left(\frac{\partial v^k}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^k v^i \right) = \frac{dv^k}{d\lambda} + \Gamma_{ij}^k v^i v^j = 0 \quad (1.43)$$

da cui segue l'equazione geodetica

$$\frac{d^2 x^k}{d\lambda^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} = 0 \quad (1.44)$$

Il parametro λ è detto parametro affine e la definizione di geodetica è invariante per un cambio di parametrizzazione di γ . Particelle materiali di prova su cui agiscono solo forze gravitazionali seguono linee di mondo che sono geodetiche. In questo caso si può usare come parametro lungo la curva il tempo proprio τ e segue che la 4-velocità della particella è il vettore tangente alla linea di mondo:

$$\frac{d^2 x^k}{d\tau^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} = 0 \quad (1.45)$$

In maniera simile anche i fotoni seguono geodetiche tuttavia il tempo proprio non può essere usato come parametro della linea di mondo, essendo $d\tau = 0$ per un fotone. Quindi l'equazione geodetica per un fotone sarà in generale come l'equazione (1.44) con λ un opportuno parametro affine.

Sistemi di coordinate normali

Dato un punto P sulla varietà n -dimensionale \mathcal{M} e una base di T_P , si avranno n geodetiche e quindi n equazioni geodetiche

$$\nabla_{\vec{e}_i} \vec{e}_i = 0 \quad (1.46)$$

le quali possono essere utilizzate per definire n coordinate con base $\vec{e}_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ passanti per P . Quindi usando le geodetiche come linee coordinate si definisce un sistema di riferimento in un punto P , in cui vale l'importante proprietà che la connessione affine si annulla nell'origine P di questo. Infatti si avrà che

$$\frac{dx^i}{d\lambda} = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial (x^j)^2} = 0 \quad (1.47)$$

lungo ognuna delle n geodetiche. Allora dall'equazione geodetica (1.44) si ottiene

$$\Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{ij}^k \Big|_P = 0 \quad (1.48)$$

poichè le n direzioni sono arbitrarie. Un sistema di coordinate tale si chiama *normale* o *Gaussiano*, attorno a P . E' chiaro ora che Γ definisce come i vettori coordinati di base sono trasportati parallelamente lungo le coordinate. Infatti dalla (1.31) in questi sistemi di riferimento si ha

$$\nabla_{\vec{e}_i} \vec{e}_j \Big|_P = 0 \quad \Rightarrow \quad (\nabla_{\vec{v}} \vec{w})^j \Big|_P = v^i \frac{\partial w^j}{\partial x^i} \Big|_P \quad (1.49)$$

così che \vec{w} è trasportato parallelamente lungo \vec{v} se le sue componenti non cambiano, un po' come intuitivamente si è abituati a pensare in \mathbb{R}^n . Ergo in un sistema di riferimento normale la

derivata covariante coincide con quella parziale, in P

$$\nabla_{\vec{e}_i}|_P = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_P \quad (1.50)$$

Queste sono equazioni puntuali: in generale è impossibile definire un sistema di riferimento dove $\Gamma = 0$ in un aperto arbitrariamente grande, quindi

$$\Gamma_{ij,l}^k \Big|_P \neq 0 \quad (1.51)$$

così come le derivate di ordine maggiore. E' dunque 'solo' possibile definire un sistema di riferimento Gaussiano attorno ad una data geodetica, così che $\Gamma(P) = 0 \quad \forall P \in \gamma$ (la geodetica).

Per essere chiari, si fa notare che i sistemi di coordinate normali sono proprio quelli menzionati nella sezione 1.2 quando si discute il passaggio dalla Relatività Speciale alla Generale. Sono appunto sistemi dove le simmetrie della Relatività Speciale valgono esattamente nel punto P e approssimativamente in un intorno sufficientemente piccolo di P (concetto che si esprime spesso con il termine *localmente*).

Il tutto è chiaramente consistente con alcuni dei risultati già noti. Essendo la metrica in questione quella di Minkowski (equazione (1.3)), si nota subito che valutando i simboli di Christoffel dati dalla (1.41), questi sono identicamente nulli essendo nulle le derivate di $\eta_{\mu\nu}$, in accordo con l'equazione (1.48).

1.4 Equazioni di Einstein

Si possiedono ora gli strumenti di base per definire gli oggetti che compariranno nelle equazioni di Einstein. La Relatività Speciale presenta un formalismo elegante per descrivere la fisica negli spazi piatti (Minkowski), le nozioni di geometria differenziale sono utili per modellare tale fisica in un eventuale spazio curvo. In un campo gravitazionale non uniforme, due linee di mondo che inizialmente sono parallele, non rimangono tali in generale. Lo spaziotempo è dunque curvo. Ora si vuole descrivere la curvatura e identificare la sua causa.

1.4.1 Tensore di Riemann e curvatura

Per valutare la suddetta curvatura è necessario un tensore, detto **tensore di Riemann**. Questo tensore $(1,3)$, $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$, è la quantità matematica che permette di definire la curvatura di una varietà come effetto di trasporto parallelo di campi vettoriali lungo percorsi chiusi. Quindi da un punto di vista fisico e intuitivo, la contrazione di \mathbf{R} con tre vettori restituisce un vettore il quale permette di descrivere se e quanto differiscono un vettore dal suo trasportato parallelo lungo un percorso chiuso. Si tratta di una curvatura intrinseca di natura tensoriale, non vi è infatti la necessità di osservare la varietà dall'esterno.

Affrontando il problema da un punto di vista prettamente formale e matematico, si vuole creare un tensore $(1,3)$ in funzione della metrica e delle sue derivate. Se si utilizzassero solo la metrica e le sue derivate prime, non si potrebbe costruire nessun tensore nuovo perchè,

come visto nella precedente sezione, in ogni punto è possibile trovare un sistema di riferimento in cui la derivata prima del tensore metrico si annulla. Dunque per formare questo nuovo tensore serviranno derivate prime e seconde della metrica. A tale scopo si ricordi la legge di trasformazione della connesse affine, l'equazione (1.32). Si isola da questa il termine non omogeneo, quello che non rende Γ un tensore, (invertendo le coordinate primarie e non)

$$\frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^k} \Gamma_{ji}^k - \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^i} \Gamma'_{\beta\gamma}{}^{\alpha} \quad (1.52)$$

Ora si sfrutta la commutatività della derivazione parziale: si deriva rispetto a x^λ e si sostituisce di nuovo l'equazione (1.52), per ottenere

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 x^{\alpha'}}{\partial x^\lambda \partial x^j \partial x^i} = & \Gamma_{ji}^k \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\eta} \Gamma_{\lambda k}^\eta - \frac{\partial x^{\beta'}}{x^\lambda} \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^k} \Gamma'_{\beta\gamma}{}^{\alpha} \right) - \Gamma'_{\beta\gamma}{}^{\alpha} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^j} \left(\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\eta} \Gamma_{\lambda i}^\eta - \frac{\partial x^{\eta'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^{\xi'}}{\partial x^i} \Gamma'_{\eta\xi}{}^{\gamma} \right) \\ & - \Gamma'_{\beta\gamma}{}^{\alpha} \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^i} \left(\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\eta} \Gamma_{\lambda j}^\eta - \frac{\partial x^{\eta'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^{\xi'}}{\partial x^j} \Gamma'_{\eta\xi}{}^{\beta} \right) + \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^k} \frac{\partial \Gamma_{ji}^k}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{\eta'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \Gamma'_{\beta\gamma}{}^{\alpha}}{\partial x^{\eta'}} \end{aligned} \quad (1.53)$$

Ora si raccolgono i termini simili e si aggiustano gli indici così che si può scrivere

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 x^{\alpha'}}{\partial x^\lambda \partial x^j \partial x^i} = & \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \Gamma_{ji}^k}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{ji}^\eta \Gamma_{\lambda\eta}^k \right) \\ & - \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^i} \frac{x^{\eta'}}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial \Gamma'_{\beta\gamma}{}^{\alpha}}{\partial x^{\eta'}} - \Gamma'_{\beta k}{}^{\alpha} \Gamma'_{\eta\gamma}{}^k - \Gamma'_{k\gamma}{}^{\alpha} \Gamma'_{\eta\beta}{}^k \right) \\ & - \Gamma'_{\beta\gamma}{}^{\alpha} \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^k} \left(\Gamma_{ji}^k \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\lambda i}^k \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^j} + \Gamma_{\lambda j}^k \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^i} \right) \end{aligned} \quad (1.54)$$

Dunque si 'elimina' il termine indesiderato sottraendo la stessa equazione con gli indici i e λ scambiati

$$\frac{\partial^3 x^{\alpha'}}{\partial x^\lambda \partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^3 x^{\alpha'}}{\partial x^i \partial x^j \partial x^\lambda} = 0 \quad (1.55)$$

Di conseguenza nel membro destro tutti i termini che coinvolgono prodotti di Γ e Γ' si annullano e quindi rimane

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \Gamma_{ji}^k}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma_{j\lambda}^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ji}^\eta \Gamma_{\lambda\eta}^k - \Gamma_{j\lambda}^\eta \Gamma_{i\eta}^k \right) \\ - \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{\eta'}}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial \Gamma'_{\beta\gamma}{}^{\alpha}}{\partial x^{\eta'}} - \frac{\partial \Gamma'_{\beta\eta}{}^{\alpha}}{\partial x^{\gamma'}} - \Gamma'_{k\gamma}{}^{\alpha} \Gamma'_{\eta\beta}{}^k + \Gamma'_{k\eta}{}^{\alpha} \Gamma'_{\gamma\beta}{}^k \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.56)$$

Se si esamina la posizione degli indici si evince che questa è di fatto una legge di trasformazione di un tensore (1,3), cioè quello che appare tra le parentesi tonde. Dunque è possibile riscrivere quella come

$$R'_{\beta\gamma\eta}{}^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^j}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{\gamma'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\eta'}} R^k_{ji\lambda} \quad (1.57)$$

dove si definisce il **tensore di Riemann**

$$R^k_{ji\lambda} = \Gamma^k_{ji,\lambda} - \Gamma^k_{j\lambda,i} + \Gamma^\eta_{ji}\Gamma^k_{\lambda\eta} - \Gamma^\eta_{j\lambda}\Gamma^k_{i\eta} \quad (1.58)$$

il quale è l'unico tensore realizzabile usando la metrica e le sue derivate prime e seconde, e che è lineare in queste ultime. Quello eseguito è un modo formale di definire il tensore di Riemann (o di curvatura) a partire dalle proprietà di trasformazione dei simboli di Christoffel. L'idea di base è che la curvatura dello spaziotempo va cercata nelle derivate seconde della metrica e quindi nelle derivate prime della connessione affine. Questa però non si trasforma come un tensore quindi va "eliminata" la parte inomogenea, ergo si procede come appena mostrato.

Il tensore di Riemann (1.58) cela il significato matematico preciso di curvatura intrinseca di una varietà: quando il tensore di Riemann non è nullo, il trasporto parallelo di un vettore lungo un percorso chiuso non lo fa tornare a coincidere con il vettore iniziale. L'implicazione letta al contrario dice che se esiste un 'loop' per cui vettori trasportati parallelamente non tornano in se stessi, allora la varietà è curva. Quindi:

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{varietà piatta} \quad (1.59)$$

E' utile esprimere le componenti del tensore di Riemann in un sistema di riferimento localmente inerziale in un punto P , usando la relazione che lega i simboli di Christoffel al tensore metrico, cioè l'equazione (1.41). Per iniziare si abbassa l'indice di $R^\mu_{\alpha\beta\gamma}$ con la metrica e si sostituisce al suo posto la sua definizione (1.58), per ottenere

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= g_{\alpha\mu}R^\mu_{\beta\gamma\delta} \\ &= g_{\alpha\mu} \left[\Gamma^k_{\beta\delta}\Gamma^\mu_{k\gamma} - \Gamma^k_{\beta\gamma}\Gamma^\mu_{k\delta} + \Gamma^\mu_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\mu_{\beta\gamma,\delta} \right] \end{aligned} \quad (1.60)$$

In un sistema di riferimento localmente inerziale definito nel punto P (chiamato normale o Gaussiano nella sezione 1.3.5), dove cioè lo spaziotempo è quello piatto di Minkowski, si ha che $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}|_P = 0$, ma in generale non vale lo stesso per la sua derivata prima (equazione (1.51)).

Quindi dall'equazione sopra rimane

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\mu}R^\mu_{\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\mu}\Gamma^\mu_{\beta\delta,\gamma} - g_{\alpha\mu}\Gamma^\mu_{\beta\gamma,\delta} \quad (1.61)$$

Usando sempre la relazione che lega Γ alle derivate prime del tensore metrico (1.41), è possibile calcolare la derivata dei simboli di Christoffel che saranno funzione delle derivate seconde di $g_{\mu\nu}$. Inserendo le Γ derivate si ottiene

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\mu} \frac{1}{2} g^{\mu k} (g_{k\beta,\delta\gamma} + g_{k\delta,\beta\gamma} - g_{\beta\delta,k\gamma}) - g_{\alpha\mu} \frac{1}{2} g^{\mu k} (g_{k\beta,\gamma\delta} + g_{k\delta,\gamma\beta} - g_{\beta\gamma,k\delta}) \quad (1.62)$$

Infine usando la simmetria del tensore metrico $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ e il fatto che le derivate parziali

commutano $g_{\alpha\beta,\mu\nu} = g_{\alpha\beta,\nu\mu}$ si arriva alla relazione

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\delta,\beta\gamma} + g_{\beta\gamma,\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma,\beta\delta} - g_{\beta\delta,\alpha\gamma}) \quad (1.63)$$

che lega la curvatura di una varietà \mathcal{M} alla sua metrica. Questa sarà importante nel capitolo 3 quando si studierà l'approssimazione di campo debole.

Identità di Bianchi

A questo punto vale la pena fare qualche passaggio in più poichè proprio dai ragionamenti fatti nelle ultime righe si possono ricavare quelle che si chiamano *identità di Bianchi*, le quali affermano che

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\gamma\lambda;\mu} = 0 \quad (1.64)$$

Queste sono di fondamentale importanza in quanto suggeriranno uno degli oggetti da usare nelle equazioni di campo di Einstein.

Per dimostrare la validità delle suddette identità si sceglie un sistema di riferimento localmente inerziale in un punto arbitrario P e si costruisce un sistema normale in cui localmente i simboli di Christoffel sono nulli, proprio come fatto nell'equazione (1.61). Differenziando questa equazione, dal momento che $g_{\alpha\mu;\lambda} = 0$ (equazione (1.39)), si può scrivere

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta;\lambda} = \left(g_{\alpha\mu} R^{\mu}_{\beta\gamma\delta} \right)_{;\lambda} = g_{\alpha\mu} R^{\mu}_{\beta\gamma\delta;\lambda} \quad (1.65)$$

Ora con un procedimento analogo a quello fatto nella pagina precedente, si inseriscono le derivate (questa volta seconde) dei simboli di Christoffel che saranno parziali perchè il sistema di riferimento è localmente inerziale e si ottiene un'equazione analoga (di fatto la sua derivata) alla (1.63)

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta;\lambda} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\delta,\beta\gamma\lambda} + g_{\beta\gamma,\alpha\delta\lambda} - g_{\alpha\gamma,\beta\delta\lambda} - g_{\beta\delta,\alpha\gamma\lambda}) \quad (1.66)$$

la quale è il primo dei tre tensori (0,5) che compaiono nell'identità da dimostrare. Scrivendo le espressioni corrispondenti per gli altri due termini della (1.64) e sommandoli si noterà che tutto si semplifica a zero, quindi si dimostra il risultato richiesto ovvero la stessa identità di Bianchi.

Dall'espressione (1.63), è facile verificare che il tensore di Riemann soddisfa le seguenti proprietà:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (1.67)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0 \quad (1.68)$$

Quindi \mathbf{R} è antisimmetrico sulla prima coppia di indici e sulla seconda, mentre è simmetrico per scambio delle due coppie (a blocchi).

Da tali simmetrie si possono definire altri utili tensori. Contraendo il tensore di Riemann

per formare un tensore di tipo (0,2), si ottiene il **tensore di Ricci**

$$R_{\alpha\beta} = R^{\mu}_{\alpha\mu\beta} \quad (1.69)$$

dove quindi si contrae il primo con il terzo indice. Le componenti del tensore di Ricci possono essere scritte anche come:

$$R_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu\beta} \quad (1.70)$$

E' facile vedere che il tensore di Ricci è simmetrico: $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$.

Contraendo ancora il tensore di Ricci con le componenti controvarianti della metrica, si ottiene lo **scalare di curvatura**

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \quad (1.71)$$

Si definisce quindi, usando la forma controvariante del tensore di Ricci (alzando gli indici con la metrica), il **tensore di Einstein**, G , come segue

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \quad (1.72)$$

Si noti che anche $G^{\mu\nu}$ è simmetrico.

La definizione di tale tensore può sembrare poco utile al momento, ma di fatto $G^{\mu\nu}$ si rivelerà di notevole importanza poichè è il perfetto candidato per 'affiancare' ciò che descrive la fonte della curvatura.

Le equazioni di Einstein non descrivono infatti solo lo spaziotempo come una varietà curva, la cui curvatura è celata dal tensore di Riemann, ma mostrano anche quale è la causa di tale curvatura. Quindi non solo la materia si muove in accordo con la curvatura dello spaziotempo, ma lo spaziotempo viene curvato in funzione di ciò che vi è all'interno. Non resta che capire quale sia la fonte.

1.4.2 Tensore energia-impulso come sorgente

La sorgente del campo gravitazionale Newtoniano è la densità di materia. Qui si necessita di un concetto analogo, ma in una forma relativistica, si dovrà dunque tener conto anche dell'energia associata alla massa a riposo.

La fluidodinamica relativistica insegna che, in un sistema di riferimento a riposo con un fluido (quindi solidale con esso), la densità di energia per la polvere è semplicemente ρ , la quale potrebbe sembrare adatta come fonte relativistica di un campo gravitazionale. Tuttavia per un altro osservatore, non solidale a quel sistema di riferimento comovente col fluido (si parla sempre di *fluidi perfetti*), quella ρ sarebbe solo la componente 00 di un tensore, nel suo sistema di riferimento. Una teoria covariante non può favorire determinati sistemi di riferimento quindi va definito il cosiddetto **tensore energia-impulso** in termini delle sue componenti in un arbitrario sistema di riferimento.

Si definisce dunque $T^{\alpha\beta}$ per un elemento di fluido *il flusso della componente α del 4-impulso di tutta la materia (particelle materiali più eventuali campi elettromagnetici o di particelle dall'equivalenza tra massa ed energia) attraverso una superficie di x^β costante.*

Quindi se si tratta di polvere l'unica componente diversa da zero di T è $T^{00} = \rho$, poichè non c'è trasferimento di impulso (non vi è pressione). Per un fluido perfetto generale invece, anche gli altri elementi sulla diagonale saranno non nulli, sempre in un sistema di riferimento solidale con il fluido. Gli elementi T^{0i} ($i = 1, 2, 3$) che corrispondono alle componenti del flusso di energia saranno nulli poichè per un fluido perfetto non vi è moto vorticoso nè conduzione del calore. La simmetria di T annulla anche le componenti T^{i0} che corrispondono alla densità di impulso. Gli altri elementi fuori dalla diagonale T^{ij} saranno nulli perchè per un fluido perfetto non vi sono forze viscosse parallele all'interfaccia tra gli elementi del fluido. Infine le componenti T^{ii} corrispondono per definizione al flusso dell' i -esima componente dell'impulso nella direzione x^i , perpendicolare all'interfaccia dell'elemento di fluido. Dunque si tratta di forza per unità di superficie perpendicolare, che altro non è che *pressione*. I moti caotici delle particelle del fluido generano una pressione P , quindi il tensore energia impulso nel sistema comovente col fluido perfetto si può scrivere come

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad (1.73)$$

Ancora più in generale, si può estendere l'espressione di $T^{\alpha\beta}$ per un sistema di riferimento inerziale generico, il quale per un fluido perfetto con 4-velocità u^α è

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + P)u^\alpha u^\beta + P\eta^{\alpha\beta} \quad (1.74)$$

Si noti che l'equazione (1.74) si riduce alla (1.73) quando la 4-velocità $u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$ cioè in un sistema di riferimento comovente solidale con il fluido (in questo caso $dt = d\tau$, e al solito $c = 1$). Il tensore $\eta^{\alpha\beta}$ è la solita metrica di Minkowski come definita nella prima sezione (equazione (1.3)), ma con gli indici alzati.

La conservazione di energia e impulso richiede che la divergenza del tensore energia-impulso sia zero

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0 \quad (1.75)$$

E' giunto il momento di utilizzare il principio di equivalenza introdotto nella sezione 1.2, quindi di usare il fatto che in un sistema di riferimento localmente inerziale i fenomeni fisici sono in accordo con la Relatività Speciale. E' possibile generalizzare la forma delle leggi che coinvolgono tensori valide in Relatività Speciale al caso della Relatività Generale come dettato dal principio di covarianza generale, quindi sostituendo la 'virgola' (derivazione parziale) con il 'punto e virgola' (derivazione covariante). Per cui generalizzando l'equazione (1.74), il tensore energia-impulso

per un fluido perfetto in Relatività Generale avrà la forma

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu} \quad (1.76)$$

dove $g^{\mu\nu}$ è il tensore metrico controvariante (indici in alto) il quale si riduce localmente a $\eta^{\mu\nu}$ in accordo al principio di equivalenza. Ma allora l'equazione di continuità (1.75) si generalizza così

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad (1.77)$$

Dunque in un sistema di riferimento generico il tensore energia-impulso è covariantemente conservato. Si ricordi che la derivata covariante contiene termini aggiuntivi rispetto al caso di Minkowski, che rappresentano l'effetto della gravità. Questo accade perchè in un sistema di riferimento localmente inerziale i simboli di Christoffel sono nulli. Se l'equazione (1.77) non fosse valida, si potrebbe costruire un sistema di riferimento localmente inerziale in un punto dove, non essendoci i simboli di Christoffel, si avrebbe $T^{\mu\nu}_{;\nu} \neq 0$ che contraddice l'equazione di conservazione usuale (1.75).

Ricapitolando, il tensore energia-impulso è la sorgente della curvatura dello spaziotempo. Esso descrive la presenza ed il moto della materia. E' dunque necessario correlarlo in qualche modo al tensore di Riemann o a qualche sua contrazione, per ottenere le equazioni di Einstein.

1.4.3 Equazioni di campo

Nella sezione 1.4.1 è stato definito il tensore di Einstein senza troppe giustificazioni, come una combinazione particolare di determinate contrazioni del tensore di curvatura di Riemann (si veda equazione (1.72)). Dopo la descrizione e lo studio del tensore energia-impulso la definizione di $G^{\mu\nu}$ comincia ad acquistare significato. In primis per costruire un'equazione tensoriale è necessario eguagliare tensori dello stesso rango, e si evince immediatamente che non serve il tensore di Riemann poichè il tensore energia-impulso è di tipo (2,0) esattamente come quello di Einstein (che comunque nasconde la curvatura nelle sue componenti). Tuttavia per convincersi che i due tensori in questione siano in effetti adatti per costruire le equazioni del campo gravitazionale, va menzionato che il tensore di Einstein gode di una particolare proprietà. Si dimostra infatti che usando le *identità di Bianchi* (si veda Appendice B), si ha

$$G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad (1.78)$$

e cioè che anche \mathbf{G} è covariantemente conservato.

Avendo in mente l'equazione (1.77), tale proprietà suggerisce immediatamente di costruire le equazioni a partire da

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = G^{\mu\nu}_{;\nu} \quad (1.79)$$

Questo implica che salvo una costante k da sistemare, le equazioni del campo avranno la forma

$$G^{\mu\nu} = kT^{\mu\nu} \quad (1.80)$$

Considerando le unità di misura di $G^{\mu\nu}$ [*lunghezza*⁻¹] e di $T^{\mu\nu}$ [*massa* · *lunghezza*⁻³], risulta necessaria una costante G_N con dimensioni [*lunghezza* · *massa*⁻¹], la quale risulta proprio essere la costante di Newton. Richiedendo che nel limite di campo debole e moto non relativistico si recuperino le leggi della gravitazione e dinamica Newtoniana, k risulta essere $8\pi G_N/c^4$.

Mettendo tutto insieme (impostando come nel resto della trattazione $c = 1$), si possono finalmente scrivere le equazioni di campo di Einstein le quali comportano una interpretazione della gravità come geometria dello spaziotempo

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = 8\pi G_N T^{\mu\nu} \quad (1.81)$$

La materia determina la curvatura dello spaziotempo e segue geodetiche in esso.

Capitolo 2

Equazioni dello spostamento geodetico

Come menzionato, se lo spaziotempo è curvo allora due linee di mondo inizialmente parallele non rimarranno tali mentre ci si muove sulla varietà. Questo è il concetto di base su cui si fondano gli studi sulla rilevazione di onde gravitazionali. La deviazione di due geodetiche si può di fatto usare per rivelare la curvatura dello spaziotempo. Per la precisione, è l'**accelerazione della deviazione geodetica** a rappresentare una firma della curvatura, o equivalentemente la presenza di un campo gravitazionale *non* uniforme. Quest'ultimo punto è di fondamentale importanza: la deviazione geodetica non distingue tra un campo gravitazionale nullo e un campo gravitazionale uniforme, l'accelerazione di tale deviazione sarebbe comunque zero. Si enfatizzano questi concetti, di fatto espressi nei principi di equivalenza, perchè i rilevatori di onde gravitazionali sono sensibili precisamente a queste variazioni dette **mareali**, cioè forze gravitazionali di marea associate a campi non uniformi che sono appunto causa dell'accelerazione dello spostamento geodetico.

2.1 Deviazione geodetica Newtoniana

Prima di utilizzare le definizioni rigorose di geodetica date nel precedente capitolo, è istruttivo considerare una descrizione Newtoniana del comportamento di due particelle in caduta libera in un campo gravitazionale non uniforme.

Si assume per semplicità che la terra sia sferica e si considerano due particelle alla stessa altezza dalla superficie, rilasciate da ferme. In accordo con la gravitazione Newtoniana, la separazione tra le due traiettorie si riduce mentre loro cadono liberamente verso il centro della terra, perchè il campo non è uniforme (e i loro vettori accelerazione non sono paralleli).

Si denota la separazione iniziale con ξ_0 e la distanza di ogni particella dal centro della terra con r_0 , mentre $\xi(t)$ e $r(t)$ saranno la separazione e la distanza in funzione del tempo. Dalla similitudine dei triangoli si ha che

$$\frac{\xi(t)}{r(t)} = \frac{\xi_0}{r_0} = k \quad \Rightarrow \quad \xi(t) = kr(t) \quad (2.1)$$

con k costante. Derivando rispetto al tempo due volte si ottiene

$$\ddot{\xi} = k\ddot{r} = -\frac{kG_N M}{r^2} \quad (2.2)$$

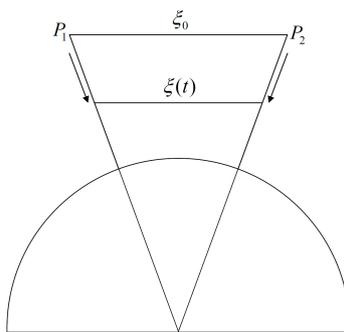


Figura 2.1: La separazione tra due particelle in caduta libera cambia nel tempo, in un campo gravitazionale non uniforme.

dove $\ddot{r} = a = -\frac{G_N M}{r^2}$. Sostituendo ora il valore di k , e usando il fatto che in prossimità della terra $r \simeq R$, si ha

$$\ddot{\xi} = -\frac{G_N M \xi}{R^3} \quad (2.3)$$

Ridefinendo la coordinata temporale, si può riesprimere quell'equazione come

$$\frac{d^2 \xi}{d(ct)^2} = -\frac{G_N M}{R^3 c^2} \xi \quad (2.4)$$

Si evince che l'accelerazione dello spostamento geodetico è proporzionale alla distanza iniziale con una costante di proporzionalità di dimensioni [lunghezza a^{-2}]. Si noti che la costante di proporzionalità tra $\ddot{\xi}$ e ξ , ignorando per un momento la ridefinizione della coordinata temporale, è di fatto la derivata seconda del potenziale gravitazionale $\Phi = -\frac{G_N M}{r}$, valutata in R . Quindi la si può esprimere come $\partial^a \partial_b \Phi$, con $a, b = (1, 2, 3)$.

Che significato fisico nasconde l'equazione (2.4)?

Per riuscire ad immaginare il significato geometrico, si costruisce un caso analogo in due dimensioni. Si consideri una sfera di raggio a , e due punti sull'equatore. Si considerino due geodetiche, cioè meridiani perpendicolari all'equatore, passanti per i due punti, che convergono al polo nord. Si denota la distanza iniziale tra i due punti con ξ_0 , l'arcodistanza lungo ogni geodetica con s e la separazione tra le geodetiche in s è $\xi(s)$.

Ora si vuole scrivere l'equazione differenziale che governa la variazione della separazione geodetica. Si adottano le usuali coordinate polari sferiche (r, θ, ϕ) . Se l'infinitesima separazione angolare tra le due geodetiche è $d\phi$, allora $\xi_0 = a d\phi$. Invece la separazione geodetica all'altezza dell'angolo θ , corrispondente all'arcodistanza s , sarà ($s = a\theta$)

$$\xi(s) = a \cos \theta d\phi = \xi_0 \cos \theta = \xi_0 \cos \left(\frac{s}{a} \right) \quad (2.5)$$

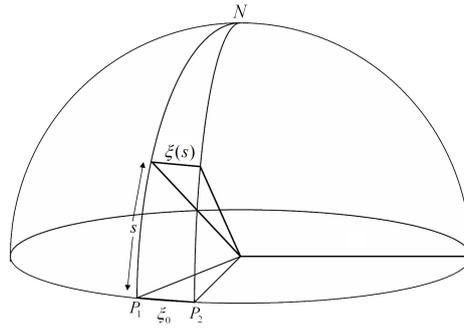


Figura 2.2: La separazione tra due geodetiche cambia muovendosi sulla superficie di una sfera.

Derivando due volte rispetto a s , si ha

$$\frac{d^2\xi}{ds^2} = -\frac{\xi_0 \cos\left(\frac{s}{a}\right)}{a^2} = -\frac{1}{a^2}\xi \quad (2.6)$$

Confrontando infine l'equazione (2.6) con la (2.4), si può intuire che in qualche senso la quantità

$$\mathcal{A} = \left[\frac{G_N M}{R^3 c^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.7)$$

rappresenta il *raggio di curvatura dello spaziotempo* alla superficie della terra. Inserendo le costanti per la Terra si ottiene $\mathcal{A} \sim 2 \cdot 10^{11} m$. Il fatto che questo sia molto maggiore del raggio fisico terrestre significa che lo spaziotempo è quasi piatto nelle vicinanze della terra, cioè il campo gravitazionale della terra è molto debole.

2.2 Deviazione geodetica in Relatività Generale

Nel primo capitolo è stata data una definizione del tensore di Riemann considerando il trasporto parallelo di un vettore lungo un percorso chiuso sulla varietà. Il tensore di curvatura nell'equazione (1.63) è determinato in funzione del tensore metrico e delle sue derivate (seconde). Questo discendeva da una definizione (equazione (1.58)) più generale di \mathbf{R} in termini dei simboli di Christoffel, che a loro volta hanno un'espressione in termini della metrica. Questa definizione più basilare del tensore di Riemann si può anche ricavare (o comunque ritrovare) con un percorso diverso, cioè calcolando la deviazione di due geodetiche sulla varietà.

Come nel caso Newtoniano si considerano due particelle di prova (indicate con 1 e 2) che si muovono lungo due geodetiche. Sia $\xi^\mu(\tau)$ la separazione (infinitesima) tra le particelle al tempo proprio τ , così che indicando le posizioni con $x^\mu(\tau)$ delle particelle, si ha

$$x_2^\mu(\tau) = x_1^\mu(\tau) + \xi^\mu(\tau) \quad (2.8)$$

Le linee di mondo delle particelle sono descritte dall'equazione geodetica (1.45), cioè

$$\frac{d^2 x_1^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x_1) \frac{dx_1^\alpha}{d\tau} \frac{dx_1^\beta}{d\tau} = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{d^2 x_2^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x_2) \frac{dx_2^\alpha}{d\tau} \frac{dx_2^\beta}{d\tau} = 0 \quad (2.10)$$

Espandendo ora i simboli di Christoffel attorno a x_1 in termini di ξ , si ha

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x_2) = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x_1 + \xi) = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x_1) + \Gamma_{\mu\alpha\beta,\gamma}^\mu \xi^\gamma \quad (2.11)$$

Si sottraggono le equazioni (2.10) e (2.9), tenendo conto dell'espansione qui sopra, ottenendo

$$\frac{d^2 x_2^\mu}{d\tau^2} - \frac{d^2 x_1^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x_1) \frac{dx_2^\alpha}{d\tau} \frac{dx_2^\beta}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\mu \xi^\gamma \frac{dx_2^\alpha}{d\tau} \frac{dx_2^\beta}{d\tau} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x_1) \frac{dx_1^\alpha}{d\tau} \frac{dx_1^\beta}{d\tau} = 0 \quad (2.12)$$

Ora si utilizza la definizione di vettore $\frac{dx^i}{d\tau} = v^i$, si nota che i primi due termini altro non sono che la derivata seconda della separazione ξ^μ (differenziando trivialmente la (2.8) due volte) e si somma e sottrae la stessa quantità $v_2^\alpha v_1^\beta$, per ottenere l'espressione

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x_1) \left[v_2^\alpha v_2^\beta - v_1^\alpha v_1^\beta + v_2^\alpha v_1^\beta - v_2^\alpha v_1^\beta \right] + \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\mu \xi^\gamma v_2^\alpha v_2^\beta = 0 \quad (2.13)$$

$$\therefore \frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x_1) \left[v_2^\alpha (v_2^\beta - v_1^\beta) + v_1^\beta (v_2^\alpha - v_1^\alpha) \right] + \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\mu \xi^\gamma v_2^\alpha v_2^\beta = 0 \quad (2.14)$$

Ora si nota che grazie alla derivata prima della (2.8) nelle parentesi tonde compaiono i termini

$$\frac{dx_2^\beta}{d\tau} - \frac{dx_1^\beta}{d\tau} = \frac{d\xi^\beta}{d\tau} \quad ; \quad \frac{dx_2^\alpha}{d\tau} - \frac{dx_1^\alpha}{d\tau} = \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \quad (2.15)$$

Quindi in conclusione si ottiene l'equazione per l'accelerazione di ξ^μ (tralasciando i pedici)

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu v^\alpha \frac{d\xi^\beta}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu v^\beta \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\mu \xi^\gamma v^\alpha v^\beta = 0 \quad (2.16)$$

Ora è necessario sviluppare l'equazione covariante corrispondente alla (2.16), la quale non è infatti un'equazione tensoriale. Si eseguono dunque le derivate covarianti della separazione geodetica, e anzichè usare l'operatore $\nabla_{\vec{v}}$ si introduce il formalismo per le componenti della derivata covariante $D/D\tau$, con $\vec{v} = d\vec{x}/d\tau$. Allora dall'equazione (1.35), usando la (1.36), si avrà la derivata prima

$$\frac{D\xi^\mu}{D\tau} = \frac{d\xi^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \quad (2.17)$$

e di conseguenza la seconda

$$\begin{aligned}\frac{D^2\xi^\mu}{D\tau^2} &= \frac{D}{D\tau} \left(\frac{D\xi^\mu}{D\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{D\xi^\mu}{D\tau} \right) + \Gamma_{ij}^\mu \frac{D\xi^i}{D\tau} v^j \\ &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\xi^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \right) + \Gamma_{ij}^\mu \left(\frac{d\xi^i}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^i \xi^\alpha v^\beta \right) v^j\end{aligned}\quad (2.18)$$

Ora si applica la regola della derivata di un prodotto per il secondo termine della prima parentesi

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} \left(\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha v^\beta \right) &= \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\mu \frac{dx^\gamma}{d\tau} \xi^\alpha v^\beta + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} v^\beta + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha \frac{dv^\beta}{d\tau} \\ &= \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\mu v^\gamma \xi^\alpha v^\beta + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} v^\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha \Gamma_{ij}^\beta v^i v^j\end{aligned}\quad (2.19)$$

dove per l'ultimo termine è stato usato il fatto che la linea di mondo di ogni particella è una geodetica, quindi

$$\frac{dv^\beta}{d\tau} = \frac{d^2x^\beta}{d\tau^2} = -\Gamma_{ij}^\beta v^i v^j \quad (2.20)$$

Si inserisce di nuovo nell'equazione (2.18) per avere

$$\frac{D^2\xi^\mu}{D\tau^2} = \frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\mu v^\gamma \xi^\alpha v^\beta + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} v^\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{ij}^\beta \xi^\alpha v^i v^j + \Gamma_{ij}^\mu \frac{d\xi^i}{d\tau} v^j + \Gamma_{ij}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^i \xi^\alpha v^\beta v^j \quad (2.21)$$

Ora permutando e rinominando alcuni indici in modo da raccogliere qualche fattore, si può ottenere

$$\frac{D^2\xi^\mu}{D\tau^2} = \frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\mu v^\gamma \xi^\alpha v^\beta + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} v^\beta + \Gamma_{ij}^\mu \frac{d\xi^i}{d\tau} v^j + \left(\Gamma_{\beta j}^\mu \Gamma_{\alpha i}^\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{ij}^\beta \right) v^i v^j \xi^\alpha \quad (2.22)$$

Questa equazione non è di facile lettura, tuttavia è possibile ora utilizzare il risultato ottenuto nell'equazione (2.16), cioè si può esprimere il primo termine come

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} = - \left(\Gamma_{\alpha\beta}^\mu v^\alpha \frac{d\xi^\beta}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu v^\beta \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\mu \xi^\gamma v^\alpha v^\beta \right) \quad (2.23)$$

in modo da ottenere finalmente un'espressione più compatta

$$\frac{D^2\xi^\mu}{D\tau^2} = R_{\alpha\beta\gamma}^\mu v^\alpha v^\beta \xi^\gamma \quad (2.24)$$

dove è stato identificato

$$R_{\alpha\beta\gamma}^\mu = \Gamma_{\alpha\gamma}^i \Gamma_{i\beta}^\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^i \Gamma_{i\gamma}^\mu + \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^\mu - \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\mu \quad (2.25)$$

il quale è proprio il tensore di Riemann (1.58) incontrato nel precedente capitolo. L'equazione (2.24) si può esprimere anche nella solita notazione

$$\nabla_{\vec{v}} \nabla_{\vec{v}} \xi^\mu = R_{\alpha\beta\gamma}^\mu v^\alpha v^\beta \xi^\gamma \quad (2.26)$$

Dalle equazioni dello spostamento geodetico (2.24) o equivalentemente (2.26) si evince immediatamente che se lo spaziotempo è piatto allora $R^\mu_{\alpha\beta\gamma} = 0$, in accordo con (1.59). Infatti questo significa che l'accelerazione geodetica è identicamente nulla, ergo la separazione tra due geodetiche rimane costante. Al contrario se lo spaziotempo è curvo allora la separazione tra le geodetiche cambia mentre ci si muove lungo le linee di mondo delle particelle. Sebbene quelle equazioni siano state ottenute considerando geodetiche di particelle materiali, si possono applicare anche per valutare come la curvatura dello spaziotempo influenzi anche la deviazione geodetica di fotoni. In tal caso nell'equazione (2.24) basta semplicemente sostituire il tempo proprio τ con un altro parametro affine λ adatto.

E' il momento di confrontare i risultati ottenuti con la gravitazione Newtoniana e con la Relatività Generale. L'equazione dello spostamento geodetico nel primo caso è data dall'equazione (2.4), cioè

$$\frac{d^2\xi}{d(ct)^2} = -K\xi \quad (2.27)$$

con $K = \mathcal{A}^{-2}$, dove \mathcal{A} è data dall'equazione (2.7). Invece l'equazione (2.24) ricavata nella presente sezione si può scrivere

$$\frac{D^2\xi^\alpha}{D\tau^2} = -K^\alpha_{\beta\xi} \quad (2.28)$$

con $K^\alpha_{\beta} = R^\alpha_{\gamma\delta\beta} v^\gamma v^\delta$.

Con l'interpretazione geometrica data alla \mathcal{A} e quindi alla K , si evincono delle profonde analogie. Entrambe le formulazioni esprimono il concetto che la separazione tra due geodetiche cambierà (accelererà) se le particelle si muovono in uno spaziotempo con una curvatura non nulla. Viceversa da quelle equazioni si vede che il lato sinistro è 0 se e solo se $\mathbf{K} = 0$, ergo solo in uno spazio piatto le geodetiche rimarranno parallele. Infine ricordando che la K nell'equazione Newtoniana è semplicemente la derivata seconda del potenziale gravitazionale Newtoniano Φ ($\partial^a\partial_b\Phi$) allora è interessante notare che grazie all'eleganza della Relatività Generale, i limiti di campo gravitazionale uniforme ($\partial_a\Phi = 0$) e di campo nullo ($\Phi = 0$) si uniscono nel limite di spaziotempo piatto.

E' importante sottolineare che l'equazione (2.26) non descrive una forza che agisce su una particella che si muove lungo una geodetica. Piuttosto esprime come la curvatura dello spaziotempo influenza due geodetiche, facendole divergere o convergere. A causa di questo, l'equazione (2.26) misura effetti di marea. Ora che è chiaro che l'equazione della deviazione geodetica mostra matematicamente che le forze mareali del campo gravitazionale si possono rappresentare con la curvatura dello spaziotempo, si può passare alla risoluzione delle equazioni di Einstein (1.81) ricavate nel primo capitolo. Si utilizzerà poi l'equazione (2.26) nelle sezioni successive per studiare gli effetti che un'onda gravitazionale incidente ha su un sistema di particelle in caduta libera.

Capitolo 3

Approssimazione di campo debole e equazione d'onda

Risolvere le equazioni di Einstein (1.81) è un problema tutt'altro che banale. Esistono alcune soluzioni analitiche esatte, le quali si applicano a una discreta gamma di fenomeni astrofisici. Tuttavia per descrivere la radiazione gravitazionale è necessario che la metrica sia *non stazionaria* per cui sarà richiesta un'approssimazione. Questa è una necessità perchè le equazioni di Einstein sono altamente non lineari, fortunatamente però si vedrà che nell'**approssimazione di campo debole** la trattazione si semplifica ragionevolmente. In questo limite un'onda gravitazionale si descrive come una perturbazione lineare della metrica Minkowskiana della Relatività Speciale. Si dimostrerà infatti che le soluzioni nello spazio vuoto di tali perturbazioni metriche di uno spaziotempo 'quasi piatto' assumono la forma di un'onda che si propaga alla velocità della luce.

3.1 Campo gravitazionale debole

Se lo spaziotempo è piatto in assenza di campi gravitazionali, allora si può definire un campo debole come uno in cui lo spaziotempo è "quasi piatto". Matematicamente questo significa che le deviazioni dalla metrica di Minkowski della Relatività Speciale sono piccole, quindi esiste un sistema di coordinate in cui la metrica si scrive come

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad (3.1)$$

dove $\eta_{\alpha\beta}$ è la familiare metrica incontrata all'inizio del primo capitolo data da (1.3), e $h_{\alpha\beta}$ è tale che

$$|h_{\alpha\beta}| \ll 1 \quad \forall \alpha, \beta \quad (3.2)$$

Un sistema di coordinate che soddisfa le due equazioni sopra è nominato *quasi Lorentziano*. Si noti che non è affatto detto che per ogni scelta di coordinate è possibile scrivere la metrica come nell'equazione (3.1). In alcuni sistemi di riferimento le componenti della metrica potrebbero essere assai diverse e ben più complicate. "La fisica è la stessa in ogni sistema di riferimento, per ogni osservatore", è il principio su cui è stata costruita l'intera teoria quindi la chiave per risolvere le equazioni tensoriali in Relatività Generale è scegliere sistemi di coordinate in cui le componenti sono le più semplici possibile. Quindi il sistema di coordinate in cui si può esprimere una metrica di uno spaziotempo quasi Lorentziano come nella (3.1) non è di certo unico: assumendo di averne identificato uno allora se ne possono trovare infiniti altri applicando particolari trasformazioni di coordinate. Si analizzano ora due tipi di trasformazioni le quali preservano le proprietà di sistema quasi Lorentziano e quindi le equazioni (3.1) e (3.2).

3.1.1 Trasformazioni di Lorentz

Dalla Relatività Speciale è ben noto che la trasformazione tra due sistemi di riferimento S ed S' con coordinate (t, x, y, z) e (t', x', y', z') è data dal cosiddetto *Boost di Lorentz* di velocità v , per esempio lungo l'asse x . Queste sono le trasformazioni citate nella sezione 1.1, attraverso le quali le coordinate in S' saranno date da

$$(t', x', y', z')^T = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

dove $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$, e come al solito $c = 1$. Riscrivendo l'equazione in una notazione più compatta, si ha

$$x^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}_{\beta} x^{\beta} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} x^{\beta} \quad (3.4)$$

Chiaramente la matrice di Lorentz ha un'inversa che corrisponderà in questo caso ad un 'boost' di velocità v verso l'asse negativo delle x . La sua forma matriciale sarà identica a quella nell'equazione (3.3), ma con i due segni negativi diventati positivi. Quindi la trasformazione "inversa" è

$$x^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta'} x^{\beta'} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}} x^{\beta'} \quad (3.5)$$

Tutto questo è valido nello spaziotempo di Minkowski della relatività Speciale. Si considera ora uno spaziotempo quasi Lorentziano che soddisfa quindi (3.1) e (3.2). Ora si esegue una trasformazione di coordinate identica alla (3.3) per qualche v costante. In questo nuovo sistema di coordinate il tensore metrico avrà la forma

$$g'_{\alpha\beta} = \Lambda^{\mu}_{\alpha'} \Lambda^{\nu}_{\beta'} g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\beta'}} g_{\mu\nu} \quad (3.6)$$

Si noti che tale equazione è esattamente la legge di trasformazione (1.25), dove sono state nominate le trasformazioni con Λ essendo queste, nel caso presente, le trasformazioni di Lorentz. Ora sostituendo dall'equazione di campo debole (3.1), si può scrivere questa come

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\beta'}} \eta_{\mu\nu} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\beta'}} h_{\mu\nu} \quad (3.7)$$

Grazie alla particolare forma delle trasformazioni segue che

$$g'_{\alpha\beta} = \eta'_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\beta'}} h_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} + h'_{\alpha\beta} \quad (3.8)$$

dove l'ultima uguaglianza vale perchè le componenti della metrica di Minkowski sono le stesse in ogni sistema di riferimento Lorentziano.

Quindi considerando *solo* trasformazioni della forma dell'equazione (3.3), le componenti di $h_{\mu\nu}$ si trasformano come se fosse un tensore (0,2) definito nello spaziotempo piatto di sottofondo.

Inoltre, se $v \ll 1$, la piccolezza della perturbazione $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ garantisce quella della perturbazione trasformata, ergo $|h'_{\mu\nu}| \ll 1$.

Questo significa che il sistema originario quasi Lorentziano è rimasto tale nel nuovo sistema di coordinate. In altre parole, uno spaziotempo che appare quasi piatto ad un osservatore, apparirà sempre quasi piatto ad ogni altro osservatore in moto relativo uniforme rispetto al primo.

3.1.2 Trasformazioni di gauge

Si suppone di effettuare una piccola variazione del sistema di coordinate, applicando una trasformazione del tipo

$$x^{\alpha'} = x^\alpha + \xi^\alpha(x^\beta) \quad (3.9)$$

dove si intende che le componenti ξ^α sono funzioni delle coordinate x^β . Derivando rispetto a x^β segue che

$$\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} = \delta_\beta^\alpha + \xi_{,\beta}^\alpha \quad (3.10)$$

Se ora si impone che la variazione ξ^α sia piccola cioè

$$|\xi_{,\beta}^\alpha| \ll 1 \quad \forall \alpha, \beta \quad (3.11)$$

allora usando la regola della catena, derivando rispetto a $x^{\gamma'}$ l'equazione (3.9) segue che

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\gamma'}} = \delta_\gamma^\alpha - \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\gamma'}} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \simeq \delta_\gamma^\alpha - \xi_{,\gamma}^\alpha \quad (3.12)$$

dove sono stati trascurati i termini di ordine superiore al primo, e dove si è usato il fatto che la delta di Kronecker è la stessa in ogni sistema di riferimento.

Ora si utilizza questa trasformazione per il caso in esame. Se il sistema di riferimento iniziale è quasi Lorentziano (cioè la metrica soddisfa l'equazione (3.1)), si vuole studiare cosa succede al tensore metrico nel sistema di riferimento dopo la trasformazione (3.9). La trasformazione del tensore metrico è la usuale

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\beta'}} g_{\mu\nu} \quad (3.13)$$

Ora si utilizza l'equazione (3.12) per sostituire entrambe le matrici di trasformazione, si utilizza l'equazione di campo debole (sistema quasi Lorentziano (3.1)), e si tronca al primo ordine per ottenere

$$\begin{aligned} g'_{\alpha\beta} &= (\delta_\alpha^\mu - \xi_{,\alpha}^\mu) (\delta_\beta^\nu - \xi_{,\beta}^\nu) g_{\mu\nu} \\ &= (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \xi_{,\alpha}^\mu \delta_\beta^\nu - \xi_{,\beta}^\nu \delta_\alpha^\mu) (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \\ &= (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \xi_{,\alpha}^\mu \delta_\beta^\nu - \xi_{,\beta}^\nu \delta_\alpha^\mu) \eta_{\mu\nu} + \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu h_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Si usano poi le proprietà della metrica per abbassare gli indici, cioè

$$\xi_\alpha = \eta_{\alpha\nu} \xi^\nu \quad (3.15)$$

che è permesso perchè le perturbazioni della metrica e la trasformazione sono entrambe piccole quindi non si utilizza l'intera $g_{\mu\nu}$, ma solo $\eta_{\mu\nu}$. Sfruttando anche le proprietà della delta di Kronecker si avrà

$$g'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} - \xi_{\beta,\alpha} - \xi_{\alpha,\beta} + h_{\alpha\beta} \quad (3.16)$$

Quindi l'equazione (3.16) ha la stessa forma della (3.1) se

$$h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} \quad (3.17)$$

Si noti che se i termini $|\xi_{,\beta}^\alpha|$ sono piccoli come richiesto nell'equazione (3.11), allora lo sono anche $|\xi_{\alpha,\beta}|$, e quindi $h'_{\alpha\beta}$. Questo significa che il nuovo sistema di riferimento è ancora quasi Lorentziano.

Riassumendo, una volta identificato un sistema di riferimento quasi Lorentziano è possibile aggiungere una piccola variazione alle coordinate senza alterare la validità dell'assunzione di spaziotempo piatto. Quindi si può scegliere un vettore ξ^α per rendere le equazioni di Einstein il più semplice possibile, processo che si chiama scegliere un *gauge*, così come le trasformazioni date dall'equazione (3.17) si dicono **trasformazioni di gauge**.

3.2 Equazioni di Einstein per un campo debole

Prima di scegliere una particolare trasformazione di gauge, è necessario riscrivere le equazioni di Einstein per un campo gravitazionale debole. Come menzionato queste condurranno a comprendere che le deviazioni dalla metrica di Minkowski, cioè le componenti $h_{\alpha\beta}$ soddisfano un'equazione d'onda.

3.2.1 Teoria linearizzata

Il tensore di Riemann nella sua forma covariante è dato dall'equazione (1.58) come definito nel primo capitolo e riottenuto nel secondo. Si ricordi dalla sezione precedente che si considerano classi di trasformazioni di coordinate che obbediscono alle trasformazioni di Lorentz quindi la perturbazione metrica $h_{\alpha\beta}$ si trasforma come un tensore (0,2) definito in uno spaziotempo piatto di fondo. Questo sarà utile diverse volte in seguito, dove si alzeranno e abbasseranno gli indici sempre con $\eta_{\mu\nu}$ piuttosto che con $g_{\mu\nu}$. Conseguentemente, come visto in precedenza, si arriva a esprimere \mathbf{R} in termini delle derivate seconde della metrica. Si tratta dell'equazione (1.63) che, usando l'approssimazione di campo debole (3.1) e il fatto che le derivate di $\eta_{\mu\nu}$ sono tutte nulle, diventa

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} (h_{\alpha\delta,\beta\gamma} + h_{\beta\gamma,\alpha\delta} - h_{\alpha\gamma,\beta\delta} - h_{\beta\delta,\alpha\gamma}) \quad (3.18)$$

La nota importante da fare ora è che l'equazione (3.18) è invariante per trasformazioni di gauge, cioè le componenti del tensore di Riemann sono indipendenti dalla scelta del gauge. Questo segue dall'equazione (3.17) e dal fatto che le derivate parziali commutano. Per cui la scelta del gauge non cambierà fondamentalmente la curvatura dello spaziotempo, o analogamente il comportamento di due geodetiche adiacenti.

Contraendo il tensore di Riemann si può ottenere il tensore di Ricci linearizzato partendo dalla sua definizione

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= R^k{}_{\mu k \nu} = \Gamma^k{}_{\mu\nu, k} - \Gamma^k{}_{\mu k, \nu} \\ &= g^{ij} R_{i\mu j \nu} = \frac{1}{2} g^{ij} (g_{i\nu, \mu j} + g_{\mu j, i\nu} - g_{ij, \mu\nu} - g_{\mu\nu, ij}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Usando l'approssimazione di campo debole (3.1) e il fatto che le derivate della metrica di Minkowski sono nulle, al primo ordine si avrà

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \eta^{ij} (h_{i\nu, \mu j} + h_{\mu j, i\nu} - h_{ij, \mu\nu} - h_{\mu\nu, ij}) \\ &= \frac{1}{2} \left[(\eta^{ij} h_{i\nu})_{, \mu j} + (\eta^{ij} h_{\mu j})_{, i\nu} - \eta^{ij} (h_{\mu\nu, i})_{, j} - (\eta^{ij} h_{ij})_{, \mu\nu} \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

Il terzo termine è stato scritto così perchè con la metrica, oltre ad alzare e abbassare gli indici usuali, è possibile anche alzare ed abbassare quelli relativi alle derivate, cioè

$$\eta^{ij} h_{\mu\nu, ij} = \eta^{ij} (h_{\mu\nu, i})_{, j} = h_{\mu\nu, i}{}^{, i} \quad (3.21)$$

Quindi effettuando le dovute contrazioni con il tensore metrico, si ottiene infine il tensore di Ricci linearizzato

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(h^j{}_{\nu, \mu j} + h^i{}_{\mu, i\nu} - h_{\mu\nu, i}{}^{, i} - h_{, \mu\nu} \right) \quad (3.22)$$

dove $h = h^\alpha{}_\alpha = \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$ è la traccia della perturbazione $h_{\alpha\beta}$.

Contraendo ancora il tensore di Ricci, si ottiene anche lo scalare di curvatura linearizzato

$$R = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \left(h^j{}_{\nu, \mu j} + h^i{}_{\mu, i\nu} - h_{\mu\nu, i}{}^{, i} - h_{, \mu\nu} \right) \quad (3.23)$$

Sostituendo nell'equazione (1.72), cioè usando la definizione di $G_{\mu\nu}$ ed effettuando alcune manipolazioni algebriche (si veda appendice C), si ottiene un'espressione per il tensore di Einstein nella sua forma linearizzata

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[h_{\mu\alpha, \nu}{}^{, \alpha} + h_{\nu\alpha, \mu}{}^{, \alpha} - h_{\mu\nu, \alpha}{}^{, \alpha} - h_{, \mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \left(h_{\alpha\beta}{}^{, \alpha\beta} - h_{, \beta}{}^{, \beta} \right) \right] \quad (3.24)$$

L'equazione (3.24) è alquanto scomoda e caotica, ma modificando in maniera intelligente la forma della perturbazione metrica, definendo

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \quad (3.25)$$

si ottiene una piccola semplificazione che permette di scrivere l'equazione (3.24) come

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \left[\bar{h}_{\mu\nu, \alpha}{}^{, \alpha} + \eta_{\mu\nu} \bar{h}_{\alpha\beta}{}^{, \alpha\beta} - \bar{h}_{\mu\alpha, \nu}{}^{, \alpha} - \bar{h}_{\nu\alpha, \mu}{}^{, \alpha} \right] \quad (3.26)$$

I procedimenti per ricavare l'equazione (3.24) e per trovare la sua semplificazione (3.26) usando la perturbazione in *forma barrata* (3.25) sono riportati nell'appendice C.

Usando i tensori appena ricavati è possibile scrivere le equazioni di Einstein nella loro forma linearizzata completamente covariante, nell'approssimazione di campo gravitazionale debole, in termini della perturbazione metrica (barrata) $\bar{h}_{\mu\nu}$. Ponendo la costante di Newton $G_N = 1$, le equazioni di Einstein ricavate nel primo capitolo affermano che

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (3.27)$$

Da queste e dalla (3.26) si ottiene dunque

$$-\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta} + \bar{h}_{\mu\alpha,\nu}{}^{\alpha} + \bar{h}_{\nu\alpha,\mu}{}^{\alpha} = 16\pi T_{\mu\nu} \quad (3.28)$$

E' giunto il momento di scegliere un gauge appropriato, quindi una trasformazione di coordinate, in modo da semplificare ulteriormente l'equazione (3.28).

3.2.2 Gauge di Lorentz

Per scegliere la trasformazione di gauge si tenta di riscrivere gli ultimi tre termini del membro sinistro dell'equazione (3.28) usando le proprietà della metrica nel modo seguente

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta} &= (\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\sigma}\bar{h}^{\gamma\sigma}){}^{\alpha\beta} = \left(\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\sigma}\eta^{\alpha i}\eta^{\beta j}\bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,ij}\right) \\ &= \delta_{\gamma}^i\delta_{\sigma}^j\bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,ij} = \bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\gamma\sigma} = (\bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\sigma}){}_{,\gamma} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Il penultimo e l'ultimo sono formalmente identici quindi a meno dello scabio degli indici μ e ν , si può scrivere per entrambi

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\alpha,\nu}{}^{\alpha} &= \eta_{\mu\gamma}\eta_{\alpha\sigma}(\bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\nu}){}^{\alpha} = \eta_{\mu\gamma}\eta_{\alpha\sigma}\eta^{\alpha k}\bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\nu k} \\ &= \eta_{\mu\gamma}\delta_{\sigma}^k\bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\nu k} = \eta_{\mu\gamma}\bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\nu\sigma} = \eta_{\mu\gamma}(\bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\sigma}){}_{,\nu} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Dalle equazioni (3.29) e (3.30) si evince che gli ultimi tre termini del membro sinistro dell'equazione (3.28) sono identicamente nulli se vale la condizione (rinominando gli indici)

$$\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0 \quad (3.31)$$

E' noto dalla sezione 3.1.2 che si possono effettuare trasformazioni di gauge in uno spazio quasi Lorentziano lasciandolo tale, quindi si vuole trovare una trasformazione di gauge tale che nel nuovo sistema di coordinate valga la condizione (3.31).

Questa trasformazione di gauge si chiama **gauge di Lorentz** ed è fondamentale per semplificare le equazioni di Einstein in approssimazione di campo debole. Si suppone di iniziare con una perturbazione metrica arbitraria $h_{\mu\nu}$, definita in uno spaziotempo piatto di sottofondo Minkowskiano. Ora si applica la trasformazione di gauge come definita nell'equazione (3.17). Nel presente caso questo significa trovare le componenti di un vettore ξ^{μ} che soddisfano la condizione

del gauge di Lorentz (GL), quindi la nuova perturbazione metrica $h_{\mu\nu}^{(GL)}$ sarà

$$h_{\mu\nu}^{(GL)} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} \quad (3.32)$$

Usando l'equazione (3.25), è possibile anche definire

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{(GL)} = h_{\mu\nu}^{(GL)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{(GL)} \quad (3.33)$$

Quest'ultima, utilizzando le proprietà della metrica di Minkowski e l'equazione (3.32) si può scrivere come

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu}^{(GL)} &= h_{\mu\nu}^{(GL)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}^{(GL)} \\ &= h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\left[\eta^{\alpha\beta}(h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha})\right] \\ &= h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\xi_{\alpha,\beta} \\ &= \bar{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi^{\beta}_{,\beta} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Inoltre, alzando banalmente gli indici

$$\begin{aligned} \bar{h}^{(GL)\mu\nu} &= \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\left[\bar{h}_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} + \eta_{\alpha\beta}\xi^{\sigma}_{,\sigma}\right] \\ &= \bar{h}^{\mu\nu} - \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\xi_{\alpha,\beta} - \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\xi_{\beta,\alpha} + \eta^{\mu\nu}\xi^{\sigma}_{,\sigma} \end{aligned} \quad (3.35)$$

e derivando l'ultima

$$\bar{h}^{(GL)\mu\nu}_{,\nu} = \bar{h}^{\mu\nu}_{,\nu} - \eta^{\nu\beta}\xi^{\mu}_{,\beta\nu} - \eta^{\mu\alpha}\xi^{\nu}_{,\nu\alpha} + \eta^{\mu\nu}\xi^{\sigma}_{,\sigma\nu} \quad (3.36)$$

si arriva a (rinominando gli indici muti del terzo termine questo si cancella con il quarto)

$$\bar{h}^{(GL)\mu\nu}_{,\nu} = \bar{h}^{\mu\nu}_{,\nu} - \eta^{\nu\beta}\xi^{\mu}_{,\nu\beta} \quad (3.37)$$

Quest'ultima equazione significa che $\bar{h}^{(GL)\mu\nu}_{,\nu} = 0$ a patto che si possano trovare le componenti del vettore ξ^{μ} della trasformazione di gauge tali che

$$\bar{h}^{\mu\nu}_{,\nu} = \eta^{\nu\beta}\xi^{\mu}_{,\nu\beta} = \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right)\xi^{\mu} \quad (3.38)$$

L'ultima equazione segue dalle proprietà della metrica (equazione (3.21)) ed è sempre risolvibile per metriche regolari con i metodi standard per trovare soluzioni particolari di equazioni differenziali del secondo ordine.

Riepilogando, se le componenti ξ^{μ} soddisfano la condizione del gauge di Lorentz, allora $\bar{h}_{\mu\nu}^{(GL)}$ soddisferà l'equazione (3.31). Questo a sua volta significa che esprimendo la metrica in termini di $\bar{h}_{\mu\nu}^{(GL)}$, gli ultimi tre termini nel membro sinistro dell'equazione (3.28) sono nulli.

Perciò, nel gauge di Lorentz, le equazioni di Einstein linearizzate si riducono ad una forma semplificata (senza specificare 'GL' che appesantisce la notazione)

$$-\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{;\alpha} = 16\pi T_{\mu\nu} \quad (3.39)$$

3.3 Equazione d'onda

Il tensore energia-impulso nel vuoto è identicamente nullo. Quindi le soluzioni dell'equazione (3.39) nello spazio vuoto sono soluzioni di

$$\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{;\alpha} = 0 \quad (3.40)$$

oppure, usando la metrica (cioè l'equazione (3.21))

$$\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{;\alpha} = \eta^{\alpha\alpha}\bar{h}_{\mu\nu,\alpha\alpha} = 0 \quad (3.41)$$

L'ultimo passaggio è utile perchè di fatto se si esplicita il significato di quegli indici (derivate $\alpha\alpha$), l'equazione (3.41) assume la forma

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right)\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (3.42)$$

proprio come accaduto per l'equazione (3.38). La (3.42) è spesso scritta come

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (3.43)$$

dove l'operatore \square è l'usuale operatore delle onde detto *D'Alambertiano*. Si ricordi che nella trattazione presente $c = 1$, ma se si volesse esplicitare la componente

$$\eta^{00} = -\frac{1}{c^2} \quad (3.44)$$

allora l'equazione (3.42) si può riscrivere come

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + c^2\nabla^2\right)\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (3.45)$$

la quale fornisce un'informazione in più. Questo è un risultato fondamentale. L'equazione (3.45) ha la forma di un'equazione d'onda che si propaga con velocità c . Quindi le perturbazioni del tensore metrico, cioè le "increspature" dello spaziotempo prodotte disturbando la metrica, si propagano alla velocità della luce come onde nello spazio vuoto.

Queste vengono dette **onde gravitazionali**.

3.3.1 Onde elettromagnetiche e gravitazionali

Si vuole mostrare un confronto qualitativo tra la radiazione gravitazionale, che si studierà nel prossimo capitolo e quella elettromagnetica, in modo da facilitare l'approccio per studiare la prima citata.

Le equazioni di Maxwell si possono scrivere in forma covariante in termini del tensore elettromagnetico $F_{\mu\nu}$ (formato dalle componenti dei campi elettrico E e magnetico B), del 4-potenziale $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ e della 4-corrente $J^\mu = (\rho, \vec{J})$, con ϕ e \vec{A} potenziali elettrico e magnetico (vettore), ρ e \vec{J} densità di carica e di corrente. La derivazione delle equazioni, le definizioni e in generale tutto il contesto elettrodinamico esulano dagli scopi presenti, tuttavia alcuni risultati sono utili per creare analogie. A meno di costanti e normalizzazioni, le suddette equazioni sono

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu \quad (3.46)$$

dove $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ e cioè $F^{0i} = -E^i$ e $F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B^k$. Usando l'espressione di $F^{\mu\nu}$ nella (3.46) si ottiene l'equazione del moto covariante per il 4-potenziale

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \square A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = -J^\nu \quad (3.47)$$

dove $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ è il solito D'Alambertiano.

Il gauge di Lorentz trattato nella sezione precedente è specifico per la perturbazione metrica in esame. Tuttavia la stessa nomenclatura è di fatto usata, non casualmente, quando in elettrodinamica si sceglie una particolare trasformazione di gauge. E' noto infatti che le trasformazioni dei potenziali ϕ e \vec{A} lasciano invariati i campi elettrico e magnetico e di conseguenza le equazioni di Maxwell. Queste sono dunque una simmetria dell'elettromagnetismo, che quindi lasciano la libertà di imporre sul potenziale A^μ delle condizioni (appunto di gauge). Le suddette trasformazioni verranno esplicitate nella pagina seguente (equazione (3.53)).

Il gauge di Lorentz studiato in elettrodinamica si può esprimere in termini dei vecchi potenziali o equivalentemente con il formalismo tensoriale, come

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (3.48)$$

Usando questo per semplificare l'equazione (3.47) si ottiene un'equazione d'onda

$$\square A^\mu = -J^\mu \quad (3.49)$$

Si noti la sbalorditiva analogia che vi è tra l'equazione qui sopra e quella del campo gravitazionale (linearizzata), la (3.39). Intanto sia nel caso elettromagnetico che gravitazionale, le equazioni esibiscono quella forma solo dopo aver 'aggiustato' opportunamente le coordinate. Il gauge di Lorentz va infatti imposto in entrambe le situazioni:

$$A^\mu_{,\mu} = 0 \quad ; \quad \bar{h}^{\mu\nu}_{,\nu} = 0 \quad (3.50)$$

ma nel caso elettromagnetico questa operazione è sufficiente ad ottenere un'equazione valida ovunque mentre in quello gravitazionale l'equazione è frutto di una teoria linearizzata quindi la legittimità è circoscritta all'ambito dell'approssimazione (al primo ordine) di campo debole. Una discrepanza evidente è la natura degli oggetti geometrici coinvolti. Le componenti A^μ identificano un vettore e $\bar{h}^{\mu\nu}$ un tensore, così come le sorgenti dei campi corrispondenti sono il vettore J^μ e il tensore $T^{\mu\nu}$. Ciononostante, nel vuoto cioè in assenza di sorgenti, la (3.49) diventa

$$\square A^\mu = 0 \quad (3.51)$$

la quale è identica, in forma, alla (3.43), che si riporta per comodità

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (3.52)$$

Dalle somiglianze riscontrate sorge spontaneo pensare che risolvere l'equazione (3.51) sia utile per costruire un'analogia per le onde gravitazionali che si effettuerà nel seguente capitolo. In primis si noti che il tensore elettromagnetico non determina A^μ univocamente. Ogni trasformazione di gauge della forma

$$A^\mu \rightarrow \tilde{A}^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi \quad (3.53)$$

lascierà $F^{\mu\nu}$ invariato; questo segue dalla (3.47) e dal fatto che le derivate parziali commutano. Il gauge di Lorentz è determinato da uno scalare χ che soddisfa

$$\partial_\mu \tilde{A}^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu (A^\mu + \partial^\mu \chi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu \partial^\mu \chi = -\partial_\mu A^\mu \quad (3.54)$$

Si noti che sempre senza lasciare il gauge di Lorentz, si può effettuare una trasformazione come (3.53) una seconda volta, con $\square \chi = 0$. Solo allora, dopo la seconda trasformazione, A^μ sarà determinato in maniera univoca, e il nuovo potenziale soddisferà ancora la condizione di gauge. Si può infatti dimostrare che A^μ ha solo due componenti indipendenti (quindi gradi di libertà), cioè le due polarizzazioni della luce.

Si consideri una soluzione dell'equazione (3.51) sotto forma di **onda piana**. I teoremi dell'analisi di Fourier propongono una soluzione di questo tipo, garantendo poi che una qualsiasi altra sia derivabile dalla sovrapposizione di queste onde. Si consideri per esempio un'onda piana che si muove lungo l'asse z

$$A^\mu = \epsilon^\mu e^{ik_\alpha x^\alpha} \quad (3.55)$$

con $k^\mu = (\omega, \vec{k})$ vettore d'onda, composto dal vettore d'onda tridimensionale e la frequenza. Si noti che, geometricamente parlando, come appare nell'equazione (3.55) k_α è una 1-forma (si veda capitolo 1). Il vettore x^α è il solito vettore posizione che localizza gli eventi nello spaziotempo e $\epsilon^\mu = (\epsilon^t, \epsilon^x, \epsilon^y, \epsilon^z)$ è il vettore di polarizzazione. In questo caso la propagazione è verso z quindi $k^\mu = (k, 0, 0, k)$ è un vettore di tipo luce tale che

$$k_\mu k^\mu = 0 \quad (3.56)$$

Il gauge di Lorentz impone che

$$0 = A^\mu{}_{,\mu} = ik(\epsilon^z - \epsilon^t)e^{ik_\mu x^\mu} \quad (3.57)$$

Questo implica

$$k_\mu \epsilon^\mu = 0 \quad (3.58)$$

dunque i due vettori sono ortogonali e quindi $\epsilon^z = \epsilon^t$.

Ora è necessaria una χ particolare che soddisfi quanto detto sopra e ispezionando la forma dell'onda risulta conveniente scegliere

$$\chi = i \frac{\epsilon^z}{k} e^{ik_\mu x^\mu} \quad (3.59)$$

Infatti usando questa e la trasformazione di gauge (3.53), si avrà

$$A^\mu + \partial^\mu \chi = (0, \epsilon^x, \epsilon^y, 0)e^{ik_\mu x^\mu} = \tilde{A}^\mu \quad (3.60)$$

Le componenti ϵ^x e ϵ^y rappresentano le due polarizzazioni lineari dei campi elettromagnetici. Questo è quanto atteso: dall'equazione (3.58) si evince che il vettore polarizzazione giace su un piano normale al verso di propagazione dell'onda, quindi la radiazione elettromagnetica ha due soli stati indipendenti di polarizzazione, perpendicolari tra loro.

Quest'ultima sezione è fondamentale per comprendere al meglio come affrontare lo studio delle onde gravitazionali. Nel prossimo capitolo si sfrutteranno le analogie elettromagnetiche per costruire una soluzione dell'equazione (3.43) in forma di onde piane. Si analizzeranno similarità e differenze con l'elettrodinamica e si troverà un sistema di riferimento in cui le componenti indipendenti della perturbazione metrica si riducono a due, proprio come accade per il potenziale elettromagnetico.

Capitolo 4

Soluzioni sotto forma di onde piane

La perturbazione metrica $\bar{h}_{\mu\nu}$ è simmetrica quindi le sue componenti indipendenti non sono sedici ma bensì dieci. Ora si vuole vedere quante di queste dieci componenti hanno significato fisico, cioè quali sono i gradi di libertà di un'onda gravitazionale.

4.1 Analogia elettrodinamica

Per la similitudine vista con l'equazione (3.51), è lecito supporre che l'equazione (3.43) sia risolta nello stesso modo, ma con opportuni aggiustamenti degli oggetti geometrici coinvolti. La soluzione generale dell'equazione (3.43) è una sovrapposizione lineare di *onde piane*, allora la più semplice soluzione possibile avrà la forma

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \text{Re}[A_{\mu\nu}e^{ik_\alpha x^\alpha}] \quad (4.1)$$

dove 'Re' indica la parte reale di una quantità, l'ampiezza dell'onda $A_{\mu\nu}$ è il tensore di polarizzazione e k_α è il vettore d'onda. Una soluzione come (4.1) può sembrare che abbia una forma particolare e restrittiva ma si ricordi che ogni $\bar{h}_{\mu\nu}$ si può espandere nel senso di Fourier come sovrapposizione di onde piane.

L'equazione d'onda da risolvere (3.43) si può scrivere in forma indiciale e usando le proprietà della metrica

$$\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{,\alpha} = \eta^{\alpha\sigma}\bar{h}_{\mu\nu,\alpha\sigma} = 0 \quad (4.2)$$

Ora, notando che la derivata parziale della perturbazione metrica è

$$\bar{h}_{\mu\nu,\alpha} = ik_\alpha\bar{h}_{\mu\nu} \quad (4.3)$$

si sostituisce nell'equazione (4.2) la soluzione di onda piana (4.1) che ci si aspetta la risolva e si ottiene

$$\eta^{\alpha\sigma}\bar{h}_{\mu\nu,\alpha\sigma} = -\eta^{\alpha\sigma}k_\alpha k_\sigma\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (4.4)$$

che si annulla solo se $\eta^{\alpha\sigma}k_\alpha k_\sigma = 0$, quindi

$$k_\alpha k^\alpha = 0 \quad (4.5)$$

il vettore d'onda è un vettore di tipo luce. Questo risultato è identico a quello trovato nel caso elettrodinamico (equazione (3.56)). Quest'ultima equazione si può scrivere anche

$$-\omega^2 + k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0 \quad (4.6)$$

da cui si estrapola facilmente la frequenza dell'onda che è proprio $\omega = k_0 = k_t$ e la velocità di fase

$$v_f = \sqrt{\frac{\omega^2}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} = 1 = c \quad (4.7)$$

L'equazione (4.1) descrive dunque un'onda piana che si propaga sul cono di luce della metrica piatta di sottofondo, come previsto.

Ci si focalizza ora sul tensore di polarizzazione: la simmetria della perturbazione metrica si riflette su di esso, dunque $A_{\mu\nu}$ è simmetrico ed ha 10 componenti indipendenti. Nulla vieta però che vi siano condizioni supplementari che possano ridurne il numero. Infatti, proprio come per la radiazione elettromagnetica, si può applicare la condizione del gauge di Lorentz (3.31) che implica

$$\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} \Rightarrow (\bar{h}_\mu^\alpha)_{,\alpha} = 0 \quad (4.8)$$

dove basta sostituire l'onda piana (4.1) per ottenere l'equazione

$$A_{\mu\alpha}k^\alpha = 0 \quad (4.9)$$

la quale dice che il tensore di polarizzazione è ortogonale al vettore d'onda. Il tensore $A_{\mu\nu}$ è dunque *trasverso* alla direzione di propagazione, quindi il tensore è proiettato su un piano. L'equazione (4.9) è del tutto analoga alla controparte vista nel caso elettrodinamico (3.58). La condizione del gauge di Lorentz consiste in effetti di quattro equazioni lineari, dunque riduce le componenti indipendenti di $A_{\mu\nu}$ da dieci a sei.

4.2 Gauge trasverso a traccia nulla

La libertà di gauge non è terminata: è possibile eseguire trasformazioni di gauge per specificare ancora di più le componenti di $A_{\mu\nu}$ senza lasciare il gauge di Lorentz. Si sfrutta dunque la restante libertà di muoversi all'interno della classe del gauge di Lorentz, sottoponendo alle coordinate una variazione del tipo $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu$. Come visto nella sezione 3.2, la condizione del gauge di Lorentz richiede che le componenti ξ^μ soddisfino l'equazione (3.38). Questo non determina univocamente tali componenti.

E' possibile infatti aggiungere nuovamente come variazione altre componenti ψ^μ per definire una trasformazione

$$x^{\mu'} = x^\mu + \xi^\mu + \psi^\mu = x^\mu + \zeta^\mu \quad (4.10)$$

Allora se ψ^μ soddisfa

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right)\psi^\mu = 0 \quad (4.11)$$

di conseguenza ζ^μ soddisfa ancora la condizione (3.38) del gauge di Lorentz

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right)\zeta^\mu = \bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} \quad (4.12)$$

Questo è ciò che si intende quando si dice di non uscire dalla classe del gauge di Lorentz pur applicando un'ulteriore trasformazione di gauge. D'altronde anche nell'elettrodinamica (sezione 3.3.1) si esegue una trasformazione di gauge due volte senza abbandonare il gauge di Lorentz, per determinare univocamente quello che in tal caso era il potenziale elettromagnetico.

Se quindi non si lascia il suddetto gauge, l'equazione della trasformazione di gauge (3.17) che era divenuta (3.32) si specializza ulteriormente e rimane valida. Allora la perturbazione metrica modificata

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \zeta_{\mu,\nu} - \zeta_{\nu,\mu} \quad (4.13)$$

esprimerà ancora il tensore di Einstein linearizzato nella sua forma semplificata come nell'equazione (3.39). Si noti che si potevano usare le componenti ψ^μ perchè specificare queste equivale a specificare ζ^μ , poichè la seconda trasformazione avviene dopo aver specificato ξ^μ nella prima.

L'equazione (4.11) fornisce altre quattro relazioni che permettono di aggiustare le coordinate, effettuando una trasformazione di gauge, in modo da semplificare $\bar{h}_{\mu\nu}$ (e quindi $A_{\mu\nu}$) il più possibile. Cioè la libertà di gauge residua, usata scegliendo le componenti ψ^μ (e di conseguenza di ζ^μ) sempre soddisfacendo la condizione del gauge di Lorentz, permette di ridurre le componenti indipendenti di $A_{\mu\nu}$ a due, fissandone altre quattro. La forma dell'equazione d'onda (4.11) permette di scegliere ψ^μ come in (3.55), cioè

$$\psi^\mu = B^\mu e^{ik_\alpha x^\alpha} \quad (4.14)$$

Si riporta la trasformazione di gauge (3.34) per la perturbazione in forma barrata, che si vuole ora esplicitare, dove in questo caso ξ^μ è rimpiazzato da ψ^μ (il sistema di coordinate prima della seconda trasformazione è $(x^\mu + \xi^\mu)$, in modo da non doversi portare dietro ζ^μ)

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \psi_{\mu,\nu} - \psi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu} \psi^\beta{}_{,\beta} \quad (4.15)$$

Si inseriscono qui le componenti date sopra di ψ^μ e l'onda piana (4.1), e sapendo che la derivata di $B_\nu e^{ik_\mu x^\mu}$ è $-iB_\nu k_\mu e^{ik_\mu x^\mu}$, si semplificano i fattori di fase esponenziali da ogni termine in modo da ottenere una legge di trasformazione per il tensore di polarizzazione

$$A'_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - iB_\alpha k_\beta - iB_\beta k_\alpha + i\eta_{\alpha\beta} B^\mu k_\mu \quad (4.16)$$

Ora, se u^α è un vettore arbitrario (ad esempio una 4-velocità), è ben noto che questo si trasforma in accordo con la legge (1.17) la quale nel caso della trasformazione di gauge presente (equazione (3.10)) diventa $u^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} u^\beta = (\delta_\beta^\alpha + \xi_{,\beta}^\alpha) u^\beta$. Allora è possibile contrarre l'equazione (4.16) con $u^{\beta'}$ e scrivere l'uguaglianza

$$A'_{\alpha\beta} u^{\beta'} = (A_{\alpha\beta} - iB_\alpha k_\beta - iB_\beta k_\alpha + i\eta_{\alpha\beta} B^\mu k_\mu) (\delta_\alpha^\beta + \xi_{,\alpha}^\beta) u^\alpha \quad (4.17)$$

che al primo ordine, facendo uso anche della condizione di piccolezza (3.11) e quindi trascurando

i prodotti che coinvolgono $\xi_{,\beta}^\alpha$, diventa

$$A'_{\alpha\beta}u^{\beta'} = A_{\alpha\beta}u^\beta - iB_\alpha k_\beta u^\beta - ik_\alpha B_\beta u^\beta + iu_\alpha B^\mu k_\mu \quad (4.18)$$

dove sono state usate le proprietà della delta di Kronecker e della metrica di Minkowski. Questa uguaglianza sarà utile a breve. Ora, sempre a partire dalla trasformazione (4.16) si può ottenere un'altra equazione ricordando che la metrica di Minkowski è invariante per trasformazioni di gauge. Quindi, moltiplicando ambo i membri per $\eta'^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$, si ha

$$\eta'^{\alpha\beta}A'_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} - i\eta^{\alpha\beta}B_\alpha k_\beta - i\eta^{\alpha\beta}B_\beta k_\alpha + i\eta^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}B^\mu k_\mu \quad (4.19)$$

Così si alza uno degli indici in ogni termine, eccezion fatta per l'ultimo termine dove la metrica scompare del tutto, cioè

$$A'^\alpha{}_\alpha = A^\alpha{}_\alpha - iB^\beta k_\beta - iB^\alpha k_\alpha + iB^\mu k_\mu \quad (4.20)$$

Gli ultimi tre termini sono chiaramente identici poichè gli indici contratti sono muti, e quindi gli ultimi due si elidono, lasciando

$$A'^\alpha{}_\alpha = A^\alpha{}_\alpha - iB^\beta k_\beta \quad (4.21)$$

La libertà nello scegliere ψ^α è ora ridotta allo scegliere B^α . Se questo viene scelto in modo che

$$A'^\alpha{}_\alpha = A^\alpha{}_\alpha \quad (4.22)$$

e contemporaneamente in modo che

$$A_{\alpha\beta}u^\beta = iB_\alpha k_\beta u^\beta + ik_\alpha B_\beta u^\beta - iu_\alpha B^\mu k_\mu \quad (4.23)$$

allora dall'equazione (4.18) si ha

$$A'_{\alpha\beta}u^{\beta'} = 0 \quad (4.24)$$

e dalla (4.21)

$$A'^\alpha{}_\alpha = 0 \quad (4.25)$$

Le ultime due relazioni, assieme alla (4.9) definiscono una sottoclasse del gauge di Lorentz detto **gauge trasverso a traccia nulla**. Le equazioni (4.24) e (4.25) specificano 4 relazioni che derivano semplicemente dalla scelta delle componenti ψ^μ . La prima equazione fornisce tre vincoli in quanto una delle relazioni si può identificare con $k^\alpha(A_{\alpha\beta}u^\beta) = 0$, la seconda fornisce un quarto vincolo e cioè permette di annullare la traccia. Le componenti indipendenti del tensore di polarizzazione passano dunque da sei a due, come anticipato.

Per esplicitare la forma di $A_{\mu\nu}$ che emerge dall'adozione del gauge trasverso a traccia nulla, si consideri una particella di prova che risente del passaggio di un'onda gravitazionale in una

regione di spaziotempo 'quasi piatto'. Nel sistema di riferimento Lorentziano di sottofondo, in cui la particella è a riposo, la 4-velocità u^β ha componenti (1,0,0,0) ed è dunque un vettore di tipo tempo. Questo può anche essere scritto come

$$u^\beta = \delta_0^\beta \quad (4.26)$$

L'equazione (4.24) vale anche in questo sistema di riferimento, perciò

$$A_{\alpha t} = A_{\alpha 0} = 0 \quad \forall \alpha \quad (4.27)$$

Orientando poi il sistema di coordinate in modo che la perturbazione si propaghi lungo l'asse z , quindi con $k^\alpha = (\omega, 0, 0, \omega)$, segue dall'equazione (4.9) che

$$A_{\alpha z} = A_{\alpha 3} = 0 \quad \forall \alpha \quad (4.28)$$

Quindi non vi è nessuna componente della perturbazione metrica nella direzione della propagazione dell'onda. Questo spiega ancora meglio la nomenclatura *trasverso* del gauge, in quanto la perturbazione metrica è interamente *trasversa* alla propagazione dell'onda gravitazionale.

Riepilogando, la perturbazione metrica (4.1) nel gauge trasverso a traccia nulla (TT) si semplifica

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{(TT)} = A_{\mu\nu} \cos[\omega(t - z)] \quad (4.29)$$

Mettendo insieme le equazioni (4.27) e (4.28), combinate con la simmetria di $A_{\mu\nu}$, si ottiene che le uniche componenti non nulle sono A_{xx} , A_{yy} e $A_{xy} = A_{yx}$. Inoltre la condizione che annulla la traccia (4.25) implica che $A_{xx} = -A_{yy}$. Quindi il tensore di polarizzazione sarà

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ 0 & A_{yx} & -A_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

da cui segue banalmente che

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{(TT)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{h}_{xx}^{(TT)} & \bar{h}_{xy}^{(TT)} & 0 \\ 0 & \bar{h}_{yx}^{(TT)} & -\bar{h}_{xx}^{(TT)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

dove $\bar{h}_{xx}^{(TT)}$ e $\bar{h}_{xy}^{(TT)}$ sono legate a A_{xx} e A_{xy} dall'equazione (4.29)

$$\bar{h}_{xx}^{(TT)} = A_{xx} \cos[\omega(t - z)] \quad (4.32)$$

$$\bar{h}_{xy}^{(TT)} = A_{xy} \cos[\omega(t - z)] \quad (4.33)$$

Si noti inoltre che nel gauge trasverso a traccia nulla la perturbazione metrica barrata $\bar{h}_{\mu\nu}$ è trivialmente correlata a quella originaria $h_{\mu\nu}$. Dall'equazione (3.25) si può definire la traccia

$$\bar{h} = \eta^{\alpha\beta} \bar{h}_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} \left(h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h \right) = h - 2h = -h \quad (4.34)$$

Dunque in questo specifico gauge $\bar{h} = h = 0$ e di conseguenza

$$\bar{h}_{\alpha\beta}^{(TT)} = h_{\alpha\beta}^{(TT)} \quad (4.35)$$

4.3 Polarizzazione e natura quadripolare

Proseguendo l'analogia con l'elettrodinamica, si evince che le due componenti indipendenti rimaste corrispondono agli unici due gradi di libertà che possiede un'onda gravitazionale. Questi sono i due stati di polarizzazione i quali vengono indicati con i simboli '+' e 'x'. In generale, un'onda gravitazionale che si propaga lungo l'asse z (scelto senza perdita di generalità) si esprime come combinazione lineare delle due polarizzazioni, cioè

$$\mathbf{h} = a \mathbf{e}_+ + b \mathbf{e}_x \quad (4.36)$$

dove a e b sono scalari e i tensori di polarizzazione '+' e 'x' sono

$$\mathbf{e}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

$$\mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questi tensori suggeriscono una notazione alternativa spesso usata per la perturbazione metrica che semplicemente rinomina le componenti dell'equazione (4.31) come segue: $\bar{h}_{xx}^{(TT)} = h_+$ e $\bar{h}_{xy}^{(TT)} = h_x$. Queste sono dunque i due gradi di libertà validi per una teoria linearizzata della Relatività Generale e corrispondono appunto ai due stati di polarizzazione di un'onda gravitazionale. Quando si incontrano i pedici '+' e 'x' ci si riferisce a questo preciso gauge quindi si alleggerisce la notazione omettendo l'apice (TT) , inoltre la barra non è necessaria grazie all'equazione (4.35).

E' giunto il momento di usare l'approssimazione di campo debole introdotta nel precedente capitolo, cioè si vuole esprimere la metrica come nell'equazione (3.1) dove la perturbazione metrica nel gauge di Lorentz trasverso a traccia nulla è data da (4.31).

Usando la notazione appena introdotta, nell'equazione (3.1), si ottiene

$$\begin{aligned}
 g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{(TT)} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & 1 - h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

che si può scrivere alternativamente usando l'intervallo scalare ds^2 esattamente come per Minkowski nelle equazioni (1.1) e (1.2)

$$ds^2 = -dt^2 + (1 + h_+)dx^2 + (1 - h_+)dy^2 + 2h_\times dx dy + dz^2 \tag{4.39}$$

Se si considera un'onda gravitazionale polarizzata *solo* lungo \mathbf{e}_+ o \mathbf{e}_\times rispettivamente (cioè si considera solo uno stato di polarizzazione individualmente), la metrica si semplifica. Nel primo caso, con $h_\times = 0$, diverrà

$$ds^2 = -dt^2 + (1 + h_+)dx^2 + (1 - h_+)dy^2 + dz^2 \tag{4.40}$$

Esaminando i coefficienti di questa, sembra di intuire che vengono prodotti effetti opposti lungo gli assi x e y , come se le distanze lungo queste venissero contratte ed espanse. Se, al contrario, $h_+ = 0$, allora solo gli elementi fuori dalla diagonale h_\times sono non banali

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + 2h_\times dx dy + dz^2 \tag{4.41}$$

e come si vedrà nel prossimo capitolo queste ultime due equazioni sono legate da una semplice rotazione di 45° . Anche l'equazione (4.38) sarà utile, quando si userà il tensore metrico per definire il concetto di distanza propria, la quale sarà proprio la quantità che si contrae o espande al passaggio di una perturbazione gravitazionale.

Una sostanziale differenza con l'elettromagnetismo è però che la radiazione gravitazionale non è di dipolo ma bensì **quadripolare**. Questa è una conseguenza diretta del fatto che le onde gravitazionali sono prodotte da variazioni nella curvatura dello spaziotempo, la cui firma è l'accelerazione della deviazione tra due geodetiche. Si rammenta che la deviazione geodetica non distingue tra un campo gravitazionale nullo e uno uniforme: solo per un campo non uniforme, o *mareale*, la deviazione tra due geodetiche accelera. Tali variazioni di marea sono quadripolari per natura, infatti costruendo similitudini con le formule che descrivono la radiazione elettromagnetica si può intuire che all'ordine più basso la radiazione gravitazionale è almeno quadripolare.

Secondo l'elettrodinamica classica, la forma dominante di radiazione da cariche in moto è la radiazione di dipolo elettrico. Denotando con q la carica elettrica, e con $d = qx$ il momento di dipolo elettrico, l'energia emessa per unità di tempo dal dipolo oscillante, talvolta detta luminosità, è

$$L_e = \frac{2}{3}q^2\ddot{\mathbf{x}}^2 = \frac{2}{3}\ddot{\mathbf{d}}^2 \quad (4.42)$$

Altre importanti e forti radiazioni elettromagnetiche sono la radiazione di dipolo magnetico e di quadripolo magnetico. Per distribuzioni di carica generiche, la luminosità della radiazione di dipolo magnetico è proporzionale alla derivata seconda del momento di dipolo magnetico (non è necessaria la precisione formale dell'elettromagnetismo per gli scopi presenti)

$$L_m \propto \ddot{\boldsymbol{\mu}} \quad (4.43)$$

dove $\boldsymbol{\mu}$ è la somma (o l'integrale) sulla distribuzione di carica data da

$$\boldsymbol{\mu} = \sum_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{j} = \sum_i \mathbf{x}_i \times q_i \dot{\mathbf{x}}_i \quad (4.44)$$

L'analogo gravitazionale del momento di dipolo elettrico è il **momento di dipolo di massa**,

$$\mathbf{d} = \sum_i m_i \mathbf{x}_i \quad (4.45)$$

dove m_i è la massa e \mathbf{x}_i la posizione dell' i -esima particella. Ispirandosi all'equazione (4.43), la 'luminosità' della radiazione del dipolo di massa dovrebbe essere proporzionale alla derivata temporale seconda di \mathbf{d} . Tuttavia, la derivata prima di questo è

$$\dot{\mathbf{d}} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{p} \quad (4.46)$$

che è esattamente la definizione di **impulso**, o momento lineare. Essendo l'impulso totale una quantità che si conserva, allora la luminosità gravitazionale del dipolo di massa è zero. Quindi non può esserci nessuna radiazione gravitazionale causata da dipoli di massa, da nessuna sorgente.

Allo stesso modo, l'analogo gravitazionale del momento di dipolo magnetico è

$$\boldsymbol{\mu} = \sum_i \mathbf{x}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{L} \quad (4.47)$$

che è proprio il **momento angolare** del sistema. Poichè anche il momento angolare si conserva, di nuovo la luminosità dell'analogo gravitazionale della radiazione di dipolo magnetico è nulla.

Non può dunque esistere nessun tipo di radiazione di dipolo da una sorgente gravitazionale.

Questo è equivalente all'impossibilità di avere radiazione elettromagnetica da un monopolo elettrico oscillante. Di conseguenza, la più semplice forma della radiazione gravitazionale che

abbia luminosità non nulla è quadripolare. Il formalismo matematico della radiazione quadripolare esula dagli scopi presenti, si voleva solo far notare la differenza sostanziale fisica che si cela dietro i diversi oggetti geometrici che compaiono nelle leggi elettrodinamiche e gravitazionali.

Nel capitolo 5 si utilizzeranno le proprietà della radiazione gravitazionale viste fin'ora per studiare come il passaggio di una perturbazione influenzi una o più particelle libere.

Capitolo 5

Effetti delle onde gravitazionali

Le conoscenze sviluppate fin'ora sono sufficienti per iniziare a riflettere riguardo al come può venir rilevata un'onda gravitazionale. Si vogliono infatti studiare gli effetti che questa perturbazione metrica produce su particelle di prova. Il gauge trasverso a traccia nulla non è un artificio matematico che semplifica solo i calcoli, ma come visto ha un significato fisico importante che verrà verificato nello studiare l'effetto di un'onda su un anello di particelle.

5.1 Influenza di un'onda su una singola particella

Si consideri una particella a riposo in uno spaziotempo piatto di sottofondo (Lorentziano). In questo sistema di riferimento la sua 4-velocità è $u^\beta = \delta_0^\beta$ e si sceglie il gauge di Lorentz trasverso a traccia nulla. La particella libera soddisferà l'equazione geodetica (1.45)

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{du^\beta}{d\tau} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta u^\mu u^\nu = 0 \quad (5.1)$$

dove al solito τ è il tempo proprio. La particella è inizialmente a riposo e al passaggio dell'onda subirà un'accelerazione iniziale

$$\left. \frac{du^\beta}{d\tau} \right|_{t=0} = -\Gamma_{00}^\beta = -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} (h_{\alpha 0,0} + h_{0\alpha,0} - h_{00,\alpha}) \quad (5.2)$$

dove nell'ultima uguaglianza è stata usata l'equazione (1.41) e l'approssimazione di campo debole (3.1) che d'ora in avanti verrà considerata sempre assunta. Si rammenti però che ci si trova nel gauge (TT) quindi dall'equazione (4.27) segue che

$$A_{\alpha 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{h}_{\alpha 0} = 0 \quad (5.3)$$

Inoltre si ricordi che vale l'equazione (4.35) ($h = \bar{h} = 0$), quindi

$$h_{\alpha 0} = 0 \quad \forall \alpha \quad (5.4)$$

che di conseguenza implica che

$$\left. \frac{du^\beta}{d\tau} \right|_{t=0} = 0 \quad (5.5)$$

Quindi una particella libera inizialmente a riposo rimane a riposo indefinitivamente. Prima del passaggio dell'onda nessuna componente della perturbazione metrica è diversa da zero quindi l'equazione (5.5) segue dalla (5.2) per ovvi motivi. Invece una volta che la perturbazione metrica

è presente (al passaggio dell'onda), l'accelerazione della particella sarà comunque nulla perchè le coordinate si 'sistemano' con il gauge di Lorentz trasverso a traccia nulla.

Il risultato ottenuto non è particolarmente sorprendente in quanto essere (e rimanere) a riposo significa che le coordinate non cambiano e quindi che esiste un sistema di coordinate che rimane 'incollato' alla particella sottoposta alla vibrazione gravitazionale. In altre parole mentre l'onda passa, il sistema di coordinate si aggiusta e si adatta alle increspature dello spaziotempo così che la particella risulta attaccata alle sue coordinate iniziali. Le coordinate dipendono però dal sistema di riferimento, e non portano un'informazione geometrica invariante riguardo lo spaziotempo. Fin qui parrebbe che non vi siano conseguenze al passaggio di onde gravitazionali, ma non è così.

5.2 Deviazione geodetica indotta da un'onda

E' più corretto dire che lo studio del moto di una singola particella non è sufficiente per rilevare un'onda gravitazionale. Gli effetti di questa fanno oscillare lo spaziotempo con la stessa frequenza della perturbazione metrica $h_{\mu\nu}$. Da ciò segue che a subire variazioni saranno le grandezze direttamente dipendenti da $g_{\mu\nu}$.

5.2.1 Distanza propria

Nella sezione 1.3.1 è stata definita la nozione di curva e nella 1.3.3 è stato definito il tensore metrico, il quale è necessario per introdurre distanze ed angoli su una varietà (Riemanniana). L'interesse è ora rivolto verso la definizione di lunghezze (e quindi distanze) di un percorso su una varietà considerando la curva integrale¹ di un campo vettoriale $\vec{v} = \frac{d}{d\lambda}$.

Si definisce inizialmente la lunghezza (al quadrato) di uno spostamento infinitesimo lungo il campo \vec{v}

$$dl^2 = dx^i dx^j = v^i d\lambda v^j d\lambda = g_{ij} v^i v^j d\lambda^2 \quad (5.6)$$

dove è stata usata la definizione di vettore. Questa è chiaramente una quantità scalare poichè v è un vettore, $d\lambda$ uno scalare e g un tensore (0,2).

Integrando su una curva integrale γ del campo \vec{v} si ottiene la lunghezza del percorso integrale tra due punti di parametri λ_1 e λ_2

$$l(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{g_{ij}(\lambda) v^i(\lambda) v^j(\lambda)} d\lambda \quad (5.7)$$

Questa espressione si può rendere più esplicita introducendo una carta (si veda sezione 1.3.1) e quindi le coordinate $\phi = x^i$ che coprono la regione dove si integra.

¹ $\gamma = \gamma(\lambda)$ è una curva integrale di un campo vettoriale \vec{Y} se il suo vettore tangente $(d/d\lambda)$ è dato da un elemento di \vec{Y} in tutti i punti $P \in \gamma$, cioè $\vec{Y} = \frac{d}{d\lambda}$.

Allora si ottiene

$$l(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}} d\lambda \quad (5.8)$$

dove di nuovo si è usata la definizione $v^i = dx^i/d\lambda$, e sono stati omessi gli argomenti.

Questa è la definizione formale geometrica di una lunghezza definita su una varietà metrica. Nel caso presente si è interessati a quella che si chiama **distanza propria** che altro non è che un caso particolare dei passaggi svolti qui sopra. Nella sezione 1.1 è infatti già stato usato il termine *distanza propria*, quando si studiava il segno dell'intervallo di separazione spaziotemporale ds^2 . Se $ds^2 > 0$ la separazione è di tipo spazio. Allora poichè in generale si ha $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ (equazione (1.2)), la distanza propria è semplicemente definita come

$$\Delta l = \int \sqrt{ds^2} = \int \sqrt{|g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu|} \quad (5.9)$$

in accordo con quanto visto sopra sulla lunghezza di una curva. Ora bisogna applicare quanto ricavato al caso in esame. Quindi senza perdita di generalità si considerano le due particelle entrambe sull'asse x : per semplicità una è nell'origine e l'altra alla coordinata $x = \epsilon$. Di conseguenza l'equazione per la distanza propria si semplifica

$$\Delta l = \int_{x=0}^{x=\epsilon} |g_{11}|^{1/2} dx \simeq \sqrt{|g_{11}(x=0)|} \epsilon \quad (5.10)$$

dove nell'ultimo passaggio è stata usata la condizione di campo debole che implica che la metrica è circa costante lungo il percorso in x da 0 a ϵ , il quale va menzionato deve essere una costante piccola. Inoltre si ricordi che in approssimazione di campo debole la metrica $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ è data dall'equazione (4.38) dove si è applicato il gauge di Lorentz trasverso a traccia nulla, quindi

$$g_{11}(x=0) = \eta_{11} + h_{11}^{(TT)}(x=0) = \eta_{11} + h_+(x=0) \quad (5.11)$$

Sostituendo nell'equazione (5.10) si ha

$$\Delta l \simeq \sqrt{|1 + h_+(x=0)|} \epsilon \quad (5.12)$$

da cui, facendo uno sviluppo in serie, si ottiene

$$\Delta l \simeq \left(1 + \frac{1}{2} h_+(x=0)\right) \epsilon \quad (5.13)$$

Si noti che i passaggi svolti nell'equazione (5.11) per ottenere (5.12) sono di fatto già nascosti nell'equazione matriciale (4.38) vista nel capitolo precedente, infatti esprimendo questa nella forma (4.39), il coefficiente di dx^2 è proprio $(1 + h_+)$. Dal momento che $h_+(x=0)$ in generale **non** è costante, allora la distanza propria tra le particelle cambierà al passaggio dell'onda gravitazionale. Si noti che essendo il tutto indipendente dal tempo, gli effetti delle onde saranno tanto più marcati quanto più grande risulta ϵ . Questo può far capire anche perchè gli odierni rilevatori sono costruiti su scale di grandezza enormi. Si vuole evidenziare che la distanza propria non è

un semplice invariante matematico introdotto per comodità, bensì una vera e propria quantità misurabile. Lo spaziotempo tra due eventi di fatto si allunga e si contrae. Sostanzialmente è proprio questa variazione nella distanza propria che i rilevatori di onde gravitazionali cercano di misurare.

5.2.2 Forze di marea

Avendo compreso cosa è necessario misurare per rilevare un'onda gravitazionale, è immediato pensare che si può studiare più formalmente il comportamento di due particelle di prova usando la deviazione geodetica, alla quale non a caso è stato dedicato l'intero capitolo 2.

Si richiama l'equazione dello spostamento geodetico (2.24) o equivalentemente (2.26) dove, come al solito, si denota ξ^α la separazione tra le due particelle considerate. Questa volta però ci si pone in un sistema di riferimento localmente inerziale nel punto su una delle due geodetiche dove si origina ξ^α . In questo sistema di riferimento normale, le distanze tra le coordinate sono le distanze proprie se si trascurano termini quadratici (in approssimazione di campo debole, quindi lineare). Dunque se le geodetiche non sono troppo lontane, ξ^α corrisponde davvero alla distanza propria misurabile. Come visto all'inizio del capitolo infatti, nel gauge (TT) il sistema di riferimento si muove insieme alla particella quindi il tempo proprio è approssimabile alla coordinata temporale, di conseguenza per un campo gravitazionale debole si ha che la derivata covariante si riduce alla parziale

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial t^2} = R^\alpha_{\mu\nu\beta} u^\mu u^\nu \xi^\beta \quad (5.14)$$

dove u^μ sono le 4-velocità delle due particelle.

Essendo queste inizialmente a riposo (in un sistema di riferimento inerziale), allora non solo τ coincide con t , ma si ha che le 4-velocità sono semplicemente come nell'equazione (4.26)

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0)^T \quad (5.15)$$

e assumendo come prima che la separazione, di valore ϵ , sia solo lungo una direzione, per esempio l'asse x , si ha anche che

$$\xi^\beta = (0, \epsilon, 0, 0)^T \quad (5.16)$$

Con queste considerazioni, l'equazione (5.14) si semplifica notevolmente

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial t^2} = \epsilon R^\alpha_{001} = -\epsilon R^\alpha_{101} \quad (5.17)$$

dove è stata usata la proprietà (1.67) antisimmetrica del tensore di Riemann. Ora si richiami l'equazione (3.18) che esprime il tensore di Riemann linearizzato in termini delle componenti della perturbazione metrica. Come detto proprio nella sezione 3.2.1, questo è indipendente dalla scelta del gauge (talvolta si dice *gauge-invariante*). Si possono dunque scrivere le componenti di tale tensore in termini delle componenti non nulle di $h_{\mu\nu}$, ma va ricordato che si sta lavorando

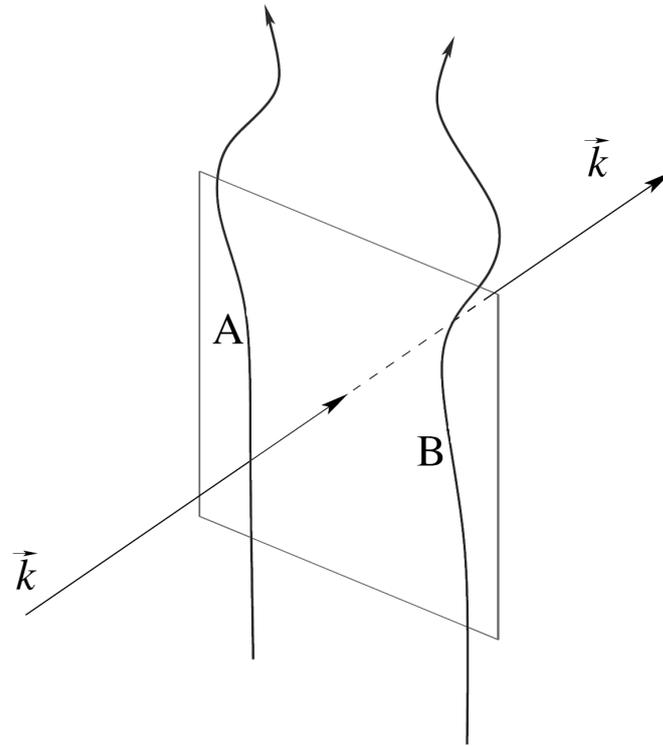


Figura 5.1: Diagramma della variazione del vettore separazione tra due particelle A e B che si muovono lungo geodetiche prodotte dall'interazione con un'onda gravitazionale che si propaga in direzione \vec{k} .

nel gauge di Lorentz trasverso a traccia nulla quindi si deve far riferimento all'equazione (4.31)

$$R^1_{010} = \eta^{11} R_{1010} = -\frac{1}{2} h_{+,00} \quad ; \quad R^2_{010} = \eta^{22} R_{2010} = -\frac{1}{2} h_{\times,00} \quad (5.18)$$

Queste, per un'onda che si propaga lungo l'asse z , sono le uniche componenti diverse da zero. L'invarianza di gauge fa sì che si è di nuovo in possesso della libertà di gauge che è ristorata per l'intera equazione (5.17). Questo è molto vantaggioso poichè le componenti del tensore di Riemann sono particolarmente semplici nel gauge (TT) , come appena visto.

Quindi usando le equazioni (5.18) nella (5.17), se le due particelle sono inizialmente separate di ϵ nella direzione x , la deviazione geodetica soddisferà le equazioni (esplicitando le derivate temporali)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^1 = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_+ \quad (5.19)$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^2 = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{\times} \quad (5.20)$$

Queste sono chiaramente consistenti con l'equazione (5.13) per quanto riguarda le proporzionalità e già iniziano a mostrare la trasversalità dell'onda gravitazionale (che nella trattazione presente si assume sempre che si propaga in direzione z).

In maniera del tutto analoga, è immediato comprendere che se le particelle sono inizialmente separate di ϵ nella direzione y , le equazioni soddisfatte dal vettore ξ^α sono

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^1 = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_\times \quad (5.21)$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^2 = -\frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_+ \quad (5.22)$$

Per essere rigorosi, si fa notare che in realtà ξ è un tensore (1,0) e h un tensore (0,2) quindi non sarebbe propriamente corretto esprimere le equazioni in quel modo. Tuttavia essendo in uno spaziotempo Lorentziano di sottofondo, le componenti x e y (cioè 1 e 2) di un vettore sono identiche a quelle di una 1-forma.

Se si volessero generalizzare le ultime quattro equazioni, le quali sono infatti specifiche per il caso di un'onda diretta verso l'asse z , è ragionevole scrivere un'equazione nella forma

$$\xi^i{}_{,00} = -R^i{}_{0j0} \xi^j = \frac{1}{2} h_{ij,00} \xi^j \quad (5.23)$$

dove $R^i{}_{0j0}$ generalizza le equazioni (5.18). Si nota qui che più correttamente l'accelerazione di ξ è proporzionale a ξ stesso. Nelle equazioni precedenti si è abusato del fatto che la separazione era solo lungo una coordinata (rispettivamente x e y) e quindi la si denotava semplicemente ϵ . Rigore a parte, rimangono comunque equazioni valide e comode (nella seguente sezione si utilizzeranno queste).

Un'alternativa equivalente all'equazione (5.23), esplicitando le derivazioni, è

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^i = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{ij} \xi^j \quad (5.24)$$

Una considerazione notevole sorge ora spontanea: le ultime equazioni hanno la familiare forma di una *Forza Newtoniana*, così che è permesso pensare in termini di meccanica classica l'effetto della Relatività Generale in un sistema di riferimento localmente inerziale. Questa interpretazione dà un significato preciso al concetto di **forza mareale**, termine usato già diverse volte nella trattazione.

L'equazione (5.24) può essere integrata per ottenere una soluzione come

$$\xi^i = \xi_0^i + \frac{1}{2} \eta^{ik} h_{kj} \xi^j = \xi_0^i + \frac{1}{2} h_{ij} \xi^j \quad (5.25)$$

dove i termini ξ_0^i sono costanti di integrazione (il pedice '0' non è un indice tensoriale). Questa evidenzia ancora di più la natura trasversa dell'onda gravitazionale. Se si fanno scorrere gli indici infatti, e si ricorda che nel gauge (TT) le uniche componenti non nulle di h_{ij} sono $h_+ = h_{11} = -h_{22}$ e $h_\times = h_{12} = h_{21}$, si trova che

$$\xi^1 = \xi_0^1 + \frac{1}{2} \eta^{11} h_{1j} \xi^j = \xi_0^1 + \frac{1}{2} (h_{11} \xi^1 + h_{12} \xi^2) = \xi_0^1 + \frac{1}{2} (h_+ \xi^1 + h_\times \xi^2) \quad (5.26)$$

$$\xi^2 = \xi_0^2 + \frac{1}{2}\eta^{22}h_{2j}\xi^j = \xi_0^2 + \frac{1}{2}(h_{21}\xi^1 + h_{22}\xi^2) = \xi_0^2 + \frac{1}{2}(h_{\times}\xi^1 - h_{+}\xi^2) \quad (5.27)$$

$$\xi^3 = \xi_0^3 + \frac{1}{2}\eta^{33}h_{3j}\xi^j = \xi_0^3 \quad (5.28)$$

Quindi le particelle saranno accelerate solo nel piano ortogonale alla direzione di propagazione (in questo caso l'asse 3). Per far emergere in definitiva gli stati di polarizzazione studiati nel capitolo precedente, è necessario generalizzare le equazioni viste per due particelle su un asse, facendo variare circolarmente la posizione di una rispetto all'altra come se si stesse considerando una circonferenza di particelle di prova.

5.2.3 Anello di particelle

Per comprendere i due stati di polarizzazione non è necessario affrontare il problema a partire dalle equazioni formali e generiche (5.24) e (5.25), in quanto è più semplice e comunque sufficiente generalizzare le equazioni (5.19) - (5.22). Si vedrà ovviamente che le soluzioni saranno in accordo con quanto trovato nelle utilissime equazioni della sezione precedente.

Generalizzando appunto la situazione di cui sopra, si posiziona una particella nell'origine e l'altra alle coordinate $x = \epsilon \cos \theta$, $y = \epsilon \sin \theta$ e $z = 0$ cioè nel piano $x - y$. L'onda si propaga sempre nella direzione z . Nel caso precedente le particelle erano separate di ϵ ma si trovavano sullo stesso asse, ora invece date le nuove coordinate, le equazioni differenziali soddisfatte dai vettori ξ^1 e ξ^2 saranno

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi^1 = \frac{1}{2}\epsilon \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2}h_{+} + \frac{1}{2}\epsilon \sin \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2}h_{\times} \quad (5.29)$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi^2 = \frac{1}{2}\epsilon \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2}h_{\times} - \frac{1}{2}\epsilon \sin \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2}h_{+} \quad (5.30)$$

dove si riportano per comodità le relazioni (4.32) e (4.33) per h_{+} e h_{\times}

$$h_{+} = A_{xx} \cos[\omega(t - z)] \quad (5.31)$$

$$h_{\times} = A_{xy} \cos[\omega(t - z)] \quad (5.32)$$

Ora ispirandosi alle soluzioni (5.26) e (5.27) ottenute nella sezione precedente, segue che le soluzioni del caso presente possono scriversi come

$$\xi^1 = \epsilon \cos \theta + \frac{1}{2}(\epsilon \cos \theta h_{+} + \epsilon \sin \theta h_{\times}) \quad (5.33)$$

$$\xi^2 = \epsilon \sin \theta + \frac{1}{2}(\epsilon \cos \theta h_{\times} - \epsilon \sin \theta h_{+}) \quad (5.34)$$

infatti si noti che basta identificare i termini ξ^1 e ξ^2 con le componenti del vettore di separazione che in questo caso sono $x = \epsilon \cos \theta$ e $y = \epsilon \sin \theta$. Sostituendo ora le equazioni (5.31) e (5.32) si possono scrivere le soluzioni

$$\xi^1 = \epsilon \cos \theta + \frac{1}{2}\epsilon \cos \theta A_{xx} \cos(\omega t) + \frac{1}{2}\epsilon \sin \theta A_{xy} \cos(\omega t) \quad (5.35)$$

$$\xi^2 = \epsilon \sin \theta + \frac{1}{2} \epsilon \cos \theta A_{xy} \cos(\omega t) - \frac{1}{2} \epsilon \sin \theta A_{xx} \cos(\omega t) \quad (5.36)$$

Si suppone ora di far variare θ nell'intervallo $[0, 2\pi]$ in modo che piuttosto che considerare due singole particelle è come se si considerasse un anello circolare di particelle nel piano $x - y$, inizialmente equidistanti dall'origine.

Se i due tensori \mathbf{e}_+ ed \mathbf{e}_\times (si veda (4.37)) fungono in qualche modo da base dello spazio delle polarizzazioni, allora le due componenti h_+ e h_\times saranno appunto i due gradi indipendenti di libertà dell'onda gravitazionale. Si considerano ora questi separatamente.

Nel caso in cui $A_{xy} = 0$ che implica $h_\times = 0$, le soluzioni per ξ^1 e ξ^2 si riducono a

$$\xi^1 = \epsilon \cos \theta \left[1 + \frac{1}{2} A_{xx} \cos(\omega t) \right] \quad (5.37)$$

e

$$\xi^2 = \epsilon \sin \theta \left[1 - \frac{1}{2} A_{xx} \cos(\omega t) \right] \quad (5.38)$$

Se invece solo la componente $A_{xy} \neq 0$, ma $A_{xx} = 0$ che implica $h_+ = 0$, le soluzioni saranno

$$\xi^1 = \epsilon \cos \theta + \frac{1}{2} \epsilon \sin \theta A_{xy} \cos(\omega t) \quad (5.39)$$

e

$$\xi^2 = \epsilon \sin \theta + \frac{1}{2} \epsilon \cos \theta A_{xy} \cos(\omega t) \quad (5.40)$$

Nella figura 5.2 sono riportati gli effetti del passaggio dell'onda gravitazionale lungo l'asse z sull'anello, nei due casi. Ognuna delle quattro rappresentazioni corrisponde ad una fase diversa nell'oscillazione dell'onda (cioè diversi valori di ωt).

Nel primo caso, quindi nella **polarizzazione** $+$, il secondo e quarto anello corrispondono a multipli dispari di $\pi/2$ e nelle equazioni (5.37) e (5.38) i $\cos(\omega t)$ sono zero (e gli anelli rimangono circolari). Invece al valore della fase π (prima illustrazione), sempre osservando le equazioni citate, si nota che l'effetto sulle particelle sarà di muoverle verso l'interno lungo l'asse x e verso l'esterno lungo l'asse y . Quindi l'onda gravitazionale riduce la distanza propria tra le particelle lungo l'asse x e la incrementa lungo l'asse y . Proseguendo, nella terza illustrazione (la fase qui vale 2π) si nota che l'onda produce un effetto opposto, contraendo la distanza propria lungo y e incrementandola lungo x , come indicano le frecce (che per non appesantire il grafico sono riportate a titolo d'esempio solo in questo anello).

Nel secondo caso, cioè nella **polarizzazione** \times , l'anello delle particelle di prova è mostrato agli stessi valori di fase. Qui però l'anello iniziale è sottoposto a contrazioni diverse, le quali per la stessa fase del caso precedente coinvolgono le componenti x e y contemporaneamente. Un discorso analogo vale per il terzo anello. È facile intuire perchè sono stati attribuiti i simboli "più" ($+$) e "croce" (\times) per i due stati di polarizzazione.

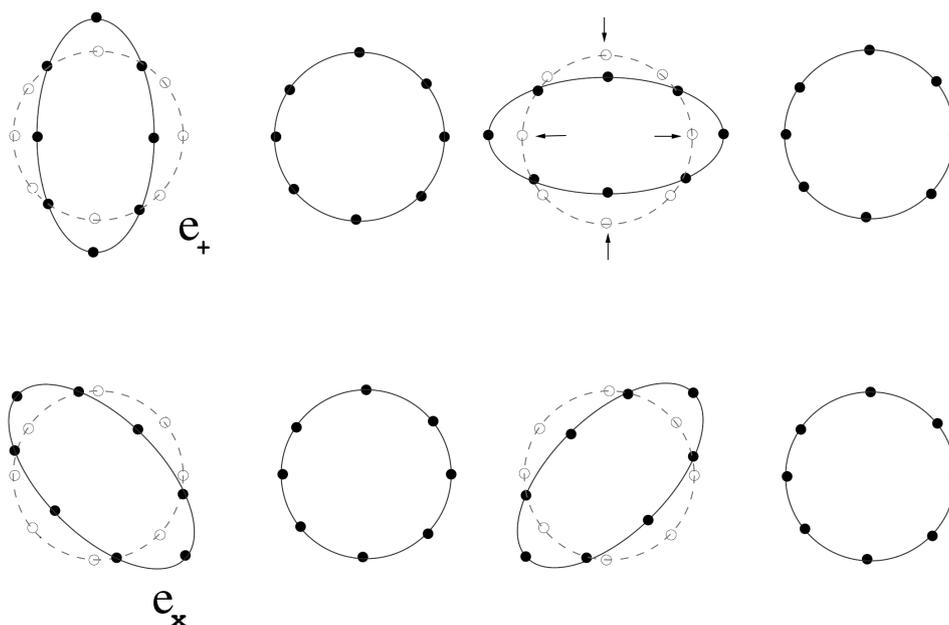


Figura 5.2: Schema delle deformazioni prodotte su un anello di particelle da un'onda polarizzata nel modo $+$ e nel modo \times , rispettivamente nella prima e seconda riga (piano x - y).

Dal punto di vista grafico è immediato notare che la seconda polarizzazione si può ottenere dalla prima con una semplice rotazione di $\pi/4$ e viceversa, come accennato nella sezione 4.3. Quanto appena detto è in contrasto con ciò che si ha nel caso elettrodinamico. In quella situazione i due stati di polarizzazione dell'onda elettromagnetica sono separati angularmente di $\pi/2$ l'uno dall'altro. Si intravedono anche qui le conseguenze causate dai diversi oggetti geometrici coinvolti nelle equazioni che descrivono i due campi. Si tratta di un vettore potenziale A^μ in un caso e di un tensore di secondo grado simmetrico $h_{\mu\nu}$ nell'altro.

Per capire anche analiticamente la relazione che c'è tra le soluzioni (5.37),(5.38) con $h_\times = 0$ e quelle con $h_+ = 0$, cioè (5.39) e (5.40), è necessario definire nuove coordinate x' e y' . Questi assi si definiscono ruotando i vecchi assi x e y di un angolo di $-\pi/4$, così che

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \quad (5.41)$$

e

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \quad (5.42)$$

Queste seguono banalmente dal fatto che una rotazione di un angolo θ (in questo caso in due dimensioni) è in generale una trasformazione del tipo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

Con $\theta = -\pi/4$ si ha $\cos \theta = 1/\sqrt{2}$ e $\sin \theta = -1/\sqrt{2}$. Di conseguenza la rotazione (5.43) diventa

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

da cui la definizione dei nuovi assi. Ora si trova la trasformazione inversa e si sostituiscono x e y in funzione di x' e y' nelle equazioni (5.37) e (5.38), ricordando che $x = \epsilon \cos \theta$ e $y = \epsilon \sin \theta$, in modo da trovare i vettori ξ in funzione delle nuove variabili

$$\xi^{1'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') + \frac{1}{2\sqrt{2}}(x' + y')A_{xx} \cos(\omega t) \quad (5.45)$$

Tornando alla variabile θ e svolgendo i vari prodotti si evince immediatamente che usando qualche formula di trigonometria (addizione del seno e del coseno), si può scrivere $\xi^{1'}$ come

$$\xi^{1'} = \epsilon \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\epsilon \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) A_{xx} \cos(\omega t) \quad (5.46)$$

In maniera del tutto analoga si arriva all'equazione per $\xi^{2'}$

$$\xi^{2'} = \epsilon \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\epsilon \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) A_{xy} \cos(\omega t) \quad (5.47)$$

Osservando le ultime due equazioni risulta chiaro il motivo degli ultimi passaggi. Confrontandole infatti con le equazioni (5.39) e (5.40) si nota che le soluzioni per $h_+ = 0$ sono identiche alle soluzioni per $h_\times = 0$ a meno di una rotazione di $\pi/4$.

A tal proposito si riprenda la metrica (4.38), scritta sotto forma di intervallo ds^2 . Se si considera un solo stato di polarizzazione, ad esempio $h_\times \neq 0$, $h_+ = 0$, si ottiene l'espressione semplificata (4.41) riportata di seguito

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + 2h_\times dx dy + dz^2 \quad (5.48)$$

E' chiaro che se si considera l'altra polarizzazione si giunge a (4.40)

$$ds^2 = -dt^2 + (1 + h_+)dx^2 + (1 - h_+)dy^2 + dz^2 \quad (5.49)$$

Ora però si vuole ricavare quest'ultima partendo dalla (5.48), effettuando la solita rotazione di $\pi/4$. Dalle trasformazioni (5.41) e (5.42) segue banalmente che

$$dx' = \frac{1}{\sqrt{2}}(dx - dy) \quad ; \quad dy' = \frac{1}{\sqrt{2}}(dx + dy) \quad (5.50)$$

Sostituendo queste nella metrica (5.48) si ottiene

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= -dt^2 + \frac{1}{2}(dx^2 + dy^2 - dx dy) + \frac{1}{2}(dx^2 + dy^2 + dx dy) + h_{\times}(dx - dy)(dx + dy) + dz^2 \\
 &= -dt^2 + dx^2 + dy^2 + h_{\times}(dx^2 - dx dy + dx dy - dy^2) + dz^2 \\
 &= -dt^2 + dx^2(1 + h_{\times}) + dy^2(1 - h_{\times}) + dz^2
 \end{aligned} \tag{5.51}$$

la quale è come l'equazione (5.49). Per essere più precisi, se si confronta questa con la (5.49) si evince che un'onda h_+ produce gli stessi effetti di un'onda h_{\times} ma con gli assi ruotati di 45° , proprio come notato nella figura 5.2.

Un'altra cosa che salta alla vista dalla figura 5.2 è che la distorsione prodotta dall'onda gravitazionale sugli anelli è quadripolare, come discusso nel precedente capitolo. Si notano infatti quattro frecce che modificano le relative distanze proprie tra le particelle disposte sull'anello. Come ribadito più volte, solo per un campo gravitazionale non uniforme vi saranno le forze mareali descritte nella precedente sezione e la deviazione geodetica accelererà. Tali variazioni mareali sono quadripolari per natura.

5.3 Alcune considerazioni interessanti

Si vogliono studiare infine alcune proprietà matematiche delle onde in modo da proporre ancora una volta la possibilità di un confronto tra le onde gravitazionali e quelle elettromagnetiche.

In generale, se un'onda piana Ψ si trasforma attraverso una rotazione di un angolo θ attorno all'asse di propagazione, come segue

$$\Psi' = e^{in\theta}\Psi \tag{5.52}$$

allora si dice che possiede **elicità** n . L'elicità di un'onda è intimamente legata ad una grandezza fisica fondamentale in meccanica quantistica, lo *spin*. Talvolta è definita come la proiezione dello spin lungo la direzione del moto. Lo spin delle particelle che descrivono una determinata onda a livello quantistico è proporzionale all'elicità dell'onda, con costante di proporzionalità quella di Planck \hbar , dunque $s = n\hbar$.

Il concetto di elicità è legato alle proprietà di trasformazione del tensore di polarizzazione sotto rotazioni spaziali. Per una generica trasformazione di Lorentz Λ^μ_ν (si veda sezione 3.1.2) il vettore ed il tensore di polarizzazione elettromagnetico e gravitazionale si trasformano secondo

$$e^{\mu'}(k') = \Lambda^\mu_\nu e^\nu(k) \tag{5.53}$$

$$A'^{\mu\nu}(k') = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta A^{\alpha\beta}(k) \tag{5.54}$$

dove il vettore d'onda k si trasforma come

$$k^{\mu'} = \Lambda^\mu_\nu k^\nu \tag{5.55}$$

in accordo con le leggi di trasformazione di vettori e tensori viste nel primo capitolo. Sotto rotazioni spaziali attorno alla direzione di \mathbf{k} , è chiaro che questo ed il suo modulo restano invariati, sicchè

$$k^{\mu'} = \Lambda^{\mu}_{\nu}(\phi)k^{\nu} = k^{\mu} \quad (5.56)$$

dove ϕ è l'angolo di rotazione. Quindi nelle equazioni (5.53) e (5.54) si trasformano solo le componenti dei tensori di polarizzazione e non i loro argomenti.

Ora si sceglie l'asse z come asse di propagazione così che $k^{\mu} = (\omega, 0, 0, \omega)$. La matrice $\Lambda^{\mu}_{\nu}(\phi)$ corrisponde allora a una rotazione $R^{\mu}_{\nu}(\phi)$ di ϕ attorno all'asse z

$$R^{\mu}_{\nu}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.57)$$

Si esaminano ora i casi elettromagnetico e gravitazionale distintamente. Nel primo, a causa della condizione di gauge (3.58) $k_{\mu}\epsilon^{\mu} = 0$, il vettore ϵ^{μ} ha tre componenti indipendenti: le due polarizzazioni fisiche trasverse ϵ^1 e ϵ^2 e la componente non fisica longitudinale $\epsilon^0 = \epsilon^3$. Esplicitando la trasformazione $\epsilon^{\mu'} = R^{\mu}_{\nu} \epsilon^{\nu}$ si ottiene

$$\begin{aligned} \epsilon^{0'} &= \epsilon^0 \\ \epsilon^{1'} &= \cos \phi \epsilon^1 + \sin \phi \epsilon^2 \\ \epsilon^{2'} &= -\sin \phi \epsilon^1 + \cos \phi \epsilon^2 \\ \epsilon^{3'} &= \epsilon^3 \end{aligned} \quad (5.58)$$

La componente longitudinale ha dunque elicità zero. Le trasformazioni rimanenti si possono diagonalizzare formando le combinazioni lineari

$$\mathcal{E}_{\pm} = \epsilon^1 \mp i\epsilon^2 \quad (5.59)$$

E infatti vale

$$\mathcal{E}'_{\pm} = \epsilon^{1'} \mp i\epsilon^{2'} = \cos \phi \epsilon^1 + \sin \phi \epsilon^2 \mp i(-\sin \phi \epsilon^1 + \cos \phi \epsilon^2) = e^{\pm i\phi} \mathcal{E} \quad (5.60)$$

che messa a confronto con (5.52) mostra che un'onda elettromagnetica ha uno stato di polarizzazione non fisico con elicità $n = 0$ e due stati di polarizzazione fisici di elicità $n = \pm 1$.

Nel caso delle onde gravitazionali, per via della condizione di gauge (4.9) $k_{\mu}A^{\mu\nu} = 0$, il tensore di polarizzazione possiede sei componenti indipendenti, di cui due fisiche e quattro non fisiche. Ci si limiti ad analizzare per brevità solo le due componenti fisicamente rilevanti A^{11} e A^{12} (le uniche non nulle nel gauge trasverso a traccia nulla approfondito nel capitolo precedente).

Per una rotazione attorno all'asse z il tensore di polarizzazione si trasforma come

$$A'^{\mu\nu} = R^\mu_\alpha R^\nu_\beta A^{\alpha\beta} \quad (5.61)$$

in accordo con l'equazione (5.54) e per la componente A^{11} si ottiene

$$\begin{aligned} A'^{11} &= R^1_1(\phi)R^1_1(\phi)A^{11} + 2R^2_1(\phi)R^1_1(\phi)A^{12} + R^1_2(\phi)R^1_2(\phi)A^{22} \\ &= \cos^2\phi A^{11} + 2\sin\phi\cos\phi A^{12} - \sin^2\phi A^{11} \\ &= \cos(2\phi) A^{11} + \sin(2\phi) A^{12} \end{aligned} \quad (5.62)$$

dove è stata usata la simmetria di $A^{\mu\nu}$, e la formula trigonometrica di duplicazione. Analogamente si trova

$$A'^{12} = -\sin(2\phi) A^{11} + \cos(2\phi) A^{12} \quad (5.63)$$

Come nel caso delle onde elettromagnetiche queste trasformazioni si diagonalizzano ponendo

$$\mathcal{E}_\pm = A^{11} \mp iA^{12} \quad (5.64)$$

e si ottiene

$$\mathcal{E}'_\pm = e^{\pm 2i\phi} \mathcal{E}_\pm \quad (5.65)$$

Questa equazione segue banalmente dai passaggi già svolti per l'onda elettromagnetica, dove compare questa volta un semplice fattore 2.

I due stati di polarizzazione fisici di un'onda gravitazionale hanno dunque elicità $n = \pm 2$. Le onde elettromagnetiche e gravitazionali hanno quindi in comune la velocità di propagazione e il numero di stati fisici, ma si distinguono per l'elicità. Nella stessa maniera si può dimostrare che le rimanenti componenti (non fisiche) del tensore di polarizzazione si trasformano come

$$\mathcal{F}'_\pm = e^{\pm i\phi} \mathcal{F}_\pm \quad (5.66)$$

e

$$A'^{33} = A^{33} \quad ; \quad A'^{00} = A^{00} \quad (5.67)$$

dove

$$\mathcal{F}_\pm = A^{31} \mp A^{32} \quad (5.68)$$

Le ultime equazioni sono dunque analoghe alle relazioni viste nel caso elettromagnetico e tutte insieme indicano che un'onda piana gravitazionale si decompone in parti \mathcal{E}_\pm con elicità ± 2 , parti \mathcal{F}_\pm con elicità ± 1 e parti A^{00} e A^{33} con elicità zero. Le ultime citate sono 'meno interessanti' perchè non descrivono stati fisici di polarizzazione e di fatto è stato visto nel precedente capitolo che scegliendo un opportuno sistema di coordinate è possibile annullarle. Le componenti fisiche di interesse rimangono quelle che soddisfano l'equazione (5.65).

Confrontando anche questo caso con l'equazione (5.52), si traggono diverse conclusioni. Il ragionamento è iniziato a causa del nesso tra elicità e spin a livello quantistico. Allora ad un

campo scalare reale corrisponde una particella neutra priva di massa e di spin zero. Il campo elettromagnetico è composto da particelle prive di massa di spin $\pm\hbar$, i fotoni. Infine il campo gravitazionale, supposto che esista una teoria quantistica consistente, sarà composto da particelle prive di massa (infatti anche qui $k_\mu k^\mu = 0$) di spin $\pm 2\hbar$, i **gravitoni**.

I risultati ottenuti con i passaggi matematici appena svolti potevano venir intuiti anche da un punto di vista grafico. Si evince dalla figura 5.2 che ad ogni istante di tempo, un'onda gravitazionale è invariante sotto una rotazione di π attorno alla direzione di propagazione (in questo caso l'asse z). Al contrario è ben noto che un'onda elettromagnetica è invariante per rotazioni di 2π e ad esempio l'onda associata al *neutrino* è invariante per rotazioni di 4π . Questo è proprio frutto degli stati di spin dei corrispondenti bosoni: le particelle associate alle versioni quantistiche delle onde corrispondenti.

In generale, un campo di radiazione di una particella di spin S , è invariante per una rotazione di $2\pi/S$. Inoltre, un campo con spin S ha precisamente due stati di polarizzazione indipendenti, che sono inclinati tra loro di un angolo di $\pi/2S$. Ecco che, come noto, torna il fatto che per un'onda elettromagnetica, che corrisponde a un fotone di spin $S = 1$, le polarizzazioni indipendenti sono perpendicolari. Da qui si può dunque dedurre, sapendo l'inclinazione tra i due stati di polarizzazione di un'onda gravitazionale, che il cosiddetto *gravitone* menzionato poc'anzi (ancora non scoperto poichè non si possiede una teoria completamente sviluppata sulla gravità quantistica) deve essere una particella di spin $S = 2$. Il fatto che gli spin sono rispettivamente 1 e 2, è un'ulteriore conseguenza del fatto che la descrizione matematica in termini di oggetti geometrici è differente. I campi con spin $S = 1$ sono campi vettoriali, motivo per cui è sufficiente solo un vettore per descrivere il campo elettromagnetico. Un campo con spin $S = 2$, al contrario, è un campo tensoriale, motivo per cui all'inizio della trattazione è stato necessario introdurre il formalismo dei tensori per descrivere le proprietà del campo gravitazionale.

5.4 Rilevazione delle onde

Appurato che l'equazione dello spostamento geodetico mostra matematicamente che gli effetti di marea del campo gravitazionale, rappresentati dalla curvatura dello spaziotempo, sono l'elemento chiave per misurare l'eventuale presenza di un'onda gravitazionale, la domanda da porsi è: come e con quale strumento è possibile effettuare tale rilevazione? Se lo spazio tra due particelle di prova si contrae, non dovrebbe toccare la medesima sorte allo stesso apparato rivelatore che esegue la misura?

E' stato appena visto che l'onda è descritta come una *'forza'* agente sulla particella 2 osservata da un sistema inerziale solidale alla particella 1 (motivo per cui con una singola particella non si può rilevare l'onda). In particolare, con le giuste condizioni al contorno per l'equazione (5.24) o equivalentemente (5.23), le componenti del vettore ξ^μ assumono le fattezze di quelle della distanza propria.

Nulla vieta però di includere nel quadro altre forze, agenti sulla particella 1 o 2. Per rendere conto di tale situazione è sufficiente inserire le componenti delle accelerazioni causate dalle

risultanti delle forze F_1^μ e F_2^μ

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^\mu = -R^\mu{}_{0\nu 0} \xi^\nu - \frac{1}{m_1} F_1^\mu + \frac{1}{m_2} F_2^\mu \quad (5.69)$$

dove m_1 e m_2 sono le masse delle particelle. Ora si può provare a rispondere alle domande all'inizio della sezione, poichè l'equazione qui sopra prevede il comportamento del sistema sotto l'effetto di un'onda. E' sorprendente pensare che persino un righello potrebbe, in linea di principio, misurare la deformazione dello spazio. Gli atomi che lo costituiscono sono legati assieme da forze le cui intensità sono ben maggiori di quelle di tipo gravitazionale. In questo modo il secondo ed il terzo termine nel membro di destra dominano l'equazione e di conseguenza il righello non si dilata (o restringe), contrariamente a quanto accade allo spazio tra due particelle libere che quindi si può misurare. Questo semplice ragionamento è l'idea che vi è alla base di un tipo di strumenti detti *rilevatori risonanti* o a barra. Questi in prima approssimazione sono semplici oscillatori armonici dotati della peculiarità di entrare in risonanza quando su di essi incide la perturbazione in questione. Tuttavia tali strumenti mostrano alcuni punti deboli, ragione per cui esiste un rilevatore alternativo, ben più sofisticato, che sfrutta il ruolo privilegiato che la luce ricopre nella teoria della Relatività. In pratica si misurano le distanze proprie utilizzando il 'tempo di volo della luce' di un laser, la quale si muove avanti e indietro lungo i bracci di un *interferometro*. Differenze nel tempo di volo lungo bracci perpendicolari produrranno frange di interferenza all'uscita dello strumento. Si riporta uno schema dell'interferometro di Michelson, usato come rilevatore di onde gravitazionali.

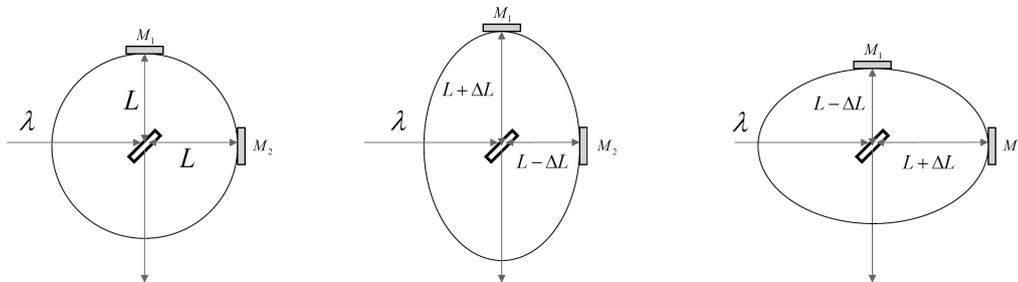


Figura 5.3: Schema di un interferometro di Michelson come rilevatore di onde gravitazionali

Le tre rappresentazioni in figura 5.3 denotano tre diverse fasi dell'onda mentre passa attraverso il sistema. Questa causa rispettivamente nessun cambiamento nel primo disegno, accorcia il braccio orizzontale di ΔL mentre allunga quello verticale della stessa distanza propria nel secondo disegno, e produce un effetto opposto nell'ultimo. Identificando il piano della pagina con il piano $x-y$, se un'onda che si propaga lungo l'asse z è polarizzata come $\mathbf{h} = h \mathbf{e}_+$, allora dall'equazione (5.37) si evince che le distanze proprie minima e massima sono rispettivamente $L - h/2$ e $L + h/2$. Allora il rapporto $\Delta L/L$ soddisfa

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{h}{2} \quad (5.70)$$

dove L è la lunghezza (propria) dei bracci dell'interferometro prima del passaggio dell'onda.

Questo è ovviamente un esempio speciale, in generale i bracci del rilevatore non saranno allineati perfettamente con la polarizzazione e perpendicolarmente alla propagazione dell'onda incidente. Quindi rigorosamente parlando, si dovranno considerare orientazioni generiche (basta utilizzare le coordinate polari sferiche) e quindi ci saranno solo alcune componenti lungo le quali si verificano gli effetti citati. La trattazione non ha lo scopo di approfondire il funzionamento dei rilevatori di onde gravitazionali, ma di studiare la teoria che vi è alla base.

Un'ultima nota tecnica è però necessaria. L'ordine di grandezza di h è estremamente piccolo. Anche se provenienti da una sorgente mastodontica causata da un evento astrofisico cataclismico, ci si aspetta comunque che h non sia maggiore di una parte su 10^{20} . Una rapida stima può essere fatta confrontando l'intensità dell'interazione elettromagnetica con quella gravitazionale. Ad esempio basta sfruttare le due costanti che precedono le sorgenti J^μ e $T^{\mu\nu}$ nelle equazioni² dei campi e farne un rapporto. Queste sono $a = -\mu_0$ e $b = -16\pi G_N$ ed hanno il ruolo di accoppiare il fenomeno che causa la generazione delle onde con l'energia che esse trasportano. Il rapporto b/a ha un ordine di grandezza di 10^{-3} e questo è sufficiente per capire che la perturbazione gravitazionale è un osservabile piuttosto complesso. Sono infatti necessari strumenti così sensibili da captare addirittura una piccolissima variazione di una parte su 10^{21} . Ora, assunto che una tale accuratezza esista (il *Laser Interferometer Gravitational-wave Observer* detto LIGO ne è un esempio), allora un apparato tanto preciso risentirebbe anche della minima vibrazione provocata da sorgenti terrestri poste anche a migliaia di chilometri. Oscillazioni sismiche, rumore acustico e persino fluttuazioni interne del laser potrebbero mascherare o imitare il segnale di arrivo di un'onda. Due interferometri distanziati nello spazio, invece, percepirebbero le perturbazioni locali in tempi diversi rendendo più facile la loro identificazione ed esclusione. In questo senso ogni rilevatore agisce come filtro di rumore per l'altro. Solo segnali della stessa ampiezza registrati ad istanti di tempo separati in accordo con la distanza spaziale tra i due interferometri (tenendo conto che il segnale si propaga alla velocità della luce), saranno ascrivibili ad onde gravitazionali. Questo è il motivo per cui ci sono due rilevatori LIGO separati da più di 3000 Km (il primo ad Hanford, nello stato di Washington, il secondo a Livingston, Louisiana), che a loro volta collaborano con VIRGO (in Italia), per accentuare il grado di affidabilità dell'osservazione. Gli interferometri in questione sono proprio come quello di Michelson in figura 5.3, implementati con tecnologie aggiuntive per migliorarne l'efficienza. Questi detengono il primato di più grandi interferometri mai creati avendo bracci lunghi 4km. La scelta della distanza è una diretta conseguenza delle equazioni viste nella trattazione le quali indicano che è possibile aumentare la sensibilità dello strumento incrementando la distanza da far percorrere ai raggi del laser. La distanza non sarebbe comunque nemmeno lontanamente sufficiente a rilevare le alterazioni cercate. Ecco che quindi si interpongono altri specchi semiriflettenti in modo che il fascio torni al fotorilevatore solo dopo circa 280 riflessioni, cioè portando il cammino da 4 a 1120 Km nelle cavità. La precisione raggiunta è quindi adeguata al fine. Ulteriori specchi traslucidi sono posizionati in modo da riciclare potenza, i cui valori necessari sarebbero altrimenti spaventosamente elevati. Tutti questi ed altri accorgimenti studiati nei minimi dettagli permettono di osservare le oscillazioni spaziotemporali, e così è stato.

²Tali equazioni, includendo le costanti, sono $\square A = -\mu_0 J^\mu$ e $\square \bar{h}^{\alpha\beta} = -16\pi G_N T^{\alpha\beta}$

5.4.1 Recenti e future osservazioni

Nel febbraio 2016 è stata annunciata la rilevazione di onde gravitazionali da LIGO che in collaborazione con VIRGO ha effettuato la prima osservazione nel settembre dell'anno precedente. Il segnale si è originato a 1.3 miliardi di anni luce dalla terra, ed è dovuto alla fusione di due buchi neri appartenenti ad un sistema binario in cui uno ruotava attorno all'altro. Questi avevano masse iniziali rispettivamente di $36M_{\odot}$ e $29M_{\odot}$, mentre l'unico buco nero finale aveva una massa di $62M_{\odot}$ da cui si evince che $3M_{\odot}$ sono state radiate sotto forma di onde gravitazionali. Usando la frequenza dei segnali si calcola che man mano che la separazione tra i due corpi decresceva, le loro velocità aumentavano bruscamente fino a raggiungere considerevoli frazioni della velocità della luce. Come atteso, l'ampiezza della perturbazione metrica $h_{\mu\nu}$ aveva un picco di 1.0×10^{-21} . Questo è il primo evento cataclismico documentato. In futuro ci si aspetta che LIGO possa riuscire ad osservare anche avvenimenti meno energetici, come l'esplosione di una supernova o la coalescenza di una stella di neutroni, per arrivare un giorno a cogliere i debolissimi resti di radiazione gravitazionale creati all'origine del tutto.

Al momento si sta attendendo la missione spaziale LISA (*Laser Interferometer Space Antenna*), la cui data di lancio è prevista per il 2034. Si tratta di una 'costellazione' di tre satelliti artificiali posti ai vertici di un triangolo equilatero, avente lato pari a 5 milioni di Km. Mentre il sistema rivoluzionerà attorno al Sole, alla distanza di una unità astronomica³, un interferometro controllerà costantemente la separazione satellitare. Senza essere ancorato al suolo sarà richiesta una sensibilità di gran lunga più bassa rispetto a quella dei LIGO.

Le onde gravitazionali non sono solo un' ulteriore prova della teoria della Relatività Generale, ma esse contengono anche preziose informazioni su sistemi astrofisici non altrimenti studiabili e su diverse epoche dell'Universo primordiale. Le onde elettromagnetiche sono facilmente assorbite, diffuse e disperse dalla materia, a differenza di quelle gravitazionali che si propagano senza significativa attenuazione, scattering o dispersione. Se le prime sono emesse da piccole regioni spaziali e con piccola lunghezza d'onda, le seconde sono prodotte da moti di enormi sistemi e forniscono dunque informazioni su regioni ad ampia scala. Inoltre, essendo il 96% della massa/energia dell'Universo non portatore di carica, le onde gravitazionali sono un' opportunità di indagine diretta dell'Universo, poichè permettono di analizzare l'improta che ogni fenomeno nel cosmo lascia sullo spaziotempo. In linea di principio, come indirettamente accennato, si potrebbero persino captare le onde gravitazionali generate durante il Big Bang, nei primissimi istanti di vita dell'Universo.

³Una Unità Astronomica (UA) equivale circa a $1,496 \times 10^{11}$ m.

Appendice A

Connessione affine

A.1 Legge di trasformazione

Per dimostrare che i simboli di Christoffel si trasformano come nell'equazione (1.32), è più semplice utilizzare una definizione alternativa ma del tutto equivalente a quella data da (1.31). L'equazione del moto di una particella in un sistema di riferimento localmente inerziale (*normale*), dove dunque la metrica è quella piatta di Minkowski, sarà

$$\frac{d^2 y^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (\text{A.1})$$

con y^α vettore coordinata e τ tempo proprio. Come mostrato in dettaglio nella sezione 1.3.5 questo è un sistema di coordinate dove i simboli di Christoffel si annullano localmente, e l'equazione è quella di una geodetica in uno spaziotempo piatto.

Se ora si esegue un cambio di coordinate tale per cui coordinate nuove e vecchie sono l'una funzione dell'altra, allora per la regola della catena si può scrivere

$$\frac{dy^\alpha}{d\tau} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \quad (\text{A.2})$$

Dunque l'equazione (A.1) diventa

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \right) = \frac{d^2 x^\gamma}{d\tau^2} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0 \quad (\text{A.3})$$

Ora si moltiplica ogni membro per $\partial x^\sigma / \partial y^\alpha$ e si tiene a mente che

$$\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\alpha} = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\gamma} = \delta_\gamma^\sigma \quad (\text{A.4})$$

così da ottenere

$$\frac{d^2 x^\gamma}{d\tau^2} \delta_\gamma^\sigma + \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\alpha} \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0 \quad (\text{A.5})$$

che infine diventa

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} + \left[\frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\alpha} \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \right] \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0 \quad (\text{A.6})$$

Le parentesi quadrate servono per evidenziare che, confrontando l'equazione (A.6) con l'equazione geodetica (1.45), quel termine fornisce una definizione alternativa per la connessione affine (rinominando gli indici)

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial x^k}{\partial y^\alpha} \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} \Leftrightarrow \frac{d^2 x^k}{d\tau^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} = 0 \quad (\text{A.7})$$

Da questa espressione di Γ è piuttosto semplice ricavare la sua legge di trasformazione: in un sistema di riferimento generico si avrà

$$\begin{aligned}\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial y^{\alpha}} \frac{\partial^2 y^{\alpha}}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} = \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial y^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} \left(\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu'}} \right) \\ &= \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial y^{\alpha}} \left[\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial^2 y^{\alpha}}{\partial x^{\tau} \partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x^{\mu'}} + \frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} \right] \\ &= \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x^{\mu'}} \Gamma^{\rho}_{\tau\sigma} + \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}}\end{aligned}\quad (\text{A.8})$$

L'ultima riga è esattamente la legge di trasformazione (1.32); il secondo termine conferma il fatto che non si tratta di un tensore.

A.2 Γ in termini de tensore metrico

Si vuole dimostrare la validità dell'equazione (1.41). Si inizia con la derivata covariante di un tensore (0,2) generico

$$T_{\mu\nu;\beta} = T_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} T_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} T_{\mu\alpha} \quad (\text{A.9})$$

Si applica ora questa relazione al tensore metrico e si usa il fatto che $g_{\mu\nu;\beta} = 0$ (equazione(1.39)),

$$g_{\mu\nu;\beta} = g_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} g_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} g_{\mu\alpha} = 0 \quad (\text{A.10})$$

Permutando gli indici due volte si possono scrivere le equazioni

$$g_{\mu\nu,\beta} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} g_{\alpha\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} g_{\mu\alpha} \quad (\text{A.11})$$

$$g_{\mu\beta,\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} g_{\mu\alpha} \quad (\text{A.12})$$

$$g_{\nu\beta,\mu} = \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} g_{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} g_{\nu\alpha} \quad (\text{A.13})$$

Ora sommando l'equazione (A.11) alla (A.12) e sottraendo la (A.13) si ottiene

$$g_{\mu\nu,\beta} + g_{\mu\beta,\nu} - g_{\nu\beta,\mu} = g_{\alpha\nu} (\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}) + g_{\mu\alpha} (\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}) + g_{\alpha\beta} (\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}) \quad (\text{A.14})$$

dove è stata usata la simmetria del tensore metrico $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$. Ora si utilizza la simmetria dei simboli di Christoffel $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ per raggiungere

$$g_{\mu\nu,\beta} + g_{\mu\beta,\nu} - g_{\nu\beta,\mu} = 2g_{\mu\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} \quad (\text{A.15})$$

da cui riarrangiando per la connessione affine si ottiene

$$\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (g_{\mu\nu,\beta} + g_{\mu\beta,\nu} - g_{\nu\beta,\mu}) \quad (\text{A.16})$$

che è esattamente l'equazione (1.41) che si voleva dimostrare.

Appendice B

Prova che $G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$

Per dimostrare che il tensore di Einstein è covariantemente conservato si utilizzano le identità di Bianchi (1.64)

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\gamma\lambda;\mu} = 0 \quad (\text{B.1})$$

le quali sono state ricavate nel capitolo 1. Ora, dalle proprietà di simmetria del tensore di Riemann (1.67), si ha che

$$R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} = -R_{\alpha\beta\mu\lambda;\nu} \quad (\text{B.2})$$

così le identità di Bianchi possono risciversi come

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} - R_{\alpha\beta\mu\lambda;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0 \quad (\text{B.3})$$

Contraendo questa equazione con $g^{\alpha\mu}$ si arriva a

$$g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} - g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\lambda;\nu} + g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0 \quad (\text{B.4})$$

Ora usando la regola del prodotto per la derivata covariante e il fatto che la derivata del tensore metrico è nulla (equazione (1.39)) si ottiene

$$(g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\nu})_{;\lambda} - (g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\lambda})_{;\nu} + (g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\nu\lambda})_{;\mu} = 0 \quad (\text{B.5})$$

che si semplifica immediatamente a

$$R_{\beta\nu;\lambda} - R_{\beta\lambda;\nu} + R^{\mu}_{\beta\nu\lambda;\mu} \quad (\text{B.6})$$

Si può applicare lo stesso procedimento una seconda volta: si moltiplica per $g^{\beta\nu}$, si usa la regola del prodotto e il fatto che $g^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$. Poi si contraggono gli indici possibili nei primi due termini e si esprime il terzo in termini del tensore di Riemann completamente covariante (cioè lasciando le due metriche appena moltiplicate indicate). Dunque si avrà

$$R_{;\lambda} - R^{\mu}_{\lambda;\nu} + g^{\beta\nu} g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0 \quad (\text{B.7})$$

Ora si utilizzano di nuovo le simmetrie, precisamente

$$R_{\alpha\beta\nu\lambda} = -R_{\beta\alpha\nu\lambda} \quad (\text{B.8})$$

per riscrivere il terzo termine come

$$g^{\beta\nu} g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = - \left(g^{\beta\nu} g^{\alpha\mu} R_{\beta\alpha\nu\lambda} \right)_{;\mu} = - (g^{\alpha\mu} R_{\alpha\lambda})_{;\mu} = -R_{\lambda;\mu}^{\mu} \equiv -R_{\lambda;\nu}^{\nu} \quad (\text{B.9})$$

Quindi, inserendo nella (B.7) si ha

$$R_{;\lambda} - 2R_{\lambda;\nu}^{\nu} = 0 \quad (\text{B.10})$$

Si moltiplica tutto per $-\frac{1}{2}g^{\mu\lambda}$

$$g^{\mu\lambda} R_{\lambda;\nu}^{\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} R_{;\lambda} = 0 \quad (\text{B.11})$$

e con il solito metodo, cioè con la regola del prodotto e usando il fatto che le derivate covarianti di $g_{\mu\nu}$ sono nulle, si arriva a

$$\left(g^{\mu\lambda} R_{\lambda}^{\nu} \right)_{;\nu} - \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right)_{;\nu} = 0 \quad (\text{B.12})$$

la quale è equivalente all'equazione che si voleva dimostrare, per la definizione (1.72)

$$G_{;\nu}^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{B.13})$$

Appendice C

Il tensore di Einstein linearizzato

C.1 Nella forma normale

Combinando le espressioni del tensore di Ricci (3.22) e dello scalare di curvatura (3.23) linearizzati, si trova

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[(h_\nu^\sigma)_{,\mu\sigma} + (h_\mu^\alpha)_{,\nu\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{,\alpha} - h_{,\mu\nu} \right] - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \left[(h_\beta^\sigma)_{,\alpha\sigma} + (h_\alpha^\sigma)_{,\beta\sigma} - h_{\alpha\beta,\sigma}{}^{,\sigma} - h_{,\alpha\beta} \right] \quad (\text{C.1})$$

Si vuole dimostrare che questa espressione è equivalente all'equazione (3.24). E' più semplice partire da quest'ultima per raggiungere quella scritta sopra. Quindi dalla (3.24) si ha che

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left[h_{\mu\alpha,\nu}{}^{,\alpha} + h_{\nu\alpha,\mu}{}^{,\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{,\alpha} - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \left(h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - h_{,\beta}{}^{,\beta} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\eta^{\alpha\sigma} h_{\mu\alpha,\nu\sigma} + \eta^{\alpha\sigma} h_{\nu\alpha,\mu\sigma} - \eta^{\alpha\sigma} h_{\mu\nu,\alpha\sigma} - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\sigma} h_{\alpha\beta,\gamma\sigma} + \eta_{\mu\nu} \eta^{\beta\alpha} h_{,\beta\alpha} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(\eta^{\alpha\sigma} h_{\mu\alpha})_{,\nu\sigma} + (\eta^{\alpha\sigma} h_{\nu\alpha})_{,\mu\sigma} - h_{\mu\nu,\sigma}{}^{,\sigma} - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\gamma} \left(\eta^{\beta\sigma} h_{\alpha\beta} \right)_{,\gamma\sigma} + \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} h_{,\alpha\beta} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(h_\nu^\sigma)_{,\mu\sigma} + (h_\mu^\sigma)_{,\nu\sigma} - h_{\mu\nu,\sigma}{}^{,\sigma} - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\gamma} (h_\alpha^\sigma)_{,\gamma\sigma} + \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} h_{,\alpha\beta} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

dove sono stati alzati e abbassati gli indici grazie alla metrica di Minkowski, le cui derivate sono nulle. I primi quattro termini dentro la parentesi quadra corrispondono alla prima riga del tensore in testa alla pagina. Poi, nella seconda riga della (C.1) si considerano ora i primi due termini: siccome $\eta^{\alpha\beta} = \eta^{\beta\alpha}$ si avrà

$$-\frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \left[(h_\beta^\sigma)_{,\alpha\sigma} + (h_\alpha^\sigma)_{,\beta\sigma} \right] = -\frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} (h_\alpha^\sigma)_{,\beta\sigma} \quad (\text{C.3})$$

il quale è il penultimo termine nell'ultima espressione della (C.2).

Infine per lo stesso motivo, gli ultimi due termini della seconda riga dell'equazione (C.1) si possono scrivere

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \left[h_{\alpha\beta,\sigma}{}^{,\sigma} + h_{,\alpha\beta} \right] &= \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \left[\eta^{\sigma\gamma} h_{\alpha\beta,\sigma\gamma} + h_{,\alpha\beta} \right] \\ &= \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \eta^{\sigma\gamma} \left(\eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \right)_{,\sigma\gamma} + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} h_{,\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} h_{,\alpha\beta} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

che è proprio l'ultimo termine dell'espressione (C.2). Per cui a parte il rinominare alcuni indici, l'equazione (C.1) in testa alla pagina equivale precisamente all'espressione (3.24) data nel testo principale.

C.2 Nella forma barrata

Anche l'equazione (3.26) è più facile da verificare al contrario. Si considerino dunque ognuno dei quattro termini tra le parentesi nel membro destro della (3.26)

$$\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{,\alpha} = \eta^{\alpha\sigma} \bar{h}_{\mu\nu,\alpha\sigma} = \eta^{\alpha\sigma} \left[h_{\mu\nu,\alpha\sigma} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h_{,\alpha\sigma} \right] \quad (\text{C.5})$$

$$\eta_{\mu\nu} \bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\sigma} \bar{h}_{\alpha\beta,\gamma\sigma} = \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\sigma} \left[h_{\alpha\beta,\gamma\sigma} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h_{,\gamma\sigma} \right] \quad (\text{C.6})$$

$$\bar{h}_{\mu\alpha,\nu}{}^{,\alpha} = \eta^{\alpha\sigma} \bar{h}_{\mu\alpha,\nu\sigma} = \eta^{\alpha\sigma} \left[h_{\mu\alpha,\nu\sigma} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\alpha} h_{,\nu\sigma} \right] \quad (\text{C.7})$$

$$\bar{h}_{\nu\alpha,\mu}{}^{,\alpha} = \eta^{\alpha\sigma} \bar{h}_{\nu\alpha,\mu\sigma} = \eta^{\alpha\sigma} \left[h_{\nu\alpha,\mu\sigma} - \frac{1}{2} \eta_{\nu\alpha} h_{,\mu\sigma} \right] \quad (\text{C.8})$$

Quindi si può scrivere l'equazione (3.26) come

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} = & -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\sigma} h_{\mu\nu,\alpha\sigma} + \frac{1}{4} \eta^{\alpha\sigma} \eta_{\mu\nu} h_{,\alpha\sigma} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\sigma} h_{\alpha\beta,\gamma\sigma} + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\sigma} \eta_{\alpha\beta} h_{,\gamma\sigma} \\ & + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\sigma} h_{\mu\alpha,\nu\sigma} - \frac{1}{4} \eta^{\alpha\sigma} \eta_{\mu\alpha} h_{,\nu\sigma} + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\sigma} h_{\nu\alpha,\mu\sigma} - \frac{1}{4} \eta^{\alpha\sigma} \eta_{\nu\alpha} h_{,\mu\sigma} \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

la quale diventa

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} = & -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\sigma} h_{\mu\nu,\alpha\sigma} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\sigma} h_{\alpha\beta,\gamma\sigma} + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\sigma} h_{\mu\alpha,\nu\sigma} \\ & + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\sigma} h_{\nu\alpha,\mu\sigma} + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\sigma} \eta_{\mu\nu} h_{,\alpha\sigma} - \frac{1}{2} h_{,\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Dopo aver raccolto il fattore 1/2 (ed eventualmente $\eta_{\mu\nu}$ parzialmente), basta confrontare questa con i primi passaggi visti nell'equazione C.2 dell'appendice C.1, per vedere che cambiando qualche indice ripetuto e usando la simmetria della metrica di Minkowski, le due espressioni sono identiche.

Questo implica che l'equazione (3.26) è la corretta espressione di $G_{\mu\nu}$ in termini di $\bar{h}_{\mu\nu}$.

Bibliografia

- [1] Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General theory of Relativity*, John Wiley and Sons, Inc., New York (1972).
- [2] B.F. Schutz, *A first course in General Relativity (second edition)*, Cambridge University Press, New York (2009).
- [3] B.F. Schutz, *Geometrical methods of mathematical physics*, Cambridge University Press, Cambridge (1982).
- [4] Martin Hendry, *An Introduction to General Relativity, Gravitational Waves and Detection Principles*, Cascina (2007).
- [5] Physical Review Letters **116**, 061102 (2016), *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, published by the American Physical Society (Febbraio 2016).