ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Tesi di laurea in
Analisi Matematica e Storia della Matematica

I numeri reali: dalle grandezze incommensurabili all'aritmetizzazione dell'Analisi

Relatore
Ch.mo Prof. Paolo Negrini

Candidato
Rosario Luigi Carella

Anno Accademico 2015-2016

A mamma e papà,
al loro amore, alla loro pazienza, alla loro lungimiranza.
Tutto quello che sono è loro esclusivo merito.

Indice

Introduzione

Scopo della presente tesi è quello di descrivere i momenti fondamentali che hanno caratterizzato lo sviluppo del concetto di numero reale.

Com'è noto, la nozione di numero, collocabile alle fondamenta di quell'imponente cattedrale concettuale che è la Matematica, affonda le sue origini nella preistoria, perdendosi così nella notte dei tempi. Ciononondimeno, sebbene l'attività del contare e misurare sia così antica e nasca tanto spontaneamente in seno alle comunità dei nostri primi progenitori – si sarebbe quasi tentati di dire che essa costituisce una *proprietà emergente* che caratterizza i sistemi biologici complessi – da un punto di vista epistemologico, cognitivo e culturale quello di numero è un concetto altamente sofisticato e tutt'altro che banale, tuttora in continua evoluzione. Come si vedrà nel Capitolo 1, a partire dai primi conteggi preistorici, e passando attraverso la risoluzione di semplici problemi di spartizione di beni, esso arriverà ben presto ad assumere un'aura di sacralità, che sfocerà nella visone mistico-filosofico-scientifica dei Pitagorici.

Ma è proprio al *climax* della sua celebrazione che si verificherà quell'evento traumatico – la scoperta delle grandezze incommensurabili – che aprirà la strada al concetto di numero irrazionale e di numero reale. La prima risoluzione teorica parziale di tale "trauma" verrà data in seno alla matemtica greca stessa, grazie alla teoria delle proporzioni sviluppata da Eudosso di Cnido nella prima metà del secolo IV a. C., pervenutaci attraverso il Libro V degli Elementi di Euclide. Le caratteristiche essenziali di tale teoria verranno delineate nel Capitolo 2.

Con la scoperta delle grandezze incommensurabili si apre una lunga parentesi, per quel che riguarda la storia dei numeri reali, che verrà chiusa solamente nella seconda metà del secolo XIX. Nel frattempo le idee adombrate in Euclide restano in lenta gestazione, passano da un'epoca all'altra, dalla Grecia si estendono al Mediterraneo, dal Mediterraneo passano in eredità agli Arabi e da questi, nel tardo Medioevo, ritornano in Europa. Intanto la matematica si sviluppa in ogni direzione e si arricchisce di nuove tecniche, idee e concetti che, inevitabilmente, portano con sé nuove problematiche, le quali si intrecciano a quelle lasciate in eredità dai matematici del passato. Finché, giunti al secolo XIX, i tempi saranno maturi per delineare la risoluzione di molte di tali questioni. Fra esse, una delle più urgenti è appunto quella di dare una fondazione sicura al sistema dei numeri reali, a sua volta posto a fondamento dell'analisi matemtica. È questo il cuore del programma di *aritmetizzazione dell'analisi* di cui si parlerà nel Capitolo 3.

Il 1872 costituisce una data simbolica importante per la storia dei numeri reali. Infatti, a tale anno risalgono le fondamentali pubblicazioni di Cantor e Dedekind, che daranno una sistemazione teorica definitiva al campo dei numeri reali. I Capitoli 4 e 5 sono dedicati alla presentazione delle rispettive costruzioni, che verranno sviluppate utilizzando notazioni e concetti moderni, tenendo però conto degli articoli originali, al fine di evidenziare le idee presenti in essi, soprattutto in considerazione del fatto che esse fossero già contenute, *in nuce*, nella trattazione euclidea.

Infine, nel Capitolo 6 verrà dimostrata l'equivalenza del modello di Cantor e di quello di Dedekind, e più in generale l'unicità, a meno di isomorfismi, del campo dei numeri reali, conseguenza, com'è noto, di un importante teorema dovuto a Hilbert. Inoltre, verrà presentata la definizione assiomatica *storica* data da Hilbert, che definisce i numeri reali come costituenti un campo ordinato archimedeo che goda del cosiddetto *Axiom der Vollständigkeit*, e verrà dimostrata l'equivalenza di tale nozione con quelle che emergono dai lavori di Cantor e Dedekind.

Capitolo 1

Dalle origini a Euclide

1.1 Il concetto di numero

In apertura della sua opera, lo storico della matematica Carl Benjamin Boyer scrive:

> *I matematici del XX secolo svolgono un'attività intellettuale altamente sofisticata, difficile da definire; ma gran parte di ciò che oggi va sotto il nome di matematica è il risultato di uno sviluppo di pensiero che originariamente era accentrato attorno ai concetti di numero, grandezza e forma. Le vecchie definizioni della matematica come quella di "scienza del numero e della grandezza" non sono più valide; tuttavia esse indicano le origini delle varie branche della matematica. Le nozioni originarie collegate ai concetti di numero, grandezza e forma si possono far risalire alle epoche più antiche in cui visse l'uomo e vaghi accenni a nozioni matematiche si possono vedere adombrati in forme di vita che forse hanno anticipato il genere umano di parecchi milioni di anni.*[1]

Indubbiamente, la dialettica numero-grandezza ha giocato un ruolo centrale sin dalle origini di quel lungo cammino che, in risonanza continua tra idee nuove e vecchie, ci ha condotti agli sviluppi odierni della matematica. Difatti, ancora nel secolo XVIII Eulero scriveva:

> *Ogni cosa passibile di crescere e diminuire è chiamata grandezza [...] e questa è l'origine dei vari rami della matematica, ciascuno interessato a un particolare genere di grandezza.*[2]

[1] [Boyer 1968].
[2] [Eulero 1770].

Il concetto di numero, tra tutte le conquiste intellettuali della nostra specie, è sicuramente uno dei più astratti e affascinanti. Ancor oggi sfuggevole, esso solleva questioni ontologiche ed epistemologiche di assai ardua risoluzione, legate alla natura stessa della matematica.

La problematica ontologica cerca di dare risposta a domande relative alla natura e al tipo di realtà rappresentato dagli enti matematici. Scrive a tal proposito Gabriele Lolli:

> *I numeri, intesi come un complesso di conoscenze e tecniche di formazione e soluzione di problemi, non presentano una storia di crescente approfondimento e utilizzazione, ma sono soggetti a casualità storiche e sociali. La loro natura sembra quella di un prodotto culturale più che qualcosa di ontologicamente solido.*[3]

E ancora si potrebbe citare Wittgenstein:

> *Perché chiamiamo una certa cosa "numero"? Forse perché ha una diretta parentela con qualcosa che finora si è chiamato numero; e in questo modo, possiamo dire, acquisisce una parentela indiretta con altre cose che chiamiamo anche* così*. Ed estendiamo il nostro concetto di numero così come, nel tessere un filo, intrecciamo fibra con fibra. E la robustezza del filo non è data dal fatto che una fibra corre per tutta la sua lunghezza, ma dal sovrapporsi di molte fibre una all'altra.*
> *Se però qualcuno dicesse: «Dunque c'è qualcosa di comune a tutte queste formulazioni, – vale a dire la disgiunzione di tutte queste comunanze» – io risponderei: qui ti limiti a giocare con una parola. Allo stesso modo si potrebbe dire: un qualcosa percorre tutto il filo, – cioè l'ininterrotto sovrapporsi di queste fibre.*[4]

Nell'ambito della teoria della conoscenza, invece, ci si chiede quale sia il valore conoscitivo dei risultati della matematica e che tipo di certezza essi diano, limitandone eventualmente l'ambito di validità; infine, da un punto di vista semiotico resta aperta la questione, comune a tutti gli enti matematici, di come sia possibile giungere a una loro conoscenza, considerando il fatto che non disponiamo mai di un accesso diretto ad essi (come avviene invece per gli enti fisici, percepiti mediante i sensi), ma dobbiamo accontentarci soltanto dei sistemi di rappresentazione utilizzati per descriverli: da un lato, giungiamo a una comprensione adeguata di un oggetto matematico operando

[3] [Lolli 2015].

[4] [Wittgenstein 1953].

Figura 1.1: Osso di Ishango. Nelle due viste è possibile vedere tre serie di incisioni costituite, rispettivamente, da 60, 60 e 48 unità. Si tratta di un perone di babbuino, risalente a un periodo che va dal 20.000 al 18.000 a. C. circa. Fu rinvenuto nel 1960 a Ishango, nei pressi del lago Edoardo. Ci sono altri due importanti reperti: un osso di lupo, rinvenuto nel 1937 presso Vestonice, nella Repubblica Ceca, risalente al 30.000 a. C. circa, su cui sono presenti cinquantacinqe intaccature; e ancora un osso di babbuino, rinvenuto presso le montagne dello Swaziland, risalente al 35.000 a. C. circa, su cui sono incise 29 tacche.

sulle diverse rappresentazioni semiotiche che di esso si danno[5], dall'altro, una reale padronanza dell'insieme delle manipolazioni e trattamenti che possono essere fatti su tali rappresentazioni può aversi soltanto in subordinazione a una conoscenza sufficientemente matura dell'oggetto stesso.[6]

Tralasciando le questioni filosofiche, quel che sembra comunque certo è il fatto che l'origine dei primi conteggi preceda progressi tecnologici quali l'uso dei metalli e la costruzione di veicoli a ruote, affondando le sue radici in un'epoca sicuramente anteriore all'inizio della storia. Infatti, i più antichi reperti archeologici dotati di significato numerico, risalenti al Paleolitico superiore, testimoniano che Homo Sapiens ha cominciato a contare prima ancora che a scrivere (Figura 1.1). Se si pensa che la storia si fa cominciare, convenzionalmente, a partire dal IV millennio a. C., con l'avvento della scrittura da parte del popolo dei Sumeri, si capisce come sia vero, per citare ancora Boyer, che:

> *Il concetto di numero intero è uno dei più antichi concetti matematici, e le sue origini sono avvolte nelle nebbie della preistoria.*[7]

È impossibile ricostruire il lungo processo che portò i nostri progenitori preistorici dalle prime osservazioni circa la possibilità di appaiare in *corri-*

[5] Uno stesso oggetto matematico ha, di solito, più di una rappresentazione semiotica, e ciascuna di esse non esaurisce l'essenza dell'oggetto, ma si presta a metterne bene in luce soltanto alcuni aspetti. La padronanza di un concetto matematico si ottiene quando si è capaci di integrare i diversi significati veicolati dalle rappresentazioni semiotiche di esso.

[6] Si veda, a tal proposito, il cosiddetto *paradosso cognitivo del pensiero matematico*, evidenziato da Duval in [Duval 1993].

[7] [Boyer 1968].

spondenza biunivoca mucchi di oggetti, fino all'affacciarsi di un'idea astratta di numero. Quel che invece appare evidente è la portata di tale avvenimento. Per usare le parole di Whitehead:

> *Il primo uomo che colse l'analogia esistente tra un gruppo di sette pesci e un gruppo di sette giorni compì un notevole passo avanti nella storia del pensiero.*[8]

Di certo non si trattò di una scoperta individuale o localizzata in seno a una singola comunità, quanto piuttosto di una presa di coscienza lenta e graduale che investì, se non simultaneamente almeno in epoche non molto lontane tra loro, i diversi insediamenti della nostra specie sparsi sul pianeta.

Le attività numeriche dei popoli primitivi non andarono oltre il conteggio di oggetti concreti, che coinvolgevano l'utilizzo dei numeri interi positivi. La nozione di frazione razionale si sviluppò soltanto più tardi.

Purtroppo, data la totale assenza di documenti scritti, le congetture riguardanti l'origine del concetto di numero e della matematica in generale devono dipendere necessariamente dai pochi reperti archeologici rimasti, dalle testimonianze fornite dall'attuale antropologia e da estrapolazioni fatte sui documenti, risalenti a epoche più tarde, a noi pervenuti.

I primi ad occuparsi delle origini della matematica furono Erodoto ed Aristotele, e i loro rispettivi punti di vista possono essere considerati come rappresentativi di due linee di pensiero che ancor oggi sussistono. Entrambi non facevano risalire le origini della matematica a un'epoca anteriore a quella in cui si affermò la civiltà egizia. Per lo storico greco, lo studio della geometria si era affermato nella valle del Nilo per rispondere alla necessità pratica di ridisegnare i confini dei terreni dopo le periodiche inondazioni del fiume. Secondo il celebre filosofo, invece, fu l'esistenza di una classe sacerdotale agiata a stimolare lo studio della geometria. Dunque, da un lato le necessità pratiche, dall'altro lo stimolo creativo reso possibile dall'agiatezza. Non è possibile, ad oggi, addurre argomenti conclusivi a favore né dell'una né dell'altra tesi. Certamente entrambi sottovalutavano l'antichità della disciplina. Un'ipotesi più recente, dovuta a Seidenberg[9], vede l'origine dell'aritmetica e della geometria in seno a rituali religiosi primitivi, anche se non sono state ancora trovate conferme definitive a favore di questa tesi.

[8] [Whitehead 1925].

[9] [Seidenberg Counting 1962], [Seidenberg Geometry 1962].

Figura 1.2: Il papiro di Rhind costituisce il più esteso tra i papiri egizi di natura matematica che ci sono pervenuti. Acquistato nel 1858 in una città balneare sul Nilo da un antiquario scozzese, Henry Rhind, adesso si trova al British Museum, ad eccezione di qualche frammento conservato al Museo di Brooklyn. È lungo 5,46 m e largo 30 cm. In esso si trovano 87 problemi trascritti, intorno al 1650 a. C., da uno scriba di nome Ahmes, il quale ci informa che i contenuti risalgono ad almeno 200 anni prima.

1.2 Le civiltà dello stadio potamico

Con la fine dell'Età della Pietra le civiltà del cosiddetto *stadio potamico* – così è chiamata la fase più antica dell'inizio del periodo storico – in particolare le civiltà egizia e mesopotamica, cominciarono a sviluppare una matematica più evoluta rispetto ai semplici conteggi preistorici. Come è stato detto nel paragrafo precedente, alle origini della matematica è la dialettica numero-grandezza a dominare la scena. Siano originati da necessità pratiche o nascano dal puro esercizio intellettuale, i problemi a noi giunti con i papiri egizi o con le tavolette mesopotamiche riguardano la misurazione di semplici figure geometriche o la spartizione di beni. Per esempio, nel papiro di Rhind (Figura 1.2), un papiro egizio risalente al 1650 a. C. circa, molti problemi riguardano la spartizione di pagnotte o birra tra diversi uomini. Non mancano problemi che possono rientrare in un ambito algebrico, in cui si chiede l'equivalente moderno della risoluzione di un'equazione lineare in cui l'incognita viene chiamata *aha*, ossia *mucchio*, e che vengono risolti mediante il metodo della *falsa posizione*. Tuttavia, è nelle vallate del Tigri e dell'Eufrate che l'algebra vede un maggior rigoglio.

Per la risoluzione di tali problemi non è più sufficiente l'utilizzo dei soli numeri interi, e infatti sia tra gli Egizi che tra le popolazioni mesopotamiche l'impiego di frazioni è ampiamente attestato. A tal proposito, è interessante notare come per i primi ogni frazione andava espressa in termini di frazioni unitarie: per uno scriba egizio la frazione $\frac{m}{n}$ non era concepita come qualcosa di elementare, ma al contrario andava scomposta in termini di somme di frazioni unitarie. L'unica eccezione era costituita dalle due frazioni ausiliarie 2/3 e 3/4. Per quanto riguarda i Babilonesi, invece, essi svilupparono un sistema di numerazione posizionale in base 60, pur con i limiti dovuti all'assenza dello zero e alla mancanza di un simbolo che separi la parte intera dalla parte frazionaria. Tutti i numeri, quindi, interi e frazioni, venivano espressi mediante lo stesso sistema di rappresentazione. Mediante opportune tavole dei reciproci, ogni divisione veniva ricondotta a una moltiplicazione. Quando non era possibile ottenere uno sviluppo sessagesimale finito, come nel caso della frazione 1/7, si rendevano necessarie delle approssimazioni.

Per quanto riguarda i problemi geometrici, tanto gli Egizi quanto i Babilonesi non avevano una chiara distinzione tra misure esatte e misure approssimate. Per esempio, accanto a regole corrette per calcolare l'area di triangoli si trovano calcoli di aree di quadrilateri in cui si considera il prodotto delle medie aritmetiche dei lati opposti. Nel problema 50 del papiro di Rhind il compilatore, uno scriba di nome Ahmes, avanza l'ipotesi che l'area di un campo circolare con diametro di 9 unità sia uguale all'area di un quadrato con un lato di otto unità, il che significa attribuire a π il valore di circa $3+\frac{1}{6}$. Una tavoletta rinvenuta a Susa dà come rapporto tra il perimetro dell'esagono regolare e la circonferenza del cerchio circoscritto il valore (sessagesimale) di 0;57,36[10], che equivale ad assumere $3+\frac{1}{8}$ come valore di π. Ancora più interessante è la tavoletta YBC 7289 (Figura 1.3). In essa è possibile vedere raffigurato un quadrato con le sue diagonali. Accanto a uno dei lati è presente il numero 30, mentre accanto a una delle diagonali vi sono le due serie di "cifre"[11] 1 - 24 - 51 - 10 e 42 - 25 - 35. L'interpretazione usuale che viene data al primo numero sulla diagonale è 1;24,51,10 che costituisce un'ottima approssimazione di $\sqrt{2}$. A questo punto, interpretando 30 come la lunghezza del lato e 42;25,35 come la lunghezza della diagonale, il significato della tavoletta sarebbe indubbiamente legato a una conoscenza (almeno nel caso di triangoli rettangoli isosceli) del teorema di Pitagora. Tuttavia, data l'ambiguità del sistema sessagesimale di cui si è già detto, si potrebbe interpretare la "cifra" 30 come $\frac{30}{60}$, e la lunghezza della diagonale come $\frac{42}{60}+\frac{25}{60^2}+\frac{35}{60^3}$, che rappresenta una buona approssimazione di $\frac{\sqrt{2}}{2}$, sicché il significato della tavoletta potrebbe semplicemente consistere nella rappresentazione di $\sqrt{2}$ e

[10] Come si è detto, i Babilonesi utilizzavano un sistema di numerazione posizionale a base sessagesimale. I numeri da 1 a 59 (lo zero non era presente nel sistema, almeno inizialmente) andrebbero dunque rappresentati come singole cifre. Nel trasporre tale sistema in notazione moderna le cifre vengono rappresentate secondo il sistema decimale e vengono separate da una virgola, tranne la cifra relativa alle unità, che viene separata dalla cifra di peso minore mediante un punto e virgola. Per esempio, la scrittura 5;30,18 rappresenta lo sviluppo $5+\frac{30}{60}+\frac{18}{60^2}$ ovvero il numero decimale 5.505. Un grave difetto è costituito dal fatto che i matematici babilonesi non utilizzavano l'equivalente della nostra virgola e non avevano un simbolo per lo zero che permettesse di rappresentare una posizione vuota, sicché l'interpretazione di una tavoletta a contenuto matematico risulta spesso ambigua per chi si trovi al di fuori del contesto in cui essa venne compilata.

[11] Si veda la nota precedente.

Figura 1.3: La tavoletta YBC 7289. Appartenente alla collezione Yale Babylonian Collection della Yale University Library, la tavoletta costituirebbe, secondo alcuni studiosi, un'importante testimonianza della conoscenza del teorema di Pitagora da parte dei Babilonesi.

del suo reciproco $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, con l'indicazione, posta sul lato della diagonale, di $\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$, rapporto tra questi due numeri. Quest'ultima interpretazione sarebbe coerente con la pratica, assai usuale per i matematici babilonesi, di compilare tavole dei reciproci.

Appartengono allo stadio potamico anche le civiltà dell'India e della Cina, fiorite rispettivamente nelle vallate dell'Indo e dello Yangtze. Sebbene le testimonianze relative ad esse non siano molto attendibili dal punto di vista cronologico, è sicuramente attestato l'utilizzo delle frazioni e di approssimazioni di numeri irrazionali, specialmente di π.

Come si può vedere dalla discussione precedente, le civiltà più antiche utilizzavano il sistema delle frazioni per effettuare una grande varietà di calcoli e misurazioni, e, quando tali misurazioni coinvolgevano grandezze legate a numeri irrazionali, non mancavano di utilizzare stime approssimate. Tuttavia, è chiaro che la matematica da essi sviluppata, almeno per quanto ci è dato appurare dai documenti finora ritrovati, non aveva raggiunto una maturità sufficiente affinché si potesse prendere coscienza delle problematiche legate all'irrazionalità.

1.3 Lo *scandalo* delle grandezze incommensurabili

La lunga gestazione che ha infine portato alla nascita del concetto di numero reale, così come è oggi inteso, comincia in seno agli sviluppi della

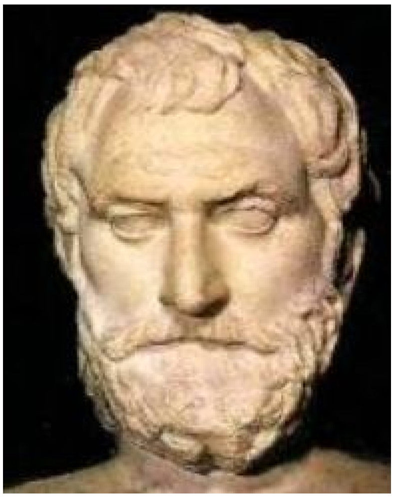


Figura 1.4: Talete di Mileto. Mileto, 640/625 a. C. - Mileto, 547 a. C. circa. È il primo filosofo, scienziato e matematico a noi noto. La tradizione gli attribuisce cinque teoremi di geometria elementare.

matematica greca. Le vicissitudini storiche e i grandi flussi migratori che interessarono i popoli indoeuropei durante il II millennio a. C. avviarono un lento processo che, a partire dalla civiltà minoico-micenea fino ad arrivare alle prime colonie greche dell'Asia Minore e dell'Italia meridionale, spostarono il baricentro culturale dal Medio Oriente al Mediterraneo. Ebbe così inizio una nuova fase nella storia del pensiero. In Asia Minore, lo spirito pionieristico e intraprendente dei coloni venuti da occidente si incontrò con il sapere millenario proveniente dalle vallate della Mezzaluna Fertile, producendo un modo di pensare originale. Le civiltà precedenti, e quelle contemporanee in oriente, avevano sviluppato il sapere all'interno di potenti caste sacerdotali, che incentravano ogni forma di conoscenza e di potere su basi mistico-religiose; in Grecia e nelle sue colonie, invece, nacquero città-stato indipendenti, le cui piazze si popolarono ben presto di liberi pensatori, i quali posero i germi della filosofia e di quell'indagine razionale di cui il pensiero occidentale odierno, fortemente caratterizzato da una mentalità scientifica, costituisce l'eredità diretta. Tra il VII e VI secolo a. C., mentre in oriente Zarathustra, Confucio e Lao Tse indirizzavano il pensiero orientale verso la riflessione sulla dimensione interiore e spirituale, in occidente pensatori come Talete e Pitagora, pur muovendosi quest'ultimo ancora all'interno di una visione mistico-religiosa, contribuirono a dare una svolta significativa alla matematica e alle scienze in generale.

Entrambe queste figure sono avvolte nelle nebbie della leggenda. Di essi non ci è rimasto nulla di scritto, ed è probabile che nulla mai abbiano scritto.

Le notizie che abbiamo, frammentarie e spesso contraddittorie, sono basate su una tradizione non troppo sicura, il cui carattere aneddotico e il fatto che più le fonti sono tarde più si arricchiscono di particolari sono il segnale di una leggenda che si è andata via via costruendo. Ad essi si attribuiscono frasi emblematiche, come «conosci te stesso»[12] o «tutto è numero».

A Talete vengono attribuiti diversi risultati nel campo della geometria. Inoltre, egli viene considerato come colui che ha introdotto il metodo dimostrativo, segnando così un'importante evoluzione rispetto alla matematica egizia e babilonese. Secondo Van Der Waerden[13], la necessità di introdurre un metodo rigorosamente razionale potrebbe essersi presentata a Talete durante i suoi viaggi in Egitto e Mesopotamia, in cui potrebbe aver notato le differenze tra i metodi di calcolo di una stessa figura geometrica. Otto Neugebauer[14], invece, ritiene che l'introduzione della dimostrazione sia da posticipare fino a un'epoca posteriore alla scoperta delle grandezze incommensurabili.

Ma è Pitagora, e ancor più i suoi discepoli, ad aver esercitato un'influenza profonda sul pensiero matematico ellenico. Com'è noto, il cardine del pensiero pitagorico è la convinzione che ogni aspetto della realtà sia riconducibile al concetto di numero. A tale concezione Pitagora fu quasi certamente ispirato in seguito ai viaggi che la tradizione tramanda abbia compiuto in oriente. D'altronde, si è già visto come per Egizi e Babilonesi il problema di contare e misurare fosse fondamentale nella loro matematica, e come per tali questioni fosse centrale il concetto di numero.

La posizione dei Pitagorici riguardo ai numeri e alla matematica in generale ci viene illustrata da Aristotele in diversi luoghi della sua opera. Per esempio, nella *Metafisica*, leggiamo:

> *Sin dall'inizio i cosiddetti Pitagorici si dedicarono alla matematica, ed essi sono stati i primi a sviluppare tale scienza; e attraverso lo studio di essa arrivarono a convincersi che i suoi principi fossero i principi di ogni cosa.*[15]

e ancora:

> *[...] poiché ogni cosa sembrava essere modellata, nella sua natura, sui numeri, e i numeri sembravano stare al primo posto in natura, [i Pitagorici] supposero che l'essenza delle cose fosse l'essenza dei numeri,*

[12] **γνῶθι σεαυτόν**. La massima viene attribuita, a seconda delle fonti, a uno dei sette sapienti tra Talete, Chilone o Biante, e comunque la tradizione tramanda che fosse riportata sulla facciata del tempio di Apollo a Delfi.

[13] [Van Der Waerden 1961].

[14] [Neugebauer 1952].

[15] [Aristotele Metafisica].

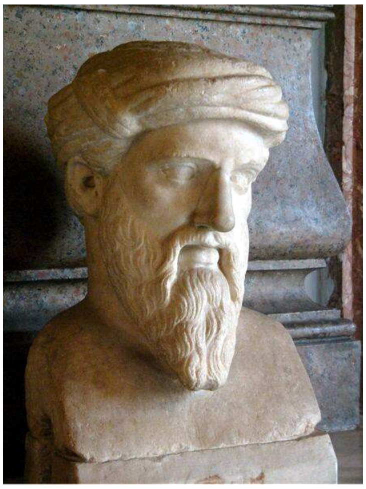


Figura 1.5: Pitagora di Samo. Samo, 570 a. C. circa - Metaponto, 495 a. C. circa. Filosofo greco che diede importanti contributi alla matematica, all'astronomia e alla teoria della musica. Il teorema conosciuto oggi come *teorema di Pitagora* era probabilmente noto ai Babilonesi già da mille anni circa, tuttavia, forse egli, o molto più probabilmente qualche suo discepolo, ne diede per primo la dimostrazione.

> *e che il cielo tutto fosse una scala musicale e un numero. Ed essi inserivano nel loro schema tutte le proprietà dei numeri e delle scale di cui erano in grado di mostrare l'accordo con gli attributi e le parti e l'intero ordinamento dei cieli [...] i Pitagorici dicono che le cose sono ciò che sono in virtù delle proprietà dei numeri [...] [essi] trattano gli oggetti stessi come numeri e non considerano gli oggetti matematici come distinti da essi.*[16]

Alla base della visione pitagorica c'erano, dunque, i numeri (interi positivi), concepiti come entità discrete. Ancora Aristotele, nella Metafisica, ci dice che venivano rappresentati come dei sassolini, disposti a formare figure geometriche, dalle quali si potevano ricavare semplici proprietà aritmetiche. Ma i numeri non erano concepiti soltanto per contare: accanto al problema del conteggio c'era quello della misura, con la conseguente problematica legata al concetto di continuo geometrico. Si andava delineando così un altro concetto, quello di *grandezza*, il cui prototipo è costituito dalla lunghezza di un segmento. Misurare la lunghezza di un segmento consiste, in ultima analisi, nello stabilire un rapporto tra questo e un altro segmento, scelto come campione di lunghezza o unità di misura. Il problema della misura è quindi inscindibilmente legato al problema delle misure dei rapporti. Proclo, nel suo

[16] ibidem.

commento al primo libro degli Elementi di Euclide del secolo V d. C.[17], ci informa che i Pitagorici si occuparono per primi della teoria delle proporzioni. Mediante i rapporti tra numeri interi si pensava che si potesse misurare ogni rapporto tra coppie di grandezze dello stesso tipo (lunghezze, aree, volumi). Lo studio della geometria, nella visione ellenica, consisteva nello studio delle proprietà dello spazio fisico. Essere quindi in grado di misurare i rapporti tra grandezze geometriche significava poter fare affermazioni quantitative sulla realtà. Si capisce così che, se i rapporti tra grandezze erano esprimibili sempre in termini di rapporti tra numeri naturali, l'intera realtà era fondata, in ultima analisi, su di essi. Non serviva altro oltre alla successione 1, 2, ... Mediante essa era possibile dominare ogni aspetto della matematica e quindi, secondo la visione pitagorica, della realtà.

Come ha magistralmente mostrato Thomas Kuhn[18], nei periodi di massima espansione e di consolidamento di un paradigma scientifico – ovvero nei cosiddetti periodi di *scienza normale* – basta una o più osservazioni, o scoperte, anche piccole, e l'intero edificio costruito fino a quel momento comincia a incrinarsi: nel volgere di un breve periodo di tempo il paradigma entra in crisi, finché tale crisi non sfocia in una *rivoluzione scientifica.* In questa sede non si vuole certo avanzare l'ipotesi che la scoperta di coppie di grandezze *incommensurabili* abbia causato una crisi nel *paradigma pitagorico* fino a determinare una rivoluzione scientifica; tuttavia, secondo diversi storici della matematica tale scoperta provocò una profonda crisi all'interno della matematica greca. Per esempio, Paul Tannery scrive[19]:

> *I Pitagorici partirono dall'idea, naturale per ogni persona non istruita, che ogni lunghezza fosse necessariamente commensurabile con l'unità. La scoperta dell'incommensurabilità di alcune lunghezze con altre, e prima di tutto la diagonale del quadrato con il suo lato, sia essa stata fatta dal Maestro o dai suoi discepoli, dovette essere un vero scandalo logico, un ostacolo formidabile.*

La questione dell'incommensurabilità consisteva in questo: esistono coppie di segmenti per cui non è possibile trovare un'unità di misura comune, che sia sottomultiplo di entrambi i segmenti di partenza. Ciò, come è semplice notare, equivale a dire che esistono coppie di segmenti il cui rapporto tra le rispettive lunghezze non è esprimibile come un rapporto tra numeri interi. Ovviamente il discorso si estendeva a coppie di grandezze qualunque, purché dello stesso tipo. I numeri, dunque, non erano in grado di cogliere appieno il

[17] [Proclo Commento].
[18] [Kuhn 1962].
[19] [Tannery 1912].

Figura 1.6: Ippaso di Metaponto. I dati biografici sono assai incerti. Visse tra Metaponto, Crotone e Sibari. La tradizione gli attribuisce la scoperta delle grandezze incommensurabili.

continuo geometrico, e men che meno potevano racchiudere l'essenza stessa della realtà.

Non è noto con esattezza quando sia stata fatta questa importante scoperta, né in che modo. Tali questioni sono state fonte di discussioni e congetture già per i commentatori antichi, e ancor oggi costituiscono problemi aperti (e forse irrisolubili, a meno che non vengano portati alla luce nuovi documenti) in seno alla storia della matematica. Gli studiosi sono abbastanza concordi nel ritenere che sia poco probabile che Pitagora stesso fosse consapevole di tale problematica. La tradizione attribuisce la scoperta a Ippaso di Metaponto, nella seconda metà del VI secolo a. C.; e in uno scolio al libro X degli Elementi di Euclide si legge che, a causa della divulgazine di tale scoperta, egli perì in mare durante un naufragio per punizione divina. Leggende a parte, le più antiche testimonianze scritte rimasteci riguardo alla questione delle grandezze incommensurabili risalgono a Platone e Aristotele. Secondo i due filosofi tale scoperta aprì una grave crisi, tanto più grave se si pensa che essa era una conseguenza di semplici proprietà geometriche stabilite dagli stessi Pitagorici. Aristotele, negli *Analitici Primi*, in relazione alla questione delle dimostrazioni per assurdo, prende come esempio proprio l'incommensurabilità:

> *[...] per esempio [...] la diagonale è incommensurabile, poiché i numeri dispari sarebbero uguali ai pari se fosse supposta commensurabile.*

Sebbene nel passo precedente l'autore non specifichi di quale figura la diagonale in questione sia incommensurabile con il relativo lato, c'è un certo consenso tra gli storici della matematica nel ritenere che si riferisca alla diagonale di un quadrato. In questo caso, l'incommensurabilità equivale, in termini moderni, all'irrazionalità della radice quadrata del numero 2. Nella proposizione X.117 degli Elementi di Euclide[20] troviamo una dimostrazione di tale risultato che coincide sostanzialmente con quella data modernamente nei libri di testo:

Proposizione 1.3.1. *Non esistono due interi positivi, m e n, tali che si abbia:*

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

Dimostrazione. Supponiamo che i numeri m e n siano relativamente primi (in caso contrario, basta eliminare i fattori comuni). Se, per assurdo, la radice quadrata di 2 fosse razionale, allora si avrebbe:

$$2n^2 = m^2$$

Ciò mostra che m^2 è pari, sicché anche m sarà pari. Scriviamolo come $m = 2k$, con k intero positivo. Sostituendo nell'ultima equazione, si ha:

$$2n^2 = 4k^2 \implies n^2 = 2k^2$$

Ciò mostra che n^2 è pari, sicché anche n è pari.

In definitiva, abbiamo mostrato che entrambi i numeri m e n sono pari, e ciò è assurdo, in quanto siamo partiti dall'ipotesi che essi fossero relativamente primi.

In alternativa, è possibile ragionare in base alla fattorizzazione unica dei numeri interi, considerando che nella fattorizzazione di m^2 il fattore 2 deve comparire un numero pari di volte (eventualmente zero volte), mentre nella fattorizzazione di $2n^2$ lo stesso fattore appare un numero dispari di volte (sicuramente almeno una volta). Dunque, la relazione $2n^2 = m^2$ non può sussistere se m e n sono numeri interi. □

Molto si è discusso su quale possa essere stata la dimostrazione originale. La maggior parte degli studiosi è concorde nel ritenere che il primo caso di incommensurabilità scoperto sia stato proprio quello tra lato e diagonale di

[20]Tale proposizione, assieme alla precedente 116, è presente in uno scolio al libro X, e quasi sicuramente si tratta di un'aggiunta posteriore; nell'edizione critica di Heiberg, considerata definitiva, entrambe sono raccolte in appendice. Di sicuro la dimostrazione ivi proposta non può essere quella originaria, in quanto presuppone la teoria dei numeri relativamente primi, sviluppata soltanto in uno stadio più avanzato della matematica greca.

un quadrato; alcuni hanno però avanzato l'ipotesi (per esempio, Von Fritz) che la scoperta delle grandezze incommensurabili fu fatta nell'ambito degli studi dei pitagorici relativi al pentagramma, per cui sarebbe il rapporto tra diagonale e lato di un pentagono regolare ad aver causato la scoperta. La questione rimane tuttora aperta e in ogni caso non si dispone di nessuna dimostrazione, ma solo di ricostruzioni plausibili.

Al di là delle questioni irrisolte, è indubbio che la scoperta delle grandezze incommensurabili determinò un profondo influsso sullo sviluppo successivo della matematica greca. I Greci non introdussero nuovi numeri, piuttosto si limitarono ad accettare il fatto che *i numeri* (interi positivi e loro rapporti) non erano sufficienti a descrivere la realtà matematica. Per usare ancora le parole di Boyer:

> *Originariamente negli ambienti pitagorici le grandezze venivano rappresentate con sassolini o* calcoli*, da cui deriva il termine oggi usato di calcolo, ma al tempo di Euclide si era già verificato un completo cambiamento del punto di vista: le grandezze non vengono più generalmente associate con numeri o con sassolini, ma con segmenti. Negli* Elementi *gli stessi numeri interi vengono rappresentati con segmenti. Il regno dei numeri continuava ad avere la proprietà della discontinuità, ma il mondo delle grandezze continue (e ciò comprendeva gran parte della matematica pre-ellenica e pitaorica) costituiva qualcosa di completamente separato dal numero e doveva venire trattato con metodo geometrico. Sembra che fosse la geometria, piuttosto che il numero, a governare il mondo.*[21]

1.4 Eudosso e Euclide

Nel corso del secolo V a. C., la questione dell'incommensurabilità venne progressivamente accettata e approfondita. Per esempio, nel dialogo platonico *Teeteto*, si può leggere che il matematico Teodoro aveva dimostrato l'incommensurabilità tra i segmenti di lunghezza $\sqrt{x}$ e un segmento di lunghezza unitaria, per $x \in \{3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17\}$. Come s'è già detto, sebbene l'incommensurabilità tra due grandezze equivale all'irrazionalità del loro rapporto, bisogna tenere ben presente che nella fase più antica della matematica greca l'universo dei numeri restò sempre confinato agli interi positivi e ai loro rapporti: i rapporti tra grandezze incommensurabili non furono mai considerati dei *numeri irrazionali*, e questi ultimi ricevettero assai lentamente e dopo varie vicissitudini la qualifica di *numeri*, con pari dignità rispetto ai numeri razionali. Piuttosto, l'incommensurabilità determinò uno

[21] [Boyer 1968].

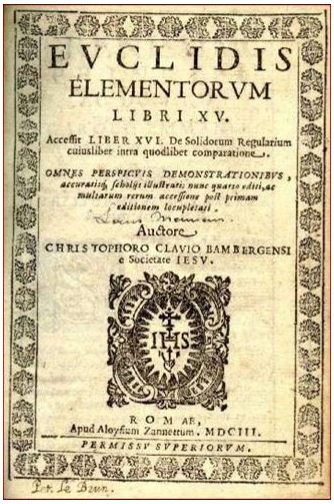
Figura 1.7: Euclide di Alessandria. Scarse sono le notizie biografiche sull'autore degli Elementi. Visse e lavorò al Museo di Alessandria tra i secoli IV e III a. C..

spostamento nell'orientamento della matematica verso la geometria. I termini di un'equazione dovevano essere interpretati geometricamente: i quadrati rappresentavano aree e i cubi volumi. Non era possibile sommare grandezze disomogenee e ogni proprietà andava dimostrata utilizzando un opportuno modello geometrico. Nasceva, in altri termini, quell'*algebra geometrica* – di cui si può trovare un'ampia esposizione in Euclide – che appare tanto artificiosa agli occhi di un lettore moderno, avvezzo sin da piccolo al contrario, ovvero a tradurre in termini algebrici ogni problema matematico.

Tuttavia, ormai era noto che la questione dei rapporti tra grandezze geometriche non poteva essere risolta con i soli rapporti numerici. Sebbene non venissero introdotte esplicitamente delle nuove entità numeriche, se si voleva continuare a fare geometria bisognava comunque sviluppare una teoria delle proporzioni che trattasse allo stesso modo tanto i rapporti tra grandezze commensurabili quanto quelli tra grandezze incommensurabili. Ciò venne fatto da Eudosso di Cnido nella prima metà del IV secolo a. C.. La sua teoria ci è giunta, pressoché invariata, attraverso il Libro V degli Elementi. Di fatto con l'opera di Euclide, composta intorno al 300 a. C., il periodo di *crisi* si può ritenere ormai concluso, rappresentando essa uno stadio più maturo del pensiero matematico greco, caratterizzato da un maggior *rigore*.

Giungiamo così alla conclusione di una tappa fondamentale per la storia dei numeri reali, sebbene soltanto provvisoria. Infatti, come verrà mostrato nel seguito, il punto di vista di Euclide costituisce una prima sistemazione dei concetti relativi al continuo geometrico, che rimarrà pressoché invariata per quasi duemila anni e a cui attingeranno, nel secolo XIX, Cantor e Dedekind per dare una sistemazione teorica definitiva ai numeri reali.

Come vedremo nel capitolo successivo, nei libri V e X dell'opera euclidea sono contenute *in nuce* quelle caratteristiche essenziali che costituiscono l'essenza stessa della continuità della retta reale. In particolare, nel libro V viene



EVCLIDIS
ELEMENTORVM
LIBRI XV.
Accessit LIBER XVI. De Solidorum Regularium cuiuslibet intra quodlibet comparatione.
OMNES PERSPICVIS DEMONSTRATIONIBVS, accuratisq; scholijs illustrati; nunc quarto editi, ac multarum rerum accessione post primam editionem locupletati.
Auctore
CHRISTOPHORO CLAVIO BAMBERGENSI e Societate IESV.
IHS
ROMAE,
Apud Aloysium Zannettum. MDCIII.
PERMISSV SVPERIORVM.
Petr. Le Brun.

Figura 1.8: Il frontespizio dell'edizione degli Elementi commentata da Clavio (1603). Gli Elementi sono stati, fino alle soglie del secolo XX, il libro più letto dopo la Bibbia.

esposta la teoria delle proporzioni tra grandezze, siano esse commensurabili o incommensurabili. Nel libro X, invece, Euclide approfondisce ulteriormente la questione dell'incommensurabilità.

Capitolo 2

Le grandezze euclidee

2.1 Proprietà delle grandezze

A partire dal libro V degli Elementi, Euclide comincia a parlare di *grandezze* (μεγέθη, sing. μέγεθος). Contrariamente a quanto avviene con i numeri, dei quali l'autore fornisce una definizione esplicita nel libro VII, per le grandezze non viene data alcuna definizione. D'altro canto, i numeri stessi vengono presentati come un caso particolare di grandezze, a cui viene applicata, nei cosiddetti "libri aritmetici" degli Elementi (VII, VIII, IX), la teoria delle proporzioni sviluppata nel libro V (teoria che, come s'è già detto, è da attribuirsi al matematico greco Eudosso di Cnido, contemporaneo di Platone).

Il modello di grandezza utilizzato da Euclide è quello di grandezza geometrica. In particolare, ogni dimostrazione viene svolta utilizzando segmenti di retta, anche quando si stia parlando di grandezze in generale. È tuttavia chiaro che con tale termine ci si riferisce a un concetto astratto: grandezze sono lunghezze, aree, volumi, ma a Euclide e ai suoi contemporanei era chiaro che la teoria poteva estendersi a grandezze più generali, come angoli e tempi.[1] A tal proposito, si ritiene[2] che uno dei motivi per cui Euclide cerchi di introdurre la teoria di Eudosso il più tardi possibilie nella sua opera, svolgendo quanti più argomenti poteva in maniera indipendente da essa e introducendola soltanto quando non se ne poteva più prescindere, sia proprio dovuto a questioni di purismo geometrico: da un punto di vista moderno, infatti, si sarebbe quasi tentati di accostare le grandezze euclidee al concetto di *grandezza fisica estensiva* e interpretare il rapporto tra due grandezze come

[1] Si veda [MacTutor History of Mathematics].

[2] Per la traduzione in italiano del testo euclideo e molte delle considerazioni qui svolte, si faccia riferimento a [Euclide Elementi]. Per l'edizione critica del testo greco si è fatto riferimento a [Heiberg 1883].

un numero reale positivo[3]. In effetti, come vedremo nel corso del capitolo, nell'opera euclidea sono presenti, nei limiti di quanto poté essere sviluppato allora, i germi di tale concetto.

È bene tenere presente, tuttavia, che nell'interpretazione del testo euclideo si utilizzeranno notazioni e concetti moderni, trattando, per esempio, le grandezze in maniera algebrica, come se fossero esse stesse delle quantità numeriche. D'altro canto, lo scopo della presente trattazione non vuole essere quello di interpretare il pensiero matematico greco nel suo contesto storico originale, ma di estrapolare *a posteriori* e con molto senno di poi, quei concetti che, rimasti in gestazione per secoli, hanno poi visto la luce in maniera compiuta nel secolo XIX, quando hanno trovato terreno fertile per potersi sviluppare in maniera rigorosa. In altre parole, il confronto tra il contenuto del presente capitolo e quello dei capitoli dedicati alle costruzioni moderne dei numeri reali dovrà portare a far riflettere sul fatto che:

> *Le idee [...] sono simili a spore durature: talvolta la presunta origine di un concetto non è altro che la ricomparsa di un'idea molto più antica che era rimasta assopita.*[4]

Con questo spirito, accingiamoci ad esaminare le prime due definizioni del libro V degli Elementi, nelle quali vengono introdotti i concetti di multiplo e sottomultiplo di una grandezza:

> Definizione V.1. *Una grandezza è parte di una grandezza, la minore di quella maggiore, quando essa misuri la maggiore.*[5]

> Definizione V.2. *La grandezza maggiore è multipla di quella minore, quando sia misurata dalla minore.*[6]

Chiaramente, tali definizioni presuppongono la possibilità di confrontare e sommare tra loro due grandezze. Modernamente, ciò equivale a richiedere che nell'insieme delle grandezze ci sia un ordinamento totale. D'altro canto, tale possibilità è adombrata sin dall'inizio dell'opera euclidea, ad esempio nelle *Nozioni comuni*, che definiscono implicitamente i concetti di uguaglianza e disuguaglianza. Ancora, nella definizione successiva, l'aggettivo *omogenee*

---

[3] Dal punto di vista di un fisico sperimentale, l'insieme dei numeri reali rappresenta l'insieme di tutti i possibili risultati a cui la misura di una grandezza fisica può dare luogo, espressi in un'opportuna unità di misura.

[4] [Boyer 1968].

[5] **Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον.**

[6] **Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάττονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.**

è da interpretarsi proprio nel senso della confrontabilità. In questa stessa definizione, inoltre, Euclide tenta di definire il rapporo tra due grandezze:

> Definizione V.3. *Rapporto tra due grandezze omogenee è un certo modo di comportarsi rispetto alla quantità.*[7]

Come si può vedere, e come è stato spesso sottolineato, tale definizione è alquanto carente e piuttosto tautologica. Si potrebbe chiedere: «cosa s'intende con "un certo modo di comportarsi rispetto alla quantità"?» e rispondere: «un rapporto, appunto». Tuttavia, piuttosto che ricercare una definizione rigorosa, quello che va notato è il tentativo di astrarre dalla nozione di rapporto tutto ciò che ci possa essere di accessorio in essa: un rapporto mette a confronto due termini confrontabili tra di loro (**ὁμογενῆ**, omogenei, cioè della stessa natura, quindi confrontabili rispetto a qualche caratteristica comune), siano essi due segmenti, due figure piane, solide etc., e quello che conta ai fini della determinazione del rapporto non è la forma, il colore o altro, ma solo qualcosa che ha a che fare con la *quantità*, ossia la loro *grandezza*, che a seconda dei casi è lunghezza, area, volume etc.

Nella definizione quarta viene individuata un'importante proprietà che le grandezze devono avere affinché tra esse vi sia un rapporto:

> Definizione V.4. *Si dice che hanno fra loro rapporto le grandezze le quali possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente.*[8]

Si tratta del celebre *postulato di Archimede*: date due grandezze A e B, esiste sempre un numero naturale non nullo m tale che $mA > B$[9]. Dunque, per Euclide, affinché di due grandezze si possa considerare il rapporto, è necessario che esse siano *omogenee* ed *archimedee*. L'omogeneità, come abbiamo già detto, equivale alla possibilità di confrontare tra loro due grandezze; essa adombra, cioè, un ordinamento tra le grandezze. Per quanto riguarda l'archimedeicità, vedremo nei capitoli successivi che, quando Dedekind e Cantor enunceranno, nel secolo XIX, i loro rispettivi postulati riguardo alla continuità della retta, da essi si potrà dedurre la proprietà archimedea per i numeri reali. In un certo senso, come sostiene Attilio Frajese[10], il postulato di Archimede costituisce una sorta di postulato di continuità così come Euclide poteva darlo.

---

[7]**Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητά ποια σχέσις.**

[8]**Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.**

[9]Tale denominazione risale al secolo XIX ed è dovuta all'ampio utilizzo che Archimede ha fatto di detto postulato. Tuttavia, ormai si è concordi nel ritenere che la sua introduzione risale a Eudosso stesso, per cui sarebbe più corretto chiamarlo *postulato di Eudosso* o quantomeno *postulato di Eudosso-Archimede.*

[10][Frajese 1968].

2.2 La definizione di uguaglianza tra rapporti

VENIAMO ora alla celebre definizione quinta. In essa viene definito il concetto di uguaglianza tra due rapporti:

> Definizione V.5. *Si dice che [quattro] grandezze sono nello stesso rapporto, una prima rispetto ad una seconda ed una terza rispetto a una quarta, quando risulti che equimultipli della prima e della terza [presi] secondo un multiplo qualsiasi, ed equimultipli della seconda e della quarta [presi pure] secondo un multiplo qualsiasi, sono gli uni degli altri, cioè ciascuno dei due primi del suo corrispondente fra i secondi, o tutti e due maggiori, o tutti e due uguali, o tutti e due minori, se considerati appunto nell'ordine rispettivo.*[11]

Galileo, nel *Principio di giornata quinta* della sua ultima opera, la parafrasava, seppur per criticarne il carattere controintuitivo, nel seguente modo:

> *Allora quattro grandezze sono proporzionali, quando gli ugualmente multiplici della prima e della terza, presi secondo qualunque multiplicità, si accorderanno sempre nel superare, mancare o pareggiare gli ugualmente multiplici della seconda e della quarta.*[12]

Indubbiamente, a una prima lettura essa appare alquanto ostica. Cerchiamo di tradurla secondo la notazione moderna:

Definizione 2.2.1 (Uguaglianza tra rapporti di grandezze)**.** *Due grandezze A e B sono tra loro nello stesso rapporto in cui sono altre due grandezze C e D se, per ogni coppia di interi positivi m e n, accade che:*

- *se $mA < nB$ allora $mC < nD$;*
- *se $mA = nB$ allora $mC = nD$;*
- *se $mA > nB$ allora $mC > nD$;*

[11] **Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτυ ἰσάκις πολλαπλασίων καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ἢ ἅμα ἴσα ᾖ ἢ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατάλληλα.**

[12] [Galilei 1638].

La definizione quinta è stata apprezzata da molti matematici, antichi e moderni, e costituisce, pressoché unanimemente, il risultato più notevole dell'intero Libro V, libro già di per sé considerato uno dei più grandi risultati della matematica greca. In essa Euclide evita di fornire direttamente una definizione di rapporto tra grandezze. Piuttosto ne fornisce una definizione *per astrazione*, introducendo un criterio in base al quale sia possibile stabilire quando due rapporti sono uguali: non importa quale sia la natura delle grandezze in gioco e tutte le loro proprietà accessorie, a parte il fatto di essere omogenee ed archimedee; se sono soddisfatti i requisiti della V.5 possiamo sancire l'uguagliaza[13].

Con questo espediente viene aggirato l'ostacolo dell'incommensurabilità e si apre la possibilità di operare mediante i rapporti tra grandezze a prescindere dal fatto che esista una misura comune o meno. Difatti, si potrebbe tracciare la seguente linea di ragionamento che conduce alla definizione quinta. Date due grandezze A e B, nel caso in cui queste siano commensurabili il loro rapporto è esprimibile mediante una frazione[14]. In termini moderni scriveremmo:

$$\frac{A}{B} = \frac{n}{m}$$

In tal caso, la verifica dell'uguaglianza con il rapporto tra altre due grandezze C e D è immediata: se sussiste la relazione $mC = nD$ allora c'è uguaglianza di rapporti e scriviamo:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

altrimenti no. Nel caso in cui le grandezze di partenza siano incommensurabili non è ovviamente possibile procedere per tale via, poiché, quali che siano gli interi scelti, si verificherà sempre una delle due alternative:

- $mA < nB$;

[13]In [Euclide Elementi] Frajese propone un parallelo con la definizione di temperatura in fisica: non si definisce direttamente il concetto di temperatura, ma si stabilisce un criterio per dire quando due corpi, indipendentemente da forma, volume, peso etc. sono all'equilibrio termico. Fatto ciò, è possibile suddividere tutti i corpi in classi, a ciascuna delle quali appartengono i più disparati sistemi fisici aventi la stessa temperatura. In tal modo si definisce *per astrazione* il concetto di temperatura. Analogamente, si possono definire delle classi di equivalenza per i rapporti. A ciascuna classe appartengono i rapporti più disparati: rapporti tra lunghezze, tra angoli, tra temperature, tutti accomunati da un *quid*, che oggi chiamiamo *numero reale*.

[14]Ovviamente, in tutto questo capitolo numeri interi e frazioni si intendono sempre positivi.

- $mA > nB$;

e questo non basta a identificare numericamente il rapporto sì da poterlo confrontare con quello di altre due grandezze. Bisogna quindi individuare un criterio che non distingua un rapporto tra grandezze commensurabili da uno tra grandezze incommensurabili. D'altro canto, una tale richiesta è assolutamente legittima: da un punto di vista strettamente geometrico non c'è nulla di qualitativamente diverso, ad esempio, tra il rapporto tra una circonferenza e il suo diametro, e quello tra il diametro e il raggio. Cos'è quindi, che rende due rapporti uguali? Ebbene, la risposta a tale domanda costituisce l'idea di fondo contenuta nella definizione V.5. Supponiamo di moltiplicare A per m e B per n. Si ottiene un nuovo rapporto, $mA : nB$. In altre parole, abbiamo "alterato" il rapporto originario. Effettuando la stessa alterazione sul rapporto tra C e D otteniamo $mC : nD$. Non siamo in grado di verificare l'uguaglinza tra questi due nuovi rapporti più di quanto non lo eravamo per i rapporti di partenza, tuttavia possiamo confrontare (si ricordi la proprietà di omogeneità) mA con nB e mC con nD. Se c'è discordanza tra questi due confronti, allora siamo sicuri che i due rapporti di partenza sono diversi, se invece c'è concordanza ciò non è sufficiente a sancirne l'uguaglianza. Tuttavia, se l'accordo si verifica per tutte le alterazioni possibili, ovvero moltiplicando per tutte le possibili coppie di interi positivi, allora i due rapporti originari non possono che essere uguali tra loro.

Tale criterio sancisce quindi l'uguaglianza tra due rapporti. Nel caso in cui le grandezze siano commensurabili, esso è ridondante, in quanto è sufficiente trovare i rapporti numerici e confrontarli tra loro; cionondimeno è ugualmente valido e realizza a livello concettuale quell'indistinguibilità nella trattazione dei due casi che Euclide persegue in tutto il Libro V. Nel caso di grandezze incommensurabili, invece, esso permette di individuare due classi di numeri razionali che identificano in maniera univoca il rapporto. Difatti, tutti quei numeri interi positivi per cui si abbia $mA < nB$ determinano delle approssimazioni razionali per eccesso del rapporto tra A e B:

$$E = \left\{ \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}^+ : \frac{A}{B} < \frac{n}{m} \right\}$$

Mentre tutti quei numeri interi positivi per cui si abbia $mA > nB$ determinano delle approssimazioni razionali per difetto:

$$D = \left\{ \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}^+ : \frac{A}{B} > \frac{n}{m} \right\}$$

Anche se non si è in grado di esprimere sotto forma numerica il rapporto tra A e B, la conoscenza di tali classi è sufficiente a determinarlo univocamente, in quanto la definizione quinta afferma appunto che se un'altra coppia di grandezze determina le stesse classi E e D, allora i rapporti coincidono. Modernamente saremmo quasi tentati di dire: «i due numeri reali coincidono». E a tal proposito, se interpretiamo i rapporti $A : B$ e $C : D$ rispettivamente come i numeri reali positivi α e β, allora la definizione quinta adombra una proprietà importante dei numeri reali: la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$[15]. Difatti, alla luce di quanto abbiamo appena visto, la definizione quinta ci dice che $\alpha = \beta$ se ogni approssimazione razionale per difetto o per eccesso di α lo è anche, rispettivamente per difetto o per eccesso, di β: se quindi α e β sono diversi, necessariamente s'infiltrerà tra essi un numero razionale.

S'è detto sopra che la definizione V.5 viene considerata un risultato notevole. In effetti, non è esagerato affermare che in essa è contenuta l'essenza stessa della continuità, come vedremo meglio nel capitolo dedicato alla costruzione di Dedekind dei numeri reali. Non a caso, quando Dedekind portò a termine tale costruzione, il matematico Lipschitz gli scrisse dicendo che non aveva fatto nulla di nuovo, in quanto tutto ciò era già contenuto nel Libro quinto degli Elementi.

2.3 Incommensurabilità e *antifairesi*

Nel Libro X Euclide si occupa esclusivamente della trattazione delle grandezze incommensurabili. Si potrebbe quasi affermare che si compiaccia nel dipanare, una dopo l'altra, le proprietà delle irrazionalità quadratiche, dilungandosi in una successione serrata di ben 115 proposizioni che ricoprono buona parte del complesso degli Elementi. Indubbiamente si tratta di una trattazione lunga e complicata. Tanto per citare qualche testimonianza autorevole, Fibonacci, nel *Flos*, dice che il Libro X «difficilior est antecedentium et quorumdam sequentium librorum Euclidis»[16]. Stevino lo definisce «la croix des mathématiciens»[17], e ancora Van Der Waerden scrive che «Book X does not make easy reading»[18].

S'è detto nel paragrafo precedente che il Libro V degli Elementi contiene l'idea fondamentale della costruzione di Dedekind dei numeri reali. Tale idea consiste, fondamentalmente, nell'identificare un numero reale (o un rapporto tra grandezze, per dirla con Euclide) mediante la classe di tutte le approssimazioni razionali per difetto e quella delle approssimazioni razionali per eccesso. Le idee espresse nel Libro X, invece, influenzarono la costruzione dei

[15] Si veda [Ofman 2013].
[16] È più difficile dei libri precedenti e in un certo senso dei seguenti.
[17] La croce dei matematici.
[18] [Van Der Waerden 1961].

numeri reali fatta da Cantor quasi contemporaneamente a Dedekind. Non a caso, come vedremo più avanti, Cantor stesso, nell'articolo in cui espone le sue idee a riguardo, citerà esplicitamente il Libro X.

Come verrà illustrato, l'idea fondamentale di Cantor è quella di identificare un numero reale non mediante tutte le approssimazioni razionali, ma selezionando delle successioni di numeri razionali che si *addensano* gli uni sugli altri, lasciando intuire che tendano verso qualche valore definito. Per dirla in termini moderni, si tratta delle ben note *successioni di Cauchy*.

Ovviamente in Euclide non troviamo né successioni di Cauchy né costruzioni di nessuna sorta. Tuttavia, nella proposizione X.2 viene esposto il cosiddetto procedimento di *antifairesi* (**ἀνθυφαίρεσις**), mediante il quale è possibile ottenere approssimazioni sempre migliori di un rapporto tra grandezze. Si tratta di una generalizzazione del noto *algoritmo euclideo* per trovare il massimo comun divisore tra due numeri, esposto nel Libro VII. La differenza sostanziale sta nel fatto che, mentre nel caso di numeri l'algoritmo risulta sempre finito, nel caso di grandezze, invece, quando esse siano incommensurabili, l'algoritmo non ha fine. Difatti, il massimo comun divisore tra due numeri è la più grande misura comune tra essi: se due grandezze sono incommensurabili non esiste una misura comune per definizione. Ma leggiamo il testo della proposizione:

> Proposizione X.2 *Se di due grandezze disuguali veniamo a sottrarre, sempre e vicendevolmente, la minore dalla maggiore [quante volte sia possibile], e quella [ogni volta] restante non misura mai la grandezza ad essa precedente, le grandezze saranno incommensurabili.*[19]

Il procedimento espresso in questa proposizione, se interpretato con concetti e notazione moderni, conduce direttamente alla nozione di *frazione continua*[20] e individua una successione di approssimazioni razionali di un rapporto tra grandezze, che si *addensano* sempre più attorno a un certo *valore limite*.

Siano infatti A e B due grandezze omogenee ed archimedee. Notiamo anzitutto che il procedimento indicato da Euclide equivale ad effettuare la *divisione euclidea* tra le grandezze in questione. Abbiamo già detto come l'omogeneità sia equivalente a richiedere l'esistenza di una relazione d'ordine totale nell'insieme di tali grandezze. Supponiamo quindi che sia $A > B$. Se B misura A, il procedimento si arresta qui. Se invece ciò non accade abbiamo:

---

[19] **Ἐὰν δύο μεγεθῶν [ἐκκειμένων] ἀνίσων ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.**

[20] Si veda [Ofman 2013].

$$A = q_0 B + R_0, \quad 0 \leq R_0 < B \tag{2.1}$$

In questo caso q_0, intero positivo, rappresenta il massimo numero di volte che la grandezza B va nella grandezza A e costituisce un'approssimazione per difetto del rapporto $\frac{A}{B}$. Poniamo $q_0 = s_0$. R_0 invece è una grandezza più piccola di B. Il passo successivo dell'antifairesi è dividere R_0 per B. Se R_0 misura B allora ci fermiamo qui e determiniamo il numero razionale che esprime il rapporto tra A e B. Altrimenti abbiamo:

$$B = q_1 R_0 + R_1, \quad 0 \leq R_1 < R_0 \tag{2.2}$$

Dove, ancora, q_1 è un numero intero positivo e R_1 una grandezza. Ora, dalla (2.1), dividendo per B, otteniamo:

$$\frac{A}{B} = q_0 + \frac{R_0}{B} \tag{2.3}$$

e dalla (2.2), dividendo per R_0, otteniamo:

$$\frac{B}{R_0} = q_1 + \frac{R_1}{R_0} \tag{2.4}$$

da cui, inserendo nella (2.3), si ricava:

$$\frac{A}{B} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{R_1}{R_0}} \tag{2.5}$$

Notiamo che $s_1 \coloneqq q_0 + \frac{1}{q_1} > \frac{A}{B}$, quindi questa volta abbiamo ottenuto un'approssimazine per eccesso (razionale, in quanto sia q_0 che q_1 sono interi) del rapporto tra A e B. L'approssimazione ottenuta è migliore della precedente s_0. Per vederlo è sufficiente notare che dalla (2.3) e dalla (2.4) si ha:

$$\frac{A}{B} - s_0 = \frac{1}{q_1 + \frac{R_1}{R_0}} \tag{2.6}$$

mentre dalla (2.5) e dalla definizione di s_1 si ottiene:

$$s_1 - \frac{A}{B} = \frac{R_1}{R_0} \cdot \frac{1}{q_1(q_1 + \frac{R_1}{R_0})} < \frac{1}{q_1(q_1 + \frac{R_1}{R_0})} \leq \frac{1}{q_1 + \frac{R_1}{R_0}} \tag{2.7}$$

Iterando il procedimento, se A e B non sono commensurabili, non si giunge mai a un termine, ma si ottiene una frazione continua della forma:

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \dots}}}$$

I termini della successione:

$$\begin{aligned}
s_0 &= q_0 \\
s_1 &= q_0 + \frac{1}{q_1} \\
s_2 &= q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}} \\
s_3 &= q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3}}} \\
&\dots
\end{aligned}$$

si *addensano* sempre più attorno al valore *limite* $\frac{A}{B}$. Intuitivamente, si direbbe che la successione tende al valore limite $\frac{A}{B}$, ma a questo livello è chiaro che non si può parlare di *convergenza* nel senso tecnico del termine, in quanto non si dispone degli strumenti analitici idonei e inoltre il rapporto tra A e B rimane un concetto non formalizzato, la cui esistenza viene postulata. Tuttavia, risulta chiaro come da ogni rapporto tra due grandezze incommensurabili sia possibile estrarre una successione di numeri razionali che si addensano gli uni sugli altri e che sembrano approssimare in maniera sempre più precisa il rapporto in questione: come s'è già detto, tale idea è alla base della costruzione di Cantor dei numeri reali.

Da questa interpretazione dell'antifairesi emerge anche un'altra idea che, come vedremo, sarà importante nel formalizzare il concetto di continuità. Come è semplice verificare, la successione individuata può essere scissa in due sottosuccessioni in maniera tale che i termini di posto pari costituiscano delle approssimazioni per difetto del rapporto, mentre i termini di posto dispari ne diano delle approssimazioni per eccesso:

$$S_{2k} < \frac{A}{B} < S_{2k+1}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Le due sottosuccessioni così individuate vengono a definire una famiglia di intervalli inscatolati gli uni negli altri, che *intrappolano*, per così dire, il rapporto $\frac{A}{B}$. Intuitivamente, la continuità della retta geometrica potrebbe essere espressa mediante l'idea che ogni successione di intervalli di questo tipo, le cui lunghezze tendano a zero, individui uno e un solo punto sulla retta. Ciò sarà formalizzato nel Capitolo 6.

Al di là delle idee prefigurate da esso, il procedimento dell'antifairesi descritto sopra costituisce un buon metodo per il calcolo approssimato. Non ci sono rimasti documenti sufficienti per attestare se questo fosse effettivamente il metodo utilizzato dai matematici del periodo antico, tuttavia alcuni commentatori, tra cui Proclo, affermano che esso fosse utilizzato già dai Pitagorici. Oltre a ciò, Jean Itard, analizzando nel dettaglio alcune approssimazioni date senza altre spiegazioni da alcuni autori, tra cui Achimede e Archita, e confrontando tra di loro diversi metodi di approssimazione, tra cui alcuni sicuramente non conosciuti nell'antichità, ha concluso che il solo metodo ragionevole che potesse portare a questi risultati fosse quello dell'antifairesi[21].

Come vedremo nel capitolo successivo, i matematici dopo Euclide continueranno a cercare approssimazioni per i rapporti tra grandezze incommensurabili nel tentativo di afferrare il concetto sfuggevole di irrazionalità.

[21] [Itard 1964].

Capitolo 3

Da Euclide all'aritmetizzazione dell'Analisi

3.1 Il periodo di transizione

Con la vittoria di Ottaviano nella battaglia di Azio, nel 31 a. C., e la morte di Cleopatra VII nel 30 a. C., il Regno tolemaico d'Egitto viene conquistato dai Romani. Da un punto di vista strettamente politico, l'età ellenistica termina qui. Se invece si prende in considerazione l'aspetto culturale rappresentato da essa, ovvero la diffusione della lingua, del pensiero e delle conquiste scientifiche greche lungo l'intero bacino del mediterraneo, allora è chiaro che la cultura ellenistica, veicolata attraverso quella che era divenuta una vera e propria lingua internazionale mediterranea, la *koinè* (**κοινὴ διάλεκτος**), si estende fino al secolo VI d. C.; e si potrebbe scegliere come data simbolica della sua fine l'anno 529, data in cui l'imperatore Giustiniano, durante la sua campagna di persecuzione contro i pagani, ordinò la chiusura dell'Accademia Platonica. Intanto, nel 476, con la deposizione di Romolo Augustolo, l'Impero Romano d'Occidente aveva visto il suo tramonto definitivo: comincia, convenzionalmente, il Medioevo.

Sebbene, come s'è appena detto, il complesso di conoscenze ereditate dai greci avesse continuato a influenzare le civiltà mediterranee, tuttavia la cultura in generale, e il pensiero scientifico in particolare, aveva visto un progressivo declino. Il pensiero matematico si era spostato a poco a poco verso aspetti pratici ed applicativi, perdendo quell'ampio respiro teoretico che aveva caratterizzato le ricerche dei matematici del periodo ellenico, da Pitagora a Euclide.

Intanto, nella penisola arabica si aggiravano gruppi di nomadi del deserto, i beduini, gente assai semplice, che non sapeva né leggere né scrivere.

Figura 3.1: Omar Khayyam. Nishapur, 1048 - Nishapur, 1131. Studioso islamico, poeta e matematico. Compilò tavole astronomiche, contribuì alla riforma del calendario e scoprì un metodo geometrico per risolvere equazioni cubiche intersecando una parabola con una circonferenza.

Tra di essi, nel 570, alla Mecca, nacque Maometto, fondatore dell'Islam. Divenuto un capo militare, oltre che religioso, egli fondò uno stato che ben presto intraprese un'inarrestabile espansione, continuata anche e soprattutto dopo la morte del suo fondatore. Caddero Damasco e Gerusalemme. Nel 641 cade anche Alessandria, che per parecchi secoli era stato il centro matematico del mondo: gli incolti beduini vengono in contatto con tradizioni culturali millenarie. Inizialmente disinteressati ad esse, a partire dalla seconda metà del secolo VIII avvenne per gli Arabi ciò che era già accaduto per i Romani quando, conquistata militarmente la Grecia, ne fuorono conquistati culturalmente[1]. Nel 766 fu portata a Bagdad dall'India un'opera a contenuto astronomico-matematico, nota agli Arabi con il nome di *Sindhind*, e che probabilmente si tratta del *Brahmasphuta Siddhanta* o del *Surya Siddhanta*. Pochi anni più tardi essa venne tradotta in arabo assieme al *Tetrabiblos* di Tolomeo. A poco a poco, alchimia, astronomia, matematica accesero gli interessi intellettuali degli Arabi, tanto che oggi è possibile affermare che se non fosse stato per il risveglio culturale dell'Islam nella seconda metà del secolo VIII, che portò a tradurre, commentare e rielaborare i testi delle civiltà conquistate, gran parte del sapere antico sarebbe andato perduto.

Per quel che attiene alla storia del concetto di numero reale, s'è già detto che dopo Euclide non ci furono grandi progressi concettuali fino al secolo XIX. Quello che accadde tra questi due termini è un lento slittamento del concetto di grandezza e di rapporto tra grandezze dal dominio geometrico verso una connotazione più spiccatamente numerica. Detto in altri termini,

[1]«Graecia capta ferum victorem cepit et artes intulit agresti Latio», Orazio, Epistole, II, 1, 156.

si opera un lento passaggio dal concetto di incommensurabilità a quello di irrazionalità.

Uno dei grandi meriti della matematica araba è stato quello di colmare la frattura esistente tra l'algebra numerica e l'algebra geometrica. A tal proposito, si può immaginare che Omar Khayyam (Figura 3.1) tracciasse già quella direzione che condurrà a Descartes quando scriveva:

> *Chiunque pensi che l'algebra sia uno stratagemma per conoscere ciò che non si sa, ha un'idea sbagliata di essa. Non si dovrebbe fare alcuna attenzione al fatto che l'algebra e la geometria presentano un aspetto così diverso. L'algebra non è altro che la dimostrazione di fatti geometrici.*[2]

Khayyam, come i suoi predecessori arabi, per le equazioni di secondo grado forniva tanto soluzioni aritmetiche quanto geometriche. Inoltre, risolveva equazioni cubiche utilizzando metodi geometrici e ciò implicava l'impiego di radici cubiche. Nelle sue ricerche giunse assai vicino alla definizione di numero irrazionale, sostituendo la teoria euclidea delle proporzioni con un metodo numerico[3].

Quando il testimone culturale approdò sul suolo europeo, tra il secolo XII e XIII, troviamo Fibonacci che, utilizzando strumenti appresi dagli Arabi, risolve un'equazione cubica dimostrando che le sue radici non sono formate da numeri razionali o radici quadrate di numeri razionali, come accadeva in Euclide. Difatti, negli elementi si era arrivati a prendere in considerazione grandezze costruibili a partire da un segmento, considerato unitario, mediante riga e compasso: in termini moderni, ciò equivale a considerare lunghezze che possono essere costruite a partire da interi positivi per mezzo di addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni ed estrazioni di radici quadrate. Fibonacci passa così ad esprimere una soluzione approssimata. Non è noto il modo in cui egli l'abbia ottenuta, tuttavia si tratta dell'approssimazione più accurata di una radice irrazionale di un'equazione algebrica che fosse mai stata ottenuta in Europa fino a quella data, e tale rimase per oltre trecento anni[4].

Sebbene non si stessero verificando significativi progressi concettuali, verso la fine del secolo XV i matematici operavano ormai con espressioni co-

[2] [Amir-Moez 1963].

[3] Si veda [Struik 1958].

[4] È caratteristico il fatto che Fibonacci, come era consuetudine tra i matematici suoi contemporanei, esprima la radice nel sistema sessagesimale; ciò avveniva sistematicamente nelle opere di matematica teorica, laddove in contesti mercantili stavano prendendo sempre più piede ormai le cifre indo-arabiche, introdotte in Europa da Fibonacci stesso nella sua opera *Liber abaci*.

Figura 3.2: Leonardo da Pisa, detto Fibonacci. Pisa (?) 1170 - Pisa (?) 1250. Svolse un ruolo cruciale nel recupero della matematica antica e diede dei contributi egli stesso. L'opera *Liber Abaci* introdusse il sistema decimale posizionale e le cifre indo-arabiche in Europa.

struite a partire dagli interi positivi per mezzo di addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni e radici n-sime, ovvero espressioni radicali.

Alle soglie del secolo XVI sia i razionali che gli irrazionali venivano progressivamente accettati come numeri, sebbene ci fosse una distinzione netta tra essi. Per esempio, nell'*Arithmetica Integra* (1544), Stifel scrive:

> *Si discute, giustamente, sulla questione se gli irrazionali siano veri numeri o no. Poiché nello studio delle figure geometriche, dove i numeri razionali ci abbandonano, i numeri irrazionali ne prendono il posto, e mostrano precisamente ciò che i numeri razionali sono incapaci di mostrare [...] siamo spinti e costretti ad ammettere che essi sono corretti.*

Tuttavia egli continua affermando che: «poiché gli irrazionali non sono proporzionali ai numeri razionali, essi non possono essere dei veri numeri, sebbene siano "corretti"».

È interessante notare come Stifel concluda affermando che i numeri irrazionali sono tutti e soli quelli ottenibili mediante espressioni radicali. Per esempio, per quel che riguarda la lunghezza della circonferenza, nell'appendice al suo libro egli distingue anzitutto tra *circonferenza fisica* e *circonferenza matematica*, affermando che è possibile misurare, per mezzo di strumenti fisici, le proprietà della prima ma non della seconda. Poi considera la circonferenza matematica come limite di una successione di poligoni con un numero crescente di lati. Scrive infatti:

> *Pertanto la circonferenza matematica è correttamente descritta come il poligono costituito da infiniti lati. E così la sua lunghezza non è descritta da alcun numero, né razionale né irrazionale.*

Figura 3.3: Michael Stifel. Esslingen, 1487 - Jena, 1567. Matematico tedesco che inventò i logaritmi indipendentemente da Napier, utilizzando un approccio totalmente differente.

In altre parole, Stifel intuisce l'esistenza di lunghezze che non corrispondono a nessuna espressione radicale e che possono essere approssimate quanto si voglia, pur non riconoscendo ad esse lo status di numero irrazionale.

Nel 1585 Simon Stevin (italianizzato Stevino) pubblicò *De Thiende*, un libretto nel quale venivano introdotte le frazioni decimali. Tale lavoro rappresentò un passo in avanti nella comprensione dei numeri sebbene questa non fosse la finalità dell'autore. Vi venivano presi in considerazione soltanto allineamenti decimali finiti, per cui con tale notazione si era in grado di rappresentare esattamente soltanto una certa classe di numeri razionali. Dei restanti numeri razionali si poteva dare soltanto una rappresentazione approssimata e per Stevin il sistema da lui introdotto era appunto un mezzo di calcolo mediante tali approssimazioni. Sebbene la sua notazione fosse accettata da Clavio e Nepero, altri vi resistettero in quanto consideravano come un passo indietro il fatto di non poter rappresentare esattamente nemmeno frazioni comuni come, per esempio, 1/3.

Stevin si occupò anche di numeri reali. Ne *L'Arithmetique* (1585), scrive:

> *È assai comune tra gli autori di aritmetica avere a che fare con numeri come* $\sqrt{8}$ *e altri, che vengono chiamati assurdi, irrazionali, irregolari, inesplicabili o sordi etc. e ai quali si nega la natura di numero.*

E continua dicendo che in realtà essi sono tutti da considerarsi numeri della stessa natura e non andrebbero distinti gli uni dagli altri.

Più o meno un secolo più tardi John Wallis (1616 - 1703), nel suo *A treatise of Algebra* del 1684, accetta e utilizza senza grandi entusiasmi i decimali proposti da Stevin. Anch'egli prende in considerazione soltanto espansioni decimali finite, mediante le quali approssimare tutti gli altri numeri. D'altro canto i numeri, per Wallis, sono ancora quelli costruibili a partire dagli

Figura 3.4: Simon Stevin. Bruges, 1548 - L'Aia, 1620. Matematico fiammingo. Introdusse un primo resoconto elementare e completo delle frazioni decimali, favorendone l'utilizzo in matematica.

interi positivi per mezzo delle quattro operazioni e dell'estrazione di radici n-esime. Tuttavia, egli era ben conscio dell'esistenza di rapporti che non potevano ricadere in tale definizione di numero, come ad esempio quello tra l'area e la circonferenza di un cerchio. Per ottenere approssimazioni precise quanto si voglia di tali rapporti, Wallis considerava diversi approcci, dalle frazioni continue alle approssimazioni ottenute mediante successive estrazioni di radici quadrate. Ma tali metodi conducevano direttamente allo studio di serie infinite, e, senza gli opportuni strumenti analitici mediante i quali poter affrontare problemi di convergenza, egli non riuscì a fare ulteriori progressi nello studio dei numeri reali.

Nonostante gli sforzi crescenti per cercare di capire la natura dei numeri reali, essi restavano ancora associati al concetto di grandezza. D'altro canto, la matematica stessa era considerata come la scienza delle grandezze e non si riteneva fosse necessaria nessuna definizione di tale concetto. Ricordiamo a tal proposito la citazione di Eulero fatta nel Capitolo 1. E ancora aggiungiamo la seguente, tratta dalla stessa opera:

> *La matematica, in generale, è la scienza delle quantità, o la scienza che indaga sui mezzi atti a misurare le quantità.*[5]

Egli fornisce una definizione di grandezza, o quantità, come qualcosa suscettibile di essere incrementata o diminuita in maniera continua, come ad esempio le lunghezze, le aree, i volumi, le masse, la velocità, il tempo etc.

[5] [Eulero 1770].

Figura 3.5: Leonhard Euler. Basilea, 1707 - S. Pietroburgo, 1783. Matematico svizzero. Diede enormi contributi in innumerevoli settori della matematica e della fisica, tra cui la geometria analitica, la trigonometria, la geometria, il calcolo e la teoria dei numeri.

Comunque, il modo stesso di fare matematica di Eulero si prestava a un'idea più astratta di quantità, ovvero di una variabile x che non necessariamente doveva assumere valori reali. Così, la matematica simbolica spinse la nozione di quantità troppo lontano, rendendo necessaria una riconsiderazione del concetto di numero reale[6] .

Verso gli inizi del secolo XIX un approccio più rigoroso alla matematica, promosso principalmente da Cauchy e Bolzano, iniziò a porre le basi di quell'apparato che avrebbe assicurato al concetto di numero reale fondamenta più solide.

3.2 Il periodo del *rigore*

SPESSO, nel corso della storia, i matematici si sono trovati di fronte a periodi di *crisi*, durante i quali erano assillati da dubbi e incertezze riguardo ai metodi da essi utilizzati nelle loro ricerche. A tali periodi di crisi seguono dei periodi di *rigore*, in cui l'impegno è volto principalmente alla chiarificazione logica e alla riorganizzazione razionale della disciplina. Sempre, questi periodi di crisi vengono superati con la nascita di nuova matematica e nuovi strumenti di indagine.

Uno di tali momenti è già stato preso in considerazione: si tratta della scoperta delle grandezze incommensurabili. Come abbiamo visto nel Capitolo 1, tale scoperta determinò uno sviluppo preferenziale della geometria rispetto all'algebra. Tuttavia, venne anche posto il seme di procedimenti di approssimazione di grande fecondità. Frutto di tale periodo è il metodo di esaustione, ideato dallo stesso Eudosso e sviluppato da Archimede, a tutti gli effetti equivalente al processo di limite, sebbene fosse giudicato dai matema-

[6] Si veda [MacTutor History of Mathematics].

tici dell'epoca come un metodo euristico più che una forma di dimostrazione rigorosa.

L'introduzione del calcolo infinitesimale da parte di Newton e Leibniz costituisce un altro periodo critico, che determinò gravi dispute riguardo agli infinitesimi, tra cui celebri sono le aspre critiche del vescovo Berkeley. Sebbene le difficoltà generate da questa nuova e promettente branca della matematica non fossero risolte nell'immediato, essa continuò nondimeno ad essere sviluppata, fornendo risultati importanti sia per la matematica di per sé sia per le applicazioni alla fisica. Tuttavia, verso gli inizi del secolo XIX l'esigenza di una trattazione più rigorosa cominciava a farsi sentire in maniera sempre più pressante. Molti erano gli aspetti da chiarire, dal ruolo degli infinitesimi al concetto di convergenza, dalla definizione esatta di *funzione* alla questione della relazione tra continuo geometrico e continuo numerico. Si inaugurò così quello che viene ricordato come il *periodo del rigore* per eccellenza, e che portò, in meno di un secolo, a una sistemazione dell'analisi matematica, da parte di matematici quali Bolzano, Cauchy e Weierstrass, tanto per citare alcuni tra i più influenti, in una forma che sussiste tuttora pressoché invariata nei manuali universitari.

Intanto alcuni concetti erano stati ormai accettati, come i numeri negativi e i numeri complessi, e la matematica si espandeva più che mai in ogni direzione. A tal proposito, Lolli scrive:

> *L'Ottocento è stato il secolo in cui si è avuto il maggior progresso della matematica di tutta la storia, un progresso, o comunque un mutamento, non solo quantitativo ma nel modo stesso di fare matematica. Questo secolo rappresenta forse uno spartiacque tra due epoche storiche, nonostante le ovvie continuità, paragonabile forse solo al sesto secolo a. C. quando Talete per primo introdusse le dimostrazioni.*[7]

A lungo si era ritenuto, sebbene con sfumature diverse, che la matematica studiasse fondamentalmente le caratteristiche del mondo reale. Basti, a tal proposito, citare la posizione di Galileo, il quale descriveva la natura come un grande libro scritto nel linguaggio della matematica: impadronirsi della matematica significava imparare quel linguaggio con cui leggere la realtà. In fondo, la geometria studiava le proprietà dello spazio fisico, mentre i numeri misuravano i fenomeni quantitativi del mondo.

Ben presto però, l'avvento delle geometrie non euclidee, ad opera di Gauss, Bolyai, Lobacevskij e Riemann, e lo sviluppo di teorie algebriche con leggi parzialmente diverse da quelle numeriche tradizionali, spazzarono

[7] [Lolli Fondamenti].

Figura 3.6: Bernard Bolzano. Praga, 1781 - Praga, 1848. Diede importanti contributi allo sviluppo dell'analisi e fu un pioniere nello studio dell'infinito.

per sempre questa convinzione. Le teorie matematiche, impostate assiomaticamente sul modello di Euclide e sviluppate in modo logico, erano o parevano sì coerenti, ma quale realtà dovessero descrivere diventava sempre più difficile da stabilire.

Tale problematica si andò ad innestare nel programma di rigorizzazione già in corso. Da un lato, la definizione precisa del concetto di convergenza necessitava a sua volta di una definizione rigorosa del concetto di numero reale; dall'altro, tale concetto era legato ancora all'idea intuitiva del continuo della retta geometrica; ma con l'intuizione geometrica messa in difficoltà dagli sviluppi in corso si sentiva ancora più urgente la necessità di una fondazione dei numeri reali – e di conseguenza di tutta l'analisi matematica – su basi puramente numeriche. Come sosteneva Hankel nella sua *Theorie der komplexen Zahlensysteme*[8]:

> *La condizione per costruire un'aritmetica universale è una matematica puramente concettuale, sganciata da ogni intuizione.*

È questo il cuore della cosiddetta *aritmetizzazione dell'analisi*, espressione coniata da Klein nel 1895. Il suo atto di nascita formale può considerarsi l'opera del matematico Martin Ohm del 1822 dal titolo *Versuch eines vollständig konsequenten Systems der Mathematik*[9].

Uno dei problemi più urgenti del programma di aritmetizzazione consisteva, quindi, in una definizione rigorosa dei numeri reali, che fosse scevra da ogni richiamo intuitivo ai concetti di grandezze geometriche, sebbene da esse traesse l'origine, e che fosse basata esclusivamente sul concetto di numero razionale, a sua volta riconducibile al concetto di numero naturale.

[8]Teorie dei sistemi di numeri complessi, 1867.

[9]*Tentativo di costruire un sistema completamente coerente della matematica.*

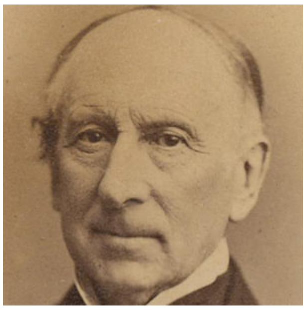


Figura 3.7: Augustin Louis Cauchy. Parigi, 1789 - Sceaux, 1857. Pioniere nel processo di sistemazione rigorosa dell'analisi, reale e complessa, e della teoria dei gruppi di permutazioni. Svolse ricerche sulla convergenza e divergenza delle serie infinite, sulle equazioni differenziali, sui determinanti, sulla probabilità e in fisica matematica.

Verso gli inizi degli anni '30 del secolo XIX, Bolzano aveva fatto già un tentativo per sviluppare una teoria dei numeri reali come limiti di successioni di numeri razionali, ma questo passò inosservato e fu pubblicato soltanto nel 1962.

Cauchy, nel suo *Cours d'analyse* del 1821 non si era preoccupato di dare una definizione rigorosa di numero reale. Egli, assumendo il concetto come intuitivamente noto, si limitava ad affermare che un numero reale era il limite di una successione di numeri razionali. Tuttavia, ciò ingenerava una *petitio principii* nel momento in cui egli e i matematici suoi contemporanei definivano il limite di una successione come un numero reale.

Nel 1869 Méray pubblicò un articolo in cui richiamava l'attenzione su tale vizio di ragionamento e propose una definizione di numero reale basata sul concetto di successione che "converge all'interno di se stessa", ovvero, come è chiamata oggi, una *successione di Cauchy.* Le successioni di Cauchy di numeri razionali "determinavano" un numero razionale come limite oppure un "numero fittizio" come "limite fittizio". Egli dimostrò che tali "numeri fittizi" potevano venire ordinati ed erano essenzialmente quelli che oggi sono noti come numeri irrazionali. Tuttavia, egli fu vago sulla questione se il numero determinato dalla successione fosse da identificarsi con la successione stessa o meno.

Più o meno negli stessi anni Weierstrass affrontò la questione dei numeri reali identificandoli con degli *aggregati* di numeri razionali, tuttavia le sue idee non furono mai pubblicate, e furono rese pubbliche dai suoi allievi, Lindemann e Heine.

Giungiamo così al 1872, anno che possiamo simbolicamente assumere come termine del programma di aritmetizzazione dell'analisi. In quest'anno, infatti, furono pubblicati i lavori di Cantor e Dedekind, che vengono conside-

Figura 3.8: Karl Weierstrass, Ostenfelde, 1815 - Berlino, 1897. Uno dei padri dell'analisi matematica moderna.

rati ancora oggi come il punto di riferimento definitivo per la questione della definizione rigorosa del concetto di numero reale.

Cantor, nel triennio 1869-1872, lavorò a stretto contatto con Heine, il quale lo incoraggiò ad occuparsi della teoria delle serie trigonometriche. Nel suo famoso articolo *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihnen*[10] scriveva:

> *Ho cercato di dimostrare [...] che due serie trigonometriche [...] che convergono e hanno la stessa somma per tutti i valori di x, hanno gli stessi coefficienti; ho poi dimostrato [...] che questo teorema resta vero se per un numero finito di valori di x si rinuncia o alla convergenza o all'uguaglianza delle somme delle due serie.*
> *L'estensione che ho in mente consiste in questo: che si può rinunciare alla convergenza o alla concordanza delle somme delle serie per un numero infinito di valori di x [...] senza che il teorema cessi di essere vero.*
> *Per raggiungere questo scopo sono però costretto (benché, in massima parte, per cenni) a premettere alcune considerazioni utili, spero, a meglio illuminare certi fatti che sono invariabilmente presenti non appena siano date delle grandezze numeriche, in numero finito o infinito; ciò mi porterà ad alcune definizioni che qui formulo solo per meglio illustrare, nel modo più conciso possibile, il teorema cui voglio arrivare, e che sarà dimostrato nel § 3.*

Il lavoro citato era diviso in tre paragrafi: l'ultimo dimostrava l'estensione preannunciata nel titolo, mentre i primi due avevano un carattere "preparatorio"; tuttavia, la parte preparatoria del saggio possedeva un interesse assai superiore a quello, molto settoriale, della sezione conclusiva, in quanto in

[10] *Sull'estensione di un teorema della teoria delle serie trigonometriche*, pubblicato in *Mathematische Annalen*, vol. 5, 1872. Presente nella raccolta [Cantor Scritti 1872-1899].

essa veniva proposta una definizione di numero reale che viene ancora oggi riconosciuta come valida. Nello stesso anno, Heine suggerì a Cantor alcune semplificazioni che portarono a uno sviluppo definitivo della teoria nell'articolo *Die Elemente der Funktionenlehre*, pubblicata da Heine sul *Journal* di *Crelle*. Sostanzialmente, la costruzione di Cantor era analoga a quella di Méray.

Il lavoro di Heine fu ricevuto da Dedekind il 14 marzo dello stesso anno 1872, come scrive egli stesso nel suo articolo *Stetigkeit und die Irrationalzahlen*[11], nel quale Dedekind darà la sua costruzione dei numeri reali. In esso, l'autore scrive di aver cominciato a pensare al problema della continuità sin dal 1858, anno in cui per la prima volta si trovò a dover insegnare i fondamenti del calcolo differenziale al Politecnico di Zurigo. Tuttavia, non si era risolto a pubblicare i suoi risultati, ritenendoli di scarso interesse. Quando però ricevette l'articolo di Heine, si decise definitivamente a pubblicare il suo lavoro, in quanto – egli scrive – la sua presentazione gli appariva più semplice. Nello stesso momento in cui scriveva (20 marzo 1872), aveva appena ricevuto anche l'articolo originale di Cantor, del quale così scrive:

> *Come posso vedere da una rapida lettura, l'assioma dato nel paragrafo II di quell'articolo, a parte la forma in cui è presentato, è in accordo con ciò che io indico nel paragrafo III [del presente articolo] come l'essenza della continuità.*

Se l'idea di partenza di Cantor era riconducibile ai procedimenti di approssimazione di numeri irrazionali e quindi, retrospettivamente, affondava le sue radici nel Libro X degli Elementi, l'idea di Dedekind, invece, è assai vicina alle concezioni insite nella definizione quinta del Libro V della stessa opera. Tuttavia, come vedremo nel seguito, le due costruzioni risultano del tutto equivalenti.

La definizione rigorosa del concetto di numero reale, posta al centro del programma di aritmetizzazione, costituiva l'epilogo di una questione millenaria che, apertasi nel secolo VI a. C. con la scoperta delle grandezze incommensurabili, aveva visto una risoluzione provvisoria con la teoria di Eudosso e la successiva trattazione di Euclide nel 300 a. C. circa, ma aveva lasciato tante questioni aperte che, come un fiume in piena che avanzando trascina con sé sempre più detriti, si erano intrecciate agli sviluppi matematici che si andavano accumulando nel corso dei secoli, finché non si poté più rimandare la sua risoluzione. E d'altronde i tempi erano ormai maturi.

[11] *Continuità e numeri irrazionali.* Tale articolo, assieme all'altro celebre, *Was sind und was sollen die Zahlen* (*Cosa sono e cosa dovrebbero essere i numeri.*), del 1888, si trovano in [Dedekind 1901].

Le costruzioni di Cantor e Dedekind, che, come è stato detto, costituiscono la sistemazione definitiva accettata ancor oggi, saranno l'oggetto dei due capitoli successivi.

Capitolo 4

Il modello di Cantor-Méray

4.1 L'idea di fondo

La costruzione di Cantor dei numeri reali è basata essenzialmente sull'idea di approssimazione di un numero irrazionale mediante numeri razionali. Come abbiamo già visto nel Capitolo 2, tale idea è implicitamente contenuta già nel Libro X degli Elementi, e del resto essa aveva attraversato l'intera storia della matematica fino ad arrivare alle definizioni di Cauchy e dei suoi contemporanei di numero irrazionale come limite di una successione di numeri razionali. Finché si faceva riferimento al modello intuitivo della retta, tutto si vedeva abbastanza chiaramente. A tal proposito, Cantor scrive:

> *I punti di una retta vengono determinati concettualmente in quanto, dopo aver fissato un'unità di misura, se ne dà l'ascissa, cioè la distanza da un punto fisso O della retta, col segno $+$ o $-$ a seconda che il punto in questione giaccia nella parte positiva o negativa (stabilita preliminarmente) della retta rispetto a O.*
> *Se questa distanza ha un rapporto razionale con l'unità di misura, la esprimiamo con una grandezza numerica del [campo dei numeri razionali]; negli altri casi, se il punto è* conosciuto *grazie per esempio a una costruzione, è sempre possibile indicare una successione*
>
> $$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$
>
> *che [...] sta con la distanza in questione in una relazione tale che, al crescere di n, i punti della retta cui corrispondono le distanze a_1, a_2, $\dots$, a_n, $\dots$ si avvicinano infinitamente a quello da determinare.*[1]

[1] *Sull'estensione di un teorema della teoria delle serie trigonometriche*, pubblicato in *Mathematische Annalen*, vol. 5, 1872. Presente nella raccolta [Cantor Scritti 1872-1899].

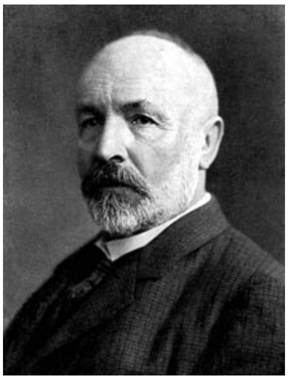


Figura 4.1: Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor. San Pietroburgo, 1845 - Halle, 1918.

Abbiamo già visto nel Capitolo 2 che una successione come quella a cui si riferisce Cantor è individuabile, per esempio, utilizzando opportunamente il procedimento dell'*antifairesi*. Tuttavia, se da un punto di vista geometrico intuitivo è facile visualizzare sulla retta i punti della successione che si addensano sempre più attorno a un dato punto, che rappresenta il numero irrazionale in questione, da un punto di vista puramente aritmetico, invece, ciò di cui disponiamo è soltanto del campo ordinato dei numeri razionali, e all'interno di tale campo non è chiaro come si possa definire il concetto di convergenza verso un ente non ben definito e che comunque non appartiene al campo stesso. La nozione di convergenza, infatti, può essere modernamente espressa, nell'ambito dei numeri razionali, nel modo seguente[2]:

Definizione 4.1.1 (Convergenza). *Sia* $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ *il campo ordinato dei numeri razionali. Si dice che una successione* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ converge *verso* $a \in \mathbb{Q}$*, oppure che ha come* limite $a \in \mathbb{Q}$*, se vale la seguente relazione:*

$$\forall \epsilon \in \mathbb{Q}, \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N} \colon n \geq N \implies |a_n - a| < \epsilon$$

In tal caso si scrive:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

[2]Nel presente capitolo e nel seguito di questo lavoro si considerano come dati gli insiemi numerici $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ con le relative proprietà. Verranno altresì utilizzati liberamente i concetti di base e le principali strutture dell'algebra. Ciò è coerente con lo spirito di questa presentazione, che vuole essere una interpretazione in retrospettiva, piuttosto che una ricostruzione storica.

Come si può vedere, in tale definizione sono coinvolti soltanto numeri razionali, per cui non è possibile utilizzarla per definire un numero irrazionale: al massimo essa potrà essere estesa anche ai numeri irrazionali, ma solo dopo che questi siano stati definiti come entità numeriche che godono di ben determinate proprietà. Quello che, invece, si può fare è esprimere la circostanza che gli elementi della successione approssimante si *addensano* gli uni sugli altri: è questa l'idea alla base della definizione di *successione di Cauchy*, concetto che costituisce il punto di partenza del lavoro di Cantor. In termini moderni, la nozione di successione di Cauchy è la seguente:

Definizione 4.1.2 (Successione di Cauchy)**.** *Sia* $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ *il campo ordinato dei numeri razionali. Una successione* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ *si dice essere una* successione di Cauchy *(o anche* successione fondamentale*) se soddisfa la seguente condizione:*

$$\forall \epsilon \in \mathbb{Q}, \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall m, n \in \mathbb{N} \colon m, n \geq N \implies |a_m - a_n| < \epsilon.$$

Le Definizioni 4.1.1 e 4.1.2 sembrano descrivere in due modi diversi lo stesso concetto. Difatti, avendo in mente il modello intuitivo della retta risulta naturale pensare che una successione di punti che convergano a un punto ben definito individuino una successione di Cauchy e, viceversa, una successione di punti che si addensino gli uni sugli altri in maniera tale da formare una successione di Cauchy coverga verso un punto ben definito della retta stessa. Tuttavia, non appena si voglia prescindere da ogni modello intuitivo e ci si voglia riferire a basi puramente aritmetiche, ci si rende conto che, nel campo dei numeri razionali, queste due nozioni non sono equivalenti, come mostrano i risultati seguenti:

Proposizione 4.1.1. *Sia* $\{a_n\} \subset \mathbb{Q}$ *una successione convergente a un numero razionale* a*. Allora* $\{a_n\}$ *è una successione di Cauchy.*

Dimostrazione. Sia $\epsilon > 0$ e razionale. Poiché la successione converge verso a, è possibile determiare un numero naturale N tale che, quale che sia il numero naturale n, purché maggiore o uguale a N, si avrà:

$$|a_n - a| < \epsilon$$

Segliendo quindi due numeri naturali, m e n, maggiori o uguali a N, si ha per entrambi:

$$|a_m - a| < \epsilon$$

e

$$|a_n - a| < \epsilon$$

Da cui si ricava facilmente:

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < 2\epsilon$$

che significa appunto che $\{a_n\}$ è di Cauchy. $\square$

Lemma 4.1.1. *Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri razionali positivi. Valgono le affermazioni seguenti:*

i) Se la successione dei quadrati $\{a_n^2\}$ è di Cauchy, allora anche la successione $\{a_n\}$ lo è;

ii) Se si ha $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 2$, allora $\{a_n\}$ non converge in $\mathbb{Q}$.

Dimostrazione. $\boxed{\text{i)}}$ Supponiamo, per assurdo, che $\{a_n\}$ non è di Cauchy. Ciò equivale a dire che:

$$\exists \epsilon \in \mathbb{Q}, \epsilon > 0 \mid \forall N \in \mathbb{N}\, \exists m, n \in \mathbb{N} \mid m, n \geq N \wedge |a_m - a_n| \geq \epsilon$$

Di conseguenza si ha $a_m^2 - 2a_m a_n + a_n^2 \geq \epsilon^2$. Supponendo ora, senza ledere la generalità, che sia $a_m \geq a_n$ abbiamo:

$$|a_m^2 - a_n^2| = a_m^2 - a_n^2 \geq \epsilon^2 + 2a_m a_n - 2a_n^2 = \epsilon^2 + 2a_n(a_m - a_n) \geq \epsilon^2 + 2a_n\epsilon > \epsilon^2$$

Ma l'ultima disuguaglianza contraddice l'ipotesi iniziale che $\{a_n^2\}$ sia di Cauchy. Dunque $\{a_n\}$ è di Cauchy.

$\boxed{\text{ii)}}$ Se $\{a_n\}$ convergesse a un numero razionale a, avremmo che, dato un $\epsilon > 0$ razionale, sarebbe possibile determinare un indice $N \in \mathbb{N}$ tale che, quale che sia il numero naturale n, purché maggiore di N, si avrebbe $|a_n - a| < \epsilon$. Per la successione dei quadrati otterremmo:

$$|a_n^2 - a^2| = |a_n - a||a_n + a| < \epsilon(\epsilon + 2a)$$

Ciò significa che la successione $\{a_n^2\}$ converge verso a^2. Ma siccome, per ipotesi, tale successione converge a 2, allora si avrebbe $a^2 = 2$, il che è assurdo, in quanto a è un numero razionale. Dunque la successione $\{a_n\}$ non può convergere in $\mathbb{Q}$. $\square$

Proposizione 4.1.2. *Esiste una successione $\{a_n\} \subset \mathbb{Q}$ di Cauchy non convergente in $\mathbb{Q}$.*

Dimostrazione. Definiamo due successioni di numeri naturali x_n e y_n nel seguente modo:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 3 \\ x_n = 3x_{n-1} + 2y_{n-1} \\ y_n = 4x_{n-1} + 3y_{n-1} \end{cases}$$

È facile far vedere con un calcolo diretto che, quale che sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, vale la seguente relazione:

$$y_n^2 - 2x_n^2 = 1$$

Definiamo poi la successione di numeri razionali positivi:

$$a_n = \frac{y_n}{x_n}$$

Dalle due relazioni precedenti si ricava:

$$a_n^2 = \frac{1}{x_n^2} + 2$$

Da cui, essendo x_n una successione di numeri naturali divergente, segue che:

$$\lim_{n \to \infty} a_n^2 = 2$$

Così, applicando il Lemma 4.1.1, segue che $\{a_n\}$ è una successione di Cauchy di numeri razionali positivi non convergente in $\mathbb{Q}$. □

Dunque, in $\mathbb{Q}$ ogni successione convergente è una successione di Cauchy ma non viceversa. Questo risultato, d'altronde, era facilmente intuibile in maniera non rigorosa pensando al procedimento dell'antifairesi, che individua appunto una successione di punti razionali sulla retta, i quali hanno tutte le carattaeristiche di una successione di Cauchy, ma che tuttavia non convergono a nessun punto razionale poiché essi "convergono" verso un rapporto tra grandezze incommensurabili non esprimibile mediante un rapporto tra interi.

Nonostante ciò, come scrive Cantor nel passo sopra citato, ogni volta che sulla retta individuiamo un punto la cui distanza dall'origine, espressa nell'unità di misura prescelta, è costituita da un numero irrazionale, la successione di numeri razionali che a questo numero "converge" identifica univocamente tale punto. Pertanto, ogni punto della retta è identificabile o con un numero razionale o con una successione di Cauchy di numeri razionali, che tendono verso un "limite fittizio".

A questo punto mancano due cose per completare la costruzione dei reali seguendo lo schema di Cantor. La prima è quella di strutturare l'insieme delle successioni di Cauchy come un campo ordinato, in maniera tale da poterle trattare come grandezze numeriche a tutti gli effetti. Esporremo questa parte nel paragrafo successivo. In secondo luogo, individuate le successioni di Cauchy (o, più precisamente, classi di equivalenza di successioni di Cauchy, come vedremo) con quelle che Cantor chiama *grandezze numeriche* (e che per noi rappresentano i numeri reali), sarà necessario introdurre un assioma, che esprimiamo mediante le parole che Cantor stesso usa nel già citato articolo del 1872:

> *Tuttavia, per rendere completa la connessione esposta in questo § fra i domini delle grandezze definite nel § 1 e la geometria della linea retta, si deve ancora aggiungere un* assioma *il quale dice semplicemente questo: che pure a ogni grandezza numerica corrisponde, viceversa, un punto determinato della retta [...].*
> *Chiamo* assioma *questa proposizione perché la sua natura non consente di dimostrarla in generale. Grazie ad essa le grandezze numeriche conseguono a posteriori una certa oggettualità, dalla quale tuttavia sono completamente indipendenti.*

In altre parole, come a ogni punto della retta è associabile una *grandezza numerica*, ovvero una successione di Cauchy di numeri razionali, così a ciascuna di tali grandezze numeriche corrisponderà un punto ben definito della retta. Quest'ultimo fatto, ossia che per ogni successione di Cauchy di numeri razionali ci sia posto sulla retta per un punto che ne rappresenti il limite, non può essere ulteriormente analizzato, ma va accettato come un postulato che esprime una sorta di *completezza* o *continuità* della retta. È questo l'assioma di cui parlava Dedekind nell'introduzione al suo articolo del 1872, e che riteneva essere equivalente a quello che egli stesso aveva dato come assioma esprimente la continuità della retta, come vedremo nel capitolo successivo.

4.2 I numeri reali secondo Cantor

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che i numeri reali sono da identificarsi, per Cantor, con le successioni di Cauchy di numeri razionali. Affinché l'identificazione sia sensata da un punto di vista matematico, sarà opportuno strutturare l'insieme di tali successioni in maniera tale che esse formino un campo ordinato. Tale campo dovrà ovviamente contenere, in un modo che specificheremo meglio, i numeri razionali.

Chiamiamo $\mathscr{C}(\mathbb{Q})$ l'insieme delle successioni di Cauchy sul campo razionale. Tra queste successioni, come abbiamo visto, ci sono quelle che convergono verso un numero razionale ben definito. Se una successione converge a zero sarà chiamata *infinitesima*. Indichiamo con $\mathscr{C}_0$ l'insieme delle successioni infinitesime. Premettiamo un importante lemma che ci permetterà di definire un ordinamento sui reali:

Lemma 4.2.1. *Sia $\mathscr{C}(\mathbb{Q})$ l'insieme delle successioni di Cauchy in $\mathbb{Q}$ e sia $a = \{a_n\} \in \mathscr{C}(\mathbb{Q})$. Valgono le seguenti affermazioni:*

i) a è limitata;

ii) Se a non è infinitesima, allora esiste $\eta \in \mathbb{Q}$, $\eta > 0$, tale che si abbia $|a_n| > \eta$ definitivamente, ossia da un certo indice in poi. In particolare si avrà definitivamente $a_n > \eta$ oppure definitivamente $a_n < -\eta$.

iii) Se a non è infinitesima, allora, per ogni altra successione $\{b_n\} \in \mathscr{C}(\mathbb{Q})$ tale che la successione $\{a_n - b_n\}$ sia infinitesima, esiste un $\sigma \in \mathbb{Q}$, $\sigma > 0$, tale che si ha definitivamente $b_n > \sigma$ o $b_n < -\sigma$.

Dimostrazione. $\boxed{\text{i)}}$ Poiché a è di Cauchy, scelto $\epsilon = 1$, esiste un numero naturale N tale che, se $m, n \geq N$, si ha $|a_m - a_n| < 1$. Osservando che:

$$|a_m| \leq |a_m - a_N| + |a_N|$$

si ha che, se $m \geq N$, vale:

$$|a_m| < 1 + |a_N|$$

A questo punto è sufficiente porre:

$$p = max\Big\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, 1 + |a_N|\Big\}$$

per avere $|a_n| \leq p$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{ii)}}$ Dire che a non è infinitesima equivale a dire che:

$$\exists \epsilon \in \mathbb{Q}, \epsilon > 0 \mid \forall N \in \mathbb{N}\, \exists m \in \mathbb{N}, m \geq N \mid |a_m| \geq \epsilon \tag{4.1}$$

D'altro canto, poiché a è di Cauchy, in corrispondenza dello stesso ϵ è possibile determinare un indice $N_\epsilon \in \mathbb{N}$, tale che, quali che siano i naturali m, n, purché maggiori o uguali a N_ϵ, si abbia:

$$|a_m - a_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

Sia adesso $m_{N_\epsilon} \geq N_\epsilon$ quell'indice, determinabile in corrispondenza di N_ϵ in base a (4.1), tale che $|a_{m_{N_\epsilon}}| \geq \epsilon$. Si ha che, per ogni $n \geq N_\epsilon$:

$$|a_{m_{N_\epsilon}}| \leq |a_{m_{N_\epsilon}} - a_n| + |a_n| < \frac{\epsilon}{2} + |a_n|$$

ossia

$$|a_n| > |a_{m_{N_\epsilon}}| - \frac{\epsilon}{2} \geq \frac{\epsilon}{2}$$

Ponendo quindi $\frac{\epsilon}{2} = \eta$ si ha, definitivamente:

$$|a_n| > \eta \tag{4.2}$$

Infine, siccome $|a_{m_{N_\epsilon}}| \geq \epsilon$, possono aversi due possibilità:

- $a_{m_{N_\epsilon}} \geq \epsilon$
- $a_{m_{N_\epsilon}} \leq -\epsilon$

Supponiamo che valga la prima. Se fosse $a_n < 0$ per qualche $n \geq N_\epsilon$, allora per (4.2) si avrebbe $a_n < -\frac{\epsilon}{2}$, per cui, ricordando ancora che a è di Cauchy, si otterrebbe:

$$\frac{\epsilon}{2} > |a_{m_{N_\epsilon}} - a_n| = a_{m_{N_\epsilon}} - a_n > \frac{3}{2}\epsilon$$

il che è assurdo. Deve quindi essere $a_n > 0$ definitivamente e quindi $a_n > \eta$ definitivamente. Trattando in maniera analoga il caso $a_{m_{N_\epsilon}} \leq -\epsilon$, si ottiene definitivamente $a_n < -\eta$.

$\boxed{\text{iii)}}$ Se a non è infinitesima, allora per la *ii*) appena dimostrata sarà definitivamente $a_n > \eta$ o $a_n < -\eta$, con $\eta \in \mathbb{Q}$, $\eta > 0$. Supponiamo che sia $a_n > \eta$. Ponendo $\sigma = \frac{\eta}{2}$, poiché $\{a_n - b_n\}$ è infinitesima si avrà anche definitivamente $|a_n - b_n| < \sigma$, e quindi definitivamente:

$$b_n = b_n - a_n + a_n > -\sigma + \eta = \frac{\eta}{2} = \sigma$$

Allo stesso modo, se $a_n < -\eta$, si prova che definitivamente $b_n < -\sigma$. $\square$

La *ii*) del Lemma 4.2.1 sostanzialmente ci dice che ogni successione di Cauchy di numeri razionali è infinitesima, oppure definitivamente maggiore di un numero positivo, oppure ancora definitivamente minore di un numero negativo. Negli ultimi due casi si dice che la successione è, rispettivamente, *strettamente positiva* e *strettamente negativa*. Dunque, per verificare che una successione di Cauchy è strettamente positiva, sarà sufficiente mostrare che essa è non infinitesima e definitivamente positiva; allo stesso modo, se una successione di Cauchy è non infinitesima e definitivamente negativa, allora sarà strettamente negativa. Si apre così la possibilità di istituire una relazione d'ordine tra le successioni di Cauchy, come vedremo tra poco.

Nell'insieme delle successioni di Cauchy è possibile definire le operazioni di somma e prodotto termine a termine:

Definizione 4.2.1. *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni di Cauchy. La somma e il prodotto di esse vengono definite nel seguente modo:*

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\};$$
$$\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\};$$

Si noti che nella Definizione precedente abbiamo utilizzato gli stessi simboli, $+$ e $\cdot$, sia per le operazioni tra numeri razionali sia per quelle tra successioni: è chiaro però che si tratta di operazioni formalmente diverse e il contesto chiarirà, di volta in volta, in quale struttura si stia operando.

Le operazioni termine a termine muniscono $\mathscr{C}(\mathbb{Q})$ di una struttura di anello:

Proposizione 4.2.1. *La struttura algebrica $(\mathscr{C}(\mathbb{Q}), +, \cdot)$, dove $+$ e $\cdot$ sono, rispettivamente, l'operazione di somma e prodotto termine a termine sulle successioni di $\mathscr{C}(\mathbb{Q})$, costituisce un anello commutativo e unitario, di cui $\mathscr{C}_0$ è un ideale.*

Dimostrazione. Che $\mathscr{C}(\mathbb{Q})$ costituisca un anello commutativo e unitario, è una immediata conseguenza della definizione stessa di operazioni punto per punto e delle proprietà delle operazioni di somma e prodotto sui razionali, per cui ne ometteremo la semplice dimostrazione.

Per quanto riguarda $\mathscr{C}_0$, ricordiamo che un ideale di un anello è un sottogruppo del gruppo additivo associato all'anello stesso, che gode della proprietà secondo cui il prodotto di un elemento dell'ideale per un elemento dell'anello è ancora elemento dell'ideale. Ancora, la verifica che $\mathscr{C}_0$ è un sottogruppo di $(\mathscr{C}(\mathbb{Q}), +)$ è diretta e la omettiamo. Vediamo invece che se $a \in \mathscr{C}(\mathbb{Q})$ e $b \in \mathscr{C}_0$ il loro prodotto è una successione infinitesima.

Poiché a è di Cauchy, essa è limitata, per cui esiste una costante razionale $p > 0$, tale che $|a_n| < p$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. D'altro canto, essendo b infinitesima, per ogni razionale $\epsilon > 0$, esiste un naturale N, tale che si abbia $|b_n| < \epsilon$, per ogni $n \geq N$. Per cui, per $n \geq N$, si avrà $|a_n b_n| < p\epsilon$, che implica appunto la convergenza a zero della successione prodotto. □

L'anello $\mathscr{C}(\mathbb{Q})$ non è sufficiente a istituire una corrispondenza biunivoca con la retta in quanto, come aveva già notato Cantor, se è vero che ad ogni successione di Cauchy corrisponde un punto sulla retta, è tuttavia facile rendersi conto che ad ogni punto sulla retta corrispondono diverse successioni di Cauchy che convergono verso di esso. Nel caso in cui il punto in questione sia rappresentato da un numero razionale, si può associare a tale numero l'insieme di tutte le successioni razionali ad esso convergenti, compresa quindi la successione stazionaria costituita dal numero stesso. Quando invece le successioni non sono convergenti in $\mathbb{Q}$, ma tendono tutte verso lo stesso punto la cui distanza dall'origine sia incommensurabile con la lunghezza del segmento unitario scelto, si definisce come *numero irrazionale* l'insieme di tutte queste successioni. In ogni caso, sia che un insieme di successioni rappresenti un numero razionale, sia che definisca un numero irrazionale, si ha sempre che, scelte a piacere due successioni nello stesso insieme, la loro differenza è una successione infinitesima, ovvero appartiene all'ideale $\mathscr{C}_0$.

Si viene a definire così una relazione di equivalenza che suddivide le successioni di Cauchy in classi: ciascuna classe di equivalenza definisce un numero reale, razionale o irrazionale, che verrà detto numero reale di Cantor. Dunque, è l'insieme quoziente $\mathscr{C}(\mathbb{Q})/\mathscr{C}_0$ piuttosto che $\mathscr{C}(\mathbb{Q})$ ad essere in corrispondenza biunivoca, secondo il postulato di Cantor, con i punti della retta geometrica. D'altro canto, essendo $\mathscr{C}_0$ un ideale, la relazione di equivalenza appena introdotta è una congruenza su $\mathscr{C}(\mathbb{Q})$, ovvero è una relazione di equivalenza tale che le operazioni di somma e prodotto su $\mathscr{C}(\mathbb{Q})$ si possono estendere alle classi di equivalenza stesse, in maniera tale che l'insieme quoziente acquisisca una struttura di anello commutativo e unitario. L'elemento neutro rispetto alla somma è la classe $\mathscr{C}_0$, che d'ora in poi indicheremo con 0; l'elemento neutro rispetto al prodotto è la classe rappresentata dalla successione stazionaria i cui elementi sono tutti uguali al numero razionale 1: indicheremo tale classe con lo stesso simbolo 1. Si noti che, formalmente, le classi 0 e 1 appena definite sono diverse dai numeri razionali 0 e 1, anche se di essi sono, in un certo modo, i rappresentanti nel nuovo insieme. Indichiamo, d'ora in poi, l'insieme $\mathscr{C}(\mathbb{Q})/\mathscr{C}_0$ con la scrittura $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ e le classi di equivalenza (o numeri reali) con le lettere maiuscole dell'alfabeto latino. Il passo successivo è quello di dimostrare che $\mathbb{R}_\mathcal{C}$ è un campo. Per fare ciò è sufficiente dimostrare la seguente proposizione:

Proposizione 4.2.2. *Sia $A \in \mathbb{R}_\mathcal{C}$, $A \neq 0$. Esiste un numero reale $B \neq 0$ tale che $AB = 1$.*

Dimostrazione. Sia a una successione di Cauchy di numeri razionali rappresentante la classe A. Essendo a non infinitesima si ha, per il Lemma 4.2.1, che esiste un numero razionale $\eta > 0$ tale che si abbia, da un certo indice naturale N in poi, $a_n > \eta$ oppure $a_n < -\eta$. Sia $a_n > \eta$ (la dimostrazione dell'altro caso è analoga). Costruiamo una successione di numeri razionali $\{b_n\}$ nel seguente modo:

$$b_n = \begin{cases} 1, & n < N \\ \frac{1}{a_n}, & n \geq N \end{cases}$$

Mostriamo che $\{b_n\}$ è di Cauchy. Dato $\epsilon > 0$ razionale, essendo a di Cauchy, esiste un indice $M \in \mathbb{N}$, tale che, per ogni coppia di numeri naturali $m, n \geq M$, si ha:

$$|a_m - a_n| < \epsilon$$

Sia ora:

$$L = max\{N, M\}$$

Si ha che, per ogni $m, n \geq L$:

$$|b_m - b_n| = \left| \frac{1}{a_m} - \frac{1}{a_n} \right| = \left| \frac{a_n - a_m}{a_m a_n} \right| < \frac{\epsilon}{\eta^2}$$

Dunque $\{b_n\}$ è di Cauchy in $\mathbb{Q}$.

La successione $\{a_n b_n\}$ è definitivamente costante e uguale a 1, per cui converge a 1. Così, essendo questa una successione rappresentante la classe prodotto AB, si ha che $AB = 1$. □

Il campo $(\mathbb{R}_\mathcal{C}, +, \cdot)$ può essere munito facilmente di una relazione d'ordine totale. Infatti, la *iii*) del Lemma (4.2.1) afferma sostanzialmente che due successioni di Cauchy equivalenti tra loro sono entrambe o infinitesime o strettamente positive o strettamente negative. In altre parole la nozione di *strettamente positivo* e *strettamente negativo* introdotta per le successioni di

Cauchy è una nozione di classe. Introduciamo la relazione "$<$" in $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ definita come segue:

Definizione 4.2.2. *Siano A e B due numeri reali. Si pone $A < B$ se e solo se la differenza B-A è* strettamente positiva*.*

Proposizione 4.2.3. *La relazione introdotta nella Definizione 4.2.2 gode delle proprietà* irriflessiva *e* transitiva*. Inoltre, si ha:*

i) $\forall A, B, C \in \mathbb{R}_{\mathcal{C}}: \quad A < B \implies A + C < B + C;$

ii) $\forall A, B, C \in \mathbb{R}_{\mathcal{C}}, C > 0: \quad A < B \implies AC < BC;$

Dimostrazione. Sia A un numero reale. Poiché $A - A = 0$, non può aversi $A < A$. Quindi $<$ è irriflessiva.

Siano ora A, B, C numeri reali tali che:

$$A < B \wedge B < C$$

La prima relazione ci dice che $B - A$ è strettamente positiva, per cui, scelte due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ rappresentanti, rispettivamente, A e B, si ha definitivamente:

$$b_n - a_n > \eta, \quad \eta \in \mathbb{Q}, \eta > 0$$

Allo stesso modo, scelta $\{c_n\}$ rappresentante C si ha definitivamente:

$$c_n - b_n > \epsilon, \quad \epsilon \in \mathbb{Q}, \epsilon > 0$$

Concludendo si ha, definitivamente:

$$c_n - a_n = c_n - b_n + b_n - a_n > \epsilon + \eta$$

che vuol dire appunto che $C - A$ è strettamente positiva o, secondo la Definizione 4.2.2, che $A < C$.

Sia ora $A < B$ e $C \in \mathbb{R}_{\mathcal{C}}$. Ragionando ancora sulle successioni rappresentanti si ha:

$$(b_n + c_n) - (a_n + c_n) = b_n - a_n$$

ed essendo $\{b_n - a_n\}$ una successione strettamente positiva la relazione appena scritta implica $A + C < B + C$. Ciò mostra la i).

Infine, sia $C > 0$. Si ha:

$$c_n b_n - c_n a_n = c_n(b_n - a_n)$$

Ancora, la stretta positività di $\{c_n\}$ e di $\{b_n - a_n\}$ implica la stretta positività di $\{c_n b_n - c_n a_n\}$, che significa $AC < BC$. Ciò mostra la *ii*). $\square$

A questo punto, definita la relazione:

$$\forall A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{C}} \colon A \leq B \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} (A = B) \vee (A < B)$$

è assai semplice verificare che $\leq$ gode delle proprietà *riflessiva*, *antisimmetrica* e *transitiva* e che definisce un ordinamento totale su $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$.

Ancora una volta abbiamo utilizzato per l'ordinamento su $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ gli stessi simboli utilizzati per l'ordinamento su $\mathbb{Q}$. Il contesto e una certa attenzione aiuteranno a distinguere, nelle dimostrazioni, l'ambiente in cui si sta operando.

Siamo finalmente giunti a individuare $(\mathbb{R}_{\mathcal{C}}, +, \cdot, \leq)$ come campo ordinato. Chiamiamo tale campo il campo dei reali di Cantor o secondo Cantor. Viene così formalizzata in maniera rigorosa l'idea intuitiva, presente sin dall'antichità, di numero irrazionale come approssimazione di numeri irrazionali. Inoltre, i due concetti di numero razionale e numero irrazionale, che inizialmente hanno una natura diversa, vengono sussunti in un unico concetto: quello di numero reale. Difatti, tra i reali di Cantor è possibile individuare un sottocampo che si comporta esattamente allo stesso modo del campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali o, come si dice tecnicamente, è ad esso isomorfo:

Proposizione 4.2.4. *L'applicazione:*

$$\phi \colon \begin{cases} \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\mathcal{C}} \\ p \mapsto \phi(p) = \big[\{p\}\big] \end{cases}$$

che associa ad ogni numero razionale p la classe d'equivalenza $[\{p\}]$ rappresentata dalla successione stazionaria $(p, p, \dots)$ è un monomorfismo ordinato tra campi.

Dimostrazione. Siano p, q razionali. Dalle definizioni di somma e prodotto sulle classi di equivalenza si ha:

$$\phi(p+q) = \big[\{p+q\}\big] = \big[\{p\}\big] + \big[\{q\}\big] = \phi(p) + \phi(q);$$
$$\phi(pq) = \big[\{pq\}\big] = \big[\{p\}\big] \cdot \big[\{q\}\big] = \phi(p) \cdot \phi(q);$$

Inoltre, se $p < q$, la successione stazionaria $\{q-p\}$ è *strettamente positiva* (secondo la definizione che segue dal Lemma 4.2.1) e ciò significa, per come è stata definita la relazione d'ordine su $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$, che $\phi(p) < \phi(q)$. Ciò implica che ϕ è strettamente crescente, quindi conserva l'ordine ed è iniettiva. □

Possiamo così concludere che il campo $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ dei reali di Cantor contiene un sottocampo isomorfo a $\mathbb{Q}$, del tutto identificabile con esso. C'è però una una differenza importante. L'idea alla base della costruzione di Cantor, come si è ormai più volte sottolineato, è quella di una successione di numeri razionali che si addensano sempre più attorno a un punto della retta, e la controparte rigorosa di tale idea è il concetto di successione di Cauchy. Tuttavia, abbiamo visto che le successioni di Cauchy di numeri razionali possono convergere verso un numero razionale oppure no. In quest'ultimo caso, l'intuizione geometrica ci spinge comunque a individuare un "limite fittizio", tuttavia tale limite non ha una natura numerica ben definita, in quanto trascende dal campo dei razionali. Con la costruzione appena vista, invece, abbiamo dato una realtà matematica a tale limite fittizio mediante il concetto di classe di equivalenza di successioni di Cauchy di numeri razionali. Ma possiamo dire di più: dato un numero reale, esso è sempre identificabile come limite, nel senso tecnico del termine, di una qualunque delle successioni di Cauchy nella classe che lo definisce, vista, mediante l'applicazione ϕ, come successione di razionali in $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$. In questo modo, ci si è sbarazzati dell'intuizione per dare luogo a entità numericamente ben definite. Prima di mostrare questo risultato, premettiamo un importante lemma:

Lemma 4.2.2. *Sia $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{C}}$, $A > 0$. Esiste $p \in \mathbb{Q}$, $p > 0$ tale che $0 < \phi(p) < A$, dove ϕ è l'applicazione definita nella Proposizione 4.2.4. Analogamente, se $A < 0$, esiste un $p \in \mathbb{Q}$, $p > 0$, tale che $A < -\phi(p) < 0$.*

Dimostrazione. Limitiamoci a dimostrare l'asserto per $A > 0$, in quanto il caso $A < 0$ si tratta in maniera analoga.

Il numero reale A è rappresentato da una successione di razionali $\{a_n\} \in \mathscr{C}(\mathbb{Q})$ strettamente positiva. Quindi esiste $q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$, tale che sia definitivamente $a_n > q$. D'altro canto, il numero reale "razionale" $\phi(q)$, rappresentato dalla successione stazionaria $(q, q, \dots)$ in $\mathscr{C}(\mathbb{Q})$, è strettamente positivo, e lo stesso vale per $\phi(\frac{q}{2})$. Abbiamo quindi, nell'ordinamento di $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$:

$$0 < \phi\left(\frac{q}{2}\right) < \phi(q)$$

Infine, il fatto che sia definitivamente $a_n > q$ equivale a dire che $A \geq \phi(q)$, per cui otteniamo:

$$0 < \phi\left(\frac{q}{2}\right) < \phi(q) \leq A$$

Ponendo $\frac{q}{2} = p$, otteniamo l'asserto. □

Possiamo ora dimostrare il risultato anticipato sopra:

Proposizione 4.2.5. *Sia $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{C}}$. Scelta una qualunque successione $a = \{a_n\} \in \mathscr{C}(\mathbb{Q})$ che rappresenti A, si ha che la successione "razionale" $\{\phi(a_n)\} \subset \mathbb{R}$ converge ad A in $\mathbb{R}$, ovvero si ha:*

$$\lim_{n\to\infty} \phi(a_n) = A$$

Dimostrazione. Dire che $\{\phi(a_n)\}$ converge ad A equivale a dire, in base alla Definizione 4.1.1 trasportata in $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$, che:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{\mathcal{C}}, \epsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N} \colon n \geq N \implies |\phi(a_n) - A| < \epsilon$$

Sia dunque $\epsilon > 0$. In base al Lemma 4.2.2 appena dimostrato esiste $p \in \mathbb{Q}$, $p > 0$, tale che:

$$0 < \phi(p) < \epsilon$$

D'altro canto, essendo la successione $a \in \mathscr{C}(\mathbb{Q})$, in corrispondenza di tale p è possibile determinare $N \in \mathbb{N}$, tale che si abbia:

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \colon m, n \geq N \implies |a_m - a_n| < p$$

Ora, fissato $n \in \mathbb{N}$, il numero reale $\phi(a_n) - A$ è rappresentato dalla successione:

$$\{a_n - a_m\}_{m\in\mathbb{N}}$$

in cui a_n è un elemento fissato della successione a mentre a_m ne è il termine generale. Se adesso scegliamo $n \geq N$, allora la successione corrispondente $\{a_n - a_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ è definitivamente (per $m \geq N$, precisamente) minore in valore assoluto a p, cioè si ha:

$$|a_n - a_m| < p$$

ma ciò equivale a dire, in $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$, che, fissato $n \geq N$, si ha:

$$|\phi(a_n) - A| \leq \phi(p)$$

Ed essendo $\phi(p) < \epsilon$ otteniamo, in definitiva, sempre per $n \geq N$:

$$|\phi(a_n) - A| < \epsilon$$

e ciò significa appunto che:

$$\lim_{n\to\infty} \phi(a_n) = A \qquad \square$$

La Proposizione 4.2.5 mostra anche un'importante proprietà del campo dei reali di Cantor: la densità dei razionali in $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$. Difatti, da un punto di vista topologico la densità dei razionali in $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ equivale a dire che ogni numero reale è punto di accumulazione per $\mathbb{Q}$ (in realtà $\phi(\mathbb{Q})$), ovvero che in ogni intorno di un numero reale, razionale o irrazionale che sia, cadono infiniti numeri razionali: ciò è quanto afferma la proposizione appena dimostrata. Detto in altri termini, l'insieme dei numeri reali costituisce la chiusura (in senso topologico) dell'insieme dei numeri razionali.

Ma il campo dei numeri reali appena costruito possiede ancora un'altra proprietà di importanza cruciale per tutta l'analisi matematica. All'inizio del presente Capitolo abbiamo dimostrato che in $\mathbb{Q}$ la nozione di successione di Cauchy e quella di successione convergente non sono equivalenti. Ogni successione convergente è di Cauchy ma non il viceversa. Tuttavia, come abbiamo più volte sottolineato, le successioni di Cauchy di numeri razionali sembrano comunque convergere verso qualcosa, ma questo qualcosa non è di certo un numero razionale. Detto in termini intuitivi, è come se $\mathbb{Q}$ non fosse completo, mancasse di qualcosa. Il campo $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ dei reali di Cantor, invece, da questo punto di vista è completo, nel senso che ogni successione di Cauchy di numeri reali risulta convergente in $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$. Un campo ordinato che possieda tale proprietà è detto *Cauchy-completo* e la proprietà stessa viene chiamata *completezza metrica*, per distinguerla da un altro tipo di completezza che definiremo nel capitolo successivo.

Teorema 4.2.1 (Completezza metrica di $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$)**.** *Il campo ordinato* $(\mathbb{R}_{\mathcal{C}}, +, \cdot, \leq)$ *dei reali di Cantor è Cauchy-completo.*

Dimostrazione. Dimostriamo anzitutto che la successione

$$\left\{\phi\left(\frac{1}{n}\right)\right\} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{C}}$$

è infinitesima in $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$. Scelto $\epsilon \in \mathbb{R}_{\mathcal{C}}$, $\epsilon > 0$, in base al Lemma 4.2.2, esiste $p \in \mathbb{Q}$, $p > 0$, tale che si abbia, in $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$:

$$0 < \phi(p) < \epsilon$$

Poiché la successione $\{\frac{1}{n}\} \subset \mathbb{Q}$ è infinitesima nei razionali[3], in corrispondenza di $p > 0$ è possibile determinare un numero naturale N tale che si abbia:

$$\forall n \geq N\colon 0 < \frac{1}{n} < p$$

Poiché la funzione ϕ preserva l'ordine, abbiamo:

$$\forall n \geq N\colon 0 < \phi\left(\frac{1}{n}\right) < \phi(p) < \epsilon$$

ottenendo così ciò che volevamo.

Sia ora $\{A_n\}$ una successione di Cauchy di numeri reali. Dobbiamo dimostrare che tale successione converge e per far ciò dobbiamo individuarne esplicitamente il limite.

Sappiamo dalla Proposizione 4.2.5 che per ogni termine della successione A_n e per ogni reale positivo, è possibile individuare infiniti razionali la cui distanza da A_n sia inferiore al reale scelto. Scegliamo, per ciascun A_n, un razionale $\phi(b_n)$ in modo tale che si abbia:

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon |A_n - \phi(b_n)| < \phi\left(\frac{1}{n}\right)$$

Abbiamo così individuato due successioni:

$$\{b_n\} \subset \mathbb{Q}$$
$$\{\phi(b_n)\} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{C}}$$

Mostriamo che sono entrambe di Cauchy nei rispettivi insiemi cui appartengono.

Fissato $\epsilon \in \mathbb{R}_{\mathcal{C}}$, $\epsilon > 0$, la convergenza a zero di $\{\phi(\frac{1}{n})\}$ comporta che sia possibile individuare un numero naturale N, tale che, per ogni $n \geq N$ si abbia:

$$\phi\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{\epsilon}{3}$$

D'altro canto, la proprietà di $\{A_n\}$ di essere di Cauchy in $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ implica che, in corrispondenza dello stesso ϵ, è possibile individuare un numero naturale M, tale che, per ogni $m, n \geq M$, si abbia:

[3] È una conseguenza diretta del fatto che $\mathbb{Q}$ è archimedeo. Si vedano la Definizione 4.2.3, la Proposizione 4.2.6 e il Corollario 4.2.1.

$$|A_m - A_n| < \frac{\epsilon}{3}$$

Posto $L = max\{M, N\}$, abbiamo, per ogni $m, n \geq L$:

$$|\phi(b_m) - \phi(b_n)| \leq |\phi(b_m) - A_m| + |A_m - A_n| + |A_n - \phi(b_n)| <$$
$$<\phi\left(\frac{1}{m}\right) + \frac{\epsilon}{3} + \phi\left(\frac{1}{n}\right) < \epsilon$$

Dunque la successione $\{\phi(b_n)\}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$. A questo punto è facile vedere che anche la corrispettiva successione in $\mathbb{Q}$ è di Cauchy. Infatti, sia $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$. Poiché possiamo determinare un naturale N, tale che per ogni $m, n \geq N$ si ha:

$$|\phi(b_m) - \phi(b_n)| < \phi(r)$$

la stretta crescenza della funzione ϕ ci garantisce che:

$$|b_m - b_n| < r$$

Così, anche la successione $\{b_n\}$ è di Cauchy in $\mathbb{Q}$. Essa definisce quindi un elemento $B \in \mathbb{R}_{\mathcal{C}}$.

L'ultimo passo da compiere è mostrare che:

$$\lim_{n \to \infty} A_n = B$$

A tal fine, scelto $\epsilon \in \mathbb{R}_{\mathcal{C}}$, $\epsilon > 0$, da un lato abbiamo definitivamente:

$$\phi\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{\epsilon}{2}$$

perché $\phi(\frac{1}{n})$ converge a zero, dall'altro abbiamo definitivamente:

$$|\phi(b_n) - B| < \frac{\epsilon}{2}$$

per la Proposizione 4.2.5. Quindi si ha definitivamente:

$$|A_n - B| \leq |A_n - \phi(b_n)| + |\phi(b_n) - B| < \phi\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

che mostra la convergenza di $\{A_n\}$ a B. □

Il campo dei reali eredita da $\mathbb{Q}$ un'altra importante proprietà: l'archimedeicità.

Definizione 4.2.3 (Proprietà archimedea)**.** *Sia* $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$ *un campo ordinato. Si dice che* $\mathbb{F}$ *gode della proprietà archimedea se, dati* $a, b \in \mathbb{F}$, $a > 0$, *esiste* $n \in \mathbb{N}$, *tale che* $na > b$.

Proposizione 4.2.6. *Sia* $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$ *un campo ordinato.* $\mathbb{F}$ *è archimedeo se e solo se per ogni* $b \in \mathbb{F}$ *esiste* $n \in \mathbb{N}$, *tale che si abbia* $n \cdot 1_{\mathbb{F}} > b$. *Dove* $1_{\mathbb{F}}$ *è l'elemento neutro moltiplicativo di* $\mathbb{F}$.

Dimostrazione. Se $\mathbb{F}$ è archimedeo, allora, scelto $b \in \mathbb{F}$, possiamo prendere $1_{\mathbb{F}} > 0$ nel ruolo di a, e trovare $n \in \mathbb{N}$ tale che sia $n \cdot 1_{\mathbb{F}} > b$.

Viceversa, siano $a, b \in \mathbb{F}$, $a > 0$. In corrispondenza dell'elemento ba^{-1} esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che si abbia $n \cdot 1_{\mathbb{F}} > ba^{-1}$. Moltiplicando ambo i membri per l'elemento positivo a si ottiene $na > b$. □

Corollario 4.2.1. $\mathbb{Q}$ *è archimedeo.*

Dimostrazione. Sia $q \in \mathbb{Q}$. Possiamo esprimere q come frazione:

$$q = \frac{n}{m}, \quad m > 0$$

Da $1 \leq m$, moltiplicando per $|n|$, abbiamo:

$$|n| \leq |n|m < (|n| + 1)m$$

Dividendo il primo e l'ultimo membro per m, otteniamo:

$$\frac{|n|}{m} < |n| + 1$$

che implica, in particolare:

$$\frac{n}{m} < |n| + 1$$

Essendo $|n| + 1 \in \mathbb{N}$, abbiamo l'asserto in base alla Proposizione 4.2.6. □

Proposizione 4.2.7. *Il campo dei reali di Cantor è archimedeo.*

Dimostrazione. Sia $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{C}}$. Per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ esiste un numero razionale $q \in \mathbb{Q}$, tale che si abbia:

$$A < \phi(q) < A + 1$$

Poiché $\mathbb{Q}$ è archimedeo, esiste un numero naturale n tale che $q < n$. Di conseguenza si ha:

$$A < \phi(q) < \phi(n) = \phi(n \cdot 1_{\mathbb{Q}}) = n \cdot \phi(1_{\mathbb{Q}}) = n \cdot 1_{\mathbb{R}}$$

Sicché $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ è archimedeo in base alla Proposizione 4.2.6. □

È importante sottolineare che l'archimedeicità di $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ è una conseguenza dell'archimedeicità di $\mathbb{Q}$. Se $\mathbb{Q}$ non fosse archimedeo, in generale non si potrebbe garantire l'archimedeicità di $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$. Tuttavia, la completezza metrica e la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ non verrebbero intaccate. Difatti siamo partiti, con Cantor, dal campo dei numeri razionali, che è un campo ordinato e archimedeo, e di qui abbiamo costruito un sovracampo ordinato Cauchy-completo e archimedeo. Ma ripercorrendo la linea seguita è facile rendersi conto che si sarebbe potuti partire da un generico campo ordinato e ripercorrere, *mutatis mutandis*, tutte le tappe già viste per arrivare a porre il seguente risultato:

Teorema 4.2.2. *Sia $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$ un campo ordinato. Detto $\mathscr{C}(\mathbb{F})$ l'insieme delle successioni di Cauchy su $\mathbb{F}$ e $\mathscr{C}_0$ il sottoinsieme delle successioni infinitesime, è possibile dotare $\mathscr{C}(\mathbb{F})$ di una struttura di anello ordinato commutativo e unitario, di cui $\mathscr{C}_0$ è un ideale, in maniera tale che l'anello quoziente $\mathscr{C}(\mathbb{F})/\mathscr{C}_0$ sia un campo ordinato Cauchy-completo, contenente un sottocampo ordinatamente isomorfo a $\mathbb{F}$ e denso in $\mathscr{C}(\mathbb{F})/\mathscr{C}_0$. Inoltre, se $\mathbb{F}$ è archimedeo, allora anche $\mathscr{C}(\mathbb{F})/\mathscr{C}_0$ è archimedeo.*

Il modello dei reali secondo Cantor si ottiene utilizzando $\mathbb{Q}$ come campo ordinato di partenza. Dal punto di vista di Cantor, quindi, il campo dei numeri reali può essere caratterizzato come un *campo ordinato Cauchy-completo e archimedeo*. Confronteremo in seguito tale caratterizzazione con quella che verrà fuori dalla costruzione di Dedekind.

Resta ancora aperta una questione: cosa succederebbe se applicassimo la costruzione appena esposta a $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ stesso? In altre parole: se costruissimo su $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ un sovracampo ordinato come abbiamo fatto con $\mathbb{Q}$, che contenesse un sottocampo isomorfo a $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ e denso, otterremmo dei nuovi numeri? La risposta è alquanto semplice, in quanto è facile vedere che il monomorfismo ϕ che porta $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ nel nuovo campo è in realtà un isomorfismo, ovvero ϕ è suriettiva.

Infatti, un elemento del nuovo campo sarebbe una classe d'equivalenza costituita da successioni di Cauchy di numeri reali. Ma tutte le successioni di Cauchy di numeri reali convergono, e quelle di una stessa classe convergono verso lo stesso numero reale. C'è quindi, in tale classe, anche la successione stazionaria formata dal numero reale stesso, per cui la classe è immagine, tramite ϕ, di tale numero reale. Ciò mostra che ϕ è suriettiva. In altre parole, iterando la costruzione di Cantor non andiamo, sostanzialmente, oltre $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$. Ciò intuitivamente ci dà l'idea che, con $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$, abbiamo davvero *saturato* i punti della retta.

Il modello dei reali così costruito soddisfa tutte le proprietà della retta che l'intuizione geometrica ci suggerisce. In esso sono state formalizzate diverse idee che erano prefigurate fin dai tempi di Euclide: la proprietà archimedea, la densità dei razionali nei reali e la possibilità di approssimare un numero irrazionale mediante una successione di numeri razionali. Certo, il fatto che esista una corrispondenza biunivoca tra i numeri reali così costruiti e i punti della retta va comunque postulato, come ha fatto Cantor; e d'altronde non può che essere così, visto che le proprietà che attribuiamo alla retta geometrica, in particolar modo la tanto sfuggevole continuità, non sono altro che nostre intuizioni, non suscettibili di ulteriore analisi. Per utilizzare una metafora, la retta geometrica pare defivare dal nostro emisfero cerebrale destro, legato alla spazialità, all'intuizione, alla visione d'insieme, che giunge più velocemente a delle conclusioni senza analizzarle; il modello numerico dei reali, invece, ne è la controparte dell'emisfero sinistro, analitico, logico, sequenziale, preciso e, per questo, più lento. Postulare l'unità di questi due modelli equivale, nella nostra metafora, a postulare l'unità della mente umana.

Capitolo 5

Il modello di Dedekind

5.1 L'essenza della continuità

TORNIAMO adesso all'articolo di Dedekind, *Stetigkeit und die Irrationalzahlen*[1], scritto nella primavera del 1872. In esso, con la chiarezza che contraddistingue lo stile dell'autore, viene indagata la questione della continuità della retta. L'articolo in sé è un piccolo capolavoro di nitore espositivo, un modello di prosa scientifica che ancora oggi dovrebbe far riflettere su come sia importante, nella formazione di un uomo di scienza, non soltanto la padronanza del bagaglio tecnico relativo alla disciplina di cui si occupa, ma anche la capacità di saper comunicare con chiarezza ed eleganza il proprio pensiero.

Come si è già detto nel Capitolo 3, nell'introduzione di tale lavoro l'autore scrive di aver cominciato a meditare sulla questione della continuità sin dall'autunno del 1858. Trovandosi ad insegnare per la prima volta i rudimenti del calcolo differenziale, egli cominciò a sentirsi insoddisfatto della mancanza di una fondazione puramente aritmetica delle sue basi. Scrive infatti:

> *Nel discutere la nozione di una grandezza variabile che si avvicina a un valore limite fissato, e specialmente nel provare il teorema che ogni grandezza che s'accresca con continuità, ma non oltre ogni limite, deve certamente avvicinarsi a un valore limite, ero costretto a ricorrere all'evidenza geometrica.*[2]

Dedekind non nega al ricorso ad argomenti geometrici il valore didattico, soprattutto in termini di economia espositiva, ma:

---

[1][Dedekind 1901].
[2]ibidem.

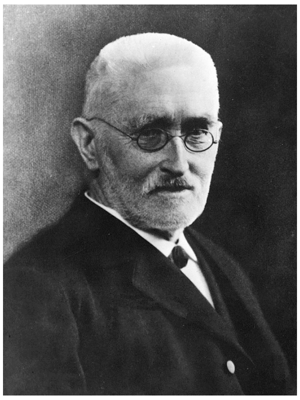


Figura 5.1: Richard Dedekind. Braunschweig, 1831 - Braunschweig 1916.

> *[...] che questa forma di introduzione al calcolo differenziale non può avere nessuna pretesa di scientificità, nessuno potrà negarlo.*[3]

Poi continua:

> *Per me, questo senso di insoddisfazione era talmente opprimente che mi imposi il fermo proposito di continuare a meditare sulla questione finché non avessi trovato una fondazione puramente aritmetica e perfettamente rigorosa ai principi dell'analisi infinitesimale. Si afferma tanto frequentemente che il calcolo differenziale abbia a che fare con grandezze continue, eppure una spiegazione di questa continuità non viene data da nessuna parte; anche le esposizioni più rigorose del calcolo differenziale non basano le loro dimostrazioni sulla continuità ma, con più o meno coscienza di ciò, o fanno appello a nozioni geometriche o suggerite dalla geometria, oppure dipendono da teoremi che non sono mai stati stabiliti in modo puramente aritmetico. Tra questi, per esempio, c'è il summenzionato teorema, e un'indagine più accurata mi ha convinto che questo teorema, o qualunque altro ad esso equivalente, può essere considerato in qualche modo come base sufficiente per l'analisi infinitesimale. Rimaneva solo da scoprire la sua vera origine negli elementi dell'aritmetica e assicurare così allo stesso tempo una reale definizione dell'essenza della continuità. Ci sono riuscito il 24 novembre del 1858 [...].*[4]

Cantor era stato spinto verso una definizione rigorosa di numero reale da esigenze settoriali: il sistema dei numeri reali gli era necessario per poter

[3]ibidem.
[4]ibidem.

procedere proficuamente nelle sue ricerche sulle serie trigonometriche[5]. Dedekind, invece, non perseguiva un risultato in particolare, ma era piuttosto pungolato da problematiche di tipo fondazionale. D'altro canto, in questo ultimo scorcio di secolo XIX si vengono a porre i germi di quella crisi dei fondamenti che esploderà con tutta la sua forza all'inizio del secolo XX, e che vede proprio nei lavori di Cantor, Dedekind e Frege, tra gli altri, i suoi prodromi.

Come si è detto nel Capitolo 3, diverse problematiche nel corso del secolo XIX convergevano verso la riapertura di un vivace dibattito filosofico riguardo ai fondamenti della matematica. Le geometrie non euclidee avevano, per così dire, minato il terreno sotto i piedi alla matematica: se da un lato la liberavano dal vincolo di dover fare riferimento alla realtà fisica, dall'altro sollevavano un vespaio di questioni di carattere ontologico su quale fosse il tipo di realtà descritta dalla matematica e la natura degli enti matematici stessi. La questione dell'aritmetizzazione dell'analisi, dal canto suo, riguardava una problematica di carattere epistemologico, legata a una fondazione rigorosa e autoconsistente del calcolo infinitesimale. Le due problematiche, come s'è già detto, s'intrecciavano nel riconoscimento che tale fondazione andava basata sui numeri reali e che questi, per due millenni circa, avevano eluso ogni spiegazione in quanto la loro natura sfumava nel concetto di grandezza geometrica continua, di per sé nebuloso.

Nei lavori di Dedekind è possibile rintracciare entrambe le problematiche. Sulla questione ontologica, posta l'aritmetica alla base dell'intera matematica, Dedekind è esplicito sin dall'inizio del suo articolo sulla continuità:

> *Considero l'intera aritmetica come una conseguenza necessaria, o almeno naturale, del più semplice atto aritmetico, quello del contare, e il contare stesso come nient'altro che la creazione in successione della serie infinita degli interi positivi in cui ciascun elemento è definito da quello immediatamente precedente; il più semplice atto è il passaggio da un elemento già formato a quello successivo da formare.*[6]

Tale visione vedrà il suo coronamento nel saggio *Was sind und was sollen die Zahlen*[7] del 1887, in cui Dedekind fornisce una fondazione dei numeri naturali visti come un libero atto creativo della mente umana. In tale lavoro, utilizzando un linguaggio insiemistico intuitivo (egli parla di sistemi di cose, definendone le proprietà più elementari) definisce il concetto di insieme

[5]Tuttavia Cantor aveva già – e ciò verrà fuori compiutamente nei suoi lavori successivi sugli insiemi e sui numeri transfiniti – un interesse spiccatamente fondazionale.

[6]ibidem.

[7]ibidem.

infinito come un insieme che possa essere messo in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria[8], dopodiché arriva a definire l'insieme dei numeri naturali sostanzialmente come il *più piccolo* insieme infinito, anticipando così la formulazione che Peano avrebbe dato di lì a pochi anni. Una volta dimostrato che all'interno di ogni insieme infinito deve potersi individuare un sottoinsieme che si comporta esattamente come i naturali, Dedekind propone addirittura una dimostrazione di esistenza di un insieme infinito, ovvero l'insieme degli oggetti del nostro pensiero[9], radicando così definitivamente (o credendo di averlo fatto) la natura dei numeri, e in ultima analisi della matematica tutta, nella mente umana.

Per quanto riguarda la questione epistemologica, Dedekind è altrettanto esplicito: i metodi utilizzati in matematica devono essere puramente aritmetici. Sebbene gli strumenti impiegati traggano spunto dal mondo esterno e ne riproducano le proprietà, tali proprietà devono poter essere definite di per sé stesse. Per esempio, i numeri razionali costituiscono un campo ordinato. È facile riconoscere in tutte le proprietà dell'ordinamento le analoghe proprietà dell'ordinamento dei punti sulla retta, tuttavia la struttura dei numeri razionali, fondata in ultima analisi sulla struttura dei numeri naturali, garantisce la validità di tali proprietà a prescindere dal fatto che esse siano atte a descrivere la situazione dei punti sulla retta. Così, i numeri reali dovranno riprodurre tutte le proprietà dei punti della retta geometrica, ma dovranno altresì costituire una struttura autosufficiente basata sui razionali, che prescinda da essa. A tal fine, prosegue Dedekind, è necessario riuscire a definire con precisione quel *discrimen* in conseguenza del quale non è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra il campo dei numeri razionali e i punti della retta: la continuità. Qual è l'essenza di questa proprietà che tutti istintivamente attribuiamo alla retta? È possibile approntare una definizione precisa di essa che permetta di costruire un insieme numerico che costituisca un modello aritmetico della retta geometrica? Leggiamo le parole stesse di

[8]È assai interessante mettere a confronto questo lavoro di Dedekind con i lavori di Cantor sugli insiemi e sull'infinito. D'altronde i due matematici si conoscevano ed ebbero a lungo scambi epistolari riguardo alle rispettive idee.

[9]Dedekind considera l'insieme S di tutto ciò che può essere oggetto del nostro pensiero. Poi continua osservando che ad ogni pensiero p è possibile associare il pensiero p', il cui contenuto è la considerazione che p è un oggetto del nostro pensiero. L'insieme S' di tali "pensieri di pensieri" è certamente un sottoinsieme proprio di S: per esempio, il concetto di "io" non è un pensiero di questo tipo. Osservando, infine, che, dati due pensieri p e q distinti, i corrispettivi p' e q' non possono che essere distinti, si conclude che S è in corrispondenza biunivoca con la sua parte propria S', per cui S è infinito. In realtà ben presto si scoprirà (si pensi per esempio al paradosso di Russell) quanto sia pericoloso, dal punto di vista della consistenza, prendere in considerazione insiemi così vaghi e onnicomprensivi come l'insieme di tutti i pensieri o l'insieme di tutti gli insiemi.

Dedekind:

> *Il [..] confronto del dominio [...] dei numeri razionali con la linea retta ha condotto al riconoscimento dell'esistenza di lacune, di una certa incompletezza o discontinuità del primo, mentre ascriviamo alla linea retta la completezza, l'assenza di lacune, ovvero la continuità. In cosa quindi consiste questa continuità? Ogni cosa deve dipendere dalla risposta a questa domanda, e soltanto attraverso essa otterremo una base scientifica per l'indagine di* tutti *i domini continui. Ovviamente non si ottiene nulla mediante osservazioni vaghe riguardo alla connessione ininterrotta nelle più piccole parti; il problema è indicare una caratteristica precisa della continuità che possa servire da base valida per le deduzioni. Per molto tempo ho meditato su questo invano, ma finalmente ho trovato ciò che cercavo. Tale scoperta verrà forse stimata in maniera diversa da diverse persone; la maggior parte potrebbe trovare il suo contenuto assai banale. Essa consiste in questo. Nel paragrafo precedente è stata richiamata l'attenzione sul fatto che ogni punto p della linea retta produce una separazione della stessa in due porzioni tali che ogni punto di una porzione giace a sinistra di ogni punto dell'altra. Ritengo che l'essenza della continuità stia nell'opposto, cioè, nel seguente principio:*
>
> > *"Se tutti i punti della linea retta cadono in due classi tali che ogni punto della prima classe giace a sinistra di ogni punto della seconda classe, allora esiste uno e un sol punto che produce questa divisione di tutti i punti in due classi, questa recisione della linea in due porzioni."*
>
> *Come già detto, credo di non sbagliarmi nel ritenere che ciascuno ammetterà senza esitazioni la verità di questa asserzione; la maggior parte dei miei lettori sarà assai delusa nell'apprendere che il segreto della continuità debba essere rivelato da questa banale osservazione. A questo proposito potrei dire di esser contento se ciascuno trova il su espresso principio così ovvio e così in armonia con le sue proprie idee sulla retta; poiché, io sono totalmente incapace di addurre una qualsivoglia dimostrazione della sua correttezza, né alcuno ne ha la possibilità. L'assunzione di questa proprietà della retta non è nient'altro che un assioma per mezzo del quale attribuiamo ad essa la sua continuità, per mezzo del quale riconosciamo la continuità nella retta. Se lo spazio ha di per sé una reale esistenza,* non *è necessario che esso sia continuo; molte delle sue proprietà rimarrebbero le stesse anche se fosse discontinuo. E se sapessimo per certo che lo spazio fosse discontinuo nulla ci impedirebbe, nel caso lo desiderassimo, di riempire*

> *le sue lacune, nel pensiero, e renderlo così continuo; questo riempimento consisterebbe nella creazione di nuovi punti distinti e andrebbe effettuato in accordo col principio espresso più sopra.*[10]

Poco rimane da commentare, data l'estrema chiarezza dell'autore. Qui si conceda soltanto una nota di carattere, per così dire, stilistico. Si noti come Dedekind si premuri, prima di enunciare il suo principio, di dire che il suo contenuto potrà sembrare banale. Enunciatolo, si scusa quasi, nel ribadire la sua banalità; quasi dicesse: scusate se questo semplice fatto sembri indegno di una cosa importante come la continuità. Dopodiché scatta, diciamo in termini scherzosi, la trappola, come a dire: se proprio vi sembra banale, tanto meglio, dal momento che non ne possiedo una dimostrazione e non vedo la possibilità di improntarne una: non vi rimane che accettarlo. La logica, nel senso comune del termine, consiste in una successione stringente di deduzioni che partono da certe premesse. Se le deduzioni sono inequivocabili e indubitabili, nulla può dirsi sulle premesse. La vittoria di un oratore in una disputa si gioca tutta nel riuscire a fare accettare all'interlocutore le proprie premesse, dal momento che, una volta accettate, nessuno potrà negarne le conseguenze logiche. Tale accettazione, tuttavia, va imposta mediante argomentazioni non deduttive, che si basano su argomenti di ragionevolezza e sulla capacità di convincere l'altro: è questa l'essenza della dialettica, e Dedekind, nel lavoro citato ma non solo, dimostra di esserne felicemente dotato.

5.2 L'incompletezza di $\mathbb{Q}$

Stabilito in cosa consista la continuità della retta, Dedekind procede a dimostrare l'incompletezza o discontinuità del campo dei numeri razionali. Come ogni punto della retta determina una partizione di essa in modo tale che tutti i punti di una delle due parti precedano tutti i punti dell'altra, allo stesso modo ogni numero razionale ripartisce $\mathbb{Q}$ in due insiemi, l'uno dei quali contiene numeri razionali minori di quelli contenuti nell'altro. Dedekind chiama tale partizione col nome di *schnitt*, ovvero *taglio* o *sezione*:

Definizione 5.2.1 (Sezione del campo razionale)**.** *Una sezione del campo razionale è costituita da una partizione (A, B) di $\mathbb{Q}$ in due insiemi tale che:*

$$\forall a \in A, \forall b \in B \colon a < b$$

[10] ibidem.

Ogni numero razionale r determina una sezione (A, B) del campo razionale: basta porre tutti i numeri più piccoli di r in A e tutti i numeri più grandi di r in B. In tal caso, r potrà assegnarsi a piacere all'insieme A o all'insieme B. Nel primo caso l'insieme A sarà dotato di massimo, nel secondo caso, invece, l'insieme B sarà dotato di minimo. Viceversa, assegnata una sezione del campo razionale, se è possibile individuare un elemento che sia o il massimo di A oppure il minimo di B[11], allora si dirà che la sezione è prodotta da tale elemento. Qualora esistesse la possibilità di individuare sezioni del campo razionale per cui non sia possibile individuare un numero razionale che le generi, allora, data la definizione di continuità esposta nel paragrafo precedente, si concluderà che $\mathbb{Q}$ è incompleto o discontinuo. Vediamolo:

Lemma 5.2.1. *Sia N un numero naturale che non sia il quadrato di alcun numero naturale. Allora N non è il quadrato di alcun numero razionale.*

Dimostrazione. Se esistessero due numeri naturali, m e n, tali che si abbia $m^2 = Nn^2$, allora, supposti m e n primi tra loro, si avrebbe che tutti e soli i fattori primi di m^2 sarebbero fattori primi di N; data l'unicità della scomposizione in fattori primi, ogni fattore primo di N sarebbe pertanto elevato a una potenza ad esponente pari: in definitiva, N sarebbe un quadrato di un numero naturale, contro l'ipotesi. Non è quindi possibile che N sia il quadrato di un numero razionale. □

Proposizione 5.2.1. *Sia N un numero naturale che non sia quadrato di alcun numero naturale. Allora gli insiemi:*

$$
\begin{aligned}
A &= \{q \in \mathbb{Q} \colon q \leq 0\} \bigcup \{q \in \mathbb{Q}^+ \colon q^2 < N\} \\
B &= \{q \in \mathbb{Q}^+ \colon q^2 > N\}
\end{aligned}
$$

costituiscono una sezione del campo razionale.

Dimostrazione. Che A e B siano una sezione di $\mathbb{Q}$ discende banalmente dal Lemma 5.2.1 e dal modo in cui sono stati definiti gli insiemi. □

[11]In questo caso la disgiunzione "o" sta per "aut" e non "vel", dal momento che la possibilità che sia A che B possiedano, rispettivamente, il massimo e il minimo, viene esclusa dalla proprietà di densità di $\mathbb{Q}$ in sé.

Teorema 5.2.1. *La famiglia di sezioni definita nella Proposizione 5.2.1 non è prodotta da alcun numero razionale.*

Dimostrazione. Si consideri in $\mathbb{Q}$ la funzione:

$$y = \frac{x(x^2+3N)}{3x^2+N}$$

Si ha:

$$y - x = \frac{2x(N-x^2)}{3x^2+N} \tag{5.1}$$

$$y^2 - N = \frac{(x^2-N)^3}{(3x^2+N)^2} \tag{5.2}$$

Ora, se $x \in A$, $x > 0$, dalla (5.1) si ha che $y > x$, mentre dalla (5.2) si ha che $y^2 < N$: da ciò segue che A non ha massimo.

Se invece $x \in B$, dalla (5.1) si ha che $y < x$, mentre dalla (5.2) si ha che $y^2 > N$: da ciò segue che B non ha massimo.

Di conseguenza, le sezioni definite a partire da un naturale N non quadrato secondo la Proposizione 5.2.1 non sono prodotte da alcun numero razionale. □

Dedekind conclude:

> *L'incompletezza o discontinuità del dominio [...] di tutti i numeri razionali consiste in questa proprietà che non tutte le sezioni sono prodotte da numeri razionali.*
> *Ogniqualvolta, quindi, abbiamo a che fare con una sezione (A, B) non prodotta da un numero razionale, creiamo un nuovo numero, un numero* irrazionale *α, che consideriamo completamente definito da questa sezione (A, B); diremo che il numero α corrisponde a questa sezione, o che esso produce questa sezione. Da questo momento in poi, pertanto, a ogni sezione definita corrisponde un ben definito numero razionale o irrazionale, e consideriamo due numeri come* distinti *o* disuguali *sempre e solo quando corrispondono a sezioni essenzialmente*[12] *distinte.*[13]

[12] L'aggettivo si riferisce alla circostanza che due sezioni possono differire unicamente per la posizione dell'elemento che le produce, che può essere posto tanto nell'insieme A quanto nell'insieme B: è chiaro che in questo caso non esiste nessuna differenza sostanziale tra le sezioni corrispondenti.

[13] ibidem.

Se adesso torniamo alla quinta definizione del Libro V degli Elementi, si capisce meglio, in retrospettiva, l'affermazione secondo cui in essa era adombrata l'essenza stessa della continuità. Se ci restringiamo a considerare soltanto i razionali positivi, gli insiemi A e B non sono altro che gli insiemi D e E definiti nel Capitolo 2. Eudosso credette nell'esistenza di un'entità, il rapporto tra due grandezze omogenee, anche quando queste grandezze erano incommensurabili tra loro, e stabilì un criterio per verificare l'uguaglianza tra due rapporti che conduceva a una loro identificazione mediante due classi di numeri razionali, le quali formavano sostanzialmente una sezione di $\mathbb{Q}^+$. Tuttavia, restava il fatto che il rapporto tra due grandezze incommensurabili era un'entità vaga, dallo statuto ontologico incerto. Apparentemente, Dedekind non andò oltre nel momento in cui affermò che una sezione non prodotta da un numero razionale creasse un numero irrazionale. Di fatto, però, come vedremo nel paragrafo successivo, sono le sezioni stesse a ricevere una struttura di campo ordinato che goda della proprietà di continuità. I numeri reali si identificano con esse, costituendo così delle entità ben definite nell'universo matematico. Se si crede alla realtà dei numeri naturali, si deve credere alla realtà dei numeri razionali, e da essi, mediante le sezioni, non ci si può sottrarre dal credere alla realtà dei numeri reali: come era già avvenuto con Cantor, nell'ambito dell'aritmetizzazione dell'analisi il problema ontologico dei numeri reali viene scaricato sui numeri naturali, passando attraverso i razionali. Si sarebbe tentati di dire che Pitagora sia stato vendicato.

5.3 I numeri reali secondo Dedekind

Per completare la costruzione dei numeri reali secondo Dedekind, è necessario strutturare l'insieme delle sezioni del campo razionale come campo ordinato, e dimostrare che tale campo numerico possiede la proprietà di continuità illustrata nei paragrafi precedenti. Nel presente paragrafo abbandoneremo la storia ed effettueremo una costruzione equivalente a quella di Dedekind, dovuta essenzialmente a Russell.

Ritornando alla definizione di sezione del campo razionale, ricordiamo che, quando essa è prodotta da un numero razionale, si ha una libertà di scelta nel porre tale razionale in A o in B. Ne deriva un'ambiguità in quanto si vengono a determinare due sezioni che definiscono lo stesso numero reale. D'ora in avanti, ogni volta che una sezione sia prodotta da un numero razionale, scegliamo deliberatamente di porre tale numero razionale nella classe B. Notiamo che con tale convenzione la classe A di una sezione non ha mai massimo, sia che la sezione venga prodotta da un numero razionale, sia che definisca un numero irrazionale. Fatto ciò, è assai semplice verificare che, data una sezione (A, B) del campo razionale, l'insieme A gode delle seguenti proprietà:

i) $A \neq \emptyset$, $A \neq \mathbb{Q}$;

ii) $\forall p \in A\colon q \in \mathbb{Q} \wedge q < p \implies q \in A$;

iii) $\forall p \in A\, \exists q \in A \mid p < q$;

Viceversa, dato un insieme di numeri razionali A che goda delle proprietà su scritte, allora $(A, \mathbb{Q} \backslash A)$ è una sezione del campo razionale. Da questo momento in poi, data questa equivalenza, compiremo un abuso di linguaggio e chiameremo sezione del campo razionale ogni sottoiniseme di $\mathbb{Q}$ che verifichi le proprietà *i)*, *ii)* e *iii)*. Identificheremo, cioè, una sezione con la sua prima componente A. Indicheremo l'insieme delle sezioni del campo razionale così definite col simbolo $\mathbb{R}_{\mathcal{D}}$.

Il primo passo da compiere è quello di dotare $\mathbb{R}_{\mathcal{D}}$ di un ordinamento totale. La scelta più naturale è quella di utilizzare la relazione d'ordine di inclusione insiemistica "$\subseteq$", che gode delle proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Tale relazione definisce però, in generale, un ordinamento parziale. È necessario quindi verificare che in $\mathbb{R}_{\mathcal{D}}$, presi due elementi distinti α e β, vale sempre una delle due relazioni:

- $\alpha \subset \beta$
- $\beta \subset \alpha$

Tale verifica d'altronde è immediata. Se infatti α non è incluso in β, allora esiste un numero razionale $p \in \alpha$, tale che $p \notin \beta$. Scelto quindi arbitrariamente un numero razionale $q \in \beta$, non potrà essere $p < q$, altrimenti si avrebbe $p \in \beta$ per la proprietà *ii)* delle sezioni. Essendo l'ordinamento dei razionali totale, si avrà necessariamente $q < p$ e, poiché p è un elemento di α, ancora per la *ii)* si avrà $q \in \alpha$. Data l'arbitrarietà di q, segue che deve aversi $\beta \subset \alpha$.

Munito l'insieme $\mathbb{R}_{\mathcal{D}}$ di un ordinamento totale, sarà necessario verificare che esso possiede la proprietà di continuità definita da Dedekind. Anzitutto, è chiaro che la definizione di sezione data per il campo razionale può estendersi a qualunque campo ordinato, quindi anche a $\mathbb{R}_{\mathcal{D}}$. Così, data una sezione (A, B) di elementi di $\mathbb{R}_{\mathcal{D}}$, richiedere la continuità secondo Dedekind significa chiedere che esiste sempre un elemento di $\mathbb{R}_{\mathcal{D}}$ che produca tale sezione. D'altro canto, osservato che A è un insieme limitato superiormente, e tenuto conto della convenzione di assegnare l'eventuale elemento di separazione a

B, è chiaro che la continuità equivale a richiedere l'esistenza dell'estremo superiore per ogni sezione A. Infine, mostriamo che tale nozione è equivalente a quella che oggi viene definita *completezza per l'ordine* e che, per distinguerla dalla Cauchy-completezza o completezza metrica, chiameremo anche *Dedekind-completezza*:

Definizione 5.3.1 (Completezza per l'ordine)**.** *Sia* $(\mathbb{F}, \leq)$ *un insieme totalmente ordinato. Si dice che* $\mathbb{F}$ *è completo per l'ordine o Dedekind-completo se ogni sottoinsieme di* $\mathbb{F}$ *non vuoto e limitato superiormente ammette estremo superiore.*

Proposizione 5.3.1. *Sia* $(\mathbb{F}, \leq)$ *un insieme totalmente ordinato. Esso gode della proprietà di continuità di Dedekind se e solo se è Dedekind-completo.*

Dimostrazione. Se $\mathbb{F}$ è Dedekind-completo allora possiede banalmente la proprietà di continuità, in quanto ogni sezione A di $\mathbb{F}$ è un insieme limitato superiormente e quindi ammette estremo superiore.

Viceversa, supponiamo che $\mathbb{F}$ possieda la proprietà di continuità. Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{F}$ e limitato superiormente. Se esso ammette massimo, allora il massimo coincide con l'estremo superiore e abbiamo finito. Supponiamo, quindi, che non ammetta massimo. Consideriamo gli insiemi:

$$\begin{aligned} B &= \{b \in \mathbb{F} \colon \exists a \in A \mid b \leq a\} \supseteq A \\ C &= A \cup B \end{aligned}$$

Mostriamo che l'insieme C è una sezione di $\mathbb{F}$. Infatti esso è non vuoto, essendo A non vuoto. Non coincide con $\mathbb{F}$: scelto un maggiorante m di A, poiché A non ha massimo, esso non appartiene ad A; ma non può appartenere neanche a B, poiché, se così fosse, esisterebbe un elemento $a \in A$, tale che $m \leq a$, contro il fatto che m è maggiorante per A. Dunque esiste un elemento $m \in \mathbb{F}$ non appartenente a C.

Dato un elemento $c \in C$, consideriamo un elemento di $x \in \mathbb{F}$, tale che sia $x < c$: se $c \in A$, allora $x \in B$, quindi $x \in C$; se invece $c \in B$, allora per definizione esiste un elemento $a \in A$, tale che sia $c \leq a$; essendo anche $x < c$, per transitività si ha $x < a$, quindi $x \in C$.

Infine, dalla definizione stessa di C e dal fatto che A non ha massimo, è chiaro che C non ha massimo. Dunque C è una sezione di $\mathbb{F}$.

Per la proprietà di continuità, supposta per $\mathbb{F}$, esiste l'estremo superiore di C. Sia esso t. Chiaramente, t è maggiorante per A; inoltre, preso un qualunque elemento $s < t$, poiché t è estremo superiore per C, si ha che s non è maggiorante per C; essendo l'ordinamento in $\mathbb{F}$ totale, si ha quindi che esiste $w \in C$, con $s < w < t$; ci sono adesso due possibilità: o $w \in A$, oppure, se w non è in A, esiste un elemento $a \in A$, tale che si abbia $w \leq a$, e in definitiva $s < w \leq a < t$. In ogni caso, s non è maggiorante neanche per A. Quindi t è estremo superiore per A. □

La proposizione precedente mostra quindi che per dimostrare che $\mathbb{R}_{\mathcal{D}}$ costituisce un dominio continuo secondo la definizione di Dedekind sarà sufficiente mostrare che esso è Dedekind-completo:

Teorema 5.3.1 (Completezza per l'ordine di $\mathbb{R}_{\mathcal{D}}$)**.** *L'insieme totalmente ordinato $\mathbb{R}_{\mathcal{D}}$ delle sezioni del campo razionale è Dedekind-completo.*

Dimostrazione. Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}_{\mathcal{D}}$ non vuoto e limitato superiormente. Ricordiamo che gli elementi di A sono sezioni del campo razionale. Da esse, formiamo l'insieme di numeri razionali:

$$\gamma = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha$$

Mostriamo anzitutto che γ è una sezione del campo razionale, ossia un elemento di $\mathbb{R}_{\mathcal{D}}$. Poiché A è non vuoto, esiste almeno un $\alpha \in A$. Poiché α è una sezione, essa è non vuota. Di conseguenza γ è non vuoto.

Essendo A superiormente limitato, esiste un maggiorante β per A. Essendo β una sezione razionale, esiste un numero razionale $p \notin \beta$. Si ha che $p \notin \alpha$ per nessun $\alpha \in A$ in quanto ogni α è incluso in β. Dunque, $p \notin \gamma$ e quindi $\gamma \neq \mathbb{Q}$.

Sia adesso $p \in \gamma$ e q un numero razionale strettamente minore di p. Poiché p appartiene a qualche sezione α di A, si avrà che anche q appartiene a questa sezione. Di conseguenza, $q \in \gamma$.

Infine, scelto un numero razionale $p \in \gamma$, p apparterrà a qualche sezione α di A, per cui esiste sempre un numero razionale $q > p$, $q \in \alpha$, quindi $q \in \gamma$. Dunque, γ non ha massimo. Abbiamo così dimostrato che è una sezione.

Chiaramente, ogni sezione α di A è contenuta in γ; quindi, γ è un maggiorante per A. Inoltre, dato un qualunque maggiorante β per A, si ha che ogni $\alpha \in A$ è contenuto in β, quindi anche γ, che è l'unione di tutti questi α, sarà contenuta in β. Quindi γ è il minimo dei maggioranti, ossia l'estremo superiore di A. □

L'ultimo passo da compiere è quello di munire $\mathbb{R}_{\mathcal{D}}$ delle operazioni di somma e prodotto in maniera tale da formare un campo ordinato. Dati due elementi α e β di $\mathbb{R}_{\mathcal{D}}$, la somma si definisce nel seguente modo:

$$\alpha + \beta = \{p \in \mathbb{Q} \colon \exists a \in \alpha \, \exists b \in \beta \mid p = a + b\}$$

Dove abbiamo utilizzato lo stesso simbolo sia per la somma in $\mathbb{R}_{\mathcal{D}}$ che per la somma in $\mathbb{Q}$. Si dimostra poi che tale somma è ancora una sezione e che la struttura $(\mathbb{R}_{\mathcal{D}}, +, \leq)$, dove abbiamo indicato la relazione d'ordine $\subseteq$ con il solito simbolo $\leq$, è un gruppo abeliano ordinato, il cui elemento neutro è la sezione:

$$0_{\mathbb{R}} = \{p \in \mathbb{Q} \colon p < 0\}$$

e, per ogni sezione α, l'opposto si definisce mediante la sezione:

$$-\alpha = \{p \in \mathbb{Q} \colon -p \in \beta\}$$

essendo β l'insieme dei maggioranti di α, privato (se esiste) del suo minimo.

Per quanto riguarda il prodotto, è necessario definire preliminarmente il prodotto per due sezioni maggiori di $0_{\mathbb{R}}$. Siano dunque $\alpha, \beta > 0_{\mathbb{R}}$. Il prodotto viene definito nel modo seguente:

$$\alpha \cdot \beta = 0_{\mathbb{R}} \bigcup \{0\} \bigcup \{p \in \mathbb{Q} \colon \exists a \in \alpha \, \exists b \in \beta, a > 0, b > 0, p = ab\}$$

Fatto ciò, si pone, per ogni coppia α, β di elementi di $\mathbb{R}_{\mathcal{D}}$:

i) $\alpha \cdot 0_{\mathbb{R}} = 0_{\mathbb{R}} \cdot \alpha = 0_{\mathbb{R}}$;

ii) Se $\alpha > 0_{\mathbb{R}}$ e $\beta < 0_{\mathbb{R}}$, allora $\alpha \cdot \beta = -(\alpha \cdot (-\beta))$;

iii) Se $\alpha < 0_{\mathbb{R}}$ e $\beta > 0_{\mathbb{R}}$, allora $\alpha \cdot \beta = -(-\alpha \cdot \beta)$;

iv) Se $\alpha < 0_{\mathbb{R}}$ e $\beta < 0_{\mathbb{R}}$, allora $\alpha \cdot \beta = (-\alpha) \cdot (-\beta)$;

Si dimostra poi che il prodotto tra due sezioni è ancora una sezione e che l'elemento neutro moltiplicativo è la sezione definita da:

$$1_{\mathbb{R}} = \{p \in \mathbb{Q} \colon p < 1\}$$

Per quanto riguarda l'inverso moltiplicativo di una sezione $\alpha \neq 0_{\mathbb{R}}$, si pone, per $\alpha > 0_{\mathbb{R}}$:

$$\alpha^{-1} = 0_{\mathbb{R}} \bigcup \{0\} \bigcup \left\{p \in \mathbb{Q} \colon \frac{1}{p} \in \beta\right\}$$

dove, ancora, β è l'insieme dei maggioranti di α, privato (se esiste) del suo minimo. Se invece $\alpha < 0_{\mathbb{R}}$, si pone:

$$\alpha^{-1} = -(-\alpha)^{-1}$$

e si verifica che gli insiemi così definiti sono effettivamente delle sezioni e costituiscono gli inversi moltiplicativi.

Mostrando poi la validità delle proprietà associativa e commutativa del prodotto, della proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma, e verificando che, se $\alpha < \beta$ e $\gamma > 0_{\mathbb{R}}$, si ha $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$, possiamo enunciare il teorema seguente:

Teorema 5.3.2. *La struttura algebrica $(\mathbb{R}_{\mathcal{D}}, +, \cdot, \leq)$ è un campo ordinato*

La dimostrazione di tutte le proprietà delle operazioni definite su $\mathbb{R}_{\mathcal{D}}$ è assai più lunga e laboriosa rispetto a quella delle omologhe proprietà per il campo dei reali secondo Cantor, tuttavia, da un punto di vista concettuale non c'è nulla di particolarmente significativo, trattandosi di verifiche elementari.

Il campo $\mathbb{R}_{\mathcal{D}}$ costituisce il campo dei reali di Dedekind o secondo Dedekind. Chiameremo, d'ora in poi, gli elementi di $\mathbb{R}_{\mathcal{D}}$ numeri reali.

Osserviamo che, dato un numero $p \in \mathbb{Q}$, la sezione del campo razionale:

$$\{q \in \mathbb{Q} \colon q < p\}$$

ammette p come estremo superiore. D'altro canto, per l'incompletezza di $\mathbb{Q}$, sappiamo che esistono sezioni che non ammettono estremo superiore (in $\mathbb{Q}$), per cui non possono essere generate da un numero razionale p nel modo appena visto. In altre parole, l'applicazione $\phi \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\mathcal{D}}$, che a ogni numero razionale p associa un numero reale $\phi(p)$ definito mediante la sezione vista sopra, non è suriettiva. Non è difficile inoltre dimostrare il seguente risultato:

Proposizione 5.3.2. *L'applicazione:*

$$\phi \colon \begin{cases} \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\mathcal{D}}, \\ p \mapsto \phi(p) = \{q \in \mathbb{Q} \colon q < p\} \end{cases}$$

costituisce un monomorfismo ordinato tra $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}_{\mathcal{D}}$, che fa sì che il campo dei numeri razionali sia isomorfo al sottocampo di $\mathbb{R}_{\mathcal{D}}$ delle sezioni generate dai numeri razionali.

Le sezioni che non siano immagini, tramite ϕ, di un numero razionale costituiscono i numeri irrazionali. Si potrebbe pensare di applicare la stessa costruzione appena vista su $\mathbb{R}_{\mathcal{D}}$; considerare, cioè, sezioni del campo reale e strutturarle a loro volta come campo ordinato completo: ci si accorge ben presto di non andare molto lontano in quanto ogni sezione di numeri reali ammette estremo superiore, come si è visto, per cui il nuovo campo ottenuto sarebbe isomorfo a $\mathbb{R}_{\mathcal{D}}$. Ritroviamo così quella proprietà di massimalità che avevamo già riscontrato per il campo $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$. Come vedremo nel prossimo capitolo, tale proprietà può essere posta alla base della definizione assiomatica del campo dei numeri reali, così come è stata storicamente data da Hilbert.

Nel Capitolo 2 abbiamo visto come la definizione euclidea di uguaglianza tra rapporti adombrasse la proprietà di densità dei numeri razionali nei reali. Con la costruzione di Dedekind, che possiamo considerare come la sistemazione rigorosa delle idee espresse nel Libro V degli Elementi, la densità dei razionali nei reali può essere facilmente dimostrata:

Proposizione 5.3.3. *Siano α e β due numeri reali distinti. Esiste sempre un numero reale razionale compreso strettamente tra essi.*

Dimostrazione. Sia per esempio $\alpha < \beta$. Ciò significa che esiste un elemento b di $\mathbb{Q}$, tale che si abbia $b \in \beta$ e $b \notin \alpha$. Poiché α è una sezione, per ogni $a \in \alpha$ deve aversi $a < b$, altrimenti b apparterrebbe a α. Ancora, essendo β una sezione, non è possibile individuarvi un massimo, per cui esiste un elemento $b' > b$, $b' \in \beta$. La sezione $\phi(b')$, dove ϕ è l'applicazione definita nella Proposizione 5.3.2, è un numero reale razionale compreso strettamente tra α e β. Infatti, essendo $b < b'$, si ha che $b \in \phi(b')$; e poiché $b \notin \alpha$, non può che essere $\alpha \subset \phi(b')$. Ancora, poiché $b' \in \beta$ ma $b' \notin \phi(b')$, non può che essere $\phi(b') \subset \beta$. In definitiva quindi:

$$\alpha < \phi(b') < \beta \qquad \square$$

Infine, è assai semplice dimostrare che il campo dei reali così costruito gode della proprietà archimedea:

Proposizione 5.3.4. *Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\mathcal{D}}$, $\alpha > 0$. Esiste un numero naturale n tale che:*

$$n\alpha > \beta$$

Dimostrazione. Se $\beta \leq 0$, basta scegliere $n = 1$ perché si abbia:

$$1 \cdot \alpha = \alpha > 0 \geq \beta$$

Se $\beta > 0$, ragioniamo per assurdo: se fosse $n\alpha \leq \beta$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora l'insieme:

$$\{n\alpha, n \in \mathbb{N}\}$$

sarebbe limitato superiormente, quindi ammetterebbe estremo superiore γ. Ciò implica che esiste un naturale $\bar{n}$, tale che:

$$\gamma - \alpha < \bar{n}\alpha \leq \gamma$$

Ma ciò è assurdo in quanto aggiungendo ad ambo i membri della prima disuguaglianza la quantità α si ottiene:

$$\gamma < (\bar{n} + 1)\alpha$$

contro l'ipotesi che γ è estremo superiore per l'insieme $\{n\alpha, n \in \mathbb{N}\}$. Deve pertanto esistere un naturale n, tale che si abbia $n\alpha > \beta$. $\square$

Come si può vedere dalla dimostrazione della Proposizione 5.3.4, la proprietà archimedea di $\mathbb{R}_{\mathcal{D}}$ è una conseguenza della Dedekind-completezza di $\mathbb{R}_{\mathcal{D}}$. Più in generale, dato un campo ordinato qualsiasi che goda della proprietà di completezza secondo Dedekind, esso è sempre archimedeo. La completezza per l'ordine contiene quindi già in sé l'archimedeicità. Ciò a differenza di quanto accade per la completezza metrica, la quale, come abbiamo visto nel capitolo precedente, non garantisce di per sé stessa la proprietà archimedea. Se il campo dei reali secondo Cantor può caratterizzarsi come campo ordinato, archimedeo e Cauchy-completo, il campo dei reali secondo Dedekind si caratterizza come campo ordinato Dedekind-completo. Nel capitolo successivo i due modelli verranno messi a confronto.

Capitolo 6

Completezza e *Vollständigkeit*

6.1 $\mathcal{C}$-completezza e $\mathcal{D}$-completezza

Nei due capitoli precedenti abbiamo costruito due modelli per i numeri reali: quello di Cantor, $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$, e quello di Dedekind, $\mathbb{R}_{\mathcal{D}}$. Entrambe le costruzioni sono state fatte partendo ciascuna da un postulato che esprime l'idea intuitiva di continuità della retta geometrica. Nel modello di Cantor, l'idea di continuità si formalizza nella completezza metrica (d'ora in poi $\mathcal{C}$-completezza) e nella proprietà archimedea, mentre nel modello di Dedekind essa viene ad assumere la forma della completezza per l'ordine (d'ora in poi $\mathcal{D}$-completezza). La proprietà archimedea, in quest'ultimo caso, ne è una conseguenza. In ogni caso, è chiaro che quest'ultima proprietà, già individuata in seno alla matematica greca, gioca un ruolo fondamentale nella formalizzazione del concetto di continuità[1]. Resta quindi da chiarire il rapporto intercorrente tra la $\mathcal{C}$-completezza e la $\mathcal{D}$-completezza. A tal fine, è necessario riprendere un'idea vista alla fine del Capitolo 2 in merito alla discussione del procedimento dell'antifairesi. In quella sede si era visto che un'idea intuitiva del concetto di continuità della retta fosse quella di richiedere che ogni successione decrescente di intervalli, di lunghezze tendenti a zero, individuasse un unico punto su di essa. Formalizziamo questa proprietà nell'ambito della teoria dei campi ordinati. Prima di procedere, per semplificare le notazioni, richiamiamo alcune nozioni note da tale teoria. Ricordiamo che il sottocampo fondamentale $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ di un campo ordinato $\mathbb{F}$, detto anche campo dei razionali di $\mathbb{F}$, è un campo ordinatamente isomorfo a $\mathbb{Q}$, definito mediante l'applicazione:

[1] Si veda l'osservazione fatta alla fine del primo paragrafo del Capitolo 2, in cui si rimandava, per approfondimenti, a [Frajese 1968].

$$\psi\colon \begin{cases} \mathbb{Q} \to \mathbb{F} \\ \dfrac{p}{q} \mapsto (1_{\mathbb{F}} \cdot p) \cdot (1_{\mathbb{F}} \cdot q)^{-1}, \qquad q \neq 0 \end{cases}$$

che si verifica facilmente essere un omomorfismo ordinato tra campi (necessariamente iniettivo, come tutti gli omomorfismi tra campi). Inoltre, da ciò discende facilmente che, se tra due campi ordinati esiste un omomorfismo, allora necessariamente tale omomorfismo trasformerà un elemento razionale del primo campo nello stesso elemento razionale del secondo campo. D'ora in poi, in virtù dell'isomorfismo tra $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$, compiremo un abuso di linguaggio quando parleremo di elementi $p \in \mathbb{Q}$, pensandoli sia come numeri razionali sia come loro immagini $\psi(p)$ in $\mathbb{F}$. Pertanto, indicheremo l'elemento:

$$(p \cdot 1_{\mathbb{F}}) \cdot (q \cdot 1_{\mathbb{F}})^{-1}$$

con la semplice scrittura:

$$\frac{p}{q}$$

e il multiplo $m \cdot 1_{\mathbb{F}}$ semplicemente con m. In virtù dell'isomorfismo ψ, è chiaro che tutte le proprietà di $\mathbb{Q}$ si trasferiscono a $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$. Sarà il contesto a chiarire, di volta in volta, in quale campo si stia operando.

Definizione 6.1.1 (Proprietà degli intervalli imbottigliati)**.** *Sia* $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$ *un campo ordinato. Si dice che in esso vale la* proprietà degli intervalli imbottigliati *se, data una successione decrescente (nel senso della relazione d'ordine d'inclusione insiemistica) di intervalli* $[a_n, b_n]$ *di* $\mathbb{F}$*, tali che le lunghezze tendano a zero, esiste un unico elemento* $a \in \mathbb{F}$*, per cui si abbia:*

$$\bigcap_{n \geq 1} [a_n, b_n] = \{a\}$$

Individuare una successione di intervalli definita come sopra equivale, analiticamente, a determinare due successioni $\{a_n\}_{n\geq 1}$*,* $\{b_n\}_{n\geq 1}$ *in* $\mathbb{F}$*, tali che si abbia, per ogni* $n \geq 1$*:*

i) $b_n - a_n > 0$

ii) $a_n \leq a_{n+1}$

iii) $b_n \geq b_{n+1}$

iv) $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

Per mezzo della proprietà degli intervalli imbottigliati è possibile mostrare che le nozioni di $\mathcal{C}$-completezza e $\mathcal{D}$-completezza sono tra loro equivalenti. Prima di procedere con la dimostrazione di quest'ultima asserzione, dimostriamo un'importante caratterizzazione dei campi ordinati archimedei:

Lemma 6.1.1. *Sia $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$ un campo ordinato. Allora $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$ è archimedeo se e solo se il sottocampo fondamentale $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ è denso in $\mathbb{F}$.*

Dimostrazione. $\boxed{\Rightarrow}$ Siano $a, b \in \mathbb{F}$, $a < b$. Supponiamo inizialmente $a \geq 0$. Poiché $\mathbb{F}$ è archimedeo, ricordando la caratterizzazione di tale proprietà data nella Proposizione 4.2.6, abbiamo che esiste $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$, tale che:

$$(b - a)^{-1} < m$$

Ne segue:

$$1 < mb - ma \implies ma + 1 < mb$$

Consideriamo l'insieme:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \colon ma < x\}$$

Tale insieme è non vuoto sempre per la proprietà archimedea valida per $\mathbb{F}$. Poiché $\mathbb{N}$ è *bene ordinato*[2] esiste il minimo di A. Sia esso n. Dalla sua definizione si ha:

$$ma \geq n - 1$$

Ne segue:

$$n = n - 1 + 1 \leq ma + 1 < mb$$

E poiché n è il minimo di A, abbiamo in definitiva:

$$ma < n < mb$$

Da cui segue:

$$a < \frac{n}{m} < b$$

Abbiamo così dimostrato il caso $a \geq 0$. Nel caso in cui si abbia $a < 0 < b$, l'asserto segue dal fatto che $0 \in \mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$. Se, invece, si ha $a < b \leq 0$, allora sarà $0 \leq -b < -a$ ci si riporta a quanto dimostrato sopra.

[2] Ovvero in esso ogni sottoinsieme non vuoto ammette minimo.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sia $a \in \mathbb{F}$. Se $a \leq 0$, allora basta scegliere qualsiasi $n > 0$. Supponiamo quindi $a > 0$. Dall'ipotesi di densità di $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ in $\mathbb{F}$ segue che esistono due interi, che possiamo supporre entrambi strettamente positivi, tali che:

$$0 < \frac{n}{m} < a^{-1}$$

A questo punto basta moltiplicare ambo i membri della disuguaglianza appena scritta per l'elemento $ma \cdot \frac{1}{n} > 0$ per ottenere:

$$a < \frac{m}{n} \leq m$$ □

Siamo adesso in grado di mostrare che le nozioni di $\mathcal{C}$-completezza e $\mathcal{D}$-completezza sono tra loro equivalenti e che la proprietà degli intervalli imbottigliati è un altro modo di esprimere la continuità della retta:

Teorema 6.1.1. *Sia $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$ un campo ordinato. Le seguenti affermazioni sono equivalenti tra loro:*

i) $\mathbb{F}$ è $\mathcal{D}$-completo;

ii) $\mathbb{F}$ gode della proprietà degli intervalli imbottigliati ed è archimedeo;

iii) $\mathbb{F}$ è $\mathcal{C}$-completo e archimedeo;

Dimostrazione. $\boxed{i) \implies ii)}$ Che $\mathbb{F}$ sia archimedeo, discende dalla Proposizione 5.3.4, opportunamente generalizzata al caso di campi ordinati $\mathcal{D}$-completi qualunque. Resta da mostrare la proprietà degli intervalli imbottigliati. Sia data una successione di intervalli $[a_n, b_n]$ di $\mathbb{F}$ secondo la Definizione 6.1.1. È semplcie constatare che gli insiemi $A = \{a_n\}_{n \geq 1}$ e $B = \{b_n\}_{n \geq 1}$ sono limitati, rispettivamente, superiormente e inferiormente. Essendo $\mathbb{F}$ completo per l'ordine si ha che A ammette estremo superiore a e B ammette estremo inferiore b. Si ha, per ogni $n \geq 1$:

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n$$

Quindi l'intersezione degli intervalli $[a_n, b_n]$ è non vuota. Tale intersezione, d'altronde, non può contenere più di un elemento. Siano infatti c, d due elementi distinti di $\mathbb{F}$, con $c < d$. Se entrambi appartenessero a tutti gli intervalli della successione si avrebbe, per ogni $n \geq 1$:

$$a_n \leq c < d \leq b_n$$

ovvero:

$$b_n - a_n \geq d - c > 0$$

Ma ciò è in contraddizione con la *iv*) della Definizione 6.1.1. Pertanto, nell'intersezione c'è un solo punto. Ciò mostra, tra l'altro, che $a = b$.

$\boxed{ii) \implies i)}$ Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{F}$ non vuoto e limitato superiormente. Scegliamo un elemento $a_1 \in A$ e un maggiorante b_1 di A e formiamo l'intervallo chiuso $[a_1, b_1]$. Sia m_1 il punto medio di tale intervallo:

$$m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

possono aversi due possibilità: o m_1 è maggiorante per A oppure non lo è. Nel primo caso, poniamo $a_2 = a_1$ e $b_2 = m_1$; mentre nel secondo caso poniamo $a_2 = m_1$ e $b_2 = b_1$. In entrambi i casi è facile constatare che:

a) b_2 è un maggiorante per A

b) $[a_2, b_2] \cap A \neq \emptyset$

c) $b_2 - a_2 = \dfrac{b_1 - a_1}{2}$

Procedendo per induzione su questa via, è facile vedere che si ottiene una successione decrescente di intervalli $[a_n, b_n]$ che gode delle seguenti proprietà:

a') b_n è un maggiorante per A

b') $[a_n, b_n] \cap A \neq \emptyset$

c') $b_n - a_n = \dfrac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$

La successione $\{b_n - a_n\}_{n \geq 1}$ converge a zero. Per vederlo è sufficiente dimostrare che la successione $\{2^{-n}\}_{n \geq 0}$ converge a zero. Ciò discende dalla proprietà archimedea di cui gode $\mathbb{F}$. Infatti, sia $\epsilon \in \mathbb{F}$, $\epsilon > 0$. Per la proprietà archimedea, esiste un numero naturale N tale che:

$$N > \epsilon^{-1}$$

Ora, si dimostra semplicemente per induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale $n < 2^n$. Così, dalla relazione precedente abbiamo:

$$\epsilon^{-1} < N < 2^N$$

E quindi:

$$2^{-N} < \epsilon$$

Poiché la successione 2^n è crescente, si avrà, per ogni $n \geq N$:

$$2^{-n} < \epsilon$$

che mostra che la successione converge a zero. Così, anche $\{b_n - a_n\}_{n\geq 1}$ converge a zero e, poiché vale la proprietà degli intervalli imbottigliati, esiste $a \in \mathbb{F}$, tale che:

$$\bigcap_{n\geq 1} [a_n, b_n] = \{a\}$$

Sicuramente a è un maggiorante per A. Infatti, se esistesse un elemento $x \in A$, tale che $a < x$, allora, avendo appena dimostrato che la successione $\{b_n - a_n\}_{n\geq 1}$ converge a zero, in corrispondenza di $x - a > 0$, si avrebbe definitivamente:

$$b_n - a_n < x - a$$

da cui:

$$x > a + b_n - a_n$$

Essendo $a - a_n \geq 0$, si ha:

$$x > b_n$$

il che è assurdo, in quanto b_n è maggiorante per A e $x \in A$.

Mostriamo, infine, che a è l'estremo superiore di A, ovvero il minimo dei maggioranti. Ancora, scelto $x \in \mathbb{F}$, $x < a$, poiché $\{b_n - a_n\}_{n\geq 1}$ converge a zero, in corrispondenza di $a - x > 0$ si avrà definitivamente:

$$b_n - a_n < a - x$$

ovvero:

$$x < a + a_n - b_n$$

Poiché si ha $a - b_n \leq 0$, otteniamo:

$$x < a_n$$

da un certo indice n in poi. Dalla $b')$ si ha finalmente che esiste almeno un elemento $y \in A$, tale che:

$$x < a_n \leq y \leq b_n$$

per cui x non è maggiorante di A. Se ne conclude che a è l'estremo superiore di A

$\boxed{i) \implies iii)}$ Ancora per la Proposizione 5.3.4, si ha che $\mathbb{F}$ è archimedeo. Resta quindi da dimostrare che, data una qualsiasi successione di Cauchy in $\mathbb{F}$, essa risulti ivi convergente.

Sia dunque $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una tale successione. Per ogni $p \geq 1$, poniamo:

$$A_p = \{a_n \colon n \geq p\}$$

Una semplice estensione della dimostrazione della $i)$ del Lemma 4.2.1 a campi ordinati qualsiasi mostra che, per ogni $p \geq 1$, A_p è un insieme limitato sia inferiormente che superiormente. Poiché $\mathbb{F}$ è completo per l'ordine, è possibile individuare due successioni:

$$\alpha_p = \inf A_p$$
$$\beta_p = \sup A_p$$

Per come sono state definite tali successioni, è chiaro che esse individuano una successione decrescente di intervalli $[\alpha_p, \beta_p]$ e che le lunghezze di tali intervalli vanno via via decrescendo. Vogliamo dimostrare che le lunghezze convergono a zero.

Sia $\epsilon \in \mathbb{F}$, $\epsilon > 0$. Essendo $\{a_n\}$ di Cauchy, è possibile determinare un indice $p > 0$, tale che, per ogni $m, n \geq p$, si abbia:

$$|a_m - a_n| < \frac{\epsilon}{3}$$

D'altro canto, poiché α_p è estremo inferiore di A_p, esiste un indice $n \geq p$ tale che:

$$a_n < \alpha_p + \frac{\epsilon}{3}$$

Allo stesso modo, poiché β_p è estremo superiore di A_p, esiste un indice $m \geq p$, tale che:

$$\beta_p - \frac{\epsilon}{3} < a_m$$

Da ciò segue che:

$$\beta_p - \alpha_p < a_m - a_n + \frac{2}{3}\epsilon < \epsilon$$

Quindi, essendo decrescenti le lunghezze degli intervalli $[\alpha_p, \beta_p]$, si ha, per ogni $q > p$:

$$|\beta_q - \alpha_q| = \beta_q - \alpha_q \leq \beta_p - \alpha_p < \epsilon$$

che dimostra appunto che le lunghezze tendono a zero. Poiché abbiamo già dimostrato l'implicazione $i) \implies ii)$, possiamo applicare la proprietà degli intervalli imbottigliati e concludere che esiste un unico elemento $a \in \mathbb{F}$ tale che, per ogni $p \geq 1$, si abbia:

$$\alpha_p \leq a \leq \beta_p$$

Dimostramo ora che:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Sia $\epsilon \in \mathbb{F}$, $\epsilon > 0$. Poiché le lunghezze degli intervalli $[\alpha_p, \beta_p]$ tendono a zero, possiamo determinare un indice $p \geq 1$, tale che si abbia:

$$\beta_p - \alpha_p = \beta_p - a + a - \alpha_p < \epsilon$$

Essendo $\beta_p - a \geq 0$ e $a - \alpha_p \geq 0$, si ottengono le seguenti disuguaglianze:

$$a - \epsilon < \alpha_p \leq \beta_p < a + \epsilon$$

e, poiché per ogni $n \geq p$ deve aversi anche $\alpha_p \leq a_n \leq \beta_p$, si ha in definitiva:

$$|a_n - a| < \epsilon$$

per ogni $n \geq p$. La successione $\{a_n\}$ converge quindi ad a.

$\boxed{iii) \implies ii)}$ Sia $\{[a_n, b_n]\}_{n\geq 1}$ una successione di intervalli imbottigliati secondo la Definizione 6.1.1. Mostriamo preliminarmente che le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono di Cauchy. A tal fine, posto $\epsilon \in \mathbb{F}$, $\epsilon > 0$, e tenuto conto delle proprietà $i)$ e $iv)$ della Definizione 6.1.1, è possibile determinare un numero naturale N, tale che, per ogni $n \geq N$, si abbia:

$$0 < b_n - a_n < \epsilon$$

Ancora, scelto un altro numero naturale $m > n \geq N$, si avrà:

$$-\epsilon < a_m - b_m < 0$$

Queste due relazioni implicano che si abbia:

$$-\epsilon < (a_m - b_m) + (b_n - a_n) < \epsilon \iff |(a_m - a_n) + (b_n - b_m)| < \epsilon$$

Essendo $(a_m - a_n)$ e $(b_n - b_m)$ entrambi maggiori o uguali a zero, deve necessariamente aversi:

$$|a_m - a_n| < \epsilon$$
$$|b_n - b_m| < \epsilon$$

Pertanto $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono di Cauchy.

Essendo $\mathbb{F}$ Cauchy-completo, entrambe le successioni convegono; per la *iv*) della Definizione 6.1.1, il loro limite è lo stesso. Sia esso $a \in \mathbb{F}$. Dimostriamo che, per ogni $n \geq 1$, si ha $a_n \leq a$. Se così non fosse, esisterebbe un indice $m \geq 1$, tale che $a < a_m$, ovvero $a_m - a > 0$. Scelto un elemento[3] $c \in \mathbb{F}$, tale che $0 < c < a_m - a$, si avrebbe, per ogni $n \geq m$:

$$0 < c < a_m - a \leq a_n - a$$

in contraddizione con la convergenza di $\{a_n\}$ ad a.

Allo stesso modo si dimostra che, per ogni $n \geq 1$, si ha $a \leq b_n$, per cui in definitiva abbiamo che l'intersezione della famiglia di intervalli $[a_n, b_n]$ è non vuota e contiene almeno a.

Tale intersezione, d'altronde, non può avere più di un elemento. Siano infatti c, d due elementi distinti di $\mathbb{F}$, con $c < d$. Se entrambi appartenessero a tutti gli intervalli della successione si avrebbe, per ogni $n \geq 1$:

$$a_n \leq c < d \leq b_n$$

ovvero:

$$b_n - a_n \geq d - c$$

Ma ciò è in contraddizione con la *iv*) della Definizione 6.1.1. Pertanto, l'intersezione costituisce, come si dice nel linguaggio insiemistico, un *singoletto*. $\square$

[3]Ciò può sempre essere fatto poiché ogni campo ordinato $\mathbb{F}$ è denso in sé. Basta considerare, per esempio, il punto medio di due elementi a, b di $\mathbb{F}$, con $a < b$.

Figura 6.1: David Hilbert, Königsberg, 1862 - Gottinga, 1943.

Così, il campo $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ di Cantor è $\mathcal{D}$-completo e il campo $\mathbb{R}_{\mathcal{D}}$ di Dedekind è $\mathcal{C}$-completo ed entrambi godono della proprietà degli intervalli imbottigliati. Più in generale, in ogni campo ordinato la proprietà di continuità si formalizza equivalentemente con la $\mathcal{D}$-completezza, con l'archimedeicità e la $\mathcal{C}$-completezza oppure con l'archimedeicità e la proprietà degli intervalli imbottigliati. Tuttavia, le strutture $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ e $\mathbb{R}_{\mathcal{D}}$ sono formalmente distinte. Per eliminare finalmente i pedici $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, e parlare del campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali *tout court*, sarà necessario dimostrare che di campi ordinati archimedei e $\mathcal{C}$-completi, ovvero $\mathcal{D}$-completi, ne esiste essenzialmente uno solo: bisognerà cioè dimostrare che essi sono tutti ordinatamente isomorfi tra loro.

6.2 Il teorema di Hilbert

Nel presente paragrafo verrà illustrato un risultato presentato da Hilbert nel 1900[4], da cui discenderà l'unicità, a meno di isomorfismi ordinati, di ogni campo $\mathcal{D}$-completo. Una conseguenza diretta di ciò, per quanto visto nel paragrafo precedente, è che le costruzioni di Cantor e di Dedekind dei numeri reali sono matematicamente equivalenti. Nella dimostrazione di detto teorema verrà utilizzato il lemma seguente:

Lemma 6.2.1. *Sia $\phi\colon \mathbb{F}_1 \to \mathbb{F}_2$ un'applicazione crescente fra due campi ordinati archimedei. Allora, se per ogni razionale r si ha $\phi(r) = r$, l'applicazione è strettamente crescente.*

Dimostrazione. Siano $x, y \in \mathbb{F}_1$, $x < y$. Per il Lemma 6.1.1 esistono razionali p, q tali che si abbia:

[4] [Hilbert 1900].

$$x < p < q < y$$

Poiché ϕ è crescente, abbiamo:

$$\phi(x) \leq \phi(p) \leq \phi(q) \leq y$$

Ma ϕ induce l'identità sui razionali, quindi la precedente disuguaglianza si legge:

$$\phi(x) \leq p < q \leq \phi(y)$$

per cui ϕ è strettamente crescente. $\square$

Teorema 6.2.1 (Teorema di Hilbert)**.** *Sia* $(\mathbb{F}_1, +, \cdot, \leq)$ *un campo ordinato archimedeo e* $(\mathbb{F}_2, +, \cdot, \leq)$ *un campo ordinato* $\mathcal{D}$*-completo. Allora esiste un unico omomorfismo ordinato* $\phi \colon \mathbb{F}_1 \to \mathbb{F}_2$*.*

Dimostrazione. Sia dato un elemento $x \in \mathbb{F}_1$. Definiamo l'insieme:

$$A(x) = \{q \in \mathbb{Q} \colon q \leq x\}$$

L'insieme $A(x)$ è limitato superiormente in $\mathbb{F}_1$ poiché x ne è un maggiorante. D'altro canto, essendo $\mathbb{F}_1$ archimedeo, è possibile trovare un numero razionale maggiore di x, per cui $A(x)$ è limitato anche in $\mathbb{Q}$. Considerando adesso $A(x)$ come sottoinsieme di $\mathbb{F}_2$, e ricordando che $\mathbb{F}_2$ contiene una "copia" di $\mathbb{Q}$ come specificato all'inizio del capitolo, si ha che $A(x)$ è limitato superiormente anche in $\mathbb{F}_2$. Ma $\mathbb{F}_2$ è $\mathcal{D}$-completo, per cui esiste l'estremo superiore per $A(x)$ in $\mathbb{F}_2$. Consideriamo l'applicazione:

$$\phi \colon \begin{cases} \mathbb{F}_1 \to \mathbb{F}_2 \\ x \mapsto \sup\limits_{\mathbb{F}_2} A(x) \end{cases}$$

Se x è razionale, allora l'insieme $A(x)$ ha massimo in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_1$ e $\mathbb{F}_2$, per cui si ha:

$$\phi(x) = x$$

Inoltre, se $x, y \in \mathbb{F}_1$, $x < y$, si ha $A(x) \subseteq A(y)$, da cui:

$$\phi(x) = \sup_{\mathbb{F}_2} A(x) \leq \sup_{\mathbb{F}_2} A(y) = \phi(y)$$

e quindi l'applicazione ϕ è crescente. Quindi, per il Lemma 6.2.1 ϕ è strettamente crescente.

Rimane da verificare che ϕ conserva le operazioni di somma e prodotto tra $\mathbb{F}_1$ e $\mathbb{F}_2$.

Fissiamo $x, y \in \mathbb{F}_1$ e $\epsilon \in \mathbb{Q}$, $\epsilon > 0$. Per la densità di $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}_1}$ in $\mathbb{F}_1$ (che discende dal Lemma 6.1.1) esistono dei razionali p_1, p_2, q_1, q_2 tali che:

$$\begin{cases} x - \epsilon < p_1 < x < p_2 < x + \epsilon \\ y - \epsilon < q_1 < y < q_2 < y + \epsilon \end{cases}$$

da cui si ricava:

$$\begin{cases} p_1 + q_1 < x + y < p_2 + q_2 \\ p_2 - \epsilon < x < p_1 + \epsilon \\ q_2 - \epsilon < y < q_1 + \epsilon \end{cases}$$

Dalle proprietà di ϕ discende:

$$\begin{cases} p_1 + q_1 < \phi(x + y) < p_2 + q_2 \\ p_2 - \epsilon < \phi(x) < p_1 + \epsilon \\ q_2 - \epsilon < \phi(y) < q_1 + \epsilon \end{cases}$$

Da cui si ricava facilmente:

$$\phi(x) + \phi(y) - 2\epsilon < p_1 + q_1 < \phi(x + y) < p_2 + q_2 < \phi(x) + \phi(y) + 2\epsilon$$

ovvero:

$$|\phi(x) + \phi(y) - \phi(x + y)| < 2\epsilon$$

Tale disuguaglianza deve valere per ogni $\epsilon > 0$ razionale, per cui la quantità in valore assoluto deve essere necessariamente nulla. Infatti, se fosse strettamente positiva, dato che $\mathbb{F}_2$ è $\mathcal{D}$-completo, dunque archimedeo, esisterebbe, per il Lemma 6.1.1, un razionale r tale che:

$$0 < r < |\phi(x) + \phi(y) - \phi(x + y)|$$

Ponendo $\epsilon = \frac{r}{2}$ si avrebbe:

$$0 < 2\epsilon < |\phi(x) + \phi(y) - \phi(x + y)|$$

il che è assurdo. Dunque deve aversi:

$$\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$$

Siano ora $x, y \in \mathbb{F}_1$, $x, y > 0$. Siano inoltre $\epsilon, p_1, p_2, q_1, q_2$ definiti come sopra, tali cioè che:

$$\begin{cases} x - \epsilon < p_1 < x < p_2 < x + \epsilon \\ y - \epsilon < q_1 < y < q_2 < y + \epsilon \end{cases}$$

Scegliamo inoltre ϵ sufficientemente piccolo da avere $x - \epsilon > 0$, $y - \epsilon > 0$ (ciò può sempre essere fatto grazie ancora alla proprietà di densità di $\mathbb{Q}$ nei campi archimedei). È facile allora verificare che:

$$\begin{cases} p_1 q_1 < xy < p_2 q_2 \\ p_2 - \epsilon < x < p_1 + \epsilon \\ q_2 - \epsilon < y < q_1 + \epsilon \end{cases}$$

e, ricordando le proprietà di ϕ:

$$\begin{cases} p_1 q_1 < \phi(xy) < p_2 q_2 \\ p_2 - \epsilon < \phi(x) < p_1 + \epsilon \\ q_2 - \epsilon < \phi(y) < q_1 + \epsilon \end{cases}$$

Essendo $p_2 - \epsilon > x - \epsilon > 0$ e $q_2 - \epsilon > y - \epsilon > 0$, dalle ultime due disuguaglianze otteniamo:

$$(p_2 - \epsilon)(q_2 - \epsilon) < \phi(x)\phi(y) < (p_1 + \epsilon)(q_1 + \epsilon)$$

e quindi:

$$\begin{cases} \phi(xy) - \phi(x)\phi(y) < p_2 q_2 - (p_2 - \epsilon)(q_2 - \epsilon) = \epsilon(p_2 + q_2 - \epsilon) < \epsilon\Big(\phi(x) + \phi(y) + \epsilon\Big) \\ \phi(xy) - \phi(x)\phi(y) > p_1 q_1 - (p_1 + \epsilon)(q_1 + \epsilon) = -\epsilon(p_1 + q_1 - \epsilon) < -\epsilon\Big(\phi(x) + \phi(y) + \epsilon\Big) \end{cases}$$

che equivale a:

$$|\phi(xy) - \phi(x)\phi(y)| < \epsilon\Big(\phi(x) + \phi(y) + \epsilon\Big)$$

Ancora, dall'arbitrarietà di ϵ si può dedurre che:

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$$

I casi $x < 0$ e $y > 0$, $x < 0$ e $y < 0$, $x > 0$ e $y < 0$ discendono dal caso $x > 0, y > 0$ tenuto conto che, dal fatto che ϕ conserva la somma discende la relazione $\phi(x) = -\phi(-x)$.

L'applicazione ϕ è dunque un omomorfismo strettamente crescente, quindi iniettivo, tra $\mathbb{F}_1$ e $\mathbb{F}_2$.

Rimane da mostrare l'unicità di ϕ. Supponiamo che esista $\phi' \colon \mathbb{F}_1 \to \mathbb{F}_2$ omomorfismo ordinato. Scelto $x \in \mathbb{F}_1$, se fosse $\phi'(x) < \phi(x)$, per l'archimedeicità di $\mathbb{F}_2$ e per il Lemma 6.1.1, esisterebbe un razionale r tale che:

$$\phi'(x) < r < \phi(x)$$

Essendo sia ϕ' che ϕ strettamente crescenti e inducendo l'identità su $\mathbb{Q}$, si avrebbe:

$$x < r < x$$

il che è assurdo. Un ragionamento analogo fatto per il caso $\phi'(x) > \phi(x)$ porta al medesimo assurdo. Se ne conclude che deve essere $\phi'(x) = \phi(x)$ per ogni x di $\mathbb{F}_1$. □

Conseguenza immediata del teorema di Hilbert è l'"unicità" del campo dei numeri reali:

Corollario 6.2.1. *Siano $\mathbb{F}_1$ e $\mathbb{F}_2$ campi ordinati $\mathcal{D}$-completi. Essi sono ordinatamente isomorfi tra loro mediante un isomorfismo ordinato univocamente determinato.*

Dimostrazione. Poiché sia $\mathbb{F}_1$ che $\mathbb{F}_1$ sono $\mathcal{D}$-completi, essi sono anche archimedei. Per il Teorema di Hilbert appena dimostrato, esistono due omomorfismi ordinati $\phi \colon \mathbb{F}_1 \to \mathbb{F}_2$, $\psi \colon \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_1$. Pertanto, le funzioni composte:

$$\psi \circ \phi \colon \mathbb{F}_1 \to \mathbb{F}_1$$
$$\phi \circ \psi \colon \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$$

sono entrambe omomorfismi ordinati. Ancora per il Teorema di Hilbert, in particolare per l'unicità, le due applicazioni composte devono coincidere, rispettivamente, con le identità su $\mathbb{F}_1$ e $\mathbb{F}_2$, il che significa appunto che gli omomorfismi ϕ e ψ sono invertibili e l'uno l'inverso dell'altro. □

Sostanzialmente, esiste un unico campo dei numeri reali. Non importa se scegliamo il modello di Dedekind, di Cantor o qualunque altro modello di campo ordinato $\mathcal{D}$-completo (o, equivalentemente, archimedeo e $\mathcal{C}$-completo): da un punto di vista matematico, avremo sempre a che fare con la medesima entità, che d'ora in poi chiameremo $\mathbb{R}$.

6.3 L'Axiom der Vollständigkeit

Nei capitoli dedicati alle costruzioni dei reali secondo Cantor e Dedekind abbiamo visto che entrambi i campi, $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ e $\mathbb{R}_{\mathcal{D}}$, sono caratterizzati da una proprietà che li accomuna: applicando ad essi le rispettive costruzioni che sono state fatte a partire da $\mathbb{Q}$, si ottengono campi che sono isomorfi ai rispettivi campi di partenza. In altre parole essi sembrano godere di una sorta di massimalità. Considerando che l'intento delle costruzioni dei reali era quello di avere a disposizione un insieme numerico che rappresentasse tutti i punti della retta geometrica, si capisce che il senso di tale massimalità sta nel fatto che con $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ e $\mathbb{R}_{\mathcal{D}}$ abbiamo raggiunto tale scopo: nessun punto rimane fuori poiché non riusciamo ad ampliare ulteriormente tali insiemi. Essi, in un senso intuitivo, ci appaiono completi. Emerge così in maniera naturale una nuova accezione del termine *completezza*, che si va ad aggiungere alle due già individuate nei capitoli precedenti, e che abbiamo dimostrato essere equivalenti. Scopo del presente paragrafo è quello di formalizzare questa nuova nozione di completezza e dimostrarne l'equivalenza con quelle già viste[5]. Emergerà così un ulteriore aspetto sotto cui intendere la proprietà di continuità della retta.

Il nuovo significato della completezza sopra individuato trae le sue origini dalla definizione assiomatica dei numeri reali data da Hilbert. Nella celeberrima conferenza al II Congresso Internazionale dei Matematici di Parigi del 1900, in realzione al II Problema riguardante la consistenza degli assiomi dell'aritmetica, egli dice:

> *Gli assiomi dell'aritmetica sono essenzialmente nient'altro che le regole ben conosciute delle operazioni, con l'aggiunta dell'assioma di continuità. Recentemente, le ho raccolte tutte assieme e, nel farlo, ho sostituito l'assioma di continuità da due assiomi più semplici, vale a dire, l'assioma ben noto di Archimede e un nuovo assioma, essenzialmente il seguente: i numeri formano un sistema di oggetti che non ammette alcuna ulteriore estensione [Erweiterung] in cui continuino a valere tutti gli altri assiomi (assioma di completezza [Axiom der Vollständigkeit]). Sono convinto che debba esser possibile trovare una dimostrazione diretta per la compatibilità degli assiomi aritmetici, per mezzo di uno studio attento e di un'opportuna modifica dei metodi noti di ragionamento nella teoria dei numeri irrazionali.*

Gli assiomi cui si riferisce Hilbert sono costituiti da un primo gruppo di sedici assiomi, che equivalgono sostanzialmente a dire che i numeri reali costituiscono un campo ordinato; un diciassettesimo assioma che è la proprietà

[5]Si seguirà sostanzialmente l'impostazione di [Fiori-Invernizzi 2009].

archimedea, e un ultimo assioma, chiamato *Axiom der Vollständigkeit*, ovvero *assioma di completezza*. Tuttavia, è chiaro che la completezza a cui si riferisce Hilbert, non è da intendersi né nel senso di Dedekind né nel senso di Cantor. Essa invece si riferisce all'impossibilità di trovare un'estensione (*Erweiterung*) dei reali tale che in essa continuino a valere i diciassette assiomi precedenti. È tuttavia necessario stabilire con maggior precisione che cosa si debba intendere col termine *estensione*. A tal fine, richiamiamo brevemente alcune definizioni della teoria dei campi.

Definizione 6.3.1 (Estensione di campi)**.** *Siano $\mathbb{F}$ e $\mathbb{K}$ campi. Si dice che $\mathbb{K}$ è un'estensione di $\mathbb{F}$, e si scrive $\mathbb{K}\,|\,\mathbb{F}$, se esiste un sottocampo $\mathbb{F}'$ di $\mathbb{K}$ isomorfo a $\mathbb{F}$.*

Definizione 6.3.2 (Estensione propria di campi)**.** *Siano $\mathbb{F}$ e $\mathbb{K}$ campi. Si dice che $\mathbb{K}$ è un'estensione propria di $\mathbb{F}$ se è $\mathbb{K}\,|\,\mathbb{F}$, ma $\mathbb{F}$ non è isomorfo a $\mathbb{K}$.*

È importante notare che, affinché un'estensione sia propria non è sufficiente che $\mathbb{F}$ sia isomorfo a un sottocampo $\mathbb{F}'$ di $\mathbb{K}$ che sia un sottoinsieme proprio di $\mathbb{K}$. Per esempio, consideriamo il campo $\mathbb{Q}(X_1, X_2, \dots)$ delle funzioni razionali su $\mathbb{Q}$ nelle indeterminate $X_1, X_2, \dots$, e il campo $\mathbb{Q}(X_2, X_3, \dots)$ delle funzioni razionali su $\mathbb{Q}$ nelle indeterminate $X_2, X_3, \dots$. È chiaro che $\mathbb{Q}(X_2, X_3, \dots) \subset \mathbb{Q}(X_1, X_2, \dots)$, tuttavia i due campi sono isomorfi tra loro, poiché si può definire la funzione ϕ, tale che $\phi(r) = r$ per ogni $r \in \mathbb{Q}$ e $\phi(X_i) = X_{i+1}$, e verificare facilmente che si tratta di un isomorfismo tra i due campi.

Definizione 6.3.3 (Estensione ordinata di campi)**.** *Siano $\mathbb{F}$ e $\mathbb{K}$ campi ordinati. Si dice che $\mathbb{K}$ è un'estensione ordinata di $\mathbb{F}$ se esiste un sottocampo $\mathbb{F}'$ di $\mathbb{K}$ ordinatamente isomorfo a $\mathbb{F}$.*

Definizione 6.3.4 (Estensione ordinata propria di campi)**.** *Siano $\mathbb{F}$ e $\mathbb{K}$ campi ordinati. Se $\mathbb{K}$ è un'estensione ordinata di $\mathbb{F}$, essa si dirà propria se non esistono isomorfismi ordinati tra $\mathbb{F}$ e $\mathbb{K}$.*

Ancora, è importante notare che non è sufficiente avere un isomorfismo ordinato tra $\mathbb{F}$ e un sottocampo $\mathbb{F}'$ di $\mathbb{K}$ che sia sottoinsieme proprio di $\mathbb{K}$ per dire che l'estensione è propria. Ciò può essere visto semplicemente munendo opportunamente i campi $\mathbb{Q}(X_1, X_2, \dots)$ e $\mathbb{Q}(X_2, X_3, \dots)$ di un ordinamento e considerando lo stesso isomorfismo ϕ visto sopra. Questa volta, però, se i campi sono archimedei, si verifica che la condizione su esposta è sufficiente:

Proposizione 6.3.1. *Siano $\mathbb{F}$ e $\mathbb{K}$ campi ordinati archimedei. Il campo ordinato $\mathbb{K}$ è un'estensione ordinata propria di $\mathbb{F}$ se e solo se $\mathbb{F}$ è ordinatamente isomorfo a un sottocampo $\mathbb{F}'$ di $\mathbb{K}$ che sia un sottoinsieme proprio di $\mathbb{K}$.*

Dimostrazione. $\boxed{\Rightarrow}$ Se $\mathbb{K}$ è un'estensione ordinata propria di $\mathbb{F}$, allora esiste un sottocampo $\mathbb{F}'$ di $\mathbb{K}$ ordinatamente isomorfo a $\mathbb{F}$, ma $\mathbb{F}$ e $\mathbb{K}$ non possono essere ordinatamente isomorfi tra loro: ne segue banalmente che $\mathbb{F}'$ è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{K}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Per ipotesi, esiste un isomorfismo ordinato $\sigma\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}'$, con $\mathbb{F}'$ sottocampo di $\mathbb{K}$ e $\mathbb{F}' \neq \mathbb{K}$. Tenuto conto di questo isomorfismo, per dimostrare che non esistono isomorfismi ordinati tra $\mathbb{F}$ e $\mathbb{K}$ sarà sufficiente dimostrare che non esistono isomorfismi ordinati tra $\mathbb{F}'$ e $\mathbb{K}$. Supponiamo dunque, per assurdo, che esista un tale isomorfismo ordinato $\psi\colon \mathbb{F}' \to \mathbb{K}$. Scegliamo un elemento $y \in \mathbb{K}\setminus\mathbb{F}'$ e determiniamo quell'unico elemento x di $\mathbb{F}'$ tale che $x = \psi^{-1}(y)$. Chiaramente, per come è stato scelto y, si ha $x \neq y$.

Sia $x < y$. Essendo $\mathbb{K}$ archimedeo, per il Lemma 6.1.1 si ha che esiste un razionale r tale che:

$$x < r < y$$

Ricordando infine che ogni omomorfismo tra campi ordinati induce l'identità sul sottocampo dei razionali, dalla prima delle precedenti disuguaglianze si ha:

$$\psi(x) < \psi(r) = r$$

Ricordando che $y = \psi(x)$ otteniamo l'assurdo:

$$\psi(x) < r < \psi(x)$$

Ragionando analogamente per il caso $x > \psi(x)$ si conclude che non $\mathbb{F}'$ e $\mathbb{K}$ non possono essere isomorfi, per cui neanche $\mathbb{F}$ e $\mathbb{K}$ possono esserlo. $\square$

Dopo questa premessa possiamo definire con maggior precisone il significato dell'*Axiom der Vollständigkeit*:

Definizione 6.3.5 (Axiom der Vollständigkeit)**.** *Sia $\mathbb{F}$ un campo ordinato archimedeo. Esso verifica l'*Axiom der Vollständigkeit *se non ammette estensioni ordinate proprie che siano archimedee.*

Siamo ora pronti a dimostrare l'equivalenza tra tale assioma e le nozioni di continuità viste nei capitoli precedenti:

Lemma 6.3.1. *Se $\mathbb{F}$ è un campo ordinato che sia ordinatamente isomorfo a un campo $\mathcal{D}$-completo $\mathbb{R}$, allora $\mathbb{F}$ è $\mathcal{D}$-completo.*

Dimostrazione. Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{F}$ non vuoto e superiormente limitato. Detto ϕ l'isomorfismo ordinato tra $\mathbb{F}$ e $\mathbb{R}$, si ha che $\phi(E)$ è un insieme di $\mathbb{R}$ non vuoto, in quanto E stesso è non vuoto, e limitato superiormente perché, detto m un maggiorante per E, per ogni $x \in E$ si ha:

$$x \leq m$$

e di conseguenza

$$\phi(x) \leq \phi(m)$$

per cui $\phi(E)$ è maggiorato da $\phi(m)$. Essendo $\mathbb{R}$ completo, esiste l'estremo superiore di $\phi(E)$, chiamiamolo ξ. È immediato verificare che $\phi^{-1}(\xi)$ è l'estremo superiore di E. Infatti, scelto un elemento $a \in E$, si ha che:

$$\phi(a) \leq \xi \implies a \leq \phi^{-1}(\xi)$$

quindi $\phi^{-1}(\xi)$ è maggiorante per E. Inoltre, scelto $\epsilon \in \mathbb{F}$, $\epsilon > 0$, si ha:

$$\phi(\phi^{-1}(\xi) - \epsilon) = \xi - \phi(\epsilon)$$

Poiché ξ è estremo superiore per $\phi(E)$, e poiché $\phi(\epsilon) > 0$, esiste un elemento $a \in E$, tale che:

$$\xi - \phi(\epsilon) < \phi(a) \leq \xi$$

da cui si ottiene:

$$\phi^{-1}(\xi) - \epsilon < a \leq \phi^{-1}(\xi)$$

per cui $\phi^{-1}(\epsilon)$ è estremo superiore per $\mathbb{F}$, che risulta pertanto $\mathcal{D}$-completo. $\square$

Teorema 6.3.1. *Un campo ordinato archimedeo $\mathbb{F}$ soddisfa l'*Axiom der Vollständigkeit *se e solo se è $\mathcal{D}$-completo.*

Dimostrazione. $\boxed{\Rightarrow}$ Sia $\mathbb{F}$ un campo ordinato archimedeo che soddisfi l'*Axiom der Vollständigkeit*. Per il Teorema di Hilbert 6.2.1 esiste un omomorfismo ordinato tra $\mathbb{F}$ e un modello qualsiasi $\mathbb{R}$ di numeri reali. Dunque $\mathbb{F}$ è isomorfo a un sottocampo $\phi(\mathbb{F})$ di $\mathbb{R}$, ovvero $\mathbb{R}$ è una estensione ordinata di $\mathbb{F}$. Poiché anche $\mathbb{R}$ è archimedeo, se fosse $\phi(\mathbb{F}) \subset \mathbb{R}$ si avrebbe, in virtù della Proposizione 6.3.1, che $\mathbb{R}$ è una estensione ordinata propria e archimedea di $\mathbb{F}$, contro l'ipotesi che $\mathbb{F}$ soddisfa l'*Axiom der Vollständigkeit*. Pertanto deve essere $\phi(\mathbb{F}) = \mathbb{R}$ e quindi $\mathbb{F}$ è ordinatamente isomorfo a $\mathbb{R}$: segue dal Lemma 6.3.1 che $\mathbb{F}$ è $\mathcal{D}$-completo.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si ora $\mathbb{F}$ un campo ordinato $\mathcal{D}$-completo, quindi archimedeo. Detta $\mathbb{K}$ un'estensione ordinata e archimedea di $\mathbb{F}$, bisogna dimostrare che essa non può essere propria. Detto ψ l'omomorfismo ordinato tra $\mathbb{F}$ e $\mathbb{K}$, in virtù del Lemma 6.3.1 si ha che $\psi(\mathbb{F})$ è un sottocampo $\mathcal{D}$-completo di $\mathbb{K}$. Pertanto, per il Teorema di Hilbert 6.2.1, esiste un omomorfismo ordinato ϕ tra $\mathbb{K}$ e $\psi(\mathbb{F})$. Quindi $\mathbb{K}$ è ordinatamente isomorfo a $\phi(\mathbb{K})$ e si hanno le seguenti inclusioni:

$$\phi(\mathbb{K}) \subseteq \psi(\mathbb{F}) \subseteq \mathbb{K}$$

Se una delle due inclusioni fosse stretta, si avrebbe:

$$\phi(\mathbb{K}) \subset \mathbb{K}$$

e, per la Proposizione 6.3.1, si avrebbe che $\mathbb{K}$ è un'estensione ordinata propria di $\phi(\mathbb{K})$, contro il fatto che $\mathbb{K}$ e $\phi(\mathbb{K})$ sono ordinatamente isomorfi tra loro. Si deve dunque avere:

$$\phi(\mathbb{K}) = \psi(\mathbb{F}) = \mathbb{K}$$

sicché, sempre per la Proposizione 6.3.1, $\mathbb{K}$ non può essere un'estensione propria di $\mathbb{F}$. Se ne deduce che $\mathbb{F}$ soddisfa l'*Axiom der Vollständigkeit*. $\square$

Alcune considerazioni conclusive

Siamo giunti alla fine di un lungo viaggio durato all'incirca 2500 anni. Molta strada è stata fatta dai tempi in cui il povero Ippaso dovette subire le ire divine a causa di una scoperta che si sarebbe rivelata vitale per lo sviluppo dell'analisi matematica e, di conseguenza, per la modellizzazione matematica della realtà fisica. Nel corso dell'esposizione abbiamo visto come l'idea intuitiva di continuità può essere formalizzata in diversi modi equivalenti tra loro. Ciascuna di queste formalizzazioni rispecchia una caratteristica, si direbbe quasi un attributo, che la nostra intuizione accorda alla retta geometrica.

La continuità enunciata da Dedekind esprime l'idea di una connessione che rende i punti della retta ben coesi tra loro: se la si "spezza" in due semirette, ci sarà sempre uno e un solo punto che costituirà, per così dire, un punto di contatto tra le due parti. L'esposizione di Cantor, invece, rimanda a un'idea di completezza, nel senso che, se una successione di punti razionali sulla retta è tale che le distanze mutue tra essi vadano diminuendo man mano che si considerino termini della successione di indice sempre più alto, allora l'intuizione ci suggerisce che tali punti tendono ad "addensarsi" da qualche parte sulla retta: la richiesta che la retta sia continua in questo caso ci porta ad affermare che essi si "addensano" attorno a un punto ben definito. Un'idea simile a questa emerge dalla proprietà degli intervalli imbottigliati: essa richiede che, considerando intervalli inscatolati di lunghezza via via decrescente e tendente a zero, non sia possibile trovare dei "buchi" sulla retta, bensì al termine del processo si individuerà un unico punto su di essa. Infine, la presentazione assiomatica di Hilbert esprime l'idea di un insieme completo nel senso che non può ulteriormente venire esteso pur conservando tutte le proprietà di cui gode.

Tutte queste caratterizzazioni sono, come s'è visto, equivalenti. Ciascuna di esse si presta a mettere bene in evidenza in maniera naturale alcune caratteristiche, mentre ne lascia più in ombra altre, che devono così essere dimostrate in maniera più o meno laboriosa. Per esempio, nella costruzione di Cantor la struttura di campo emerge in maniera assai naturale, mentre bisogna faticare alquanto per arrivare a definire un ordinamento per poi dimostrare la completezza nel senso di Dedekind. Al contrario, nell'approccio mediante le sezioni risulta pressoché immediato individuare una struttura d'ordine tale che ogni insieme non vuoto e superiormente limitato ammetta estremo superiore, ma il prezzo da pagare è un notevole appesantimento nel definire le operazioni di somma e prodotto, e nel dimostrare le proprietà di campo e la completezza nel senso metrico.

Le costruzioni di Cantor e Dedekind costituiscono il coronamento della stagione dell'aritmetizzazione dell'analisi, con il quale il problema dell'esistenza dei numeri reali viene ricondotto a quello dell'esistenza dei numeri naturali. Di certo quest'ultimo problema non era meno spinoso; tuttavia, mediante questa riduzione, denominata *metodo genetico*, si sperava di ricondurre una molteplicità di problematiche ontologiche a una sola. Gli sviluppi successivi della matematica, però, hanno in qualche modo attenuato tali pretese, come mostreremo brevemente.

In primo luogo, bisogna considerare che a cavallo tra Ottocento e Novecento si viene a determinare un mutamento importante nella concezione del metodo assiomatico e del concetto di *esistenza* in matematica. Emblematico di questo cambiamento è lo scambio epistolare avvenuto tra Frege e Hilbert tra il 1899 e il 1900, avviatosi subito dopo la pubblicazione dei *Grundlagen der Geometrie* hilbertiani[6].

Frege, nel leggere l'opera di Hibert, è disorientato dalla terminologia utilizzata, e gli scrive:

> *Nel paragrafo 6 Lei dice: «Gli assiomi di questo gruppo definiscono il concetto di congruenza o del movimento». Ma allora, perché mai essi non vengono chiamati definizioni?*

e continua:

> *Resta [...] anche oscuro che cosa Lei chiami punto. A tutta prima vien fatto di pensare ai punti nel senso della geometria euclidea, e la Sua affermazione – che gli assiomi esprimono fatti fondamentali della nostra intuizione – conferma tale opinione. In seguito però Lei intende per punto una coppia di numeri. Resto dubbioso di fronte alle affermazioni che per mezzo degli assiomi della geometria si raggiunge la descrizione completa e precisa delle relazioni, e che gli assiomi definiscono il concetto del "fra". Con ciò si ascrive agli assiomi qualcosa che è compito delle definizioni. Così facendo vengono – a mio*

[6]I brani di seguito citati sono tratti da [Lolli 2004].

> *parere – seriamente confusi i confini tra assiomi e definizioni, e accanto al significato tradizionale della parola "assioma" – quale risulta nell'affermazione che gli assiomi esprimono fatti fondamentalli dell'intuizione – mi sembra ne affiori un secondo, che preraltro non mi riesce di cogliere esattamente.*

Per Frege, le definizioni sono delle stipulazioni mediante le quali viene attribuito a un segno o a una espressione un significato. Gli assiomi invece, stabiliscono delle verità evidenti relative agli enti descritti dalle definizioni; inoltre, se crediamo che gli assiomi descrivano una realtà esterna e siano veri, allora non potranno che essere coerenti:

> *[Gli assiomi] non possono contenere nessuna parola e segno di cui non siano già completamente fissati in precedenza il senso e il significato o il contributo all'espressione del pensiero, cosicché non rimanga alcun dubbio sul senso dell'enunciato [...] Assiomi e teoremi non possono dunque mai stabilire per la prima volta il significato di un segno o di una parola che ricorra in essi.*
>
> *Attribuisco il nome di assiomi a enunciati che sono veri, ma che non vengono dimostrati perché la loro conoscenza scaturisce da una fonte conoscitiva di natura extralogica, che possiamo chiamare intuizione spaziale. Il fatto che gli assiomi siano veri ci assicura di per sé che essi non si contraddicono tra loro, e ciò non abbisogna di alcuna ulteriore dimostrazione.*

Ma nella risposta di Hilbert emerge il mutamento di visione:

> *Lei dice: «Sono di tutt'altro tipo le spiegazione del paragrafo 1, nel quale i significati delle parole, punto, retta [...] non vengono indicati, ma presupposti come noti». Proprio qui si trova il punto cardinale dell'equivoco. Io non voglio presupporre nulla come noto; io vedo nella mia spiegazione del paragrafo 1 la definizione dei concetti di punto, retta, piano, se si tornano ad assumere come note caratteristiche*[7] *tutti gli assiomi dei gruppi I-V. Se si cercano altre definizioni di "punto", ricorrendo per esempio a perifrasi come "privo di estensione" etc., si capisce che debbo oppormi nel modo più deciso a siffatti tentativi; si va infatti alla ricerca di qualcosa là dove non la si potrà mai trovare, per il semplice motivo che non è là dove la si cerca.*

Per quanto riguarda l'affermazione di Frege circa la verità degli assiomi, Hilbert continua:

[7]Nella terminologia del tempo, le note caratteristiche costituivano delle condizioni che permettevano di riconoscere se un oggetto soddisfaceva o no a una definizione.

> *Mi ha molto interessato leggere nella Sua lettera proprio questa frase, poiché io, da quando ho cominciato a riflettere, scrivere e tenere conferenze su questo argomento, ho sempre detto esattamente il contrario: se assiomi arbitrariamente stabiliti non sono in contraddizione, con tutte le loro conseguenze, allora essi sono veri, allora esistono gli enti definiti per mezzo di quegli assiomi. Questo è per me il criterio della verità e dell'esistenza.*
>
> *A dire il vero, questa concezione è la chiave per la comprensione non solo del mio volume, ma anche, per esempio, della conferenza sugli assiomi dell'aritmetica che ho di recente tenuto a Monaco, nella quale sviluppavo, o per lo meno accennavo alla dimostraione, del fatto che* esiste *un sistema di tutti i numeri reali ordinari, mentre, al contrario,* non esiste *il sistema di tutte le potenze cantoriane, o se si vuole di tutti gli aleph; cosa del resto che anche Cantor afferma nello stesso senso, sia pure con parole leggermente diverse.*

Ancora, in relazione alla critica di utilizzare definizioni diverse di punto, scrive:

> *Lei dice [...] che ad esempio "fra" è concepito in modo diverso a pagina 20 e che ivi il punto è una coppia di numeri. Certamente, si comprende da sé che ogni teoria è solo un telaio, uno schema di concetti unitamente alle loro mutue relazioni necessarie, e che gli elementi fondamentali possono venir pensati in modo arbitrario.*
>
> *Se con i miei punti voglio intendere un qualunque sistema di enti, per esempio il sistema: amore, legge, spazzacamino [...], allora basterà che assuma tutti i miei assiomi come relazioni tra questi enti perché le mie proposizioni, per esempio il teorema di Pitagora, valgano anche per essi. In altre parole: ogni teoria può essere sempre applicata a infiniti sistemi di elementi fondamentali. Anzi occorre soltanto applicare una trasformazione biunivoca e convenire che gli assiomi per gli enti trasformati debbano essere uguali a quelli che valgono per i loro corrispondenti. Di fatto anche questa circostanza si applica sovente, ad esempio col principio di dualità etc., e io l'applico alle mie dimostrazioni di indipendenza. Tutti gli enunciati di una teoria dell'elettricità valgono naturalmente anche per ogni altro sistema di enti che si sostituiscano al posto dei concetti magnetismo, elettricità [...], purché siano soddisfatti gli assiomi richiesti.*

Da questo scambio emerge chiaramente come, secondo la concezione di Hilbert, non è la verità a garantire la non contraddittorietà ma, al contrario, è la non contraddittorietà a garantire al verità e, di conseguenza, l'esistenza. Tale tesi, che all'epoca di questo carteggio si trova ancora a uno stadio embrionale, troverà la sua controparte formale nel teorema di esistenza del modello, conseguenza del teorema di completezza di Gödel.

Tornando quindi al problema dell'esistenza del campo dei numeri reali, si capisce come essa dovesse essere ricondotta alla loro coerenza; ma, nell'ambito dello spirito riduzionista dell'aritmetizzazione, ciò significava dimostrare la coerenza del sistema dei numeri naturali. Ora, il cosiddetto metodo genetico, che consente la progressiva costruzione degli insiemi numerici a partire dai numeri naturali, fino ad arrivare, mediante il modello di Dedekind o quello di Cantor, ai numeri reali, presuppone in realtà che tale riduzione avvenga nel quadro della teoria degli insiemi; e l'insieme $\mathbb{N}$ stesso è definibile all'interno di tale teoria. Considerando tutti i paradossi e il vespaio di questioni logiche che tale teoria ha suscitato nel corso del suo sviluppo, e tenuto conto del fatto che della sua versione assiomatica oggi ampiamente condivisa dalla comunità dei matematici – la teoria di Zermelo-Fraenkel – non si è in grado di dimostrare la coerenza, si comprende come non c'è nessun vantaggio da un punto di vista logico nel presentare i numeri reali come costruiti a partire dai numeri naturali piuttosto che darne una definizione assiomatica diretta come, per esempio, quella data da Hilbert.

Da un punto di vista didattico, tuttavia, i diversi modi in cui ci si può avvicinare ai numeri reali possono non risultare equivalenti tra loro, in quanto essi mettono in maggiore evidenza determinate proprietà a scapito di altre, e presentano difficoltà di approccio differenti.

Nella tradizione scolastica italiana, per esempio, fino agli anni '70 del secolo scorso, è prevalso un approccio di tipo costruttivo, privilegiando il modello di Dedekind o al più la costruzione mediante coppie di classi contigue di numeri razionali, sostanzialmente equivalente al primo. Quest'ultima presentazione ha avuto un certo successo in Italia in seguito al suo utilizzo da parte del matematico Capelli[8]. Di questa prassi didattica è ancora possibile trovare traccia, per esempio, in [Palatini-Faggioli 1968]. Tali trattazioni, tuttavia, seppure hanno il pregio della sistematicità, si sono rivelate alquanto difficili da recepire a un livello scolare che si pone tra la prima e la seconda classe della scuola secondaria di secondo grado. Nel corso del tempo si è così assistito a una progressiva rinuncia di una trattazione sistematica, giudicata troppo astratta per il livello di sviluppo cognitivo e per la scarsa maturità disciplinare dei discenti. Per esempio, in [Battelli 1995] i numeri reali vengono presentati in maniera più euristica, partendo dalla problematica dell'incommensurabilità e dell'esistenza delle radici n-esime, e mostrando come si possano di volta in volta cercare delle approssimazioni razionali che vanno a costituire una coppia di classi contigue. Si definisce così un numero irra-

[8][Capelli 1895].

zionale come una coppia di tali classi. Infine, il postulato di continuità della retta viene presentato sotto forma di proprietà degli intervalli imbottigliati, e da questo si mostra come si possa istituire una corrispondenza biunivoca tra i punti della retta e l'insieme dei numeri reali. Il tutto viene presentato senza pretesa di sistematicità e rigore. A livello universitario, invece, viene ormai pressoché sistematicamente privilegiato l'approccio assiomatico.

Nella presente tesi non ci si è voluti pronunciare a favore di un tipo di presentazione dei numeri reali in particolare, né da un punto di vista epistemologico né tantomeno in una prospettiva didattica. Tuttavia, si ritiene che, quali che siano le scelte didattiche effettuate, la consapevolezza della pluralità di approcci, con tutta la ricchezza di problematiche che da essi deriva, presentate nel loro sviluppo storico-critico, costituisca condizione imprescindibile per una comprensione matura e di ampio respiro culturale. A ciò si aggiunga che la comprensione di un concetto matematico, come è stato già sottolineato nel Capitolo 1, passa attraverso la padronanza di tutte le rappresentazioni semiotiche che di esso si danno: se ciascuna di esse getta una luce parziale sull'oggetto della nostra indagine, nell'insieme di esse, pur nella loro diversità e talvolta incompatibilità, si coglie quel *quid* che caratterizza il concetto matematico stesso. E se da un lato si potrebbe obiettare che una tale prospettiva solleva tutta una pluralità di problematiche, dall'altro si potrebbe rispondere con Cantor che:

> *In re mathematica ars proponendi quaestionem pluris facienda est quam solvendi.*[9]

[9] *In matematica l'arte di porre problemi deve essere tenuta in maggiore considerazione rispetto a quella di risolverli.* Questa è la tesi difesa dal giovane Cantor il giorno in cui conseguì il dottorato, nel 1867.

Bibliografia

[Amir-Moez 1963] A. R. AMIR-MOEZ, *A paper of Omar Khayyam*, *Scripta Mathematica*, 26, 1963.

[Aristotele Metafisica] ARISTOTELE, *Metafisica*, a cura di C. A. Viano, Torino, UTET, 2005.

[Battelli 1995] M. BATTELLI, *Corso di matematica sperimentale e laboratorio. Per le scuole superiori*, Milano, Le Monnier, 1995.

[Boyer 1968] C. B. BOYER, *A History of Mathematics*, s. l., John Wiley & Sons, 1968 (s. l., ISEDI, 1976).

[Cantor Scritti 1872-1899] G. CANTOR, *La formazione della teoria degli insiemi (Scritti 1872-1899)*, a cura di G. RIGAMONTI, note di E. ZERMELO, Milano, Mimesis Edizioni, 2012.

[Capelli 1895] A. CAPELLI, *Lezioni di algebra complementare: ad uso degli aspiranti alla licenza universitaria in scienze fisiche e matematiche*, Napoli, B. Pellerano, 1895.

[Dedekind 1901] R. DEDEKIND, *Essays on the theory of numbers. I: Continuity and irrational numbers. II: The nature and meaning of numbers*, authorized translation by Wooster Woodruff Beman, Chicago, The Open Court Publishing Company, 1901.

[Duval 1993] R. DUVAL, *Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 1993.

[Euclide Elementi] EUCLIDE, *Gli Elementi*, a cura di A. Frajese - L. Maccioni, collezione *Classici della scienza* diretta la L. Geymonat, Torino, UTET, 1970.

[Eulero 1770] L. EULER, *Vollstädige Anleitung zur nieder und höheren Algebra*, in *Opera Omnia*, Leipzig, Teubner e O. Füssli, 1911.

[Fiori-Invernizzi 2009] C. FIORI - S. INVERNIZZI, *Numeri Reali*, Bologna, Pitagora Editrice, 2009.

[Frajese 1968] A. FRAJESE, *Il sesto postulato di Euclide*, in *Periodico di matematiche*, n. 1-2, 1968.

[Galilei 1638] G. GALILEI, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica e i movimenti locali*, Leida, Ludovico Elzeviro, 1638.

[Halmos 1960] P. R. HALMOS, *Naive Set Theory*, Princeton, D. Van Nostrand Company, 1960 (Milano, Feltrinelli, 1974).

[Hilbert 1900] D. HILBERT, *Über den Zahlbegriff*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 8, pp. 180-184.

[Heiberg 1883] I. L. HEIBERG, *Euclidis Elementa*, in *Euclidis Opera Omnia*, Lipsia, Aedes B. G. Teubneri, 1883.

[Itard 1964] J. ITARD, *Les livres arithmétiques d'Euclide*, Revue d'histoire et de leurs applications, 1964.

[Kuhn 1962] T. KUHN, *The structure of scientific revolutions*, Chicago, Chicago University Press, 1962.

[Neugebauer 1952] O. NEUGEBAUER, *The Exact Sciences in Antiquity*, Princeton, Princeton University Press, 1952.

[Landau 1930] E. LANDAU, *Grundlagen der Analysis (Das Rechnen mit Ganzen, Rationalen, Irrationalen, Komplexen Zahlen)*, Akademische Verlagsgesellschaft M. B. H., Leipzig, 1930; trad. inglese *Foundation of Analysis. The Arithmetic of Whole, Rational, Irrational and Complex Numbers*, New York, Chelsea Publishing Co., 1951, 2001.

[Lolli Fondamenti] G. LOLLI, *La questione dei fondamenti tra matematica e filosofia*, articolo reperibile su http://homepage.sns.it/lolli/articoli.htm

[Lolli 2004] G. LOLLI, *Da Euclide a Gödel*, Bologna, Società editrice il Mulino, 2004.

[Lolli 2015] G. LOLLI, *Numeri. La creazione continua della matematica*, Torino, Bollati Boringhieri, 2015.

[Palatini-Faggioli 1968] A. PALATINI - V. FAGGIOLI, *Elementi di algebra per licei scientifici*, Milano, Ghisetti & Corvi, 1968.

[Proclo Commento] PROCLO, *In primum Euclidis Elementorum librum commentarii*, a cura di Maria Timpanaro Cardini, Pisa, Giardini, 1978.

[Seidenberg Counting 1962] A. SEIDENBERG, *The Ritual Origin of Counting*, Archive for History of Exact Sciences, 1962.

[Seidenberg Geometry 1962] A. SEIDENBERG, *The Ritual Origin of Geometry*, Archive for History of Exact Sciences, 1962.

[Struik 1958] D. J. STRUIK, *Omar Khayyam Mathematician*, in *The Mathematics Teacher*, 51, 1958.

[Tannery 1912] P. TANNERY, *Mémoires scientifiques*, Parigi, Gauthier-Villars, 1912-1950.

[Van Der Waerden 1961] B. L. VAN DER WAERDEN, *Science Awakening*, New York, Oxford University Press, 1961.

[Whitehead 1925] A. N. WHITEHEAD, *Science and Modern World*, s. l., Macmillan, 1925 (Torino, Bollati Boringhieri, 1979).

[Wittgenstein 1953] L. J. J. WITTGENSTEIN, *Philosophische Untersuchungen*, Oxford, G.E.M. Anscombe e R. Rhees, 1953 (Torino, Einaudi, 1967).

SITOGRAFIA:

[MacTutor History of Mathematics] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/

[Ofman 2013] https://webusers.imj-prg.fr/~salomon.ofman/, si veda specificamente la sezione *A course in History of Greek Mathematics (Pythagoras-Eudoxus)*, Bologne, October 2013.

Elenco delle figure