

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

**IL LIMITE TERMODINAMICO
NEI SISTEMI DI SPIN DILUITI**

Tesi di Laurea in Meccanica Statistica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
PIERLUIGI CONTUCCI

Presentata da:
DIEGO ALBERICI

II Sessione
Anno Accademico 2009/2010

*Un archeologo nel deserto egiziano
vede una pietra triangolare
che spunta dalla sabbia.
Una piramide o un sasso?
L'archeologo non lo sa e deve scavare.
Novantanove volte su cento è un sasso.
Ma l'archeologo non può fare altro.*

Indice

Introduzione	5
Approccio probabilistico alla termodinamica	5
Sistemi dicotomici	7
1 Il problema del limite termodinamico	11
1.1 Sub-additività e super-additività	11
1.2 La tecnica dell'interpolazione	14
2 Lo stato fondamentale	19
2.1 Stato fondamentale e temperatura zero	19
2.2 Configurazioni di spin possibili allo stato fondamentale	22
2.3 Misura di Boltzmann-Gibbs a temperatura zero	25
3 Modello di Sherrington-Kirkpatrick	29
4 Modello ferromagnetico diluito	35
4.1 Il mio tentativo di dimostrare la sub-additività	37
4.2 Il tentativo di Contucci-Dommers-Giardinà-Starr	43
4.3 Congetture per le basse temperature	48
5 Modello anti-ferromagnetico diluito	53
Bibliografia	57

Introduzione

Approccio probabilistico alla termodinamica

Consideriamo un sistema termodinamico che, teoricamente, si può trovare in n stati o configurazioni diverse. Ad ogni possibile stato vogliamo associare la probabilità che esso sia quello che effettivamente si verifica.

Indichiamo con $\Omega := \{s_k \mid k = 1, \dots, n\}$ l'insieme degli stati possibili. Cominciamo con l'introdurre le grandezze che caratterizzano il sistema.

Ad ogni stato s_k è associata l'*energia* corrispondente E_k . Questa è una grandezza osservabile di tipo estensivo (dipende dalle dimensioni del sistema).

Chiamiamo *hamiltoniana* del sistema la funzione:

$$H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(s_k) = E_k .$$

Supponiamo inoltre che il sistema sia a contatto con un termostato a *temperatura* assoluta $T > 0$. Poniamo $\beta := \frac{1}{k_B T}$, dove k_B è la costante di Boltzmann.

Ora introduciamo la misura di probabilità associata agli stati del sistema:

$$\mathbb{P} : \Omega \rightarrow [0, 1], \quad \mathbb{P}(s_k) = p_k .$$

Indichiamo con $\omega(\cdot)$ il valore atteso nello spazio di probabilità (Ω, \mathbb{P}) . Per trovare quali sono i valori p_k corretti sfrutteremo il secondo principio della termodinamica. Prima però dobbiamo definire alcune grandezze.

La prima è l'*energia interna* del sistema, che rappresenta il valore atteso

dell'hamiltoniana nello spazio (Ω, \mathbb{P}) :

$$U := \sum_{k=1}^n E_k p_k = \omega(H)$$

La seconda è l'*entropia*, che dipende unicamente dallo spazio di probabilità:

$$S := - \sum_{k=1}^n p_k \log p_k$$

dove si pone per continuità $0 \log 0 := 0$.

Infine definiamo l'*energia libera* e la *pressione* del sistema:

$$F := U - \frac{1}{\beta} S$$

$$P := -\beta F = S - \beta U$$

Il secondo principio della termodinamica si può enunciare come segue:

quando il sistema è all'equilibrio, le probabilità che ciascuno stato si verifichi sono tali da rendere minima l'energia libera del sistema .

Indichiamo con $\Delta := \{p = (p_1, \dots, p_n) \in [0, 1]^n \mid \sum_{k=1}^n p_k = 1\}$ il sottoinsieme di \mathbb{R}^n che rappresenta l'insieme di tutti i possibili spazi di probabilità su Ω .

Si verifica che $p \mapsto F(p)$ è continua e strettamente convessa su Δ compatto convesso. Dunque $\exists! \bar{p} \in \Delta : F(\bar{p}) = \min_{p \in \Delta} F(p)$ (inoltre, se \bar{p} non sta sul bordo di Δ , esso è l'unico punto critico vincolato di F su $\Delta \setminus \text{bordo}$).

Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si calcola che $\bar{p} = (\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n)$ con

$$\bar{p}_k = \frac{e^{-\beta E_k}}{\sum_{h=1}^n e^{-\beta E_h}} \quad \forall k = 1, \dots, n .$$

Quindi, per il secondo principio della termodinamica, possiamo affermare che ogni stato s_k del sistema, quando esso è all'equilibrio, ha probabilità di verificarsi

$$\mathbb{P}(s_k) = \frac{e^{-\beta H(s_k)}}{\sum_{h=1}^n e^{-\beta H(s_h)}} \quad \forall k = 1, \dots, n$$

In altri termini lo spazio di probabilità associato al sistema in equilibrio è lo *spazio di Boltzmann-Gibbs* relativo ad H e β .

Di conseguenza, data una funzione delle configurazioni del sistema $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, il suo valore atteso è

$$\omega(F) = \sum_{k=1}^n F(s_k) \mathbb{P}(s_k) = \frac{\sum_{k=1}^n F(s_k) e^{-\beta H(s_k)}}{\sum_{h=1}^n e^{-\beta H(s_h)}} .$$

D'ora in poi ci occuperemo sempre di sistemi all'equilibrio, anche se non lo diremo esplicitamente.

Ora che conosciamo lo spazio di probabilità in cui dobbiamo lavorare, riscriviamo le grandezze che abbiamo introdotto prima:

$$U = \sum_{k=1}^n E_k p_k = \frac{\sum_{k=1}^n H(s_k) e^{-\beta H(s_k)}}{\sum_{k=1}^n e^{-\beta H(s_k)}} ;$$

$$S = - \sum_{k=1}^n p_k \log p_k = - \sum_{k=1}^n \frac{e^{-\beta H(s_k)}}{\sum_{h=1}^n e^{-\beta H(s_h)}} \left(-\beta H(s_k) - \log \sum_{h=1}^n e^{-\beta H(s_h)} \right) =$$

$$= \beta U + \log \sum_{k=1}^n e^{-\beta H(s_k)} ;$$

$$F = U - \frac{1}{\beta} S = -\frac{1}{\beta} \log \sum_{k=1}^n e^{-\beta H(s_k)} ;$$

$$P = -\beta F = \log \sum_{k=1}^n e^{-\beta H(s_k)} .$$

Osserviamo anche che $\frac{dP}{d\beta} = -U$. Dunque conoscendo la pressione del sistema al variare di β se ne possono ricavare l'energia libera, l'energia interna e l'entropia.

Sistemi dicotomici

Consideriamo ora un sistema composto da N particelle, ciascuna delle quali può assumere solo 2 configurazioni differenti: -1 o 1 . Lo stato del sistema è descritto dallo stato in cui si trova ognuna delle particelle che lo compone. Un sistema di questo tipo è detto *sistema dicotomico*.

Per ogni $i = 1, \dots, N$ possiamo associare alla particella i -esima la *variabile di spin*¹ $\sigma_i \in \{-1, 1\}$; in questo modo una configurazione del sistema sarà descritta da una scelta degli N spin $\sigma := (\sigma_1, \dots, \sigma_N) \in \{-1, 1\}^N$. Indichiamo con $\Omega_N := \{-1, 1\}^N$ l'insieme delle possibili configurazioni del sistema. Si dimostra che la generica hamiltoniana di un sistema dicotomico si può scrivere, in modo unico, nella forma

$$H_N : \Omega_N \rightarrow \mathbb{R}, \quad H_N(\sigma) = - \sum_{X \subseteq \{1, \dots, N\}} J_X^N \sigma_X$$

dove si è posto $\sigma_X := \prod_{i \in X} \sigma_i$, mentre le $J_X^N \in \mathbb{R}$ sono dette *coefficienti di interazione*.

Per comodità si definisce il vettore delle interazioni $J^N := (J_X^N)_{X \subseteq \{1, \dots, N\}}$.

Ricordiamo che, per il secondo principio della termodinamica, le variabili di spin $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ hanno distribuzione congiunta di Boltzmann-Gibbs relativa ad H_N e β . Dunque la configurazione di spin σ ha probabilità di verificarsi:

$$\mathbb{P}_N(\sigma) = \frac{e^{-\beta H_N(\sigma)}}{\sum_{\tau \in \Omega_N} e^{-\beta H_N(\tau)}} \quad \forall \sigma \in \Omega_N ;$$

mentre data una funzione delle variabili di spin $F : \Omega_N \rightarrow \mathbb{R}$ il suo valore atteso è:

$$\omega_N(F) = \frac{\sum_{\sigma \in \Omega_N} F(\sigma) e^{-\beta H_N(\sigma)}}{\sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H_N(\sigma)}} .$$

Possiamo dedurne il significato dei coefficienti di interazione. Sia $X \subseteq \{1, \dots, N\}$.

- Supponiamo prima $J_Y^N = 0 \quad \forall Y \subseteq \{1, \dots, N\}, Y \neq X$.

A meno di costanti positive si ha $\mathbb{P}_N(\sigma) = \exp(J_X^N \sigma_X) \quad \forall \sigma \in \Omega_N$, quindi le configurazioni più probabili sono quelle tali che $\text{sgn}(\sigma_X) = \text{sgn}(J_X^N)$.

In particolare:

- se $X = \{i\}$, le configurazioni più probabili sono quelle con $\sigma_i = 1$ se $J_i^N > 0$ o con $\sigma_i = -1$ se $J_i^N < 0$;

¹Il termine *spin*, così come i successivi *ferromagnetico* e *anti-ferromagnetico*, è dovuto all'interpretazione di un sistema dicotomico come una porzione di materiale magnetico.

- se $X = \{i, j\}$, le configurazioni più probabili sono quelle con $\sigma_i = \sigma_j$ se $J_{ij}^N > 0$ o con $\sigma_i \neq \sigma_j$ se $J_{ij}^N < 0$.

- In generale $\mathbb{P}_N(\sigma) = \prod_Y \exp(J_Y^N \sigma_Y) \quad \forall \sigma \in \Omega_N$, a meno di costanti positive. L'influenza di J_X^N nel determinare quali siano le configurazioni più probabili è tanto maggiore quanto più è grande $|J_X^N|$ rispetto agli altri $|J_Y^N|$.

Intuitivamente possiamo pensare che J_i^N misuri l'influenza di un campo esterno sulla particella i -esima, e che J_{ij}^N misuri l'interazione tra le particelle i -esima e j -esima (di tipo imitativo se $J_{ij}^N > 0$, anti-imitativo se $J_{ij}^N < 0$).

Un sistema dicotomico è detto *ferromagnetico* se $J_X^N \geq 0 \quad \forall X \subseteq \{1, \dots, N\}$, mentre è detto *anti-ferromagnetico* se $J_X^N \leq 0 \quad \forall X \subseteq \{1, \dots, N\}$.

Per i sistemi ferromagnetici valgono le seguenti disuguaglianze di correlazione, dette disuguaglianze di Griffiths-Kelly-Sherman:

- 1) $\omega_N(\sigma_X) \geq 0 \quad \forall X \subseteq \{1, \dots, N\}$
- 2) $\omega_N(\sigma_X \sigma_Y) - \omega_N(\sigma_X) \omega_N(\sigma_Y) \geq 0 \quad \forall X, Y \subseteq \{1, \dots, N\}$

Queste disuguaglianze sono molto importanti, anche se qui non ne faremo uso.

I modelli trattati in questa tesi presentano dei coefficienti di interazione aleatori: non se ne conosce l'entità con certezza ma solo la distribuzione di probabilità.

In generale indicheremo con $\omega(\cdot)$ ogni valore atteso fatto rispetto alle variabili di spin, mentre indicheremo con $Av(\cdot)$ ogni valor medio fatto rispetto ai coefficienti di interazione.

Osserviamo esplicitamente che la distribuzione di probabilità delle configurazioni di spin dipende dall'hamiltoniana H_N , e quindi dall'entità dei coefficienti di interazione. Di conseguenza, anche se questo è nascosto dalla notazione, $\omega(\cdot)$ dipende dal valore che assumono le J_X^N .

Infine teniamo presente che la pressione di un sistema dicotomico si scrive:

$$P_N = \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H_N(\sigma)},$$

mentre la sua energia libera è $F_N = -\frac{1}{\beta} P_N$.

Come abbiamo notato nella sezione precedente la pressione è una grandezza molto significativa del sistema e ce ne occuperemo ampiamente nei prossimi capitoli. Facciamo ora alcune osservazioni preliminari che torneranno utili.

Osservazione 1.

$$N \log 2 - \beta \sum_{X \subseteq \{1, \dots, N\}} |J_X^N| \leq P_N \leq N \log 2 + \beta \sum_{X \subseteq \{1, \dots, N\}} |J_X^N|$$

Dimostrazione. Visto che $\sigma_X \in \{-1, 1\} \forall X \subseteq \{1, \dots, N\}$, si ha:

$$\begin{aligned} P_N &= \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H_N(\sigma)} = \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{\beta \sum_X J_X^N \sigma_X} \leq \log(2^N e^{\beta \sum_X |J_X^N|}) \\ &= N \log 2 + \beta \sum_{X \subseteq \{1, \dots, N\}} |J_X^N| ; \end{aligned}$$

e si ha anche:

$$\begin{aligned} P_N &= \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H_N(\sigma)} = \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{\beta \sum_X J_X^N \sigma_X} \geq \log(2^N e^{-\beta \sum_X |J_X^N|}) \\ &= N \log 2 - \beta \sum_{X \subseteq \{1, \dots, N\}} |J_X^N| . \quad \square \end{aligned}$$

Osservazione 2. Se le J_X^N , $X \subseteq \{1, \dots, N\}$ sono variabili aleatorie, allora

$$\exists \text{Av}(J_X^N) \in \mathbb{R} \forall X \subseteq \{1, \dots, N\} \Rightarrow \exists \text{Av}(P_N) \in \mathbb{R} .$$

Dimostrazione. Per l'osservazione 1,

$$|P_N| \leq N \log 2 + \beta \sum_{X \subseteq \{1, \dots, N\}} |J_X^N|$$

Allora, usando risultati generali di teoria della misura,

$$\begin{aligned} \exists \text{Av}(J_X^N) \in \mathbb{R} \forall X \subseteq \{1, \dots, N\} &\Rightarrow \exists \text{Av}(|J_X^N|) \in \mathbb{R} \forall X \subseteq \{1, \dots, N\} \\ \Rightarrow \exists \text{Av}(|P_N|) \in \mathbb{R} &\Rightarrow \exists \text{Av}(P_N) \in \mathbb{R} . \quad \square \end{aligned}$$

Dunque supporremo sempre che le interazioni J_X^N , se sono aleatorie, ammettano valor medio finito.

Capitolo 1

Il problema del limite termodinamico

Visto che la termodinamica si occupa di sistemi composti da un numero molto grande di particelle, ci preoccupiamo dell'esistenza del limite termodinamico della pressione media per particella, ossia ci chiediamo se

$$\exists \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Av}\left(\frac{P_N}{N}\right),$$

dove per mandare $N \rightarrow +\infty$ pensiamo le J^N , $N \in \mathbb{N}$, come famiglie tra loro indipendenti.

1.1 Sub-additività e super-additività

In questa sezione vedremo due lemmi di analisi che garantiscono che se la successione $(\text{Av}(P_N))_{N \in \mathbb{N}}$ è sub-additiva o super-additiva, allora esiste

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Av}\left(\frac{P_N}{N}\right)$$

e, di più, esso vale rispettivamente

$$\inf_{N \in \mathbb{N}} \text{Av}\left(\frac{P_N}{N}\right) \quad \text{o} \quad \sup_{N \in \mathbb{N}} \text{Av}\left(\frac{P_N}{N}\right).$$

Lemma 3. Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in \mathbb{R} tale che:

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N} .$$

Allora:

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n} .$$

Dimostrazione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$ possiamo fare la divisione euclidea di n per m :

$$\exists q \in \mathbb{N}, \exists r \in \{0, \dots, m-1\} : n = qm + r .$$

Per la proprietà di sub-additività:

$$\begin{aligned} a_n = a_{qm+r} &\leq a_{qm} + a_r \leq q a_m + a_r \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, m \leq n \quad \Rightarrow \\ \frac{a_n}{n} &\leq \frac{q a_m + a_r}{n} = \frac{q a_m}{qm+r} + \frac{a_r}{n} = \frac{a_m}{m + \frac{r}{q}} + \frac{a_r}{n} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, m \leq n . \end{aligned}$$

Allora, per l'arbitrarietà di $n \in \mathbb{N}$:

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_m}{m + \frac{r}{q}} + \frac{a_r}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_m}{m + \frac{r}{q}} + \frac{a_r}{n} \right) = \frac{a_m}{m} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

infatti, per $n \rightarrow +\infty$ e m fisso, $r \in \{0, \dots, m-1\}$ è limitato e $q = \frac{n-r}{m} \rightarrow +\infty$.

Per l'arbitrarietà di $m \in \mathbb{N}$:

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} \leq \inf_{m \in \mathbb{N}} \frac{a_m}{m} \leq \liminf_{m \rightarrow +\infty} \frac{a_m}{m}$$

$$\text{infatti } \inf_{m \in \mathbb{N}} \frac{a_m}{m} \leq \inf_{m > k} \frac{a_m}{m} \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \inf_{m \in \mathbb{N}} \frac{a_m}{m} \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf_{m > k} \frac{a_m}{m} = \liminf_{m \rightarrow +\infty} \frac{a_m}{m} .$$

Ma in generale:

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n}$$

Quindi:

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n} \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n} . \quad \square$$

Lemma 4. Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in \mathbb{R} tale che:

$$a_{n+m} \geq a_n + a_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N} .$$

Allora:

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n} .$$

Dimostrazione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$ possiamo fare la divisione euclidea di n per m :

$$\exists q \in \mathbb{N}, \exists r \in \{0, \dots, m-1\} : n = qm + r .$$

Per la proprietà di super-additività:

$$\begin{aligned} a_n = a_{qm+r} &\geq a_{qm} + a_r \geq q a_m + a_r \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, m \leq n \quad \Rightarrow \\ \frac{a_n}{n} &\geq \frac{q a_m + a_r}{qm+r} = \frac{q a_m}{qm+r} + \frac{a_r}{n} = \frac{a_m}{m + \frac{r}{q}} + \frac{a_r}{n} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, m \leq n . \end{aligned}$$

Allora, per l'arbitrarietà di $n \in \mathbb{N}$:

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_m}{m + \frac{r}{q}} + \frac{a_r}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_m}{m + \frac{r}{q}} + \frac{a_r}{n} \right) = \frac{a_m}{m} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

infatti, per $n \rightarrow +\infty$ e m fisso, $r \in \{0, \dots, m-1\}$ è limitato e $q = \frac{n-r}{m} \rightarrow +\infty$.

Per l'arbitrarietà di $m \in \mathbb{N}$:

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} \geq \sup_{m \in \mathbb{N}} \frac{a_m}{m} \geq \limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{a_m}{m}$$

$$\text{infatti } \sup_{m \in \mathbb{N}} \frac{a_m}{m} \geq \sup_{m > k} \frac{a_m}{m} \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \sup_{m \in \mathbb{N}} \frac{a_m}{m} \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{m > k} \frac{a_m}{m} = \limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{a_m}{m} .$$

Ma in generale:

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n}$$

Quindi:

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n} \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n} . \quad \square$$

1.2 La tecnica dell'interpolazione

Ora vediamo come l'interpolazione può essere usata per dimostrare la sub-additività o la super-additività della successione $(\text{Av}(P_N))_{N \in \mathbb{N}}$.

Lemma 5 (interpolazione nella distribuzione delle interazioni).

Siano $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $N = N_1 + N_2$. Consideriamo un'hamiltoniana interpolante del tipo seguente: $\forall t \in [0, 1] \forall \sigma \in \Omega_N$

$$H(t)(\sigma) = - \sum_{X \subseteq \{1, \dots, N\}} J_X(t) \sigma_X - \sum_{A \subseteq \{1, \dots, N_1\}} J'_A(t) \sigma_A - \sum_{B \subseteq \{N_1+1, \dots, N\}} J''_B(t) \sigma_B$$

dove le $J_X(t)$, $J'_A(t)$, $J''_B(t)$ sono variabili aleatorie con valor medio finito tali che: $\forall X \subseteq \{1, \dots, N\}$, $A \subseteq \{1, \dots, N_1\}$, $B \subseteq \{N_1+1, \dots, N\}$

$$i) J_X(1) \approx J_X^N, J'_A(1) = 0, J''_B(1) = 0$$

(per $t = 1$ abbiamo il sistema ad N particelle)

$$ii) J_X(0) = 0, J'_A(0) \approx J_A^{N_1}, J''_B(0) \approx J_{B-N_1}^{N_2}$$

(per $t = 0$ abbiamo rotto le interazioni tra le prime N_1 particelle e le altre N_2 , ottenendo due sistemi isolati)

Consideriamo la relativa pressione: $P(t) = \log \sum_{\sigma} e^{-\beta H(t)(\sigma)} \quad \forall t \in [0, 1]$.

Supponiamo che $t \mapsto \text{Av}(P(t))$ sia continua su $[0, 1]$ e derivabile su $]0, 1[$.

Allora:

$$\frac{d}{dt} \text{Av}(P(t)) \underset{(\geq)}{\leq} 0 \quad \forall t \in]0, 1[\quad \Rightarrow \quad \text{Av}(P_N) \underset{(\geq)}{\leq} \text{Av}(P_{N_1}) + \text{Av}(P_{N_2}) .$$

Dimostrazione. Dall'ipotesi *i*) segue che:

$$H(1)(\sigma) \approx - \sum_{X \subseteq \{1, \dots, N\}} J_X^N \sigma_X = H_N(\sigma) \quad \forall \sigma \in \Omega_N \quad \Rightarrow \quad P(1) \approx P_N \quad \Rightarrow$$

$$\text{Av}(P(1)) = \text{Av}(P_N) .$$

Per ogni $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{N_1}, \sigma_{N_1+1}, \dots, \sigma_N) \in \Omega_N$ indichiamo $\sigma' = (\sigma_1, \dots, \sigma_{N_1}) \in \Omega_{N_1}$ e $\sigma'' = (\sigma_{N_1+1}, \dots, \sigma_N) \in \Omega_{N_2}$. Dall'ipotesi *ii*) segue che:

$$\begin{aligned}
H(0)(\sigma) &\approx - \sum_{A \subseteq \{1, \dots, N_1\}} J_A^{N_1} \sigma_A - \sum_{B \subseteq \{N_1+1, \dots, N\}} J_{B-N_1}^{N_2} \sigma_B = H_{N_1}(\sigma') + H_{N_2}(\sigma'') \quad \Rightarrow \\
P(0) &\approx \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta(H_{N_1}(\sigma') + H_{N_2}(\sigma''))} = \log \left(\sum_{\sigma' \in \Omega_{N_1}} e^{-\beta H_{N_1}(\sigma')} \cdot \sum_{\sigma'' \in \Omega_{N_2}} e^{-\beta H_{N_2}(\sigma'')} \right) \\
&= \log \sum_{\sigma' \in \Omega_{N_1}} e^{-\beta H_{N_1}(\sigma')} + \log \sum_{\sigma'' \in \Omega_{N_2}} e^{-\beta H_{N_2}(\sigma'')} = P_{N_1} + P_{N_2} \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\text{Av}(P(0)) = \text{Av}(P_{N_1} + P_{N_2}) .$$

Allora, se $t \mapsto \text{Av}(P(t))$ è continua su $[0, 1]$ e derivabile su $]0, 1[$, per il teorema del valor medio di Lagrange: $\exists \bar{t} \in]0, 1[$ t.c.

$$\text{Av}(P_N) - (\text{Av}(P_{N_1}) + \text{Av}(P_{N_2})) = \text{Av}(P(1)) - \text{Av}(P(0)) = \frac{d}{dt} \text{Av}(P(\bar{t}))$$

Quindi:

$$\frac{d}{dt} \text{Av}(P(t)) \underset{(\geq)}{\leq} 0 \quad \forall t \in]0, 1[\quad \Rightarrow \quad \text{Av}(P_N) \underset{(\geq)}{\leq} \text{Av}(P_{N_1}) + \text{Av}(P_{N_2}) . \quad \square$$

Lemma 6 (interpolazione fuori dalla distribuzione delle interazioni).

Siano $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $N = N_1 + N_2$. Consideriamo un'hamiltoniana interpolante del tipo seguente: $\forall t \in [0, 1] \quad \forall \sigma \in \Omega_N$

$$H(t)(\sigma) = - \sum_{X \subseteq \{1, \dots, N\}} f_X(t) J_X^N \sigma_X - \sum_{A \subseteq \{1, \dots, N_1\}} g_A(t) J_A^{N_1} \sigma_A - \sum_{B \subseteq \{N_1+1, \dots, N\}} g_B(t) J_{B-N_1}^{N_2} \sigma_B$$

dove le f_X, g_A, g_B sono funzioni reali, continue su $[0, 1]$ e derivabili su $]0, 1[$, tali che: $\forall X \subseteq \{1, \dots, N\}, A \subseteq \{1, \dots, N_1\}, B \subseteq \{N_1+1, \dots, N\}$

i) $f_X(1) = 1, g_A(1) = 0, g_B(1) = 0$ (per $t = 1$ abbiamo il sistema ad N particelle)

ii) $f_X(0) = 0, g_A(0) = 1, g_B(0) = 1$ (per $t = 0$ abbiamo due sistemi disgiunti, rispettivamente di N_1 e N_2 particelle)

Consideriamo la relativa pressione: $P(t) = \log \sum_{\sigma} e^{-\beta H(t)(\sigma)} \quad \forall t \in [0, 1]$.

Allora:

$$\text{Av} \left(\frac{dP}{dt}(t) \right) \underset{(\geq)}{\leq} 0 \quad \forall t \in]0, 1[\quad \Rightarrow \quad \text{Av}(P_N) \underset{(\geq)}{\leq} \text{Av}(P_{N_1}) + \text{Av}(P_{N_2}) .$$

Dimostrazione. Dall'ipotesi *i*) segue che:

$$H(1)(\sigma) = - \sum_{X \subseteq \{1, \dots, N\}} J_X^N \sigma_X = H_N(\sigma) \quad \forall \sigma \in \Omega_N \Rightarrow P(1) = P_N$$

Per ogni $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{N_1}, \sigma_{N_1+1}, \dots, \sigma_N) \in \Omega_N$ indichiamo $\sigma' = (\sigma_1, \dots, \sigma_{N_1}) \in \Omega_{N_1}$ e $\sigma'' = (\sigma_{N_1+1}, \dots, \sigma_N) \in \Omega_{N_2}$. Dall'ipotesi *ii*) segue che:

$$\begin{aligned} H(0)(\sigma) &= - \sum_{A \subseteq \{1, \dots, N\}} J_A^{N_1} \sigma_A - \sum_{B \subseteq \{N_1+1, \dots, N\}} J_{B-N_1}^{N_2} \sigma_B = H_{N_1}(\sigma') + H_{N_2}(\sigma'') \Rightarrow \\ P(0) &= \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta (H_{N_1}(\sigma') + H_{N_2}(\sigma''))} = \log \left(\sum_{\sigma' \in \Omega_{N_1}} e^{-\beta H_{N_1}(\sigma')} \cdot \sum_{\sigma'' \in \Omega_{N_2}} e^{-\beta H_{N_2}(\sigma'')} \right) \\ &= \log \sum_{\sigma' \in \Omega_{N_1}} e^{-\beta H_{N_1}(\sigma')} + \log \sum_{\sigma'' \in \Omega_{N_2}} e^{-\beta H_{N_2}(\sigma'')} = P_{N_1} + P_{N_2}. \end{aligned}$$

Per ogni scelta di $J := (J_X^N, J_A^{N_1}, J_{B-N_1}^{N_2})_{X,A,B}$ la funzione $t \mapsto P(t)$ è continua su $[0, 1]$ e derivabile su $]0, 1[$, perché per ipotesi le f_X, g_A, g_B lo sono. Allora per il teorema del valor medio di Lagrange: $\exists \bar{t}_J \in]0, 1[$ t.c.

$$P_N - (P_{N_1} + P_{N_2}) = P(1) - P(0) = \frac{dP}{dt}(\bar{t}_J)$$

Per l'arbitrarietà di J segue che:

$$\text{Av}(P_N) - (\text{Av}(P_{N_1}) + \text{Av}(P_{N_2})) = \text{Av}\left(\frac{dP}{dt}(\bar{t}_J)\right).$$

Quindi:

$$\text{Av}\left(\frac{dP}{dt}(t)\right) \underset{(\geq)}{\leq} 0 \quad \forall t \in]0, 1[\Rightarrow \text{Av}\left(\frac{dP}{dt}(\tau_J)\right) \underset{(\geq)}{\leq} 0 \Rightarrow$$

$$\text{Av}(P_N) \underset{(\geq)}{\leq} \text{Av}(P_{N_1}) + \text{Av}(P_{N_2}). \quad \square$$

Osservazione 7. *Nel caso del lemma precedente, il valor medio della derivata della pressione rispetto al parametro t esiste finito e si scrive: $\forall t \in]0, 1[$*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} \text{Av}\left(\frac{dP}{dt}(t)\right) &= \sum_{X \subseteq \{1, \dots, N\}} f'_X(t) \text{Av}(J_X^N \cdot \omega(t)(\sigma_X)) + \\ &\quad \sum_{A \subseteq \{1, \dots, N_1\}} g'_A(t) \text{Av}(J_A^{N_1} \cdot \omega(t)(\sigma_A)) + \sum_{B \subseteq \{N_1+1, \dots, N\}} g'_B(t) \text{Av}(J_{B-N_1}^{N_2} \cdot \omega(t)(\sigma_B)) \end{aligned}$$

Dimostrazione. Scriviamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} \frac{dP}{dt}(t) &= \frac{1}{\beta} \frac{d}{dt} \left(\log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H(t)(\sigma)} \right) = \\ &= \frac{1}{\beta} \frac{- \sum_{\sigma} \beta \frac{dH(t)(\sigma)}{dt} e^{-\beta H(t)(\sigma)}}{\sum_{\sigma} e^{-\beta H(t)(\sigma)}} = \omega(t) \left(- \frac{dH(t)(\sigma)}{dt} \right) = \\ &= \omega(t) \left(\sum_{X \subseteq \{1, \dots, N\}} f'_X(t) J_X^N \sigma_X + \sum_{A \subseteq \{1, \dots, N_1\}} g'_A(t) J_A^{N_1} \sigma_A + \sum_{B \subseteq \{N_1+1, \dots, N\}} g'_B(t) J_B^{N_2} \sigma_B \right) = \\ &= \sum_{X \subseteq \{1, \dots, N\}} f'_X(t) J_X^N \omega(t)(\sigma_X) + \sum_{A \subseteq \{1, \dots, N_1\}} g'_A(t) J_A^{N_1} \omega(t)(\sigma_A) + \sum_{B \subseteq \{N_1+1, \dots, N\}} g'_B(t) J_B^{N_2} \omega(t)(\sigma_B) . \end{aligned}$$

Quindi, visto che $\omega(t)(\sigma_X) \in [-1, 1] \forall X \subseteq \{1, \dots, N\}$, si ha:

$$\left| \frac{dP}{dt}(t) \right| \leq \beta \sum_{X \subseteq \{1, \dots, N\}} |f'_X(t)| |J_X^N| + \beta \sum_{A \subseteq \{1, \dots, N_1\}} |g'_A(t)| |J_A^{N_1}| + \beta \sum_{B \subseteq \{N_1+1, \dots, N\}} |g'_B(t)| |J_B^{N_2}|$$

da cui segue che:

$$\exists \text{Av} \left(\frac{dP}{dt}(t) \right) \in \mathbb{R}$$

perché stiamo sempre supponendo che $\exists \text{Av}(J_X^N), \text{Av}(J_A^{N_1}), \text{Av}(J_B^{N_2}) \in \mathbb{R}$.

Ora:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} \text{Av} \left(\frac{dP}{dt}(t) \right) &= \sum_{X \subseteq \{1, \dots, N\}} f'_X(t) \text{Av}(J_X^N \omega(t)(\sigma_X)) + \sum_{A \subseteq \{1, \dots, N_1\}} g'_A(t) \text{Av}(J_A^{N_1} \omega(t)(\sigma_A)) + \\ &\quad \sum_{B \subseteq \{N_1+1, \dots, N\}} g'_B(t) \text{Av}(J_B^{N_2} \omega(t)(\sigma_B)) . \quad \square \end{aligned}$$

Capitolo 2

Lo stato fondamentale

Si dice che un sistema termodinamico si trova nel suo *stato fondamentale* se la sua energia è minima.

Nel caso di un sistema dicotomico, una configurazione degli spin $\sigma \in \Omega_N$ è di stato fondamentale se

$$H_N(\sigma) = \min_{\tau \in \Omega_N} H_N(\tau) .$$

Si chiama energia dello stato fondamentale del sistema

$$E_N := \min_{\tau \in \Omega_N} H_N(\tau) .$$

Osserviamo che, se il sistema è ferromagnetico, $E_N = - \sum_{X \subseteq \{1, \dots, N\}} J_X^N$.

2.1 Stato fondamentale e temperatura zero

Il seguente teorema lega l'energia dello stato fondamentale all'energia libera a temperatura zero.

Teorema 8. $F_N(\beta)$ è monotona crescente rispetto a β . Inoltre:

$$\exists \lim_{\beta \rightarrow +\infty} F_N(\beta) = E_N \quad e \quad \exists \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \text{Av}(F_N(\beta)) = \text{Av}(E_N) .$$

Dimostrazione. Osserviamo che: $\forall \beta > 0$

$$\begin{aligned} F_N(\beta) &= -\frac{1}{\beta} P_N(\beta) = -\frac{1}{\beta} \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H_N(\sigma)} \geq -\frac{1}{\beta} \log(2^N \max_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H_N(\sigma)}) \\ &= -\frac{1}{\beta} \log(2^N e^{-\beta E_N}) = -\frac{1}{\beta} (N \log 2 - \beta E_N) = E_N - \frac{N}{\beta} \log 2 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_N(\beta) &= -\frac{1}{\beta} P_N(\beta) = -\frac{1}{\beta} \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H_N(\sigma)} \leq -\frac{1}{\beta} \log \max_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H_N(\sigma)} \\ &= -\frac{1}{\beta} \log e^{-\beta E_N} = -\frac{1}{\beta} (-\beta E_N) = E_N . \end{aligned}$$

Allora, per il teorema dei due carabinieri:

$$E_N - \frac{N}{\beta} \log 2 \leq F_N(\beta) \leq E_N \quad \forall \beta > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_{\beta \rightarrow +\infty} F_N(\beta) = E_N .$$

Ora, sfruttando il bound dall'alto, osserviamo anche che: $\forall \beta > 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_N}{\partial \beta}(\beta) &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-\frac{1}{\beta} \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H_N(\sigma)} \right) = \\ &= \frac{1}{\beta^2} \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H_N(\sigma)} - \frac{1}{\beta} \frac{\sum_{\sigma} -H_N(\sigma) e^{-\beta H_N(\sigma)}}{\sum_{\sigma} e^{-\beta H_N(\sigma)}} \\ &= \frac{1}{\beta} (-F_N(\beta) + \omega_N(\beta)(H_N)) \geq \frac{1}{\beta} (-F_N(\beta) + E_N) \geq 0 \end{aligned}$$

Quindi, per il teorema di Beppo Levi sulla convergenza monotona,

$$F_N \text{ crescente risp. a } \beta \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \text{Av}(F_N(\beta)) = \text{Av}\left(\lim_{\beta \rightarrow +\infty} F_N(\beta)\right) = \text{Av}(E_N)$$

□

Il teorema e l'osservazione seguenti si preoccupano di studiare il limite termodinamico dell'energia libera a temperatura zero.

Teorema 9. *Se $\text{Av}(P_N(\beta))$ è sub/super-additiva rispetto ad N per ogni $\beta > 0$ (è sufficiente per N e β abbastanza grandi), allora:*

$$\exists \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Av}\left(\frac{F_N(\beta)}{N}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Av}\left(\frac{F_N(\beta)}{N}\right) .$$

Dimostrazione. Per fissare le idee supponiamo $\text{Av}(P_N(\beta))$ sub-additiva.

Allora: $\forall N_1, N_2 \in \mathbb{N}, N_1 + N_2 = N$

$$\begin{aligned} \text{Av}(P_N(\beta)) &\leq \text{Av}(P_{N_1}(\beta)) + \text{Av}(P_{N_2}(\beta)) \quad \forall \beta > 0 \quad \xrightarrow{F_N = -P_N/\beta} \\ \text{Av}(F_N(\beta)) &\geq \text{Av}(F_{N_1}(\beta)) + \text{Av}(F_{N_2}(\beta)) \quad \forall \beta > 0 \quad \xrightarrow{\text{teor. 8}} \\ \text{Av}(E_N) &\geq \text{Av}(E_{N_1}) + \text{Av}(E_{N_2}) \end{aligned}$$

Per il lemma 4, dalla super-additività di $\text{Av}(F_N(\beta))$ e di $\text{Av}(E_N)$ seguono rispettivamente:

$$\exists \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Av}\left(\frac{F_N(\beta)}{N}\right) = \sup_{N \in \mathbb{N}} \text{Av}\left(\frac{F_N(\beta)}{N}\right) \quad \forall \beta > 0, \quad (2.1)$$

$$\exists \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Av}\left(\frac{E_N}{N}\right) = \sup_{N \in \mathbb{N}} \text{Av}\left(\frac{E_N}{N}\right). \quad (2.2)$$

Inoltre, dal fatto che $\frac{F_N(\beta)}{N} \nearrow$ risp. a $\beta \forall N \in \mathbb{N}$ (vedi teorema 8), seguono:

$$\text{Av}\left(\frac{F_N(\beta)}{N}\right) \nearrow \text{ risp. a } \beta \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad (2.3)$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Av}\left(\frac{F_N(\beta)}{N}\right) \nearrow \text{ risp. a } \beta \quad (2.4)$$

Allora:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Av}\left(\frac{E_N}{N}\right) &\stackrel{(2.2)}{=} \sup_{N \in \mathbb{N}} \text{Av}\left(\frac{E_N}{N}\right) \stackrel{\text{teor. 8}}{=} \sup_{N \in \mathbb{N}} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \text{Av}\left(\frac{F_N(\beta)}{N}\right) \stackrel{(2.3)}{=} \sup_{N \in \mathbb{N}} \sup_{\beta > 0} \text{Av}\left(\frac{F_N(\beta)}{N}\right) \\ &= \sup_{\beta > 0} \sup_{N \in \mathbb{N}} \text{Av}\left(\frac{F_N(\beta)}{N}\right) \stackrel{(2.1)}{=} \sup_{\beta > 0} \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Av}\left(\frac{F_N(\beta)}{N}\right) \stackrel{(2.4)}{=} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Av}\left(\frac{F_N(\beta)}{N}\right). \quad \square \end{aligned}$$

Osservazione 10. Consideriamo un sistema ferromagnetico di hamiltoniana:

$$H_N(\sigma) = - \sum_{\substack{X \subseteq \{1, \dots, N\} \\ |X| \leq n}} J_X^N \sigma_X \quad \forall \sigma \in \Omega_N$$

con n indipendente da N e $J_X^N \geq 0$. Supponiamo che:

$$|X| = |Y| \Rightarrow \text{Av}(J_X^N) = \text{Av}(J_Y^N) \quad e \quad \exists \lim_{N \rightarrow +\infty} (N^{|X|-1} \text{Av}(J_X^N)) \in \mathbb{R}.$$

Allora:

$$\exists \lim_{N \rightarrow +\infty} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \text{Av}\left(\frac{F_N(\beta)}{N}\right) = - \sum_{|X|=1}^n \frac{1}{|X|!} \lim_{N \rightarrow +\infty} (N^{|X|-1} \text{Av}(J_X^N)) .$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \text{Av}\left(\frac{F_N(\beta)}{N}\right) &\xrightarrow{\text{teor.8}}_{\beta \rightarrow +\infty} \text{Av}\left(\frac{E_N}{N}\right) = -\frac{1}{N} \sum_{\substack{X \subseteq \{1, \dots, N\} \\ |X| \leq n}} \text{Av}(J_X^N) = -\frac{1}{N} \sum_{|X|=1}^n \binom{N}{|X|} \text{Av}(J_X^N) \\ &\sim -\frac{1}{N} \sum_{|X|=1}^n \frac{1}{|X|!} N^{|X|} \text{Av}(J_X^N) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} - \sum_{|X|=1}^n \frac{1}{|X|!} \lim_{N \rightarrow +\infty} (N^{|X|-1} \text{Av}(J_X^N)) \quad \square \end{aligned}$$

2.2 Configurazioni di spin possibili allo stato fondamentale

Ora vogliamo capire come si configurano gli spin quando il sistema si trova allo stato fondamentale.

Limitiamoci a considerare un sistema ferromagnetico con interazioni di coppia ed eventuale influenza di un campo magnetico esterno. L'hamiltoniana sarà del tipo:

$$H_N(\sigma) = - \sum_{i,j=1}^N J_{ij} \sigma_i \sigma_j - h \sum_{i=1}^N \sigma_i \quad \forall \sigma \in \Omega_N$$

con $J_{ij} \geq 0 \forall i, j = 1, \dots, N$ e $h \geq 0$.

Se è presente un campo magnetico esterno ($\mathbf{h} > \mathbf{0}$), c'è un'unica configurazione possibile allo stato fondamentale. Infatti:

$$H_N(\sigma) = E_N \Leftrightarrow \sigma_i \sigma_j = 1 \forall i, j : J_{ij} > 0, \quad \sigma_i = 1 \forall i = 1, \dots, N \Leftrightarrow \sigma = (1, 1, \dots, 1)$$

Cioè tutti gli spin si orientano come il campo esterno.

Se invece non c'è l'influenza di un campo magnetico esterno ($\mathbf{h} = \mathbf{0}$), lo studio richiede qualche sforzo in più.

Una configurazione di spin $\sigma \in \Omega_N$ si può realizzare quando il sistema si trova allo stato fondamentale se e solo se

$$H_N(\sigma) = E_N \Leftrightarrow \sigma_i \sigma_j = 1 \quad \forall i, j : J_{ij} > 0$$

In particolare σ deve verificare le condizioni seguenti.

- 1) $J_{ij} > 0 \Rightarrow \sigma_i = \sigma_j$. Se due particelle tendono a imitarsi, allora allo stato fondamentale si orientano nello stesso modo.

$$Dim: J_{ij} > 0 \Rightarrow \sigma_i \sigma_j = 1 \Rightarrow \sigma_i = \sigma_j .$$

- 2) $\exists s \in \{1, \dots, N\} : J_{is}, J_{sj} > 0 \Rightarrow \sigma_i = \sigma_j$. Se la particella i -esima tende ad imitarsi con la s -esima che a sua volta tende a imitarsi con la j -esima, allora allo stato fondamentale i e j si orientano nello stesso modo.

$$Dim: J_{is} > 0, J_{sj} > 0 \stackrel{1)}{\Rightarrow} \sigma_i = \sigma_s, \sigma_s = \sigma_j \Rightarrow \sigma_i = \sigma_j .$$

Per generalizzare queste proprietà, definiamo la seguente relazione di equivalenza tra le particelle del sistema: $\forall i, j \in \{1, \dots, N\}$

$$i \sim j \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} i = j \text{ oppure } \exists s_1, \dots, s_n \in \{1, \dots, N\} : J_{is_1}, J_{s_1 s_2}, \dots, J_{s_n j} > 0$$

(J_{is_1} e $J_{s_n j}$ possono anche essere sostituiti dai loro simmetrici)

i, j sono in relazione se esiste un percorso di interazioni imitative che le collega. Chiamiamo *cluster* ogni classe di equivalenza modulo \sim . Supponiamo ce ne siano p distinte: $[i_1], \dots, [i_p]$. Indichiamo la configurazione di spin dell' l -esimo cluster con $\sigma^{(l)} := (\sigma_i \mid i \in [i_l])$ per ogni $l = 1, \dots, p$. Notiamo che riordinando gli indici possiamo scrivere $\sigma = (\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(p)})$.

Ora continuiamo con le osservazioni.

- 3) $i \sim j \Rightarrow \sigma_i = \sigma_j$. Se c'è un percorso di interazioni imitative che collega le particelle i, j , allora allo stato fondamentale i, j si orientano nello stesso modo. In altre parole le particelle appartenenti ad uno stesso cluster allo stato fondamentale sono tutte equiorientate.

$$Dim: i \sim j \Rightarrow \exists s_1, \dots, s_n : J_{is_1}, J_{s_1 s_2}, \dots, J_{s_n j} > 0 \stackrel{1)}{\Rightarrow}$$

$$\sigma_i = \sigma_{s_1}, \sigma_{s_1} = \sigma_{s_2}, \dots, \sigma_{s_n} = \sigma_j \Rightarrow \sigma_i = \sigma_j .$$

$$4) H_N(\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(l)}, \dots, \sigma^{(p)}) = E_N \Rightarrow H_N(\sigma^{(1)}, \dots, -\sigma^{(l)}, \dots, \sigma^{(p)}) = E_N$$

$\forall l=1, \dots, N$. Allo stato fondamentale l'orientamento di ogni cluster può essere sia positivo che negativo.

Dim: Sia $\sigma \in \Omega_N : H_N(\sigma) = E_N$. Allora:

$$\begin{aligned} H_N(\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(l)}, \dots, \sigma^{(p)}) &= - \sum_{i,j=1}^N J_{ij} \sigma_i \sigma_j = \\ &= - \sum_{i,j \notin [i_l]} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - \sum_{\substack{i \in [i_l] \\ j \notin [i_l]}} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - \sum_{\substack{i \notin [i_l] \\ j \in [i_l]}} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - \sum_{i,j \in [i_l]} J_{ij} \sigma_i \sigma_j \stackrel{*}{=} \\ &= - \sum_{i,j \notin [i_l]} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - \sum_{i,j \in [i_l]} J_{ij} \sigma_i \sigma_j ; \\ H_N(\sigma^{(1)}, \dots, -\sigma^{(l)}, \dots, \sigma^{(p)}) &= \\ &= - \sum_{i,j \notin [i_l]} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - \sum_{\substack{i \in [i_l] \\ j \notin [i_l]}} J_{ij} (-\sigma_i) \sigma_j - \sum_{\substack{i \notin [i_l] \\ j \in [i_l]}} J_{ij} \sigma_i (-\sigma_j) - \sum_{i,j \in [i_l]} J_{ij} (-\sigma_i) (-\sigma_j) \\ &\stackrel{*}{=} - \sum_{i,j \notin [i_l]} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - \sum_{i,j \in [i_l]} J_{ij} \sigma_i \sigma_j \end{aligned}$$

* infatti dalla definizione $i \approx j \Rightarrow J_{ij} = 0$.

Osserviamo che le configurazioni di spin possibili quando il sistema è nello stato fondamentale sono 2^p , dove p è il numero di cluster del sistema. Infatti, allo stato fondamentale, ogni cluster è caratterizzato da un orientamento (per 3)), che può essere scelto in 2 modi (per 4)).

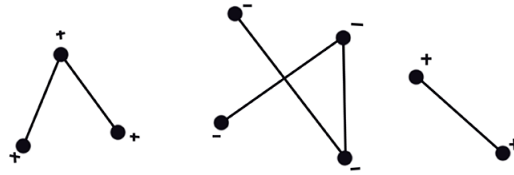


Figura 2.1: Sistema composto da tre cluster, in una possibile configurazione di stato fondamentale

$$5) \#\{\sigma, H_N(\sigma) = E_N \mid \sigma_i = 1\} = \#\{\sigma, H_N(\sigma) = E_N \mid \sigma_i = -1\} \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Ci sono tante possibili configurazioni del sistema allo stato fondamentale in cui lo spin i -esimo ha un'orientamento, quante quelle in cui ha

l'orientamento opposto.

Dim: Consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} \phi : \{ \sigma, H_N(\sigma) = E_N \mid \sigma_i = 1 \} &\rightarrow \{ \tau, H_N(\tau) = E_N \mid \tau_i = -1 \}, \\ \phi(\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(l)}, \dots, \sigma^{(p)}) &= (\sigma^{(1)}, \dots, -\sigma^{(l)}, \dots, \sigma^{(p)}), \quad \text{se } i \in [i_l]. \end{aligned}$$

ϕ è ben definita, infatti: $\sigma_i = 1 \Rightarrow \tau_i = -\sigma_i = -1$ e

$$H_N(\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(l)}, \dots, \sigma^{(p)}) = E_N \stackrel{4)}{\Rightarrow} H_N(\sigma^{(1)}, \dots, -\sigma^{(l)}, \dots, \sigma^{(p)}) = E_N .$$

Ora si verifica facilmente che ϕ è una biezione:

$$\begin{aligned} \phi \text{ 1-1: } \phi(\sigma) = \phi(\sigma') &\Rightarrow (\sigma^{(1)}, \dots, -\sigma^{(l)}, \dots, \sigma^{(p)}) = ((\sigma')^{(1)}, \dots, -(\sigma')^{(l)}, \dots, (\sigma')^{(p)}) \\ &\Rightarrow \sigma^{(h)} = (\sigma')^{(h)} \quad \forall h = 1, \dots, p \Rightarrow \sigma = \sigma' ; \end{aligned}$$

$$\phi \text{ su: } (\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(l)}, \dots, \tau^{(p)}) = \phi(\tau^{(1)}, \dots, -\tau^{(l)}, \dots, \tau^{(p)}) .$$

$$6) \quad i \approx j \Rightarrow \#\{\sigma, H_N(\sigma) = E_N \mid \sigma_i \sigma_j = 1\} = \#\{\sigma, H_N(\sigma) = E_N \mid \sigma_i \sigma_j = -1\} .$$

Se le particelle i, j si trovano in cluster diversi, allora ci sono tante possibili configurazioni del sistema allo stato fondamentale in cui i, j hanno lo stesso orientamento quante quelle in cui hanno orientamento opposto.

Dim: Consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} \phi : \{ \sigma, H_N(\sigma) = E_N \mid \sigma_i \sigma_j = 1 \} &\rightarrow \{ \tau, H_N(\tau) = E_N \mid \tau_i \tau_j = -1 \} \\ \phi(\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(l)}, \dots, \sigma^{(p)}) &= (\sigma^{(1)}, \dots, -\sigma^{(l)}, \dots, \sigma^{(p)}), \quad \text{se } i \in [i_l]. \end{aligned}$$

Osserviamo che $i \approx j \Rightarrow j \notin [i_l]$. ϕ è ben definita, infatti: $\sigma_i \sigma_j = 1 \Rightarrow$

$$\tau_i \tau_j = -\sigma_i \sigma_j = -1 \quad \text{e}$$

$$H_N(\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(l)}, \dots, \sigma^{(p)}) = E_N \stackrel{4)}{\Rightarrow} H_N(\sigma^{(1)}, \dots, -\sigma^{(l)}, \dots, \sigma^{(p)}) = E_N .$$

Ora si verifica facilmente che ϕ è una biezione, esattamente come nel punto 5).

2.3 Misura di Boltzmann-Gibbs a temperatura zero

Conoscere la struttura del sistema allo stato fondamentale ci servirà a dimostrare la proposizione 12.

Lemma 11. Indichiamo con $\mathbb{P}_N(\beta)$ la misura di Boltzmann-Gibbs relativa ad H_N e β .

Quando $\beta \rightarrow +\infty$ essa continua ad essere una misura di probabilità sullo spazio Ω_N delle configurazioni di spin. Precisamente, se indichiamo con n il numero di configurazioni di spin possibili allo stato fondamentale:

$$\mathbb{P}_N(\beta)(\sigma) \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{se } H_N(\sigma) = E_N \\ 0, & \text{se } H_N(\sigma) > E_N \end{cases}$$

Dimostrazione. Scriviamo la probabilità che una configurazione di spin $\sigma \in \Omega_N$ si realizzi mettendo in evidenza E_N , poi mandiamo $\beta \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_N(\beta)(\sigma) &= \frac{e^{-\beta H_N(\sigma)}}{\sum_{\tau} e^{-\beta H_N(\tau)}} = \frac{e^{-\beta H_N(\sigma)}}{e^{-\beta E_N} \sum_{\tau} e^{-\beta (H_N(\tau) - E_N)}} = \frac{e^{-\beta (H_N(\sigma) - E_N)}}{\sum_{\tau} e^{-\beta (H_N(\tau) - E_N)}} \\ &= \frac{e^{-\beta (H_N(\sigma) - E_N)}}{n + \sum_{\tau, H_N(\tau) > E_N} e^{-\beta (H_N(\tau) - E_N)}} \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{se } H_N(\sigma) = E_N \\ 0, & \text{se } H_N(\sigma) > E_N \end{cases} \end{aligned}$$

Osserviamo che:

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_N(\beta)(\sigma) \in [0, 1] \quad \forall \sigma \in \Omega_N \quad \text{e} \quad \sum_{\sigma \in \Omega_N} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_N(\beta)(\sigma) = n \frac{1}{n} = 1$$

cioè $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_N(\beta)$ è una misura di probabilità su Ω_N . \square

Proposizione 12. Consideriamo un sistema ferromagnetico di hamiltoniana

$$H_N(\sigma) = - \sum_{i,j=1}^N J_{ij} \sigma_i \sigma_j - h \sum_{i=1}^N \sigma_i \quad \forall \sigma \in \Omega_N, \quad \text{con } J_{ij}, h \geq 0.$$

Allora:

$$\omega_N(\beta)(\sigma_i) \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1, & \text{se } h > 0 \\ 0, & \text{se } h = 0 \end{cases} \quad ; \quad \omega_N(\beta)(\sigma_i \sigma_j) \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1, & \text{se } h > 0 \text{ o } i \sim j \\ 0, & \text{se } h = 0 \text{ e } i \not\sim j \end{cases}$$

Dimostrazione. Indichiamo con n il numero di configurazioni di spin possibili allo stato fondamentale. Usiamo il lemma 9 per calcolare: $\forall X \subseteq \{1, \dots, N\}$

$$\omega_N(\beta)(\sigma_X) = \sum_{\sigma \in \Omega_N} \sigma_X \frac{e^{-\beta H_N(\sigma)}}{\sum_{\tau} e^{-\beta H_N(\tau)}} \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} \sum_{\substack{\sigma \in \Omega_N \\ H_N(\sigma) = E_N}} \sigma_X \frac{1}{n}$$

Allora, se $h > 0$, ricordando che $n = 1$ e $H_N(\sigma) = E_N \Leftrightarrow \sigma = (1, 1, \dots, 1)$, si trovano:

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \omega_N(\beta)(\sigma_i) = \sum_{\substack{\sigma \in \Omega_N \\ H_N(\sigma) = E_N}} \sigma_i = 1 \quad ; \quad \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \omega_N(\beta)(\sigma_i \sigma_j) = \sum_{\substack{\sigma \in \Omega_N \\ H_N(\sigma) = E_N}} \sigma_i \sigma_j = 1$$

Se invece $h = 0$, ricordando che $n = 2^p$ e usando le osservazioni precedenti, si trovano:

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \omega_N(\beta)(\sigma_i) = \frac{1}{2^p} \sum_{\substack{\sigma \in \Omega_N \\ H_N(\sigma) = E_N}} \sigma_i \stackrel{5)}{=} \frac{1}{2^p} (2^{p-1} \cdot 1 + 2^{p-1} \cdot (-1)) = 0 \quad ;$$

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \omega_N(\beta)(\sigma_i \sigma_j) = \frac{1}{2^p} \sum_{\substack{\sigma \in \Omega_N \\ H_N(\sigma) = E_N}} \sigma_i \sigma_j \stackrel{6), 3)}{=} \begin{cases} \text{se } i \approx j, & \frac{1}{2^p} (2^{p-1} \cdot 1 + 2^{p-1} \cdot (-1)) = 0 \\ \text{se } i \sim j, & \frac{1}{2^p} \sum_{\sigma, H_N(\sigma) = E_N} 1 = \frac{1}{2^p} 2^p = 1 \end{cases}$$

□

Capitolo 3

Modello di Sherrington-Kirkpatrick

Il modello di Sherrington-Kirkpatrick è descritto dall'hamiltoniana

$$H_N(\sigma) = -\frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{i,j=1}^N J_{ij} \sigma_i \sigma_j - h \sum_{i=1}^N \sigma_i \quad \forall \sigma \in \Omega_N$$

dove $h \in \mathbb{R}$ e $\{J_{ij}\}_{i,j=1\dots N}$ è una famiglia di variabili aleatorie indipendenti identicamente distribuite, con distribuzione *Normale*(0, 1).

Ricordiamo che $I(J_{ij}) = \mathbb{R}$, $\text{Av}(J_{ij}) = 0$, $\text{Var}(J_{ij}) = 1$.

La pressione del sistema è

$$P_N = \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H_N(\sigma)} .$$

Ricordiamo che, visto che le J_{ij} sono v.a. assolutamente continue con valor medio finito, $\exists \text{Av}(P_N) \in \mathbb{R}$ (per l'osservazione 2).

Lemma 13. *Siano X_1, \dots, X_n variabili aleatorie indipendenti identicamente distribuite, con distribuzione *Normale*(0, 1).*

Sia $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $\exists \text{Av}(X_i F(X)) \in \mathbb{R}$.

Allora:

$$\text{Av}(X_i F(X)) = \text{Av}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(X)\right) .$$

Dimostrazione. Osserviamo che:

$$\begin{aligned} \exists \text{Av}(X_i F(X)) \in \mathbb{R} &\Rightarrow \exists \text{Av}(X_i F(x_1, \dots, X_i, \dots, x_n)) \in \mathbb{R} \quad \forall \hat{x}_i \in \mathbb{R}^{n-1} \\ \Rightarrow \exists \int_{-\infty}^{+\infty} x_i F(x) e^{-\frac{1}{2} x_i^2} dx_i \in \mathbb{R} &\Rightarrow x_i F(x) e^{-\frac{1}{2} x_i^2} \xrightarrow{x_i \rightarrow \pm\infty} 0 \\ \Rightarrow F(x) e^{-\frac{1}{2} x_i^2} &\xrightarrow{x_i \rightarrow \pm\infty} 0. \end{aligned}$$

Allora, usando il teorema di integrazione per parti, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x_i F(x) p_{X_i}(x_i) dx_i &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x_i F(x) e^{-\frac{1}{2} x_i^2} dx_i = \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left([-F(x) e^{-\frac{1}{2} x_i^2}]_{x_i \rightarrow -\infty}^{x_i \rightarrow +\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) e^{-\frac{1}{2} x_i^2} dx_i \right) &= \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) e^{-\frac{1}{2} x_i^2} dx_i &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) p_{X_i}(x_i) dx_i. \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \text{Av}(X_i F(X)) &= \int_{\mathbb{R}^n} x_i F(x) p_X(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_i F(x) p_{X_i}(x_i) dx_i \right) p_{\hat{X}_i}(\hat{x}_i) d\hat{x}_i \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) p_{X_i}(x_i) dx_i \right) p_{\hat{X}_i}(\hat{x}_i) d\hat{x}_i \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) p_X(x) dx = \text{Av}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(X)\right). \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 14. Siano $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $N = N_1 + N_2$. Allora:

$$\text{Av}(P_N) \geq \text{Av}(P_{N_1}) + \text{Av}(P_{N_2}).$$

Dimostrazione. Definiamo l'hamiltoniana interpolante: $\forall t \in [0, 1] \quad \forall \sigma \in \Omega_N$

$$H(t)(\sigma) := -\frac{\sqrt{t}}{2N} \sum_{i,j=1}^N J_{ij} \sigma_i \sigma_j - \frac{\sqrt{1-t}}{2N_1} \sum_{i,j=1}^{N_1} J'_{ij} \sigma_i \sigma_j - \frac{\sqrt{1-t}}{2N_2} \sum_{i,j=N_1+1}^N J''_{ij} \sigma_i \sigma_j - h \sum_{i=1}^N \sigma_i$$

dove $\{J_{ij}\}_{i,j=1 \dots N}$, $\{J'_{ij}\}_{i,j=1 \dots N_1}$, $\{J''_{ij}\}_{i,j=N_1+1 \dots N}$ sono tre famiglie indipendenti di variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione $\mathcal{Normale}(0, 1)$.

La relativa pressione è: $\forall t \in [0, 1]$

$$P(t) := \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H(t)(\sigma)} .$$

Per $t = 1$ abbiamo il sistema ad N particelle ($H(1) \approx H_N$), mentre per $t = 0$ abbiamo due sistemi disgiunti di N_1 ed N_2 particelle ($H(0) \approx H_{N_1} + H_{N_2}$). Il parametro t permette di passare il modo regolare da una situazione all'altra. Per l'osservazione 7 si ha: $\forall t \in]0, 1[$

$$\begin{aligned} \text{Av} \left(\frac{dP}{dt}(t) \right) &= \frac{\beta}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{t}N} \sum_{i,j=1}^N \text{Av}(J_{ij} \cdot \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)) + \right. \\ &\left. - \frac{1}{\sqrt{(1-t)N_1}} \sum_{i,j=1}^{N_1} \text{Av}(J'_{ij} \cdot \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)) - \frac{1}{\sqrt{(1-t)N_2}} \sum_{i,j=N_1+1}^N \text{Av}(J''_{ij} \cdot \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)) \right) . \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ora, per il lemma 8:

$$\text{Av}(J_{ij} \cdot \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)) = \text{Av} \left(\frac{\partial \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)}{\partial J_{ij}} \right) \quad (3.2)$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)}{\partial J_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial J_{ij}} \left(\frac{\sum_{\sigma} \sigma_i \sigma_j e^{-\beta H(t)(\sigma)}}{\sum_{\sigma} e^{-\beta H(t)(\sigma)}} \right) = \\ &= \frac{\sum_{\sigma} \sigma_i \sigma_j \frac{\beta \sqrt{t}}{\sqrt{2N}} \sigma_i \sigma_j e^{-\beta H(t)(\sigma)} \sum_{\sigma} e^{-\beta H(t)(\sigma)} - \sum_{\sigma} \sigma_i \sigma_j e^{-\beta H(t)(\sigma)} \sum_{\sigma} \frac{\beta \sqrt{t}}{\sqrt{2N}} \sigma_i \sigma_j e^{-\beta H(t)(\sigma)}}{(\sum_{\sigma} e^{-\beta H(t)(\sigma)})^2} \\ &= \beta \sqrt{\frac{t}{2N}} \frac{(\sum_{\sigma} e^{-\beta H(t)(\sigma)})^2 - (\sum_{\sigma} \sigma_i \sigma_j e^{-\beta H(t)(\sigma)})^2}{(\sum_{\sigma} e^{-\beta H(t)(\sigma)})^2} = \beta \sqrt{\frac{t}{2N}} (1 - \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)^2) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ora facciamo una copia del sistema (mantenendo anche le stesse interazioni) e indichiamone le variabili di spin, indipendenti da quelle del sistema originale, con $\tau \in \Omega_N$.

Definiamo gli overlap:

$$q_N(\sigma, \tau) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i \tau_i \quad \forall \sigma, \tau \in \Omega_N .$$

Usando il fatto che $\sigma_i \sigma_j$ e $\tau_i \tau_j$ sono indipendenti, si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^N \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)^2 &= \sum_{i,j=1}^N \omega(t)(\sigma_i \sigma_j) \cdot \omega(t)(\tau_i \tau_j) = \sum_{i,j=1}^N \omega(t)(\sigma_i \sigma_j \tau_i \tau_j) \\ &= \omega(t) \left(\sum_{i,j=1}^N \sigma_i \tau_i \sigma_j \tau_j \right) = N^2 \omega(t)(q_N^2) . \end{aligned} \quad (3.4)$$

Quindi ricapitolando: $\forall t \in]0, 1[$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^N \text{Av}(J_{ij} \cdot \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)) &\stackrel{(3.2)}{=} \sum_{i,j=1}^N \text{Av} \frac{\partial \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)}{\partial J_{ij}} \stackrel{(3.3)}{=} \\ \beta \sqrt{\frac{t}{2N}} \sum_{i,j=1}^N \text{Av}(1 - \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)^2) &= \beta \sqrt{\frac{t}{2N}} \left(\sum_{i,j=1}^N 1 - \text{Av} \left(\sum_{i,j=1}^N \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)^2 \right) \right) \stackrel{(3.4)}{=} \\ \beta \sqrt{\frac{t}{2N}} (N^2 - N^2 \text{Av} \omega(t)(q_N^2)) &= \beta N^2 \sqrt{\frac{t}{2N}} (1 - \text{Av} \omega(t)(q_N^2)) . \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ragionando analogamente si trovano: $\forall t \in]0, 1[$

$$\sum_{i,j=1}^{N_1} \text{Av}(J'_{ij} \cdot \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)) = \beta N_1^2 \sqrt{\frac{1-t}{2N_1}} (1 - \text{Av} \omega(t)(q_{N_1}^2)) ; \quad (3.6)$$

$$\sum_{i,j=N_1+1}^N \text{Av}(J''_{ij} \cdot \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)) = \beta N_2^2 \sqrt{\frac{1-t}{2N_2}} (1 - \text{Av} \omega(t)(q_{N_2}^2)) . \quad (3.7)$$

Allora, sostituendo (3.5), (3.6), (3.7) in (3.1): $\forall t \in]0, 1[$

$$\begin{aligned} \text{Av} \left(\frac{dP}{dt}(t) \right) &= \\ \frac{\beta^2}{2\sqrt{2}} \left(\frac{N^2}{\sqrt{t} N} \sqrt{\frac{t}{2N}} (1 - \text{Av} \omega(t)(q_N^2)) - \frac{N_1^2}{\sqrt{(1-t)} N_1} \sqrt{\frac{1-t}{2N_1}} (1 - \text{Av} \omega(t)(q_{N_1}^2)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{N_2^2}{\sqrt{(1-t)} N_2} \sqrt{\frac{1-t}{2N_2}} (1 - \text{Av} \omega(t)(q_{N_2}^2)) \right) = \\ \frac{\beta^2}{4} (N - N_1 - N_2) - \frac{\beta^2}{4} (N \text{Av} \omega(t)(q_N^2) - N_1 \text{Av} \omega(t)(q_{N_1}^2) - N_2 \text{Av} \omega(t)(q_{N_2}^2)) &= \\ - \beta^2 \frac{N}{4} \text{Av} \omega(t)(q_N^2 - \frac{N_1}{N} q_{N_1}^2 - \frac{N_2}{N} q_{N_2}^2) . \end{aligned} \quad (3.8)$$

Osserviamo che:

$$q_N(\sigma, \tau) = \frac{N_1}{N} q_{N_1}(\sigma', \tau') + \frac{N_2}{N} q_{N_2}(\sigma'', \tau'') \quad \forall \sigma, \tau \in \Omega_N$$

Per la convessità della funzione $x \mapsto x^2$, segue che:

$$q_N^2 = \left(\frac{N_1}{N} q_{N_1} + \frac{N_2}{N} q_{N_2} \right)^2 \leq \frac{N_1}{N} q_{N_1}^2 + \frac{N_2}{N} q_{N_2}^2$$

Allora:

$$\begin{aligned} q_N^2 - \frac{N_1}{N} q_{N_1}^2 - \frac{N_2}{N} q_{N_2}^2 &\leq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Av} \omega(t) (q_N^2 - \frac{N_1}{N} q_{N_1}^2 - \frac{N_2}{N} q_{N_2}^2) \leq 0 \quad \forall t \in]0, 1[\\ \stackrel{(38)}{\Rightarrow} \quad \text{Av} \left(\frac{dP}{dt}(t) \right) &\geq 0 \quad \forall t \in]0, 1[\quad \stackrel{\text{lemma6}}{\Rightarrow} \quad \text{Av}(P_N) \geq \text{Av}(P_{N_1}) + \text{Av}(P_{N_2}) . \quad \square \end{aligned}$$

Proposizione 15.

$$\exists \bar{c} \in \mathbb{R} : \quad \text{Av} \left(\frac{P_N}{N} \right) \leq \bar{c} \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

Per esempio $\bar{c} = \frac{\beta^2}{4} + \log 2 + \log \cosh(\beta h)$.

Dimostrazione. Usando l'indipendenza delle J_{ij} , $i, j = 1, \dots, N$ scriviamo:

$$\begin{aligned} \text{Av} \left(\sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H_N(\sigma)} \right) &= \sum_{\sigma \in \Omega_N} \text{Av} (e^{-\beta H_N(\sigma)}) = \sum_{\sigma \in \Omega_N} \text{Av} (e^{\frac{\beta}{\sqrt{2N}} \sum_{i,j=1}^N J_{ij} \sigma_i \sigma_j + \beta h \sum_{i=1}^N \sigma_i}) \\ &= \sum_{\sigma \in \Omega_N} \text{Av} \left(\prod_{i,j=1}^N e^{\frac{\beta}{\sqrt{2N}} J_{ij} \sigma_i \sigma_j} \right) e^{\beta h \sum_{i=1}^N \sigma_i} \\ &= \sum_{\sigma \in \Omega_N} \prod_{i,j=1}^N \text{Av} (e^{\frac{\beta}{\sqrt{2N}} J_{ij} \sigma_i \sigma_j}) e^{\beta h \sum_{i=1}^N \sigma_i} . \end{aligned}$$

Poiché ogni J_{ij} ha distribuzione *Normale*(0, 1), calcoliamo:

$$\begin{aligned} \text{Av} (e^{\frac{\beta}{\sqrt{2N}} J_{ij} \sigma_i \sigma_j}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\beta}{\sqrt{2N}} x \sigma_i \sigma_j} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 - 2 \frac{x \beta \sigma_i \sigma_j}{2\sqrt{2N}} + \left(\frac{\beta \sigma_i \sigma_j}{2\sqrt{N}} \right)^2 \right)} e^{\left(\frac{\beta \sigma_i \sigma_j}{2\sqrt{N}} \right)^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\beta^2}{4N}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\beta \sigma_i \sigma_j}{2\sqrt{N}} \right)^2} dx = \left(t := \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\beta \sigma_i \sigma_j}{2\sqrt{N}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\beta^2}{4N}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \sqrt{2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\beta^2}{4N}} \sqrt{2} \sqrt{\pi} = e^{\frac{\beta^2}{4N}} \end{aligned}$$

Calcoliamo anche:

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{\beta h \sum_{i=1}^N \sigma_i} &= \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} e^{\beta h (n - (N-n))} = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} (e^{\beta h})^n (e^{-\beta h})^{N-n} \\ &= (e^{\beta h} + e^{-\beta h})^N = 2^N \cosh(\beta h)^N. \end{aligned}$$

Dunque:

$$\begin{aligned} \text{Av} \left(\sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H_N(\sigma)} \right) &= \sum_{\sigma \in \Omega_N} \prod_{i,j=1}^N \text{Av} \left(e^{\frac{\beta}{\sqrt{2N}} J_{ij} \sigma_i \sigma_j} \right) e^{\beta h \sum_{i=1}^N \sigma_i} \\ &= \sum_{\sigma \in \Omega_N} \prod_{i,j=1}^N e^{\frac{\beta^2}{4N}} e^{\beta h \sum_{i=1}^N \sigma_i} = (e^{\frac{\beta^2}{4N}})^{N^2} \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{\beta h \sum_{i=1}^N \sigma_i} \\ &= e^{\frac{N}{4} \beta^2} 2^N \cosh(\beta h)^N. \end{aligned}$$

Allora, applicando la disuguaglianza di Jensen ($x \mapsto \log x$ è concava):

$$\begin{aligned} \text{Av} \left(\frac{P_N}{N} \right) &= \frac{1}{N} \text{Av} \left(\log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H_N(\sigma)} \right) \leq \frac{1}{N} \log \text{Av} \left(\sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H_N(\sigma)} \right) \\ &= \frac{1}{N} \log \left(e^{\frac{\beta^2 N}{4}} 2^N \cosh(\beta h)^N \right) \\ &= \frac{1}{N} \left(\frac{N}{4} \beta^2 + N \log 2 + N \log \cosh(\beta h) \right) \\ &= \frac{\beta^2}{4} + \log 2 + \log \cosh(\beta h). \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 16.

$$\exists \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Av} \left(\frac{P_N}{N} \right) = \sup_{N \in \mathbb{N}} \text{Av} \left(\frac{P_N}{N} \right) \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione. Dal teorema 11, per il lemma 4:

$$\begin{aligned} \text{Av}(P_{N_1+N_2}) &\geq \text{Av}(P_{N_1}) + \text{Av}(P_{N_2}) \quad \forall N_1, N_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow \\ \exists \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Av} \left(\frac{P_N}{N} \right) &= \sup_{N \in \mathbb{N}} \text{Av} \left(\frac{P_N}{N} \right) \end{aligned}$$

Inoltre per la proposizione 12: $\sup_{N \in \mathbb{N}} \text{Av} \left(\frac{P_N}{N} \right) \in \mathbb{R}.$ □

Capitolo 4

Modello ferromagnetico diluito

Il modello ferromagnetico diluito è descritto dall'hamiltoniana

$$H_N(\sigma) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \varepsilon_{ij}^N \sigma_i \sigma_j - h \sum_{i=1}^N \sigma_i \quad \forall \sigma \in \Omega_N$$

dove $h \geq 0$ e $\{\varepsilon_{ij}^N\}_{i,j=1\dots N}$ è una famiglia di variabili aleatorie indipendenti identicamente distribuite, con distribuzione $\mathcal{Poisson}(\frac{c}{N})$, $c > 0$.

Ricordiamo che $I(\varepsilon_{ij}^N) = \mathbb{N}_0$, $\text{Av}(\varepsilon_{ij}^N) = \frac{c}{N}$, $\text{Var}(\varepsilon_{ij}^N) = \frac{c}{N}$.

La pressione del sistema è

$$P_N = \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H_N(\sigma)} .$$

Ricordiamo che, visto che le ε_{ij}^N sono v.a. discrete con valor medio finito, $\exists \text{Av}(P_N) \in \mathbb{R}$ (per l'osservazione 2).

Lemma 17. *Siano X_1, \dots, X_n variabili aleatorie indipendenti identicamente distribuite, con distribuzione $\mathcal{Poisson}(\lambda)$.*

Sia $F : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\exists \text{Av}(X_i F(X)) \in \mathbb{R}$. Allora:

$$\text{Av}(X_i F(X)) = \lambda \text{Av} F(X_1, \dots, X_i+1, \dots, X_n) .$$

Dimostrazione. Osserviamo che:

$$\begin{aligned} \sum_{k_i=0}^{\infty} k_i F(k) P(X_i=k_i) &= \sum_{k_i=0}^{\infty} k_i F(k) \frac{\lambda^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda} = \sum_{k_i=1}^{\infty} F(k) \frac{\lambda^{k_i}}{(k_i-1)!} e^{-\lambda} = \\ &= \sum_{k_i=0}^{\infty} F(k_1, \dots, k_i+1, \dots, k_n) \frac{\lambda^{k_i+1}}{k_i!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k_i=0}^{\infty} F(k_1, \dots, k_i+1, \dots, k_n) P(X_i=k_i) \end{aligned}$$

Allora:

$$\begin{aligned} \text{Av}(X_i F(X)) &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} k_i F(k) P(X=k) = \sum_{\widehat{k}_i \in \mathbb{N}_0^{n-1}} \left(\sum_{k_i=0}^{\infty} k_i F(k) P(X_i=k_i) \right) P(\widehat{X}_i = \widehat{k}_i) \\ &= \lambda \sum_{\widehat{k}_i \in \mathbb{N}_0^{n-1}} \left(\sum_{k_i=0}^{\infty} F(k_1, \dots, k_i+1, \dots, k_n) P(X_i=k_i) \right) P(\widehat{X}_i = \widehat{k}_i) \\ &= \lambda \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} F(k_1, \dots, k_i+1, \dots, k_n) P(X=k) = \lambda \text{Av}(F(X_1, \dots, X_i+1, \dots, X_n)) . \quad \square \end{aligned}$$

Lemma 18. *Sia $X(t)$ una variabile aleatoria con distribuzione Poisson($\lambda(t)$), per ogni $t \in I$ intervallo reale. Supponiamo λ derivabile su I .*

Sia $F : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\exists \text{Av } F(X(t)) \forall t \in I$. Allora: $\forall t \in I$

$$\exists \frac{d}{dt} \text{Av } F(X(t)) = \lambda'(t) \text{Av}(F(X(t)+1) - F(X(t))) .$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{Av } F(X(t)) &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=0}^{\infty} F(k) \frac{\lambda(t)^k}{k!} e^{-\lambda(t)} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(F(0) e^{-\lambda(t)} + \sum_{k=1}^{\infty} F(k) \frac{\lambda(t)^k}{k!} e^{-\lambda(t)} \right) \\ &= -F(0) \lambda'(t) e^{-\lambda(t)} + \sum_{k=1}^{\infty} F(k) \frac{\lambda'(t) k \lambda(t)^{k-1}}{k!} e^{-\lambda(t)} - \sum_{k=1}^{\infty} F(k) \frac{\lambda(t)^k}{k!} \lambda'(t) e^{-\lambda(t)} \\ &= \lambda'(t) \left(-F(0) e^{-\lambda(t)} + \sum_{k=1}^{\infty} F(k) \frac{\lambda(t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda(t)} - \sum_{k=1}^{\infty} F(k) \frac{\lambda(t)^k}{k!} e^{-\lambda(t)} \right) \\ &= \lambda'(t) \left(\sum_{k=0}^{\infty} F(k+1) \frac{\lambda(t)^k}{k!} e^{-\lambda(t)} - \sum_{k=0}^{\infty} F(k) \frac{\lambda(t)^k}{k!} e^{-\lambda(t)} \right) \\ &= \lambda'(t) \text{Av}(F(X(t)+1) - F(X(t))) . \quad \square \end{aligned}$$

Congettura 19. *Siano $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $N_1 + N_2 = N$. Allora:*

$$\text{Av}(P_N) \leq \text{Av}(P_{N_1}) + \text{Av}(P_{N_2}) .$$

Proposizione 20.

$$\exists \underline{k} \in \mathbb{R} : \quad \text{Av}\left(\frac{P_N}{N}\right) \geq \underline{k} \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

Per esempio $\underline{k} = \log 2 - \beta(h + c)$.

Dimostrazione. Per l'osservazione 1, usando poi il fatto che il sistema è ferromagnetico,

$$\begin{aligned} \text{Av}(P_N) &\geq N \log 2 - \beta \sum_{i=1}^N |h| - \beta \sum_{i,j=1}^N \text{Av}(|\varepsilon_{ij}^N|) = N \log 2 - \beta N h - \beta N^2 \text{Av}(\varepsilon_{ij}^N) \\ &= N \log 2 - \beta N h - \beta N^2 \frac{c}{N} = N (\log 2 - \beta h - \beta c) . \quad \square \end{aligned}$$

Dunque, se si riuscisse a provare la congettura 19, grazie al lemma 3 e alla proposizione 20, sarebbe provata la seguente

Congettura 21.

$$\exists \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Av}\left(\frac{P_N}{N}\right) = \inf_{N \in \mathbb{N}} \text{Av}\left(\frac{P_N}{N}\right) \in \mathbb{R} .$$

Vediamo ora due diversi percorsi intrapresi per cercare di dimostrare la congettura 19.

4.1 Il mio tentativo di dimostrare la sub-additività

Per ogni $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{N_1}, \sigma_{N_1+1}, \dots, \sigma_N) \in \Omega_N$ indichiamo $\sigma' = (\sigma_1, \dots, \sigma_{N_1}) \in \Omega_{N_1}$ e $\sigma'' = (\sigma_{N_1+1}, \dots, \sigma_N) \in \Omega_{N_2}$.

Definiamo l'hamiltoniana interpolante (ferromagnetica):

$$H(t)(\sigma) := t H_N(\sigma) + (1-t) (H_{N_1}(\sigma') + H_{N_2}(\sigma'')) \quad \forall \sigma \in \Omega_N \quad \forall t \in [0, 1]$$

e la relativa pressione:

$$P(t) := \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H(t)(\sigma)} \quad \forall t \in [0, 1] .$$

Per $t = 1$ abbiamo il sistema ad N particelle ($H(1) = H_N$), mentre per $t = 0$ abbiamo due sistemi disgiunti di N_1 ed N_2 particelle ($H(0) = H_{N_1} + H_{N_2}$).

Il parametro t permette di passare il modo lineare da una situazione all'altra.

Introducendo tre famiglie indipendenti $\{\varepsilon_{ij}\}_{i,j=1\dots N}$, $\{\varepsilon'_{ij}\}_{i,j=1\dots N_1}$, $\{\varepsilon''_{ij}\}_{i,j=N_1+1\dots N}$ di variabili aleatorie i.i.d. con distribuzioni rispettivamente $\mathcal{Poisson}(\frac{c}{N})$, $\mathcal{Poisson}(\frac{c}{N_1})$, $\mathcal{Poisson}(\frac{c}{N_2})$, per l'osservazione 7 si ha: $\forall t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \text{Av} \left(\frac{dP}{dt}(t) \right) = \\ \frac{\beta}{2} \left(\sum_{i,j=1}^N \text{Av}(\varepsilon_{ij} \cdot \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)) - \sum_{i,j=1}^{N_1} \text{Av}(\varepsilon'_{ij} \cdot \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)) - \sum_{i,j=N_1+1}^N \text{Av}(\varepsilon''_{ij} \cdot \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)) \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

infatti il contributo delle interazioni con il campo magnetico esterno è

$$\beta \left(h \sum_{i=1}^N \omega(t)(\sigma_i) - h \sum_{i=1}^{N_1} \omega(t)(\sigma_i) - h \sum_{i=N_1+1}^N \omega(t)(\sigma_i) \right) = 0 .$$

Ora, per il lemma 17:

$$\text{Av}(\varepsilon_{ij} \cdot \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)) = \frac{c}{N} \text{Av}(\omega^{(\varepsilon_{ij}+1)}(t)(\sigma_i \sigma_j)) \quad (4.2)$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned} H^{(\varepsilon_{ij}+1)}(t)(\sigma) &= t H_N^{(\varepsilon_{ij}+1)}(\sigma) + (1-t) (H_{N_1}(\sigma') + H_{N_2}(\sigma'')) \\ &= t \left(-\frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^N \varepsilon_{rs} \sigma_r \sigma_s - \frac{1}{2} \sigma_i \sigma_j - h \sum_{r=1}^N \sigma_r \right) + (1-t) (H_{N_1}(\sigma') + H_{N_2}(\sigma'')) \\ &= t H_N(\sigma) - \frac{t}{2} \sigma_i \sigma_j + (1-t) (H_{N_1}(\sigma') + H_{N_2}(\sigma'')) = H(t)(\sigma) - \frac{t}{2} \sigma_i \sigma_j \end{aligned}$$

quindi:

$$\begin{aligned} \omega^{(\varepsilon_{ij}+1)}(t)(\sigma_i \sigma_j) &= \frac{\sum_{\sigma} \sigma_i \sigma_j e^{-\beta H^{(\varepsilon_{ij}+1)}(t)(\sigma)}}{\sum_{\sigma} e^{-\beta H^{(\varepsilon_{ij}+1)}(t)(\sigma)}} = \frac{\sum_{\sigma} \sigma_i \sigma_j e^{\frac{\beta t}{2} \sigma_i \sigma_j} e^{-\beta H(t)(\sigma)}}{\sum_{\sigma} e^{\frac{\beta t}{2} \sigma_i \sigma_j} e^{-\beta H(t)(\sigma)}} \\ &= \frac{\omega(t)(\sigma_i \sigma_j e^{\frac{\beta t}{2} \sigma_i \sigma_j})}{\omega(t)(e^{\frac{\beta t}{2} \sigma_i \sigma_j})} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Usando il fatto che $e^{\xi\sigma} = \cosh \xi + \sigma \sinh \xi \quad \forall \sigma \in \{-1, 1\} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$, scriviamo:

$$\begin{aligned} \frac{\omega(t)(\sigma_i \sigma_j e^{\frac{\beta t}{2} \sigma_i \sigma_j})}{\omega(t)(e^{\frac{\beta t}{2} \sigma_i \sigma_j})} &= \frac{\omega(t)(\sigma_i \sigma_j (\cosh \frac{\beta t}{2} + \sigma_i \sigma_j \sinh \frac{\beta t}{2}))}{\omega(t)(\cosh \frac{\beta t}{2} + \sigma_i \sigma_j \sinh \frac{\beta t}{2})} \\ &= \frac{\cosh \frac{\beta t}{2} \omega(t)(\sigma_i \sigma_j) + \sinh \frac{\beta t}{2}}{\cosh \frac{\beta t}{2} + \sinh \frac{\beta t}{2} \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)} = \frac{\omega(t)(\sigma_i \sigma_j) + \tanh \frac{\beta t}{2}}{1 + \tanh \frac{\beta t}{2} \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Per semplicità di notazione poniamo $x := \omega(t)(\sigma_i \sigma_j) \in [-1, 1]$, $a := \tanh \frac{\beta t}{2}$ e cerchiamo di trasformare il rapporto in somme e prodotti, usando la somma di una serie geometrica: $\forall t \neq 0 \quad (\Rightarrow a \neq 0)$

$$\begin{aligned} \frac{a+x}{1+ax} &= \frac{x}{1+ax} + \frac{a}{1+ax} = \frac{1+ax-1}{a(1+ax)} + \frac{a}{1+ax} \\ &= \frac{1}{a} - \frac{1}{a} \frac{1}{1+ax} + a \frac{1}{1+ax} = \frac{1}{a} + \left(a - \frac{1}{a}\right) \frac{1}{1+ax} \\ &\stackrel{*}{=} \frac{1}{a} + \left(a - \frac{1}{a}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-ax)^n = \frac{1}{a} + \left(a - \frac{1}{a}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^n x^n \end{aligned}$$

$$* \text{ infatti } |-ax| = \underbrace{\left| \tanh \frac{\beta t}{2} \right|}_{\in]-1,1[} \cdot \underbrace{|\omega(t)(\sigma_i \sigma_j)|}_{\in [-1,1]} < 1 .$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \frac{\omega(t)(\sigma_i \sigma_j) + \tanh \frac{\beta t}{2}}{1 + \tanh \frac{\beta t}{2} \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)} &= \\ \frac{1}{\tanh \frac{\beta t}{2}} + \left(\tanh \frac{\beta t}{2} - \frac{1}{\tanh \frac{\beta t}{2}} \right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tanh^n \left(\frac{\beta t}{2} \right) \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)^n &= \\ \frac{1}{\tanh \frac{\beta t}{2}} + \left(\tanh \frac{\beta t}{2} - \frac{1}{\tanh \frac{\beta t}{2}} \right) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tanh^n \left(\frac{\beta t}{2} \right) \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)^n \right) &\stackrel{**}{=} \\ \tanh \frac{\beta t}{2} - \frac{2}{\sinh(\beta t)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tanh^n \left(\frac{\beta t}{2} \right) \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)^n & \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} ** \text{ usiamo anche: } \tanh \xi - \frac{1}{\tanh \xi} &= \frac{\sinh \xi}{\cosh \xi} - \frac{\cosh \xi}{\sinh \xi} = \frac{\sinh^2 \xi - \cosh^2 \xi}{\cosh \xi \sinh \xi} \\ &= \frac{-1}{\frac{1}{2} \sinh(2\xi)} = -\frac{2}{\sinh(2\xi)} . \end{aligned}$$

Adesso facciamo n copie del sistema (mantenendo le stesse interazioni) e indichiamone le variabili di spin, tra loro indipendenti, con $\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(n)} \in \Omega_N$. Definiamo i multi-overlap:

$$q_{N,n}(\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(n)}) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i^{(1)} \cdot \dots \cdot \sigma_i^{(n)} \quad \forall \sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(n)} \in \Omega_N \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Usando il fatto che $\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(n)}$ sono indipendenti, si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^N \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)^n &= \sum_{i,j=1}^N \omega(t)(\sigma_i^{(1)} \sigma_j^{(1)}) \cdot \dots \cdot \omega(t)(\sigma_i^{(n)} \sigma_j^{(n)}) \\ &= \sum_{i,j=1}^N \omega(t)(\sigma_i^{(1)} \sigma_j^{(1)} \cdot \dots \cdot \sigma_i^{(n)} \sigma_j^{(n)}) = \omega(t) \left(\sum_{i,j=1}^N \sigma_i^{(1)} \cdot \dots \cdot \sigma_i^{(n)} \cdot \sigma_j^{(1)} \cdot \dots \cdot \sigma_j^{(n)} \right) \\ &= \omega(t) \left(\left(\sum_{i=1}^N \sigma_i^{(1)} \cdot \dots \cdot \sigma_i^{(n)} \right)^2 \right) = N^2 \omega(t)(q_{N,n}^2). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Quindi ricapitolando: $\forall t \in]0, 1]$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^N \text{Av}(\varepsilon_{ij} \cdot \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)) &\stackrel{(4.2)}{=} \sum_{i,j=1}^N \frac{c}{N} \text{Av}(\omega^{(\varepsilon_{ij}+1)}(t)(\sigma_i \sigma_j)) \\ &\stackrel{(4.3)}{=} \frac{c}{N} \sum_{i,j=1}^N \text{Av} \frac{\omega(t)(\sigma_i \sigma_j e^{\frac{\beta t}{2} \sigma_i \sigma_j})}{\omega(t)(e^{\frac{\beta t}{2} \sigma_i \sigma_j})} \stackrel{(4.4)}{=} \frac{c}{N} \sum_{i,j=1}^N \text{Av} \frac{\omega(t)(\sigma_i \sigma_j) + \tanh \frac{\beta t}{2}}{1 + \tanh \frac{\beta t}{2} \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)} \\ &\stackrel{(4.5)}{=} c N \tanh \frac{\beta t}{2} - 2 \frac{c}{N} \text{Av} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\tanh^n \frac{\beta t}{2}}{\sinh(\beta t)} \sum_{i,j=1}^N \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)^n \right) \\ &\stackrel{(4.6)}{=} c N \tanh \frac{\beta t}{2} - 2 c N \text{Av} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\tanh^n \frac{\beta t}{2}}{\sinh(\beta t)} \omega(t)(q_{N,n}^2) \right). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Ragionando analogamente si trovano: $\forall t \in [0, 1[$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{N_1} \text{Av}(\varepsilon'_{ij} \cdot \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)) &= \\ c N_1 \tanh \frac{\beta(1-t)}{2} - 2 c N_1 \text{Av} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\tanh^n \frac{\beta(1-t)}{2}}{\sinh(\beta(1-t))} \omega(t)(q_{N_1,n}^2) \right); \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\sum_{i,j=N_1+1}^N \text{Av}(\varepsilon_{ij}'' \cdot \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)) =$$

$$c N_2 \tanh \frac{\beta(1-t)}{2} - 2 c N_2 \text{Av} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\tanh^n \frac{\beta(1-t)}{2}}{\sinh(\beta(1-t))} \omega(t)(q_{N_2,n}^2) \right). \quad (4.9)$$

Allora, sostituendo (4.7), (4.8), (4.9) in (4.1): $\forall t \in]0, 1[$

$$\frac{1}{\beta c N} \text{Av} \left(\frac{dP}{dt}(t) \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left(\tanh \frac{\beta t}{2} - \frac{N_1}{N} \tanh \frac{\beta(1-t)}{2} - \frac{N_2}{N} \tanh \frac{\beta(1-t)}{2} \right) -$$

$$\text{Av} \omega(t) \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\tanh^n \frac{\beta t}{2}}{\sinh \beta t} q_{N_1,n}^2 - \frac{N_1}{N} \frac{\tanh^n \frac{\beta(1-t)}{2}}{\sinh \beta(1-t)} q_{N_1,n}^2 - \frac{N_2}{N} \frac{\tanh^n \frac{\beta(1-t)}{2}}{\sinh \beta(1-t)} q_{N_2,n}^2 \right) \right). \quad (4.10)$$

Si tratta ora di cercare di dimostrare che questa espressione ha segno costante al variare di $t \in]0, 1[$.

Osserviamo che: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(n)} \in \Omega_N$

$$q_{N,n}(\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(n)}) = \frac{N_1}{N} q_{N_1,n}(\sigma^{(1)'}, \dots, \sigma^{(n)'}) + \frac{N_2}{N} q_{N_2,n}(\sigma^{(1)''}, \dots, \sigma^{(n)'')};$$

$$q_{N_1,n}(\sigma^{(1)'}, \dots, \sigma^{(n)'}), q_{N_2,n}(\sigma^{(1)''}, \dots, \sigma^{(n)'') \in [-1, 1]$$

Definiamo:

$$f(t) := \frac{1}{2} \left(\tanh \frac{\beta t}{2} - \frac{N_1}{N} \tanh \frac{\beta(1-t)}{2} - \frac{N_2}{N} \tanh \frac{\beta(1-t)}{2} \right)$$

$$g_n(x, y, t) := (-1)^{n+1} \left(\frac{\tanh^n \frac{\beta t}{2}}{\sinh \beta t} \left(\frac{N_1}{N} x + \frac{N_2}{N} y \right)^2 - \frac{N_1}{N} \frac{\tanh^n \frac{\beta(1-t)}{2}}{\sinh \beta(1-t)} x^2 - \frac{N_2}{N} \frac{\tanh^n \frac{\beta(1-t)}{2}}{\sinh \beta(1-t)} y^2 \right)$$

Per semplicità supponiamo $N_1 = N_2 = \frac{N}{2}$ e $\beta = 1$.

Come si può osservare dal grafico, $f(t)$ è negativa quando $t \in]0, 0.5[$ mentre è positiva quando $t \in]0.5, 1[$.

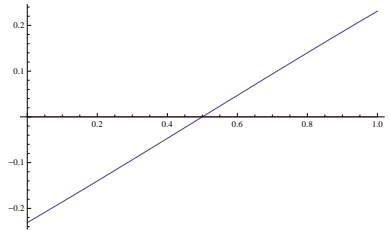


Figura 4.1: Grafico di $t \mapsto f(t)$ con $t \in]0, 1[$

Quando $t = 0.1$, $(x, y) \mapsto g_1(x, y, t)$ non ha segno costante su $[-1, 1] \times [-1, 1]$ ma è soprattutto negativa, mentre le altre g_n hanno segno costante e alterno: $g_2 \geq 0$, $g_3 \leq 0, \dots$

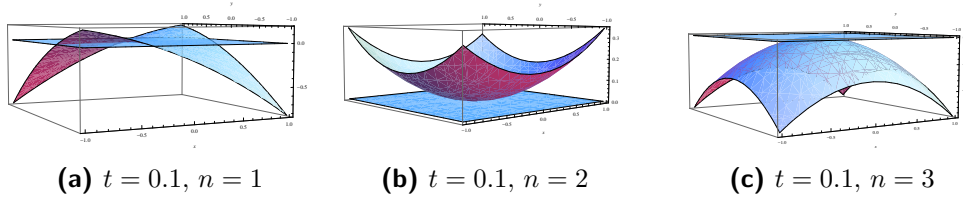


Figura 4.2: Grafici di $(x, y) \mapsto g_n(x, y, t)$ con $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$, quando $t = 0.1$

Quando $t = 0.5$, le $(x, y) \mapsto g_n(x, y, t)$ hanno segno costante e alterno su $[-1, 1] \times [-1, 1]$: $g_1 \leq 0$, $g_2 \geq 0$, $g_3 \leq 0, \dots$

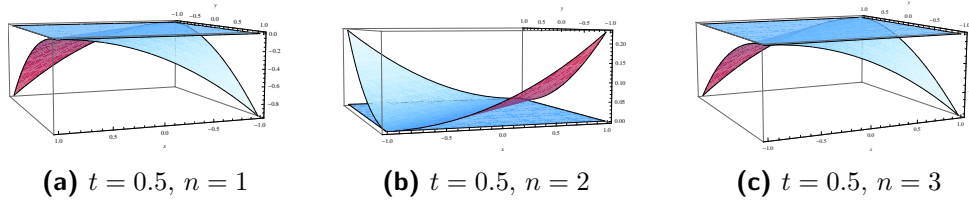


Figura 4.3: Grafici di $(x, y) \mapsto g_n(x, y, t)$ con $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$, quando $t = 0.5$

Quando $t = 0.9$, solo $(x, y) \mapsto g_1(x, y, t)$ ha segno costante (≤ 0) su $[-1, 1] \times [-1, 1]$, g_2 è ancora per di più ≤ 0 , g_3 è per di più $\geq 0, \dots$

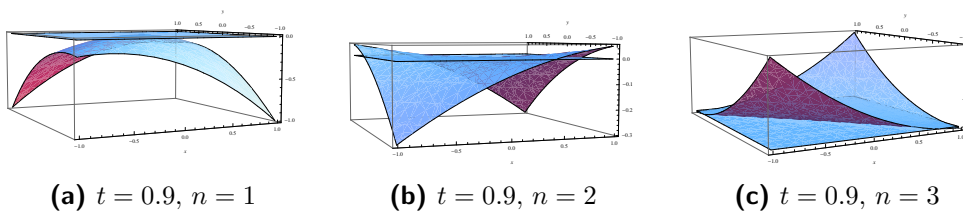


Figura 4.4: Grafici di $(x, y) \mapsto g_n(x, y, t)$ con $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$, quando $t = 0.9$

Dunque è difficile determinare se

$$\frac{dP}{dt}(t) = \beta c N \left(f(t) + Av \omega(t) \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(q_{N_1, n}, q_{N_2, n}, t) \right) \right)$$

ha segno costante al variare di $t \in]0, 1[$.

4.2 Il tentativo di Contucci-Dommers-Giardinà-Starr

Definiamo l'hamiltoniana interpolante ferromagnetica: $\forall t \in [0, 1] \forall \sigma \in \Omega_N$

$$H(t)(\sigma) := -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \varepsilon_{ij}(t) \sigma_i \sigma_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N_1} \varepsilon'_{ij}(t) \sigma_i \sigma_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j=N_1+1}^N \varepsilon''_{ij}(t) \sigma_i \sigma_j - h \sum_{i=1}^N \sigma_i$$

dove le $\varepsilon_{ij}(t)$, $\varepsilon'_{ij}(t)$, $\varepsilon''_{ij}(t)$ sono variabili aleatorie indipendenti con distribuzione rispettivamente $Poisson(t \frac{c}{N})$, $Poisson((1-t) \frac{c}{N_1})$, $Poisson((1-t) \frac{c}{N_2})$.

Per $t = 1$ abbiamo il sistema ad N particelle ($H(1) \approx H_N$), mentre per $t = 0$ abbiamo due sistemi disgiunti di N_1 ed N_2 particelle ($H(0) \approx H_{N_1} + H_{N_2}$).

Il parametro t permette di passare da una situazione all'altra, modificando gradualmente la distribuzione delle interazioni tra particelle e l'influenza del campo esterno.

La pressione relativa al sistema di hamiltoniana $H(t)$ è:

$$P(t) := \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H(t)(\sigma)} \quad \forall t \in [0, 1].$$

Usando il lemma 18 e la regola di derivazione di una funzione composta, calcoliamo: $\forall t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{Av}(P(t)) &= \frac{c}{N} \sum_{i,j=1}^N \text{Av}(\log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H^{(\varepsilon_{ij+1})}(t)(\sigma)} - \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H(t)(\sigma)}) \\ &\quad - \frac{c}{N_1} \sum_{i,j=1}^{N_1} \text{Av}(\log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H^{(\varepsilon'_{ij+1})}(t)(\sigma)} - \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H(t)(\sigma)}) \\ &\quad - \frac{c}{N_2} \sum_{i,j=N_1+1}^N \text{Av}(\log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H^{(\varepsilon''_{ij+1})}(t)(\sigma)} - \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H(t)(\sigma)}). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ora, osservando che $H^{(\varepsilon_{ij+1})}(t)(\sigma) = H(t)(\sigma) - \frac{1}{2} \sigma_i \sigma_j$, si ha:

$$\begin{aligned} \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H^{(\varepsilon_{ij+1})}(t)(\sigma)} - \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H(t)(\sigma)} &= \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H(t)(\sigma) + \frac{\beta}{2} \sigma_i \sigma_j} + \\ - \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H(t)(\sigma)} &= \log \frac{\sum_{\sigma} e^{\frac{\beta}{2} \sigma_i \sigma_j} e^{-\beta H(t)(\sigma)}}{\sum_{\sigma} e^{-\beta H(t)(\sigma)}} = \log \omega(t)(e^{\frac{\beta}{2} \sigma_i \sigma_j}) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Usando il fatto che $e^{\xi\sigma} = \cosh \xi + \sigma \sinh \xi \quad \forall \sigma \in \{-1, 1\} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$, scriviamo:

$$\begin{aligned} \log \omega(t)(e^{\frac{\beta}{2} \sigma_i \sigma_j}) &= \log \left(\cosh \frac{\beta}{2} + \omega(t)(\sigma_i \sigma_j) \sinh \frac{\beta}{2} \right) = \\ \log \left(\frac{1}{\cosh \frac{\beta}{2}} (1 + \omega(t)(\sigma_i \sigma_j) \tanh \frac{\beta}{2}) \right) &= -\log \cosh \frac{\beta}{2} + \log \left(1 + \tanh \frac{\beta}{2} \omega(t)(\sigma_i \sigma_j) \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ricordiamo lo sviluppo in serie del logaritmo: $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$

$\forall x \in]-1, 1]$. Allora, visto che $|\tanh \frac{\beta}{2} \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)| < 1$,

$$\log \left(1 + \tanh \frac{\beta}{2} \omega(t)(\sigma_i \sigma_j) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\tanh^n \frac{\beta}{2}}{n} \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)^n \quad (4.14)$$

Quindi, ricapitolando e introducendo i multi-overlap: $\forall t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} &\frac{c}{N} \sum_{i,j=1}^N \text{Av} \left(\log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H^{(\varepsilon_{ij}^{+1})}(t)(\sigma)} - \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H(t)(\sigma)} \right) \stackrel{(4.12)}{=} \\ &\frac{c}{N} \sum_{i,j=1}^N \text{Av} \left(\log \omega(t)(e^{\frac{\beta}{2} \sigma_i \sigma_j}) \right) \stackrel{(4.13)}{=} \\ &\frac{c}{N} \sum_{i,j=1}^N \text{Av} \left(-\log \cosh \frac{\beta}{2} \right) + \frac{c}{N} \sum_{i,j=1}^N \text{Av} \log \left(1 + \tanh \frac{\beta}{2} \omega(t)(\sigma_i \sigma_j) \right) \stackrel{(4.14)}{=} \\ &-cN \log \cosh \frac{\beta}{2} + \frac{c}{N} \sum_{i,j=1}^N \text{Av} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\tanh^n \frac{\beta}{2}}{n} \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)^n \right) = \\ &-cN \log \cosh \frac{\beta}{2} + \frac{c}{N} \text{Av} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\tanh^n \frac{\beta}{2}}{n} \sum_{i,j=1}^N \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)^n \right) \stackrel{(4.6)}{=} \\ &-cN \log \cosh \frac{\beta}{2} + cN \text{Av} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\tanh^n \frac{\beta}{2}}{n} \omega(t)(q_{N,n}^2) \right) . \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ragionando analogamente si trovano: $\forall t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} &\frac{c}{N_1} \sum_{i,j=1}^{N_1} \text{Av} \left(\log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H^{(\varepsilon'_{ij}^{+1})}(t)(\sigma)} - \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H(t)(\sigma)} \right) = \\ &-cN_1 \log \cosh \frac{\beta}{2} + cN_1 \text{Av} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\tanh^n \frac{\beta}{2}}{n} \omega(t)(q_{N_1,n}^2) \right) ; \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{c}{N_2} \sum_{i,j=N_1+1}^N \text{Av} \left(\log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H(\epsilon''_{ij+1})(t)(\sigma)} - \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H(t)(\sigma)} \right) = \\ - c N_2 \log \cosh \frac{\beta}{2} + c N_2 \text{Av} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\tanh^n \frac{\beta}{2}}{n} \omega(t)(q_{N_2,n}^2) \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Allora, sostituendo (4.15), (4.16), (4.17) in (4.11): $\forall t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \frac{1}{cN} \frac{d}{dt} \text{Av}(P(t)) &= - \log \cosh \frac{\beta}{2} + \text{Av} \omega(t) \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\tanh^n \frac{\beta}{2}}{n} q_{N,n}^2 \right) \\ &+ \frac{N_1}{N} \log \cosh \frac{\beta}{2} - \frac{N_1}{N} \text{Av} \omega(t) \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\tanh^n \frac{\beta}{2}}{n} q_{N_1,n}^2 \right) \\ &+ \frac{N_2}{N} \log \cosh \frac{\beta}{2} - \frac{N_2}{N} \text{Av} \omega(t) \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\tanh^n \frac{\beta}{2}}{n} q_{N_2,n}^2 \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\tanh^n \frac{\beta}{2}}{n} \text{Av} \omega(t) (q_{N,n}^2 - \frac{N_1}{N} q_{N_1,n}^2 - \frac{N_2}{N} q_{N_2,n}^2). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Si tratta ora di cercare di dimostrare che questa espressione ha segno costante al variare di $t \in [0, 1]$. Indichiamo con $a_n(t)$ l' n -esimo termine della serie, per ogni $t \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$.

Osserviamo che: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(n)} \in \Omega_N$

$$q_{N,n}(\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(n)}) = \frac{N_1}{N} q_{N_1,n}(\sigma^{(1)'}, \dots, \sigma^{(n)'}) + \frac{N_2}{N} q_{N_2,n}(\sigma^{(1)''}, \dots, \sigma^{(n)''})$$

Allora, per la convessità della funzione $x \mapsto x^2$,

$$q_{N,n}^2 = \left(\frac{N_1}{N} q_{N_1,n} + \frac{N_2}{N} q_{N_2,n} \right)^2 \leq \frac{N_1}{N} q_{N_1,n}^2 + \frac{N_2}{N} q_{N_2,n}^2$$

Segue che gli a_n hanno segni alterni, precisamente:

$$a_n \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \text{ dispari}; \quad a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \text{ pari}.$$

Se la successione $(|a_n(t)|)_{n \in \mathbb{N}}$ fosse monotona decrescente, allora avremmo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{cN} \frac{d}{dt} \text{Av}(P(t)) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = - \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n-1}| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(|a_{2n}| - |a_{2n-1}|)}_{\leq 0} \leq 0 \end{aligned}$$

Ora possiamo intraprendere due strade: la prima consiste nel cercare di dare una dimostrazione analitica del fatto che $(|a_n(t)|)_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona decrescente $\forall t \in [0, 1]$, la seconda è volta a dare delle stime numeriche.

1) Osserviamo che:

$$\begin{aligned} q_{N,n}^2 - \frac{N_1}{N} q_{N_1,n}^2 - \frac{N_2}{N} q_{N_2,n}^2 &= \left(\frac{N_1}{N} q_{N_1,n} + \frac{N_2}{N} q_{N_2,n} \right)^2 - \left(\frac{N_1}{N} q_{N_1,n}^2 + \frac{N_2}{N} q_{N_2,n}^2 \right) \\ &= \frac{N_1^2}{N^2} q_{N_1,n}^2 + 2 \frac{N_1 N_2}{N^2} q_{N_1,n} q_{N_2,n} + \frac{N_2^2}{N^2} q_{N_2,n}^2 - \frac{N_1}{N} q_{N_1,n}^2 - \frac{N_2}{N} q_{N_2,n}^2 \\ &= -\frac{N_1 N_2}{N^2} (q_{N_1,n}^2 - 2 q_{N_1,n} q_{N_2,n} + q_{N_2,n}^2) = -\frac{N_1 N_2}{N^2} (q_{N_1,n} - q_{N_2,n})^2. \end{aligned}$$

Quindi possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n \frac{N_1 N_2}{N^2} \frac{\tanh^n \frac{\beta}{2}}{n} \text{Av } \omega(t) ((q_{N_1,n} - q_{N_2,n})^2) \Rightarrow \\ |a_n| &= \frac{N_1 N_2}{N^2} \frac{\tanh^n \frac{\beta}{2}}{n} \text{Av } \omega(t) ((q_{N_1,n} - q_{N_2,n})^2) \end{aligned}$$

Sappiamo che $\tanh^n(\beta/2)$ e $1/n$ decrescono al crescere di n , quindi sarebbe sufficiente dimostrare che anche $\omega(t) ((q_{N_1,n} - q_{N_2,n})^2)$ decresce al crescere di n per ottenere la decrescenza di $(|a_n(t)|)_{n \in \mathbb{N}}$.

2) Diamo una stima per eccesso di ogni termine a_n .

Osserviamo che: $\forall \sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(n)} \in \Omega_N$

$$q_{N_1,n}(\sigma^{(1)'}, \dots, \sigma^{(n)'}) , q_{N_2,n}(\sigma^{(1)''}, \dots, \sigma^{(n)'}) \in [-1, 1]$$

Definiamo: $\forall x, y \in [-1, 1]$

$$g_n(x, y) := (-1)^n \frac{N_1 N_2}{N^2} \frac{\tanh^n \frac{\beta}{2}}{n} (x - y)^2$$

notando che $a_n(t) = \text{Av } \omega(t) (g_n(q_{N_1,n}, q_{N_2,n}))$.

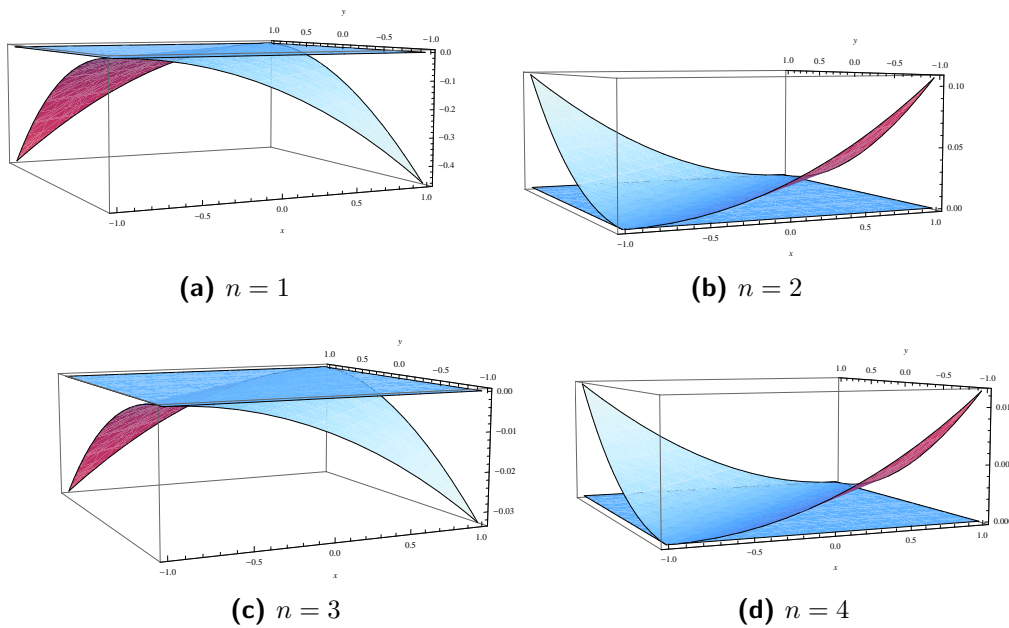


Figura 4.5: Grafici di $(x, y) \mapsto g_n(x, y)$ con $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$, quando $\beta = 1$ e $N_1 = N_2 = N/2$

Ora calcoliamo:

$$\max_{x, y \in [-1, 1]} |g_n(x, y)| = \frac{N_1 N_2}{N^2} \frac{\tanh^n \frac{\beta}{2}}{n} \max_{x, y \in [-1, 1]} (x - y)^2 = 4 \frac{N_1 N_2}{N^2} \frac{\tanh^n \frac{\beta}{2}}{n}$$

Pertanto $\max_{x, y \in [-1, 1]} |g_n(x, y)|$ decresce al crescere di n . Grafichiamone l'andamento:

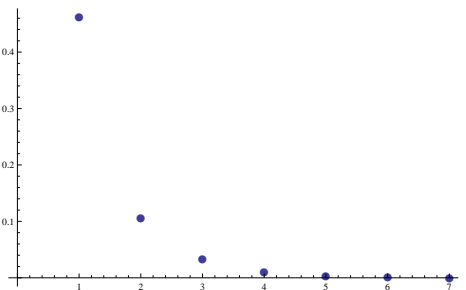


Figura 4.6: Grafico di $n \mapsto \max_{x, y \in [-1, 1]} |g_n(x, y)|$ con $n \in \mathbb{N}$, quando $N_1 = N_2 = \frac{N}{2}$ e $\beta = 1$

Calcoliamo i primi termini:

$$\begin{aligned} \max|g_1| &\approx 4,6 \cdot 10^{-1}, & \max|g_2| &\approx 1,1 \cdot 10^{-1}, & \max|g_3| &\approx 3,3 \cdot 10^{-2}, \\ \max|g_4| &\approx 1,1 \cdot 10^{-2}, & \max|g_5| &\approx 4,2 \cdot 10^{-3}, & \max|g_6| &\approx 1,6 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Queste stime per eccesso possono far pensare che anche $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ possa essere decrescente, anche se l'ordine di grandezza di $\max|g_n|$ non decresce in modo decisivo al crescere di n .

4.3 Congetture per le basse temperature

Non siamo riusciti a dimostrare l'esistenza del limite termodinamico per la pressione a temperatura generica. Vediamo ora, partendo dal lavoro di Contucci-Dommers-Giardinà-Starr, che cosa si riesce a dire quando il campo magnetico esterno è nullo e la temperatura è sufficientemente piccola.

Osservazione 22. *Sia X una variabile aleatoria discreta, con insieme dei valori assunti $I(X)$. Sia $F : I(X) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\exists \mathbb{E}(F(X)) \in \mathbb{R}$.*

Supponiamo: $F(x) \leq 0 \quad \forall x \in I(X)$, $\exists \bar{x} \in I(X)$, $\mathbb{P}(X = \bar{x}) > 0$.

Allora: $\mathbb{E}(F(X)) < 0$.

Infatti:

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in I(X)} F(x) \mathbb{P}(X=x) = \underbrace{f(\bar{x})}_{<0} \underbrace{\mathbb{P}(X = \bar{x})}_{>0} + \sum_{\substack{x \in I(X) \\ x \neq \bar{x}}} \underbrace{F(x)}_{\leq 0} \underbrace{\mathbb{P}(X=x)}_{\geq 0} < 0.$$

Lemma 23 (di permanenza del segno per successioni di funzioni).

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^p$. Siano $f_n : A \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) < 0 \quad \forall x \in A$.

Supponiamo:

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f \text{ su } A.$$

Allora:

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : f_n(x) < 0 \quad \forall x \in A \quad \forall n > \bar{n}.$$

Dimostrazione. Poiché f_n converge uniformemente ad f su A , per definizione:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} : f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon \quad \forall x \in A \quad \forall n > \bar{n}_\varepsilon$$

Visto che $f(x) < 0 \quad \forall x \in A$, possiamo scegliere $\varepsilon := -\sup_{x \in A} f(x) \in]0, +\infty[$.

Così si ottiene:

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : f_n(x) < f(x) - \sup_A f \leq 0 \quad \forall x \in A \quad \forall n > \bar{n} . \quad \square$$

Se riuscissimo a dimostrare che $\frac{d}{dt} \text{Av}(P(\beta, t))$ converge uniformemente rispetto a t , ad N_1 e ad N_2 quando $\beta \rightarrow +\infty$ (e non solo puntualmente come vedremo nella prossima dimostrazione), allora sarebbe provata la seguente

Congettura 24. *Se $h = 0$, esiste $\bar{\beta} > 0$ tale che: $\forall N_1, N_2 \in \mathbb{N}, N_1 + N_2 = N$*

$$\text{Av}(P_N(\beta)) \leq \text{Av}(P_{N_1}(\beta)) + \text{Av}(P_{N_2}(\beta)) \quad \forall \beta > \bar{\beta} .$$

Dimostrazione (ipotizzando la convergenza uniforme).

Consideriamo l'interpolazione usata da Contucci-Dommers-Giardinà-Starr per cercare di dimostrare la congettura 19: $\forall t \in [0, 1] \quad \forall \sigma \in \Omega_N$

$$H(t)(\sigma) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \varepsilon_{ij}(t) \sigma_i \sigma_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N_1} \varepsilon'_{ij}(t) \sigma_i \sigma_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j=N_1+1}^N \varepsilon''_{ij}(t) \sigma_i \sigma_j - \sum_{i=1}^N \sigma_i$$

Per (4.11), (4.12), (4.13), risulta: $\forall t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{Av}(P(\beta, t)) &= -cN \log \cosh \frac{\beta}{2} + \frac{c}{N} \sum_{i,j=1}^N \text{Av} \log(1 + \tanh \frac{\beta}{2} \omega(\beta, t)(\sigma_i \sigma_j)) \\ &\quad + cN_1 \log \cosh \frac{\beta}{2} - \frac{c}{N_1} \sum_{i,j=1}^{N_1} \text{Av} \log(1 + \tanh \frac{\beta}{2} \omega(\beta, t)(\sigma_i \sigma_j)) \\ &\quad + cN_2 \log \cosh \frac{\beta}{2} - \frac{c}{N_2} \sum_{i,j=N_1+1}^N \text{Av} \log(1 + \tanh \frac{\beta}{2} \omega(\beta, t)(\sigma_i \sigma_j)) = \\ &\frac{c}{N} \sum_{i,j=1}^N \text{Av} \log(1 + \tanh \frac{\beta}{2} \omega(\beta, t)(\sigma_i \sigma_j)) - \frac{c}{N_1} \sum_{i,j=1}^{N_1} \text{Av} \log(1 + \tanh \frac{\beta}{2} \omega(\beta, t)(\sigma_i \sigma_j)) \\ &\quad - \frac{c}{N_2} \sum_{i,j=N_1+1}^N \text{Av} \log(1 + \tanh \frac{\beta}{2} \omega(\beta, t)(\sigma_i \sigma_j)) . \end{aligned} \tag{4.19}$$

Definiamo la magnetizzazione: $m_N(\sigma) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i \forall \sigma \in \Omega_N$. Si ha: $\forall t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} & \frac{c}{N} \sum_{i,j=1}^N \text{Av} \log \left(1 + \tanh \frac{\beta}{2} \omega(\beta, t)(\sigma_i \sigma_j) \right) \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} \\ & \frac{c}{N} \sum_{i,j=1}^N \text{Av} \log \left(1 + \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \omega(\beta, t)(\sigma_i \sigma_j) \right) \stackrel{*}{=} \frac{c}{N} \sum_{i,j=1}^N \text{Av} (\log 2 \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \omega(\beta, t)(\sigma_i \sigma_j)) = \\ & \frac{c}{N} \log 2 \text{Av} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \omega(\beta, t) \left(\sum_{i,j=1}^N \sigma_i \sigma_j \right) = c N \log 2 \text{Av} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \omega(\beta, t)(m_N^2) \end{aligned} \quad (4.20)$$

★ si osserva che $\log(1 + \delta) = \delta \log 2 \quad \forall \delta \in \{0, 1\}$ e, per la proposizione 9,
 $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \omega(\beta, t)(\sigma_i \sigma_j) \in \{0, 1\}$.
 Allora, usando (4.20) in (4.19): $\forall t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} & \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{d}{dt} \text{Av}(P(\beta, t)) = \\ & c \log 2 \left(N \text{Av} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \omega(\beta, t)(m_N^2) - N_1 \text{Av} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \omega(\beta, t)(m_{N_1}^2) - N_2 \text{Av} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \omega(\beta, t)(m_{N_2}^2) \right) \\ & = c N \log 2 \text{Av} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \omega(\beta, t) \left(m_N^2 - \frac{N_1}{N} m_{N_1}^2 - \frac{N_2}{N} m_{N_2}^2 \right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Osserviamo che: $\forall \sigma \in \Omega_N$

$$m_N(\sigma) = \frac{N_1}{N} m_{N_1}(\sigma') + \frac{N_2}{N} m_{N_2}(\sigma'')$$

Allora, poiché la funzione $x \mapsto x^2$ è strettamente convessa e $\frac{N_1}{N}, \frac{N_2}{N} \in]0, 1[$:

$$m_N^2 = \left(\frac{N_1}{N} m_{N_1} + \frac{N_2}{N} m_{N_2} \right)^2 \leq \frac{N_1}{N} m_{N_1}^2 + \frac{N_2}{N} m_{N_2}^2$$

e vale l'uguale se e solo se $m_{N_1} = m_{N_2}$.

Ora, se scegliamo $\varepsilon_{ij}(t) = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, N$, $\varepsilon'_{ij}(t) = 1 \quad \forall i, j = 1, \dots, N_1$ e $\varepsilon''_{ij}(t) = 1 \quad \forall i, j = N_1 + 1, \dots, N$ abbiamo un sistema composto da 2 cluster: $\{1, \dots, N_1\}$ e $\{N_1 + 1, \dots, N\}$. Perciò, visto che $h = 0$, per le osservazioni fatte nel capitolo 2, la configurazione di spin $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}', \bar{\sigma}'')$ con $\bar{\sigma}' := (1, 1, \dots, 1)$ e $\bar{\sigma}'' := (-1, -1, \dots, -1)$ è possibile allo stato fondamentale.

Allora:

$$m_{N_1}(\bar{\sigma}') = \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} 1 = 1, \quad m_{N_2}(\bar{\sigma}'') = \frac{1}{N_2} \sum_{i=N_1+1}^N (-1) = -1$$

$$\Rightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{N}_0^N, \varepsilon' \in \mathbb{N}_0^{N_1}, \varepsilon'' \in \mathbb{N}_0^{N_2} \quad \exists \sigma \in \Omega_N \text{ tali che}$$

$$m_{N_1}(\sigma') \neq m_{N_2}(\sigma''), \quad \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\beta, t)(\sigma) > 0 \quad \forall t \in [0, 1[$$

$$\Rightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{N}_0^N, \varepsilon' \in \mathbb{N}_0^{N_1}, \varepsilon'' \in \mathbb{N}_0^{N_2} \quad \exists \sigma \in \Omega_N \text{ tali che}$$

$$m_N(\sigma) - \frac{N_1}{N} m_{N_1}(\sigma') - \frac{N_2}{N} m_{N_2}(\sigma'') < 0, \quad \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\beta, t)(\sigma) > 0 \quad \forall t \in [0, 1[$$

$$\stackrel{*}{\Rightarrow} \text{Av} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \omega(\beta, t) \left(m_N - \frac{N_1}{N} m_{N_1} - \frac{N_2}{N} m_{N_2} \right) < 0 \quad \forall t \in [0, 1[$$

* per il lemma 11 $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \omega(\beta, t)(\cdot)$ è il valore atteso in uno spazio di probabilità, quindi è possibile applicare l'osservazione 22.

Ragionando analogamente, con un'appropriata scelta degli ε_{ij} , ε'_{ij} , ε''_{ij} , si trova che vale lo stesso anche in $t = 1$.

Allora, dalla (4.21):

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{d}{dt} \text{Av}(P(\beta, t)) < 0 \quad \forall t \in [0, 1] \quad \forall N_1, N_2 \in \mathbb{N}.$$

Quindi, se supponiamo che la convergenza sia uniforme rispetto a t , ad N_1 e ad N_2 , per il lemma 23:

$$\exists \bar{\beta} > 0 : \quad \frac{d}{dt} \text{Av}(P(\beta, t)) < 0 \quad \forall t \in [0, 1] \quad \forall N_1, N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall \beta > \bar{\beta}.$$

Da qui, per il lemma 5:

$$\text{Av}(P_N(\beta)) \leq \text{Av}(P_{N_1}(\beta)) + \text{Av}(P_{N_2}(\beta)) \quad \forall N_1, N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall \beta > \bar{\beta}. \quad \square$$

Se fosse provata la congettura 24, allora risulterebbero vere anche le seguenti:

Congettura 25. *Se $h = 0$, esiste $\bar{\beta} > 0$ tale che:*

$$\exists \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Av}\left(\frac{P_N(\beta)}{N}\right) = \inf_{N \in \mathbb{N}} \text{Av}\left(\frac{P_N(\beta)}{N}\right) \in \mathbb{R} \quad \forall \beta > \bar{\beta}.$$

Dimostrazione. Dalla congettura 24, per il lemma 3: $\forall \beta > \bar{\beta}$

$$\text{Av}(P_N(\beta)) \leq \text{Av}(P_{N_1}(\beta)) + \text{Av}(P_{N_2}(\beta)) \Rightarrow \exists \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Av}\left(\frac{P_N(\beta)}{N}\right) = \inf_{N \in \mathbb{N}} \text{Av}\left(\frac{P_N(\beta)}{N}\right)$$

Inoltre, per la proposizione 20: $\inf_{N \in \mathbb{N}} \text{Av}\left(\frac{P_N(\beta)}{N}\right) \in \mathbb{R}$. □

Congettura 26. *Se $h = 0$, allora:*

$$\exists \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Av}\left(\frac{F_N(\beta)}{N}\right) = -c$$

Dimostrazione. Per la congettura 24, si potrebbe applicare il teorema 9, quindi:

$$\exists \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Av}\left(\frac{F_N(\beta)}{N}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Av}\left(\frac{E_N}{N}\right)$$

D'altra parte, visto che il sistema è ferromagnetico: $\forall N \in \mathbb{N}$

$$E_N = -\sum_{i,j=1}^N \varepsilon_{ij}^N \Rightarrow \text{Av}\left(\frac{E_N}{N}\right) = -\frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N \text{Av}(\varepsilon_{ij}^N) = -\frac{1}{N} N^2 \frac{c}{N} = -c. \quad \square$$

Capitolo 5

Modello anti-ferromagnetico diluito

Il modello anti-ferromagnetico diluito è descritto dall'hamiltoniana

$$H_N(\sigma) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \varepsilon_{ij}^N \sigma_i \sigma_j + h \sum_{i=1}^N \sigma_i \quad \forall \sigma \in \Omega_N$$

dove $h \geq 0$ e $\{\varepsilon_{ij}^N\}_{i,j=1\dots N}$ è una famiglia di variabili aleatorie indipendenti identicamente distribuite, con distribuzione $\mathcal{Poisson}(\frac{c}{N})$, $c > 0$.

Usando la tecnica di Contucci-Dommers-Giardinà-Starr siamo in grado di dimostrare l'esistenza del limite termodinamico per questo modello.

Teorema 27. *Siano $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $N_1 + N_2 = N$. Allora:*

$$\text{Av}(P_N) \geq \text{Av}(P_{N_1}) + \text{Av}(P_{N_2}) .$$

Dimostrazione. Definiamo l'hamiltoniana interpolante (anti-ferromagnetica):
 $\forall t \in [0, 1] \quad \forall \sigma \in \Omega_N$

$$H(t)(\sigma) := \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \varepsilon_{ij}(t) \sigma_i \sigma_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N_1} \varepsilon'_{ij}(t) \sigma_i \sigma_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=N_1+1}^N \varepsilon''_{ij}(t) \sigma_i \sigma_j + h \sum_{i=1}^N \sigma_i$$

dove le $\varepsilon_{ij}(t)$, $\varepsilon'_{ij}(t)$, $\varepsilon''_{ij}(t)$ sono variabili aleatorie indipendenti con distribuzione rispettivamente $\mathcal{Poisson}(t\frac{c}{N})$, $\mathcal{Poisson}((1-t)\frac{c}{N_1})$, $\mathcal{Poisson}((1-t)\frac{c}{N_2})$.

Per $t = 1$ abbiamo il sistema ad N particelle ($H(1) = H_N$), mentre per $t = 0$ abbiamo due sistemi disgiunti di N_1 ed N_2 particelle ($H(0) = H_{N_1} + H_{N_2}$). Il parametro t permette di passare da una situazione all'altra, modificando gradualmente la distribuzione delle interazioni tra particelle.

La pressione relativa al sistema di hamiltoniana $H(t)$ è:

$$P(t) := \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H(t)(\sigma)} \quad \forall t \in [0, 1].$$

L'espressione di $\frac{d}{dt} \text{Av}(P(t))$ trovata in (4.11) è ancora valida.

Osserviamo che invece $H^{(\varepsilon_{ij}+1)}(t)(\sigma) = H(t)(\sigma) + \frac{1}{2} \sigma_i \sigma_j$, quindi si ha:

$$\begin{aligned} \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H^{(\varepsilon_{ij}+1)}(t)(\sigma)} - \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H(t)(\sigma)} &= \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H(t)(\sigma) - \frac{\beta}{2} \sigma_i \sigma_j} + \\ - \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H(t)(\sigma)} &= \log \frac{\sum_{\sigma} e^{-\frac{\beta}{2} \sigma_i \sigma_j} e^{-\beta H(t)(\sigma)}}{\sum_{\sigma} e^{-\beta H(t)(\sigma)}} = \log \omega(t)(e^{-\frac{\beta}{2} \sigma_i \sigma_j}) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Usando il fatto che $e^{\xi\sigma} = \cosh \xi + \sigma \sinh \xi \quad \forall \sigma \in \{-1, 1\} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$, la parità di \cosh e la disparità di \sinh , scriviamo:

$$\begin{aligned} \log \omega(t)(e^{\frac{\beta}{2} \sigma_i \sigma_j}) &= \log \left(\cosh \frac{\beta}{2} - \omega(t)(\sigma_i \sigma_j) \sinh \frac{\beta}{2} \right) = \\ \log \left(\frac{1}{\cosh \frac{\beta}{2}} (1 - \omega(t)(\sigma_i \sigma_j) \tanh \frac{\beta}{2}) \right) &= -\log \cosh \frac{\beta}{2} + \log (1 - \tanh \frac{\beta}{2} \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Ricordiamo lo sviluppo in serie del logaritmo: $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$
 $\forall x \in]-1, 1[$. Allora, visto che $|\tanh \frac{\beta}{2} \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)| < 1$,

$$\begin{aligned} \log(1 + \tanh \frac{\beta}{2} \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(\tanh \frac{\beta}{2} \omega(t)(\sigma_i \sigma_j))^n}{n} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh^n \frac{\beta}{2} \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)^n}{n} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Quindi, ricapitolando e introducendo i multi-overlap: $\forall t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
& \frac{c}{N} \sum_{i,j=1}^N \text{Av} \left(\log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H^{(\varepsilon_{ij}+1)}(t)(\sigma)} - \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H(t)(\sigma)} \right) \stackrel{(5.1)}{=} \\
& \frac{c}{N} \sum_{i,j=1}^N \text{Av} \left(\log \omega(t)(e^{-\frac{\beta}{2} \sigma_i \sigma_j}) \right) \stackrel{(5.2)}{=} \\
& \frac{c}{N} \sum_{i,j=1}^N \text{Av} \left(-\log \cosh \frac{\beta}{2} \right) + \frac{c}{N} \sum_{i,j=1}^N \text{Av} \log \left(1 - \tanh \frac{\beta}{2} \omega(t)(\sigma_i \sigma_j) \right) \stackrel{(5.3)}{=} \quad (5.4) \\
& - c N \log \cosh \frac{\beta}{2} - \frac{c}{N} \text{Av} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh^n \frac{\beta}{2}}{n} \sum_{i,j=1}^N \omega(t)(\sigma_i \sigma_j)^n \right) \stackrel{(4.6)}{=} \\
& - c N \log \cosh \frac{\beta}{2} - c N \text{Av} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh^n \frac{\beta}{2}}{n} \omega(t)(q_{N,n}^2) \right).
\end{aligned}$$

Ragionando analogamente si trovano: $\forall t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
& \frac{c}{N_1} \sum_{i,j=1}^{N_1} \text{Av} \left(\log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H^{(\varepsilon'_{ij}+1)}(t)(\sigma)} - \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H(t)(\sigma)} \right) = \\
& - c N_1 \log \cosh \frac{\beta}{2} - c N_1 \text{Av} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh^n \frac{\beta}{2}}{n} \omega(t)(q_{N_1,n}^2) \right); \quad (5.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{c}{N_2} \sum_{i,j=N_1+1}^N \text{Av} \left(\log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H^{(\varepsilon''_{ij}+1)}(t)(\sigma)} - \log \sum_{\sigma \in \Omega_N} e^{-\beta H(t)(\sigma)} \right) = \\
& - c N_2 \log \cosh \frac{\beta}{2} - c N_2 \text{Av} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\tanh^n \frac{\beta}{2}}{n} \omega(t)(q_{N_2,n}^2) \right). \quad (5.6)
\end{aligned}$$

Allora, sostituendo (5.4), (5.5), (5.6) in (4.11): $\forall t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{c N} \frac{d}{dt} \text{Av}(P(t)) = -\log \cosh \frac{\beta}{2} - \text{Av} \omega(t) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh^n \frac{\beta}{2}}{n} q_{N,n}^2 \right) + \frac{N_1}{N} \log \cosh \frac{\beta}{2} + \\
& \frac{N_1}{N} \text{Av} \omega(t) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh^n \frac{\beta}{2}}{n} q_{N_1,n}^2 \right) + \frac{N_2}{N} \log \cosh \frac{\beta}{2} + \frac{N_2}{N} \text{Av} \omega(t) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh^n \frac{\beta}{2}}{n} q_{N_2,n}^2 \right) \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh^n \frac{\beta}{2}}{n} \text{Av} \omega(t) \left(\frac{N_1}{N} q_{N_1,n}^2 + \frac{N_2}{N} q_{N_2,n}^2 - q_{N,n}^2 \right). \quad (5.7)
\end{aligned}$$

Per la convessità della funzione $x \mapsto x^2$, si ha: $\forall n \in \mathbb{N}$

$$q_{N,n}^2 = \left(\frac{N_1}{N} q_{N_1,n} + \frac{N_2}{N} q_{N_2,n} \right)^2 \leq \frac{N_1}{N} q_{N_1,n}^2 + \frac{N_2}{N} q_{N_2,n}^2$$

Allora:

$$\begin{aligned} \frac{N_1}{N} q_{N_1,n}^2 + \frac{N_2}{N} q_{N_2,n}^2 - q_{N,n}^2 &\geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \\ \text{Av} \omega(t) \left(\frac{N_1}{N} q_{N_1,n}^2 + \frac{N_2}{N} q_{N_2,n}^2 - q_{N,n}^2 \right) &\geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0, 1] \quad \stackrel{(57)}{\Rightarrow} \\ \text{Av} \left(\frac{d}{dt} (t) \right) &\geq 0 \quad \forall t \in [0, 1] \quad \stackrel{\text{lemma6}}{\Rightarrow} \quad \text{Av}(P_N) \geq \text{Av}(P_{N_1}) + \text{Av}(P_{N_2}) . \quad \square \end{aligned}$$

Proposizione 28.

$$\exists \bar{k} \in \mathbb{R} : \quad \text{Av} \frac{P_N}{N} \leq \bar{k} \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

Per esempio $\bar{k} = \log 2 + \beta(h + c)$.

Dimostrazione. Per l'osservazione 1:

$$\begin{aligned} \text{Av}(P_N) &\leq N \log 2 + \beta \sum_{i=1}^N |-h| + \beta \sum_{i,j=1}^N \text{Av}(|-\varepsilon_{ij}^N|) \\ &= N \log 2 + \beta N h + \beta N^2 \text{Av}(\varepsilon_{ij}^N) = N (\log 2 + \beta h + \beta c) . \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 29.

$$\exists \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Av} \left(\frac{P_N}{N} \right) = \sup_{N \in \mathbb{N}} \text{Av} \left(\frac{P_N}{N} \right) \in \mathbb{R} .$$

Dimostrazione. Dal teorema 27, per il lemma 4:

$$\begin{aligned} \text{Av}(P_{N_1+N_2}) &\geq \text{Av}(P_{N_1}) + \text{Av}(P_{N_2}) \quad \forall N_1, N_2 \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \\ \exists \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Av} \left(\frac{P_N}{N} \right) &= \sup_{N \in \mathbb{N}} \text{Av} \left(\frac{P_N}{N} \right) . \end{aligned}$$

Inoltre per la proposizione 28: $\sup_{N \in \mathbb{N}} \text{Av} \left(\frac{P_N}{N} \right) \in \mathbb{R} . \quad \square$

Bibliografia

- [1] Guerra F., Toninelli L.T., The Thermodynamic Limit in Mean Field Spin Glass Models, *arXiv:cond-mat/0204280v1*, 2002
- [2] Contucci P., Dommers S., Giardinà C., Starr S., in preparazione
- [3] Appunti del corso di Istituzioni di Fisica Matematica II, tenuto dal prof. Contucci, 2009-10
- [4] De Sanctis L., Guerra F., Mean field dilute ferromagnet I. High temperature and zero temperature behavior, *arXiv:0801.4940v4*, 2008

Ringraziamenti

Ringrazio il professor Pierluigi Contucci che mi ha seguito nell'elaborazione di questa tesi e mi ha dato l'opportunità di iniziare a capire che cosa significa fare ricerca, non solo invitandomi a partecipare al workshop con Sander Dommers, Cristian Giardinà e Shannon Starr, ma anche facendomi mettere in gioco in prima persona per affrontare problemi non ancora risolti. Lo ringrazio inoltre per la comprensione che ha saputo comunicarmi tutte le volte che l'euforia, dovuta alla convinzione di aver dimostrato un risultato nuovo, se n'è andata in seguito alla scoperta di un errore.

Ringrazio la dottoressa Alessandra Bianchi per aver speso alcune ore del suo tempo aiutandomi a proseguire con i miei tentativi.

Ringrazio la Vale, Enricano e Claudiano, insieme ai quali ho imparato ad affrontare la Matematica, le sue sfide, le sue insidie e a seguirne gli stimoli nei lunghi voli lontano da tutto che si sono consumati sui nostri fogli.

Ringrazio tutti quelli che mi hanno sostenuto in questo lavoro, ascoltando i miei ragionamenti senza bisogno di capirli, condividendo con me i momenti di euforia e dandomi coraggio negli altri. In particolare, per questi motivi, voglio ringraziare mia mamma, che ormai parla con disinvoltura di funzioni e derivate; mio babbo che mi ha aiutato ad impaginare la tesi in una lotta impari contro LaTeX; Alice, la mia bella mora che con le parole mi sostiene, con lo sguardo mi porta via e sa farmi passare ogni mal di testa; l'Alis e Free che mi hanno sopportato anche stavolta; i miei nonni Iola, Bruno, Pina e Renato su cui ho potuto contare.

Ringrazio Ivan, per i consulti che mi ha dato.

Infine voglio ringraziare i miei prof. del liceo di matematica e italiano, Fabrizio Monari e Paola Poluzzi, che mi hanno trasmesso la passione che mi ha portato qui.