

ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Matematica

**EQUILIBRI NEL MODELLO DI
COURNOT QUANDO ESISTONO LIMITI
DI CAPACITÀ PRODUTTIVA**

Relatore:
Prof. Franco Nardini

Presentato da:
Sofia Mazzotti

Sessione Terza
Anno Accademico 2015/2016

"Per fer les coses bé cal: primer, l'amor, segon, la tècnica".

A. Gaudí

Introduzione

Questo elaborato si pone come obiettivo l'applicazione di alcuni strumenti matematici forniti dalla teoria dei sistemi dinamici a una situazione economica di interazione strategica tra due o più imprese, secondo il modello di Cournot. La teoria dei sistemi dinamici si occupa dello studio di modelli di sistemi che si evolvono nel tempo, e non si tratta di un settore particolarmente recente: già nella fisica di Galileo e Newton, infatti, si trova la trattazione di numerosi sistemi dinamici, senza considerare poi che nei secoli XVII e XVIII fisici e astronomi svilupparono notevolmente questo settore. Molte persone però ne riconoscono il fondatore nel francese Jules-Henri Poincaré (1854-1912). Egli infatti, nei due trattati "*Les méthodes nouvelles de la mécanique célestes*" (1892-1899) e "*Leçons de mécanique céleste*" (1905-1910), applica al problema del movimento dei tre corpi i risultati della Meccanica Newtoniana e ne studia dettagliatamente il comportamento delle soluzioni (frequenza, stabilità, asintoti, ecc.). Queste pubblicazioni includono anche il *Teorema della ricorrenza*¹, che dimostra che determinati sistemi, dopo un tempo abbastanza lungo ma finito, ritornano a uno stato molto simile allo stato iniziale. Poi, negli stessi anni, il russo Aleksandr Lyapunov (1857-1918) sviluppa diversi importanti metodi di approssimazione, che rendono possibile definire la stabilità strutturale dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie, creando così la teoria moderna della stabilità di un sistema dinamico. Successivamente, nel 1913, l'americano George David Bir-

¹*Teorema della ricorrenza*: Sia dato un sistema dinamico con spazio delle fasi limitato, ovvero con volume finito, e sia P un punto di tale spazio. Allora per ogni intorno D_0 di P esiste un punto $P' \in D_0$ che ritornerà in D_0 in un tempo finito.

khoff enuncia il cosiddetto *Teorema ergodico*², un teorema che, combinando le nozioni della fisica con le ipotesi ergodiche della teoria della misura, risolve un problema della meccanica statistica, e ha anche ripercussioni sulla dinamica. Infine, nell'anno 1964, l'ucraino Oleksandr Mykolaiovych Sharkovsky sviluppa il *Teorema di Sharkovsky*³, sui periodi dei sistemi dinamici discreti. Una delle implicazioni di questo teorema è che, se un sistema dinamico discreto sulla retta reale ha un punto periodico di periodo 3, allora ci devono essere punti periodici in ogni altro periodo.

Negli ultimi quarant'anni, comunque, c'è stata una riscoperta dei sistemi dinamici, e questo è dovuto essenzialmente a due motivi:

- l'introduzione di un linguaggio e un metodo di lavoro di tipo geometrico-visivo: un pioniere in tal senso è stato proprio Poincaré;
- i moderni strumenti di calcolo e rappresentazione grafica, che in molti casi hanno permesso di visualizzare ciò che solo poteva essere immaginato da Poincaré e dagli altri studiosi che hanno dato fondamentali contributi alla teoria qualitativa dei sistemi dinamici tra gli anni '30 e '60.

Ciò che noi vogliamo fare è, appunto, utilizzare questi strumenti più recenti per studiare la stabilità degli equilibri, se esistono, dei sistemi dinamici che descrivono situazioni di oligopolio, prima considerando situazioni generali e poi considerando il caso particolare di un duopolio simmetrico con limiti di capacità produttiva.

²*Teorema ergodico*: Sia T una trasformazione stazionaria su uno spazio di probabilità (X, Σ, μ) e sia f una funzione integrabile, allora la media $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(T^{i-1}x)$ converge quasi sicuramente e in L^1 , per $n \rightarrow \infty$, verso una funzione T -invariante $f^*(x)$.

³*Teorema di Sharkovsky*: Dato un intervallo $I \subset \mathbb{R}$, sia $f : I \rightarrow I$ una funzione continua. Se f ha un punto di periodo k , essa avrà anche punti di periodo m , con m un numero qualsiasi che segue k nell'ordine di Sharkovsky.

La tesi si struttura nel seguente modo: nel primo capitolo introduciamo i sistemi dinamici, in particolare quelli discreti, e diamo alcune definizioni che saranno utili nei capitoli successivi; nel secondo capitolo descriviamo il modello di oligopolio proposto da Cournot nella metà del XIX secolo e ne studiamo la stabilità in base al numero dei competitori, considerando una funzione di domanda lineare; infine, nel terzo capitolo studiamo un duopolio di Cournot sottoposto a una funzione di domanda non lineare e caratterizzato dal fatto che le imprese che competono operano sotto limitate capacità produttive, giungendo a una situazione di multistabilità in cui i cambi negli equilibri avvengono per *border-collision bifurcations*.

Indice

Introduzione	i
1 Sistemi dinamici	1
2 Oligopolio di Cournot	5
2.1 Il modello di Cournot	5
2.2 Equilibri e stabilità quando il numero dei competitori aumenta	8
3 Oligopolio di Cournot con limiti di capacità produttiva	15
3.1 Il modello	16
3.2 Multistabilità e biforcazioni	24
3.3 Bacini di attrazione	33
Bibliografia	39
Ringraziamenti	41

Capitolo 1

Sistemi dinamici

Come prima cosa, vogliamo capire come è fatto un modello matematico che descrive un sistema in evoluzione. Innanzitutto occorre identificare certe grandezze *misurabili* in modo oggettivo (cioè esprimibili mediante numeri reali, attraverso opportune misurazioni) che permettano di identificare lo stato, ossia la configurazione a un certo istante, del sistema che si vuole esaminare. Tali grandezze sono dette *variabili di stato* e l'insieme dei loro valori definisce, in ogni istante, lo *stato del sistema*.

Con il termine *sistema dinamico* si intende quel procedimento matematico che permette di descrivere come le variabili di stato cambiano con lo trascorrere del tempo:

Definizione 1.0.1. *Un sistema dinamico è una terna (M, T, Φ) dove M è un insieme, T è un gruppo (o semigruppato), e Φ è una funzione continua*

$$\Phi : U \subset (T \times M) \rightarrow M$$

tale che, $\forall t_1, t_2, t_1 + t_2 \in I(x)$, con $I(x) = \{t \in T; (t, x) \in U\}$, valgono:

$$\Phi(0, x) = x$$

$$\Phi(t_2, \Phi(t_1, x)) = \Phi(t_1 + t_2, x).$$

Inoltre:

(i) *se $T \subseteq \mathbb{R}$, (T, M, Φ) è detto sistema dinamico continuo;*

(ii) se $T \subseteq \mathbb{Z}$, (T, M, Φ) è detto sistema dinamico discreto.

La funzione $\Phi(t, x)$ è chiamata *funzione di evoluzione temporale (flusso)* del sistema dinamico; questa associa ad ogni punto dell'insieme M una unica immagine, che dipende dalla variabile t , il *parametro di evoluzione*. M è invece detto *spazio delle fasi*.

È ovvio che la rappresentazione di un sistema del mondo reale attraverso un modello matematico dovrà essere semplificata rispetto alla realtà, dovendo contenere un numero limitato, e in genere piccolo, di variabili di stato. Ma sta proprio qui la potenza dei modelli matematici: devono identificare le proprietà salienti, trascurando ciò che può essere considerato come accessorio e secondario rispetto al fenomeno che si vuole descrivere.

Consideriamo un sistema dinamico discreto, con $M \subseteq \mathbb{R}^n$, al tempo iniziale $t = 0$. In questo caso, per determinare l'evoluzione (la *traiettoria*) del sistema dinamico è sufficiente calcolare la successione degli stati $x_t = (x_{1,t}, \dots, x_{n,t}) \in \mathbb{R}^n$ per ogni periodo successivo, cioè $\forall t \in \mathbb{N}$. La legge che descrive l'evoluzione di un sistema dinamico a tempo discreto è spesso rappresentata da una funzione f che, nel caso in cui questa f non dipenda esplicitamente dal tempo (*sistema autonomo*), e applicandola allo stato del sistema al tempo t , fornisce lo stato al tempo $t + 1$:

$$f(x_t) = x_{t+1}.$$

Siccome questa funzione ha sia come dominio che come codominio l'insieme degli stati possibili, cioè lo spazio delle fasi, è possibile applicarla di nuovo allo stato x_{t+1} , ottenendo x_{t+2} , e così via fino a ottenere, in modo iterato e ricorsivo, l'intera successione degli stati, cioè la traiettoria. Infatti, i sistemi dinamici discreti sono definiti da un'iterazione del tipo:

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (1.0.1)$$

di una funzione $f : S \rightarrow S$, con $S \subset \mathbb{R}^n$, che può essere vista come un'equazione alle differenze:

$$x_{t+1} - x_t = f(x_t) - x_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Facendo riferimento all'evoluzione temporale del sistema, è utile definire il concetto di orbita:

Definizione 1.0.2. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Si definisce orbita di x_0 l'insieme dei punti

$$O(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots\}$$

Le orbite di un sistema discreto sono quindi una successione di stati $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$. Di particolare interesse sono le orbite che consistono di un unico punto. Tali punti sono detti *punti fissi*, o anche *punti di equilibrio* del sistema.

Definizione 1.0.3. Un punto x^* si dice punto fisso della mappa f o punto di equilibrio della Eq.1.0.1 se $f(x^*) = x^*$.

Osserviamo che l'Eq.1.0.1 suggerisce che per trovare tutti i punti fissi di una mappa bisogna risolvere l'equazione $f(x) = x$. Graficamente, questo vincolo si traduce nel trovare le ascisse x per cui il grafico della curva $y = f(x)$ interseca la prima bisettrice (Fig.1.1).

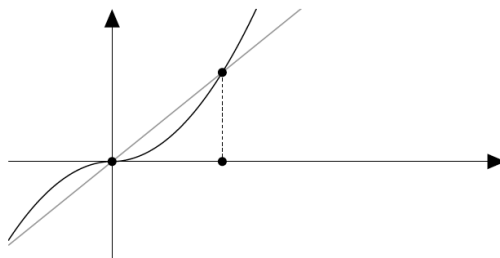


Figura 1.1: Mappa con 2 punti fissi

Inoltre, se x^* è un punto fisso, possiamo scrivere la seguente catena di uguaglianze, utilizzando lo sviluppo di Taylor della f :

$$\begin{aligned} x_{t+1} = f(x_t) &= f(x^*) + J_f(x^*)(x_t - x^*) + O((x_t - x^*)^2) = \\ &= x^* + J_f(x^*)(x_t - x^*) + O((x_t - x^*)^2) \end{aligned}$$

da cui, ponendo $d_t = x_t - x^*$, abbiamo:

$$d_{t+1} = J_f(x^*)d_t$$

L'equazione alle differenze così ottenuta è lineare, e studiando gli autovalori λ_i , $i = 1, \dots, n$, della jacobiana J possiamo determinare la stabilità dei punti di equilibrio, attraverso il seguente teorema:

Teorema 1.0.4. *Un sistema lineare a tempo discreto è:*

- (i) asintoticamente stabile se e solo se $|\lambda_i| < 1, \forall i$;
- (ii) semplicemente stabile se e solo se $|\lambda_i| \leq 1, \forall i$ (i.e. se $\exists k$ tale che $|\lambda_k| = 1$);
- (iii) instabile se e solo se $\exists k$ tale che $|\lambda_k| > 1$.

Un'altra nozione di estrema importanza è quella di *periodicità*. Infatti, numerosi fenomeni fisici hanno comportamenti ricorrenti, che si ripetono nel tempo, producendo cicli periodici (intendendo per ciclo l'orbita di punti periodici).

Definizione 1.0.5. *Un punto x^* si dice punto periodico della mappa f (o k -periodico per f) se $f^k(x) = x$ per qualche intero positivo k . Se inoltre $f^r(x) \neq x \forall 0 < r < k$, allora k è detto periodo minimo (o più semplicemente periodo) di x .*

Osservazione. *Se x è k -periodico per f se x è un punto fisso della mappa f^k .*

Definizione 1.0.6. *Siano $J_0, J_1, \dots, J_{n-1}, J_n$ sottointervalli di I intervallo chiuso e limitato di \mathbb{R} , con $J_n = J_0$, tali che $J_i \xrightarrow{f} J_{i+1}$, per $i = 0, 1, \dots, n-1$. Allora diremo che*

$$J_0 \rightarrow J_1 \rightarrow \dots \rightarrow J_{n-1} \rightarrow J_0$$

è un ciclo (o ciclo- n) di intervalli di lunghezza n .

Capitolo 2

Oligopolio di Cournot

2.1 Il modello di Cournot

Intorno agli anni '50 del secolo scorso, vari studi sulla dinamica dell'equilibrio di Cournot rivelarono che questo può essere instabile. Ma che cos'è un modello di Cournot?

Innanzitutto, tra le forme di mercato, quelle più studiate sono il monopolio, l'oligopolio e la concorrenza perfetta:

- Monopolio: è caratterizzato dall'accentramento dell'offerta nelle mani di un solo venditore;
- Oligopolio: è caratterizzato dalla presenza di un numero limitato di venditori di grosse dimensioni, generalmente in competizione tra loro;
- Concorrenza perfetta: è caratterizzata dalla presenza di un grande numero di venditori, di dimensioni trascurabili rispetto al mercato.

In presenza di una domanda espressa da molti agenti di dimensioni trascurabili rispetto al mercato, nei primi due casi ogni singolo venditore può influenzare il prezzo di equilibrio variando la propria offerta, mentre nel terzo caso nessun agente può cambiare tale prezzo. In tutti e tre i casi, comunque, si suppone che il mercato sia in equilibrio, cioè che al prezzo che vi si

determina tutte le quantità offerte trovino un acquirente e che tutte le domande siano soddisfatte. Monopolio e concorrenza perfetta rappresentano però situazioni estreme, che sono difficilmente riscontrabili nei mercati reali, e quindi sono modelli solo teorici.

Il modello di oligopolio che utilizzeremo è quello proposto dal matematico ed economista francese Antoine Augustin Cournot (1801-1877), che studiò la competizione in un duopolio di acque minerali.

Cournot illustrò il problema come segue:

Consideriamo due imprese che vendono un prodotto omogeneo, in quantità q_1 e q_2 . La vendita totale sarà $q = q_1 + q_2$. Consideriamo poi una *funzione di domanda* $q = D(p)$, con inversa $p = f(q) = D'(q)$; i *profitti* delle due imprese sono:

$$\Pi_1 = f(q_1 + q_2)q_1$$

$$\Pi_2 = f(q_1 + q_2)q_2$$

Se ci sono costi di produzione, detti $g_1(q_1)$ e $g_2(q_2)$, dobbiamo sottrarre questi costi dalle rispettive funzioni dei profitti, e questo produce piccole variazioni nell'analisi del modello. Cournot osservò questo fatto nel duopolio di acque minerali che stava studiando, e consigliò di produrre l'acqua minerale direttamente dalle fonti, trascurando i costi di imbottigliamento.

Le due imprese puntano a massimizzare ciascuna il proprio profitto: la prima vuole che $\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = 0$, e analogamente la seconda vuole che $\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = 0$. Otteniamo così le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} f(q_1 + q_2) + \frac{\partial f}{\partial q_1} q_1 &= 0 \\ f(q_1 + q_2) + \frac{\partial f}{\partial q_2} q_2 &= 0 \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Queste sono due equazioni implicite nelle variabili q_1 e q_2 , le quantità dell'offerta. Supponendo di risolverle esplicitamente, la prima per q_1 e la seconda per q_2 , otteniamo qualcosa del tipo:

$$\begin{aligned} q_1 &= \Phi_1(q_2) \\ q_2 &= \Phi_2(q_1) \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Ovviamente, dobbiamo essere sicuri che le soluzioni di 2.1.1 siano massimi e non minimi, cioè devono essere soddisfatte le condizioni di secondo ordine:

$$2 \frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial q_1^2} = 0$$

$$2 \frac{\partial f}{\partial q_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial q_2^2} = 0$$

Le equazioni in 2.1.2 sono dette *funzioni di reazione*, e possono essere viste in due modi differenti. Possiamo vederle come un sistema simultaneo, e considerare il punto che soddisfa 2.1.2, (\bar{q}_1, \bar{q}_2) , cioè il punto di intersezione tra le due curve date dalle equazioni in 2.1.2, come il *punto di equilibrio di Cournot*. Sorgono però alcune domande su questo punto di equilibrio:

- (i) esiste sempre?
- (ii) è unico?

Come osserveremo dopo, Palander (1936, 1939) e Wald (1936) riscontrarono situazioni in cui o l'equilibrio non esiste, o in cui sono presenti diversi equilibri coesistenti. Un secondo modo di vedere le funzioni di reazione in 2.1.2 è considerarle all'interno di un processo dinamico, cioè:

$$q_1' = \Phi_1(q_2)$$

$$q_2' = \Phi_2(q_1)$$

dove ' indica l'avanzamento nell'unità di tempo, dal periodo t al periodo $t + 1$. Ci sono state molte discussioni riguardo al comportamento di queste due mappe, se agiscono in maniera simultanea o se in maniera alternata. Se però consideriamo le mappe composte, in un tempo che va dal periodo t al periodo $t + 2$, otteniamo:

$$q_1'' = \Phi_1 \circ \Phi_2(q_1)$$

$$q_2'' = \Phi_2 \circ \Phi_1(q_2)$$

Vediamo che sono due mappe indipendenti, che producono la stessa successione di eventi, indipendentemente dal fatto che i competitori attuino simultaneamente o a turni. In questo contesto delle funzioni di reazione viste come

un sistema dinamico, sorge una nuova domanda:

(iii) l'equilibrio di Cournot è stabile?

A questa domanda risponderemo nel capitolo successivo.

Cournot, in realtà, considerò le funzioni di reazione in entrambi i modi, in termini di equilibrio simultaneo e in termini di sistema dinamico ricorsivo, lasciando comunque molti quesiti in sospeso. Per esempio, riguardo le variabili di ottimizzazione, l'omogeneità del prodotto, la strategia impiegata dai competitori. Per questo, uno dei più grandi meriti del lavoro di Cournot è proprio quello di aver posto le basi per tutti gli studi sviluppati negli ultimi 150 anni.

2.2 Equilibri e stabilità quando il numero dei competitori aumenta

Vediamo ora come il numero di competitori incide sullo stato di equilibrio. Theocharis, nel 1959, osservò che un sistema con n competitori, che producono sotto costi marginali costanti e che fronteggiano una funzione di domanda lineare, è neutralmente stabile solo per $n = 3$ competitori ed è instabile per $n \geq 4$. Analizziamo ora il modello proposto da Theocharis.

Supponiamo di avere una funzione di domanda lineare. La sua inversa ci dà il prezzo del mercato:

$$p = a - b \sum_{i=1}^n q_i$$

dove q_i , con $i = 1, \dots, n$, sono le offerte degli n competitori. Ovviamente, $\sum_{i=1}^n q_i$ deve essere minore o uguale al rapporto $\frac{a}{b}$ (i prezzi devono essere positivi). Definiamo l'offerta totale come:

$$Q = \sum_{i=1}^n q_i$$

2.2 Equilibri e stabilità quando il numero dei competitori aumenta 9

e l'offerta residua (che non dipende la competitore i -esimo):

$$Q_i = Q - q_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Il ricavo totale per il competitore i -esimo è quindi:

$$R_i = (a - b(Q_i + q_i)), \quad i = 1, \dots, n$$

da cui il ricavo marginale:

$$R'_i = \frac{\partial R_i}{\partial q_i} = a - bQ_i - 2bq_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.2.1)$$

Supponendo nulli i costi fissi e costanti i costi marginali, i costi totali sono:

$$C_i = c_i q_i, \quad i = 1, \dots, n$$

e i costi marginali sono:

$$C'_i = \frac{\partial C_i}{\partial q_i} = c_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.2.2)$$

I profitti sono dati da:

$$\Pi_i = R_i - C_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

e quindi, per avere il profitto massimo, dobbiamo risolvere l'equazione:

$$\Pi'_i = \frac{\partial \Pi_i}{\partial q_i} = 0, \quad i.e. \quad C'_i = R'_i$$

ottenendo:

$$q_i = \frac{1}{2} \left(\frac{a - c_i}{b} - Q_i \right), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.2.3)$$

che può anche essere considerato come un sistema simultaneo di equazioni.

Definendo poi il costo marginale medio come:

$$c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i,$$

allora il punto di Cournot ha coordinate:

$$\bar{q}_i = \frac{a + nc - (n+1)c_i}{(n+1)b}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Nel punto di Cournot, l'output totale è:

$$\bar{Q} = \sum_{i=1}^n \bar{q}_i = \frac{n}{n+1} \frac{a-c}{b}$$

e il prezzo è:

$$\bar{p} = a - b\bar{Q} = \frac{1}{n+1}a + \frac{n}{n+1}c$$

che è sempre positivo.

Abbiamo quindi osservato l'esistenza di un punto di equilibrio, il punto di Cournot. Ora proviamo a trattare 2.2.3 non come qualcosa di statico, fisso nel tempo, ma come un sistema dinamico, che cambia nel tempo, e studiamo come questo punto di equilibrio di Cournot cambia con il variare del tempo (che, ricordiamo, consideriamo come una quantità discreta).

Supponiamo allora che ogni impresa consideri che tutti gli altri competitori mantengano l'offerta del periodo precedente. La *best reply* di ogni impresa è:

$$q'_i = q_i(t+1) = \frac{1}{2} \left(\frac{a-c_i}{b} - Q_i(t) \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.2.4)$$

Questa funzione viene detta *funzione di reazione*, e in questo caso è lineare, dipendendo da $Q_i(t)$. Le derivate di 2.2.4:

$$\frac{\partial q'_i}{\partial Q_i} = -\frac{1}{2}$$

sono tutte costanti, indipendentemente dalle coordinate dei punti di equilibrio di Cournot. Costruendo la jacobiana del sistema delle n funzioni di reazione (i cui autovalori determinano la stabilità del punto di Cournot), otteniamo la matrice $n \times n$:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial q'_1}{\partial Q_1} & \frac{\partial q'_2}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial q'_n}{\partial Q_1} \\ \frac{\partial q'_1}{\partial Q_2} & \frac{\partial q'_2}{\partial Q_2} & \cdots & \frac{\partial q'_n}{\partial Q_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q'_1}{\partial Q_n} & \frac{\partial q'_2}{\partial Q_n} & \cdots & \frac{\partial q'_n}{\partial Q_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \cdots & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & -\frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

che avrà equazione caratteristica:

$$\det(J - \lambda I) = \left(\lambda - \frac{1}{2} \right)^{n-1} \left(\lambda + \frac{n-1}{2} \right) = 0.$$

2.2 Equilibri e stabilità quando il numero dei competitori aumenta 11

Ci sono $n - 1$ autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} = \frac{1}{2}$ e un solo autovalore $\lambda_n = -\frac{n-1}{2}$, ed è proprio questo autovalore che dà problemi nella stabilità dell'equilibrio. Infatti, gli autovalori corrispondono a una diagonalizzazione del sistema, i primi $n - 1$ associati a differenze nelle variabili di base, l'ultimo associato alla somma di tutte le variabili di base. Theocharis concluse che:

- in un duopolio ($n = 2$) ci sono due autovalori, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, entrambi minori di 1 in valore assoluto, e quindi l'equilibrio di Cournot è stabile;
- in un triopolio ($n = 3$), gli autovalori sono $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ e $\lambda_3 = -1$, e quindi l'equilibrio è neutralmente stabile con una tendenza a oscillazioni infinite ma stazionarie;
- in un oligopolio con $n > 3$, $|\lambda_n = \frac{n-1}{2}| > 1$, e quindi l'equilibrio è instabile.

Venti anni prima di Theocharis, Palander scriveva: *"as a condition for an equilibrium with a certain number of competitors to be stable to exogenous disturbances, one can stipulate that the derivative of the reaction function f must be such that the condition $|(n - 1)f'| < 1$ holds. If this criterion is applied to, for instance, the case with a linear demand function and constant marginal costs, the equilibria become unstable as soon as the number of competitors exceeds three. Not even in the case of three competitors will equilibrium be restored, rather there remains an endless oscillation"*.

Palander considera nelle sue ricerche non solo funzioni di domanda lineari (e quindi anche quelle di reazione), ma anche le stabilità dell'equilibrio di Cournot in generale. Il suo interesse principale è comunque il caso proposto da Robinson (1933) per un monopolio in cui la funzione di domanda è *kinked* (ad angolo), a causa della differente elasticità della domanda¹ dei diversi gruppi di consumatori.

¹ L'elasticità indica l'attesa variazione percentuale della domanda di un dato prodotto (quantità venduta Q) rispetto a una variazione percentuale del prezzo dello stesso prodotto: $e_p = \frac{\frac{\partial Q}{Q}}{\frac{\partial p}{p}}$

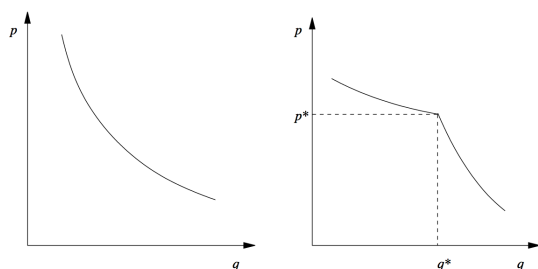


Figura 2.1: Curva di domanda tradizionale e curva di domanda ad angolo

Come osservò Robinson, un monopolio che fronteggia una curva di domanda di questo tipo ha diversi profitti massimi locali; è necessario quindi trovare il massimo globale. Palander approfondisce questo studio applicandolo a un duopolio, sia nel caso di due imprese identiche, sia nel caso di una leggera asimmetria tra esse. Nota che, nel caso di simmetria, le diverse offerte del competitore possono indurre l'impresa a scegliere o uno o l'altro dei massimi locali. Le funzioni di reazione sono quindi composte da segmenti disgiunti, che possono avere più intersezioni (2, in questo caso, che sono i punti di Cournot). Palander scopre così la multistabilità e ne studia i bacini di attrazione. Trova anche le condizioni iniziali tali per cui il sistema tende a oscillare con un periodo 2. Nel caso di asimmetria, invece, osserva che le funzioni di reazione non si intersecano, e quindi non ci sono punti di equilibrio ma esistono comunque cicli-3 attrattivi (a causa degli strumenti di calcolo di quei tempi non osserva però la coesistenza di un ciclo-6).

Più tardi, le stesse proprietà delle funzioni lineari vengono osservate (Ahmed e Agiza, 1998) per funzioni non lineari (isoelastiche) e con costi marginali costanti (Puu, 1991). Nel modello originariamente proposto da Puu, nell'ipotesi del duopolio e poi del triopolio, l'interesse è quello di studiarne le complesse dinamiche globali e le biforcazioni che si vengono a creare. In questo caso, le derivate delle funzioni di reazione non sono più costanti, ma variano con le coordinate, cioè con la posizione del punto di Cournot. Ciononostante, è facile vedere che, se supponiamo che le imprese siano identiche, il problema delle stabilità locali diventa relativamente semplice, quasi quanto

2.2 Equilibri e stabilità quando il numero dei competitori aumenta 13

il caso della funzione di domanda lineare.

Nel capitolo seguente studieremo le dinamiche di un duopolio caratterizzato da un un esempio di funzione di domanda non lineare, quella isoelastica.

Capitolo 3

Oligopolio di Cournot con limiti di capacità produttiva

In questo capitolo vogliamo vedere cosa accade nel caso in cui gli oligopolisti abbiano ciascuno molteplici impianti di produzione. Supponiamo per semplicità che il nostro oligopolio di Cournot sia formato da solamente due competitori (duopolio) e che ogni impresa abbia due impianti di produzione. Inoltre, ipotizziamo che ogni impresa possa operare o con un solo impianto alla volta o con entrambi (dividendo dunque la produzione secondo il *principle of equal marginal costs*). Ogni impresa avrà quindi tre opzioni di produzione, e di conseguenza tre opzioni di costi; normalmente, la scelta di operare con una delle tre opzioni dipende dal livello dell'output: ad un piccolo output si fa corrispondere una piccola scala di produzione, e con l'aumentare dell'output si sceglie l'impianto adatto a una scala di produzione maggiore. Il caso adatto a produrre la scala più grande sarà quindi quello in cui vengano utilizzati entrambi gli impianti.

3.1 Il modello

Formalizziamo il nostro modello. Innanzitutto, consideriamo la *short run cost function* (la funzione dei costi in un breve periodo), in cui il primo addendo della funzione rappresenta i costi fissi, che sono costanti, mentre il secondo addendo rappresenta i costi variabili:

$$C_i(q) = \begin{cases} 0, & q \leq 0 \\ as_i + c \frac{k_i q}{k_i - q}, & q > 0 \end{cases} \quad (3.1.1)$$

dove a, c, k_i, s_i costanti positive, $i \in \{1, 2\}$. In particolare:

- i k_i sono i limiti di capacità produttiva;
- gli s_i rappresentano i *fitting up costs*, cioè i costi di installazione, dovuti alla messa in moto di ogni impianto (per esempio, il costo dell'elettricità), e quindi possono essere comune a tutti gli impianti, ma con costi specifici per ogni impianto, che aumentano con le sue dimensioni: se i limiti di capacità produttiva sono tali che $k_1 < k_2$, allora è ragionevole supporre che i costi di installazione sono tali che $s_1 < s_2$;
- a è un parametro positivo che varia in modo tale che i *fitting up costs* variano contemporaneamente in maniera proporzionale;
- c è un altro parametro positivo che misura "il peso" dei costi fissi all'interno dei costi totali.

Possiamo vedere che, se la quantità prodotta $q \rightarrow k_i$, allora il costo variabile diventa infinito.

Supponiamo poi che le due imprese siano caratterizzate da una razionalità limitata, operando in modo da massimizzare solamente il profitto del

primo periodo che segue le loro scelte, e adottando aspettative adattive¹, cioè basando le loro scelte future su ciò che è avvenuto nel passato.

Supponiamo infine che entrambe le imprese abbiano le stesse tre opzioni di produzione, e quindi mettendoci nell'ipotesi di simmetria, otteniamo un modello di interazione bidimensionale con salti di discontinuità in corrispondenza dei punti in cui le imprese decidono di cambiare impianto di produzione, a causa dei limiti di capacità produttiva di ciascun impianto.

Ora, siano x e y le quantità prodotte rispettivamente dalla prima e dalla seconda impresa. Consideriamo x , e supponiamo che i suoi due impianti, che producono rispettivamente x_1 e x_2 , abbiano capacità limitate k_1 e k_2 , $k_2 > k_1$. Nel caso in cui i due impianti operino insieme contemporaneamente avremo che la quantità prodotta dovrà essere divisa secondo *il principio di uguaglianza dei costi marginali*:

$$x = x_1 + x_2.$$

Il costo totale della produzione sarà quindi, utilizzando la 3.1.1:

$$\begin{aligned} C(x_1, x_2) &= C_1(x_1) + C_2(x_2) = \\ &= a(s_1 + s_2) + c \left(\frac{k_1 x_1}{k_1 - x_1} + \frac{k_2 x_2}{k_2 - x_2} \right), \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

e se lo minimizziamo rispetto a x_1 e x_2 , con il vincolo $x = x_1 + x_2$, utilizzando i moltiplicatori di Lagrange, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} c \frac{k_1^2}{(k_1 - x_1)^2} - \lambda x_1 = 0 \\ c \frac{k_2^2}{(k_2 - x_2)^2} - \lambda x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = x \end{cases}$$

che ci porta a:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} x \\ x_2 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} x \end{cases} \quad (3.1.3)$$

¹Un semplice modello di aspettative adattive è descritto dalla seguente equazione: $p_{t+1}^e = p_t^e + \lambda(p_t - p_t^e)$, dove p_t^e e p_t sono rispettivamente il prezzo atteso e il prezzo effettivo al periodo t , $\lambda \in (0, 1]$ è il fattore di correzione, e p_{t+1}^e è il prezzo atteso al periodo successivo $t + 1$.

Sostituendo in 3.1.2, arriviamo a una nuova funzione, che chiamiamo $C_3(x)$:

$$C_3(x) := a(s_1 + s_2) + c \frac{(k_1 + k_2)x}{(k_1 + k_2) - x} = as_3 + c \frac{k_3 x}{k_3 - x},$$

dove abbiamo definito:

$$k_3 := (k_1 + k_2) > k_2 > k_1$$

$$s_3 := s_1 + s_2.$$

Quindi, le opzioni dei costi che ogni impresa ha sono definite da:

$$C_i(x) = as_i + c \frac{k_i x}{k_i - x}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.1.4)$$

Analizzando questa funzione, possiamo osservare che un alto limite di capacità produttiva k_i implica un basso costo variabile e un alto costo di installazione, e che quindi può essere utile nel caso in cui si voglia produrre un grande output. Inoltre, certe quantità di output possono essere prodotte solamente usando le tecnologie con il più alto limite di capacità produttiva. Esiste quindi una stretta relazione tra la scelta di operare con un certo impianto e il costo totale.

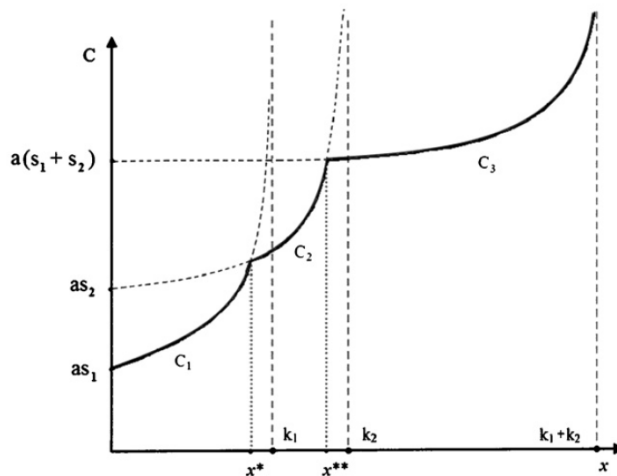


Figura 3.1: Funzione totale dei costi

Vogliamo trovare ora la quantità di output x^* tale per cui i costi che derivano dall'utilizzo del primo impianto diventano maggiori dei costi che

derivano dall'utilizzo del secondo impianto, cioè l'output x^* tale per cui $C_1(x^*) = C_2(x^*)$, i.e.:

$$as_1 + c \frac{k_1 x^*}{k_1 - x^*} = as_2 + c \frac{k_2 x^*}{k_2 - x^*}.$$

Risolvendo questa equazione, otteniamo:

$$x^* = \frac{a(k_1 + k_2) - \sqrt{a^2(k_1 + k_2)^2 - 4ak_1k_2 \left(a - c \frac{k_1 - k_2}{s_1 - s_2}\right)}}{2 \left(a - c \frac{k_1 - k_2}{s_1 - s_2}\right)}.$$

In modo analogo, considerando il secondo impianto usato singolarmente e i due impianti usati contemporaneamente, e denotando con x^{**} l'output tale per cui $C_2(x^{**}) = C_3(x^{**})$, otteniamo:

$$x^{**} = \frac{a(k_2 + k_3) - \sqrt{a^2(k_2 + k_3)^2 - 4ak_2k_3 \left(a - c \frac{k_2 - k_3}{s_2 - s_3}\right)}}{2 \left(a - c \frac{k_2 - k_3}{s_2 - s_3}\right)}.$$

Possiamo definire così gli intervalli delimitati dalle diverse quantità di produzione:

$$\begin{aligned} I_1 &:= (0, x^*), \\ I_2 &:= (x^*, x^{**}), \\ I_3 &:= (x^{**}, k_3), \end{aligned}$$

e se la scelta migliore da parte di un'impresa è quella di operare producendo un quantità che appartiene a un certo intervallo $I_{\bar{i}}$, con $\bar{i} \in \{1, 2, 3\}$, allora il costo relativo a questa scelta sarà $C_{\bar{i}}(x)$. In questo modo, la funzione generale dei costi che caratterizza il nostro modello diventa:

$$C(x) = \begin{cases} C_1(x), & x \in I_1 \\ C_2(x), & x \in I_2 \\ C_3(x), & x \in I_3 \end{cases} = \left\{ C_i(x), \quad x \in I_i, \quad i \in \{1, 2, 3\} \right. \quad (3.1.5)$$

con $C_i(x)$ definita in 3.1.4. Ogni funzione dei costi darà poi origine a una funzione dei costi marginali:

$$MC_i(x) = \frac{dC_i(x)}{dx} = c \frac{k_i^2}{(k_i - x)^2}, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

La funzione generale dei costi marginali sarà quindi:

$$MC(x) = \begin{cases} MC_i(x), & x \in I_i, i \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

In corrispondenza dei due punti x^* e x^{**} , che sono punti in cui la funzione dei costi $C(x)$ ha diverse pendenze (e quindi non è derivabile), avremo quindi delle discontinuità per la funzione dei costi marginali $MC(x)$, che infatti è la derivata prima della funzione dei costi.

Supponiamo infine che la funzione di domanda da parte del mercato sia isoelastica, cioè del tipo $f(x) = kx^r$, con $k, r \in \mathbb{R}, r < 0$:

$$D = \frac{1}{x + q_r} = \frac{1}{x + y} = D(x, y) \quad (3.1.6)$$

dove q_r denota l'offerta residua del mercato, che non dipende dall'impresa stessa e che nel caso del duopolio coincide esattamente con la quantità prodotta dall'altro duopolista. Il ricavo totale sarà, per l'impresa che produce x :

$$R(x, y) = D(x, y)x = \frac{x}{x + y},$$

con ricavo marginale:

$$MR(x, y) = \frac{\partial R(x, y)}{\partial x} = \frac{x + y - x}{(x + y)^2} = \frac{y}{(x + y)^2},$$

che è una funzione decrescente rispetto alla x , con $\lim_{x \rightarrow +\infty} MR(x, y) = 0$.

Possiamo vedere alcuni esempi della funzione dei costi marginali MC e della funzione del ricavo marginale MR nei seguenti grafici, dove abbiamo tre diversi valori di y , $y_a > y_b > y_c$:

Ogni impresa, logicamente, ha lo scopo di ricavare il massimo profitto. In generale, il profitto è definito da:

$$\Pi_i(x) = R(x, y) - C_i(x) = \frac{x}{x + y} - as_i - c \frac{k_i x}{k_i - x}, \quad i = 1, 2, 3,$$

con y fissato. Sia y^e la quantità di output che l'impresa con output x si aspetta dal competitore (ricordiamo che un'impresa non conosce la quantità

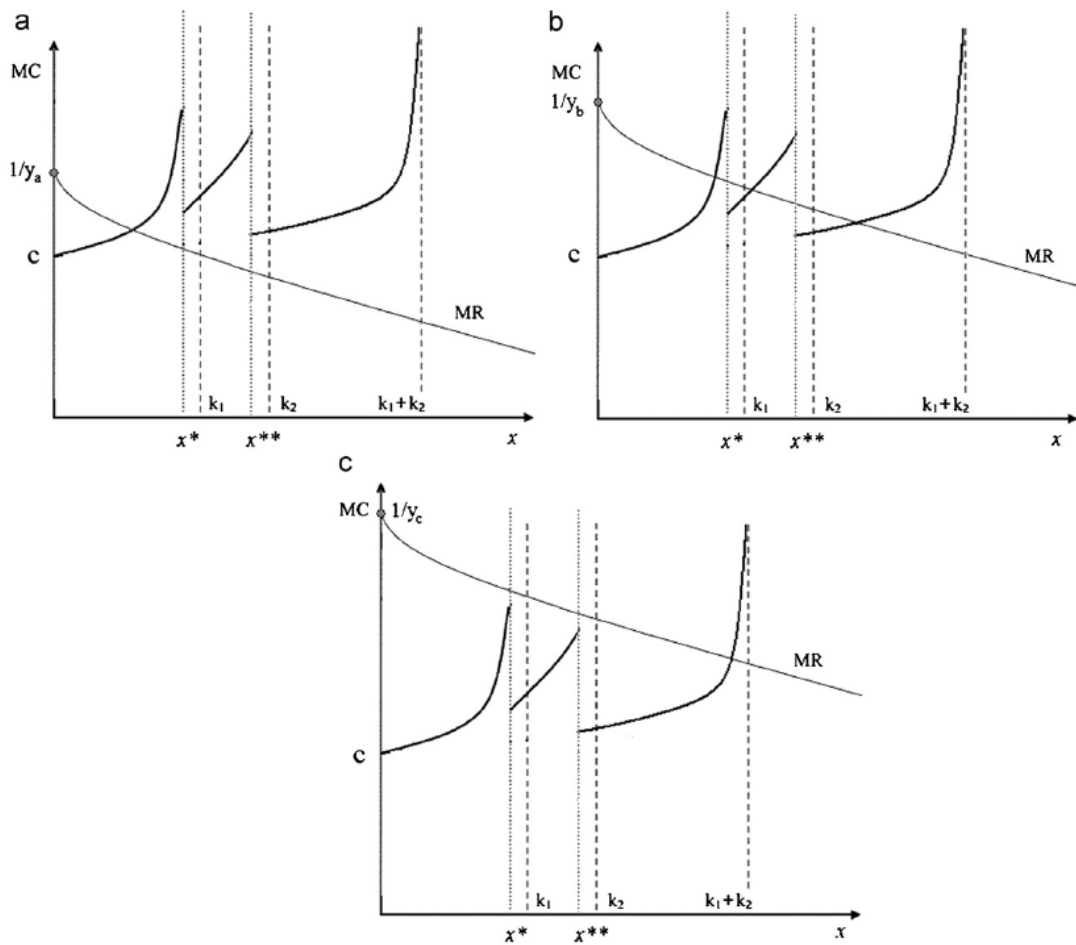


Figura 3.2: La funzione dei costi marginali MC è formata da tre rami, dovuti alle diverse pendenze della funzione dei costi nella Figura 3.1. La funzione del ricavo marginale MR è invece continua e strettamente decrescente, parte dal valore $1/y$ (in $x=0$) e può avere da una (in a e c) a tre (in c) intersezioni con MC.

prodotta dall'altra, ma solo può farne una stima). Allora, il profitto della prima azienda è dato dal massimo dei profitti che l'azienda può ottenere usando ciascun impianto di produzione:

$$\Pi^e(x) = \max_{i \in \{1,2,3\}} \{\Pi_i^e(x)\} \quad (3.1.7)$$

dove $\Pi_i^e(x) = R(x, y^e) - C_i(x)$, con $i = 1, 2, 3$. Queste funzioni di profitto atteso sono funzioni unimodali², con un solo punto di massimo (locale). In-

²Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice unimodale se $m \in \mathbb{R}$ tale che f è crescente per $x \leq m$ e decrescente per $x \geq m$. m è quindi punto di massimo per f .

fatti, utilizzando il criterio della derivata prima, possiamo ricavare i punti di massimo o di minimo locali di ogni profitto eguagliando a zero la sua derivata, i.e. eguagliando la funzione del ricavo marginale $MR(x, y^e)$, che è la derivata rispetto a x di $R(x, y^e)$ (ricordiamo che y è fissato), alla funzione dei costi marginali $MC(x)$, che è la derivata di $C(x)$:

$$\frac{y}{(x+y)^2} = c \frac{k_i^2}{(k_i-x)^2}$$

Risolvendo questa equazione, otteniamo due valori per la x :

$$x_a = k_i \frac{\sqrt{\frac{y}{c}} + y}{\sqrt{\frac{y}{c}} - k_i},$$

$$x_b = k_i \frac{\sqrt{\frac{y}{c}} - y}{\sqrt{\frac{y}{c}} + k_i}$$

e, dato che $x \in I_1 \cup I_2 \cup I_3$, i.e. $0 < x < k_3$, abbiamo che la soluzione accettabile è la seconda:

$$x_i^*(y^e) = k_i \frac{\sqrt{\frac{y^e}{c}} - y^e}{\sqrt{\frac{y^e}{c}} + k_i} \quad (3.1.8)$$

con $0 < y^e < 1/c$. Siccome $k_1 < k_2 < k_3$ e $x^* < x^{**}$, abbiamo che $x_1^*(y^e) < x_2^*(y^e) < x_3^*(y^e)$. Inoltre, la funzione definita in 3.1.7 è continua, ma non è derivabile ovunque, perché i punti in cui la funzione dei costi non è liscia (i.e. non è derivabile infinite volte) sono anche i punti in cui la funzione del massimo profitto non è liscia. Inoltre, un estremo locale non si potrà mai trovare nei punti in cui la funzione non è liscia, perché altrimenti si avrebbero uguali limiti di capacità k_i per due impianti diversi, cosa che non è possibile secondo il nostro modello. Gli estremi locali si troveranno dunque nei punti in cui la funzione del massimo profitto è liscia e, siccome dipendono dal valore di y^e , possono essere o uno o due o tre.

Per avere la *best reply*, la risposta ottima, cioè quella strategia che produce l'esito più favorevole, dobbiamo confrontare i profitti previsti nei tre casi:

$$\begin{aligned} \Pi_{x,i}^e(y^e) &= R(x_i^*(y^e), y^e) - C_i(x_i^*(y^e)) = \\ &= \frac{x_i^*(y^e)}{x_i^*(y^e) + y^e} - as_i - c \frac{k_i x_i^*(y^e)}{k_i - x_i^*(y^e)}, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

e scegliere il valore massimo, che corrisponde a un certo impianto i , con $i \in \{1, 2, 3\}$. Come già detto prima, siccome dipendono dai parametri del modello e dal valore previsto y^e , i punti di massimo locale possono essere uno o due o tre. Graficamente, questi punti sono dati dalle intersezioni tra la funzione dei costi marginali MC (che è discontinua in corrispondenza dei punti x^* e x^{**}) e il ricavo marginale MR . Quest'ultimo è in funzione di x e y , le quantità prodotte, e quindi il numero delle intersezioni tra MC e MR cambia in modo dinamico. Per capirlo, analizziamo la 3.2: in b, vediamo che ci sono tre intersezioni tra le due curve; se proviamo a diminuire y , cioè se il secondo competitore diminuisce la sua quantità di produzione, la curva MR trasla verso l'alto (c), mentre se proviamo ad aumentare la quantità prodotta dal secondo competitore, vediamo che MR trasla verso il basso (a). Se però y aumenta troppo, cioè $1/y$ si avvicina a c , il profitto diventa negativo e la produzione si ferma.

Riassumendo, assegnato un valore a y e denotato Π_x^e il massimo profitto atteso della prima impresa, cioè

$$\Pi_x^e = \max_{i \in \{1, 2, 3\}} \{\Pi_{x,i}^e(y)\},$$

abbiamo che:

$$x' = \begin{cases} x_i^*(y), & \text{dove } i \text{ dà } \Pi_x^e, & \text{se } \Pi_x^e > 0, \\ 0, & & \text{se } \Pi_x^e \leq 0 \end{cases} \quad (3.1.10)$$

dove $'$ indica l'operatore all'unità di tempo successiva. Possiamo poi fare lo stesso ragionamento per il secondo competitore e, avendo supposto inizialmente che i due competitori hanno lo stesso numero di impianti di produzione e gli stessi limiti di capacità produttiva (caso simmetrico), otteniamo che la *best reply* per il secondo competitore è:

$$y' = y_i^*(x^e)$$

che è ottenuta da 3.1.8 cambiando la x con la y (ricordiamo che $k_{x,i} = k_{y,i} = k_i$), calcolando i profitti attesi $\Pi_{y,i}^e$ nei tre casi come in 3.1.9 e trovandone il

massimo:

$$\Pi_y^e = \max_{i \in \{1,2,3\}} \{\Pi_{y,i}^e(x)\}.$$

In questo modo,

$$y' = \begin{cases} y_i^*(x), & \text{dove } i \text{ dà } \Pi_y^e, & \text{se } \Pi_y^e > 0, \\ 0, & & \text{se } \Pi_y^e \leq 0 \end{cases} \quad (3.1.11)$$

Osservazione. Non è obbligatorio che i due competitori abbiano lo stesso numero di impianti di produzione. Noi supponiamo che sia così in modo da semplificarne l'analisi.

3.2 Multistabilità e biforcazioni

Abbiamo visto che nel nostro caso di duopolio simmetrico le funzioni di reazione sono date da 3.1.10 e 3.1.11 e, come già detto, queste funzioni possono avere una o più discontinuità. Infatti, una discontinuità si verifica quando un impianto di produzione diventa più (rispettivamente meno) vantaggioso rispetto al precedente, quando il competitore aumenta (rispettivamente diminuisce) il suo output. In particolare, in corrispondenza di una discontinuità abbiamo due diversi estremi locali nella funzione dei profitti, che hanno lo stesso valore del profitto ma cambiano la *best choice* corrispondente (ce ne sarà una a destra e una a sinistra del punto di discontinuità). Nella Figura 3.3 possiamo vedere alcuni esempi di funzioni di reazione:

- in (a) abbiamo il caso particolare in cui i duopolisti scelgono di operare con o solo il primo impianto o solo il secondo o solo entrambi, non cambiando mai la scelta; la curva finale della funzione di reazione è quindi continua;
- in (b) e (c), i duopolisti scelgono di operare con più impianti di produzione (due in (b) e tre in (c)); la curva finale della funzione di reazione è quindi discontinua, formata da diversi rami.

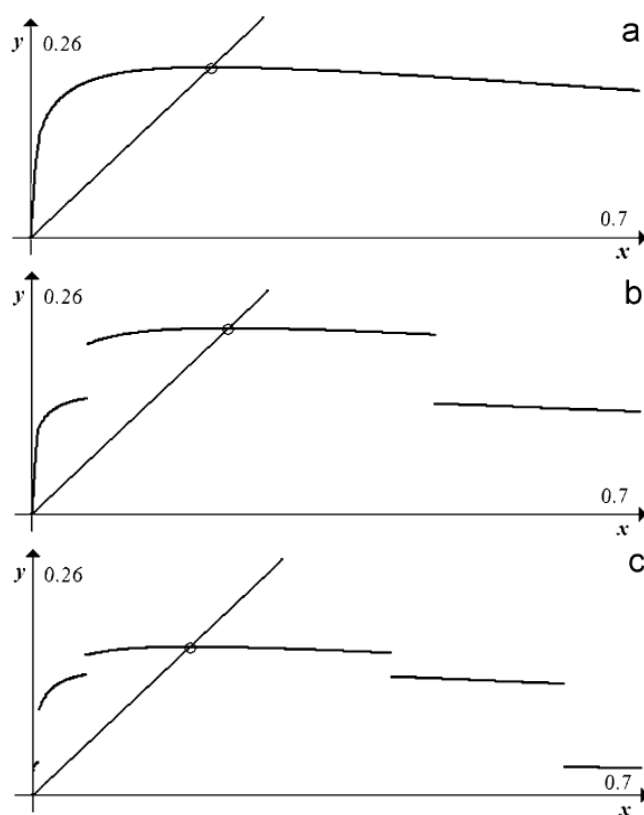


Figura 3.3: Funzioni di reazione. In (a) $k_1 = 0.397, k_2 = 0.65, a = 0.296, c = 0.27, s_1 = 0.37, s_2 = 0.605$. In (b) $k_1 = 0.2186, k_2 = 0.386, a = 0.291, c = 0.185, s_1 = 0.3, s_2 = 0.53$. In (c) $k_1 = 0.0547, k_2 = 0.232, a = 0.4376, c = 0.185, s_1 = 0.06, s_2 = 0.2545$

Non è possibile, però, trovare analiticamente dove e quando si verificano queste discontinuità nella curva di reazione, dato che non è possibile ottenere una equazione esplicita per il profitto massimo. Si può comunque dimostrare che diverse proprietà del caso continuo vengono mantenute nel caso discontinuo (Bischi, 2000).

Ad ogni modo, siccome stiamo considerando il caso simmetrico, abbiamo che gli andamenti delle funzioni di reazione di x e di y sono simmetrici rispetto alla prima bisettrice del piano (O, x, y) . Gli equilibri del modello (i punti fissi) si trovano, quando esistono, in corrispondenza delle intersezioni tra le due

funzioni di reazione, e sono equilibri di Nash³, e anche equilibri di Cournot, dato che il modello di duopolio che stiamo considerando è un modello di Cournot (le funzioni di reazione dipendono da una sola variabile). Cerchiamo allora questi equilibri e studiamone la stabilità.

Il sistema formato da 3.1.10 e 3.1.11 corrisponde a un caso particolare di una mappa bidimensionale con la seguente struttura:

$$T : \begin{cases} x' = \phi(y) \\ y' = \phi(x) \end{cases} \quad (3.2.1)$$

e, siccome stiamo considerando due imprese che si comportano alla stessa maniera, possiamo ridurci allo studio della mappa unidimensionale $\phi(x)$. Infatti, le proprietà del modello bidimensionale dipendono solamente dalla mappa $F(x) := \phi^2(x)$, che a sua volta dipende solamente da $\phi(x)$. Ora, siccome le funzioni di reazione sono uguali, abbiamo che:

Proposizione 3.2.1. *In un duopolio con funzioni di reazione uguali si ha:*

- (i) *la diagonale Δ (la retta $x = y$) è tale che $T(\Delta) \subseteq \Delta$;*
- (ii) *ogni insieme I invariante nello spazio delle fasi (i.e. $T(I) = I$) o è simmetrico rispetto a Δ o il suo simmetrico è anch'esso invariante.*

Dimostrazione. (i) Sia $(x, x) \in \Delta$. Allora $T(x, x) = (\Phi(x), \Phi(x)) \in \Delta$.

(ii) Sia S l'operatore simmetrico, tale che $S(a, b) = (b, a) \forall a, b \in \mathbb{R}$. Allora $S(T(x, y)) = S(\Phi(y), \Phi(x)) = (\Phi(x), \Phi(y)) = T(y, x) = T(S(x, y))$.

Sia ora I un insieme invariante di T , i.e. $T(I) = I$. Allora $S(T(I)) = S(I)$, ma anche $S(T(I)) = T(S(I))$, per quanto detto sopra, e quindi $T(S(I)) = S(I)$. Allora:

³Se consideriamo un gioco caratterizzato da: un insieme G di n giocatori; un insieme S di strategie, costituito da m vettori $S_i = (s_{i,1}, s_{i,2}, \dots, s_{i,j}, \dots, s_{i,m_i})$, $i = 1, \dots, n$, ciascuno dei quali contiene l'insieme delle strategie che il giocatore i -esimo ha a disposizione; un insieme U di funzioni $u_i = U_i(s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_n)$ che associano ad ogni giocatore i il guadagno u_i derivante da una data combinazione di strategie, allora un equilibrio di Nash per un dato gioco è una combinazione di strategie $s_1^e, s_2^e, \dots, s_n^e$ tale che $U_i(s_1^e, s_2^e, \dots, s_i^e, \dots, s_n^e) \geq U_i(s_1^e, s_2^e, \dots, s_i, \dots, s_n^e)$ per ogni i e per ogni strategia s_i scelta dal giocatore i -esimo.

- o $S(I) = I$, cioè I è invariante;
- o $S(I) = I'$ è invariante.

□

Proposizione 3.2.2. *Sia $\{x_i\}$ l'insieme di tutti i punti periodici della mappa $\Phi(x)$. Allora i punti del prodotto cartesiano $\{x_1, \dots, x_n\} \times \{x_1, \dots, x_n\}$ sono i punti periodici della mappa T in 3.2.1.*

Dimostrazione. Sia $\{x_1, \dots, x_n\}$ un ciclo- n di Φ^2 . Questo equivale a un ciclo- n coniugato dato da $\{y_1, \dots, y_n\} = \{\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)\}$. Ora, se consideriamo tutti i punti periodici di Φ^2 e i loro coniugati, allora il prodotto cartesiano $\{x_1, \dots, x_n\} \times \{y_1, \dots, y_n\}$ dà tutti i punti periodici della mappa T . □

Quindi, grazie al fatto che le funzioni di reazione sono uguali, per la Proposizione 3.2.1 abbiamo che le tipiche proprietà dei sistemi simmetrici vengono mantenute nel nostro caso, e per la Proposizione 3.2.2 abbiamo che esiste una relazione tra i punti periodici di Φ e quelli di T che ci permette di trovare facilmente i punti periodici di T . In particolare, queste due proposizioni ci permettono di ottenere le coordinate dei punti periodici di T (che appartengono al prodotto cartesiano) considerando solamente ciò che avviene sulla diagonale Δ , dove la mappa T si riduce a $\Phi(x)$, che è data da, secondo la 3.1.8 e la 3.1.11:

$$\Phi(x) = y' = \begin{cases} y_i^*(x) = k_i \frac{\sqrt{\frac{x}{c} - x}}{\sqrt{\frac{x}{c} + k_i}}, & \text{dove } i \text{ dà } \Pi_y^e, \quad \text{se } \Pi_y^e > 0, \\ 0, & \text{se } \Pi_y^e \leq 0 \end{cases}$$

dove i è scelto in modo da avere il profitto massimo. Inoltre, $\Phi(x)$ può essere formato, come abbiamo visto, da diverse parti disgiunte dipendenti dalla scelta dell'impianto di produzione.

Le prossime due proposizioni classificano due tipi di cicli di T : quelli singolarmente generati, dovuti all'esistenza di un unico ciclo di $\Phi(x)$, e quelli doppiamente generati, associati invece a ogni coppia di cicli di $\Phi(x)$.

Proposizione 3.2.3 (Cicli singolarmente generati). *Sia $\{x_1, \dots, x_n\}$ un ciclo di $\Phi(x)$ di periodo $n \geq 1$. Allora:*

(i) *se n è dispari, T ha:*

- *un ciclo di periodo n (su Δ);*
- *$\frac{n-1}{2}$ cicli di periodo $2n$ (fuori Δ);*

(ii) *se n è pari e $\frac{n}{2}$ è ancora pari, T ha n cicli di periodo n (uno su Δ e $(n-1)$ fuori Δ);*

(iii) *se n è pari e $\frac{n}{2}$ è dispari, T ha:*

- *2 cicli di periodo $\frac{n}{2}$ (fuori Δ);*
- *$(n-1)$ cicli di periodo n (uno dei quali appartiene a Δ).*

Dimostrazione. Sia $\{x_1, \dots, x_n\}$ un ciclo di $\Phi(x)$ di primo periodo n . Allora avremo che $x_{i+1} = \Phi(x_i)$ e $\Phi^n(x_i) = x_i$. Consideriamo i punti del prodotto cartesiano $\{x_1, \dots, x_n\} \times \{x_1, \dots, x_n\}$. Le iterate di T saranno:

$$T^k(x_i, x_j) = \begin{cases} (\Phi^k(x_i), \Phi^k(x_j)), & \text{se } k \text{ è pari,} \\ (\Phi^k(x_j), \Phi^k(x_i)), & \text{se } k \text{ è dispari.} \end{cases} \quad (3.2.2)$$

Consideriamo i due casi:

- (1) *se $i = j$, allora abbiamo un punto (x_i, x_i) della diagonale, e il primo intero che dà un ciclo in 3.2.2 è $k = n$ (e quindi abbiamo un ciclo- n su Δ);*
- (2) *se $i \neq j$, allora abbiamo un punto (x_i, x_j) esterno a Δ , e il primo intero che dà un ciclo in 3.2.2 dipende da n : se n è dispari, allora il primo intero è $k = 2n$, e quindi il punto (x_i, x_j) appartiene a un ciclo di T di primo periodo $2n$ (e i cicli di questo periodo devono essere in numero $\frac{n^2-n}{2n} = \frac{n-1}{2}$); se n è pari, allora il primo intero che dà un punto periodico è $k = n$, e quindi il punto (x_i, x_j) è periodico di periodo n , esterno a Δ (e al massimo possiamo avere $\frac{n^2-n}{n} = n-1$ cicli distinti formati da questi punti).*

Tuttavia, il primo periodo deve essere minore di n ; questo accade solo quando n è pari e $\frac{n}{2}$ è dispari, e i punti periodici appartenenti ai due cicli distinti di periodo $\frac{n}{2}$ sono $(x_i, x_{i+\frac{n}{2}})$ e il suo simmetrico $(x_{i+\frac{n}{2}}, x_i)$. \square

Proposizione 3.2.4 (Cicli doppiamente generati). *Siano $\{x_1, \dots, x_n\}$, $\{y_1, \dots, y_m\}$ due cicli di $\Phi(x)$ di primo periodo rispettivamente n e m , con $n, m \geq 1$, e sia l il minimo comune multiplo tra n e m . Allora:*

- (i) se n e m sono dispari, T ha $\frac{nm}{l}$ cicli di periodo $2l$;
- (ii) se n e/o m sono pari, T ha $2\frac{nm}{l}$ cicli di periodo l ;

Dimostrazione. Consideriamo il caso in cui coesistono due o più cicli di $\Phi(x)$, di qualsiasi coppia di periodi. Possiamo poi considerare, senza perdere di generalità, un ciclo di periodo $n \geq 1$, detto $\{x_1, \dots, x_n\}$, e un ciclo di periodo $m \geq 1$, detto $\{y_1, \dots, y_m\}$. Allora, per la Proposizione 3.2.3, abbiamo $n \times n$ punti del tipo (x_i, x_j) che appartengono a cicli di T singolarmente generati. Però, nel prodotto cartesiano $\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\} \times \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\}$ ci sono altri punti periodici, che appartengono a quei cicli che chiamiamo doppiamente generati, perché ogni punto di questi cicli ha le coordinate appartenenti a due diversi cicli di $\Phi(x)$, e quindi la loro esistenza nella mappa T è una diretta conseguenza dell'esistenza di una coppia di cicli di $\Phi(x)$. Per vedere quanto appena detto, consideriamo gli iterati di T :

$$T^k(x_i, y_j) = \begin{cases} (\Phi^k(x_i), \Phi^k(y_j)), & \text{se } k \text{ è pari,} \\ (\Phi^k(y_j), \Phi^k(x_i)), & \text{se } k \text{ è dispari.} \end{cases} \quad (3.2.3)$$

e definiamo $l = mcm(n, m)$. Abbiamo due casi:

- (1) se l è dispari (cosa che può succedere quando sia n che m sono dispari), allora il più piccolo intero che ci dà un ciclo in 3.2.3 è $k = 2l$, e così otteniamo un ciclo di T di periodo $2l$; i cicli di questo tipo possono essere $2\frac{nm}{2l} = \frac{nm}{l}$;
- (2) se l è pari (cosa che succede quando almeno uno tra n e m è pari), allora il più piccolo intero che dà un punto periodico in 3.2.3 è $k = l$,

e così abbiamo un ciclo di T di periodo l ; i cicli di questo tipo possono essere $2 \frac{nm}{l}$.

□

Analizziamo ora i punti fissi di T , cioè i suoi punti di equilibrio. Come già abbiamo detto, a causa della complessa struttura delle funzioni di reazione, non è possibile ottenere una espressione analitica esplicita degli equilibri. Per definizione, sappiamo che (x^*, y^*) è un punto fisso di T se e solo se $T(x^*, y^*) = (\Phi(y^*), \Phi(x^*)) = (x^*, y^*)$. Segue che, se x_1 è un punto fisso di $\Phi(x)$, i.e. $\Phi(x_1) = x_1$, allora (x_1, x_1) è un punto fisso di T (singolarmente generato) che appartiene a Δ . Se invece abbiamo due punti fissi di $\Phi(x)$, detti x_1 e x_2 , allora T ha due punti fissi singolarmente generati, $A = (x_1, x_1)$ e $B = (x_2, x_2)$, che appartengono a Δ , e per la Proposizione 3.2.4 T ha anche un ciclo-2 doppiamente generato esterno a Δ , con punti periodici $\{(x_1, x_2), (x_2, x_1)\}$. Nella Figura 3.4 possiamo vedere alcuni esempi dei punti fissi e dei cicli periodici della funzione $\Phi(x)$: in (a) abbiamo un unico punto fisso P^* ; in (b) abbiamo quattro cicli-4, uno dei quali si trova su Δ ; in (c) abbiamo un ciclo-3 su Δ e un ciclo-6 fuori dalla diagonale.

Un'importante osservazione che possiamo fare su questo modello è che le biforcazioni dei punti fissi, cioè i cambi negli equilibri prodotti da variazioni dei parametri, non avvengono, come normalmente accade per le funzioni lisce, a causa della variazione degli autovalori della jacobiana della funzione di reazione, ma avvengono per le cosiddette *border-collision bifurcations*⁴: si verificano in corrispondenza dei punti di discontinuità. Per esempio, osservando la Figura 3.4(a), con $c = 0.175$ la funzione $\Phi(x)$ ha un unico attrattore, il punto fisso $P^* = (x^*, x^*)$, asintoticamente stabile, che si verifica usando il secondo impianto (quello con capacità k_2); aumentando il parametro c , il

⁴Un ciclo subisce una border-collision bifurcation quando un suo punto periodico entra in collisione con un punto in cui il sistema cambia struttura. Le border-collision bifurcations possono essere la causa, per esempio, di una transizione da un punto fisso stabile o a un ciclo di qualsiasi periodo, o a una dinamica caotica o a una divergenza (Nusse e Yorke, 1992).

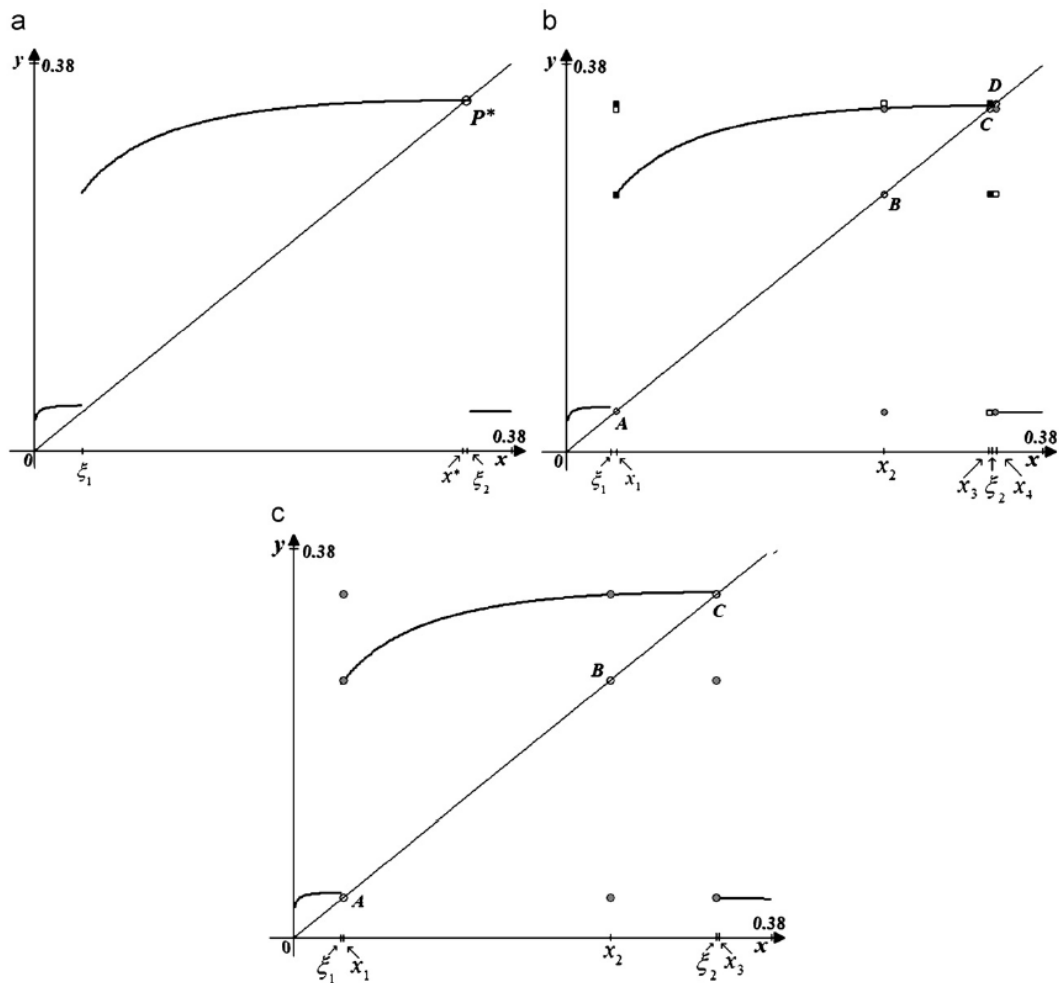


Figura 3.4: Attrattori con $k_1 = 0.0547, k_2 = 0.676, a = 0.5835, s_1 = 0.045, s_2 = 0.556$. In (a) $c = 0.175$. In (b) $c = 0.182$. In (c) $c = 0.185$. Gli ξ_i denotano i punti di discontinuità.

punto fisso va a "scontrarsi" con il punto di discontinuità ξ_2 (per $c \simeq 0.1789$); poi, subito dopo la collisione, per $c = 0.182$ (Figura 3.4(b)) sulla diagonale Δ compare un ciclo-4 stabile, formato dai punti periodici A, B, C, D ; aumentando ancora, un'altra border-collision bifurcation (un punto periodico si scontra con il punto di discontinuità ξ_2) causa la scomparsa del ciclo-4, che diventa un ciclo-3 stabile, sulla diagonale e di punti periodici A, B, C (Figura 3.4(c)), con $c = 0.185$. Notiamo che in (b) il punto periodico D coincide a una quantità prodotta usando il primo impianto; in (c), invece, A e B corrispondono a quantità prodotte con l'impianto con capacità più

bassa, mentre C corrisponde una quantità prodotta con il secondo impianto. Se consideriamo il punto A , con l'aumentare di c questo punto si avvicina sempre di più al punto di discontinuità ξ_1 , fino a scontrarlo (per $c \simeq 0.211$); questa border-collision bifurcation provoca la scomparsa del ciclo-3 e la comparsa di un altro ciclo-4 formato dai punti periodici A, B, C, D , dove A e D sono associati al primo impianto, mentre B e C sono associati al secondo (Figura 3.5(a), con $c = 0.23$). Infine, l'ultima border-collision bifurcation causa la scomparsa del ciclo-3 e la comparsa di un altro punto fisso, Q^* , che è associato al primo impianto (Figura 3.5(a), con $c = 0.24$).

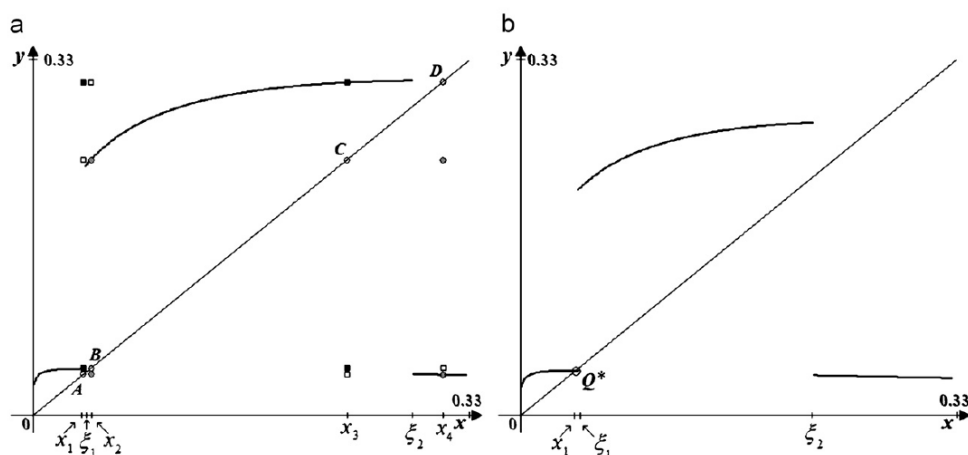


Figura 3.5: Attrattori con parametri fissi come in Figura 3.4. In (a) $c = 0.23$. In (b) $c = 0.24$. Gli ξ_i denotano i punti di discontinuità.

Quindi, aumentando il valore di c , cioè aumentando i costi, si va verso una graduale sostituzione della seconda tecnologia con la tecnologia più bassa. Questo perché i costi variabili diventano sempre più rilevanti, e il ricavo più alto legato all'impianto con capacità produttiva più alta non bilancia il più alto costo dovuto a un più alto livello di produzione.

Studiamo, in ultimo, la stabilità dei cicli di T . Se $\Phi(x)$ è liscia a tratti, con uno o più punti (ma non troppi) punti di discontinuità, prendiamo in considerazione i cicli di $\Phi(x)$ che hanno punti periodici nei quali la funzione è differenziabile, cioè non consideriamo le biforcazioni associate alla compar-

sa/scomparsa di questi cicli (che, come abbiamo osservato, avvengono per border-collision), e ne studiamo la stabilità locale, quando esistono. Abbiamo visto che ogni ciclo di T è collegato a un ciclo (se singolarmente generato) o a una coppia di cicli (se doppiamente generato) di $\Phi(x)$ e, se consideriamo la matrice jacobiana di T , è facile vedere che vale:

Proposizione 3.2.5. *Siano $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $n \geq 1$, e $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$, $m \geq 1$, cicli rispettivamente di $\Phi(x)$ e $\varphi(x)$ di primo periodo rispettivamente n e m . Allora:*

- (i) *se X è asintoticamente stabile (risp. instabile) per $\Phi(x)$ con autovalore λ , $|\lambda| < 1$ (risp. $|\lambda| > 1$), allora tutti i cicli singolarmente generati associati a X sono nodi a stella di T asintoticamente stabili (risp. instabili), con autovalori $\xi_1 = \xi_2 = \lambda$;*
- (ii) *se X e Y sono entrambi asintoticamente stabili (risp. instabili) per $\Phi(x)$ con autovalori λ e μ , $|\lambda|, |\mu| < 1$ (risp. $|\lambda|, |\mu| > 1$), allora tutti i cicli doppiamente generati associati a X e Y sono nodi di T asintoticamente stabili (risp. instabili), con autovalori $\xi_1 = \lambda$, $\xi_2 = \mu$;*
- (iii) *se uno tra X e Y è instabile per $\Phi(x)$ (supponiamo Y), con autovalori λ e μ , $|\lambda| < 1$, $|\mu| > 1$, allora tutti i cicli doppiamente generati associati a X e Y sono instabili per T , di tipo a sella, con autovalori $\xi_1 = \lambda$, $\xi_2 = \mu$.*

Dimostrazione. Immediata. □

Questa proposizione dimostra così tutti i risultati ottenuti negli esempi precedenti.

3.3 Bacini di attrazione

Abbiamo visto nella sezione precedente che nei nostri esempi, escludendo i casi in cui esiste un solo punto fisso, si verificano delle multistabilità.

Vogliamo capire ora indicativamente quali sono i vari bacini di attrazione, trovando i confini tra questi; vedremo che sono strettamente legati ai punti di discontinuità.

Innanzitutto, il comportamento dei punti (x, y) nello spazio delle fasi di T può essere studiato meglio considerando la seconda iterata, la mappa T^2 . Abbiamo visto che tutti i cicli esistenti sono asintoticamente stabili; segue che i punti critici di $\Phi^2(x)$ (o di $\Phi(x)$) non hanno particolare rilevanza nello studio della dinamica del sistema perché ognuno di essi converge a qualche ciclo stabile. Sono invece importanti i punti di discontinuità di $\Phi^2(x)$, che dipendono da quelli di $\Phi(x)$.

Osservazione. Ricordiamo che un punto di discontinuità $x = \xi$ della funzione di reazione $\Phi(x)$ corrisponde a una linea di discontinuità di equazione $x = \xi$ nello spazio delle fasi della mappa bidimensionale T ; inoltre, per simmetria anche $y = \xi$ è una linea di discontinuità.

In generale, in corrispondenza di ogni discontinuità di $\Phi(x)$, $x = \xi$, dobbiamo considerare due valori, associati al salto della funzione, detti $\Phi_l(\xi)$ (*lower*) e $\Phi_u(\xi)$ (*upper*). Se il comportamento asintotico dei due valori $\Phi_l(\xi)$ e $\Phi_u(\xi)$ è lo stesso, allora la linea verticale $x = \xi$ (che è una discontinuità per T) non ha nessun ruolo in ciò che riguarda i confini dei bacini. Viceversa, se il comportamento asintotico nei due punti è diverso, allora la retta verticale $x = \xi$ delimita dei bacini di attrazione. Infatti, tutti i punti vicini alla discontinuità $x = \xi$ hanno lo stesso comportamento asintotico dei due valori $\Phi_l(\xi)$ e $\Phi_u(\xi)$; questo comportamento si deve considerare anche nella funzione $\Phi^2(x)$, per la quale $x = \xi$ continua ad essere un punto di discontinuità, e quindi $\Phi_l^2(\xi)$ e $\Phi_u^2(\xi)$ sono i valori di $\Phi^2(x)$ in corrispondenza del salto.

Se vogliamo passare ai bacini di T , possiamo seguire il seguente ragionamento: possiamo associare i segmenti che delimitano i bacini della mappa unidimensionale $\Phi^2(x)$ all'asse X del nostro spazio delle fasi bidimensionale, e, data la simmetria del modello, possiamo associare all'asse y gli stessi seg-

menti (il comportamento asintotico di x e quello di y sono determinati dalla stessa mappa unidimensionale); i bacini della mappa bidimensionale T^2 si otterranno facendo il prodotto cartesiano di questi segmenti (ottenendo dei rettangoli), e da questi si otterranno quelli di T .

Per capire meglio quanto appena detto, consideriamo il seguente esempio, dove consideriamo la funzione di reazione della Figura 3.5(a):

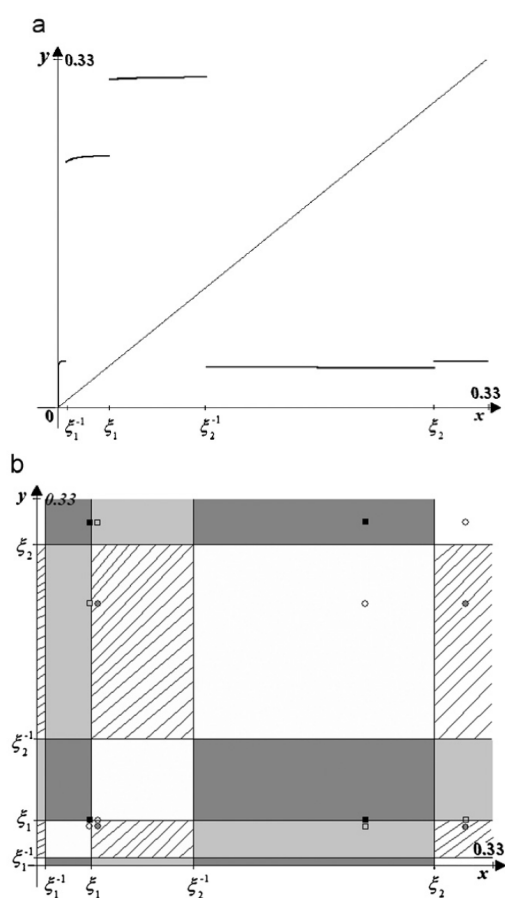


Figura 3.6: In (a) è rappresentata $\Phi^2(x)$ della funzione di reazione di Figura 3.5(a) e in (b) i bacini di attrazione. I bacini del ciclo-4 su Δ sono in bianco, mentre le regioni con linee e grigie sono i bacini dei tre cicli-4 fuori Δ .

Possiamo vedere che, elevando $\Phi(x)$ al quadrato, si formano altri punti di discontinuità. Seguirà che, se in generale $x = \xi$ è un punto di discontinuità di $\Phi(x)$ che separa due differenti bacini, allora anche le sue controimmagini

sono dei separatori di bacini. Nell'esempio, $x = \xi_2^{-1}$ e $x = \xi_1^{-1}$ sono le controimmagini dei punti $x = \xi_2$ e $x = \xi_1$, rispettivamente, e sono punti di discontinuità di $\Phi^2(x)$. Poi, il comportamento asintotico dei due valori $\Phi_l^2(\xi_1)$ e $\Phi_u^2(\xi_1)$ è diverso (c'è un salto): il valore *lower* tende al ciclo-2 dei punti A, C di Figura 3.5(a), mentre il valore *upper* converge all'altro ciclo-2 di punti B, D . Allora, la retta $x = \xi_1$ è un bordo di bacini, e lo stesso avviene per la discontinuità $x = \xi_1^{-1}$. Analogamente, $\Phi_l^2(\xi_2)$ e $\Phi_u^2(\xi_2)$ hanno due comportamenti asintotici diversi, e quindi le rette $x = \xi_2$ e $x = \xi_2^{-1}$ sono anch'esse bordi di bacini. I bacini di attrazione che si vengono a formare sono dati dal prodotto cartesiano tra i segmenti che delimitano i bacini di attrazione di $\Phi(x)$ (in ascissa) e tra quelli di $\Phi(y)$ (in ordinata), delimitati dai punti di discontinuità ξ_1^{-1} , ξ_1 , ξ_2^{-1} e ξ_2 .

Conclusioni

Attraverso lo studio di mappe unidimensionali e bidimensionali, dei loro comportamenti in corrispondenza dei punti di discontinuità, e lo studio di come i punti ciclici diventano i bordi dei bacini di attrazione, siamo giunti a risultati abbastanza rilevanti sia dal punto di vista matematico che economico. Abbiamo considerato un duopolio di Cournot, con una funzione di domanda isoelastica, e con le funzioni dei costi che dipendono da limiti di capacità produttiva. Ogni competitore ha poi l'opzione di utilizzare più di un impianto di produzione alla volta: considerando che ogni impresa ha due impianti, ciascuno con la propria capacità produttiva, ogni impresa può decidere se utilizzarne uno alla volta o se combinarli, dividendo in questo caso la quantità prodotta secondo il *principle of marginal costs*. Per ogni impresa si hanno quindi tre opzioni di produzione, e quindi tre opzioni di costo. Segue che nella funzione dei costi marginali si creano tre punti di discontinuità, e di conseguenza la curva di reazione, che si ottiene massimizzando il profitto globale, può essere composta da diversi rami disgiunti. Allora, le funzioni di reazione sono funzioni discontinue, lisce a tratti.

Nel nostro modello abbiamo considerato, per semplicità, due imprese con le stesse caratteristiche, ottenendo quindi una mappa bidimensionale simmetrica; un'analisi simile può comunque essere fatta nel caso di due imprese non uguali, o anche nel caso di più imprese, aumentando la complessità del modello ma ottenendo gli stessi risultati qualitativi sulla dinamica.

Tornando al nostro modello, abbiamo osservato che le variazioni degli attrattori prodotte da cambiamenti dei parametri non sono dovute al fatto che un ciclo stabile passi a essere instabile; sono dovuti invece alle *border-collisions*, cioè all'urto di alcuni di tali attrattori con i punti di discontinuità. Abbiamo visto che possono esserci molteplici cicli stabili, che possono essere individuati attraverso lo studio della funzione di reazione. Inoltre, se consideriamo un qualsiasi punto nello spazio delle fasi, questo segue una traiettoria che converge a un ciclo stabile. Questa dinamica rispecchia una situazione reale: in un mercato con due competitori non sono osservabili equilibri instabili, ma si possono osservare solamente differenti configurazioni di equilibrio stabile, in un determinato numero (in corrispondenza di punti di equilibrio o in corrispondenza di punti che si ripetono ciclicamente).

In ultimo, abbiamo visto come i bordi dei bacini di attrazione sono collegati alle discontinuità delle funzioni di reazione, dandone anche un esempio.

Bibliografia

- [1] Bischi G., Carini R., Tenti P., *Sulle orme del caos: comportamenti complessi in modelli matematici semplici*, Bruno Mondadori (2004),
- [2] Puu T., Sushko I., *Oligopoly Dynamics: Models and Tools*, Springer (2002),
- [3] Canovas J. S., Puu T., Ruz M., *The Cournot-Theocharis Problem reconsidered*, Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 37 (2008), 1025–1039,
- [4] Puu T., *On the stability of Cournot equilibrium when the number of competitors increases*, Journal of Economic Behavior & Organization, Vol. 66 (2008), 445–456,
- [5] Tramontana F., Gardini L., Puu T., *Cournot duopoly when the competitors operate multiple production plants*, Journal of Economic Dynamics & Control, Vol. 33 (2009), 250–265,
- [6] Gardini L., Tramontana F., *Border collision bifurcation curves and their classification in a family of 1D discontinuous maps*, Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 44 (2011), 248–259.

Ringraziamenti

Alla fine di questo percorso durato poco più di tre anni desidero ricordare tutti coloro che mi hanno aiutato. Desidero ringraziare i professori dell'Università di Bologna e quelli della Universitat de Barcelona, per gli insegnamenti che mi hanno dato e le conoscenze che mi hanno trasmesso. Ringrazio in particolare il professor Franco Nardini, relatore della tesi: senza il suo supporto e la sua guida sapiente questo elaborato non esisterebbe. Ringrazio poi i miei professori del liceo. In particolare, la professoressa Alecci, che è stata capace di infondermi questa curiosità e passione per il ragionamento e la scoperta. Ringrazio i miei compagni di corso, tra cui Alice, che sempre è stata al mio fianco, sia negli anni passati a Bologna che nei mesi trascorsi a Barcellona. Ringrazio le persone conosciute durante la mia esperienza Erasmus, che sono state per me come una seconda famiglia. Ringrazio i miei amici, che mi hanno supportato da qualsiasi parte dell'Europa e del mondo. Ringrazio mio babbo, mia mamma, le mie sorelline (non più tanto piccole) Margherita e Agnese, i miei nonni. Il ringraziamento più grande va però ad Arnau, a cui dedico questa tesi, per la forza che sa darmi ogni giorno, per la pazienza con cui mi ha sopportato negli ultimi mesi, e per il suo amore grande e sincero.