

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

## Analisi spettrale di operatori differenziali

**Relatore:**  
Prof.ssa Elisa Ercolessi

**Presentata da:**  
Michael Pasqua

Anno Accademico 2015/2016



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>4</b>
<b>1 Operatori differenziali</b>	<b>6</b>
1.1 Operatori differenziali . . . . .	6
1.1.1 Autoaggiunzione su $\mathbb{R}$ . . . . .	7
1.2 Autoaggiunzione su restrizioni dell'asse reale . . . . .	7
1.2.1 Operatore impulso . . . . .	9
1.2.2 Operatore hamiltoniano . . . . .	9
<b>2 Spettri</b>	<b>12</b>
2.1 Operatore risolvente . . . . .	12
2.1.1 Operatori chiusi . . . . .	13
2.1.2 Operatori limitati . . . . .	17
2.1.3 Operatore moltiplicativo . . . . .	20
2.2 Classificazione dello spettro . . . . .	22
2.2.1 Spettro dell'operatore di creazione e distruzione . . . . .	23
2.3 Analisi spettrale . . . . .	25
2.3.1 Spettro dell'operatore laplaciano . . . . .	26
2.3.2 Spettro dell'operatore impulso . . . . .	27
2.3.3 Sistema unidimensionale di due particelle . . . . .	27
<b>3 Sistemi di Sturm-Liouville</b>	<b>30</b>
3.1 Operatori illimitati con risolvente compatto . . . . .	30
3.2 Operatore di Sturm-Liouville . . . . .	31
3.2.1 Proprietà dei sistemi di Sturm-Liouville . . . . .	33
3.3 Esempi di sistemi di Sturm-Liouville . . . . .	37
3.3.1 Conduzione del calore . . . . .	37
3.3.2 Guide d'onda . . . . .	40
3.4 Applicazioni delle guide d'onda . . . . .	44
<b>Conclusioni</b>	<b>45</b>

<b>Appendice A Elementi di teoria degli operatori in uno spazio di Hilbert</b>	<b>46</b>
Appendice . . . . .	46
A.1 Operatori lineari . . . . .	46
A.1.1 Invertibilità . . . . .	47
A.1.2 Continuità . . . . .	47
A.1.3 Norma e limitatezza . . . . .	48
A.1.4 Operatori aggiunti e autoaggiunti . . . . .	48
A.1.5 Operatori chiusi . . . . .	50
 <b>Bibliografia</b>	 <b>54</b>
 <b>Ringraziamenti</b>	 <b>55</b>

# Introduzione

Lo scopo di questo elaborato è di fornire un'analisi degli operatori differenziali, i quali a seguito dell'avvento della meccanica quantistica svolgono un ruolo fondamentale nella descrizione di tutte quelle grandezze misurabili che classicamente sono rappresentate da funzioni continue e derivabili che hanno come dominio lo spazio delle fasi. Una condizione fondamentale che a livello quantistico gli operatori devono soddisfare è l'autoaggiunzione. La motivazione di tale richiesta deriva dal fatto che classicamente un osservabile può assumere con continuità qualunque valore reale, mentre in meccanica quantistica, i valori possibili vengono discretizzati e corrispondono agli autovalori. L'unica proprietà che garantisce che questi ultimi siano reali è proprio l'autoaggiunzione, la quale è fortemente influenzata dalle condizioni al contorno che vengono imposte. Come è stato detto precedentemente gli operatori a cui noi siamo interessati sono quelli differenziali, ovvero quelli che agiscono sulle funzioni mediante operazioni di derivazione. Lo spazio su cui agiscono tali operatori non è lo spazio di funzioni che viene adottato classicamente, ma lo spazio delle distribuzioni (funzioni generalizzate), in quanto in esso l'esistenza delle derivate è sempre garantita. In questo particolare spazio vivono "funzioni" speciali come la delta di Dirac (indicata con il simbolo  $\delta(x)$ ). Nel primo capitolo viene analizzata l'autoaggiunzione di alcuni operatori differenziali notevoli quali il laplaciano, l'hamiltoniano e l'impulso. Nel secondo capitolo procediamo con l'analisi alla luce del concetto di spettro e delle sue proprietà. Gli spettri permettono di comprendere come le condizioni al contorno determinano fortemente la natura degli autovalori e quindi la candidabilità degli operatori a osservabili.

Ricordiamo che la teoria spettrale è stata sviluppata inizialmente da Hilbert come un ambito puramente matematico e solo successivamente è stata adottata in campo fisico portando numerosi progressi (primo tra i quali lo sviluppo del modello atomico). Nell'ultimo capitolo vengono introdotti gli operatori di Sturm-Liouville per proseguire con l'analisi degli operatori differenziali (quindi illimitati) imponendo ora la condizione del risolvibile compatto. Le equazioni differenziali associate a questi operatori sono molto comuni in fisica matematica e godono della proprietà di poter essere rese autoaggiunte. Come nei casi precedenti l'autoaggiunzione garantisce autovalori reali e l'esistenza di una base ortogonale di autovettori. Introducendo, come prassi per gli operatori differenziali, le condizioni al contorno, è possibile ottenere i sistemi di Sturm-Liouville che vengono

impiegati per modellizzare alcune applicazioni fisiche, di cui in questo elaborato, vengono presentate solamente due esempi: la conduzione del calore e le guide d'onda. Di entrambi viene studiata la soluzione con condizioni al contorno diverse.

# Capitolo 1

## Operatori differenziali

In questo capitolo vogliamo introdurre il concetto di operatore differenziale, in particolare viene prestata particolare attenzione all'operatore laplaciano, di cui è studiata l'autoaggiunzione su alcuni domini. Viene inoltre analizzato l'operatore impulso per un dominio parzialmente limitato e viene introdotto nell'ultimo paragrafo l'operatore hamiltoniano che viene ripreso successivamente per lo studio di un sistema fisico.

### 1.1 Operatori differenziali

Vogliamo definire ora in  $L^2(\mathbb{R})$  un operatore differenziale che associa ad una funzione la sua derivata seconda. Per semplicità consideriamo il caso unidimensionale.

$$\phi(x) \longrightarrow \frac{d^2}{dx^2}\phi(x) \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

Assumiamo che la funzione appartenga  $L^2(\mathbb{R})$ . Nulla garantisce l'esistenza delle derivate. Per risolvere questo problema consideriamo la derivata distribuzionale che può essere sempre definita.

Per fare questo è necessario considerare la funzione  $\phi(x)$  come una distribuzione (in  $\mathcal{S}'$  o  $\mathcal{D}'$ ). La derivata distribuzionale  $\phi''$  viene definita come:

$$\langle \phi'', \psi \rangle = \langle \phi, \psi'' \rangle$$

Dove  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  oppure  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Assumiamo che la funzione e la sua derivata seconda appartengano entrambe a  $L^2(\mathbb{R})$ . Il dominio dell'operatore è il seguente:

$$\mathcal{D} \left( \frac{d^2}{dx^2} \right) = \{ u \in L^2(\mathbb{R}); u'' \in L^2(\mathbb{R}) \}$$

Dove  $u''$  rappresenta la derivata distribuzionale.

Per questo operatore devono valere le seguenti proprietà:

- Se  $f \in \mathcal{D}$  allora  $f'' \in L^2(\mathbb{R})$

Dove, con la notazione  $\mathcal{D}$  si indica lo spazio delle distribuzioni.

-Prese  $f, g \in \mathcal{D}$  allora  $\alpha f + \beta g \in \mathcal{D}$

Il dominio scelto e di conseguenza anche le condizioni al contorno determinano degli operatori completamente differenti.

### 1.1.1 Autoaggiunzione su $\mathbb{R}$

Valutiamo l'autoaggiunzione dell'operatore laplaciano nello spazio  $L^2(-\infty, +\infty)$ , imponendo che il dominio sia il seguente:

$$\mathcal{D} = \{f \in L^2(-\infty, +\infty) : f'' \in L^2(-\infty, +\infty)\}$$

Il dominio implica che anche la derivata prima della distribuzione appartiene allo spazio  $L^2(-\infty, +\infty)$ . Consideriamo il seguente prodotto scalare e integriamo per parti:

$$\langle f, \Delta g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)} g''(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} (\overline{f(x)} g'(x) - \overline{f'(x)} g(x)) + \langle \Delta f, g \rangle$$

Per verificare l'autoaggiunzione è necessario mostrare che il termine finito si annulla, ovvero che se  $f \in \mathcal{D}$ , ciò implica che  $f(x) \rightarrow 0$  per  $x$  che tende a  $\pm\infty$ . Questa considerazione non è valida in generale per una funzione di  $L^2(-\infty, +\infty)$ .

Consideriamo il caso per cui:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f''(x)|^2 < \infty$$

Possiamo rielaborare l'integrale richiamando la sommabilità della funzione e della sua derivata seconda, al fine di dimostrare che il contributo all'infinito è nullo. Per una trattazione più completa di questi passaggi analitici si rimanda al testo citato in [3].

Il risultato a cui giungiamo è che l'operatore laplaciano è autoaggiunto su tutto l'asse reale.

## 1.2 Autoaggiunzione su restrizioni dell'asse reale

Studiamo ora l'autoaggiunzione dell'operatore laplaciano su restrizioni dell'asse reale in cui vengono imposte particolari condizioni al contorno.



1) Consideriamo lo spazio di Hilbert  $L^2([a, b])$ , con  $a, b$  numeri reali. Dimostriamo l'autoaggiunzione dell'operatore laplaciano sui seguenti domini:

$$\mathcal{D}_\alpha = \{f \in L^2([a, b]); f'' \in L^2([a, b]), f(a) = f(b) = 0\}$$

$$\mathcal{D}_\beta = \{f \in L^2([a, b]); f'' \in L^2([a, b]), f'(a) = f'(b) = 0\}$$

$$\mathcal{D}_\gamma = \{f \in L^2([a, b]); f'' \in L^2([a, b]), f(b) = f(a)e^{\pm i\theta} = 0, f'(a)e^{\pm i\theta} = f'(b) = 0\}$$

posto ora  $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ , siano  $f \in \mathcal{D}_A$  e  $g \in \mathcal{D}_{A^\dagger}$ :

$$\begin{aligned} \langle \Delta^\dagger g, f \rangle &= \langle g, \Delta f \rangle = \int_a^b \overline{g(x)} f''(x) dx = \overline{g(x)} f'(x) \Big|_a^b - \int_a^b \overline{g'(x)} f'(x) dx = \\ &= (\overline{g(x)} f'(x) - \overline{g'(x)} f(x)) \Big|_a^b + \int_a^b \overline{g''(x)} f(x) dx = \\ \langle \Delta g, f \rangle &+ \overline{g(b)} f'(b) - \overline{g(a)} f'(a) - \overline{g'(b)} f(b) + \overline{g'(a)} f(a) = \langle \Delta g, f \rangle \end{aligned}$$

Vale la seguente relazione di autoaggiunzione:

$$\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_{A^\dagger}$$

se e solo se:

$$g(b) = g(a) = 0 \text{ quando } f(b) = f(a) = 0$$

$$g'(b) = g'(a) = 0 \text{ quando } f'(b) = f'(a) = 0$$

$$g(b) = g(a)e^{\pm i\theta} = 0 \quad g'(b) = g'(a)e^{\pm i\theta} = 0 \text{ quando } f(b) = f(a)e^{\pm i\theta}, f'(b) = f'(a)e^{\pm i\theta}$$

2) Consideriamo lo spazio di Hilbert  $L^2([0, +\infty])$ . Dimostriamo ora l'autoaggiunzione sul seguente dominio:

$$\mathcal{D} = \{f \in L^2([0, +\infty]) : f''(x) \in L^2([0, +\infty]), f'(0) = af(0)\}$$

siano  $f \in \mathcal{D}, g \in \mathcal{D}_\dagger$ :

$$\begin{aligned} \langle \Delta^\dagger g, f \rangle &= \langle g, \Delta f \rangle = \int_0^\infty \overline{g(x)} f''(x) dx = (\overline{g(x)} f'(x)) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \overline{g'(x)} f'(x) dx = \\ &= (\overline{g(x)} f'(x)) \Big|_0^\infty - (\overline{g'(x)} f(x)) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \overline{g''(x)} f(x) dx = \\ &= \langle \Delta g, f \rangle - \overline{g(0)} f'(0) + \overline{g'(0)} f(0) = \langle \Delta g, f \rangle \end{aligned}$$

Questa condizione è verificata se e solo se:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad f'(0) = af(0) \Rightarrow g'(0) = ag(0)$$

ciò implica che il dominio dell'operatore equivale a quello dell'aggiunto, quindi l'operatore è autoaggiunto.

### 1.2.1 Operatore impulso

In questo ultimo spazio di Hilbert vogliamo illustrare una particolarità che concerne l'operatore impulso in una dimensione:

$$p = -i\hbar \frac{d}{dx} \quad (1.1)$$

definito sul seguente dominio:

$$\mathcal{D}_p = \{f \in L^2([0, +\infty]) : f' \in L^2([0, +\infty]), f(0) = 0\} \quad (1.2)$$

Studiamo l'autoaggiunzione su  $\mathcal{D}_p$ :

$$\begin{aligned} \langle p^\dagger g, f \rangle &= \langle g, pf \rangle = \int_0^\infty \overline{g(x)} (-i\hbar f'(x)) dx = -i\hbar [\overline{g(x)} f(x)] \Big|_0^\infty + i\hbar \int_0^\infty \overline{g'(x)} f(x) dx = \\ &= \langle pg, f \rangle + i\hbar \overline{g(0)} f(0) = \langle pg, f \rangle \end{aligned}$$

tale relazione vale se  $f(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow \infty$  e  $f(0)=0$ . Da queste considerazioni segue che il dominio dell'operatore aggiunto è il seguente:

$$\mathcal{D}_{p^\dagger} = \{g \in L^2([0, +\infty]) : g' \in L^2([0, \infty])\}$$

per il quale vale la seguente inclusione:

$$\mathcal{D}_p \subseteq \mathcal{D}_{p^\dagger}$$

Questo porta a concludere che l'operatore non è autoaggiunto, ma solo simmetrico nello spazio di Hilbert considerato. Dal punto di vista della meccanica quantistica, ciò porta a concludere che non è possibile associare in questo spazio un osservabile di questo tipo, in quanto tutti gli operatori a cui sono associati degli osservabili devono essere autoaggiunti per poter fornire al momento in cui vengono effettuate misure un valore reale. Questo dal punto di vista matematico si traduce con il fatto che gli autovalori devono essere reali.

Vogliamo notare che l'operatore (1.1) risulta non autoaggiunto anche nei domini  $\mathcal{D}_\alpha$  e  $\mathcal{D}_\beta$  e in quello del secondo caso precedentemente specificati nello studio dell'autoaggiunzione del laplaciano. Risulta invece autoaggiunto nel dominio quasi periodico ( $\mathcal{D}_\gamma$ ) per cui è possibile in questo caso associare un osservabile all'operatore impulso.

### 1.2.2 Operatore hamiltoniano

Introduciamo un altro operatore differenziale che gioca un ruolo fondamentale in meccanica quantistica, ovvero l'operatore hamiltoniano, il quale è definito come segue:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \quad (1.3)$$

nell'equazione (1.3) riconosciamo l'operatore laplaciano precedentemente descritto, mentre la funzione  $V$  è il potenziale. L'operatore hamiltoniano è illimitato ed è autoaggiunto su tutto l'asse reale. Tale risultato può essere mostrato seguendo lo stesso procedimento usato per il laplaciano.

Vogliamo, come nei casi precedenti, studiare l'autoaggiunzione su restrizioni dell'asse reale.

Per esempio consideriamo il seguente dominio:

$$\mathcal{D}_1 = \{f \in L^2([a, b]); f'' \in L^2([a, b]), f(a) = f(b) = 0\}$$

abbiamo che:

$$\begin{aligned} \langle H^\dagger g, f \rangle &= \langle g, Hf \rangle = \int_a^b \overline{g(x)} (-cf''(x) + V(x)f(x)) dx = \\ &= - \int_a^b \overline{g(x)} x f''(x) dx + \int_a^b \overline{g(x)} V(x) f(x) dx = \\ &= -\overline{g(x)} c f'(x) \Big|_a^b + \int_a^b \overline{g'(x)} c f'(x) dx + \int_a^b \overline{g(x)} f(x) V(x) dx = \\ &= c \left( -\overline{g(x)} f(x) + \overline{g'(x)} f'(x) \right) \Big|_a^b + \int_a^b \left( -c \overline{g''(x)} + \overline{g(x)} V(x) \right) f(x) dx = \\ &= c \left( -\overline{g(b)} f(b) + \overline{g'(b)} f'(b) + \overline{g(a)} f(a) - \overline{g'(a)} f'(a) \right) + \langle Hg, f \rangle = \langle Hg, f \rangle \end{aligned}$$

se e solo se:

$g(a)=g(b)=0$  quando  $f(a)=f(b)=0$

vale la seguente relazione:

$$\mathcal{D}_{1^\dagger} = \mathcal{D}_1$$

Il termine  $c$  rappresenta  $\hbar^2/2m$ .

Studiamo ora l'autoaggiunzione sul dominio espresso dall'equazione (1.2), mostrando come l'operatore hamiltoniano, sia autoaggiunto a differenza dell'operatore impulso.

$$\begin{aligned} \langle H^\dagger g, f \rangle &= \langle g, Hf \rangle = \int_0^\infty \overline{g(x)} (-cf''(x) + V(x)f(x)) dx = \\ &= - \int_0^\infty \overline{g(x)} x f''(x) dx + \int_0^\infty \overline{g(x)} V(x) f(x) dx = \\ &= -\overline{g(x)} c f'(x) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^\infty \overline{g'(x)} c f'(x) dx + \int_0^\infty \overline{g(x)} f(x) V(x) dx = \\ &= c \left( -\overline{g(x)} f(x) + \overline{g'(x)} f'(x) \right) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \left( -c \overline{g''(x)} + \overline{g(x)} V(x) \right) f(x) dx = \end{aligned}$$

$$= c \left( \overline{g(0)}f(0) - \overline{g'(0)}f'(0) \right) + \langle Hg, f \rangle = \langle Hg, f \rangle$$

Questa condizione è verificata se e solo se:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad f'(0) = af(0) \Rightarrow g'(0) = ag(0)$$

Nel capitolo successivo viene richiamato l'operatore hamiltoniano per descrivere particelle non interagenti (ovvero con potenziale nullo). Come prima l'operatore risulta autoaggiunto. Per ottenere questo risultato è sufficiente ripetere il procedimento precedentemente adottato ponendo  $V(x)=0$ .

Dai risultati precedenti possiamo vedere come a parità di dominio, gli operatori presentano diverse caratteristiche di autoaggiunzione, in funzione delle condizioni al contorno che vengono imposte.

# Capitolo 2

## Spettri

In questo capitolo viene presentato il concetto di spettro relativo ad una trasformazione lineare  $A$  che agisce su uno spazio complesso  $n$ -dimensionale. Ogni operatore ha degli autovalori che corrispondono a numeri complessi  $\lambda$ , tali da soddisfare l'equazione:  $\det(\lambda I - A) = 0$ . L'insieme degli autovalori va a costituire lo spettro di  $A$ . Esso conta al massimo di  $n$  punti, in quanto l'equazione soddisfatta dagli autovalori è un polinomio di grado  $n$ . Nel caso in cui  $\lambda$  non sia un autovalore di  $A$ , questo implica che  $\det(\lambda I - A) \neq 0$ , di conseguenza  $\lambda I - A$  ammette un inverso. L'importanza degli spettri e la relativa analisi spettrale si evince in meccanica quantistica, dove, per esempio l'hamiltoniano è un operatore non limitato autoaggiunto agente in uno spazio di Hilbert. Lo spettro di quest'ultimo rappresenta i livelli energetici degli stati legati del sistema. Il resto dello spettro gioca un importante ruolo nella teoria della collisione.

### 2.1 Operatore risolvente

Diamo ora la definizione di operatore risolvente, partendo dalla definizione di punto regolare.

**Def.2.1** Sia  $A$  un operatore densamente definito in uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ . Definiamo  $\lambda$  come punto regolare di  $A$  se :

- 1) Il range di  $A - \lambda$  è denso in  $\mathcal{H}$
- 2)  $(A - \lambda)$  è iniettivo, quindi per la proprietà precedente è anche invertibile.
- 3)  $(A - \lambda)^{-1}$  è limitato.

L'insieme dei punti regolari viene definito insieme risolvente dell'operatore ed è indicato con  $\rho(A)$

$$\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{R}(A - \lambda)^- = \mathcal{H}, (A - \lambda)^{-1} \text{ esiste ed e' continuo} \} \quad (2.1)$$

Il complementare di  $\rho(A)$  è detto spettro di  $A$  ed è indicato con  $\sigma(A)$ :

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A) \quad (2.2)$$

Se un punto regolare appartiene all'insieme risolvente di  $A$ , allora l'operatore:

$$R(\lambda) = R(\lambda, A) = (A - \lambda)^{-1} \quad (2.3)$$

è definito operatore (o funzione) risolvente di  $A$ .

Un operatore  $A$  densamente definito e invertibile ha la proprietà di avere un aggiunto anch'esso invertibile:

$$(A^\dagger)^{-1} = (A^{-1})^\dagger$$

Questa proprietà si riflette sull'insieme risolvente e sullo spettro.

**Lemma 2.1** Sia  $A$  densamente definito, con un aggiunto densamente definito. Valgono le seguenti relazioni:

$$\rho(A^\dagger) = \overline{\rho(A)} \quad \sigma(A^\dagger) = \overline{\sigma(A)} \quad (2.4)$$

$$R(\lambda, A)^\dagger = [(A - \lambda)^{-1}]^\dagger = (A^\dagger - \bar{\lambda})^{-1} = R(\bar{\lambda}, A^\dagger) \quad (2.5)$$

### 2.1.1 Operatori chiusi

Alla luce dei concetti presentati in questo capitolo si vuole rivedere il concetto di operatore chiuso (si veda la definizione 1.8 nell'appendice A). A causa della mancanza della continuità e volendo analizzare gli operatori autoaggiunti, la richiesta minima è quella di considerare operatore chiusi.

**Teorema 2.1** Sia  $A$  un operatore chiuso e densamente definito. Valgono le seguenti relazioni:

1) Se  $\lambda \in \rho(A)$ , allora  $(A - \lambda)^{-1}$  è definito ovunque, cioè:

$$\mathcal{R}(A - \lambda) = \mathcal{H} \quad \forall \lambda \in \rho(A) \quad (2.6)$$

2) Per ogni  $\lambda, \mu \in \rho(A)$  vale la seguente equazione chiamata prima formula risolvente:

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu)R_\lambda(A)R_\mu(A) = (\lambda - \mu)R_\mu(A)R_\lambda(A) \quad (2.7)$$

3) L'insieme risolvente  $\rho(A)$  è un insieme aperto e l'applicazione:

$$\lambda \longrightarrow R_\lambda(A) = (A - \lambda)^{-1} \quad \lambda \in \rho(A) \quad (2.8)$$

è analitica per ogni  $\lambda \in \rho(A)$ . Vale il seguente risultato:

$$\|R_\lambda(A)\| \geq d(\lambda, \sigma(A))^{-1} \quad (2.9)$$

**Dim. 2.1** Dimostriamo il punto 1) del teorema. Per ipotesi  $A$  è chiuso allora anche  $A - \lambda$  è chiuso per ogni coefficiente complesso  $\lambda$ . Assumiamo l'esistenza dei limiti:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad y = \lim_{n \rightarrow \infty} (A - \lambda)x_n \quad x_n \in \mathcal{D}(A)$$

Questo garantisce l'esistenza dei limiti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda x_n = \lambda x \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (A - \lambda)x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda x_n = y + \lambda x$$

La chiusura dell'operatore garantisce che:

$$x \in \mathcal{D}(A) \quad y + \lambda x = Ax \quad y = (A - \lambda)x$$

Assumiamo ora che il parametro complesso  $\lambda$  appartenga all'insieme risolvente. Questo implica che  $(A - \lambda)^{-1}$  è chiuso e la limitatezza impone che anche il suo dominio lo sia:

$$\mathcal{D}((A - \lambda)^{-1}) = \mathcal{R}(A - \lambda) = \mathcal{R}(A - \lambda)^{-1} = \mathcal{H}$$

Abbiamo dimostrato l'equazione (2.6). Dimostriamo ora la prima formula del risolvente. Consideriamo  $\lambda, \mu \in \rho(A)$  e la seguente uguaglianza valida in tutto lo spazio di Hilbert:

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= R(\lambda)(A - \mu)R(\mu) = R(\lambda)(A - \lambda)R(\mu) + (\lambda - \mu)R(\lambda)R(\mu) = \\ &= R(\mu) + (\lambda - \mu)R(\lambda)R(\mu) \end{aligned}$$

La seconda uguaglianza viene verificata scambiando il ruolo di  $\lambda$  e  $\mu$ . Fisso  $\mu \in \rho(A)$  e considero come variabile  $\lambda$ . Applico la prima formula risolvente (2.7) e la itero  $n$  volte:

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= R(\mu) + (\lambda - \mu)R(\mu)R(\lambda) = \\ &= R(\mu) + (\lambda - \mu)R(\mu)^2 + (\lambda - \mu)^2R(\mu)^2R(\lambda) = \\ &= \sum_{j=0}^n (\lambda - \mu)^j R(\mu)^{j+1} + (\lambda - \mu)^{n+1} R(\mu)^{n+1} R(\lambda) \end{aligned}$$

La successione degli operatori limitati:

$$R_n = \sum_{j=0}^n (\lambda - \mu)^j R(\mu)^{j+1}$$

Converge in norma ad un operatore limitato

$$R_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n \quad \text{se } |\lambda - \mu| \|R(\mu)\| < 1$$

Ci aspettiamo che  $\lambda \in \rho(A)$  e che  $R_n \rightarrow R(\lambda)$  per tutti i  $\lambda$  interni al disco di convergenza. Sia  $\psi$  un vettore arbitrario di uno spazio di Hilbert. Poniamo:

$$\phi_n = R_n \psi \quad \phi = R_\infty \psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n$$

di conseguenza abbiamo:

$$\begin{aligned} A\phi_n &= AR_n \psi = (A - \mu)R_n \psi + \phi_n \mu \\ (A - \mu) \left( R(\mu) + \sum_{j=0}^{n-1} (\lambda - \mu)^{j+1} R(\mu)^{j+2} \right) \psi \\ &\psi + (\lambda - \mu) \sum_{j=0}^{n-1} (\lambda - \mu)^j R(\mu)^{j+1} \psi + \phi_n \mu \\ \psi + (\lambda - \mu)R_{n-1} \psi + \mu \phi_n &= \psi + (\lambda - \mu)\phi_{n-1} + \mu \phi_n \end{aligned}$$

per il limite di n che tende a infinito:

$$\psi + (\lambda - \mu)\phi + \mu\phi = \psi + \lambda\phi$$

poichè A è chiuso, ciò implica che:

$$\phi = r_\infty \psi \in \mathcal{D}(A) \quad A\phi = \psi + \lambda\phi$$

segue che:

$$(A - \lambda)R_\infty \psi = \psi \quad \forall \psi \in \mathcal{H}$$

Nel caso in cui  $\psi \in \mathcal{D}(A)$

$$R_n A \psi = \psi + (\lambda - \mu)\phi_{n-1} + \mu\phi_n$$

prendendo il limite (non è più necessaria la chiusura di A)

$$R_\infty (A - \lambda) \psi = \psi \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(A)$$

da questi risultati si può affermare che con  $\lambda$  all'interno del disco di convergenza della serie  $R_\infty$ ,  $(A - \lambda)$  è invertibile, con inverso limitato e  $R_\infty = (A - \lambda)^{-1}$  :

$$R(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^j R(\mu)^{j+1} \tag{2.10}$$



Questo dimostra l'ultimo punto del teorema, in quanto il disco di convergenza della serie (2.10) costituisce un intorno aperto di  $\mu$  contenuto nell'insieme risolvente che risulta aperto. Lo sviluppo in serie di potenze suggerisce che  $R(\lambda)$  è una funzione analitica di  $\lambda \in \rho(A)$ .

Il fatto che il disco di convergenza sia contenuto in  $\rho(A)$  impone che il suo raggio sia inferiore alla distanza tra  $\mu$  e  $\sigma(A)$ :

$$\frac{1}{\|R(\mu)\|} \leq d(\mu, \sigma(A))$$

da cui la relazione (2.9).  $\square$

La prima formula del risolvente suggerisce il fatto che gli operatori risolvanti commutano tra loro:

$$R(\lambda)R(\mu) = R(\mu)R(\lambda) = \frac{R(\lambda) - R(\mu)}{\lambda - \mu} \quad \forall \lambda, \mu \in \rho(A), \lambda \neq \mu \quad (2.11)$$

operando il limite per  $\mu \rightarrow \lambda$

$$u - \lim_{\mu \rightarrow \lambda} \frac{R(\mu) - R(\lambda)}{\mu - \lambda} = R(\lambda)^2 \quad (2.12)$$

La notazione presenta nel limite precedente indica il limite uniforme, ovvero la convergenza in norma nello spazio di Banach  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Questo risulta fornisce un'ulteriore informazione riguardo l'analiticità dell'operatore risolvente, in particolare mostrando la sua derivabilità rispetto al parametro complesso  $\lambda$ . È possibile richiamare tutti i risultati validi per le funzioni olomorfe.

## Sequenza di Weyl

Sia  $A$  un operatore, se  $w$  è un autovalore di  $A$  allora esso appartiene allo spettro. Ci sono casi in cui un numero complesso  $w$  pur non essendo un autovalore è prossimo ad esserlo, nel senso che l'equazione agli autovalori  $(A - z)\psi = 0$  non ammette una soluzione  $\psi \neq 0$ , ma è possibile trovare una successione  $\psi_n$  a valori non nulli, tale che:

$$\|\psi_n\| = 1 \quad \|(A - w)\psi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (2.13)$$

L'equazione agli autovalori è soddisfatta nel limite per  $n \rightarrow \infty$  (si noti che non è richiesta la convergenza della successione  $\psi_n$ ). Una successione  $\psi_n$  così strutturata viene chiamata **sequenza di Weyl**. La sua esistenza garantisce che  $w \in \sigma(A)$ , se così non fosse si andrebbe incontro ad un assurdo:

$$1 = \|\psi_n\| = \|R(w)(A - w)\psi_n\| \leq \|R(w)\| \|(A - w)\psi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Possiamo riassumere ciò che è stato detto nel seguente lemma:

**Lemma 2.2** Sia  $A$  un operatore e  $w$  un numero complesso, se esiste una successione  $\psi_n \in \mathcal{D}(A)$ , con  $\|\psi_n\| = 1$  e  $\|(A - w)\psi_n\| \rightarrow 0$ , allora  $w$  appartiene allo spettro di  $A$ .

Viceversa se  $A$  è chiuso e  $w$  è un punto della frontiera dello spettro di  $A$ , allora esiste una successione  $w_n \rightarrow w$ , con  $w_n \in \rho(A)$ , invocando la relazione (2.9) del teorema 2.1 possiamo scrivere:

$$\|R(w_n)\| \geq \frac{1}{d(w_n, \sigma(A))} \geq \frac{1}{|w_n - w|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

Esiste quindi una successione  $\phi_n$ , con  $\|\phi_n\| = 1$  tale che:

$$\|R(w_n)\phi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

posto che:

$$\psi_n = \frac{R(w_n)\phi_n}{\|R(w_n)\phi_n\|} \quad \|\psi_n\| = 1$$

segue:

$$\begin{aligned} \|(A - w)\psi_n\| &= \|(A - w_n)\psi_n + (w_n - w)\psi_n\| = \left\| \frac{\phi_n}{\|R(w_n)\phi_n\|} + (w_n - w)\psi_n \right\| \\ &\leq \frac{1}{\|R(w_n)\phi_n\|} + |w_n - w| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

per cui esiste una sequenza di Weyl.

Questi risultati possono essere riassunti nel seguente lemma:

**Lemma 2.3** Sia  $A$  un operatore chiuso e sia  $w$  un punto di frontiera dello spettro di  $A$ , allora esiste una sequenza di Weyl per tale  $w$ .

## 2.1.2 Operatori limitati

Sia  $A$  un operatore limitato. Supponiamo di invertire  $A - \lambda$ , se  $\lambda \neq 0$  abbiamo:

$$A - \lambda = \frac{1}{\lambda \left(\frac{A}{\lambda} - 1\right)} = \frac{1}{-\lambda \left(1 - \frac{A}{\lambda}\right)} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^k}$$

l'ultima uguaglianza definisce la serie operatoriale di Neumann.

Vale il seguente teorema che fornisce informazioni sullo spettro di un operatore limitato.

**Teorema 2.2** Sia  $A$  un operatore limitato appartenente allo spazio di Banach  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Valgono le seguenti relazioni:

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r(A)\} \subseteq \rho(A) \quad (2.14)$$

Dove con la notazione  $r(A)$  si identifica il raggio spettrale di un operatore definito come segue:

$$r(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \quad (2.15)$$

considerando ora la serie di Neumann vista come risolvente dell'operatore per  $|\lambda| > r(A)$ :

$$R_\lambda(A) = -\frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^k \quad (2.16)$$

Abbiamo:

$$\sigma(A) \neq 0 \quad (2.17)$$

Lo spettro dell'operatore non è vuoto.

**Dim. 2.2** La serie di Neumann 2.16 risulta convergente per il teorema di Cauchy-Hadamard, il quale permette di studiare la convergenza delle serie di potenze del tipo  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , con  $z \in \mathbb{C}$  e i coefficienti di uno spazio di Banach. Posto ora:

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|^{1/n}$$

si ha che:

$$|z| < \rho \implies \text{La serie converge assolutamente}$$

$$|z| > \rho \implies \text{La serie non converge}$$

Il teorema non fornisce informazioni qualora  $|z| = \rho$ .

La condizione di convergenza per la serie operatoriale di Neumann è la seguente:

$$\frac{1}{|\lambda|} < \frac{1}{r(A)} \quad \text{se } |\lambda| > r(A)$$

così come si è visto lo sviluppo in serie del risolvente, si mostra che tale serie converge proprio all'operatore  $(A - \lambda)^{-1}$  che risulta anche limitato. Dimostriamo ora la relazione 2.15 per assurdo. Supponiamo:

$$\sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| = \bar{r} < r(A)$$

per  $|\lambda| > \bar{r}$  il risolvente  $R_\lambda(A)$  risulterebbe una funzione analitica e lo sviluppo in serie di Neumann deve valere in tutta la regione, anche per qualsiasi  $|\lambda|$  compreso tra  $r(A)$  e  $\bar{r}$ , ma questa condizione contraddice il teorema di Cauchy-Hadamard stesso, che garantisce che la serie non converge per  $|\lambda| < r(A)$ . Questo implica che  $\bar{r} = r(A)$ .

L'ultima relazione del teorema (2.17) può essere dimostrata per assurdo ipotizzando che se lo spettro dell'operatore fosse vuoto, questo renderebbe il risolvente una funzione analitica in tutto il piano complesso, con:

$$R_\lambda(A) = -\frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^k$$

avrei inoltre che:

$$u\text{-}\lim_{\lambda \rightarrow \infty} R_\lambda(A) = 0$$

invocando il teorema di Liouville (che impone che le funzioni definite su tutto il piano complesso e limitate sono costanti):

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda)^{-1} = \text{costante} = 0$$

Questo è un assurdo, di conseguenza deve valere che  $\sigma(A) \neq \emptyset$   $\square$

Nella determinazione degli spettri di un operatore può essere utilizzato il seguente teorema:

**Teorema 2.3 (Phillips)** Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert e  $A$  un operatore. Definiamo lo spettro dell'aggiunto di  $A$  come segue:

$$\sigma(A^*) = \left\{ \lambda \mid \bar{\lambda} \in \sigma(A) \right\}$$

Vale la relazione seguente:

$$R_\lambda(A^*) = R_\lambda(A)^*$$

Un altro teorema utile per analizzare lo spettro è il seguente:

**Teorema 2.4** Sia  $A$  un operatore autoaggiunto  $A = A^\dagger$ , valgono i seguenti risultati:

$$r(A) = \|A\| \quad \text{se } A \text{ è limitato} \tag{2.18}$$

$$\sigma_r(A) = \emptyset \tag{2.19}$$

$$\sigma(A) \subseteq \mathbb{R} \tag{2.20}$$

gli autovalori corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali tra loro.

Per approfondire questi risultati sugli operatori, si rimanda al testo citato in [6].

### 2.1.3 Operatore moltiplicativo

Introduciamo ora l'operatore moltiplicativo che viene utilizzato nella teoria spettrale, studiandone lo spettro e le proprietà.

Per definire questo operatore consideriamo lo spazio  $L^2(\mathbb{R}^n)$  ( che corrisponde allo spazio delle funzioni quadrato sommabili) e consideriamo  $m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione misurabile. Possiamo definire l'operatore moltiplicativo  $M_m$  come segue:

$$(M_m f)(x) = m(x)f(x)$$

il cui dominio risulta essere:

$$\mathcal{D}(M_m) = \mathcal{D}_m = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n); mf \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

Assumiamo che la funzione  $m$  sia definita quasi ovunque. Questo equivale a richiedere che  $m$  diverga solo su un insieme di misura nulla:

$$\mu \{x \in \mathbb{R}^n; |m(x)| = \infty\} = 0$$

questa condizione garantisce che il dominio dell'operatore moltiplicativo è denso in  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , considerando i seguenti sottinsiemi:

$$\Omega_A = \{x \in \mathbb{R}^n; |m(x)| \leq A\}$$

Abbiamo che:

$$\Omega_A \xrightarrow{A \rightarrow \infty} \mathbb{R}^n$$

abbiamo inoltre che per ogni  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  le funzioni  $f_A = \chi_{\Omega_A} f$ , con  $f \in \mathcal{D}_m$  ( $\chi_{\Omega_A}$  rappresentano le funzioni caratteristiche dei sottoinsiemi) convergono in  $L^2(\mathbb{R}^n)$  a  $f$  per  $A \rightarrow \infty$  (questo risultato è una conseguenza del teorema di convergenza dominata).

#### Aggiunto

Studiamo ora l'aggiunto dell'operatore moltiplicativo. Siano  $h, f \in \mathcal{D}_m$  valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \langle h, M_m f \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} h(x)^* m(x) f(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (m(x) h(x))^* f(x) dx = \langle M_{m^*} h, f \rangle \end{aligned}$$

dove con la notazione  $M_{m^*}$  si indica la moltiplicazione per  $m^*(x)$ . Questo risultato sembra indicare che l'aggiunto corrisponda esattamente a  $M_{m^*}$ , ma l'unica assunzione fatta è che  $h \in \mathcal{D}_m$ , quindi possiamo solo concludere che  $M_{m^*} \subseteq M_m^\dagger$ . Dimostriamo ora

l'uguaglianza. Assumiamo che  $h \in \mathcal{D}(M_m^\dagger)$ . Questo comporta che esiste una funzione  $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , tale che:

$$\int_{\mathbb{R}^n} h^*(x)m(x)f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} g^*(x)f(x)dx \quad f \in \mathcal{D}_m$$

da cui si ottiene:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (h(x)m^*(x) - g^*(x))^* f(x)dx = 0 \quad f \in \mathcal{D}_m$$

ottengo, introducendo la funzione caratteristica dei sottoinsiemi  $\Omega_A$ , la seguente relazione:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (h(x)m^*(x) - g^*(x))^* \chi_{\Omega_A} f(x)dx = 0 \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

implica che  $\chi_{\Omega_A}(h m^* - g) \in L^2(\mathbb{R}^n)$  si annulla. Dato che A è arbitrario deve valere:

$$m^* h = g \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

da cui possiamo trarre le seguenti conclusioni:

$$\mathcal{D}(M_m^\dagger) = \mathcal{D}_{m^*} = \mathcal{D}_m \quad M_m^\dagger = M_{m^*}$$

$M_m$  è autoaggiunto se e solo se  $m(x)$  è una funzione reale.

Quando la funzione  $m(x)$  è limitata ( $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ) allora l'operatore  $M_m$  risulta limitato, quindi vale la seguente relazione:

$$\|M_m\| \leq \|m\|_\infty$$

Vale anche la relazione inversa, ovvero se l'operatore è limitato anche  $m(x)$  deve essere limitata, quindi si ha:

$$\|M_m\| = \|m\|_\infty$$

### Spettro dell'operatore moltiplicativo

Con la nozione di limitatezza vogliamo determinare lo spettro di  $M_m$ . L'operatore risolvente di  $(M_m - \lambda)^{-1}$  è dato dall'operatore moltiplicativo:

$$((M_m - \lambda)^{-1} f)(x) = \frac{1}{m(x) - \lambda} f(x)$$

Il dominio dell'operatore risolvente è il seguente:

$$\mathcal{D}((M_m - \lambda)^{-1}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n); \frac{f}{m - \lambda} \in L^2(\mathbb{R}) \right\}$$

Richiedendo la limitatezza, abbiamo che:

$$\|(M_m - \lambda)^{-1}\| = \left\| \frac{1}{m(x) - \lambda} \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{\epsilon}$$

con  $\epsilon > 0$ .

riprendiamo ora la definizione di estremo superiore essenziale di una funzione  $f$  definita su un insieme misurabile  $A$ :

$$ess \sup_A |f(x)| = \inf \{C \geq 0 : |f(x)| \leq C \text{ q.o. in } A\} \quad (2.21)$$

Grazie a quest ultima relazione otteniamo:

$$\mu \{x \in \mathbb{R}^n; |m(x) - \lambda| < \epsilon\} = 0$$

da cui ottiene la definizione dello spettro e del risolvente dell'operatore:

$$\rho(M_m) = \{z \in \mathbb{C}; \exists \epsilon > 0 : \mu \{x \in \mathbb{R}^n; |m(x) - z| < \epsilon\} = 0\} \quad (2.22)$$

$$\rho(M_m) = \{z \in \mathbb{C}; \forall \epsilon > 0 : \mu \{x \in \mathbb{R}^n; |m(x) - z| < \epsilon\} > 0\} \quad (2.23)$$

Lo spettro così definito viene chiamato range essenziale di  $m(x)$ . Da queste definizioni si può concludere che  $z$  è un autovalore di  $M_m$  solo se la sua retroimmagine  $m^{-1}(z)$  ha misura non nulla e la corrispondente funzione caratteristica  $\chi_{m^{-1}(z)}$  è un'autofunzione.

## 2.2 Classificazione dello spettro

Lo spettro di un operatore lineare densamente definito in uno spazio di Hilbert, può essere classificato a seconda delle condizioni necessarie per avere un punto regolare in:

a) Spettro puntuale  $\sigma_p(A)$ :

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ e' un autovalore di } A\} \quad (2.24)$$

$$= \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{N}(A - \lambda) \neq \{0\}\} \quad (2.25)$$

b) Spettro continuo  $\sigma_c(A)$ :

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda \text{ e' invertibile, } \mathcal{R}(A - \lambda) \text{ e' denso, ma } (A - \lambda)^{-1} \text{ non e' limitato}\} \quad (2.26)$$

c) Spettro residuo  $\sigma_r(A)$ :

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda \text{ e' invertibile, } \mathcal{R}(A - \lambda) \text{ non e' denso}\} \quad (2.27)$$

### 2.2.1 Spettro dell'operatore di creazione e distruzione

Per esemplificare le nozioni riguardanti lo spettro consideriamo gli operatori di creazione e distruzione. Questi operatori svolgono un ruolo fondamentale in meccanica quantistica, in quanto permettono di fornire una descrizione operatoriale di sistemi quantistici, come per esempio l'oscillatore armonico. Consideriamo uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  separabile e definiamo  $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$  come base hilbertiana di  $\mathcal{H}$  se vengono soddisfatte le seguenti condizioni:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k e_k \quad \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$$

Fatta come assunzione di considerare uno spazio di Hilbert così strutturato, indichiamo con  $A_+$  e  $A_-$  rispettivamente gli operatori di creazione e di distruzione agenti in  $\mathcal{H}$ . Il dominio di  $A_+$  e  $A_-$  viene definito nel modo seguente:

$$\mathcal{D}(A_+) = \mathcal{D}(A_-) = D = \left\{ x \in \mathcal{H} : x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k e_k, \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \right\}$$

La loro azione su un generico elemento dello spazio è la seguente:

$$A_+ x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \sqrt{k+1} e_{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} x_{k-1} \sqrt{k} e_k \quad x \in D$$

$$A_- x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \sqrt{k} e_{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} x_{k+1} \sqrt{k+1} e_k \quad x \in D$$

Questi operatori godono della proprietà di essere chiusi e di essere uno l'aggiunto dell'altro:

$$A_+^\dagger = A_- \quad A_-^\dagger = A_+$$

Impostiamo l'equazione agli autovalori:

$$A_+ x = \lambda x$$

può essere riscritta esplicitando l'azione dell'operatore e la definizione di elemento in uno spazio di Hilbert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{k-1} \sqrt{k} e_k = \sum_{K=0}^{\infty} \lambda x_K e_K$$

da cui si ottengono le seguenti equazioni:

$$\lambda x_0 = 0 \quad \text{per } k=0 \quad \lambda x_k = x_{k-1} \sqrt{k} \quad \text{per } k > 0$$



risolvendo le equazioni otteniamo:

$$\lambda x_0 \implies \lambda = 0 \text{ oppure } x_0 = 0$$

Per la prima equazione, mentre la seconda la soluzione è la seguente:

$$\text{se } \lambda = 0 \implies x_0\sqrt{0} = \lambda x_1 = 0; \quad x_1\sqrt{1} = \lambda x_2 = 0; \quad x_2\sqrt{2} = \lambda x_3 = 0 \dots$$

Possiamo concludere che lo spettro puntuale è vuoto:

$$\sigma_p(A_+) = \emptyset$$

Consideriamo l'operatore aggiunto e impostiamo, come nel caso precedente, l'equazione agli autovalori:

$$\begin{aligned} A_+^\dagger x &= A_- x = \lambda x \\ \sum_{k=0}^{\infty} x_{k+1} \sqrt{k+1} e_k &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda x_k e_k \end{aligned}$$

da cui si ottiene:

$$x_1 = \lambda x_0 \text{ per } k=0 \quad x_{k+1} \sqrt{k+1} = \lambda x_k \text{ per } k > 0$$

Le soluzioni sono le seguenti:

$$x_1 = \lambda x_0 \implies x_0 = \frac{x_1}{\lambda} \implies \lambda = \frac{x_1}{x_0} \neq 0$$

$$x_1 = \lambda x_0 \implies x_2\sqrt{2} = \lambda^2 x_0 \implies x_3\sqrt{3} = \lambda^3 x_0 \dots$$

da cui si ottiene la seguente relazione:

$$x_k = \frac{\lambda^k}{\sqrt{k!}} x_0$$

Lo spettro dell'aggiunto è costituito da tutto il campo complesso:

$$\sigma_p(A_+^\dagger) = \sigma_p(A_-) = \mathbb{C}$$

Per ogni numero complesso  $\lambda$  e  $x \in D$  vale che:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2 k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^{2k} |x_0|^2}{(k-1)!} = |x_0|^2 |\lambda|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^{2k}}{k!} < \infty$$

La convergenza è garantita dalla definizione di base hilbertiana. L'autovettore può essere normalizzato come segue:

$$u_\lambda = e^{-\frac{|\lambda|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\sqrt{k!}} e_k \quad (2.28)$$

Analizziamo ora lo spettro residuo.  $\lambda \in \sigma_r(A_+)$  se e solo se  $\mathcal{R}(A_+ - \lambda)$  non è denso nello spazio di Hilbert e  $(A_+ - \lambda)$  è invertibile. Per entrambi gli operatori abbiamo le seguenti relazioni:

$$\mathcal{N}(A_+^\dagger - \bar{\lambda}) = \mathcal{R}(A_- - \lambda)^\perp \quad \text{dove } \bar{\lambda} \in A_+^\dagger \text{ e } \lambda \in \sigma_p(A_-)$$

$$\mathcal{N}(A_-^\dagger - \bar{\lambda}) = \mathcal{R}(A_+ - \lambda)^\perp \quad \text{dove } \bar{\lambda} \in A_-^\dagger \text{ e } \lambda \in \sigma_p(A_+)$$

visto che gli operatori sono chiusi valgono le seguenti relazioni:

$$\mathcal{N}(A_+ - \bar{\lambda}) = \mathcal{N}(A_+^{\dagger\dagger} - \bar{\lambda}) = \mathcal{R}(A_+^\dagger - \lambda)^\perp = \mathcal{R}(A_- - \lambda)^\perp$$

$$\mathcal{N}(A_- - \bar{\lambda}) = \mathcal{N}(A_-^{\dagger\dagger} - \bar{\lambda}) = \mathcal{R}(A_-^\dagger - \lambda)^\perp = \mathcal{R}(A_+ - \lambda)^\perp$$

Il nucleo di  $A_\pm - \bar{\lambda}$  è nullo e quindi il range di  $(A_\pm^\dagger - \lambda)$  è denso nello spazio di Hilbert quindi si ha che:

$$\sigma_r(A_+) = \sigma_r(A_+^\dagger) = \mathbb{C} \quad \sigma_r(A_-) = \sigma_r(A_-^\dagger) = \emptyset$$

da cui segue lo spettro continuo che corrisponde a:

$$\sigma_c(A_+) = \sigma_c(A_-) = \rho(A_+) = \rho(A_-) = \emptyset$$

Gli autostati di  $u_\lambda$  di  $A_-$  sono detti stati coerenti. Valgono le seguenti relazioni:

$$e_k = \frac{1}{\sqrt{k}} A_+ e_{k-1} = \frac{1}{\sqrt{k!}} A_+^k e_0$$

Sostituendo nella relazione 2.24 e otteniamo:

$$u_\lambda = e^{-\frac{|\lambda|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda A_+)^k}{k!} e_0 = \exp\left(-\frac{|\lambda|^2}{2} + \lambda A_+\right) e_0 \quad (2.29)$$

## 2.3 Analisi spettrale

Di seguito vogliamo eseguire l'analisi dello spettro dell'operatore laplaciano introdotto nel capitolo precedente, e mettere in evidenza le differenze che derivano da condizioni al contorno diverse. Analizziamo anche l'operatore impulso, in modo da dimostrare che i suoi autovalori, per condizioni al contorno particolari, non sono reali. Per concludere analizziamo un sistema unidimensionale costituito da due particelle quantistiche non interagenti tra loro.

### 2.3.1 Spettro dell'operatore laplaciano

Riprendiamo i domini specificati nel primo capitolo, ma facciamo una restrizione all'asse positivo. In queste condizioni analizziamo gli autovalori. Consideriamo l'operatore laplaciano definito sul seguente dominio:

$$\mathcal{D} = \{f \in L^2([0, b]); f'' \in L^2([0, b]), f(0) = f(b) = 0\}$$

impostiamo l'equazione agli autovalori:

$$-\Delta f = \lambda f \Rightarrow -\frac{d^2 f}{dx^2} = \lambda f \Rightarrow -\left(\frac{d^2 f}{dx^2} + \lambda f\right) = 0 \quad (2.30)$$

L'equazione agli autovalori ha la seguente soluzione:

$$f(x) = A \exp(i\sqrt{\lambda}x) + B \exp(-i\sqrt{\lambda}x)$$

Imponiamo le condizioni al contorno e otteniamo le seguenti equazioni:

$$A + B = 0$$

$$A \exp(i\sqrt{\lambda}b) + B \exp(-i\sqrt{\lambda}b) = 0$$

Da cui, applicando la formula di eulero per le funzioni trigonometriche e risolvendo l'equazione, otteniamo che i possibili valori di  $\lambda$  sono i seguenti:

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

con  $n$  un numero intero.

In maniera analoga andiamo a studiare l'equazione (2.30) per il seguente dominio:

$$\mathcal{D} = \{f \in L^2([0, b]); f'' \in L^2([0, b]), f'(0) = f'(b) = 0\} \quad (2.31)$$

ripetiamo i passaggi precedentemente eseguiti ed otteniamo, imponendo le condizioni al contorno otteniamo che anche in questo caso i possibili valori di  $\lambda$  sono i seguenti:

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

I medesimi autovalori possono essere ottenuti studiando l'equazione (2.30) sui seguenti domini:

$$\mathcal{D} = \{f \in L^2([0, b]); f'' \in L^2([0, b]), f(0)e^{i\theta} = f(b) = 0\}$$

$$\mathcal{D}' = \{f \in L^2([0, b]); f'' \in L^2([0, b]), f'(0)e^{i\theta} = f'(b) = 0\}$$

Vogliamo sottolineare il fatto che l'operatore laplaciano sui domini sopra descritti, è autoaggiunto e dall'analisi dello spettro vediamo che gli autovalori sono reali.

### 2.3.2 Spettro dell'operatore impulso

Riprendiamo l'operatore impulso definito nel capitolo precedente e studiamo il suo spettro nel dominio definito dall'equazione 1.2. L'equazione agli autovalori è la seguente:

$$pf = \lambda f \Rightarrow pf - \lambda f = 0$$

Esplicitiamo la definizione di impulso e otteniamo:

$$-i\hbar \frac{df}{dx} - \lambda f = 0$$

Otteniamo la seguente equazione differenziale:

$$i\hbar \frac{df}{dx} = -\lambda f$$

appliciamo il metodo della separazione di variabili e otteniamo che la soluzione dell'equazione è la seguente:

$$f(x) = Ae^{i\frac{\lambda}{\hbar}x} \quad (2.32)$$

Imponendo le condizioni al contorno osserviamo che non esiste soluzione. Vogliamo notare che imponendo le condizioni al contorno del secondo caso considerato nello studio del laplaciano, otteniamo che gli autovalori possibili sono:

$$\lambda = -i\hbar a$$

Notiamo che l'autovalore è complesso. Potevamo già dal primo capitolo concludere che lo spettro di questo operatore non è costituito da autovalori reali oppure, come nel caso visto, non esiste soluzione. Non è possibile associare all'operatore (1.1) un osservabile con le condizioni specificate.

### 2.3.3 Sistema unidimensionale di due particelle

Vogliamo ora considerare un sistema di due particelle quantistiche, non interagenti tra di loro vincolate a muoversi su una linea. Per descrivere il sistema consideriamo l'operatore hamiltoniano:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V$$

dove  $m$  indica la massa della particella. Dalla descrizione del nostro sistema sappiamo che il potenziale è nullo e stiamo considerando una sola dimensione. Da queste considerazioni possiamo esprimere l'hamiltoniano per le particelle nella seguente forma:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)$$

dove abbiamo etichettato con i pedici 1 e 2 le due particelle. Introduciamo la coordinata relativa  $z$  e la coordinata del centro di massa espresse entrambe dalle seguenti equazioni:

$$z = |x_1 - x_2| \geq 0 \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

In questo modo, possiamo riscrivere l'hamiltoniana del sistema nel seguente modo:

$$H = -\frac{\hbar^2}{4m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.33)$$

Imponiamo che il sistema fino a qui descritto sia vincolato in una porzione limitata di spazio. Questa restrizione impone che la funzione d'onda si annulli per condizioni al contorno fissate. Il comportamento della funzione d'onda in  $z=0$  permette di distinguere il sistema in fermionico o bosonico. La principale differenza tra i due risiede nel fatto che nel primo la funzione d'onda si annulla in  $z=0$ , mentre nel secondo sono le derivate ad annullarsi nel medesimo punto.

### Il caso fermionico e quello bosonico

Prima di continuare con l'analisi di questo sistema vogliamo richiamare alcuni concetti relativi ai sistemi bosonici e fermionici. Fermioni e bosoni presentano caratteristiche molto diverse. Per quanto riguarda lo spin, per esempio, i primi lo hanno semi intero, i secondi intero. Per quanto riguarda la funzione d'onda quella relativa ai fermioni è antisimmetrica, mentre per i bosoni è simmetrica. I bosoni presentano la caratteristica di poter occupare, in un numero arbitrario, lo stesso stato. A basse temperature questo determina l'occupazione dello stato con il livello energetico più basso, creando in questo modo un condensato di Bose-Einstein. I fermioni devono soggiacere al principio di esclusione di Pauli, quindi possiamo trovarne solo due in un livello energetico.

Il caso bosonico e fermionico sono gli unici possibili soltanto quando stiamo studiando spazi tridimensionali. Per spazi con dimensioni minori oltre agli stati sopraindicati ve ne sono anche altri che identificano gli anioni. Per l'analisi di questo sistema consideriamo solo il caso bosonico e fermionico, i quali possono essere interpretati come una conseguenza della conservazione della probabilità locale sullo spazio delle configurazioni, con condizioni al contorno. La conservazione della probabilità locale è tale per cui le componenti normali della probabilità di corrente devono annullarsi alle condizioni al contorno, cioè:

$$\psi^*(x, 0) \frac{\partial \psi}{\partial z}(x, 0) - \frac{\partial \psi^*}{\partial z}(x, 0) \psi(x, 0) = 0 \quad (2.34)$$

tale relazione deve valere per ogni  $x$  e per ogni funzione d'onda  $\psi(x, z)$ . La conservazione della probabilità determina che l'hamiltoniana (1.2) è hermitiana. La soluzione più generale, imponendo le condizioni al contorno dell'equazione (2.34), è la seguente:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}(x, 0) = \eta \psi(x, 0) \quad (2.35)$$

dove  $\eta$  è un parametro reale, che descrive la natura dei sistemi a molti corpi. Un sistema bosonico ha  $\eta = 0$ , mentre uno fermionico ha  $\eta^{-1}=0$ . Valori intermedi di questo parametro possono identificare altri tipi di particelle.

Le autofunzioni dell'hamiltoniana (2.33) sono le seguenti:

$$\psi_{x,k}(x, z) = \exp(ikx) \left( \cos(kz) + \frac{\eta}{k} \operatorname{sen}(kz) \right) \quad (2.36)$$

dove  $k > 0$ . L'eq. (2.36) descrive una funzione d'onda e il relativo moto. Oltre alla (2.36) esiste anche un'altra autofunzione nel caso in cui  $\eta < 0$ :

$$\psi_{\chi}^{(\eta)}(x, z) = \exp(i\chi x) \frac{1}{2|\eta|} \exp(\eta z)$$

questa descrive stati legati di sistemi di due particelle. per un dato valore di  $\eta$  esiste un solo stato legato. Le autofunzioni illustrano l'effetto delle condizioni al contorno che in questo caso corrispondono ad una forza attrattiva inesistente tra le due particelle che possono essere considerate non interagenti.

Per approfondimenti legati non solo alla teoria dei sistemi di particelle in una o più dimensioni, ma anche per la teoria delle particelle identiche, si rimanda all'articolo citato in [2].

# Capitolo 3

## Sistemi di Sturm-Liouville

Scopo di questo capitolo è lo studio dei sistemi di Sturm-Liouville sia da un punto di vista formale, introducendo altre nozioni legate agli operatori, sia da un punto di vista pratico, andando a studiare alcuni esempi notevoli.

Gli argomenti di seguito esposti seguono parzialmente la trattazione di [1].

### 3.1 Operatori illimitati con risolvente compatto

Introduciamo nozioni complementari a quelle presenti nei capitoli precedenti per analizzare in maniera completa gli operatori differenziali. Quest'ultimi presentano come principale caratteristica il fatto di non essere limitati in uno spazio di Hilbert. Lo studio di questo tipo di operatori è un campo molto complesso. In fisica si ricorre molto spesso al formalismo delle equazioni differenziali, che possono essere studiate nel contesto degli operatori compatti, di cui quelli di Sturm-Liouville ne fanno parte. Introduciamo ora il concetto di risolvente compatto:

**Def.3.1** Un operatore hermitiano e lineare  $A$  in uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  si dice avere il risolvente compatto se esiste un numero complesso  $\lambda \in \rho(A)$  per il quale il risolvente  $R_\lambda(A)$  è compatto. Possiamo interpretare il concetto di risolvente compatto come una funzione che mappa sottoinsiemi compatti (chiusi e limitati) in sottoinsiemi compatti nello spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ .

Dalla definizione segue immediatamente che per ogni elemento dell'insieme risolvente,  $R_\lambda(A)$  è compatto.

La compattezza del risolvente determina particolari caratteristiche del suo spettro, come illustrato dal seguente teorema.

**Teorema 3.1** Sia  $A$  un operatore con risolvente compatto  $R_\lambda(A)$ , dove  $\lambda \in \rho(A)$ . Sia

$0 \neq \mu \in \rho(R_\lambda(A))$  se e solo se  $(\lambda + 1/\mu) \in \rho(A)$ . Viceversa  $\mu \neq 0$  è un autovalore di  $R_\lambda(A)$  se e solo se  $(\lambda + 1/\mu)$  è un autovalore di  $A$ .

Gli autovettori di  $R_\lambda(A)$  associati a  $\mu$  coincidono con quelli di  $A$  associati a  $(\lambda + 1/\mu)$ .

Come conseguenza di questo teorema, abbiamo che gli autospazi di un operatore illimitato con risolvente compatto sono finito dimensionali, quindi ci sono un numero finito di autovettori corrispondenti ai loro autovalori.

Possiamo inoltre concludere che riorganizzando gli autovalori  $\lambda_n$  del risolvente in ordine decrescente, gli autovalori di  $A$  possono essere organizzati in una sequenza in ordine crescente in funzione del loro valore assoluto. Il limite di tale sequenza è infinito.

## 3.2 Operatore di Sturm-Liouville

L'operatore di Sturm-Liouville viene ricavato nell'ambito delle equazioni differenziali, dove una EDO (equazione differenziale ordinaria) di secondo grado può essere posta in forma tale da avere la derivata prima assente, come illustrato dal seguente caso:

Data la seguente equazione differenziale di secondo grado:

$$f'' + p(x)f' + q(x)y = 0 \quad (3.1)$$

appliciamo una trasformata funzionale in modo tale da ottenere l'equazione nella seguente forma:

$$u'' + Z(x)u = 0$$

per ottenere questo risultato poniamo  $f=wu$ , dove  $w=w(x)$ . Sostituiamo nell'equazione 3.1 e otteniamo:

$$(u'w + uw')' + p(x)(u'w + uw') + q(x)uw = 0$$

esplicitiamo la derivata prima:

$$u''w + u'w' + u'w' + uw'' + p(x)(u'w + uw') + q(x)uw = 0$$

raccogliamo i termini simili ed otteniamo:

$$wu'' + (2w' + p(x)w)u' + (q(x)w + p(x)w' + w'')u = 0 \quad (3.2)$$

richiediamo ora che il coefficiente della derivata prima si annulli, otteniamo la seguente equazione differenziale:

$$2w' + p(x)w = 0$$

la cui soluzione è ricavabile mediante separazione di variabile e corrisponde alla seguente equazione:

$$w(x) = C \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^x p(t) dt \right]$$



dove  $C$  è una costante arbitraria. Dividiamo ora l'equazione 3.2 per  $w(x)$  e sostituendo la sua definizione otteniamo:

$$u'' + S(x)u = 0 \quad \text{dove} \quad S(x) = q + p \frac{w'}{w} + \frac{w''}{w} = q - \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p' \quad (3.3)$$

Le equazioni differenziali del secondo ordine di nostro interesse possono essere condensate nello studio dell'operatore di Sturm-Liouville:

$$L_x = \frac{d^2}{dx^2} - q(x) \quad (3.4)$$

dove il pedice  $x$  indica che l'operatore si riferisce ad una sola dimensione.

A tutte le equazioni differenziali sono associate delle condizioni al contorno che specificano il loro dominio. Nel caso dell'operatore di Sturm-Liouville, ipotizziamo che agisca nello spazio di Hilbert  $L^2([a, b])$  che consiste nell'imporre che esista una funzione  $u(x)$  che soddisfa le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) &= 0 \\ \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

dove  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  sono costanti reali. Un sistema di equazioni con le condizioni al contorno precedentemente esposte vengono chiamati sistemi regolari di Sturm-Liouville, i quali sono caratterizzati dalla proprietà del risolvente compatto, per cui vale il seguente teorema:

**Teorema 3.2** Un sistema regolare di Sturm-Liouville ammette un insieme numerabile di autovalori che possono essere ordinati in una sequenza crescente, il cui limite è infinito. Gli autovettori dell'operatore  $L_x$  sono non degeneri e costituiscono una base ortogonale completa. Le autofunzioni  $u_n(x)$  corrispondenti agli autovalori  $\lambda_n$  hanno esattamente  $n$  zeri nel loro intervallo di definizione.

### Autoaggiunzione

Dimostriamo ora che l'operatore  $L_x$  è autoaggiunto sul dominio  $L^2([a, b])$ .

Di seguito l'operatore di Sturm-Liouville non viene espresso con l'equazione (3.4), ma con la forma utilizzata nelle equazioni differenziali (3.3). Questa scelta ha lo scopo di semplificare i calcoli, tuttavia entrambe le scelte non influenzano il risultato finale. Sia  $g$  la funzione che appartiene al dominio dell'aggiunto e sia  $f$  la funzione che appartiene al dominio dell'operatore, abbiamo che:

$$\langle L_x^\dagger g, f \rangle = \langle g, L_x f \rangle = \int_a^b \overline{g(x)} (L_x g)(x) dx = \int_a^b \overline{g(x)} \left[ -\frac{d}{dx} [p(x) f'(x)] + q(x) f(x) \right] dx$$

Eseguiamo una doppia integrazione per parti che porta ad ottenere:

$$\begin{aligned} &= - \left[ p(x) \overline{f(x)} g'(x) \right]_a^b + \left[ p(x) \overline{f'(x)} g(x) \right]_a^b + \langle L_x g, f \rangle = \\ &= p(b) \overline{f'(b)} g(b) - \overline{f(b)} g'(b) - p(a) \overline{f'(a)} g(a) - \overline{f(a)} g'(a) + \langle L_x g, f \rangle = \langle L_x g, f \rangle \end{aligned}$$

tale relazione è verificato se e solo se valgono le condizioni al contorno espresse dalle equazioni (3.5).

### 3.2.1 Proprietà dei sistemi di Sturm-Liouville

Vogliamo ora introdurre alcune proprietà notevoli dei sistemi di Sturm-Liouville, richiamando alcune nozioni fondamentali riguardanti i sistemi di equazioni differenziali.

Consideriamo il seguente sistema di equazioni differenziali omogeneo:

$$L[y] = p_2(x)y'' + p_1y' + P_0y = 0 \quad (3.6)$$

il quale permette di introdurre il seguente concetto:

**Def. 3.2** il sistema espresso dall'equazione (3.6) è definito esatto solo se:

$$L[f] \equiv p_2(x)f'' + P_1(x)f' + p_0f = \frac{d}{dx} [A(x)f' + B(x)f]$$

Questo vale  $\forall f \in C^2[a, b]$  e per  $A, B \in C^1[a, b]$ .

Possiamo considerare in questo caso un fattore integrante  $\mu(x)$ , una funzione che moltiplicata per  $L[y]$ , lo rende esatto.

Nel caso in cui esista un fattore integrante l'equazione (3.6) può essere scritta nel seguente modo:

$$\frac{d}{dx} [A(x)y' + B(x)y] = 0 \Rightarrow A(x)y' + B(x)y = C$$

è stata riscritta come un'equazione differenziale lineare con un termine non omogeneo.

Torniamo ora ad esaminare l'equazione (3.6).

**Proposizione 3.1** il sistema di equazioni differenziali espresso dalla (3.6) è esatto se e solo se  $p_2'' - p_1' + p_0 = 0$ .

In generale un sistema di equazioni differenziali non è esatto, tuttavia può essere reso tale come illustrato dal seguente risultato:

**Proposizione 3.2** Una funzione  $\mu$  è un fattore integrante per la (3.6), se e solo se è soluzione del seguente sistema omogeneo di equazioni differenziali:

$$M[\mu] = (p_2\mu)'' - (p_1\mu)' + p_0\mu = 0 \quad (3.7)$$

La dimostrazione di questa proposizione è conseguenza della proposizione precedente. L'equazione (3.7) può essere scritta nella seguente forma:

$$P_2\mu'' + (2P_2' - p_1)\mu' + (p_2'' - p_1' + p_0)\mu = 0 \quad (3.8)$$

In questo caso l'operatore M può essere espresso dalla seguente relazione:

$$M \equiv p_2 \frac{d^2}{dx^2} + (2p_2' - p_1) \frac{d}{dx} + (p_2'' - p_1' + p_0) \quad (3.9)$$

Tale operatore è chiamato aggiunto dell'operatore L. Notiamo che il biaggiunto di L è se stesso. questa proprietà suggerisce che v è il fattore integrante di L[u], allora u è il fattore integrante di M[v]=L<sup>†</sup>[v]. Moltiplichiamo ora L[u] e M[v] rispettivamente per v e u e facciamo la differenza al fine di ottenere:

$$vL[u] - uM[v] = (vp_2)u'' - u(p_2v)'' + (vp_1)u' + u(p_1v)'$$

tale espressione può essere semplificata agendo sulle derivate, ottenendo:

$$vL[u] - uM[v] = \frac{d}{dx} [p_2vu' - (p_2v)'u + p_1uv] \quad (3.10)$$

Integriamo da a a b e otteniamo la seguente equazione:

$$\int_a^b (vL[u] - uM[v])dx = [p_2vu' - (p_2v)'u + p_1uv]_a^b \quad (3.11)$$

Le equazioni (3.10) e (3.11) sono chiamate identità lagrangiane.

Ricordiamo ora un'ulteriore proprietà necessaria per studiare i sistemi di Sturm-Liouville. Dalla teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE), sappiamo che un'equazione che rientra in questo campo, può essere espressa dalle seguenti equazioni:

$$L_x[u] + \lambda u = 0 \quad \text{oppure} \quad p_2(x) \frac{d^2u}{dx^2} + p_1(x) \frac{du}{dx} + p_0(x) + \lambda u = 0 \quad (3.12)$$

dove  $\lambda$  è una costante arbitraria, mentre  $u(x)$  è una funzione di una singola variabile. Questa equazione può essere visto come un problema agli autovalori per  $L_x$ . Assumiamo che l'operatore di Sturm-Liouville sia autoaggiunto, in questo modo possiamo invocare il seguente teorema riguardante gli operatori differenziali aggiunti:

**Teorema 3.3** Dato un sistema di equazioni differenziali nella forma espressa dall'equazione (3.6) è autoaggiunto se e solo se  $p_2' = p_1$ , in questo caso l'equazione differenziale può essere scritta nel modo seguente:

$$\frac{d}{dx} \left[ p_2(x) \frac{du}{dx} \right] + p_0u = 0 \quad (3.13)$$

mentre se non è autoaggiunto, può essere reso tale moltiplicando il sistema (3.12) per il seguente fattore:

$$h(x) = \frac{1}{p_2(x)} \exp \left[ \int^x \frac{p_1(t)}{p_2(t)} dt \right] \quad (3.14)$$

Torniamo ora al sistema di Sturm-Liouville, espresso dall'equazione (3.6). Moltiplichiamolo per la funzione (3.14), in modo da renderlo autoaggiunto per ogni parametro reale  $\lambda$ . Possiamo esprimerlo ora nella seguente forma:

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{du}{dx} \right] + [\lambda w(x) - q(x)] u = 0 \quad (3.15)$$

dove la funzione  $w(x)$  corrisponde alla funzione espressa dall'equazione (3.14) e  $p(x) = w(x)p_2(x)$  e  $q(x) = -p_0(x)w(x)$ .

L'equazione (3.15) esprime la forma standard dell'equazione di Sturm-Liouville. Per ottenere la forma espressa dall'equazione (3.12) è necessario praticare la sostituzione di Liouville delle variabili dipendenti ed indipendenti, come indicato dalle seguenti trasformazioni:

$$u(x) = v(t) [p(x)w(x)]^{-1/4} \quad t = \int_a^x \sqrt{\frac{w(s)}{p(s)}} ds \quad (3.16)$$

Con questo metodo l'equazione (3.6) diventa:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + [\lambda - Q(t)] v = 0 \quad (3.17)$$

dove:

$$Q(t) = \frac{q(x(t))}{w(x(t))} + [p(x(t))w(x(t))]^{-1/4} \frac{d^2}{dt^2} [(pw)^{1/4}]$$

Il significato di  $w(x)$ , chiamata funzione peso (oppure peso), è quello di rendere l'operatore differenziale autoaggiunto. Questo appare anche in un'altra situazione. Consideriamo l'identità lagrangiana associata ad un operatore autoaggiunto  $L$  (la cui definizione è esplicitata dalle equazioni ((3.10) e (3.11)):

$$uL[v] - vL[u] = \frac{d}{dx} \{p(x) [u(x)v'(x) - v(x)u'(x)]\} \quad (3.18)$$

Nel caso in cui specializziamo questa identità all'equazione (3.6) otteniamo che  $u(x)$  e  $v(x)$  sono due autovettori  $u_1, u_2$  associati agli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2$ . Integriamo entrambe le quantità dell'equazione (3.18) e otteniamo:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b w(x) u_1 u_2 dx = \{p(x) [u_1(x) u_2'(x) - u_2(x) u_1'(x)]\}_a^b \quad (3.19)$$

Una proprietà molto utile è il fatto che le soluzioni delle equazioni differenziali siano ortogonali tra loro quando appartengono ad autovalori diversi. Questa proprietà è valida se assumiamo un prodotto scalare che contempla la funzione peso  $w(x)$ , per esempio:

$$\langle g, L_x f \rangle = \int_a^b \overline{g(x)} (L_x f)(x) w(x) dx$$

nel sottospazio  $L^2([a, b])$ . Un'altra condizione impone che il nucleo integrale nell'equazione (3.19) si annulli.

Esistono varie condizioni al contorno che soddisfano le richieste appena fatte, un esempio può essere fornito dalle condizioni periodiche, date dalle seguenti equazioni:

$$u(a) = u(b) \quad e \quad u'(a) = u'(b) \quad (3.20)$$

Queste sono le stesse condizioni scelte per studiare l'autoaggiunzione dell'operatore laplaciano nel primo capitolo.

### Sistemi di Sturm-Liouville singolari

Un sistema di Sturm-Liouville così come è stato presentato nella sezione precedente è troppo restrittivo per le applicazioni fisiche, in cui uno dei due estremi del dominio di definizione è infinito oppure è un punto singolare dell'equazione 3.8. In base a queste considerazioni diamo la seguente definizione:

**Def.3.3** Un sistema di Sturm-Liouville è definito singolare se e solo se sono soddisfatte almeno una delle seguenti condizioni:

- I) L'intervallo  $[a, b]$  può essere esteso a infinito in una o entrambe le direzioni.
- II) Le funzioni  $p(x)$  e  $w(x)$  possono annullarsi negli estremi dell'intervallo.
- III) La funzione  $q(x)$  non è continua in  $[a, b]$ .
- IV) Una delle funzioni  $p(x), q(x)$  e  $w(x)$  è singolare in  $a$  oppure in  $b$ .

Possiamo desumere che gli autovalori di un sistema di Sturm-Liouville regolare non possono generalizzare un sistema di Sturm-Liouville singolare, le cui autofunzioni sono ortogonali tra loro soltanto se il nucleo integrale dell'equazione 3.12 si annulla. Forniamo ora un esempio di quanto esposto, considerando l'equazione differenziale di Hermite:

$$u''(x) - 2xu'(x) + \lambda u = 0 \quad (3.21)$$

applichiamo ora la seguente funzione peso, in modo da rendere l'equazione differenziale un sistema di Sturm-Liouville:

$$w(x) = e^{-x^2}$$

otteniamo:

$$\frac{d}{dx} \left[ e^{-x^2} \frac{du}{dx} \right] + \lambda e^{-x^2} u = 0 \quad (3.22)$$

I termini al contorno corrispondono alle due autofunzioni  $u_1(x), u_2(x)$  corrispondenti agli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2$ , tali che  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , in questo modo otteniamo:

$$\left\{ e^{-x^2} [u_1(x)u_2'(x) - u_2(x)u_1'(x)] \right\}_a^b \quad (3.23)$$

Questo termine si annulla per autofunzioni arbitrarie se  $a = -\infty$  e  $b = +\infty$ . Le soluzioni all'equazione differenziale sono fornite dai polinomi di Hermite che possono essere espressi utilizzando la formula di Rodriguez nel seguente modo:

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2) \quad (3.24)$$

Tali polinomi soddisfano la seguente condizione di ortogonalità:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 0 \quad \text{se } m \neq n \quad (3.25)$$

### 3.3 Esempi di sistemi di Sturm-Liouville

In questo paragrafo vogliamo illustrare due esempi notevoli di sistemi di Sturm-Liouville: la conduzione del calore e le onde guidate. In particolare vogliamo mettere in risalto l'importanza delle condizioni al contorno e le conseguenze di quest'ultime sulla soluzione del problema.

#### 3.3.1 Conduzione del calore

##### Esempio 1a: Conduzione del calore in una superficie finita rettangolare

Considero una piastra rettangolare che conduce calore di lati  $a$  e  $b$ , tenuta a  $T=0$ . Assumiamo che a  $t=0$  la temperatura ha una funzione di distribuzione  $f(x,y)$ . Scopo di questo esempio è trovare la variazione della temperatura per tutti i punti  $(x,y)$  per  $t > 0$ . L'equazione di diffusione bidimensionale è la seguente:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k^2 \Delta T = k^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (3.26)$$

Applichiamo una separazione di variabili, in modo tale che:  $T(x,y,t)=X(x)Y(y)g(t)$ . Questo permette di separare l'equazione alle derivate parziali in tre equazioni differenziali:

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda X = 0 \quad \frac{d^2Y}{dy^2} + \mu Y = 0 \quad \frac{dg}{dt} + k^2(\lambda + \mu)g = 0 \quad (3.27)$$

Le condizioni al contorno che dobbiamo imporre sono le seguenti:

$$T(0, y, t) = T(a, y, t) = T(x, 0, t) = T(x, b, t) = 0$$

Le condizioni soprascritte con le equazioni differenziali 3.20 costituiscono due sistemi di Sturm-Liouville, le cui soluzioni sono le seguenti:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad \text{con} \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad \text{per} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.28)$$

$$Y_m(y) = \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \quad \text{con} \quad \mu_m = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \quad \text{per} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.29)$$

Questi risultati permettono di scrivere la soluzione generale:

$$X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad Y(y) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \quad (3.30)$$

Per la terza equazione differenziale introduciamo il parametro seguente:

$$\gamma_{mn} = k^2\pi^2(n^2/a^2 + m^2/b^2)$$

La terza equazione 3.20, diventa:

$$\frac{dg}{dt} + \gamma_{mn}g = 0$$

la cui soluzione è la seguente:

$$g(t) = C_{mn}e^{-\gamma_{mn}t}$$

Combiniamo tutte le soluzioni per avere l'espressione più generale della funzione di distribuzione del calore:

$$T(X, Y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} e^{-\gamma_{mn}t} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \quad (3.31)$$

dove il parametro  $A_{mn} = A_n B_m C_{mn}$  è una costante arbitraria, per determinarla imponiamo la condizione iniziale  $T(x,y,0)=f(x,y)$ . Questo implica che:

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \quad (3.32)$$

possiamo calcolare i coefficienti  $A_{mn}$  come segue:

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a dx \int_0^b dy f(x, y) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

### Esempio 1b: Conduzione del calore in una superficie circolare

Consideriamo una superficie circolare conduttrice di raggio  $a$ , la quale al tempo  $t=0$ , ha una funzione di distribuzione del calore  $f(r, \phi)$ , dove gli argomenti della funzione rappresentano le coordinate polari. Come nel caso precedente cerchiamo la variazione di  $T$  per tutti i punti  $(r, \phi)$  sulla superficie per  $t>0$  quando il bordo è mantenuto a  $T=0$ . L'equazione del calore bidimensionale in coordinate polari è la seguente:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k^2 \Delta T = k^2 \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right] \quad (3.33)$$

Applichiamo una separazione di variabili in modo tale che:  $T(r, \phi, t) = R(r)S(\phi)g(t)$ . Da cui si ottengono le seguenti equazioni differenziali ordinarie:

$$\frac{dg}{dt} = k^2 \lambda g \quad \frac{d^2 S}{d\phi^2} + \mu S = 0 \quad (3.34)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \left( \frac{\mu}{r^2} + \lambda \right) R = 0$$

richiediamo che  $\lambda = b^2 < 0$  per ottenere il decadimento esponenziale. Per assicurarci la periodicità, dobbiamo imporre che  $\mu = m^2$ , dove  $m$  è un intero. Le soluzioni alle equazioni differenziali sono le seguenti:

$$g(t) = Ae^{-k^2 b^2 t} \quad S(\phi) = B \cos(m\phi) + C \sin(m\phi) \quad R(r) = DJ_m(br) \quad (3.35)$$

dove  $J_m$  sono le funzioni di Bessel (figura 3.1). la temperatura è nulla per  $r=a$ . Dobbiamo anche imporre che le  $J_m$  soddisfino:  $J_m(br) = 0$  o  $b = x_{mn}/a$ . La soluzione generale che

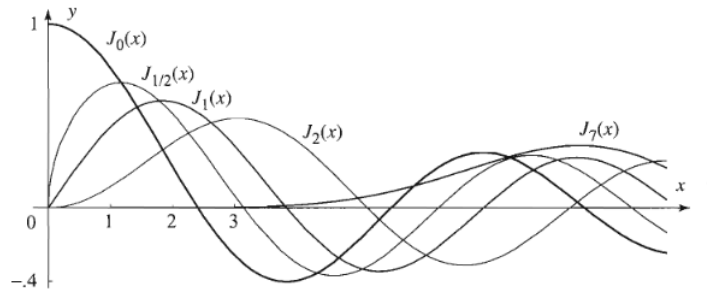


Figura 3.1: Grafico delle funzioni di Bessel  $J_n(x)$  per  $n=0,1/2,1,2,7$

determina l'evoluzione del calore è possibile scriverla utilizzando la serie di Fourier-Bessel, in questo modo otteniamo:

$$T(r, \phi, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k^2 (x_{mn}/a)^2 t} J_m \left( \frac{x_{mn}}{a} r \right) (A_{mn} \cos(m\phi) + B_{mn} \sin(m\phi)) \quad (3.36)$$



Dove i coefficienti  $A_{mn}, B_{mn}$  si ricavano dalle seguenti espressioni:

$$A_{mn} = \frac{2}{\pi a^2 J_{m+1}^2(x_{mn})} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a dr r V(r, \phi) J_m\left(\frac{x_{mn}}{a} r\right) \cos(m\phi) \quad (3.37)$$

$$B_{mn} = \frac{2}{\pi a^2 J_{m+1}^2(x_{mn})} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a dr r V(r, \phi) J_m\left(\frac{x_{mn}}{a} r\right) \sin(m\phi) \quad (3.38)$$

Dove la funzione  $V$  che compare nelle equazioni 3.30,3.31 è il seguente:

$$V(r, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m\left(\frac{x_{mn}}{a} r\right) (A_{mn} \cos(m\phi) + B_{mn} \sin(m\phi)) \quad (3.39)$$

### 3.3.2 Guide d'onda

Data l'equazione delle onde bidimensionale:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) \psi = 0 \quad (3.40)$$

dove  $\psi(x, y)$  è la funzione d'onda bidimensionale,  $k$  il numero d'onda e  $\omega$  la pulsazione. Essa unita alle quattro equazioni di Maxwell fornisce le componenti trasverse (ovvero quelle perpendicolari alla direzione di propagazione) come quelle che è possibile osservare

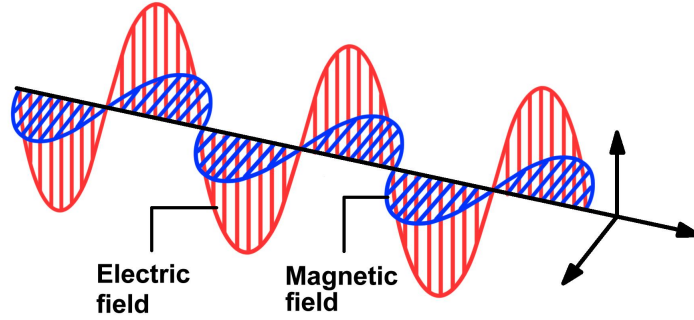


Figura 3.2: Rappresentazione grafica della propagazione di un'onda elettromagnetica, in cui sono indicati il campo magnetico ed elettrico.

nella figura 3.2, che possiamo indicare con  $E_t$  e  $B_t$  oppure in termine delle componenti longitudinali  $E_z$  e  $B_z$ . Tali componenti possono essere espresse manipolando l'equazione delle onde e introducendo il parametro  $\gamma^2 = \omega^2/c^2 - k^2$  e il gradiente trasverso  $\nabla_t = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ , in modo da ottenere:

$$\gamma^2 E_t = \nabla_t \left( \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) - i \frac{\omega}{c} \hat{e}_z \times (\nabla_t B_z) \quad (3.41)$$

$$\gamma^2 B_t = \nabla_t \left( \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) + i \frac{\omega}{c} \hat{e}_z \times (\nabla_t E_z) \quad (3.42)$$

In generale sono studiate tre tipi di onde guidate:

I) Onde in cui la componente magnetica trasversa è nulla ovunque. In questo caso le condizioni al contorno sono tali da richiedere che  $E_z$  sia nullo sulle pareti conduttrici della guida.

II) Onde in cui la componente trasversa del campo elettrico è nulla, in questo caso la condizione al contorno richiede che la derivata direzionale:

$$\frac{\partial B_z}{\partial n} \equiv \hat{e}_n \cdot (\nabla B_z)$$

si annulli alla parete conduttrice. Un esempio di questo tipo di guida d'onda è illustrato nella figura 3.3

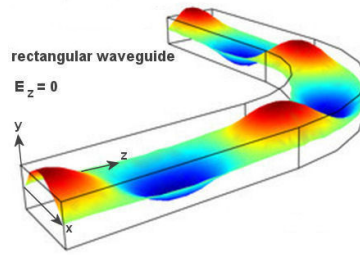


Figura 3.3: Onda guidata di tipo II, in cui la componente trasversa del campo elettrico è nulla (Waveguide: Asymptotic methods and numerical analysis, International Conference, Napoli, 2015).

III) Onde in cui entrambe le componenti trasverse del campo elettromagnetico sono nulle. Questo equivale a richiedere che  $\gamma^2$  nelle equazioni 3.34-3.35 sia nullo. Le componenti trasversali del campo elettrico e magnetico non sono vincolate ad annullarsi alle pareti del conduttore. Dal punto di vista fisico ciò equivale ad una funzione d'onda a cui non sono state imposte condizioni al contorno.

Come nel caso precedente, analizziamo le guide d'onda con diverse condizioni al contorno, limitandoci allo studio di quelle di primo tipo.

### Esempio 2a: Guide d'onda rettangolari

Consideriamo una guida d'onda rettangolare con una sezione di lati  $a$  e  $b$ , come illustrato nella figura 3.4. Dalla equazione 3.33 abbiamo che:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \gamma^2 E_z = 0 \quad (3.43)$$

appliciamo una separazione di variabili  $E_z(x, y) = X(x)Y(y)$ , in modo da ottenere i

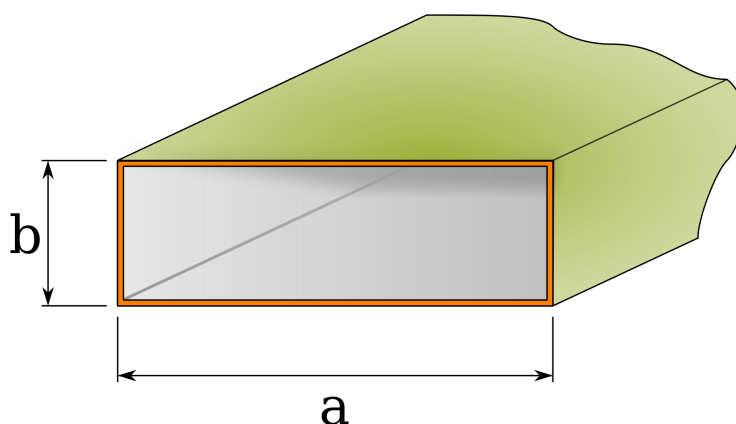


Figura 3.4: Rappresentazione della sezione rettangolare di una guida d'onda  
due seguenti sistemi di Sturm-liouville:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda X = 0 \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + \mu Y = 0$$

a cui sono associate rispettivamente le seguenti condizioni al contorno:

$$X(0) = X(a) = 0 \quad Y(0) = Y(b) = 0$$

dove  $\gamma^2 = \lambda + \mu$ . Le soluzioni ai sistemi di Sturm-Liouville sono le seguenti:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.44)$$

$$Y_m(x) = \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \quad \mu_m = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \quad m = 1, 2, \dots, \quad (3.45)$$

Il numero d'onda è dato dalla seguente equazione:

$$k_{mn} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} \quad (3.46)$$

un valore reale significa che l'onda si propaga nello spazio, mentre un valore immaginario conduce ad un decadimento esponenziale oppure alla crescita lungo l'asse  $z$ . È possibile determinare una frequenza di cut-off:

$$\omega_{mn} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} \quad \text{per } m, n \geq 1 \quad (3.47)$$

sotto la quale l'onda non può propagarsi attraverso la guida d'onda. Per onde guidate di tipo I, la pulsazione minima che permette la propagazione nella guida d'onda è:

$$\omega_{11} = \pi c \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}$$

La soluzione generale per la componente trasversa del campo elettrico è la seguente:

$$E_z = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) e^{i(\omega t \pm k_{mn}z)} \quad (3.48)$$

Le costanti  $A_{mn}$  sono arbitrarie e possono essere determinate dalla forma iniziale dell'onda, ma questo non viene comunemente fatto.  $E_z$  può essere trovato considerando le seguenti equazioni tipiche delle onde guidate di tipo I:

$$(\nabla_t^2 + \gamma)E_z = 0 \quad B_z = 0$$

$$\gamma^2 E_t = \nabla_t \left( \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \quad \gamma^2 B_t = i \frac{\omega}{c} \hat{e}_z \times (\nabla_t E_z)$$

### Esempio 2b: Guide d'onda cilindriche

Consideriamo un'onda guidata di Tipo I che si propaga lungo l'asse  $z$  in un conduttore cilindrico. L'equazione delle onde espressa in coordinate cilindriche è la seguente:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} + \gamma^2 E_z = 0 \quad (3.49)$$

Applichiamo, come nel caso precedente, la separazione di variabili  $E_z = R(r)S(\phi)$ , dove la soluzione angolare è la seguente:

$$S(\phi) = A \cos(m\phi) + B \sin(m\phi) \quad (3.50)$$

L'altra equazione differenziale che costituisce un sistema di Sturm-liouville è la seguente:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left( \gamma^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (3.51)$$

La soluzione di questa equazione è regolare per  $r=0$  e si annulla per  $r=a$ :

$$R(r) = C J_m \left( \frac{x_{mn}}{a} r \right) \quad e \quad \gamma = \frac{x_{mn}}{a} \quad (3.52)$$

richiamiamo la definizione di  $\gamma$  per ottenere:

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \gamma^2 = \frac{x_{mn}^2}{a^2} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{x_{mn}^2}{a^2}}$$

Questo permette di ricavare la frequenza di cut-off, sotto la quale non si ha propagazione delle onde:

$$\omega_{mn} = \frac{c x_{mn}}{a}$$

La soluzione per il caso azimutale ( $m=0$ ) è la seguente:

$$E_z(r, \phi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0 \left( \frac{x_{0n}}{a} r \right) e^{i(\omega t \pm k_n z)} \quad B_z = 0 \quad (3.53)$$

dove il vettore d'onda è il seguente:

$$k_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{x_{0n}^2}{a^2}}$$

### 3.4 Applicazioni delle guide d'onda

Le guide d'onda da un punto puramente intuitivo possono essere interpretate come condotti in cui un liquido, ipotizziamo l'acqua, è vincolato a scorrere. Al giorno d'oggi esistono molteplici tipi di guide d'onda sia per forma sia per tipo di onde utilizzate (microonde, onde radio). La frequenza dell'onda trasmessa è determinata dalla sezione della guida. Per esempio le fibre ottiche sono in grado di guidare onde ad alta frequenza. In natura esistono particolari strutture che possono essere viste come guide d'onda. Una di esse è il canale SOFAR (sound fixing and ranging channel), ovvero uno strato orizzontale di acqua nell'oceano, in cui ad una certa profondità la velocità del suono è minima. Il canale SOFAR può essere visto come una guida d'onda per onde sonore a bassa frequenza, le quali possono propagarsi centinaia di chilometri prima di dissiparsi.

# Conclusioni

Dai risultati ottenuti possiamo concludere che il dominio di definizione e le condizioni al contorno determinano fortemente la natura degli operatori differenziali. In particolare abbiamo verificato che esiste corrispondenza tra operatori autoaggiunti e autovalori reali. Possiamo concludere che questi tipi di operatori sono ottimi candidati come osservabili in meccanica quantistica, dove la proprietà di autoaggiunzione è fondamentale. Abbiamo verificato in un caso particolare come un osservabile quale l'impulso definito su un dominio parzialmente limitato perde la proprietà di autoaggiunzione e di conseguenza il suo spettro è costituito da autovalori complessi.

Dallo studio dell'operatore di Sturm-Liouville abbiamo poi ottenuto anche in questo caso la corrispondenza tra autoaggiunzione e autovalori reali. Abbiamo poi studiato alcune applicazioni notevoli dei sistemi di Sturm-Liouville e le loro applicazioni fisiche, notando, come in precedenza, che le condizioni al contorno sono fondamentali e alterano profondamente il sistema.

# Appendice A

## Elementi di teoria degli operatori in uno spazio di Hilbert

**Def. 1.1** Uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  è uno spazio completo, infinito dimensionale, prehilbertiano, ovvero, dotato di una metrica indotta dalla norma, a sua volta indotta dal prodotto scalare.

Uno spazio di Hilbert ha anche la struttura di uno spazio di Banach (Spazio normato completo).

**Def. 1.2** Dato un insieme  $\mathcal{L}$  nello spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ , esso viene definito **Varietà lineare** se e solo se, dati due elementi  $x, y \in \mathcal{H}$ , vale la relazione  $\alpha x + \beta y \in \mathcal{L}$ , dove  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .

Nella seguente trattazione vengono considerati soltanto spazi vettoriali complessi. Questa scelta riguardante il campo degli scalari su cui è definito lo spazio di Hilbert è legata al fatto che per una generica matrice  $A$ , gli autovalori ad essa associati derivano dalle radici dell'equazione  $\det(A - \lambda) = 0$ , per la cui completa risoluzione è necessario ricorrere al campo complesso.

Altra assunzione riguarda la seguente proprietà:

**Def. 1.3** Uno spazio di Hilbert  $H$  viene definito **separabile** soltanto se ammette un sistema ortonormale completo numerabile di vettori.

### A.1 Operatori lineari

Un operatore può essere considerato come una trasformazione lineare che agisce su tutto il dominio, senza restrizioni, se è definita su uno spazio finito dimensionale. Viceversa è necessario specificare il dominio, ovvero il sottoinsieme dello spazio di Hilbert per cui ha

significato applicare la trasformazione.

Il dominio  $\mathcal{D}(A)$  viene sempre assunto essere una varietà lineare di  $\mathcal{H}$ .

**Def. 1.4** Viene definito **range** di un operatore  $A$  e indicato con la notazione  $\mathcal{R}(A)$ , l'insieme dei valori assunti dalla trasformazione  $A$ .

Sempre per il principio di linearità anche il range di un operatore come il dominio forma una varietà lineare.

### A.1.1 Invertibilità

**Def. 1.5** Dato un operatore  $A$ , viene definito **iniettivo** (oppure 1-1) se e solo se il suo spazio nullo:

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathcal{D}(A) : Ax = 0\} \quad (\text{A.1})$$

consiste solo nel vettore nullo ( $\mathcal{N}(A) = \{0\}$ ). Questa condizione implica che l'equazione  $y=Ax$  ammette un'unica soluzione  $x \in \mathcal{D}(A) \forall y \in \mathcal{R}(A)$ . Viene definito in questo modo un operatore inverso  $A^{-1}$ , il quale è iniettivo:

$$A^{-1} : \mathcal{R}(A) \xrightarrow[ su]{1-1} y \rightarrow x = A^{-1}y \quad (\text{A.2})$$

$$\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A) \quad \mathcal{R}(A^{-1}) = \mathcal{D}(A)$$

Valgono le seguenti relazioni:

$$A^{-1}Ax = x \quad \forall x \in \mathcal{D}(A) \quad AA^{-1}y = y \quad \forall y \in \mathcal{R}(A) \quad (\text{A.3})$$

In generale non vale la relazione  $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}$ , in quanto i domini su cui sono definiti l'operatore e il suo inverso, solitamente non coincidono.

$$\mathcal{D}(A^{-1}A) = \mathcal{D}(A) \quad \mathcal{D}(AA^{-1}) = \mathcal{R}(A) \quad \mathcal{D}(\mathbb{1}) = \mathcal{H} \quad (\text{A.4})$$

Queste relazioni permettono di ottenere:

$$A^{-1}A = \mathbb{1}_{\mathcal{D}(A)} \quad AA^{-1} = \mathbb{1}_{\mathcal{R}(A)}$$

dove  $\mathbb{1}_{\mathcal{D}(A)}$ ,  $\mathbb{1}_{\mathcal{R}(A)}$ , indicano gli operatori identità sulle varietà lineari associate.

### A.1.2 Continuità

Il prodotto scalare che definisce uno spazio di Hilbert definisce una norma, la quale induce una topologia nello spazio. Questa condizione permette di introdurre il concetto di



continuità per un operatore.

**Def.1.5** Un operatore lineare  $A$  è continuo in un punto  $x_0 \in \mathcal{D}(A)$  se vale la seguente relazione:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} Ax = Ax_0 \quad (\text{A.5})$$

Tale operazione è lecita in uno spazio di Hilbert per le motivazioni sopra esposte.

### A.1.3 Norma e limitatezza

**Def. 1.6** Dato un operatore  $A$  definito su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ , viene definito **limitato** se e solo se esiste una costante positiva  $C$  tale per cui viene soddisfatta la seguente relazione:

$$\|Ax\| \leq \|x\| \quad \forall x \in \mathcal{D}(A) \quad (\text{A.6})$$

Da questa relazione è possibile definire la **norma** di  $A$  come la più piccola costante che verifica la relazione (1.5):

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad (\text{A.7})$$

È importante notare che se un operatore è limitato, la sua funzione non è detto che sia limitata nel senso del dominio, ma che la sua "pendenza" sia limitata. L'importanza di queste definizioni risiede nel fatto che viene definita una condizione per la continuità per ogni punto del dominio della trasformazione. Questo porta al fatto di poter trattare indifferentemente gli operatori limitati e quelli continui.

### A.1.4 Operatori aggiunti e autoaggiunti

In questo paragrafo vengono presentati gli operatori aggiunti e autoaggiunti, questi ultimi in particolare rivestono un importante ruolo in meccanica quantistica, in quanto si suppone che l'operatore associato ad un osservabile di un sistema quantistico sia appunto autoaggiunto.

#### Operatore aggiunto

Dato un operatore  $A$ , invocando il teorema di Fisher-Riesz è possibile ammettere l'esistenza e definire l'operatore aggiunto. Deve valere la condizione che il dominio di  $A$  sia denso nello spazio di Hilbert,  $\mathcal{D}(A)^- = \mathcal{H}$ .

Le condizioni che definiscono l'aggiunto (indicato con il simbolo  $A^\dagger$ ) sono le seguenti:

$$\mathcal{D}(A^\dagger) = \{x \in \mathcal{H} : \exists C_x > 0 : |\langle x, Ay \rangle| \leq C_x \|y\|, \forall y \in \mathcal{D}(A)\} \quad (\text{A.8})$$

$$\langle A^\dagger x, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \forall y \in \mathcal{D}(A) \forall x \in \mathcal{D}(A^\dagger) \quad (\text{A.9})$$

È importante notare che la densità del dominio della trasformazione permette di invocare il teorema di Fisher-Riesz, determinando in questo modo l'univocità della corrispondenza:

$$x \longrightarrow x^* = A^\dagger x$$

dove l'elemento  $x^*$  è definito dalla seguente equazione:

$$\langle x, Ay \rangle = \langle x^*, y \rangle \forall y \in \mathcal{D}(A)$$

Il dominio dell'aggiunto è non vuoto in quanto contiene almeno il vettore nullo:

$$\{0\} \subseteq \mathcal{D}(A)$$

L'operatore  $A$  è limitato e densamente definito, di conseguenza  $\langle x, Ay \rangle$  visto come funzionale lineare risulta continuo  $\forall x \in \mathcal{H}$  per cui  $\mathcal{D}(A^\dagger) = \mathcal{H}$  e l'aggiunto risulta limitato, la cui norma coincide con quella dell'operatore stesso,  $\|A^\dagger\| = \|A\|$ .

È possibile costruire il biaggiunto dell'operatore, indicato con  $A^{\dagger\dagger}$ . Tale costruzione è possibile solo se il dominio dell'aggiunto è denso nello spazio di Hilbert (in analogia con quanto fatto per definire l'aggiunto). In generale vale la seguente inclusione:

$$A \subseteq A^{\dagger\dagger}$$

Da ciò si comprende che il dominio del biaggiunto può essere più esteso dell'operatore. Il significato di inclusione tra i due operatori può essere interpretato come l'inclusione del dominio dell'aggiunto da parte di quello del biaggiunto.

### operatore autoaggiunto

**Def.1.6** Dato un operatore  $A$ , viene definito autoaggiunto se e solo se  $A^\dagger = A$ . Questa condizione può essere espressa anche nel seguente modo:

$$\mathcal{D}(A^\dagger) = \mathcal{D}(A) \quad A^\dagger y = Ay \quad \forall y \in \mathcal{D}(A) \tag{A.10}$$

Un operatore autoaggiunto è anche un operatore simmetrico. Vale la seguente equazione:

$$\langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle \tag{A.11}$$

In particolare un operatore densamente definito viene detto simmetrico se e solo se  $\langle x, Ax \rangle$  è reale per ogni  $x \in \mathcal{D}(A)$ . La validità della relazione 1.11 comporta che un operatore è simmetrico solo se un elemento dello spazio di Hilbert appartiene sia al dominio di  $A$ , sia di  $A^\dagger$ .

### A.1.5 Operatori chiusi

**Def.1.7** Dato un operatore  $A$ , viene definito grafico di  $A$  come il sottinsieme di  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$  formato da tutte le coppie  $(x, Ax)$  al variare di  $x \in \mathcal{D}(A)$ :

$$\mathcal{G}(A) = \{(x, y) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} : x \in \mathcal{D}(A), y = Ax\} \quad (\text{A.12})$$

Dalla definizione 1.7 è possibile concludere che due trasformazioni sono identiche se e solo se hanno lo stesso grafico.

**Def. 1.8** Un operatore lineare  $A$  su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  è definito chiuso se il suo grafico  $\mathcal{G}(A)$  è chiuso.

Un operatore è detto chiudibile se e solo se la chiusura del suo grafico rappresenta il grafico di un operatore lineare  $A^-$ , detto chiusura di  $A$ :

$$\mathcal{G}(A)^- = \mathcal{G}(A^-)$$

#### Criteri di autoaggiunzione

Alla luce dell'ultima definizione è possibile definire una serie di criteri che permettono di determinare se un operatore è autoaggiunto. Per prima cosa consideriamo le conseguenze che derivano dal fatto che se un operatore è autoaggiunto è anche simmetrico.

**Teo. 1.1** Sia  $A$  un operatore simmetrico densamente definito su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ . Per ogni  $\lambda$  tale che  $\Im \lambda \neq 0$ , si ha:

1)  $\lambda$  non è un autovalore di  $A$ , questo comporta che:

$$\mathcal{N}(\lambda - A) = \{0\} \quad (\text{A.13})$$

In particolare per ogni  $x \in \mathcal{D}(A)$ :

$$\|(\lambda - A)x\| \geq |\Im \lambda| \|x\| \quad (\text{A.14})$$

2) Se  $A$  è chiuso allora il range dell'operatore  $\lambda - A$  è un sottospazio chiuso:

$$\mathcal{R}(\lambda - A) = (\mathcal{R}(\lambda - A))^- \quad (\text{A.15})$$

**Dim. 1.1** Dimostriamo il primo punto del teorema.

Consideriamo gli  $x \in \mathcal{D}(A)$ , si ha:

$$\langle x, (\lambda - A)x \rangle = \Re \lambda \langle x, x \rangle - \langle x, Ax \rangle + i \Im \lambda \langle x, x \rangle$$

Dove entrambi i prodotti a scalari a destra dell'uguale sono reali, quindi:

$$|\langle x, (\lambda - A)x \rangle|^2 = (\Re \lambda \langle x, x \rangle - \langle x, Ax \rangle)^2 + (\Im \lambda \langle x, x \rangle)^2$$

Applico la disuguaglianza di Schwartz:

$$\|x\|^2 \|(\lambda - A)x\|^2 \geq |\langle x, (\lambda - A)x \rangle|^2 \geq |\Im \lambda|^2 \|x\|^4$$

L'ultima disuguaglianza corrisponde alla relazione (1.12), che ha come conseguenza il fatto che il nucleo dell'operatore  $(\lambda - A)$  coincide con lo spazio nullo. Questo risultato è semplice da verificare in quanto:

$$(\lambda - A)x = 0$$

Il parametro  $\lambda$  è caratterizzato dal fatto di avere  $\Im \lambda \neq 0$ . Di conseguenza  $x=0$ .

Dimostriamo ora il secondo punto del teorema. Supponiamo che l'operatore  $A$  sia chiuso e sia  $y \in (\mathcal{R}(\lambda - A))^-$ . Esiste una successione di punti  $x_j \in \mathcal{D}(A)$  tale che:

$$(\lambda - A)x_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} y$$

Grazie all'utilizzo della relazione precedentemente dimostrata, si può scrivere:

$$\|(\lambda - A)x_j - (\lambda - A)x_k\| \geq |\Im \lambda| \|x_j - x_k\|$$

La successione  $(\lambda - A)x_j$  è convergente e quindi di Cauchy e lo stesso, essendo  $\Im \lambda \neq 0$ , questo determina che la successione di punti  $x_j$  ammette un limite  $x \in \mathcal{H}$  :

$$x_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x$$

Questo comporta la convergenza della successione  $Ax_j$  :

$$Ax_j = \lambda x_j - (\lambda - A)x_j \longrightarrow \lambda x - y$$

Data la chiusura di  $A$  e la convergenza contemporanea di  $x_j$  e  $Ax_j$  implica che  $x \in \mathcal{D}(A)$  e  $\lambda x - y = Ax$  :

$$y = (\lambda - A)x$$

Da ciò deriva che  $y \in \mathcal{R}(\lambda - A)$   $\square$

Dato questo risultato introduciamo i criteri di autoaggiunzione.

**Teo. 1.2** Sia  $A$  un operatore densamente definito su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  e simmetrico. Le seguenti definizioni sono equivalenti:

1)  $A$  è autoaggiunto:

$$A = A^\dagger$$

2) I range degli operatori  $(\pm i - A)$  coincidono con tutto lo spazio di Hilbert:

$$\mathcal{R}(\pm i - A) = \mathcal{H}$$

Questo implica la suriettività degli operatori.

3)  $A$  è chiuso e gli operatori  $(\pm i - A^\dagger)$  sono iniettivi:

$$A = A^- \quad \mathcal{N}(\pm i - A^\dagger) = \{0\}$$

**Dim. 1.2** 1)  $\implies$  2) Per dimostrare questa relazione è importante la seguente osservazione:

**Osservazione** Sia  $A$  un operatore densamente definito su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ , allora esiste  $A^\dagger$  e vale:

$$\mathcal{N}(A^\dagger) = (\mathcal{R}(A))^\perp$$

Dove:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A^\dagger) &= \{x \in \mathcal{D}(A^\dagger); A^\dagger x = 0\} \\ \mathcal{R}(A)^\perp &= \{w \in \mathcal{H}; \langle w, Ay \rangle = 0, \forall y \in \mathcal{D}(A)\} \end{aligned}$$

Torniamo alla dimostrazione del teorema.

Assumiamo  $A = A^\dagger$

$$\mathcal{N}((\pm i - A)^\dagger) = \mathcal{R}(\pm i - A)^\dagger \quad \mathcal{N}(\mp i - A^\dagger) = (\mathcal{R}(\pm i - A))^\perp$$

L'operatore è autoaggiunto e quindi simmetrico di conseguenza:

$$\mathcal{N}(\mp i - A^\dagger) = \mathcal{N}(\mp i - A) = \{0\} \quad (\mathcal{R}(\pm i - A))^\perp$$

Per cui  $\mathcal{R}(\pm i - A)$  è un sottoinsieme denso nello spazio di Hilbert, ma  $A = A^\dagger$  ed essendo chiuso, tale sottoinsieme chiuso, per cui:

$$\mathcal{R}(\pm i - A) = (\mathcal{R}(\pm i - A))^- = \mathcal{H}$$

1)  $\implies$  3) Assumiamo anche in questo caso che  $A = A^\dagger$ , Allora l'operatore risulta chiuso, applicando il teorema 1.1 risulta che:

$$\mathcal{N}(\pm i - A) = \{0\} \quad \mathcal{N}(\pm i - A^\dagger) = \{0\}$$

3)  $\implies$  2) Assumiamo che:

$$(\mathcal{R}(\pm i - A))^\perp = \mathcal{N}(\mp i - A^\dagger) = \{0\}$$

per cui  $\mathcal{R}(\pm i - A)$  denso nello spazio di Hilbert, ma essendo l'operatore chiuso allora anche l'insieme risulta chiuso. Questo comporta che:

$$\mathcal{R}(\pm i - A) = \mathcal{H}$$

2)  $\implies$  1) Per completare la dimostrazione del teorema, è necessario mostrare che assumendo la suriettività di  $(\pm i - A)$  abbiamo la coincidenza dei domini  $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^\dagger)$ . La simmetria dell'operatore comporta già che  $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A^\dagger)$ . Consideriamo  $x \in \mathcal{D}(A^\dagger)$ , la suriettività di  $(i - A)$  comporta l'esistenza di  $y \in \mathcal{D}(A)$  tale che:

$$(i - A)y = (i - A^\dagger)x$$

L'aggiunto dell'operatore è un'estensione dello stesso, per cui abbiamo che  $y \in \mathcal{D}(A^\dagger)$  e:

$$Ay = A^\dagger y$$

$$(i - A^\dagger)y = (i - A)y = (i - A^\dagger)x$$

$$(i - A^\dagger)(y - x) = 0$$

Da cui si ottiene:

$$(y - x) \in \mathcal{N}(i - A^\dagger) = (\mathcal{R}(-i - A))^\perp = \{0\}$$

Questo comporta che:

$$y = x \in \mathcal{D}(A) \text{ e } \mathcal{D}(A^\dagger) = \mathcal{D}(A) \quad \square$$

### **Operatori essenzialmente autoaggiunti.**

Gli operatori simmetrici a cui manca poco per raggiungere la condizione di autoaggiunzione vengono definiti essenzialmente autoaggiunti e definiti nel seguente modo:

**Def.1.8** Un operatore  $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{H}$  densamente definito nello spazio di Hilbert è detto essenzialmente autoaggiunto se e solo se  $A$  è chiudibile e la sua chiusura è autoaggiunta.

Da questa definizione si può concludere che un operatore chiudibile e densamente definito è essenzialmente autoaggiunto se la sua chiusura coincide con il suo aggiunto.

$$A^\dagger = A^-$$

È possibile osservare che la chiusura risulta anche l'unica estensione autoaggiunta.

# Bibliografia

[1] Hassani Sadri: Mathematical physics: A modern introduction to its foundations, 3rd edition, Springer (2002).

[2] Leinass J.M.- Myrheim J. : On the theory of identical particles, Il nuovo cimento Vol. 37B N.1 (1977).

[3] Onofri Enrico: Corso di teoria degli operatori lineari (metodi matematici della fisica), Parma 1974.

[4] Ortolani Fabio: Appunti di metodi matematici, (2007).

[5] Ortolani Fabio: Spettri,(2007)

[6] Reed Michael - Barry Simon: Methods of modern mathematical physics Vol.1: functional analysis, Academic press inc. (1980).

# Ringraziamenti

ringrazio la professoressa Ercolessi per la disponibilità e la cortesia dimostrate durante il periodo di scrittura di questa tesi. Ringrazio i miei genitori e la mia nonna Adriana per il sostegno fornitomi durante questi anni.