ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

GLI INTEGRALI DI STIELTJES E DI STIELTJES-LEBESGUE

Tesi di Laurea in Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
ERMANNO LANCONELLI

Presentata da:
ANDREA TAMAGNINI

I Sessione
Anno Accademico 2009/2010

Indice

Introduzione

Gli anni a cavallo dei secoli XIX e XX furono tra i più controversi della storia della matematica ed è proprio in questo periodo che si raggiungono i risultati più importanti nella teoria degli insiemi, nella teoria della misura e in quella dell'integrazione. Come è anche illustrato nei capitoli $2, 3$ e 4 della tesi queste teorie sono strettamente collegate tra loro.
Ora l'integrale classico di Riemann fonda le sue radici nel procedimento di approsimazione dell'integrale, rimesso in auge da Cauchy, e di determinare quando le somme di Riemann di una funzione f limitata, in un intervallo limitato $[a, b]$ tendano ad un limite (se la lunghezza massima degli intervalli della suddivisione tenda a 0). Facilmente Riemann risolse questo problema rispondendo che $\forall \alpha > 0$ esiste una suddivisione di $[a, b]$ in intervalli parziali di lunghezza massima abbastanza piccola perchè la somma delle lunghezze degli intervalli di questa suddivisione, in cui l'oscillazione di f è maggiore di α, sia arbitrariamente piccola. Egli mostra inoltre che questa condizione non è solo verificata per le funzioni continue e monotone a tratti, ma anche per le funzioni che possono avere un insieme ovunque denso di punti di discontinuità.
Il problema però del integrale di Riemann come sottolineò anche Jordan era che nella teoria dell'integrazione di Riemann si prestasse molta attenzione sulle caratteristiche della funzione integranda senza mai soffermarsi sull'influenza del dominio di integrazione.
I primi tentativi di definire la misura di una parte limitata E di $\mathbb{R}$ si devono proprio a Cantor e Jordan; Cantor addirittura si pone subito nello spazio $\mathbb{R}^n$

ma la sua definizione comportava che la misura dell'unione di due inisemi potesse essere minore della somma delle singole misura degli insiemi mentre Jordan arrivò ai medesimi risultati del matematico italiano G.Peano che si occupò del problema della misura di una regione piana delimitata da curve, considerando le classi infinite di poligoni inscritti e circoscritti all'insieme dato. Le aree dei primi sono dunque dotate di estremo superiore, mentre quelle dei secondi di estremo inferiore; se i due estremi coincidono il loro valore era la misura secondo Peano. Inoltre tale teoria si collegava direttamente con l'integrazione, infatti una funzione f(x) risultava integrabile se e solo se il sottografico era misurabile secondo Peano.
Queste nozioni di misura date da Peano e Jordan non erano ancora soddisfacenti perchè alcuni degli insiemi di rilevante interesse per l'analisi (come l'insieme dei razionali compresi in un intervallo) risultavano ancora non misurabili e perchè queste misure erano soltanto finitamente additive. Un contributo importante alla teoria della misura venne dato da Émile Borel che, tra l'altro, introdusse per la prima volta il concetto di insieme di misura nulla. La sua teoria della misura si distaccava nettamente dalle nozioni fino ad allora adottate e partiva dal considerare sottoinsiemi A dell'intervallo $[0;1]$, se A è unione numerabile di intervalli disgiunti la cui lunghezza complessiva è s, allora questa è anche la misura di A. In generale la misura dell'unione di una famiglia numerabile di insiemi disgiunti sarà la somma delle singole misure. Infine, se $A \subset A'$ la misura di $A - A'$ sarà la differenza delle misure. In questo modo ogni insieme aperto limitato è misurabile così come tutti quelli ottenuti attraverso un'infinità numerabile di operazioni di unione, intersezione e differenze di insiemi.
È in questo contesto che si inserì il lavoro di Henri Lebesgue. Henri Lebesgue. Il lavoro più importante di Lebesgue(1875-1941) fu indubbiamente la sua tesi di dottorato: *Intégrale,longueur, aire.* (1902), nella quale introduceva per la prima volta l'integrale che tuttora porta il suo nome.
Nella sua tesi Lebesgue comincia con il precisare e sviluppare le indicazioni di E.Borel; in conformità con il metodo di Peano-Jordan la misura esterna di

un insieme limitato $A \subset \mathbb{R}$ viene definita come estremo inferiore delle misure degli insiemi aperti contenenti A; quindi se I è un intervallo contenente A, la misura interna di A è la differenza fra misure esterne di I e di $I - A$; si ottiene così una definizione di insieme misurabile che differisce dalla definizione costruttiva iniziale di Borel solo per l'aggiunta di una parte di un insieme di misura nulla nel senso di Borel.
Questa definizione permetteva una estensione immediata dell'integrale di Riemann di una funzione limitata e non negativa su $[a, b]$ a tutte le funzioni per le quali era definita la misura dell'insieme precedente.
Ma la vera originalità di Lebesgue sta nel teorema fondamentale sul passaggio al limite nell'integrale così concepito, teorema che nella sua opera appare come conseguenza dell'addività completa della misura; lui stesso ne scorge l'importanza a tal punto che nel 1904 ne fece la sua pietra angolare della trattazione didattica della sua teoria *Leçion sur l'Integration et la recherche des fonctions primitives.*
Lebesgue, che era un matematico che prediligeva lo studio di funzioni di carattere patologico, si accorse di come la definizione di integrale data da Riemann valesse solo in casi eccezionali, poichè era data solo per funzioni che presentano pochi punti di discontinuità, il che assicurava la convergenza delle somme inferiori e superiori. La vera innovazione di Lebesgue fu di suddividere l'insieme dei valori della funzione in intervalli, associare ad ognuno di questi un valore medio η_i e poi trovare la misura dell'insieme A_i degli x appartenenti al dominio per i quali $f(x)$ è vicino a η_i, quindi si ritrova una somma del tipo $S_n = \sum \eta_i \mu(Ai)$, facendone poi tendere a zero gli intervalli di suddivisione dei valori di f.
Inoltre questa nuova definizione di integrale rendeva integrabili molte funzioni che prima con Riemann non lo erano come per esempio la funzione di Dirichlet.
Negli stessi anni in cui operò Lebesgue anche un altro matematico olandese T.Stieltjes che pubblicò nel 1894 una memoria, dal titolo *Recherches sur les fractions continues*, molto originale in cui partendo da un problema in

apparenza molto particolare, si trovavano posti e risolti con rara eleganza problemi di natura del tutto nuova nella teoria delle funzioni analitiche ed in quella delle funzioni di una variabile reale. In questa memoria Stieltjes definì l'integrale che porta il suo nome per risolvere il problema dei momenti di un sistema di masse su una semiretta.
Egli osservò che postulare una tale distribuzionie di masse equivale a postulare la funzione crescente φ che, per $x > 0$ dà la massa totale contenuta nell'intervallo avente come estremi 0 e x e per $x < 0$, la stessa massa cambiata di segno, mentre le discontinuità di φ corrispondono alle masse concentrare in un punto. In questo modo Stieltjes definì per una distribuzioni di masse di questo genere in un intervallo $[a, b]$ le somme di Riemann $\sum_i f(\epsilon_i)(\varphi_{i+1} - \varphi_i)$ e mostra che quando f è continua in $[a, b]$ queste somme tendono verso un limite che egli indica con $\int_a^b f(x)\, d\varphi(x)$. Ovviamente notò come il suo integrale fosse una generalizzazione dell'integrale di Riemann infatti ponendo $\varphi(x) = x$ si ritrova lo stesso integrale di Riemann.
Di questo verrà discusso nel primo capitolo esponendo anche altri importanti risultati per l'integrale di Stieltjes e sul legame stesso con l'integrale di Riemann e con le funzioni a variazione limitata concludento il tutto con il teroema di rappresentazione di F.Riesz che mostra come gli integrali di Stieltjes $f \rightarrow \sum_a^b f, d\varphi$ sono i funzionali lineari continui più generali nello spazio delle funzioni continue su $I = [a, b]$.
Ed infine la fusione delle idee di Lebesgue e Stieltjes sfociò nell'integrale di Stieltjes-Lebesgue,di cui parleremo nel capitolo 4, che vedremo come generalizzazione dell'integrale di Daniell presentato nel capitolo 3. Inoltre lo stesso integrale di Lebesgue lo si può ottenere da quello di Stieltjes-Lebesgue con un opportuno adattamento della misura.

Capitolo 1

L'integrale di Stieltjes

1.1 Definzione di integrale secondo Stieltjes

Definizione 1.1. Sia $[a, b]$ un intervallo limitato e chiuso (compatto) di $\mathbb{R}$ e siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Sia $\sigma = \{a = x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = b\}$ una scomposizione finita di $[a, b]$ e ξ_j un punto arbitrario di $[x_{j-1}, x_j], j = 1, 2, ..., n$. Si dice che f è integrabile secondo Stieltjes o S-integrabile relativamente a g su $[a, b]$ se esiste un numero reale λ tale che $\forall\ \epsilon \in \mathbb{R}^+$ esiste $\delta(\epsilon)$ $\in \mathbb{R}^+$ tale che
$\forall\ \sigma \in \Omega(a, b)$ purchè sia $misI_k < \delta(\epsilon)$ per ogni k ($I_k = [x_{k-1}, x_k]$)e qualunque sia la scelta dei punti $\xi_j(\in [x_{j-1}, x_j])$risulta

$$|\lambda - \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)[g(x_j) - g(x_{j-1})]| < \epsilon.$$

Questo λ se esiste si chiama integrale di Stieltjes della f rispetto a g su [a,b] e si denota con il simbolo

$$\int_a^b f(x)\, dg(x).$$

Osservazione 1. Se $g(x) = x\ \forall x \in [a, b]$, si ritrova la definizione di integrabilità secondo Riemann.

Osservazione 2. La definizione data si può estendere come segue:

Siano X,Y,Z tre spazi normati sul campo reale; sia definita una moltiplicazione $\cdot : X \times Y \to Z$ tale che:

i) $\xi\eta \qquad \forall \xi \in X, \qquad \forall \eta \in Y$

ii) $(\alpha\xi_1+\beta\xi_2)\eta = \alpha\xi_1\eta+\beta\xi_2\eta \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \qquad \forall \xi_1, \xi_2 \in X, \qquad \forall \eta \in Y$

iii) $\xi(\alpha\eta_1+\beta\eta_2) = \alpha\xi\eta_1+\beta\xi\eta_2 \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \qquad \forall \eta_1, \eta_2 \in Y, \qquad \forall \xi \in Y$

iv) $||\xi\eta||_Z \leq ||\xi||_X||\eta||_Y$

Siano $x : [a, b] \to X$,$y : [a, b] \to Y$.
Consideriamo $\sigma \in \Omega(a, b)$ e siano $I_k = [x_{k-1}, x_k], k = 1, 2, ..., n$, gli intervalli componenti di σ. Si dice che x è integrabile secondo Stieltjes o S-integrabile relativamente a y su $[a, b]$ se esiste $\lambda \in Z$ tale che $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$ esiste $\delta(\epsilon) \in \mathbb{R}^+$ tale che $\forall \sigma \in \Omega(a, b)$ purchè sia $misI_k < \delta(\epsilon)$ per ogni k e qualunque sia la scelta dei punti $\tau_k \in I_k, k = 1, 2, ...n$ risulta

$$||\lambda - \sum_{k=1}^{n} x(\tau_k)[y(\tau k) - y(\tau k - 1)]||_Z < \epsilon.$$

Se λ esiste si chiama integrale di Stieltjes di x rispetto a y su [a,b] e si denota con il simbolo

$$\int_a^b x(t)\, dy(t).$$

Osserviamo che se $X = Y = Z = \mathbb{R}$ e $|| \quad ||$ è il valore assoluto si ricade in definizione 1.1 .

1.2 Proprietà dell'integrale di Stieltjes

Teorema 1.2.1.
Siano f, g, f_1, g_1, f_2, g_2 funzioni a valori reali di dominio $[a, b]$. Se f_1 e f_2 sono S-integrabili rispetto a g,allora tale è anche $f_1 + f_2$ e risulta

$$\int_a^b (f_1 + f_2)(x)\, dg(x) = \int_a^b f_1(x)\, dg(x) + \int_a^b f_2(x)\, dg(x).$$

Inoltre se f è S-integrabile rispetto a g_1 e g_2 allora f è S-integrabile anche rispetto a $g_1 + g_2$ e si ha

$$\int_a^b f(x)\, d(g_1 + g_2)(x) = \int_a^b f(x)\, dg_1(x) + \int_a^b f(x)\, dg_2(x).$$

Se α e $\beta \in \mathbb{R}$ e f è S-integrabile rispetto a g allora anche αf è S-integrabile rispetto a βg e si ha

$$\int_a^b (\alpha f)(x)\, d(\beta g)(x) = \alpha\beta \int_a^b f(x)\, dg(x).$$

Dimostrazione.
Vediamo la dimostrazione sola della prima parte poi per le altre due affermazioni seguenti è analogo il procedimento.
Essendo f_1 e f_2 S-integrabili allora esistono λ_1 e $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che rispettivamente vale: $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$ esiste $\delta(\epsilon) \in \mathbb{R}^+$ tale che $\forall \sigma \in \Omega(a, b)$ purchè sia $misI_k < \delta(\epsilon)$ per ogni k ($I_k = [x_{k-1}, x_k]$) e qualunque sia la scelta dei punti $\xi_j (\in [x_{j-1}, x_j])$ risulta

$$|\lambda_1 - \sum_{j=1}^{n} f_1(\xi_j)[g(x_j) - g(x_{j-1})]| < \frac{\epsilon}{2}$$

e $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$ esiste $\delta(\epsilon) \in \mathbb{R}^+$ tale che $\forall \sigma \in \Omega(a, b)$ purchè sia $misI_k < \delta(\epsilon)$ per ogni k ($I_k = [x_{k-1}, x_k]$) e qualunque sia la scelta dei punti $\xi_j (\in [x_{j-1}, x_j])$ risulta

$$|\lambda_2 - \sum_{j=1}^{n} f_2(\xi_j)[g(x_j) - g(x_{j-1})]| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Allora

$$|(\lambda_1+\lambda_2) - \sum_{j=1}^{n} (f_1+f_2)(\xi_j)[g(x_j)-g(x_{j-1})]| \leq |\lambda - \sum_{j=1}^{n} f_1(\xi_j)[g(x_j)-g(x_{j-1})]| +$$

$$+|\lambda_2 - \sum_{j=1}^{n} f_2(\xi_j)[g(x_j) - g(x_{j-1})]| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Questo dunque prova il Teorema. □

Teorema 1.2.2.

Siano f e g due funzioni a valori reali di dominio $[a,b]$ e sia $c \in]a,b[$. Se f è S-integrabile rispetto a g su $[a,b]$,su $[a,c]$ e su $[c,b]$ allora vale

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^c f(x)\,dg(x) + \int_c^b f(x)\,dg(x).$$

Dimostrazione.

Fissato $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ esiste $\delta(\epsilon) \in \mathbb{R}^+$ tale che se $\sigma_1 = \{a = x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_m = c\}$ e $\sigma_2 = \{c = x_m, x_{m+1}, ..., x_{m+n-1}, x_{m+n} = b\}$ sono due scomposizioni finite di $[a,c]$ e di $[c,b]$ con intervalli componenti tutti di misura $< \delta(\epsilon)$ risulta

$$|\sum_{k=1}^{m+n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] - \int_a^b f(x)\,dg(x)| < \frac{\epsilon}{3},$$

$$|\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] - \int_a^c f(x)\,dg(x)| < \frac{\epsilon}{3},$$

$$|\sum_{k=m+1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] - \int_c^b f(x)\,dg(x)| < \frac{\epsilon}{3},$$

essendo ξ_k un arbitrario punto di $[x_{k-1}, x_k]$,$k = 1, 2, ..., m+n$.

Allora

$$|\int_a^b f(x)\,dg(x) - [\int_a^c f(x)\,dg(x) + \int_c^b f(x)\,dg(x)]| \leq |\int_a^b f(x)\,dg(x) +$$

$$-\sum_{k=1}^{m+n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})]| + |\int_a^c f(x)\,dg(x) - \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})]| +$$

$$+|\int_c^b f(x)\,dg(x) - \sum_{k=m+1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})]| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

e quindi per l'arbitrarietà di ϵ segue l'affermazione del teorema. $\square$

Osservazione 3. Ora osserviamo che se f è S-integrabile su $[a, c]$ e su $[c, b]$ rispetto a g allora non è detto che lo sia su $[a, b]$. Infatti per esempio consideriamo le seguenti funzioni così definite:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1, 0] \\ 1 & \text{se } x \in]0, 1] \end{cases}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1, 0[\\ 1 & \text{se } x \in [0, 1] \end{cases}$$

Allora possiamo dire che esistono $\int_{-1}^{0} f(x)\,dg(x)$ e $\int_0^1 f(x)\,dg(x)$ e sono entrambi nulli, perchè rispettivamente qualunque sia $\sigma \in \Omega_{[-1,0]}$ o $\sigma \in \Omega_{[0,1]}$ e qualunque sia la scelta di $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ sottointervallo di $[-1, 0]$ o di $[0, 1]$, si ha che $\xi_k \leq 0 \Rightarrow f(\xi_k) = 0$ e perchè $x_{k-1} \geq 0$, $x_k \geq 0$ e dunque $g(x_k) = g(x_{k-1}) = 1$.

Però f non è S-integrabile rispetto a g su $[-1, 1]$; infatti sia $\sigma \in \Omega_{[-1,1]}$ tale che $0 \in \sigma$, allora esiste $\overline{j} \in \{0, 1, ..., n\}$ per cui si ha che $f(\xi_k) = 0\ \forall k \leq \overline{j}$ ed essendo che per $k \geq \overline{j} + 1$, $x_k > 0$ allora $g(x_k) = g(x_{k-1}) = 1$ perciò

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] = 0;$$

se invece $0 \notin \sigma$ allora esiste $\overline{j} \in \{0, 1, ..., n\}$ per cui si ha che $x_{\overline{j}} < 0 < x_{\overline{j}+1}$ e questo implica le stesse cose dette prima per $k \leq x_{\overline{j}}$ e per $k > x_{\overline{j}+1}$ quindi risulta che

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] = f(\xi_{\overline{j}+1}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \xi_{\overline{j}+1} \leq 0 \\ 1 & \text{se } \xi_{\overline{j}+1} > 0 \end{cases}$$

Perciò questo dimostra che f non è S-integrabile rispetto a g su $[-1,1]$

Osservazione 4. Tale teorema sussiste anche nel caso più generale indicato nell'osservazione 2.

1.2.1 Teorema di integrazione per parti

Teorema 1.2.3.
Siano f e g due funzioni a valori reali di dominio $[a,b]$. Se f è integrabile rispetto a g su $[a,b]$ allora anche g è S-integrabile rispetto a f su $[a,b]$.

Dimostrazione.
Sia $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \in \Omega_{(a,b)}$ e xi_j un punto arbitrario di $[x_{j-1}, x_j]$ per $j = 1, 2, ...n$.
Poichè $x_{j-1} \leq \xi_j \leq x_j \leq \xi_{j+1} \leq x_{j+1} \leq \xi_{j+2}$ e $x_j < x_{j+1}$ risulta $\xi_j \leq \xi_{j+1}$ ma $xi_j < \xi_{j+2}$.
Poniamo $\xi_0 = a$, $\xi_{n+1} = b$.
Allora l'insieme $\{\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n+1}\}$ determina una scomposizione di $[a,b]$ ed è $\delta' = \max\{\xi_j - \xi_{j-1} | j = 1, 2, ..., n+1\} \leq 2\max\{x_k - x_{k-1} | k = 1, 2, ..., n\} = 2\delta$.
Poniamo ora

$$A = \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)[f(x_k) - f(x_{k-1})] \qquad , \qquad B = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)[g(\xi_{j+1}) - g(\xi_j)].$$

Risulta quindi che:

$$A + B = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Poichè B è una delle somme che intervengono nella definizione dell'integrale di Stieltjes (è $\xi_j \leq x_j \leq \xi_{j+1}$), $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$ esiste $\delta(\epsilon) \in \mathbb{R}^+$ tale che:

$$|B - \int_a^b f(x)\, dg(x)| < \epsilon$$

purchè sia $\delta^{'} < \delta(\epsilon)$. Ne segue che $\forall \sigma \in \Omega_{(a,b)}$ con $2\delta < \delta(\epsilon)$ risulta:

$$|[f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)\, dg(x)] - A| \leq |B - \int_a^b f(x)\, dg(x)| +$$

$$+|(f(b)g(b) - f(a)g(a)) - (A + B)| \leq |B - \int_a^b f(x)\, dg(x)| \leq \epsilon$$

e ciò prova che anche g è S-integrabile rispetto a f su $[a, b]$.
Inoltre risulta che:

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) + \int_a^b g(x)\, df(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

□

1.2.2 Teorema del cambiamento di variabile

Teorema 1.2.4.
Siano f e g funzioni a valori reali di dominio $[a, b]$ ed f sia S-integrabile rispetto a g. Sia $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ suriettiva,continua e crescente su $[\alpha, \beta]$ (intervallo compatto di $\mathbb{R}$). Allora vale:

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, dg(\varphi(t)).$$

Dimostrazione.
Sia $\{t_0, t_1, ..., t - n\} \in \Omega_{(\alpha,\beta)}$ e sia per la suriettività di φ, $x_k = \varphi(t_k)$, $k = 0, 1, 2, ..., n$.
Essendo φ per ipotesi non solo suriettiva ma anche crescente su $[\alpha, \beta]$, allora risulta che $x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$. Sia $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ per $k = 1, 2, ..., n$ e $\xi_k = \varphi(\tau_k)$, $k = 1, 2, ..., n$. Allora vale:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^{n} f(\varphi(\tau_k))[g(\varphi(t_k)) - g(\varphi(t_{k-1}))].$$

Per il fatto che f S-integrabile rispetto a g su $[a,b]$ si ha che $\forall\epsilon \in \mathbb{R}^+$ esiste $\delta(\epsilon) \in \mathbb{R}^+$ tale che $\forall\sigma \in \Omega(a,b)$ con gli intervalli componenti tutti di misura $< \delta(\epsilon)$ risulta:

$$|\lambda - \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)[g(x_j) - g(x_{j-1})]| < \epsilon.$$

Ora per la continuità di φ su $[a,b]$ e il fatto che $[a,b]$ è compatto, allora φ è uniformemente continua su $[a,b]$; quindi $\max\{x_k - x_{k-1} | k = 1,2,...,n\} < \delta(\epsilon)$ purchè sia $\max\{t_k - t_{k-1} | k = 1,2,...,n.\} < \eta(\epsilon)$ per un opportuno $\eta(\epsilon) \in \mathbb{R}^+$. Allora se $\{t_0, t_1, ..., t_n\} \in \Omega_{(\alpha,\beta)}$ e $\max\{t_k - t_{k-1} | k = 1,2,...,n.\} < \eta(\epsilon)$ si ha:

$$|\sum_{k=1}^{n} f(\varphi(\tau_k))[g(\varphi(t_k)) - g(\varphi(t_{k-1}))] - \int_a^b f(x)\, dg(x)| < \epsilon.$$

Questo prova che $f \circ \varphi$ è S-integrabile rispetto a $g \circ \varphi$ e che vale

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, dg(\varphi(t)).$$

$\square$

Osservazione 5.
Tale teorema sussiste anche nel caso di $f : [a,b] \to X$ e $g : [a,b] \to Y$ con X, Y, Z che soddisfano le ipotesi i) e iv) dell'osservazione 2.

1.3 Condizioni sufficienti per l'integrabilità secondo Stieltjes.

Definizione 1.2.
Definizione di funzione a variazione limitata e di variazione totale.

Sia $[a,b]$ un intervallo compatto di $\mathbb{R}$, σ una scomposizione finita di $[a,b]$, $\Omega_{(a,b)}$ l'insieme di tutte le scomposizoni finite di $[a,b]$.

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, se $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ poniamo

$$v_\sigma(f) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|.$$

Si dice che f è variazione limitata se

$$\bigvee_a^b(f) = \sup\{v_\sigma(f) | \sigma \in \Omega_{(a,b)}\} < +\infty.$$

In tal caso si chiama

$$\bigvee_a^b(f) \text{ variazione totale di f su } [a, b]$$

e

$\mathcal{V}_{[\mathrm{a,b}]}$ indica l'insieme delle funzioni a variazione totale limitata su $[a, b]$.

Definizione 1.3. Definzione di spazio di Banach.
Uno spazio di Banach è uno spazio normato e completo.

Teorema 1.3.1.
Siano f e g due funzioni a valori reali di dominio $[a, b]$ e sia $f \in \mathcal{C}_{[a,b]}$, $g \in \mathcal{V}_{[a,b]}$; allora f è S-integrabile rispetto a g su $[a, b]$.
Più in generale: siano X, Y, Z tre spazi normati sul campo reale e Z uno spazio di Banach.
Valgono le ipotesi (i) e (iv) dell'Osservazione 2 e siano $x : [a, b] \to X$ e $y : [a, b] \to Y$. Se x è continua e y è a variazione limitata allora x è S-integrabile rispetto a y su $[a, b]$.

Dimostrazione.
Dimostriamo il teorema nella sua versione più generale per sottolineare il

ruolo della condizione che Z sia uno spazio di Banach.
Essendo $[a, b]$ un intervallo compatto di $\mathbb{R}$ e x è continua, allora x è uniformemente continua su $[a, b]$.
Allora $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$ esiste $\delta(\epsilon) \in \mathbb{R}^+$ tale che $\forall t^{'}, t^{''} \in [a, b]$, $|t^{'} - t^{''}| < \delta(\epsilon)$ risulta:

$$||x(t^{'}) - x(t^{''})||_X < \frac{\epsilon}{2 \bigvee_a^b (y)}$$

.

Notiamo che possiamo supporre che $\bigvee\limits_a^b (y) > 0$ perchè se fosse uguale a 0

la dimostrazione sarebbe ovvia.
Infatti se fosse uguale a 0 allora si avrebbe che $y(x_{k+1}) = y(x_k)$, $\forall \sigma \in \Omega_{(a,b)}$ perciò y sarebbe costante su $[a, b]$. Quindi questo implica che

$$\forall \sigma \in \Omega_{(a,b)} \qquad \sum_{j=1}^{n} x(\xi_j)[y(x_k) - y(x_{k-1})] = 0$$

quindi

$\displaystyle\int_a^b x(t)\, dy(t) = 0$ e ciò prova che x è S-integrabile rispetto a y su $[a, b]$.

Sia ora $\sigma = \{t_0, t_1, ..., t_n\} \in \Omega_{(a,b)}$ e tale che $t_k - t_{k-1} < \delta(\epsilon)$ per $k = 1, 2, ..., n$.
Sia $\{t_{k0} = t_k, t_{k1}, ..., t_{k,i_k} = t_{k+1}\}$ una scomposizione finita di $[t_k, t_{k+1}]$ per $k = 0, 1, .., n - 1$. Poniamo:

$$s = \sum_{k=1}^{n} x(\tau_k)[y(t_k) - y(t_{k-1})] \qquad s^{'} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{i_k} x(\tau_k)[y(t_{kj}) - y(t_{k,j-1})]$$

essendo τ_k un punto arbitrario di $[t_{k-1}, t_k]$ per $k = 1, 2, ..., n$ e τ_{kj} un punto arbitrario di $[t_{k,j-1}, t_{kj}]$ per $j = 1, 2, ..., i_k$.

Allora si può scrivere

$$s=\sum_{k=0}^{n-1}x(\tau_{k+1})[y(t_{k+1})-y(t_k)]=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{i_k}x(\tau_k)[y(t_{kj})-y(t_{k,j-1})]$$

Poichè $\tau_{kj},\tau_{k+1}\ \in[t_k,t_{k+1}]$ risulta:

$$||x(\tau_{k+1})-x(\tau_{kj})||_X<\frac{\epsilon}{2\bigvee_a^b(y)},\ j=1,2,...,i_k \text{ e } k=0,1,..,n-1.$$

Perciò abbiamo:

$$||s-s^{'}||_Z=||\sum_{k=0}^{n-1}(\sum_{j=1}^{i_k}[x(\tau_{k+1})-x(\tau_k)][y(t_{kj})-y(t_{k,j-1})])||_Z\leq$$

$$\leq\sum_{k=0}^{n-1}||\sum_{j=1}^{i_k}[x(\tau_{k+1})-x(\tau_k)][y(t_{kj})-y(t_{k,j-1})]||_Z\leq$$

$$\leq\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{i_k}||[x(\tau_{k+1})-x(\tau_k)][y(t_{kj})-y(t_{k,j-1})]||_Z\leq$$

$$\leq\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{i_k}||[x(\tau_{k+1})-x(\tau_k)]||_X||[y(t_{kj})-y(t_{k,j-1})]||_Y\leq$$

$$\leq\frac{\epsilon}{2\bigvee_a^b(y)}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{i_k}||[y(t_{kj})-y(t_{k,j-1})]||_Y\leq$$

$$\leq\frac{\epsilon}{2\bigvee_a^b(y)}\bigvee_a^b(y)<\frac{\epsilon}{2}$$

Allora se s_1 e s_2 sono somme corrispondenti a due qualsiasi scomposizioni

σ_1 e σ_2 di $[a, b]$ aventi entrambe tutti gli intervalli componenti di misura $< \delta(\epsilon)$, posto $\sigma' = \sigma_1 \bigcup \sigma_2$ ed s' una somma corrispondente a σ', si ha:

$$||s_1 - s_2||_Z \leq ||s_1 - s'||_Z + ||s' - s_2||_Z < \epsilon.$$

Ciò posto,scomponiamo $[a, b]$ in m parti congruenti $(m = 2, 3, ...)$ e per ciascun m scegliamo una somma s_m. Allora abbiamo che $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$ esiste $m(\epsilon)$ tale che

$$||s_n - s_{n+p}||_Z < \epsilon$$

$\forall n \in \mathbb{N}, n > m(\epsilon)$ e $\forall p \in \mathbb{N}$. Dunque $(s_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in Z e poichè per ipotesi Z è completo esiste allora $\lambda \in\ Z$ tale che

$$\lim_{n \to \infty} s_{n+1} = \lambda$$

Sia ora s una somma corrispondente a una scomposizione finita σ di $[a, b]$ avente tutti gli intervalli componenti di misuta $< \delta(\epsilon)$.
Scegliamo n tale che sia $\frac{b-a}{n} < \delta(\epsilon)$ e $||s_n - \lambda||_Z < \epsilon$. Allora

$$||s - \lambda||_Z \leq ||s - s_n||_Z + ||s_n - \lambda||_Z < 2\epsilon.$$

Ciò prova dunque che x è integrabile rispetto a y su $[a, b]$. $\square$

Osservazione 6.
Osserviamo che dunque da questo teorema ne viene che: se $f \in \mathcal{C}_{[\mathrm{a,b}]}$, $g \in \mathcal{V}_{[\mathrm{a,b}]}$; allora

$$|\int_a^b f(x)\, dg(x)| \leq \max\{|f(x)|\ |x \in [a, b]\} \bigvee_a^b (g).$$

Infatti dal teorema ne viene che f è S-integrabile rispetto a g su $[a, b]$, dunque vale: $\forall\epsilon \in \mathbb{R}^+$ esiste $\delta(\epsilon) \in \mathbb{R}^+$ tale che $\forall\sigma \in \Omega(a, b)$ purchè sia $misI_k < \delta(\epsilon)$ per ogni k ($I_k = [x_{k-1}, x_k]$) e qualunque sia la scelta dei punti $\xi_j (\in [x_{j-1}, x_j])$

$$|\int_a^b f(x)\, dg(x) - \sum_{j=1}^n f(\xi_j)[g(x_j) - g(x_{j-1})]| < \epsilon.$$

e inoltre vale:

$$|\sum_{j=1}^n f(\xi_j)[g(x_j) - g(x_{j-1})]| \leq \sum_{j=1}^n |f(\xi_j)||g(x_j) - g(x_{j-1})| \leq$$

$$\leq \max\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\} \sum_{j=1}^n |g(x_j) - g(x_{j-1})| \leq \max\{|f(x)|| \, x \in [a, b]\} \bigvee_a^b (g).$$

Da ciò ne viene che:

$$|\int_a^b f(x)\, dg(x)| \leq |\int_a^b f(x)\, dg(x) - \sum_{j=1}^n f(\xi_j)[g(x_j) - g(x_{j-1})]| +$$

$$+|\sum_{j=1}^n f(\xi_j)[g(x_j) - g(x_{j-1})]| \leq \epsilon + \max\{|f(x)|| \, x \in [a, b]\} \bigvee_a^b (g) \qquad \forall\epsilon > 0$$

Dunque vale:

$$|\int_a^b f(x)\, dg(x)| \leq \max\{|f(x)| \; |x \in [a, b]\} \bigvee_a^b (g).$$

Nell'ipotesi dell'osservazione 2 si ha analogamente che

$$||\int_a^b x(t)\, dy(t)||_Z \leq \max\{||x(t)||_X | t \in [a, b]\} \bigvee_a^b (y).$$

Osservazione 7.

Nel caso che sia $Y = \mathbb{R}, Z = X$, X completo, convenendo di indicare indifferentemente con ax e xa il prodotto $a \in \mathbb{R}$ per $x \in X$, se $t \mapsto x(t), t \in [a, b]$, è continua allora vale:

$$|| \int_a^b x(t)\, dt||_X \leq \int_a^b ||x(t)||_X\, dt.$$

Infatti $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$ esiste $\delta(\epsilon) \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$|| \int_a^b x(t)\, dt - \sum_{k=1}^{n} x(\tau_k)(t_k - t_{k-1})||_X \leq \epsilon$$

per ogni scomposizione finita $\{a = t_0, t_1, ..., t_n = b\}$ con $t_k - t_{k-1} < \delta(\epsilon)$ per ogni k e per ogni scelta di $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k,\ k = 1, 2, ..., n]$; allora:

$$|| \int_a^b x(t)\, dt||_X \leq \epsilon + || \sum_{k=1}^{n} x(\tau_k)(t_k - t_{k-1})||_X;$$

ma $t \mapsto ||x(t)||, t \in [a, b]$, è continua perchè $| \quad ||x(t^{'})||_X - ||x(t^{''})||_X \quad | \leq$ $\leq ||x(t^{'}) - x(t^{''})||_X$ e x è continua e quindi vale anche per il teorema fatto che :

$$| \sum_{k=1}^{n} ||x(\tau_k)||_X (t_k - t_{k-1}) - \int_a^b ||x(t)||_X\, dt| \leq \epsilon$$

se $\delta(\epsilon)$ è opportuno. Dunque:

$$|| \int_a^b x(t)_X\, dt|| \leq 2\epsilon + \int_a^b ||x(t)||_X\, dt$$

perciò per l'arbitrarietà di ϵ,

$$|| \int_a^b x(t)\, dy(t)||_X \leq \int_a^b ||x(t)||_X\, dy(t).$$

Osservazione 8.
Sia $g \in \mathcal{V}_{[a,b]}$. Condizione necessaria e sufficiente affinchè sia

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = 0 \ \forall\ f \in \mathcal{C}_{[a,b]}$$

è che sia $g(b) = g(a)$ e $g(x) = g(a)$ in ogni punto x di $]a, b[$ in cui g è continua.
Infatti supponiamo che valga

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = 0 \ \forall\ f \in \mathcal{C}_{[\mathrm{a,b}]}.$$

Allora scelta $f(x) \equiv 1(x) \equiv 1\ \forall x \in [a, b]$ allora vale

$$\int_a^b dg(x) = 0$$

dunque vale $g(b) = g(a)$.
Sia poi $c \in]a, b[$ e g continua in c;

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [a, c] \\ 0 & \text{se } x \in]c + \frac{1}{n}, b], \\ 1 - n(x - c) & \text{se } x \in]c, c + \frac{1}{n}[\end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \text{ per cui } c + \tfrac{1}{n} < b$$

Risulta che $f_n \in \mathcal{C}_{[\mathrm{a,b}]}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ perciò per l'ultimo teorema si ha che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è S-integrabile su $[a, b]$ rispetto a g e si ha

$$0 = \int_a^b f_n(x)\, dg(x) = \int_a^c dg(x) + \int_c^{c+\frac{1}{n}} (1 - n(x - c))\, dg(x).$$

Ora

$$\int_a^c dg(x) = g(c) - g(a) \qquad \left|\int_c^{c+\frac{1}{n}} (1 - n(x - c))\, dg(x)\right| \le \bigvee_c^{c+\frac{1}{n}} g \to 0 \text{ per n} \to \infty$$

per il fatto che $g \in \mathcal{V}_{[\mathrm{a,b}]}$ e continua in c.
Perciò vale

$$\int_c^{c+\frac{1}{n}} (1 - n(x - c))\, dg(x) \to 0 \text{ per } n \to \infty.$$

Quindi passando al limite si ottiene $g(c) = g(a)$.
Viceversa se $g \in \mathcal{V}_{[\mathrm{a,b}]}$, $g(a) = g(b)$ e $g(x) = g(a)$ in ogni punto x di $]a, b[$ in cui g è continua allora vale

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = 0\ \forall f \in \mathcal{C}_{[\mathrm{a,b}]}.$$

Infatti $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$ esiste $\delta(\epsilon) \in \mathbb{R}^+$ tale che per ogni scomposizione finita $\{a = x_0, x_1, ..., x_p = b\}$ di $[a, b]$ per cui $\max\{x_k - x_{k-1} | k = 1, 2, ..., p\} < \delta(\epsilon)$ riesca:

$$|\sum_{k=1}^{p} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] - \int_a^b f(x)\, dg(x)| < \epsilon \quad \forall \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \ k = 1, 2, ..., p.$$

Poichè l'insieme dei punti di continuità di g è denso in $[a, b]$ allora scegliendo $x_1, ..., x_{p-1}$ in tale insieme si ha allora che

$$|\int_a^b f(x)\, dg(x)| < \epsilon$$

e quindi per l'arbitrarietà di ϵ si ottiene

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = 0.$$

Dunque

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \int_a^b f(x)\, dh(x) \ \forall g, h \in \mathcal{V}_{[a,b]} \text{ e } \forall f \in \mathcal{C}_{[a,b]}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$g(b) - h(b) = g(a) - h(a) \text{ e } g(x) - h(x) = g(a) - h(a)$$

in tutti i punti x di $]a, b[$ in cui g e h sono continue.

Infatti $g - h$ risulta a variazione limitata dunque dal teorema 1.3.1 ne viene che f è S-integrabile rispetto a $g - h$ su $[a, b]$ ed essendo che per il teorema 1.2.1 vale

$$\int_a^b f(x)\, d(g - h)(x) = \int_a^b f(x)\, dg(x) - \int_a^b f(x)\, dh(x)$$

allora vale:

$$\int_a^b f(x)\, d(g-h)(x) = 0$$

perciò per l'osservazione 8 vale $g(b) - h(b) = g(a) - h(a)$ e
$g(x) - h(x) = g(a) - h(a)$ in tutti i punti x di $]a, b[$ in cui g e h sono continue.

1.4 Legame tra l'integrale di Stieltjes e l'integrale di Riemann

Definizione 1.4. Definizione di integrabilità e di integrale secondo Riemann. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e sia $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \in \Omega_{(a,b)}$. Scelti ad arbitrio n punti $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ tali che $\xi_k \in I_k$, $1 \leq k \leq n$, consideriamo $\sum_{k=1}^n f(\xi_k) mis(I_k)$. Si dice che f è integrabile secondo Riemann su $[a, b]$ se esiste $l \in \mathbb{R}$ tale che $\forall \epsilon > 0$ esiste $\delta(\epsilon) \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) mis(I_k) - l| < \epsilon$$

$\forall \sigma_{(a,b)}$ con $mis(I_k) < \delta(\epsilon)$ $\forall k$ e qualunque sia la scelta dei punti $\xi_1, ..., \xi_n$.
In tal caso si dice che l è l'integrale di f.

Teorema 1.4.1. *(Lebesgue e Vitali.)*
Condizione necessaria e sufficiente affinchè f sia integrabile secondo Riemann su $[a, b]$ è che essa sia limitata e continua quasi dappertutto su $[a, b]$.

Teorema 1.4.2.
Siano f e g due funzioni a valori reali di dominio $[a, b]$ e sia $f \in \mathcal{C}_{[a,b]}$, $g \in \mathcal{V}_{[a,b]}$. Se esiste $g'(x)$ $\forall x \in [a, b]$ e $g' \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ (cioè è integrabile secondo Riemann su $[a, b]$), allora vale:

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \int_a^b f(x) g'(x)\, dx.$$

Dimostrazione.
Anzitutto esistono entrambi gli integrali; infatti $f(x) \in \mathcal{C}_{[\mathrm{a,b}]}$ quindi $f \in \mathcal{R}_{[\mathrm{a,b}]}$

$g'(x) \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ per ipotesi perciò $f(x)g'(x)$ è integrabile secondo Riemann su $[a, b]$ e per il teorema 1.3.1 ne viene che anche f è S-integrabile rispetto a g su $[a, b]$.
Ora $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$ esiste $\delta(\epsilon) \in \mathbb{R}^+$ tale che se $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n.\} \in \Omega_{(a,b)}$ ha tutti gli intervalli componenti di misura $< \delta(\epsilon)$, riesce

$$|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] - \int_a^b f(x)\, dg(x)| < \epsilon$$

qualunque sia $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], k = 1, 2, ..., n$. Poichè $g' \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ allora g' è necessariamente limitata dunque vale $g'(x) \in \mathbb{R}\ \forall x \in [a, b]$ e quindi $g \in \mathcal{C}_{[a,b]}$.
Dunque per il Teorema di Lagrange si ha per ogni k,

$$g(x_k) - g(x_{k-1}) = g(\overline{x_k})(x_k - x_{k-1})$$

essendo $\overline{x_k}$ un opportuno punto di $]x_{k-1}, x_k[$.
Scelto allora $\xi_k = \overline{x_k}$, $k = 1, 2, ..., n$, risulta

$$|\sum_{k=1}^{n} f(\overline{x_k})g'(\overline{x_k})[x_k - x_{k-1}] - \int_a^b f(x)\, dg(x)| < \epsilon.$$

Ma

$$\sum_{k=1}^{n} f(\overline{x_k})g'(\overline{x_k})[x_k - x_{k-1}]$$

è una delle somme che intervengono nella definizione di integrale di Riemann; poichè $fg' \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ sarà

$$|\sum_{k=1}^{n} f(\overline{x_k})g'(\overline{x_k})[x_k - x_{k-1}] - \int_a^b f(x)g'(x)\, dx| < \epsilon$$

se $\delta(\epsilon)$ è opportuno.

Dunque

$$|\int_a^b f(x)\, dg(x) - \int_a^b f(x)g'(x)\, dx| \leq |\int_a^b f(x)\, dg(x) - \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x_k})g'(\overline{x_k})[x_k - x_{k-1}]| +$$

$$+|\sum_{k=1}^{n} f(\overline{x_k})g'(\overline{x_k})[x_k - x_{k-1}] - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx| \leq 2\epsilon.$$

Dunque

$$|\int_a^b f(x)\,dg(x) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx| \leq 2\epsilon,$$

e quindi per l'arbitrarietà di ϵ vale

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

□

1.5 Teorema fondamentale del calcolo per l'integrale di Stieltjes.

Teorema 1.5.1. *Teorema di Jordan*
Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{V}_{[a,b]}$ allora $f = \varphi - \psi$ con φ e ψ funzioni a valori reali non negative e non decrescenti su $[a,b]$.

Teorema 1.5.2.
Siano f e g due funzioni a valori reali di dominio $[a,b]$, $f \in \mathcal{C}_{[a,b]}$, $g \in \mathcal{V}_{[a,b]}$.
Poniamo:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dg(t) \quad x \in [a,b].$$

F è continua in ogni punto di $[a,b]$ in cui g è continua e in ogni punto x di $[a,b]$ in cui esiste $g'(x) \in \mathbb{R}$ allora esiste anche $F'(x) \in \mathbb{R}$ e vale

$$F'(x) = f(x)g'(x).$$

Dimostrazione.
Anzitutto osserviamo che per la definizione di integrale di Stieltjes bisogna

porre $F(a) = 0$. Inoltre per il teorema di Jordano ne viene che possiamo anche supporre che g sia non decrescente. Ponendoci dunque in questa ipotesi, sia $a \leq p < q \leq b$ e $\{p = x_0, x_1, ..., x - n = q\}$ una scomposizione finita di $[p, q]$. Essendo $f \in \mathcal{C}_{[\mathrm{a,b}]}$ e $[a, b]$ un compatto di $\mathbb{R}$ esistono $\max\{f(x)|x \in [a, b]\}$ e $\min\{f(x) \mid x \in [a, b]\ \}$; dunque siano $M = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$,
$m = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\ \}$ allora si ha:

$$m[g(q) - g(p)] \leq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] \leq M[g(q) - g(p)]$$

qualunque sia $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k],\ k = 1, 2, ..., n$.
Ora $f \in \mathcal{C}_{[\mathrm{p,q}]}$ e $g \in \mathcal{V}_{[\mathrm{p,q}]}$ ne segue, essendo per il teorema 1.3.1 f S-integrabile rispetto a g su $[p, q]$, che

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] - \epsilon \leq \int_p^q f(x)\, dg(x) \leq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] + \epsilon$$

perciò

$$m[g(q) - g(p)] - \epsilon \leq \int_p^q f(x)\, dg(x) \leq M[g(q) - g(p)] + \epsilon$$

perciò per l'arbitrarietà di ϵ vale

$$m[g(q) - g(p)] \leq \int_p^q f(x)\, dg(x) \leq M[g(q) - g(p)].$$

Poichè $[p, q]$ è connesso e $f \in \mathcal{C}_{[\mathrm{a,b}]}$ esiste $c \in [p, q]$ tale che

$$\int_p^q f(x)\, dg(x) = f(c)[g(q) - g(p)].$$

Conveniamo di porre poi

$$\int_q^p f(x)\, dg(x) = -\int_p^q f(x)\, dg(x).$$

Ciò posto sia ora g continua in $x_0 \in [a, b]$. Risulta

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dg(t) = f(\xi)[g(x) - g(x_0)], \quad x \neq x_0,$$

essendo ξ un opportuno punto dell'intervallo di estremi x_0 e x.
Dunque abbiamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(\xi) = f(x_0), \ \lim_{x \to x_0} [g(x) - g(x_0)] = 0$$

per la continuità di f e di g nel punto x_0, perciò si ha che

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$$

e questo prova che F è continua nei punti dove lo è g.

Se di più esiste $g'(x_0) \in \mathbb{R}$ allora ne viene che

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(\xi) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}, \quad x \neq x_0,$$

perciò passando al limite per $x \to x_0$ si trae che esiste $F'(x_0) \in \mathbb{R}$ e vale

$$F'(x_0) = f(x_0) g'(x_0)$$

□

Osservazione 9.
Rileviamo esplicitamente che F non in generale continua nei punti dove g è discontinua. Per esempio sia:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [a, c[\\ 2 & \text{se } x \in [c, b] \end{cases}$$

Ora $\forall x_1 \leq x_2$ si ha che $g(x_1) \leq g(x_2)$ perciò g è non decrescente su $[a, b]$ perciò abbiamo che $\forall \sigma \in \Omega_{(a,b)}$ vale

$$\sum_{k=1}^{n} [g(x_{k+1}) - g(x_k)] = g(b) - g(a) = 2 - 1 = 1$$

e quindi g risulta a variazione totale limitata. Inoltre

$$\lim_{x \to c^-} g(x) = 1 \neq 2 = \lim_{x \to c^+} g(x)$$

allora g non risulta contina nel punto c.
Sia $f \in \mathcal{C}_{[a,b]}$. Supponiamo per assurdo che

$$F(x) = \int_a^x f(x)\, dg(x)$$

sia continua nel punto c allora $\forall x \in [a, c[$ abbiamo che $\forall \sigma \in \Omega_{(a,x)}$ e per ogni scelta di $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, ..., n$ tutti di misura $< \delta(\epsilon)$ vale $F(x) = 0$, in quanto $x_{k-1} < c$ e $x_k < c$ e perciò $g(x_{k-1}) = g(x_k) = 1$, $k = 1, 2, ..., n$; se invece $x \in [c, b]$ distinguiamo i casi in cui $c \in \sigma \in \Omega_{(a,x)}$ e $c \notin \sigma \in \Omega_{(a,x)}$: allora nel primo caso abbiamo che esiste $\overline{j} \in \{1, 2, ..., n\}$ tale che $x_{\overline{j}} = c$ perciò

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] = f(\xi_{\overline{j}})$$

per il fatto che per $k < \overline{j}$, si ha che $x_{k-1} < x_k < c$ quindi $g(x_{k-1}) = g(x_k) = 1$ mentre per $k > \overline{j}$ si ha invece che $x_k > x_{k-1} > c$ perciò $g(x_{k-1}) = g(x_k) = 2$; nel secondo caso invece abbiamo che esisterà $\overline{j} \in \{1, 2, ..., n\}$ tale che
$x_{\overline{j}-1} < c < x_{\overline{j}}$ perciò

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] = f(\xi_{\overline{j}})$$

per il fatto che per $k < \overline{j}$ si ha che $x_{k-1} < x_k < c$ quindi $g(x_{k-1}) = g(x_k) = 1$ e per $k > \overline{j}$ si ha invece che $x_k > x_{k-1} > c$ perciò $g(x_{k-1}) = g(x_k) = 2$.
In entrambi i casi abbiamo che la funzione f viene calcolata in un punto $\xi_{\overline{j}}$ il quale appartiene ad un intervallo $I_{[x_{\overline{j}-1}, x_{\overline{j}}]}$ che contiene il punto c, ma visto che $\mathbb{R}$ è completo e raffinando la mia scomposizione dell'intervallo $[a, x]$ si ha che, detto $A_j = [x_{\overline{j}-1}, x_{\overline{j}}]$, $j = 1, 2, ..., n$, $A_{j+1} \subseteq A_j$ e $\mu(A_j) = 0$ allora

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$$

contiene un solo punto che è il punto c visto che $c \in A_j$, $\forall j \in \mathbb{N}$.
Perciò da qui viene che $F(x) = f(c)$ per $x \in [a, b]$ e quindi

$$\lim_{x \to c^-} F(x) = 0 \neq f(c) = \lim_{x \to c^+} F(x) \qquad \text{se} f(c) \neq 0;$$

perciò da qui si deduce che F è discontinua nel punto c se $f(c) \neq 0$.

1.6 Passaggio al limite sotto il segno di integrale

Teorema 1.6.1.
Sia $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f_n \in \mathcal{C}_{[a,b]}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g \in \mathcal{V}_{[a,b]}$. Se la successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente su $[a, b]$, allora

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dg(x) = \int_a^b \lim_{n \to \infty} f_n(x)\, dg(x).$$

Più in generale: Siano X, Y, Z tre spazi normati sul campo reale e Z uno spazio completo, soddisfacenti le ipotesi (i) e (iv) dell'Osservazione 2 e siano $x_n : [a, b] \to X$, x_n continua $\forall n \in \mathbb{N}$ e $y : [a, b] \to Y$, y a variazione totale limitata. Allora se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente su $[a, b]$, si ha:

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b x_n(t)\, dy(t) = \int_a^b \lim_{n \to \infty} x_n(t)\, dy(t).$$

Dimostrazione.
Proviamo la seconda affermazione che è più generale di conseguenza la prima verrà da questa. Per ipotesi abbiamo che $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente su $[a, b]$ ed essendo x_n continua $\forall n \in \mathbb{N}$ ne viene che, detta x la funzione limite di $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, questa allora è continua su $[a, b]$.
Perciò esiste

$$\int_a^b \lim_{n \to \infty} x_n(t)\, dy(t) \text{ e vale}$$

$$\int_a^b \lim_{n \to \infty} x_n(t)\, dy(t) = \int_a^b x(t)\, dy(t).$$

Risulta

$$||\int_a^b x_n(t)\,dy(t) - \int_a^b x(t)\,dy(t)||_Z = ||\int_a^b (x_n(t) - x(t))\,dy(t)||_Z.$$

essendo x_n $\forall n \in \mathbb{N}$ e x S-integrabili rispetto a y su $[a,b]$ per il teorema 1.3.1.
Ora $\forall \sigma = \{t_0, t_1, ..., t_n\} \in \Omega_{(a,b)}$ e $\forall \tau_k$ per $k = 1, 2, ..., n$, si ha:

$$||\sum_{k=1}^{n}[x_n(\tau_k)-x(\tau_k)][y(t_k)-y(t_{k-1})]||_Z \leq \sum_{k=1}^{n}||[x_n(\tau_k)-x(\tau_k)]||_X||[y(t_k)-y(t_{k-1})]||_Y \leq$$

$$\leq \sup\{||x_n(t) - x(t)||_X \mid t \in [a,b]\} \sum_{k=1}^{n} ||y(t_k) - y(t_{k-1})||_Y \leq$$

$$\leq \sup\{||x_n(t) - x(t)||_X \mid t \in [a,b]\} \bigvee_a^b (y).$$

Perciò si avrebbe $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$ che

$$||\int_a^b (x_n(t) - x(t))\,dy(t)||_Z \leq \epsilon + \sup\{||x_n(t) - x(t)||_X \mid t \in [a,b]\} \bigvee_a^b (y).$$

Perciò vale anche per l'arbitrarietà di ϵ che:

$$||\int_a^b (x_n(t) - x(t))\,dy(t)||_Z \leq \sup\{||x_n(t) - x(t)||_X \mid t \in [a,b]\} \bigvee_a^b (y).$$

Essendo che per ipotesi abbiamo che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente allora vale:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[a,b]} ||x_n(t) - x(t)||_X = 0;$$

dunque ne viene che

$$\lim_{n\to\infty} ||\int_a^b (x_n(t) - x(t))\,dy(t)||_Z = 0$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (x_n(t) - x(t))\,dy(t) = 0$$

perciò resta provato il teorema. □

Teorema 1.6.2.

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}_{[a,b]}$ *e* $g_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g_n \in \mathcal{V}_{[a,b]} \forall n \in \mathbb{N}$.
Se la successione $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* $\forall x \in [a, b]$, *ed esiste* $K \in \mathbb{R}^+$ *tale che*

$$\bigvee_a^b (g_n) \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\, dg_n(x) = \int_a^b f(x)\, d(\lim_{n\to\infty} g_n)(x).$$

Più in generale: Siano X, Y, Z *tre spazi normati sul campo reale e* Z *uno spazio completo, soddisfacenti le ipotesi (i) e (iv) dell'Osservazione 2 e siano* $x : [a, b] \to X$, x *continua e* $y_n : [a, b] \to Y$, y_n *a variazione totale limitata* $\forall n \in \mathbb{N}$.
Allora se $(y_n(t))_{n\mathbb{N}}$ *converge* $\forall t \in [a, b]$, *ed esiste* $K \in \mathbb{R}^+$ *tale che*

$$\bigvee_a^b (y_n) \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b x(t)\, dy_n(t) = \int_a^b x(t)\, d(\lim_{n\to\infty} y_n)(t).$$

Dimostrazione.
Anche in questo caso proviamo il teorema nella sua versione più generale.
Sia y la funzione limite di $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\forall \sigma = \{t_0, t_1, ..., t_n\} \in \Omega_{(a,b)}$ si ha:

$$\sum_{k=1}^{n} ||y_m(t_k) - y_m(t_{k-1})||_Y \leq K$$

per via dell'ipotesi che esiste

$$K \in \mathbb{R}^+ \text{ tale che } \bigvee_a^b (y_n) \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

allora passando al limite per $m \to \infty$ si ottiene che:

$$\sum_{k=1}^{n} ||y(t_k) - y(t_{k-1})||_Y \leq K$$

Dunque anche y è a variazione totale limitata e vale

$$\bigvee_a^b (y) \leq K.$$

Poichè x è continua sul compatto $[a, b]$, essa è uniformemente continua su $[a, b]$, perciò $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$ esiste $\delta(\epsilon) \in \mathbb{R}^+$ tale che $||x(t^{'}) - x(t^{''})||_X < \frac{\epsilon}{3K}$ $\forall t^{'}, t^{''} \in [a, b]$ tale che $|t^{'} - t^{''}| < \delta(\epsilon)$.
Sia ora $\sigma = \{t_0, t_1, ..., t_n\} \in \Omega_{(a,b)}$ tale che $t_k - t_{k-1} < \delta(\epsilon)$ per $k = 1, 2, ..., n$.
Si ha per il teorema 1.2.2 che:

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} x(t)\, dy(t) = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (x(t) - x(t_{k-1})\, dy(t) + \sum_{k=1}^{n} x(t_{k-1}) \int_{t_{k-1}}^{t_k} dy(t).$$

Visto che $x(t) - x(t_{k-1})$ è continua su $[t_{k-1}, t_k]$ e $\forall k \in \mathbb{N}$ y è a variazione totale limitata allora per il teorema 1.3.1, $x(t) - x(t_{k-1})$ è S-integrabile su $[t_{k-1}, t_k]$ rispetto a y $\forall k \in \mathbb{N}$.
Perciò vale che:

$$|| \int_{t_{k-1}}^{t_k} [x(t) - x(t_{k-1})]\, dy(t)||_Z \leq \sup_{t \in [t_{k-1}, t_k]} \quad \bigvee_{t_{k-1}}^{t_k} (y)$$

Inoltre

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} dy(t) = y(t_k) - y(t_{k-1})$$

Si ha:

$$|| \int_a^b x(t)\, dy(t) - \sum_{k=1}^{n} x(t_{k-1}) \int_{t_{k-1}}^{t_k} dy(t)||_Z = || \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (x(t) - x(t_{k-1})\, dy(t)||_Z \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} || \int_{t_{k-1}}^{t_k} (x(t) - x(t_{k-1})\, dy(t)||_Z \leq \sum_{k=1}^{n} \sup_{t \in [t_{k-1}, t_k]} \quad \bigvee_{t_{k-1}}^{t_k} (y) <$$

$$< \frac{\epsilon}{3K} \sum_{k=1}^{n} \bigvee_{t_{k-1}}^{t_k}(y) < \frac{\epsilon}{3K} \bigvee_{a}^{b}(y) \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Perciò esiste $\eta \in Z$ con $||\eta||_Z < 1$, tale che

$$\int_a^b x(t)\,dy(t) = \sum_{k=1}^{n} x(t_{k-1})[y(t_k) - y(t_{k-1})] + \frac{\epsilon}{3K}\eta.$$

In modo analogo abbiamo che $\forall m \in \mathbb{N}$ esiste $\eta_m \in Z$ con $||\eta_m||_Z < 1$, tale che

$$\int_a^b x(t)\,dy_m(t) = \sum_{k=1}^{n} x(t_{k-1})[y_m(t_k) - y_m(t_{k-1})] + \frac{\epsilon}{3K}\eta_m.$$

Inoltre vale:

$$0 \leq ||\sum_{k=1}^{n} x(t_{k-1})[(y_m(t_k) - y(t_k)) + (y(t_{k-1}) - y_m(t_{k-1}))]||_Z \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} ||x(t_{k-1})||_X[||(y_m(t_k) - y(t_k))||_Y + ||(y(t_{k-1}) - y_m(t_{k-1}))||_Y]$$

perciò passando al limite per $m \to \infty$ si ottiene che

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x(t_{k-1})[(y_m(t_k) - y(t_k)) + (y(t_{k-1}) - y_m(t_{k-1}))] = 0$$

quindi esiste un $m(\epsilon)$ tale che

$$\sum_{k=1}^{n} x(t_{k-1})[(y_m(t_k) - y(t_k)) + (y(t_{k-1}) - y_m(t_{k-1}))]||_Z < \frac{\epsilon}{3}$$

$\forall m \in \mathbf{N}, m > m(\epsilon)$.

Da ciò segue che:

$$||\int_a^b x(t)\,dy_m(t) - \int_a^b x(t)\,dy(t)||_Z \leq ||\int_a^b x(t)\,dy_m(t) +$$

$$-\sum_{k=1}^{n} x(t_{k-1})[y_m(t_k) - y_m(t_{k-1})]||_Z +$$

$$+||\sum_{k=1}^{n} x(t_{k-1})[y_m(t_k) - y_m(t_{k-1})] - \sum_{k=1}^{n} x(t_{k-1})[y(t_k) - y(t_{k-1})]||_Z +$$

$$+||\sum_{k=1}^{n} x(t_{k-1})[y(t_k) - y(t_{k-1})] - \int_a^b x(t)\, dy(t)||_Z < \epsilon$$

$\forall m \in \mathbb{N}, m > m(\epsilon)$

Vale quindi che:

$$\lim_{m\to\infty} \int_a^b x(t)\, dy_m(t) = \int_a^b x(t)\, d(\lim_{m\to\infty} y_m)(t) = \int_a^b x(t)\, dy(t).$$

$\square$

1.7 Teorema di rappresentazione di F.Riesz

Definizione 1.5. Definizione di operatore lineare

Siano $X(A), Y(A)$ due spazi vettoriali sullo stesso campo A. Un'applicazione $T : X \to Y$ tale che:

i) $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)\ \forall x_1, x_2 \in X$;

ii) $T(ax) = aT(x)\ \forall x \in X,\ \forall a \in A$

si chiama un operatore lineare da X a Y.

Definizione 1.6. Definizione di norma di un operatore lineare continuo.

Se $X(\mathbb{R})$ e $Y(\mathbb{R})$ sono due spazi normati e T è un operatore lineare continuo da X a Y si chiama norma di T e si denota con $||T||$, il numero

$$||T|| = \sup_{||x||\leq 1} ||T(x)|| = \sup_{||x||=1} ||T(x)|| = \sup_{x\neq 0} \frac{||T(x)||}{||x||}.$$

Teorema 1.7.1. *Teorema di Helly.*
Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di funzioni a valori reali di dominio* $[a,b]$, $f_n \in \mathcal{V}_{[a,b]}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, *ed esista* $M \in \mathbb{R}^+$ *tale che*

$$\sup\{|f_n(x)|| \ n \in \mathbb{N}, x \in [a,b]\} \leq M$$

$$\bigvee_a^b (f_n) \leq M \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Allora esiste una sottosuccessione di $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *che converge in ogni punto di* $[a,b]$ *a una funzione* $f \in \mathcal{V}_{[a,b]}$.

Teorema 1.7.2. *Teorema di Weierstrass.*
Se $f \in \mathbf{C}_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}$ *allora* $\forall \epsilon > 0$ *esiste una funzione polinomiale* p_ϵ *tale che*

$$|f(x) - p_\epsilon(x)| < \epsilon \qquad \forall x \in [a,b].$$

Teorema 1.7.3.
Sia $\mathbf{C}_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}$ *lo spazio di Banach delle funzioni a valori reali di dominio* $[a,b]$, *continue, normato con* $||f|| = \max\{|f(x)|||x \in [a,b]\}$.
Sia $\Phi : \mathbf{C}_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \to \mathbb{R}$ *un funzionale lineare continuo.*
Allora esiste $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g \in \mathcal{V}_{[a,b]}$, *tale che*

$$\Phi(f) = \int_a^b f(x)\,dg(x) \quad \forall f \in \mathbf{C}_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}.$$

Dimostrazione.
Si ha:

$$\int_a^b (f_1 + f_2)(x)\,dg(x) = \int_a^b f_1(x)\,dg(x) + \int_a^b f_2(x)\,dg(x).$$

$\forall f_1,\ f_2 \in \mathbf{C}_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]},\ g \in \mathcal{V}_{[\mathrm{a,b}]}$;

$$\int_a^b (cf)(x)\,dg(x) = c\int_a^b f(x)\,dg(x).$$

$\forall f \in \mathbf{C}_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]},\ g \in \mathcal{V}_{[\mathrm{a,b}]},\ c \in \mathbb{R}$;

$$|\int_a^b f(x)\,dg(x)| \leq \max_{[a,b]} |f(x)| \bigvee_a^b (g) = ||f(x)|| \bigvee_a^b (g);$$

Perciò $f \mapsto \int_a^b f(x)\,dg(x)$ è un funzionale lineare continuo su $\mathbf{C_{[a,b]}}$
con norma $\leq \bigvee_a^b(g)$
Viceversa supponiamo che Φ sia un funzionale lineare continuo con norma $||\Phi||$.
Osserviamo preliminarmente che: sia $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$, φ continua e
$\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$, ψ costante a tratti. Allora esistono $c_1, ..., c_m \in [a, b]$ tali che $a < c_1 < c_2 < ... < c_m < b$ e ψ costante in $]a, c_1[,]c_k, c_{k+1}[$, per $k = 1, 2, ..., m-1$, $]c_m, b[$. Dunque $\sigma = \{a, c_1, c_2, ..., c_m, b\}$ è una scomposizione dell'intervallo$[a, b]$ tale che

$$v_\sigma(\psi) = |\psi(a+0) - \psi(a)| + \sum_{k=1}^{m}[|\psi(c_k) - \psi(c_k - 0)| + |\psi(c_k + 0) - \psi(c_k)|] +$$
$$+[\psi(b) - \psi(b-0)]$$

dove $|\psi(a+0) - \psi(a)|$ è il salto della funzione nel punto a da destra, $|\psi(c_k) - \psi(c_k - 0)|$ e $|\psi(c_k + 0) - \psi(c_k)|]\ perk = 1, 2, ..., m$ sono rispettivamente i salti della funzione nel punto c_k da sinistra e da destra e $[\psi(b) - \psi(b-0)]$ il salto della funzione nel punto b da sinistra.
In quanto ψ è costante a tratti vale $|\psi(c_1) - \psi(a)| = |\psi(a+0) - \psi(a)| +$
$|\psi(c_1) - \psi(c_1 - 0)|$ e $|\psi_(c_{k+1}) - \psi(c_k)| = |\psi(c_k + 0) - \psi(c_k)| + |\psi(c_{k+1}) - \psi(c_{k+1} - 0)|$
$\forall k = 1, 2, ..., m-1$ e poi $|\psi(b) - \psi(c_m)| = |\psi(b) - \psi(b-0)|$.
Dunque per qualsiasi altra scomposizione σ_1 di $[a, b]$ tale che $\sigma \subseteq \sigma_1$ si ottiene: $v_\sigma(\psi) = v_{\sigma_1}(\psi)$ in quanto i punti che non appartengono alla scomposizione σ non potendo essere nessuno tra $a, c_1, c_2, ..., c_m, b$ signifa che ognuno di essi cade in uno di questi intervalli $]a, c_1[,]c_k, c_{k+1}[$, per $k = 1, 2, ..., m-1$, $]c_m, b[$ dove la ψ è rispettivamente costante e questo mi implica che se due o più di questi punti appartengono allo stesso intervallo quando si va a fare la differenza tra i valori assunti dalla ψ in quei punti si ottiene 0 altrimenti se tutti appartengono a intervalli distinti avrò sempre la somma totale dei salti che la funzione ψ compie sull'intervallo $[a, b]$.
Inoltre presa un'altra qualsiasi scomposizione σ' di $[a, b]$ si avrà che
$v_{\sigma'}(\psi) \leq v_\sigma(\psi)$ in quanto la scomposizione σ è quella in cui si tiene conto di

tutti i salti che la funzione compie.
Perciò abbiamo dunque che $\forall \sigma_1 \in \Omega_{(a,b)}\ v_{\sigma_1}(\psi) \leq v_\sigma(\psi)$;quindi vale $\psi \in \mathcal{V}_{[\mathrm{a,b}]}$ e

$$\bigvee_a^b(\psi) = |\psi(a+0)-\psi(a)|+\sum_{k=1}^{m}[|\psi(c_k)-\psi(c_k-0)|+|\psi(c_k+0)-\psi(c_k)|]+[\psi(b)-\psi(b-0)].$$

Allora posto $c_0 = a$ e $c_{m+1} = b$, si ha per il teorema 1.2.2 e per la definizione stessa di integrale di Stieltjes:

$$\int_a^b \varphi(x)\, d\psi(x) = \sum_{k=0}^{m} \int_{c_k}^{c_{k+1}} \varphi(x)\, d\psi(x) = \sum_{k=0}^{m} \varphi(c_k)[\psi(c_k+0) - \psi(c_k)] +$$

$$+\varphi(c_{k+1})[\psi(c_{k+1}) - \psi(c_{k+1}-0)].$$

Perciò considerando il seguente cambiamento di variabile $t(b-a)+a = x$ e la funzione $f : [0,1] \to [a,b]$ così definita $f(t) = (b-a)t + a$ (si noti che la funzione considerata è continua, monotona crescente e suriettiva in quanto biettiva) allora per il teorema 1.2.4 possiamo supporre che $a = 0$ e $b = 1$.
$\forall x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1 \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Poichè ogni addendo della somma è non negativo per $x \in [0,1]$, posto $\epsilon_k = \pm 1$ per $k = 0, 1, ..., n$, si ha

$$|\sum_{k=0}^{n} \epsilon_k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}| \leq \sum_{k=0}^{n} |\epsilon_k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} |\epsilon_k|\ |\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}| = 1 \qquad \forall x \in [0,1]$$

Sia f_{kn} la funzione tale che $f_{kn}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ per $x \in [0,1]$, $k = 0, 1, 2, ..., n$.
Poichè $|\Phi(f)| \leq ||\Phi||\ ||f||$, e per la linearità di Φ si ha:

$$|\sum_{k=0}^{n} \epsilon_k \Phi(f_{kn})| = |\Phi(\sum_{k=0}^{n} \epsilon_k f_{kn})| \leq ||\Phi||.$$

Se scegliamo gli ϵ_k in modo che tutti gli addendi dell'ultima somma scritta siano non negativi, si ha:

$$|\sum_{k=1}^{n}\epsilon_k\Phi(f_{kn})| = \sum_{k=1}^{n}|\epsilon_k\Phi(f_{kn})| = \sum_{k=1}^{n}|\Phi(f_{kn})|$$

perciò vale:

$$\sum_{k=1}^{n}|\Phi(f_{kn})| \leq |||\Phi|.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ consideriamo la funzione costante a tratti g_n così definita:

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \Phi(f_{0n}) & \text{se } x \in]0, \frac{1}{n}[\\ \Phi(f_{0n}) + \Phi(f_{1,n}) & \text{se } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \sum_{k=0}^{n-1}\Phi(f_{kn}) & \text{se } x \in [\frac{n-1}{n}, 1[\\ \sum_{k=0}^{n}\Phi(f_{kn}) & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Si ha $|g_n(x)| \leq ||\Phi||, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1]$. Inoltre essendo g_n costante a tratti per la stessa spiegazione fatta per ψ vale che g_n è a variazione totale limitata $\forall n \in \mathbb{N}$ ed essendo che $\forall \sigma \in \Omega_{(0,1)}$ vale $v(g_n)_\sigma \leq ||\Phi||$ per stessa definizione della g_n allora si può concludere che:

$$\bigvee_0^1(g_n) \leq ||\Phi|| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

allora per il teorema di Helly vale che da $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si può estrarre una sottosuccessione $(g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $(g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}(x)$ converge $\forall x \in [0,1]$. Detta g la funzione limite sempre per il teorema di Helly vale che essa è a variazione totale limitata su $[0,1]$. Sia ora $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sottosuccessione convergente di prima trovata.
Sia ora $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f \in \mathbf{C}_{[0,1]}$. Allora per l'osservazione premessa si ha:

$$\int_0^1 f(x)\,dg_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})\Phi(f_{kn}) = \sum_{k=0}^{n}\Phi(f(\frac{k}{n})f_{kn}) = \Phi(\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})(f_{kn})) = \Phi(B_n)$$

dove
$$x \mapsto B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$$
è l'n-esima funzione polinomiale di Bernstein relativa a f. Sia ha perciò per il Teorema di Weierstrass che
$$\lim_{n\to\infty} ||f - B_n|| = 0.$$
Perciò
$$|\Phi(B_n) - \Phi(f)| = |\Phi(B_n - f)| \leq ||\Phi||\ ||B_n - f|| \to 0 \qquad \text{per } n \to \infty.$$
Quindi
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\, dg_n(x) = \Phi(f).$$
Perciò per il teorema 1.6.1 vale che:
$$\Phi(f) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\, dg_n(x) = \int_0^1 f(x)\, dg(x)$$
□

Osservazione 10.
Come già si è osservato, da
$$|\int_0^1 f(x)\, dg(x)| \leq \max_{[a,b]} |f(x)| \bigvee_0^1 (g)$$
si ha che
$$|\Phi(f)| \leq \bigvee_0^1 ||f||$$
e quindi per definizione di norma di un operatore lineare vale
$$||\Phi|| \leq \bigvee_0^1 (g).$$
Dall'altra parte
$$g_{n_k} \to g \text{ per } k \to \infty \text{ e } \bigvee_0^1 \leq ||\Phi||;$$

se $\{0 = x_0, x_1, ..., x_p = 1\}$ è un'arbitraria scomposizone di $[0,1]$ si ha che

$\sum_{j=1}^{p} |g_{n_k}(x_j) - g_{n_k}(x_{j-1})| \leq ||\Phi||$ e quindi per $k \to \infty$, $\sum_{j=1}^{p} |g(x_j) - g(x_{j-1})| \leq ||\Phi||$,

da cui quindi

$$\bigvee_0^1 (g) \leq ||\Phi||.$$

Perciò

$$||\Phi|| = \bigvee_0^1 (g).$$

Osservazione 11.
La funzione g non è univocamente determinata. Per l'osservazione 8 segue che se

$$\Phi = \int_0^1 f(x)\, dg(x) \quad \forall f \in \mathbf{C}_{[\mathbf{0},\mathbf{1}]},$$

allora anche

$$\Phi = \int_0^1 f(x)\, dh(x) \quad \forall f \in \mathbf{C}_{[\mathbf{0},\mathbf{1}]}, \forall h \in \mathcal{V}_{[0,1]}$$

tale che $g(1) - h(1) = g(0) - h(0)$ e $g(x) - h(x) = g(0) - h(0)$ in ogni punto $x \in]0,1[$ dove g e h sono continue.

Capitolo 2

Misura astratta

Prima di introdurre l'integrale di Stieltjes-Lebesgue faremo qualche richiamo alla teoria della misura astratta.

2.1 Semianelli e σ-algebre

Definizione 2.1. Definizione di semi-σ-algebra (o semianello) e σ algebra. Sia $X \neq \emptyset$. Una famiglia Γ di sottoinsiemi di X si dice una semi-σ algebra se:

i) $\emptyset \in \Gamma$,

ii) $A \in \Gamma, B \in \Gamma \Rightarrow A \bigcap B \in \Gamma$,

iii) $A \in \Gamma, B \in \Gamma, B \subseteq A \Rightarrow$

$$A - B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n, \text{ dove } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

è un'unione finita o numerabile e $\forall n \in \mathbb{N}$ $C_n \in \Gamma$ e $C_n \bigcap C_m = \emptyset$ per $m \neq n$.

Ogni insieme del tipo

$$O = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \text{ con } A_n \in \Gamma\ \forall n \in \mathbb{N}$$

si dice σ- insieme. Con ciò la condizione iii) può essere letta nel seguente modo: $A \in \Gamma, B \in \Gamma, B \subseteq A$ allora

$$A - B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \text{ è un } \sigma \text{ insieme dove } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

è un'unione finita o numerabile e $\forall n \in \mathbb{N}$ $C_n \in \Gamma$ e $C_n \bigcap C_m = \emptyset$ per $m \neq n$

Definizione 2.2. Definzione di σ-algebra.
Sia $X \neq \emptyset$. Una famiglia Λ di sottoinsiemi di X si dice una σ algebra se:

i) $A_n \in \Lambda \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Lambda$,

ii) $A \in \Lambda, B \in \Lambda \Rightarrow A - B \in \Lambda$

Teorema 2.1.1.
Se Λ è una σ algebra allora:

(1) $\emptyset \in \Lambda$,

(2) $A_n \in \Lambda$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Lambda$,

(3) Λ è una semi-σ algebra.

Useremo di frequente funzioni a valori reali ma che possono anche assumere valori $+\infty$ e $-\infty$, pertanto introduciamo qualche convenzione per una adeguata comprensione:

(1) $a + (\pm\infty) = (\pm\infty) + a = \pm\infty \quad \forall a \in \mathbb{R}$,

(2) $(+\infty) + (-\infty) = (-\infty) + (+\infty) = (\pm\infty) - (\pm\infty) = 0$,

(3) $a(\pm\infty) = (\pm\infty)a = \pm\infty$ per $a > 0$,

(4) $a(\pm\infty) = (\pm\infty)a = \mp\infty$ per $a < 0$,

(5) $0(\pm\infty) = (\pm\infty)0 = 0$,

(6) $a/(\pm\infty) = 0$,

(7) $a/0 = +\infty$.

2.2 Misura su un semianello.

Ora introduciamo una misura su una semi-σ algebra.

Definizione 2.3.
Sia Γ una semi-σ algebra di sottoinsiemi di X; la funzione $\mu : \Gamma \to \mathbb{R}$ si dice una misura su Γ se:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$ e $0 \leq \mu(A) \leq +\infty$ $\forall A \in \Gamma$,

(2) $A \in \Gamma$ e $A_n \in \Gamma$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n)$ allora $\mu(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$,

(3) $A \in \Gamma$ e $A_n \in \Gamma$ per $n = 1, 2, ..., p$ e $A_j \cap A_k = \emptyset$ per $k \neq j$ e $A \supset \bigcup_{n=1}^{p}(A_n)$ allora $\mu(A) \geq \sum_{n=1}^{p} \mu(A_n)$.

Teorema 2.2.1.
Se μ è una misura sulla semi-σ Γ allora:

(1) μ è monotona cioè $\forall A, B \in \Gamma$ tali che $A \subset B$ allora $\mu(A) \leq \mu(B)$,

(2) μ è σ addittiva e cioè se $A \in \Gamma$ e $A_n \in \Gamma$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e e $A_j \cap A_k = \emptyset$ per $k \neq j$ e $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n)$ allora $\mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

Inoltre vale anche il viceversa se aggiungiamo che valga $\mu(\emptyset) = 0$.

Per esempio siano $a_j \in \mathbb{R}$ e $b_j \in \mathbb{R}$ con $a_j < b_j$ chiamando
$I = \{x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^{\ltimes} | a_j < \xi_j < b_j \text{ per } j = 1, 2, ..., n\}$ e definendo come misura la seguente funzione:$\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu(I) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$ si ottiene una semi-σ algebra con la sua misura su $\mathbf{R^n}$,ma si possono fare ulteriori esempi come il seguente: sia un insieme $X \neq \emptyset$ definisco Γ come segue; $\emptyset, X \in \Gamma$ e inoltre Γ è costituito di tutti i suoi sottoinsiemi A contenenti un solo punto e dei loro rispettivi complementari ($A^c = X - A$) ed infine definisco come misura su Γ la seguente funzione $\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu(A) = 1$ se A contiene un punto. Ora è di facile prova che entrambi gli esempi sono sia delle semi-σ algebre e sia delle misure.

2.3 Misura esterna.

Definizione 2.4.
Dato $S \subset X$, $X \neq \emptyset$ si dice che è sequenzialmente ricoperto da Γ se esiste un σ-insieme $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ con $A_n \in \Gamma \quad \forall n \in \mathbb{N}$ tale che

$$S \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Definizione 2.5.
Dato $S \subset X$,$X \neq \emptyset$, sequenzialmente ricoperto da Γ la misura esterna $\mu^*(S)$ di S è:

$$\mu^*(S) = \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) | \forall \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ ricoprimento di } S\}$$

Nel caso in cui S non sia ricoperto si dice che $\mu^*(S) = +\infty$.
In questo caso si dice che μ^* è generata da (X, Γ, μ).

Teorema 2.3.1.

(1) $\mu^*(\emptyset) = 0$ *e* $0 \leq \mu^*(S) \leq +\infty \ \forall S \subset X$*,*

(2) μ^* *è sub-addittiva cioè* $\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(S_n)$*,*

(3) μ^* *è monotona cioè se* $S \subset T$ *allora* $\mu^*(S) \leq \mu^*(T)$*,*

(4) $A \in \Gamma$ *allora* $\mu^*(A) = \mu(A)$*.*

Ora dimostreremo un teorema importante nella teoria dell'integrale di Stieltjes-Lebesgue. Siano Γ e Γ_1 due semi-σ algebre di X e siano μ e μ_1 rispettivamente due misure su Γ e Γ_1.

Teorema 2.3.2.
(X, Γ, μ) *e* (X, Γ_1, μ_1) *generano la stessa misura esterna in* $X \Leftrightarrow \mu^* = \mu_1$ *su* Γ_1 *e* $\mu_1^* = \mu$ *su* Γ*.*

Dimostrazione.
Vediamo prima $\Rightarrow$.
Dal teorema precedente vale $\mu = \mu^*$ su Γ e $\mu_1^* = \mu_1$ su Γ_1. Perciò se $\mu^* = \mu_1^*$ su X allora vale $\mu^* = \mu_1$ su Γ_1 e $\mu_1^* = \mu$ su Γ
Vediamo ora $\Leftarrow$.
Sia $\mu^* = \mu_1$ su Γ_1 e $\mu_1^* = \mu$ su Γ. Dovendo dimostrare che $\mu^* = \mu_1^*$ su X facciamo vedere che valgono $\mu^*(S) \leq \mu_1^*(S)$ e $\mu_1^*(S) \leq \mu^*(S)$ $\forall S \subset X$.
Possiamo supporre che $\mu_1^*(S) < +\infty$ perchè altrimenti la prima disuguaglianza che proviamo, $\mu^*(S) \leq \mu_1^*(S)$ è ovvia. Pertanto esiste un ricoprimento $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ di S con $B_n \in \Gamma_1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ tale che $+\infty > \mu_1^*(S) > \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_1(B_n) + - \frac{\epsilon}{2} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(B_n) - \frac{\epsilon}{2}$ $\forall \epsilon > 0$.

Quindi $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(B_n) < +\infty \Rightarrow \mu^*(B_n) < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$ perciò esiste un ricoprimento $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ di B_n con $A_j \in \Gamma$ $\forall j \in \mathbb{N}$ tale che :

$$S \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n,j\in\mathbb{N}} A_{n,j}$$

e

$$\mu_1^*(S) > \sum_{n,j\in\mathbb{N}} \mu(A_{n,j}) - \epsilon$$

$\Rightarrow$

$$\mu^*(S) \leq \sum_{n,j\in\mathbb{N}} \mu(A_{n,j}) < \mu_1^*(S) + \epsilon \Rightarrow \mu^*(S) \leq \mu_1^*(S).$$

Nello stesso modo si prova che $\mu_1^*(S) \leq \mu^*(S)$. $\square$

Osservazione 12.
La sola condizione $\mu^* = \mu_1$ su Γ_1 non è sufficiente per soddisfare che $\mu^* = \mu_1^*$. Infatti sia $X = \mathbb{R}$ e sia Γ costituita dagli intervalli $I =]a, b[$ con $a, b \in \mathbb{Q}$ e sia invece Γ_1 costituita da $I =]a, b[$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ e per entrambe la misura sia $\mu(I) = b - a$. Ne segue che se consideriamo l'intervallo $A =]0, \frac{1}{2}[\in \Gamma$ allora abbiamo che $\mu^*(A) = \mu(A) = \frac{1}{2}$ ma $\mu_1^* = 1$. Perciò $\mu_1^* \neq \mu^*$.

2.4 Insiemi misurabili.

Sia Γ una semi-σ algebra sulla quale sia definita una misura μ.

Definizione 2.6. Definizione di insieme misurabile secondo Carathéodory.
Sia $E \subset X$. Si dice μ misurabile se:

$$\mu^*(E) = \mu^*(S \cap E) + \mu^*(S \cap E^c) \qquad S \subset X$$

Si dimostra che Λ, che è la famiglia degli insiemi misurabili, costituisce una σ algebra contenente Γ come sottofamiglia.
Infatti:

Teorema 2.4.1.
Se $E \in \Lambda$ allora $E^c \in \Lambda$. Quindi $X \in \Lambda \Leftrightarrow \emptyset \in \Lambda$.

Lemma 2.4.2.
Se $E_1 \in \Lambda$ e $E_2 \in \Lambda$ allora $E_1 + E_2 \in \Lambda$; se inoltre $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ allora $\mu^*(S \cap (E_1 + E_2)) = \mu^*(S \cap E_1) + \mu^*(S \cap E_2) \quad \forall S \subset X$; in particolare $\mu^*(E_1 + E_2) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2)$.

Corollario 2.4.3.
*Se $E_n \in \Lambda$ per $n = 1, 2, ..., p$ allora $\bigcup_{n=1}^p E_n \in \Lambda$ e $\bigcap_{n=1}^p E_n \in \Lambda$.
Inoltre se $E_j \cap E_k = \emptyset$ per $j \neq k$ allora $\mu^*(S \cap \bigcup_{n=1}^p E_n) = \sum_{n=1}^p \mu^*(S \cap E_n)$ $S \subset X$; in particolare*

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{p} E_n) = \sum_{n=1}^{p} \mu^*(E_n).$$

Perciò si dice che la misura esterna μ^* è finitamente additiva su Λ.

Teorema 2.4.4.
Se $E_1 \in \Lambda$ e $E_2 \in \Lambda$, allora $E_1 - E_2 \in \Lambda$.

Teorema 2.4.5.
Se $E_n \in \Lambda$ per $n = 1, 2, ...$ allora $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \Lambda$. Se inoltre $E_k \cap E_j = \emptyset$ per $k \neq j$ allora $\mu^*(S \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(S \cap E_n) \quad S \subset X$; in particolare

$$\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n).$$

Teorema 2.4.6.
Se $A \in \Gamma$ allora $A \in \Lambda$.

Con ciò ne viene quello che avevamo detto e cioè che Λ, che è la famiglia degli insiemi misurabili, costituisce una σ algebra contenente Γ come sottofamiglia. Da questi teoremi inoltre ne viene che μ^* su Λ è un'estensione della misura μ su Γ pertanto ora possiamo scrivere $\mu(E)$ invece di $\mu^*(E)$ $\forall E \in \Lambda$, per il fatto che μ^* è una misura su Λ perchè soddisfa le condizioni del teorema 2.2.1 .

Osservazione 13.
Sia ora una semi-σ algebra Γ_1 tale che $\Gamma \subset \Gamma_1 \subset \Lambda$ allora la μ estesa è una misura anche su Γ_1 essendo appunto che $\Gamma_1 \subset \Lambda$. Ora ci si potrebbe chiedere: se rifacciamo la stessa costruzione partendo però dalla misura μ su Γ_1 allora troveremo la stessa estensione su Λ di prima?
Siano μ^* e μ_1^* le rispettive misure esterne generate da (X, Γ, μ) e (X, Γ_1, μ). Allora sappiamo che $\mu^* = \mu$ su Γ_1 perchè $\Gamma_1 \subset \Lambda$ e anche $\mu_1^* = \mu$ perchè misura esterna e misura sono uguali sulla semi-σ algebra e inoltre $\mu_1^* = \mu$ su Γ perchè $\Gamma \subset \Gamma_1$. Quindi dal teorema 2.0.15 ne viene che $\mu^* = \mu_1^*$ su X. Perciò l'estensione è la stessa e quindi anche la famiglia degli insiemi misurabili è la stessa.

Ora inseriamo un teorema che permette di vedere se un insieme è misurabile se lo è tutta una classe di suoi sottoinsiemi infatti:

Teorema 2.4.7.
L'insieme E è misurabile $\Leftrightarrow$ $E \cap A$ è misurabile $\forall A \in \Gamma$ di misura finita.

2.5 Insiemi nulli e successioni di insiemi misurabili.

Definizione 2.7.
Ogni insieme $E \subset X$ che soddisfa $\mu^*(E) = 0$ si dice un insieme nullo. Ovvi-

amente ogni sottoinsieme A di un insieme E nullo è un insieme nullo perchè $0 \leq \mu^*(A) \leq \mu^*(E) \leq 0 \Rightarrow \mu^*(A) = 0$.

Teorema 2.5.1.
Ogni insieme nullo è misurabile.

Corollario 2.5.2.
Se $E \subset X$ è tale che $\mu^*(E \cap A) = 0$ $\forall A \in \Gamma$ di misura finita allora E è misurabile e vale che o $\mu(E) = 0$ o $\mu(E) = +\infty$.
Se $\forall A \in \Gamma$ tali che $\mu(A) = 0$ o $\mu(A) = +\infty$ allora tutti $E \subset X$ sono misurabili e o $\mu(E) = 0$ o $\mu(E) = +\infty$.

Definizione 2.8. Definizione di quasi dappertutto.
Sia $S \subset X$.Diremo che una proprietà (P) in S è vera quasi dappertutto e lo indicheremo con q.d se $\{x \in S | (P)$è falsa $\}$ è un insieme di misura nulla.

Perciò dati $E, F \subset X$ se le funzioni caratteristiche di E e F sono tali che $\chi_E = \chi_F$ q.d su X noi diremo che $E = F$ q.d su X e lo denoterermo con $E \sim F$. Notiamo che $\sim$ è una relazione di equivalenza nella famiglia dei sottoinsiemi di X.

Definizione 2.9.
Sia $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di sottoinsiemi di X si dice monotona crescente (decrescente) se: $E_n \leq (\geq) E_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.In tali casi si pone:

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \qquad \lim_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

Teorema 2.5.3.
Se tutti E_n sono misurabili $\forall n \in \mathbb{N}$,$(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona crescente e $E = \lim_{n\to+\infty} E_n$ allora $\mu(E) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n)$. Se tutti E_n sono misurabili $\forall n \in \mathbb{N}$, $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona decrescente e $E = \lim_{n\to+\infty} E_n$ e sia $\mu(E_n) < +\infty$ per almeno un valore di n allora $\mu(E) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n)$.

Data una successione di insiemi $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'insieme di tutti i punti x per cui $x \in A_n$ per un numero infinito di n è denotato con $\limsup_{n\to+\infty} A_n$ mentre l'insieme di tutte le x tali che $x \in A_n$ per $n \geq n_0(x)$ si denota con

$\liminf_{n \to +\infty} A_n$.

È di facile prova dimostrare che:

$$\limsup_{n \to +\infty} A_n = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n \right)$$

e

$$\liminf_{n \to +\infty} A_n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{n=k}^{+\infty} A_n \right)$$

Teorema 2.5.4.
Data una successione $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di insiemi misurabili si ha che:

$$\mu(\liminf_{n \to +\infty} E_n) \leq \liminf_{n \to +\infty} \mu(E_n).$$

Inoltre se $\mu(E_n \cup E_{n+1} \cup ...) < +\infty$ per almeno un valore di n allora:

$$\mu(\limsup_{n \to +\infty} E_n) \geq \limsup_{n \to +\infty} \mu(E_n).$$

Se in particolare vale per di più che la successione E_n è anche convergente allora vale

$$\mu(\lim_{n \to +\infty} E_n) = \lim_{n \to +\infty} \mu(E_n).$$

2.6 Caratterizzazzione per mezzo di ricoprimenti e inclusioni degli insiemi misurabili.

Vediamo un'altra caratterizzazione per gli insiemi misurabili.

Teorema 2.6.1.
L'insieme $E \subset X$ è misurabile $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$ esistono $E_{1\epsilon}$ e $E_{2\epsilon}$ misurabili tali che $E_{1\epsilon} \subset E \subset E_{2\epsilon}$ e $\mu(E_{2\epsilon} - E_{1\epsilon}) < \epsilon$

Definizione 2.10.
Diremo ogni insieme $O_\delta = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ dove O_n sono σ insiemi, σ_δ insiemi.

Osservazione 14. Diremo che un insieme misurabile E è un σ insieme di misura finita $\Leftrightarrow E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ dove tutti gli E_n sono misurabili e di misura finita.
È ovvio $\Leftarrow$.Vediamo $\Rightarrow$.
Infatti $E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ con $A_n \in \Gamma$ semi$-\sigma$ agebra sulla quale è definita una misura μ e $\mu(A_n)$ $\forall n = 1, 2, ...$ Perciò in questo caso $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ con $E_n = E \cap A_n$ che sono misurabili per il teorema 2.1.11 e di misura finita perchè $\mu(E_n) \leq$
$\leq \mu(A_n)$ $\forall n = 1, 2, ...$

Definizione 2.11.
Se lo stesso insieme X è un σ insieme di misura finita la misura μ si dirà una σ misura finita.

Teorema 2.6.2.
Se l'insieme $S \subset X$ è sequenzialmente ricoperto da Γ allora
$\mu^*(S) = inf\{\mu(O)|O\ \sigma - insieme \supset S\}$.
Per ogni insieme $S \subset X$ si ha che
$\mu^*(S) = inf\{\mu(E)|E\ insieme\ misurabile \supset S\}$.
Dato l'insieme misurabile E di σ misura finita esiste un σ insieme $O_\delta = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ tale che la successione dei σ insiemi O_n è monotona decrescente, $E \subset O_\delta$ e $\mu(O_\delta - E) = 0$ (perciò gli insiemi $E \sim O_\delta$).

2.7 Misura di Lebesgue e Stieltjes-Lebesgue.

Avevamo già visto che considerati $a_j \in \mathbb{R}$ e $b_j \in \mathbb{R}$ con $a_j < b_j$ chiamando $I = \{x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi n) \in \mathbb{R}^{\ltimes} | a_j < \psi j < b_j$ per $j = 1, 2, ..., n\}$ e definendo come misura la seguente funzione: $\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu(I) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$ si ottiene una semi-σ algebra con la sua misura su $\mathbb{R}^n$. Ora ripetendo l'estensione fatta nel caso generale di una misura astratta, si trova la σ algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue e la relativa misura μ è detta misura di Lebesgue. Ora però $\mathbb{R}^n$ è uno spazio metrico e questo ci permette di estendere alcuni teoremi visti in precedenza.

Osservazione 15.
Sia $A \subset \mathbb{R}^n$, A aperto allora $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$

Da questa osservazione ne viene immediatamente che A è misurabile e di conseguenza tutti i chiusi lo sono perchè complementari degli aperti.

Teorema 2.7.1.
Per ogni insieme $S \subset \mathbb{R}^n$ abbiamo che $\mu^*(S) = \inf\{\mu(O)|O \text{ aperto } \supset S\}$.
L'insieme E è misurabile $\Leftrightarrow \forall\epsilon > 0$ esiste un insieme aperto O e un insieme chiuso F tali che $F \subset E \subset O$ e $\mu(E - F) < \epsilon$

In conclusione a questa parte di misura astratta introduciamo un'altra misura: sia $X = \mathbb{R}$ e sia $g(x)$ una funzione a valori reali, continua su $\mathbb{R}$ e monotona crescente. Se Γ è la semi-σ algebra costituita dall'insieme $\emptyset$ e da tutti gli intervalli aperti I di $\mathbb{R}$ e si definisce come misura la seguente funzione: $\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu(I) = g(b) - g(a)$ allora si ottiene con lo stesso procedimento di estensione fatto in generale la σ algebra degli insiemi misurabili detti insiemi misurabili secondo Stieltjes-Lebesgue e la stessa misura è detta misura di Stieltjes-Lebesgue.

Osservazione 16.
Osserviamo che se prendiamo $g(x) = x$ si ottiene la stessa misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$.

Capitolo 3

L'integrale di Daniell.

3.1 Introduzione all'integrale di Daniell

Sia ora μ una misura su X e sia Λ una σ algebra costituita da sottoinsiemi di X misurabili (notiamo che non è necessario che Λ contenga al suo interno tutti i sottoinsiemi di X misurabili).

Definizione 3.1. Definizione di funzione semplice o a gradini.
Sia $f : X \to \mathbb{R}$. f si dice semplice o a gradini se $f(X)$ è un insieme finito di valori differenti tra loro o ognuno diverso da 0 e ognuno dei valori è assunto da f su un insieme μ misurabile di misura finita.

Dalla definizione ne viene che

$$f(x) = \sum_{n=1}^{q} d_n \chi_{F_n}(x)$$

con $d_n \neq 0$ e finiti $\forall n = 1, 2, ..., q$ e dove $\chi_{F_n}(x)$ sono le funzioni caratteristiche degli insiemi disgiunti $F_n \neq 0$ e $F_n \in \Lambda$ e di misura finita. Tale rappresentazione di f verrà detta rappresentazione standard ed è ovviamente unica.

Lemma 3.1.1.
Ogni funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{p} c_n \chi_{E_n}$$

dove $c_n \neq 0$ *e* $c_n \neq \infty$*,* $E_n \in \Lambda$ *e* $\mu(E_n) < +\infty$ *per* $n = 1, 2, ..., p$ *è una funzione semplice.*
Si noti come dunque non è necessario che c_n *siano tutti differenti e gli insiemi* E_n *siano disgiunti.*

Dimostrazione.
Sia $S \subset \{1, 2, ..., p\}$ e $S' = \{1, 2, ..., p\} - S$ e definiamo
$F_S = \bigcap_{i \in S}(\bigcap_{j \in S'}(E_i - E_j) = \bigcap_{i \in S}(\bigcap_{j \in S'}(E_i E_j^c))$. In particolare abbiamo che $F_S = \bigcap_{i \in S} E_i$ per $S = 1, 2, ..., p$. Quindi $F_S \in \Lambda \ \forall S$ (che sono tanti quanti i sottoinsiemi di un insieme che ha p elementi e cioè 2^p) in quanto differenza di insiemi misurabile è misurabile,l'intersezione di insiemi misurabile è misurabile. Inoltre $F_{S1} \neq F_{S2}$ se $S1 \neq S2$ per stessa definizione di F_S e $\forall S \ F_S$ è di misura finita perchè lo sono gli $E_n \ \forall n = 1, 2, ..., p$.
Sia $x \in E_i$ per un qualche indice $i \in \{1, 2, ..., p\}$ e sia $j \neq i$ allora $x \in E_j$ oppure $x \in E_j^c$; in questo modo $x \in F_S$ per uno e un solo F_S tale che $i \in S$. Viceversa sia x tale che $x \in F_S$ e ad uno solo di essi tali che $i \in S$ allora $x \in E_i \Rightarrow$ abbiamo che

$$E_i = \bigcup_{i \in S} F_S$$

e perciò

$$f(x) = \sum_{n=1}^{p} c_n \chi_{E_n} = \sum_{i \in S} d_S \chi_{F_S} \quad \text{dove } d_S = \sum_{i \in S} c_i.$$

Così elimando gli insiemi F_S per i quali $d_S = 0$ o $F_S = \emptyset$ e associando i termini con uguali coeficienti si ottiene la rappresentazione standard. □

Osservazione 17*.*
Sia $L = \{f(x) = \sum_{n=1}^{p} c_n \chi_{E_n} | \ c_n \neq 0 \ , \ c_n \neq \infty \ \ E_n \in \Lambda, \ \mu(E_n) < +\infty$ per $n = 1, 2, ..., p\}$ è uno spazio vettoriale che verrà detto lo spazio vettoriale delle funzioni semplici.
Perciò vale $af + bg \in L \ \forall f, g \in L \ \forall a, b \in \mathbb{R}$.
Questo viene direttamente dal lemma precedente.

Siano ora $h(x) = \max(f(x), g(x)) \quad \forall x \in X$ e $k(x) = \min(f(x), g(x)) \forall x \in X$ allora esse appartengono a $L \ \forall f, g \in L$ per loro stessa definizione.

Teorema 3.1.2.
Se per ogni $f(x) = \sum_{n=1}^{p} c_n \chi_{E_n}(x) \in L$ *noi definiamo*

$$I(f) = \sum_{n=1}^{p} c_n \mu(E_n)$$

allora $I(f)$ *è univocamente determinato e vale che:*

i) $-\infty < I(f) < +\infty$,

ii) $I(f+g) = I(f) + I(g)$,

iii) $I(af) = aI(f)\ \forall a \in \mathbb{R}, a \neq \pm\infty$,

iv) se $f(x) \geq g(x)$ *su* $X \Rightarrow I(f) \geq I(g)$,

v) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *è una successione monotona decrescente tendente a* $0\ \forall x \in X$
$\Rightarrow I(f_n) \to 0$ *per* $n \to +\infty$.

Dimostrazione.
L'unicità di $I(f)$ viene dal fatto che se ci serviamo delle notazioni usate nel lemma precedente abbiamo che

$$f(x) = \sum_{i\in S} d_S \chi_{F_S}(x) \quad E_i = \bigcup_{i\in S} F_S, d_S = \sum_{i\in S} c_i$$

Perciò visto che F_S sono disgiunti vale

$$c_i \mu(E_i) = c_i \sum_{i\in S} \mu(F_S)$$

e quindi

$$I(f) = \sum_{i\in S} d_S \mu(F_S);$$

questo dimostra dunque che essendo la rappresentazione standard di f, $\sum_{i=1}^{q} d_S \chi_{F_S}(x)$, è unica allora lo è anche quella di $I(f)$ ed è $I(f) = \sum_{i=1}^{q} d_S \mu(F_S)$.
Per quanto riguarda le proprietà i),ii),iii),iv) sono una diretta conseguenza delle proprietà di cui gode la misura μ e delle stesse definizioni di $f+g$ e af

e per quanto riguarda la proprietà i) inoltre bisogna tener conto del fatto che $c_i \in \mathbb{R}\ \forall i = 1, 2, ..., p$.
Vediamo invece di fare una dimostrazione diretta per la proprietà 5.
Dal momento che la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione decrescente tendente a 0 $\forall x \in X$ allora $f_n(x) \geq 0$ su X $\forall n \in \mathbb{N}$ e così per la proprietà iv) vale che $I(f) \geq 0$.
Sia $\epsilon > 0$ e sia $P_n = \{x \in X | f_x \geq \epsilon\}$ per $n = 1, 2, ...$; dal momento che f_n è una funzione semplice allora l'insieme $P_n \in \Lambda$ e ha misura finita. Sfruttando il fatto che la successione è decrescente abbiamo che $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ su X $\Rightarrow P_{n+1} \subset P_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$; perciò esiste

$$P = \lim_{n\to+\infty} P_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_n \Rightarrow \mu(P) = \lim_{n\to+\infty} \mu(P_n)$$

.
Essendo però la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decrescente si ha che $\emptyset = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_n$ quindi $\mu(P) = 0$. Perciò $\forall\epsilon > 0$ esiste $n(\epsilon)$ tale che $\mu(P_n) \leq \epsilon$ per $\forall n$ tale che $n \geq n(\epsilon)$.
Sia $M = \max\{f_1(x)|x \in X\}$ e sia A la misura dell'insieme in cui $f_1(x) > 0$. Consideriamo $n > n(\epsilon)$ e $f_n(x) = \sum_{i=1}^{p} c_i\chi_{E_i}(x)$ dove $E_k \cap E_h = \emptyset$ per $k \neq h$ con $k, h \in \{1, 2, ..., p\}$.
Ora una parte degli E_i è interamente contenuta in P_n mentre i restanti E_i stanno nel complementare P_n^c; da qui abbiamo:

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{p} c_i\chi_{E_i\cap P_n} + \sum_{i=1}^{p} c_i\chi_{E_i\cap P_n^c},$$

$$I(f_n) = \sum_{i=1}^{p} c_i\mu(E_i) = \sum_{i=1}^{p} c_i\mu((E_i \cap P_n) \cup (E_i \cap P_n^c)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} c_i\mu((E_i\cap P_n)) + \sum_{i=1}^{p} c_i\mu((E_i\cap P_n^c)) \leq \sum_{i=1}^{p} M\mu((E_i\cap P_n)) + \sum_{i=1}^{p} c_i\mu((E_i\cap P_n^c)),$$

essendo $\mu(P_n) = \sum_{i=1}^{p} \mu((E_i \cap P_n))$ e $\mu(P_n^c) = \sum_{i=1}^{p} \mu((E_i \cap P_n^c))$ perchè E_i sono a due a due disgiunti e inoltre $P_n^c \subset \{x \in X | f_1(x) > 0\}$ perciò $\mu(P_n^c) \leq A$ allora vale:

$$I(f) \leq M\mu(P_n) + \epsilon A < M\epsilon + A\epsilon = \epsilon(A + M).$$

Da ciò segue la nostra tesi.

□

Ora vediamo di estendere la situazione assumendo che $X \neq \emptyset$ e L sia lo spazio vettoriale delle funzioni reali limitate difinite su X. Notiamo che se $f, g \in L$ allora anche $\max(f, g)$ e $\min(f, g) \in L$ in quanto $\max(f, g) \leq M + N$ con $|f| \leq M$ e $|g| \leq N$ e $\min(f, g) \leq \max(M, N)$; perciò anche $|f| \in L$ infatti $|f| = \max(f, 0) - \min(f, 0)$.
Supponiamo che su L sia definito un funzionale lineare reale $I(f)$ che goda delle seguenti proprietà:

i) $-\infty < I(f) < +\infty$,

ii) $I(f + g) = I(f) + I(g)$,

iii) $I(af) = aI(f)\ \forall a \in \mathbb{R}, a \neq \pm\infty$,

iv) se $f(x) \geq g(x)$ su $X \Rightarrow I(f) \geq I(g)$,

v) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione monotona decrescente tendente a 0 $\forall x \in X$ $\Rightarrow I(f_n) \to 0$ per $n \to +\infty$.

Dalla iv) ne viene che quindi se $f \geq 0$ allora $I(f) \geq 0$.
Ogni funzionale lineare di questo tipo è detto integrale I-integrale di $f(x)$ su L. Ora cercheremo di estendere questo funzionale lineare $I(f)$ ad una famiglia di funzioni più grande che contenga la precedente famiglia L come sotto-famiglia; questo procedimento di estensione è stato realizzato da P.J.Daniell e appunto per ogni funzione dell'estensione tale $I(f)$ è detto integrale di Daniell. Nel caso particolare che L sia lo spazio inizialmente incontrato delle

funzioni semplici si parla anche di integrale generale di Stieltjes-Lebesgue o anche di integrale di Stieltjes-Radon.

3.2 L'integrale di Daniell per le funzioni non negative.

Definizione 3.2. Definizione di prodotto cartesiano
Siano $X \neq \emptyset$ e $Y \neq \emptyset$ e siano $A \subset X$,$B \subset Y$ allora $A \times B = \{(x,y)|x \in A, y \in B\}$ è detto prodotto cartesiano di A e B.
Se $A = \emptyset$ e $B = \emptyset$ allora $A \times B = \emptyset$.

Siano $X \neq \emptyset$ e $\mathbb{R}^+$ e sia $f(x) : X \to \mathbb{R}, f(x) \geq 0\ \forall x \in X$ (f(x) può assumere il valore $+\infty$) noi diremo: $F = \{(x,y)|x \in X; 0 < y \leq f(x)$
se $f(x) < +\infty, 0 < y < f(x)$se $f(x) = +\infty\}$ l'insieme delle ordinate esterne mentre $F^\circ = \{(x,y)|0 < y < f(x)\}$ l'insieme delle ordinate interne.
Evidentemente $F^\circ \subset F$ e le coppie del tipo $(x,0)$ dove $f(x) = 0$ non appartengono a F e dunque nemmeno a F°.

Teorema 3.2.1.
Sia L lo spazio vettoriale delle funzioni reali limitate su X introdotto in precedenza e sia L^+ sia la sottofamiglia delle stesse funzioni ma non negative in L allora la famiglia $\overline{\Gamma}$ delle differenze $F - G$ con $f, g \in L^+$ è una semi-algebra o semianello.

Dimostrazione.
Senza perdere di generalità possiamo assumere che sia $f(x) \geq g(x)$ in quanto $F - G = F - G_1$ dove $g_1 = \min(f, g)$.
Evidentemente $\emptyset \in \overline{\Gamma}$ infatti $\emptyset = F - F$.
Siano $A = F - G$ e $B = F_1 - G_1 \in \overline{\Gamma}$ allora abbiamo che $A \cap B = F_2 - G_2$
$f_2 = \min(f, f_1), g_2 = \max(g, g_1)$, così $A \cap B \in \overline{\Gamma}$.

Siano $A = F - G$ e $B = F_1 - G_1 \in \overline{\Gamma}$ con $B \subset A$ possiamo assumere che $f \geq f_1 \geq g_1 \geq g$ in quanto se non lo fossero potrei, assumendo come prima che valgano $f \geq g$ e $f_1 \geq g_1$, prima considerare al posto di f_1 e g_1, $f_2 = \min(f, f_1)$ e $g_2 = \min(f, g_1)$ e avrei sempre che $f_2 \geq g_2$ e $F_1 - G_1 = F_2 - G_2$ e poi ora al posto di f_2 e g_2, $f_3 = \max(f_2, g)$ e $g_3 = \max(g_2, g)$ e avrei sempre che $f_3 \geq g_3$ e $F_2 - G_2 = F_3 - G_3$; così facendo avrei che $f \geq f_3 \geq g_3 \geq g$. In questo modo $A - B = (F - F_1) \cup (G - G_1)$ è unione di due elementi disgiunti di $\overline{\Gamma}$.
Così è provata la tesi. $\square$

D'ora in poi visto che non preclude nulla consideremo sempre quando scriveremo $F - G \in \overline{\Gamma}$ che $f(x) \geq g(x)$ su X.

Teorema 3.2.2.
Sia $\overline{\Gamma}$ e sia $I(f)$ il funzionale introdotto su L nella precedente sezione allora $\overline{\mu}(F - G) = I(f - g)$ è una misura sul semianello $\overline{\Gamma}$.

Dimostrazione.
Notiamo che $\overline{\mu}(F-G)$ è univocamente determinata infatti se $F-G = F_1-G_1$ allora si ha che: se $f(x) > g(x)$ allora vale che $f = f_1$ e $g = g_1$ infatti considerato $(x, y) \in (F - G)$ allora $g < y \leq f$; pertanto potrebbe essere $y = f(x)$ quindi se fosse per esempio che $f > f_1$ e $g = g_1$ allora $y > f_1$ e perciò $(x, y) \notin (F_1 - G_1)$ e questo è un assurdo (in maniera analoga si possono vedere gli altri casi); inoltre $f_1 = g_1$ se $f(x) = g(x)$ infatti dove $f(x) = g(x)$ non può essere $f_1 \neq g_1$ infatti se per assurdo fosse per esempio che $f_1 > g_1$ allora per quanto dimostrato prima si avrebbe che $f = f_1$ e $g = g_1$ in quanto i ruoli di f, f_1 e g, g_1 sono perfettamente equivalenti e questo è appunto un assurdo (in modo analogo se si suppone che sia $f_1 < g_1$).
Perciò vale che $f - g = f_1 - g_1$ $\forall x \in X$.
Evidentemente $\overline{\mu}(\emptyset) = 0$ e $0 \leq \overline{\mu}(A) < +\infty$ $\forall A \in \overline{\Gamma}$.
Quindi $\overline{\mu}$ è monotona. Dunque sarà sufficiente provare che $\overline{\mu}$ è σ-addittiva su $\overline{\Gamma}$. Sia per questo scopo $F - G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(F_n - G_n)$ dove $F - G \in \overline{\Gamma}$ e tutti $F_n - G_n \in \overline{\Gamma}$ e $F_k - G_k \cap F_h - G_h = \emptyset$ per $h \neq k$.

Sia $r_n(x) = f(x) - g(x) - \sum_{i=1}^n f_i(x) - g_i(x)$; essendo $S_n = \sum_{i=1}^n f_i(x) - g_i(x)$ monotona crescente perchè $f_i(x) \geq g_i(x) \forall i, \forall x$ allora $r_n(x)$ è monotona decrescente $\forall x \in X$ e visto che $F - G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(F_n - G_n)$ per quanto dimostrato nella prima parte abbiamo che $f - g = \sum_{n\in\mathbb{N}}(f_n - g_n)$; pertanto $r_n(x) \to 0$ per $n \to +\infty$ $\forall x \in X$; quindi per la proprietà v) di $I(f)$ vale $I(r_n) \to 0$ per $n \to +\infty \Rightarrow$

$$I(f - g) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} I(f_i - g_i)$$

$\Rightarrow$

$$\overline{\mu}(F - G) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \overline{\mu}(F_i - G_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} I(F_i - G_i).$$

Ciò prova dunque la tesi. $\square$

Ora definendo la misura esterna come $\overline{\mu}^*(A) = \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) | \forall \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ricoprimento di $S\}$ $\forall A \in \overline{\Gamma}$ si ottiene così una misura esterna su $X \times \mathbb{R}^+$ la quale risulterà come fatto nel caso generale una misura sull'insieme $\overline{\Lambda}$ degli insiemi misurabili su $X \times \mathbb{R}^+$.

Per le funzioni $f \in L^+$ per il fatto che $F \in \overline{\Gamma}$ e perciò $F \in \overline{\Lambda}$ definiamo $I(f) = \overline{\mu}(F)$ e $I(f)$ è l'integrale di Daniell di f. L'insieme di tutte le funzioni di questo tipo verrà denotato con M^+ e ogni funzione di questo genere si dirà funzione non negativa I-misurabile.

Teorema 3.2.3.
Se $f, g \in M^+$ *allora* $\max(f, g) \in M^+$,$\min(f, g) \in M^+$. *Inoltre se* $f(x) \geq g(x)$ *su* X *allora* $I(f) \geq I(g)$.
Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *è una successione decrescente tendente a* f_0 *su* X, *dove* $f_n \in M^+$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *e* $I(f_n) < +\infty$ *per almeno un valore di* n *allora* $f_0 \in M^+$ *e* $I(f_n) \to I(f_0)$ *per* $n \to +\infty$.
In particolare se $f_n \to 0$ *per* $n \to +\infty$ *su* X *dove* $f_n \in M^+$ *e* $I(f_n) < +\infty$ *per qualche* $n \in \mathbb{N}$ *allora* $I(f_n) \to 0$ *per* $n \to +\infty$.

Dimostrazione.

Per la prima affermazione basta osservare che l'insieme delle ordinate esterne per $\max(f, g)$ e $\min(f, g)$ è rispettivamente $F \cup G$ e $F \cap G$ e questi sono misurabili perchè unione e intersezione di misurabili è misurabile.
Inoltre se vale che $f \geq g$ su X allora abbiamo che $F \supset G$; così $I(f) = \overline{\mu}(F) \geq$ $\geq \overline{\mu}(G) = I(g)$ per la monotonia della misura.
Ora se $f_n \to f_0$ per $n \to +\infty$ e $f_{n+1} \leq f_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ allora la successione degli insiemi F_n è decrescente e ha come limite $F_0 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Perciò se tutte le $f_n \in M^+$ e $I(f_n) < +\infty$ per qualche $n \in \mathbb{N}$ allora F_0 è misurabile e vale

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{\mu}(F_n) = \lim_{n\to+\infty} I(F_n) = \lim_{n\to+\infty} I(F_0) = \overline{\mu}(F_0)$$

In particolare se $f_n \to 0$ per $n \to +\infty$ allora facendo gli stessi passaggi precedenti si ottine che F_0 è misurabile e $F_0 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$ e quindi
$I(f_n) \to 0$ per $n \to +\infty$. □

Ora enunciamo un teorema che mostra come M^+ sia chiuso per moltiplicazione con una costante non negativa.

Teorema 3.2.4.
Se $f \in M^+$ e $a \in \mathbb{R}^+$ allora $af \in M^+$ e $I(af) = aI(f)$.

La differenza $F - F^\circ$ è detta di solito grafico di $f(x)$ ed è la parte di grafico di $f(x)$ dove $0 < f(x) < +\infty$.

Teorema 3.2.5.
Se $f(x) \geq 0$ su X, se $F^\circ \subset H \subset F$ e H è misurabile allora F e F° sono misurabili e $f \in M^+$.
In particolare F e F° sono misurabili o non misurabili simultaneamente e $\overline{\mu}(F^\circ) = \overline{\mu}(F) = I(f)$ $\forall f \in M^+$ sebbene $\overline{\mu}(F - F^\circ) = 0$ non debba valere necessariamente.

Dimostrazione.
Dal momento che $H \in \overline{\Lambda}$ dal teorema precedente abbiamo che $(1 + \frac{1}{n})H \in \overline{\Lambda}$ e $(1 - \frac{1}{n})H \in \overline{\Lambda}$ per $n = 2, 3....$ Perciò il risultato desiderato che $F \in \overline{\Lambda}$ e

$F^\circ \in \overline{\Lambda}$ deriva dal fatto che

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})H = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(1+\frac{1}{n})H = F$$

e

$$\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n})H = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(1-\frac{1}{n})H = F^\circ.$$

Infatti proviamo che $F^\circ = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(1-\frac{1}{n})H$ poi in modo analogo si prova l'altra uguaglianza.
Sia $(x,y)\in F^\circ$ allora $y < f(x)$; dimostrare che $(x,y)\in(1-\frac{1}{n})H$ per qualche $n\in\mathbb{N}$ è equivalente a dimostrare che $(x,\frac{y}{1-\frac{1}{n}})\in H$ per qualche $n\in\mathbb{N}$. Se per assurdo fosse $(x,\frac{y}{1-\frac{1}{n}})\notin H$ $\forall n\in\mathbb{N}$ quindi $\frac{y}{1-\frac{1}{n}}\geq h$ $\forall n\in\mathbb{N}$ pertanto passando al limite per $n\to+\infty$ si avrebbe che $y\geq h$; perciò $(x,y)\notin H$ quindi $(x,y)\notin F^\circ$ e questo è assurdo.
Ora sia $(x,y)\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(1-\frac{1}{n})H$ allora $(x,y)\in(1-\frac{1}{n})H$ per almeno un $n\in\mathbb{N}$ quindi $(x,\frac{y}{1-\frac{1}{n}})\in H$ per questi $n\in\mathbb{N}$; pertanto $(x,\frac{y}{1-\frac{1}{n}})\in F$ ma $y<\frac{y}{1-\frac{1}{n}}\leq f(x)$ quindi $(x,y)\in F^\circ$.
Ora unione numerabile e intersezione numerabile di insiemi misurabili è misurabile. Inoltre dal momento che F risulta misurabile allora $f\in M^+$.
Sia $\overline{\mu}(F-F^\circ)=\alpha>0$ allora $\overline{\mu}(\frac{1}{n}(F-F^\circ))=\frac{\alpha}{n}$ per $n=2,3,....$ Dal momento che

$$F^\circ \supset \bigcup_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}(F-F^\circ)$$

vale che

$$\overline{\mu}(F^\circ)\geq\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}\overline{\mu}(F-F^\circ)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}\alpha=+\infty.$$

Essendo che $\overline{\mu}(F)=\overline{\mu}(F^\circ)+\overline{\mu}(F-F^\circ)$ allora ne segue che $\overline{\mu}(F)=+\infty$.
Ovviamente se $\overline{\mu}(F-F^\circ)=0$ per l'uguaglianza scritta in precedenza vale che $\overline{\mu}(F)=\overline{\mu}(F^\circ)$, da qui inoltre ne viene che F è misurabile $\Leftrightarrow$ lo è F°; in questo modo è provata la tesi.

$\square$

Teorema 3.2.6.
Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona crescente tendente a f su X e tutte le $f_n \in M^+$ e la successione $(I(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata allora $f \in M^+$ e $I(f_n) \to I(f)$ per $n \to +\infty$.

Dimostrazione.
Dal momento che tutti $F_n^\circ \in \overline{\Lambda}$ in quanto $f \in M^+$ e visto che f_n è monotona crescente allora abbiamo che $F_n^\circ \subset F_{n+1}^\circ$ $\forall n \in \mathbb{N}$ perciò
$\lim_{n\to+\infty} F_n^\circ = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n^\circ = F^\circ$; quindi $F^\circ \in \overline{\Lambda}$ in quanto è limite di una successione monotona di insiemi misurabili e $\overline{\mu}(F_n^\circ) \to \overline{\mu}(F^\circ)$ per $n \to +\infty$; così essendo $\overline{\mu}(F^\circ) = \overline{\mu}(F)$ allora $f \in M^+$ e risulta che $I(f_n) \to I(f)$ per $n \to +\infty$. □

Corollario 3.2.7.
Se $g = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ su X e $g_n \in M^+$ $\forall n \in \mathbb{N}$ allora $g \in M^+$ e $I(g) = \sum_{n\in\mathbb{N}} I(g_n)$.

Teorema 3.2.8.
Siano $f_n(x) \in M^+$ per $n = 1, 2, \ldots$, $h(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$, $k(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$, $p(x) = \limsup_{n\to+\infty} f_n(x)$ e $q(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)$ e siano rispettivamente H, K, P, e Q gli insiemi delle ordinate esterne. Allora H, K, P e Q sono misurabili e così h, k, p e $q \in M^+$ e essi hanno le stesse misure di $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, $\limsup_{n\to+\infty} F_n$ e $\liminf_{n\to+\infty} F_n$ rispettivamente.

Dimostrazione.
Dal momento che $H^\circ = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n^\circ$ e $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ noi abbiamo che $h, k \in M^+$ in quanto $F_n \in \overline{\Lambda}$ (sappiamo quindi che F_n°) $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\overline{\mu}(K) = \overline{\mu}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n)$. Inoltre se $(x, y) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ allora $y \le f_n(x)$ per almeno un $n \Rightarrow y \le h(x) \Rightarrow (x, y) \in H$ allora $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \subset H$. Ne segue che $H^\circ = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n^\circ \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \subset H$ e perciò

$$\overline{\mu}(H^\circ) = \overline{\mu}(H) = \overline{\mu}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n).$$

Sia $h_n = \sup(f_n, f_{n+1}, \ldots)$ e $k_n = \inf(f_n, f_{n+1}, \ldots)$ per $n = 1, 2, \ldots$ allora per

quanto dimostrato prima abbiamo che $h_n \in M^+$, $k_n \in M^+$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $h_n \to p$ $k_n \to q$ (con $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rispettivamente decrescente e crescente su X) per $n \to +\infty$;in questo modo $p, q \in M^+$ infatti: sia $(x, y) \in P^\circ \Rightarrow$ $y < p(x) \Rightarrow$ $y < f_n(x)$ per un numero infinito di $n \Rightarrow (x, y) \limsup_{n\to+\infty} F_n^\circ$; in questo modo $P^\circ \subset \limsup_{n\to+\infty} F_n^\circ$.
Viceversa sia $(x, y) \in \limsup_{n\to+\infty} F_n \Rightarrow$ $y \leq f_n(x)$ per un numero infinito di $n \Rightarrow$ $y \leq p(x) \Rightarrow (x, y) \in P$ e così $\limsup_{n\to+\infty} F_n \subset P$.
Segue allora che $P^\circ \subset \limsup_{n\to+\infty} F_n^\circ \subset \limsup_{n\to+\infty} F_n \subset P$ ed essendo $\overline{\mu}(P^\circ) = \overline{\mu}(P)$ ne viene che

$$\overline{\mu}(P) = \overline{\mu}(\limsup_{n\to+\infty} F_n).$$

In maniera analoga si prova per Q. □

Lemma 3.2.9. *Lemma di Fatou*
Se $f_n \in M^+$ per $n = 1, 2, ...$ allora

$$I(\liminf_{n\to+\infty} f_n) \leq \liminf_{n\to+\infty} I(f_n).$$

Dimostrazione.
Sia $q(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n$ allora per il precedente teorema abbiamo che:

$$I(\liminf_{n\to+\infty} f_n) = I(q) = \overline{\mu}(Q) = \overline{\mu}(\liminf_{n\to+\infty} F_n) \leq \liminf_{n\to+\infty} \overline{\mu}(F_n) =$$

$$= \liminf_{n\to+\infty} I(f_n)$$

□

Teorema 3.2.10.

Se $f_n \in M^+$ per $n = 1, 2, ...$ e $f_n(x) \leq g_n(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ dove $g \in M^+$ e $I(g) < +\infty$ allora

$$I(\limsup_{n\to+\infty} f_n) \geq \limsup_{n\to+\infty} I(f_n).$$

In particolare se $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ *allora*

$$I(f) = \lim_{n\to+\infty} I(f_n)$$

Dimostrazione.
Dal momento che $F_n \subset G$ $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \subset G$ così $\overline{\mu}(F_1 \cup F_2 \cup \cup F_3 \cup ...) \leq \overline{\mu}(G) = I(g) < +\infty$. Perciò per il teorema 2.5.4 e per il teorema 3.2.8 abbiamo che

$$I(\limsup_{n\to+\infty} f_n) = \overline{\mu}(\limsup_{n\to+\infty} F_n) \geq \limsup_{n\to+\infty} \overline{\mu}(F_n) = \limsup_{n\to+\infty} I(f_n).$$

Inoltre se $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ su X segue da quanto appena dimostrato e dal lemma di Fatou che

$$I(f) \geq \limsup_{n\to+\infty} I(f_n) \geq \liminf_{n\to+\infty} I(f_n) \geq I(f)$$

$\Rightarrow$

$$I(f) = \lim_{n\to+\infty} I(f_n).$$

□

Definizione 3.3.
Sia $s(x) \geq 0$ su X. Diremo che $s(x)$ è una σ-funzione se esiste una successione $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotona crescente e tendente a s per $n \to +\infty$ e $l_n \in L^+$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definizione 3.4.
Sia $f(x)$ una funzione definita su X. Diremo che $f(x)$ è una σ_δ-funzione se esiste una successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotona decrescente e tendente a f per $n \to +\infty$ e s_n una σ-funzione $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ora vediamo di provare che $I(f)$ è lineare su M^+. Prima facciamo alcune osservazioni: sia $s(x) \geq 0$ su X e $s(x)$ una σ-funzione. Per quanto dimostrato nel teorema 3.2.6 abbiamo che $s(x) \in M^+$ e $I(l_n)$ è monotona crescente e $\lim_{n\to+\infty} I(l_n) = I(s)$. Se ora abbiamo $s_1(x)$ e $s_2(x)$ come sopra allora $s_3(x) = \min(s_1, s_2(x)) \in M^+$ e se $(l_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$,$(k_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sono rispettivamente due successioni monotone crescenti tali che $\lim_{n\to+\infty} l_n(x) = s_1(x)$ e

$\lim_{n\to+\infty} k_n(x) = s_2(x)$ allora $\lim_{n\to+\infty} \min(l_n(x), k_n(x)) = s_3(x)$. Ora sia f una σ_δ-funzione, allora abbiamo che $f \in M^+$ e $I(s_n) \to I(f)$ per $n \to +\infty$ in accordo con il teorema 3.2.3 se $I(f_n) < +\infty$ per qualche n.
Sia ora $f \in M^+$ e $I(f) = \overline{\mu}(F) < +\infty$ con F insieme delle ordinate esterne di F, allora fissato $\epsilon > 0$ sappiamo che esiste O σ-insieme con $O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(P_n - - Q_n)$ dove $(P_j - Q_j) \cap (P_i - Q_i) = \emptyset$ per $i \neq j$ che ricopre F e vale per stessa definizione di misura di F che $\overline{\mu}(O) - \overline{\mu}(F) = \overline{\mu}(O - F) < \epsilon$. Siano P_n e Q_n l'insiemi delle ordinate esterne di p_n e $q_n \in L^+$ (con $p_n \leq q_n$) allora per via del fatto che $F \subset O$, ne viene che $s(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}}(p_n(x) - q_n(x)) \geq f(x)$ $\forall x \in X$; perciò abbiamo per la linearità di $I(f)$ su L^+ che $\overline{\mu}(S) = I(s) = = \sum_{n\in\mathbb{N}} I(p_n - q_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mu}(P_n - Q_n) = \overline{\mu}(O)$ e così $0 \leq I(s) - I(f) = = \overline{\mu}(S) - \overline{\mu}(F) = \overline{\mu}(O) - \overline{\mu}(F) < \epsilon$.
Come prima conseguenza di tutto ciò è che esiste pertanto una successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni come $s(x)$, per cui $s_n(x) \geq f(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $I(s_n) - I(f)$ è finito e $I(s_n) - I(f) \to 0$ quando $n \to +\infty$.
Ora possiamo considerare che sia $s_{n+1}(x) \leq s_n(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ in quanto se non lo fosse potremmo sostituire s_2 con $s_2^{'} = \min(s_1, s_2)$, s_3 con $s_3^{'} = \min(s_2^{'}, s_3)$ e così via; perciò $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \to f_1$ per $n \to +\infty$ e $f_1 \geq f$; essendo che $I(s_n) < +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$ abbiamo allora che $I(s_n)$ è monotona decrescente e $I(s_n) \to I(f_1)$ per $n \to +\infty$ ma $I(s_n) \to I(f)$ per $n \to +\infty$ ma allora per l'unicità del limite si ha che $I(f) = I(f_1)$ e quindi i due insiemi delle ordinate esterne relative a f e f_1 ,F e F_1, risultano tali $F \sim F_1$ e quindi $\overline{\mu}(F - F_1) = 0$; in questo modo $f - f_1 \in M^+$ e $I(f - f_1) = \overline{\mu}(F - F_1) = 0$.

Teorema 3.2.11.
Se $f, g \in M^+$ allora $f + g \in M^+$ e $I(f + g) = I(f) + I(g)$.
Se $f, g \in M^+$ e $g \leq f$ su X allora $f - g \in M^+$.

Dimostrazione.
$\forall E \subset X \times \mathbb{R}^+$ e $\forall f(x)$ che assume solo valori finiti e non negativi su X noi denoteremo con $E + f = \{(x, y + f) \in X | (x, y) \in E\}$. Osserviamo immediatamente che se $E \in \overline{\Lambda}$ ed è di misura finita e $f \in L^+$ allora $E + f \in \overline{\Lambda}$ e $\overline{\mu}(E + f) = \overline{\mu}(E)$. Infatti sia $E \in \overline{\Gamma}$ allora $E = F_1 - G1$ con $f_1, g_1 \in L^+$ allora

$E+f=F_2-G_2$ con $f_2=f_1+f, g_2=g_1+f\in L^+$ quindi $E+f\in\overline{\Gamma}\subset\overline{\Lambda}$ e $\overline{\mu}(E+f)=I(f_2-g_2)=I(f_1+f-g_1-f)=I(f_1-g_1)=\overline{\mu}(F_1-G_1)=\overline{\mu}(E)$.
Ora sia E un σ-insieme e quindi $E=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(F_n-G_n)$ con $(F_n-G_n)\in\overline{\Gamma}\ \forall n\in\mathbb{N}$ e $(F_k-G_k)\cap(F_j-G_j)=\emptyset$ per $k\neq j$ allora $E+f=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(F_n^1-G_n^1)$ dove $f_n^1=f_n+f\in L^+$ e $g_n^1=g_n^1+f\in L^+$ e $(F_k^1-G_k^1)\cap(F_j^1-G_j^1)=\emptyset$ per $k\neq j$ allora $E+f\in\overline{\Lambda}$ e $\overline{\mu}(E+f)=\overline{\mu}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(F_n^1-G_n^1))=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\overline{\mu}(F_n^1-G_n^1)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}I(f_n^1-g_n^1)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}I(f_n+f-g_n-f)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(f_n-g_n)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\overline{\mu}(F_n+-G_n)=\overline{\mu}(E)$.
Ora sia $E=\lim_{n\to+\infty}A_n$ con $A_n\sigma$-insieme e di misura finita e $A_n\supset A_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ allora $E=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n$; perciò $E+f=\lim_{n\to+\infty}A_n^1$ dove $A_n^1=A_n+f$ e dunque $A_n^1\supset A_{n+1}^1$ allora abbiamo per quanto dimostrato prima che
$E+f\in\overline{\Lambda}$ $\overline{\mu}(E+f)=\overline{\mu}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n^1)=\overline{\mu}(\lim_{n\to+\infty}A_n^1)=\lim_{n\to+\infty}\overline{\mu}(A_n^1)=$
$=\lim_{n\to+\infty}\overline{\mu}(A_n)=\overline{\mu}(E)$.
Ora supponiamo che $E\in\overline{\Lambda}$ con $\overline{\mu}(E)=0$ allora $\forall\epsilon>0$ esiste O σ-insieme tale che $E\subset O$ e $\overline{\mu}(O)<\epsilon$ allora per quanto dimostrato prima $O+f$ è un σ-insieme e $E+f\subset O+f$ e $\overline{\mu}(E+f)=\overline{\mu}(O)<\epsilon$ perciò $\overline{\mu^*}(E+f)=0$; allora $E+f\in\overline{\Lambda}$ e $\overline{\mu}(E+f)=0$.
Sia infine $E\in\overline{\Lambda}$ e $\overline{\mu}(E)<+\infty$ allora esiste $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decrescente dove O_n è un σ-insieme $\forall n\in\mathbb{N}$ e con $E\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}}O_n=O$ e $\overline{\mu}(E-O)=0$ (notiamo dunque che $E\sim O$ quindi $\overline{\mu}(E)=\overline{\mu}(O)$) allora abbiamo che $E+f\subset O+f$ dunque $\overline{\mu}((E+f)-(O+f))=\overline{\mu}(E-O)=0$ (notiamo dunque che $E+f\sim O+f$ perciò $\overline{\mu}(E+f)=\overline{\mu}(O+f)$); quindi per quanto dimostrato prima ne viene che $E+f\in\overline{\Lambda}$ e $\overline{\mu}(E+f)=\overline{\mu}(E)$ in quanto $\overline{\mu}(E+f)=\overline{\mu}(O+f)=\overline{\mu}(O)=\overline{\mu}(E)$.
Scegliamo in particolare per E l'insieme delle ordinate esterne di una funzione $g\in M^+$ che assume solo valori finiti e soddisfa la condizione che $I(g)<+\infty$ allora otteniamo per quanto detto che $G+f\in\overline{\Lambda}$ e che $\overline{\mu}(G+f)=\overline{\mu}(G)$ per $f\in L^+$, $g\in M^+$, $0\leq g<+\infty$ e $I(g)<+\infty$. L'insieme delle ordinate esterne di $f+g$ si può scrivere come $F\cup(G+f)$ in quanto $F\subset B$ e $(G+f)\subset B$ con B l'insieme delle ordinate esterne di $f+g$ e viceversa considerata $(x,y)\in B$ allora non può accadere che $(x,y)\notin F$ e $(x,y)\notin(G+f)$ perchè altrimenti si avrebbe che $y>f+g$ il che è un assurdo;

inoltre notiamo che $F \cap (G + f) = \emptyset$ infatti se così non fosse esisterebbe $(x, y) \in F \cap (G + f)$ ma allora $y = y_1 + f \geq f$ in quanto $y_1 \in G$ perciò $y \notin F$ assurdo e ancora sono due insiemi misurabili allora $f + g \in M^+$ e vale dunque $I(f + g) = \overline{\mu}(F \cup (G + f)) = \overline{\mu}(F) + \overline{\mu}(G + f) =$
$= \overline{\mu}(F) + \overline{\mu}(G) = I(f) + I(g)$.
Però da questo risultato parziale possiamo ottenere di più; infatti l'insieme delle ordinate esterne di $f + g$ può anche essere scritto come $G \cup (F + g)$ (ripetendo le stesse considerazioni fatte per $F \cup (G + f)$ si ottiene il risultato) allora segue da $I(f + g) = I(f) + (g)$ e $I(g) < +\infty$ che $\overline{\mu}(G \cup (F + g)) =$
$= I(f + g) - \overline{\mu}(G) = I(f) + I(g) - I(g) = I(f) = \overline{\mu}(F)$ per $f \in L^+$, $g \in M^+$,$0 \leq g < +\infty$ e $I(g) < +\infty$. Ma allora da qui abbiamo anche che $\overline{\mu}(A + g) = \overline{\mu}((A - F) \cup (F + g))$ $\forall A \in \overline{\Gamma}$ infatti considerato $A \in \overline{\Gamma}$ allora $A = F_1 - G_1$ con $f_1, g_1 \in L^+$ pertanto $A + f = (F_1 + f) - (G_1 + f)$ ed essendo che $(G_1) + f \subset (F_1 + f)$ (perchè ricordiamo che possiamo supporre senza perdere di generalità che $f_1 \geq g_1$) allora per quanto dimostrato prima vale $\overline{\mu}(A + g) = \overline{\mu}(F_1 + g) - \overline{\mu}(G_1 + g) = \overline{\mu}(F_1) - \overline{\mu}(G_1) = \overline{\mu}(F_1 - G_1) = \overline{\mu}(A)$.
Con ciò ripetendo lo stesso ragionamento fatto iniziale si può dimostrare dunque che se $E \in \overline{\Lambda}$ è di misura finita, $g \in M^+$, $0 \geq g < +\infty$ e $I(g) < +\infty$ allora $E + g \in \overline{\Lambda}$ e $\overline{\mu}(E + g) = \overline{\mu}(E)$.
Scegliendo dunque E come l'insieme delle ordinate esterne di una funzione $f \in M^+$ che soddisfa $I(f) < +\infty$ allora per quanto dimostrato si ha che $f + g \in M^+$ e $I(f + g) = I(f) + I(g)$ con $f, g \in M^+$, $0 \geq g < +\infty$ e $I(f), I(g) < +\infty$.
Ora dunque eliminiamo dalle nostre ipotesi che $0 \leq g < +\infty$.
Avevamo osservato prima di questo teorema che esiste una σ-funzione $s(x)$ tale che $s(x) \geq g(x)$; pertanto $s(x)$ è limite di una successione monotona crescente $l_n(x) \in L^+$ $\forall \in \mathbb{N}$. Allora $g_n = \min(g, l_n) \in M^+$ e assume solo valori finiti e inoltre la successione $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona crescente tendente a g per $n \to +\infty$ quindi per il teorema 3.2.6 abbiamo che $I(g_n) \to I(g)$ e $I(f + g_n) \to I(f + g)$ e dal fatto che $I(f + g_n) = I(f) + I(g_n)$ e passando al limite per $n \to +\infty$ si ottiene che $I(f + g) = I(f) + I(g)$.

Ora non ci rimane che eliminare l'ultima delle nostre ipotesi e cioè che $I(f) < +\infty, I(g) < +\infty$.
Supponiamo perciò che almeno uno dei due integrali sia infinito. Sia $h = g + f$, H il suo insieme delle ordinate esterne e $A = P - Q \in \overline{\Gamma}$ con A di misura finita. Allora per provare che H è misurabile ci basta dunque dimostrare che lo è $H \cap A$.
Ora $H \cap A = H_1 \cap A$ con $h_1 = f_1 + g_1$ e $f_1 = \min(f, p) \in M^+$ e $g_1 = \min(g, p) \in M^+$. Dal momento che $I(f_1)$ e $I(g_1)$ sono finiti perchè $F_1 = F \cap P \subset P$ e $G_1 = G \cap P \subset P$ allora H_1 è misurabile e dunque lo è $H_1 \cap A$ e quindi lo è anche $H \cap A$.Infine visto che $H \supset F$ e $H \supset G$ (ricordiamo l'ipotesi che almeno uno dei due integrali sia infinito) allora $I(f + g) = +\infty = I(f) + I(g) = +\infty$.
Ora proviamo la seconda tesi.
Supponiamo dapprima che $f \leq p$ su X con $p \in L^+$. (Ricordiamo che dunque $I(p) < +\infty$ per come è definito il funzionale $I(f)$ su L^+) Ovviamente per la linearità di L^+ il teorema vale se $f, g \in L^+$ e vale anche se f, g sono σ-funzioni dal momento che esistono due successioni monotone crescenti l_n, k_n con $l_n, k_n \in L^+$ e $k_n \leq l_n$ infatti questo implica che $f - g = \lim_{n\to+\infty}(l_n - k_n)$ e per il teorema 3.2.9 abbiamo che $f - g \in M^+$ e

$$I(f - g) = \lim_{n\to+\infty} I(l_n - k_n) = \lim_{n\to+\infty} I(l_n) - \lim_{n\to+\infty} I(k_n) = I(f) - I(g).$$

Osserviamo che possiamo assumere $k_n \leq l_n$ dal momento che se non lo fosse sostituiremo k_n con $\min(k_n, l_n)$ e avrei che $\min(k_n, l_n) \to g$ per $n \to +\infty$ e $\min(k_n, l_n) \leq \min(k_{n+1}, l_{n+1})$ e appunto che $\min(k_n, l_n) \leq l_n$. Inoltre se f, g sono σ_δ-funzioni allora esistono due successioni di funzioni s_n e t_n decrescenti tendenti rispettivamente a f, g (dove s_n, t_n sono σ-funzioni $\forall n \in \mathbb{N}$) e supponendo che $t_n \leq s_n \leq p$ (questo lo posso assumere perchè altrimenti sostituirei al posto di s_n,$s_n^{'} = \min(s_n, p)$ e al posto di t_n, $t_n^{'} = \min(t_n, s_n^{'})$) allora otteniamo sempre per il teorema 3.2.9 e per quanto dimostrato in precedenza, che

$f - g \in M^+$ in quanto

$$f - g = \lim_{n \to +\infty} (s_n - t_n)$$

e inoltre

$$I(f - g) = \lim_{n \to +\infty} I(s_n - t_n) = \lim_{n \to +\infty} I(s_n) - \lim_{n \to +\infty} I(t_n) = I(f) - I(g).$$

Ora assumiamo che solo f sia una σ_δ-funzione mentre $g \in M^+$.
Ora per le osservazioni precedenti a questo teorema abbiamo che inoltre esiste $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con t_n σ-funzione $\forall n \in \mathbb{N}$ tale che $t_n \to g_1 \geq g$ per $n \to +\infty$ e $g - g_1 \in M^+$. Dal momento che $t_n \leq s_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ passando al limite si ottiene che $g_1 \leq f$ allora per quanto dimostrato prima abbiamo che $f - g_1 \in M^+$ e così anche $f - g \in M^+$ per la prima parte teorema prima dimostrata infatti $f - g = (f - g_1) + (g_1 - g)$.
Ora assumiamo che $f, g \in M^+$ e $g \leq f \leq p$ allora come prima esiste una σ_δ funzione f_1 tale che $f \leq f_1 \leq p$ e tale che $f_1 - f \in M^+$ perciò segue che $g+(f_1-f) \in M^+$ per la prima tesi dimostrata e $g+(f_1-f) \leq f+(f_1-f) = f_1$ e così per quanto dimostrato prima abbiamo che $f_1 - (g + (f_1 - f)) =$
$= f - g \in M^+$.
Ora togliamo l'ipotesi che $f \leq p$ con $p \in L^+$.
Scegliamo arbitrariamente $p \in L^+$ e sia $f_n = \min(f, np), g_n = \min(g, np)$ per $n = 1, 2, ...$ allora $f_n, g_n \in M^+$ allora $f_n - g_n \in M^+$ per quanto dimostrato infatti vale anche $f_n \leq np$ e pure $g_n \leq np$. Inoltre $f_n - g_n$ è monotona crescente per via dell'ipotesi che $f \geq g$ e

$$\lim_{n \to +\infty} f_n - g_n = k(x) = \begin{cases} f(x) - g(x) & \text{dove } p > 0 \\ 0 & \text{dove } p = 0 \end{cases}$$

Allora per il teorema 3.2.6 risulta che $k \in M^+$ allora $\min(k, p) \in M^+$ ma $\min(k, p) = \min(f - g, p)$ perciò $\min(f - g, p) \in M^+$. Denotando perciò con H e P l'insieme delle ordinate esterne di $h = f - g$ e p rispettivamente, allora avendo dimostrato che $\min(f - g, p) \in M^+$ ed essendo $H \cap P$ l'insieme delle

ordinate esterne del $\min(f-g,p)$ allora si è ottenuto che $H \cap P$ è misurabile $\forall p \in L^+$ e da qui inoltre possiamo concludere che $H \cap A$ è misurabile $\forall A \in \overline{\Gamma}$ in quanto $H \cap A = H \cap (F-G) = (H \cap F) - (H \cap G)$ con $f, g \in L^+$.
Perciò H è misurabile e $h = f - g \in M^+$. □

Osservazione 18.
Ora avendo dimostrato che $f-g \in M^+$ con $f, g \in M^+$ e $g \leq f$ allora vale $I(f) = I(g) + I(f-g)$ e questo implica che $I(f-g) = I(f) - I(g)$ ma solo se $I(g) < +\infty$

3.3 L'integrale di Daniell per funzioni reali.

Definizione 3.5.
Sia $f(x) \leq 0$ su X e $-f \in M^+$ allora definiamo $I(f) = -I(-f)$.

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ allora si definiscono:

Definizione 3.6.
$f^+ = \max(f, 0)$ e $f^- = \min(f, 0)$ e si dicono rispettivamente parte positiva e negativa di f.

Evidentemente $f = f^+ + f^-$ e $|f| = f^+ - f^-$.

Definizione 3.7.
Se $f^+, -f^- \in M^+$ e $I(f^+) = I(-f^-) \neq +\infty$ allora si definisce integrale di Danell di f $I(f) = I(f^+) + I(f^-)$.

Definizione 3.8.
La funzione f è detta I-misurabile su X se $f^+ \in M^+$ e $f^- \in M^+$.
La famiglia delle funzioni I-misurabili si indica con M.
Nel caso in cui $I(f)$ esista si dice che f è I-integrabile su X e inoltre se vale che $-\infty < I(f) < +\infty$ allora in questo caso si dice che f è I-sommabile su X.La famiglia delle funzioni sommabili su X si indica con L^1.

Teorema 3.3.1.

i) Se g è I-integrabile su X, $I(g) > -\infty$, $f \in M$ e $f \geq g$ su X allora f è I-integrabile e $I(f) \geq I(g)$.

ii) Se $f, g \in M$ allora $\max(f,g) \in M$ e $\min(f,g) \in M$. Se $f, g \in L^1$ allora $\max(f,g) \in L^1$ e $\max(f,g) \in L^1$.

iii) Se f è sommabile allora $|f|$ è sommabile e $|I(f)| \leq I(|f|)$. Se f è misurabile, g è sommabile e $|f| \leq |g|$ su X allora f è sommabile.

iv) Se f è integrabile e $a \neq \pm\infty$ è una costante reale allora $I(af) = aI(f)$

Dimostrazione.
i) Dal momento che $f \in M$ esistono $I(f^+)$ e $I(f^-)$ e per via del fatto che $f \geq g$ su X allora $f^+ \geq g^+$ e $f^- \geq g^-$ allora vale $I(f^+) \geq I(g^+)$, $I(f^-) \geq I(g^-)$. Perciò f è integrabile e vale appunto che $I(f) = I(f^+) + + I(f^-) \geq I(g^+) + I(g^-) = I(g)$. ii) Si noti dapprima che:

$$\{\max(f,g)\}^+ = \max(f^+, g^+), \qquad \{\max(f,g)\}^- = \max(f^-, g^-),$$

$$\{\min(f,g)\}^+ = \min(f^+, g^+), \qquad \{\min(f,g)\}^- = \min(f^-, g^-).$$

Infatti proviamo che $\{\max(f,g)\}^+ = \max(f^+, g^+)$, poi per le altre tre uguaglianze si procederà nello stesso modo.
$\{\max(f,g)\}^+ = \max(\max(f,g), 0)$ e $\max(f^+, g^+) = \max(\max(f,0), \max(g,0))$.
Supponiamo che $\max(\max(f,g),0) = \max(f,g)$ allora $f, g \geq 0$ quindi $\max(f,0) = f$ e $\max(g,0) = g$ e pertanto $\max(\max(f,0), \max(g,0)) = = \max(f,g)$.
Supponiamo ora che invece sia $\{\max(f,g)\}^+ = 0$ allora $f, g \leq 0$ quindi $\max(f,0) = \max(g,0) = 0$ e perciò $\max(f^+, g^+) = 0$.
Segue immediatamente perciò che se $f, g \in M$ allora $\max(f,g) \in M$ e così $\min(f,g) \in M$ in quanto per esempio dal momento che $f, g \in M$ allora $f^+, g^+ \in M^+$ quindi $\{\max(f,g)\}^+ = \max(f^+, g^+) \in M^+$ e nello stesso modo

si verificano le altre.
Siano ora $f, g \in L^1$ e sia $h = \max(f, g)$. Allora per quanto dimostrato prima $h \in M$ e inoltre $h^+ \leq f^+ + g^+$ così per la linearità di M^+ vale
$I(h^+) \leq I(f^+ + g^+) = I(f^+) + I(g^+) < +\infty$; nello stesso modo $h^- \geq f^-$ così $I(h^-) \geq I(f^-) > -\infty \Rightarrow -\infty < I(h) < +\infty \Rightarrow h \in L^1$.
Nello stesso modo si prova per $\min(f, g)$.
Vediamo ora iii). Dal momento che $f \in L^1$ allora $I(f^+)$ e $I(f^-)$ sono finiti e così $I(|f|) = I(f^+) + I(-f^-) < +\infty$ perciò $|f| \in L^1$. Inoltre $|I(f)| = |I(f^+) + I(f^-)| = |I(f^+) + I(-(-f^-))| = |I(f^+) - I(-f^-)| \leq I(f^+) + I(-f^-) = I(f^+ - f^-) = I(|f|)$.
Ora sia $f \in M, g \in L^1$ e $|f| \leq |g|$ su X. Allora $f^+, -f^- \in M^+$ quindi $|f| \in M^+$ allora $I(|f|) \leq I(|g|) < +\infty$ dal momento che $|f| \leq |g|$ quindi $|f| \in L^1 \Rightarrow I(f^+), I(-f^-) = -I(f^-)$ sono finiti $\Rightarrow f \in L^1$.
Vediamo iv).
Visto che f è I-integrabile allora $f^+, -f^- \in M^+$ quindi vale $I(af) = I(af^+ + af^-) = I(af^+ - a(-f^-)) = aI(f^+) - aI(-f^-) = aI(f^+ - (-f^-)) = aI(f)$ $\square$

Ora proviamo che $I(f)$ è lineare nella famiglia delle funzioni sommabili.

Teorema 3.3.2.
Se $f, g \in M$ allora $f + g \in M$.
Se $f, g \in L^1$ allora $f + g \in L^1$ e vale $I(f + g) = I(f) + I(g)$.

Dimostrazione.
Inizialmente proviamo la tesi ma nell'ipotesi ulteriore che $f, g \geq 0$.
Inoltre proviamo che se $f, g \geq 0$, f, g sommabili allora $f - g$ è sommabile e $I(f - g) = I(f) - I(g)$.
Per provare ciò allora sia $h = \min(f, g)$. Allora $h \in M^+$ e inoltre per il teorema 3.2.11 vale che $f - h \in M^+$, $g - h \in M^+$. Inoltre in qualche punto $x \in X$ almeno una delle due funzioni $f - h$, $g - h$ si annulla.
Se $f, g \in L^1$ allora per ii) del teorema precedente si ha anche che $h \in L^1$ e

inoltre essendo $f-h, g-h \in M$ e $|f-h| = f-h \leq f, |g-h| = g-h \leq g$ allora per iii) del teorema precedente abbiamo pure che $f-h, g-h \in L^1$. Inoltre $f-g = (f-h)+(h-g) = (f-h)-(g-h)$ perciò $f-h$ e $-(g-h)$ risultano la parte positiva e negativa della funzione $f-g$, infatti $(f-g)^+ =$ $= \max(f-g, 0) = \max((f-h)+(h-g), 0)$ perciò $(f-h)+(h-g) \leq (f-h)$ e $0 \leq (f-h)$ dal momento che $h = \min(f, g)$ e quindi $(f-g)^+ \leq (f-h)$; se fosse $(f-g)^+ = 0$ allora $(f-h)+(h-g) \leq 0$ pertanto se $f-g = 0$ allora $f = -g$ ma $f, g \geq 0$ quindi $f = g = 0$ e perciò $h = 0$ e quindi $f-h = 0$ se invece fosse $f-g < 0$ allora non può essere $f > h$ perchè se così fosse allora $\min(f, g) = h = g$ quindi $f-h < g-h = 0$ il che è assurdo. Se infine fosse $(f-g)^+ = f-g$ allora $f-h > g-h$ e quindi essendo $h-g \leq 0$ allora abbiamo che $f-h \geq (f-h)+(h-g)$.
Perciò la tesi è provata e nello stesso modo si prova che $(h-g)$ è la parte negativa di $f-g$.
Notiamo che tale uguaglianza vale anche dove $f(x) = g(x) = +\infty$.
Perciò $f-g \in M$ e nel caso in cui $f, g \in L^1$ vale che $f-g \in L^1$ infatti vale pure che $I(f-g) = I(f-h)-I(g-h) = (I(f)-I(h))-(I(g)-I(h)) = I(f)-I(g)$.
Ora siano $f, g \in M$. Allora $f+g = (f^+ + g^+) - (-f^- - g^-)$ e questa uguaglianza vale qualsiasi siano i valori assunti da f, g e perciò dette $f_1 = (f^+ + g^+)$ e $g_1 = (-f^- - g^-)$ allora per f_1, g_1 valgono le cose dette in precedenza nel caso particolare. Perciò segue che $f+g = f_1 - g_1$ e quindi che $f+g \in M$ e nel caso in cui $f, g \in L^1$ allora $f+g \in L^1$ e inoltre vale che $I(f+g) = I(f_1 - g_1) =$ $= I(f_1) - I(g_1) = I(f^+) + I(g^+) - (I(-f^-) + I(-g^-)) = I(f) + I(g)$. $\square$

Osservazione 19.
Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni in X allora vale che:

$$(\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n)^+ = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n^+, (\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n)^- = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n^-;$$
$$(\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n)^+ = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n^+, (\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n)^- = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n^-.$$

Perciò vale che se tutte le $f_n \in M$ allora $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n, \inf_{n\in\mathbb{N}} \in M$ per il teorema 3.2.8 . Inoltre se $h_n = \sup(f_n, f_{n+1}, ...)$ e $k_n = \inf(f_n, f_{n+1}, ...)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ allora h_n è decrescente e $\lim_{n\to+\infty} h_n = \limsup_{n\to+\infty} f_n = p$ mentre k_n è

crescente e $\lim_{n\to+\infty} k_n = \liminf_{n\to+\infty} f_n = q$. Dunque se tutte le $f_n \in M$ allora per il teorema 3.2.8 $p, q \in M$ infatti $p^+ = (\inf\ \ h_n)^+ = \inf\ \ h_n^+ = \inf(\sup(f_n^+, f_{n+1}^+, ...)) = \limsup_{n\to+\infty} f_n^+$ e in maniera analoga si ha $p^- =$
$= \limsup_{n\to+\infty} f_n^-$, $q^+ = \liminf_{n\to+\infty} f_n^+$ e $q^- = \liminf_{n\to+\infty} f_n^-$.

Teorema 3.3.3. *Teorema di convergenza dominata di H. Lebesgue*
Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili su X ed esista una funzione $g(x)$ sommabile tale che $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$,$\forall x \in X$ allora $\liminf f_n(x)$ e $\limsup f_n(x)$ sono sommabili e inoltre vale

$$-I(g) \leq I(\liminf_{n\to+\infty} f_n(x)) \leq \liminf_{n\to+\infty} I(f_n(x)) \leq$$

$$\leq \limsup_{n\to+\infty} I(f_n(x)) \leq I(\liminf_{n\to+\infty} f_n(x)) \leq I(g).$$

In particolare se $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n$ allora $f \in L^1$ e $I(f) = \lim_{n\to+\infty} I(f_n)$.

Dimostrazione.
Siano $p(x) = \limsup f_n(x)$ e $q(x) = \liminf f_n(x)$, allora per quanto detto prima $p, q \in M$ e visto che $|p(x)| \leq g(x)$,$|q(x)| \leq g(x)$ allora per iii) del teorema 3.3.1 ne viene che $p, q \in L^1$.
Inoltre dal lemma di Fatou e dal teorema teoremi 3.2.10 ne viene che:
$0 \leq I(\liminf_{n\to+\infty} f_n^+) \leq \liminf_{n\to+\infty} I(f_n^+) \leq$
$\leq \limsup_{n\to+\infty} I(f_n^+) \leq I(\limsup_{n\to+\infty} f_n^+) \leq I(g)$ che è poi equivalente a dire che
1) $0 \leq I(q^+) \leq \liminf_{n\to+\infty} I(f_n^+) \leq \limsup_{n\to+\infty} I(f_n^+) \leq I(p^+) \leq I(g)$.
Ora in modo analogo si ha:
$0 \leq I(\liminf_{n\to+\infty}(-f_n^-) \leq \liminf_{n\to+\infty} I(-f_n^-) \leq \limsup_{n\to+\infty} I(-f_n^-) \leq$
$\leq I(\limsup_{n\to+\infty} -f_n^-) \leq I(g)$.
Ora osservando che

$$-\liminf_{n\to+\infty}(-f_n^-) = -\lim_{n\to+\infty}(\inf_{k\geq n}(-f_k^-)) = -\lim_{n\to+\infty}(\inf_{k\geq n}(-f_k)^+) =$$

$$= -\lim_{n\to+\infty}(\inf_{k\geq n}\max(-f_k, 0)) = -\lim_{n\to+\infty}(\inf_{k\geq n}(-\min(f_k, 0))) =$$

$$= -\lim_{n\to+\infty}(-\sup_{k\geq n}(\min(f_k,0))) = -\lim_{n\to+\infty}(-\sup_{k\geq n}(f_k^-)) = \limsup_{n\to+\infty}(f_n^-)$$

e procedendo nello stesso modo si ha

$$-\limsup_{n\to+\infty}(-f_n^-) = \liminf_{n\to+\infty} f_n^-$$

allora si ottiene che:
$0 \geq I(-\liminf_{n\to+\infty}(-f_n^-)) = I(\limsup_{n\to+\infty}(f_n^-)) \geq \limsup_{n\to+\infty} I(f_n^-) \geq$

$\geq \liminf_{n\to+\infty} I(f_n^-) \geq I(\liminf_{n\to+\infty}(f_n^-)) = I(-\limsup_{n\to+\infty}(-f_n^-)) \geq -I(g)$.
Le ultime diseguaglianze scritte sono equivalenti dire che
2) $-I(g) \leq I(q^-) \leq \liminf_{n\to+\infty} I(f_n^-) \leq \limsup_{n\to+\infty} I(f_n^-) \leq$
$\leq I(\limsup_{n\to+\infty} f_n^-) = I(p^-) \leq 0$.
Sommando 1) e 2) si ottiene:

$$-I(g) \leq I(q) \leq \liminf_{n\to+\infty} I(f_n^-) + \liminf_{n\to+\infty} I(f_n^+) = A$$

e

$$B = \limsup_{n\to+\infty} I(f_n^+) + \limsup_{n\to+\infty} I(f_n^-) \leq I(p) \leq I(g).$$

Dal momento che $A \leq \liminf_{n\to+\infty} I(f_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} I(f_n) \leq B$ si ottiene dunque il risultato desiderato

$$-I(g) \leq I(q) \leq \liminf_{n\to+\infty} I(f_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} I(f_n) \leq I(p) \leq I(g).$$

In particolare se $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ si ha che, essendo $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) =$
$= \limsup_{n\to+\infty} f_n(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)$,

$$-I(g) \leq I(q) = I(f) \leq \liminf_{n\to+\infty} I(f_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} I(f_n) \leq I(p) = I(f) \leq I(g).$$

Perciò $f \in L^1$ e vale che $I(f) = \lim_{n\to+\infty} I(f_n)$. $\square$

Corollario 3.3.4.
Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *è una successione di funzioni misurabili su* X *ed esiste una funzione sommabile* $g(x)$ *tali che* $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *su* X *e*
$|\sum_{n=1}^{p} f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall p \in \mathbb{N}$ *e* $\forall x \in X$ *allora* $f \in L^1$ *e* $I(f) = \sum_{n=1}^{+\infty} I(f_n)$

Dimostrazione.
Sia $s_p(x) = \sum_{n=1}^{p} f_n(x)$ allora per il teorema 3.3.2 $s_p(x) \in L^1$ $\forall p \in \mathbb{N}$ e inoltre $\lim_{p\to+\infty} s_p(x) = f(x)$ e $|s_p(x)| \leq g(x)$ con $g \in L^1$ allora per il teorema di convergenza dominata abbiamo che $f \in L^1$ e vale che $\lim_{p\to+\infty} I(s_p) =$
$= \lim_{p\to+\infty} I(\sum_{n=1}^{p} f_n(x)) = \lim_{p\to+\infty}(\sum_{n=1}^{p} I(f_n)) = \sum_{n=1}^{+\infty} I(f_n) = I(f)$
□

3.4 Funzioni nulle e insiemi nulli.

Definizione 3.9.
Ogni funzione f su X per cui vale $I(|f|) = 0$ si dice funzione I-nulla.

Osservazione 20.
Sia una f una funzione I-nulla; dal momento che $0 \leq f^+ \leq |f|$ e $0 \leq -f^- \leq$ $\leq |f|$ allora gli insiemi delle ordinate esterne F^+ $-F^-$ e $|F|$ rispettivamente di f^+, $-f^-$ e $|f|$ soddisfano $\overline{\mu}(F^+) \leq \overline{\mu}(|F|) = I(|f|) = 0$ e $\overline{\mu}(-F^-) \leq$ $\leq \overline{\mu}(|F|) = I(|f|) = 0$, perciò $f^+, -f^- \in M$ e vale che $I(f^+) = I(-f^-) = 0$. Da ciò segue inoltre che $f \in M$ e $I(f) = 0$.

Osservazione 21.
Inoltre facendo considerazioni sempre sugli insiemi delle ordinate esterne si trova che se $|g| \leq f$ su X con f funzione I-nulla allora lo è pure g.

Definizione 3.10.
Ogni insieme $E \subset X$ per cui la funzione caratteristica $\chi_E(x)$ è una funzione I-nulla è detto insieme I-nullo.

Osservazione 22.
Se E è un insieme I-nullo allora $I(n\chi_E) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ quindi $I(\infty\chi_E) = 0$ per

il teorema 3.2.6.
Ne segue che ogni funzione che si annula fuori da un insieme I-nullo E e assume valori arbitrari su E è una funzione I-nulla.
Inoltre se E_n è un insieme I-nullo $\forall n \in \mathbb{N}$ allora $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ è un insieme I-nullo infatti $I(\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n}) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} I(E_n) = 0$.

Definizione 3.11.
Siano due funzioni f_1, f_2 su X tali che $f_1 - f_2$ è una funzione I-nulla, allora diremo che $f_1 = f_2$ quasi dapperttuto e lo indicheremo con q.d o $f_1 \sim f_2$.

Osservazione 23.
Si può provare facilmente che tale relazione $\sim$ è una relazione di equivalenza.
Per esempio proviamo la proprietà transitiva:
siano $f_1 \sim f_2$ e $f_2 \sim f_3$ essendo $f_1 - f_3 = (f_1 - f_2) + (f_2 - f_3)$ ne segue $|f_1 - f_3| \leq |f_1 - f_2| + |f_2 - f_3|$ e quindi $I(|f_1 - f_3|) \leq I(|f_1 - f_2|) + I(|f_2 - f_3|) = 0$.

Teorema 3.4.1.
La funzione f è una funzione I-nulla $\Leftrightarrow$ $E = \{x|f(x) \neq 0\}$ è un insieme I-nullo.

Dimostrazione. Sia $E = \{x|f(x) \neq 0\}$ un insieme I-nullo allora $|f| \leq \infty\chi_E$ su X con $\infty\chi_E$ funzione I-nulla; dunque f è una funzione I-nulla.
Viceversa sia f una funzione I-nulla e sia $E = \{x|f(x) \neq 0\}$ e
$E_n = \{x|\ |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Dal momento che f è una funzione I-nulla e $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ allora $\frac{1}{n}\chi_{E_n} \leq |f|$ su X e dunque $\frac{1}{n}\chi_{E_n}$ è una funzione I-nulla.
Così $I(\chi_{E_n}) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ allora $I(\chi_E) = 0$ dal momento che χ_{E_n} è monotona crescente infatti $E_n \subset E_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e dunque E è un insieme I-nullo. □

Corollario 3.4.2.
$f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow E = \{x|f_1(x) \neq f_2(x)\}$ *è un insieme I-nullo.*

Dimostrazione.
$f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow f_1 - f_2$ è una funzione I-nulla $\Leftrightarrow E = \{x|(f_1 - f_2)(x) \neq 0\} =$
$= \{x|f_1(x) \neq f_2(x)\}$ □

Ora ovviamente se $f_1 \in M$ e h è una funzione I-nulla allora $f_2 = f_1 + h \in M$. Inoltre se f_1 è integrabile vale che $I(f_2) = I(f_1)$ in quanto $I(|h|) = 0$ e vale ancora che $I(|f_1|) = I(|f_2|)$.
Ora però se abbiamo $f_1 \sim f_2$ con f_1 misurabile o integrabile rispettivamente non possiamo concludere immediatamente dal fatto che $f_2 = f_1 + (f_2 - f_1)$ che f_2 è misurabile o integrabile e in questo caso che valga anche che $I(f_2) = I(f_1)$ e $I(|f_1|) = I(|f_2|)$. Infatti $f_2 = f_1 + (f_2 - f_1)$ non vale sempre infatti l'uguaglianza è falsa quando per esempio $f_1(x) = +\infty, f_2(x) = a, a \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$.
Resta comunque provata la nostra affermazione precedente infatti sia
$E = \{x | f_1 \neq f_2\}$ allora $f_2 = f_1 + (-f_1\chi_E) + f_2\chi_E$.
Perciò per quanto detto in precedenza la tesi è provata.

Teorema 3.4.3.
Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili su X ,non negative e monotona crescente tendente a meno di un insieme I-nullo a f $n \to +\infty$ allora $f \in M$ e $I(f_n)$ è monotona crescente tendente a $I(f)$.
Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili su X e $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n$ a meno di un insieme I-nullo ed esista una funzione $g(x)$ sommabile tale che $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$,$\forall x \in X$ eccetto un insieme I-nullo allora $f \in L^1$ e $I(f) = \lim_{n\to+\infty} I(f_n)$.

Dimostrazione.
Il teorema è immediatamente dimostrato una volta introdotte

$$f_n^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{su } E \\ f_n(x) & \text{su } X - E \end{cases}$$

$$f^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{su } E \\ f(x) & \text{su } X - E \end{cases}$$

con $E = \{x | f(x) \neq \lim_{n\to+\infty} f_n\}$ e applicando poi rispettivamente prima i teoremi 3.2.6 e il teorema di convergenza dominata di Lebesgue.
Ora ovviamente E è un insieme I-nullo dal momento che $f_n \sim f_n^*$ visto che per ipotesi abbiamo che $f_n \to f$ q.d su X. $\square$

Teorema 3.4.4.
Se $f \in L^1$ allora $E = \{x| \quad |f(x)| = +\infty\}$ è un insieme I-nullo.

Dimostrazione.
Supponiamo per assurdo che E non sia un insieme I-nullo e denotiamo con P_E e $|F|$ gli insiemi delle ordinate esterne di $\chi_E(x)$ e $|f(x)|$ rispettivamente.
Allora abbiamo $\overline{\mu}(P_E) = \alpha > 0$ e $\infty P_E \subset |F|$ (per stessa definizione di E).
Perciò $\overline{\mu}(nP_E) = n\alpha \; \forall n \in \mathbb{N}$ quindi $\overline{\mu}(\infty P_E) = \infty$.
Da ciò segue che $\overline{\mu}(|F|) = \infty$ e quindi $I(|f|) = \infty$ e ciò contraddice l'ipotesi.
$\square$

Capitolo 4

L'integrale di Stieltjes-Lebesgue.

4.1 La misura indotta su X.

Osservazione 24.
Sia $E \subset X$ allora $\chi_E(x)$ è I-misurabile $\Leftrightarrow$ è I-integrabile.

Definizione 4.1.
Per ogni $E \subset X$ per cui $\chi_E(x)$ è I-misurabile allora E si dice I-misurabile o I-integrabile.
Se E è I-misurabile e $I(\chi_E(x)) < +\infty$ allora diremo che E è I-sommabile.

Osservazione 25.
Siano E_1 e E_2 due sottoinsiemi di X I-misurabili allora $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$, $E_1 - E_2$ sono I-misurabili dal momento che $\chi_{E_1 \cup E_2} = \max(\chi_{E_1}, \chi_{E_2})$,$\chi_{E_1 \cap E_2} =$
$= \min(\chi_{E_1}, \chi E_2)$ e $\chi_{E_1 - E_2} = \chi_{E_1} - \chi_{E_2}$.
Perciò se E_n è una successione di insiemi I-misurabili a due a due disgiunti allora $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ dal momento che $\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n}$.
Quindi la famiglia di tuttti gli insiemi $E \subset X$ I-misurabili costituisce una σ-algebra e $\nu(E) = I(\chi_E(x))$ è una misura su tale σ-algebra.

Conseguentemente considerata la famiglia delle funzioni semplici
$f(x) = \sum_{n=1}^{p} c_n \chi_{E_n}$, $c_n \neq 0$ e $\nu(E_n) < +\infty$ per $n = 1, 2, ..., p$ essa forma una

spazio vettoriale lineare che denoteremo con L_s dove $I(f) = \sum_{n=1}^{p} c_n \nu(\chi_{E_n})$ è l'integrale di f su L_s.
Tale integrale ha le stesse proprietà di $I(f)$ sull'insieme L precedentemente definito.
Ora il problema che ci si pone di fronte è il seguente: se procediamo come nel caso precedente estendendo il concetto di integrale da L ad una classe più ampia di funzioni otteniamo la stessa classe di funzioni integrabili se partiamo da L_s?
Come vedremo la risposta non è sempre affermativa.
Ora se non lo si specifica direttamente assumeremo che L soddisfa anche la seguente condizione: se $f \in L$ allora $\min(f, 1) \in L$.
Notiamo che tale condizione può anche essere espressa così:
se P_X è l'insieme delle ordinate esterne di $\chi_X(x)$ e $F \in \overline{\Gamma}$ è l'insieme delle ordinate esterne di $f \in L^+$ allora $F \cap P_X \in \overline{\Gamma}$.

Osservazione 26.
Per la linearità di L se $f \in L$ allora $-f \in L$ perciò $\max(f, -1) =$
$= -\min(-f, 1) \in L$.

Ora sia $\overline{\Gamma}$ l'iniziale semianello con la misura $\overline{\mu}$ su $X \times \mathbb{R}^+$ e $\overline{\Lambda}$ la σ-algebra di tutti gli insiemi $\overline{\mu}$-misurabili in $X \times \mathbb{R}^+$.
Senza specificazione useremo indicare con P_X l'insieme delle ordinate esterne di $\chi_X(x)$.

Lemma 4.1.1.
Se $E \in \overline{\Lambda}$ allora $E \cap P_X \in \overline{\Lambda}$.
In particolare se $f \in M^+$ allora $\min(f, 1) \in M^+$

Dimostrazione.
Per dimostrarlo è sufficiente provare che $\forall F \in \overline{\Gamma}$ insieme delle ordinate esterne di $f \in L^+$ $E \cap P_X \cap F \in \overline{\Lambda}$ infatti se consideriamo
$A \in \overline{\Gamma}$ allora $A = F - G$ con F, G insieme delle ordinate esterne rispettivamente di $f, g \in L^+$ e perciò essendo $E \cap P_X \cap A = E \cap P_X \cap F - E \cap P_X \cap G$ allora $E \cap P_X \cap A \in \overline{\Lambda}$. Quello che vogliamo dimostrare però si deduce dal

fatto che $P_X \cap F \in \overline{\Gamma} \subset \overline{\Lambda}$ perciò $E \cap P_X \cap F \in \overline{\Lambda}$.
In particolare se $f \in M^+$ allora $F \in \overline{\Lambda}$ con F insieme delle ordinate esterne di f perciò per quello dimostrato in precedenza ne abbiamo che $F \cap P_X \in \overline{\Lambda}$ che non è altro l'insieme delle ordinate esterne di $\min(f, 1)$; quindi $\min(f, 1) \in M^+$. □

Teorema 4.1.2.
La funzione $\chi_X \in M^+ \Leftrightarrow$ l'insieme X è misurabile; perciò ogni funzione costante su X è misurabile.
Inoltre se f è misurabile allora sia $-\infty < a < +\infty$ le funzioni $\max(f, a)$ e $\min(f, a)$ sono misurabili.

Dimostrazione.
Visto che $\overline{\Lambda}$ è una σ-algebra sappiamo che dunque $X \times \mathbb{R}^+ \in \overline{\Lambda}$ e tale insieme è l'insieme delle ordinate esterne di $\infty\chi_X(x)$ perciò $\infty\chi_X$ è misurabile.
Perciò per il lemma precedente abbiamo che $\chi_X = \min(1, \infty\chi_X) \in M^+$.
Ora ogni funzione costante su X può essere scritta come $a\chi_X(x)$ allora se $a \geq 0$ per la linearità di M^+ $a\chi_X \in M^+$ altrimenti se $a < 0$ allora l'insieme delle ordinate esterne di $a\chi_X(x) = \emptyset$ dunque $a\chi_X(x)$ è misurabile.
Inoltre dunque $\min(f, a)$ e $\max(f, a)$ sono misurabili se f è misurabile e $-\infty < a < +\infty$.

□

Teorema 4.1.3.
Se f è misurabile e $-\infty < a < +\infty$ allora l'insieme $A = \{x \in X \mid f(x) > a\}$ è misurabile.
Se f è sommabile e $0\infty < a < +\infty$ l'insieme $A = \{x \in X \mid f(x) > a\}$ è sommabile.

Dimostrazione.
Sia $f_n = n(f - \min(f, a))$ per $n = 1, 2, ...$ allora $f_n(x)$ è monotona crescente e tendente a ∞ per $n \to +\infty$ su A e $f_n(x) = 0$ su $X - A$. Perciò $\min(f_n, 1)$ è una successione monotona crescente in quanto lo è la f_n e tende per $n \to +\infty$ a χ_A su X.

Per il teorema precedente abbiamo che $\min(f_n, 1) \in M^+$ ed essendo come detto che la successione $\min(f_n, 1)$ monotona crescente e tendente su X a χ_A allora $\chi_A \in M^+$; perciò A è misurabile.
Se f è sommabile sappiamo dunque che $I(f^+) < \infty$ e se $0 < a < \infty$ allora $0 \leq \chi_A \leq \frac{f^+(x)}{a}$ in quanto su $x \in A$ vale $\chi_A = 1$ e $f^+(x) > a$ perciò $\frac{f^+}{a} > 1$ mentre se $x \in X - A$ allora $\chi_A = 0$ mentre $f^+ = \max(f, 0) \geq 0$.
Perciò vale che $I(\chi_A) \leq I(f^+) < +\infty$ quindi A è sommabile. $\square$

Corollario 4.1.4.

i) *Se f è misurabile e $-\infty < b < +\infty$ allora $B = \{x \in X| \ f(x) < b\}$ è misurabile.*
Se f è sommabile e $-\infty < b < 0$ l'insieme $B = \{x \in X| \ f(x) < b\}$ è sommabile.

ii) *Se f è misurabile allora gli insiemi $\{x \in X| \ f(x) > a\}$, $\{x \in X| \ f(x) <$*

$< a\}$ con il loro complementari sono misurabili.

Dimostrazione.
i)$B = \{x \in X| \ f(x) < b\} = \{x \in X| \ -f(x) > -b\}$ essendo dunque anche $-f$ misurabile ne viene dal teorema precedente che anche B è misurabile. In maniera analoga se f è sommabile ne viene che B è sommabile.
ii)Viene semplicemente dal fatto che un insieme è misurabile $\Leftrightarrow$ anche il suo complementare lo è. $\square$

Teorema 4.1.5.
Se $f(x) \geq 0$ su X e $A = \{x \in X| \ f(x) > a\}$ è misurabile $\forall a > 0$ allora $f \in M^+$.

Dimostrazione.
Sia $R = \{x \in X| f(x) = \infty\}$, essendo che $R = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X| f(x) > n\}$ allora per l'ipotesi che $\{x \in X| \ f(x) > a\}$ è misurabile $\forall a > 0$ risulta dunque che R è misurabile e così per il teorema 4.1.2 si ha che $\chi_R \in M^+$.

Sia $\delta > 1$ e sia $A_m^\delta = \{x \in X|\ \delta^m < f(x) \leq \delta^{m+1}\}$ per $m \in \mathbb{Z}$. Dunque per i teoremi 4.1.2 e 4.1.3 abbiamo che A_m^δ sono misurabili $\forall m \in \mathbb{Z}$ e così $\chi_{A_m^\delta} \in M^+$ perciò vale anche che $f_\delta(x) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \delta^m \chi_{A_m^\delta} + g \in M^+$ con $g = \infty$ su X. Perciò sia $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione tali che $\delta_1 > 1$ scelto in modo arbitrario e $\delta_{n+1} = \delta_n^{\frac{1}{2}}$ allora risulta che δ_n al variare di $n \in \mathbb{N}$ è una successione decrescente e tendente a 1 per $n \to +\infty$.
Così detto come prima l'insieme $A_m^{\delta_n} = \{x \in X|\ \delta_n^m < f(x) \leq \delta_n^{m+1}\}$ per $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ e $f_{\delta_n}(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta_n^m \chi_{A_m^{\delta_n}} + g$ risulta sempre che $A_m^{\delta_n}$ sono misurabili e $f_{\delta_n} \in M^+$ ma soprattutto abbiamo che:
$f_{\delta_n}(x) \leq f_{\delta_{n+1}}(x)$ in quanto considerato $x \in A_m^{\delta_n}$ allora $f_{\delta_n}(x) = \delta_n^m$ mentre $f_{\delta_{n+1}}(x)$ può essere uguale a δ_n^m oppure $\delta_n^m \delta_n^{\frac{1}{2}}$ e perciò $f_{\delta_n} \leq f_{\delta_{n+1}}$
$\forall m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$; se $x \notin A_m^{\delta_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ allora $f_{\delta_n} = \infty$ e perciò anche $f_{\delta_{n+1}}$ in quanto all'aumentare di $n \in \mathbb{N}$ non si sta altro che raffinare la scomposizione di $[0, \infty[$; inoltre $f(x) \geq f_{\delta_n}(x)$ infatti sia x tale che $f(x) = \infty$ allora $x \notin A_m^{\delta_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ per cui $f_{\delta_n}(x) = \infty$ mentre se x è tale che $f(x) < \infty$ allora $x \in A_m^{\delta_n}$ per qualche n e così vale $f_{\delta_n}(x) = \delta_n^m < f(x)$; infine $f_{\delta_n} \to f$ per $n \to +\infty$ in quanto se preso x per cui $f(x) < \infty$ allora $x \in A_m^{\delta_n}$ e quindi $f(x) - f_{\delta_n}(x) \leq \delta_n^{m+1} - \delta_n^m = \delta_n^m(\delta_n - 1) \to 0$ per $n \to +\infty$ in quanto $\delta_n \to 1$ per $n \to +\infty$ se invece x è tale che $f(x) = \infty$ allora come sopra vale che $x \notin A_m^{\delta_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ quindi $f_{\delta_n}(x) = \infty$.
Perciò possiamo concludere che $f \in M^+$. $\square$

Corollario 4.1.6.
Se $f : X \to \mathbb{R}$ e $A = \{x \in X|\ f(x) > a\}$ e $B = \{x \in X|\ f(x) < b\}$ sono misurabili $\forall a > 0$ e $\forall b < 0$ allora f è misurabile.

Dimostrazione.
Infatti applicando il teorema precedente a f^+ e a $-f^-$ ne viene che $f^+ \in M^+$ e $-f^- \in M^+$; quindi abbaimo che f è misurabile. $\square$

Teorema 4.1.7.
Se $f \in M^+$ allora esiste una successione di funzioni semplici $f_n(x) \in M^+$

tale che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *è una successione monotona crescente, con* $f_{n\in\mathbb{N}} \to f$ *per* $n \to +\infty$.

Dimostrazione.
Scegliendo δ_n e l'insieme R come in precedenza e ponendo $\delta = \delta_n$ e $f_n(x) = = \sum_{m=-n*2^n}^{n*2^n} \delta^m \chi_m^\delta + n\chi_R$ allora si dimostra la tesi desiderata facendo le stesse considerazioni del teorema precedente. □

Teorema 4.1.8.
Se $f \in M^+$ *e* $-\infty < p < 0$ *o* $0 < p < \infty$ *allora* $f^p \in M^+$.

Dimostrazione.
Sia $0 < p < +\infty$ allora $\{x \in X|\ f^p > a\} = \{x \in X|\ f > a^{\frac{1}{p}}\}\ \forall a > 0$; perciò dal momento che $f \in M^+$ ne viene che $\{x \in X|\ f^p > a\}$ è misurabile $\forall a > 0$ quindi per il teorema 4.1.4 abbiamo che $f^p \in M^+$.
Nel caso in cui sia $-\infty < p < 0$ allora $\{x \in X|\ f^p > a\} = \{x \in X|\ f < a^{\frac{1}{p}}\}$ $\forall a > 0$ perciò per le stesse motivazioni precedenti ne viene che $f^p \in M^+$. □

Teorema 4.1.9.
Se f, g *sono funzioni misurabili allora lo è anche* fg.

Dimostrazione. Dal momento che $\{x \in X|\ f(x) = \infty\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{x \in X|\ f(x) > n\}$ allora per il teorema 4.1.2 l'insieme $\{x \in X|\ f(x) = \infty\}$ è misurabile. Perciò $\{x \in X|\ 0 < f(x) < \infty\}$ è misurabile perchè intersezione di misurabili e facendo considerazioni analoghe alle precedenti ne viene che $\{x \in X|\ f(x) = -\infty\}$ e $\{x \in X|\ -\infty < f(x) < 0\}$ sono misurabili (notiamo che $\{x \in X|\ f(x) = -\infty\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{x \in X|\ f(x) < -n\}$).
Perciò gli insiemi seguenti sono misurabili:

$$U_1 = \{x \in X|\, f(x) = +\infty, 0 < g(x) < +\infty\} \qquad U_2 = \{x \in X|\, f(x) = +\infty, -\infty < g(x) < 0\},$$

$$U_3 = \{x \in X|\, f(x) = -\infty, 0 < g(x) < +\infty\} \qquad U_4 = \{x \in X|\, f(x) = -\infty, -\infty < g(x) < 0\},$$

$$U_5 = \{x \in X|\, 0 < f(x) < +\infty, g(x) = +\infty\} \qquad U_6 = \{x \in X|\, -\infty < f(x) < 0, g(x) = +\infty\},$$

$$U_7 = \{x \in X|\, 0 < f(x) < +\infty, g(x) = -\infty\} \qquad U_8 = \{x \in X|\, -\infty < f(x) < 0, g(x) = -\infty\}.$$

Ora introduciamo le seguenti funzioni:

$$f^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{su } \bigcup_{n=1}^{8} U_n \\ f(x) & \text{su } X - \bigcup_{n=1}^{8} U_n \end{cases}$$

$$g^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{su } \bigcup_{n=1}^{8} U_n \\ g(x) & \text{su } X - \bigcup_{n=1}^{8} U_n \end{cases}$$

Ora essendo che $\{x \in X |\ f^*(x) > a\} = \{x \in X |\ f(x) > a\} - \bigcup_{n=1}^{8} U_n$ e lo stesso per g^* $\forall a > 0$ allora f^*, g^* risultano misurabili.
Ora $f^*g^* = \frac{1}{4}|f^*+g^*|^2 - |f^*-g^*|^2$ su X. Ora f^*+g^*, f^*-g^* sono misurabili in quanto somma e differenza di funzioni misurabili quindi anche $|f^*+g^*|, |f^* + - g^*|$ sono misurabili e quindi per il teorema precedente lo sono anche $|f^* + + g^*|^2, |f^* - g^*|^2$.Perciò lo è anche f^*g^*.
Sia $a > 0$ allora l'insieme $\{x \in X |\ fg > a\} = \{x \in X |\ f^*g^* > a\} \cup U_1 \cup U_4 \cup \cup U_5 \cup U_8$ risulta misurabile perchè unione di insiemi misurabili e allo stesso modo si ha che se preso $b < 0$ allora $\{x \in X |\ fg < b\} = \{x \in X |\ f^*g^* < < b\} \cup U_2 \cup U_3 \cup U_6 \cup U_7$ risulta misurabile perchè unione di insiemi misurabili.
Quindi per il corollario 4.1.6 risulta che fg è misurabile. □

Ora cerchiamo di rispondere a una domanda posta in precedenza: otteniamo la stessa classe di funzioni integrabili se partissi da L_s invece che da L?
Come fatto nel caso di L per determinare la classe di funzioni integrabili abbiamo prima definito il semianello $\overline{\Gamma}$ di tutti gli insiemi del tipo $F - G$ con $f, g \in L^+$ e su di esso poi avevamo definito la misura $\overline{\mu}(F - G) = I(f - g)$.
Dopo di che abbiamo esteso la misura $\overline{\mu}$ sulla σ algebra $\overline{\Lambda}$ di tutti i sottoinsiemi di $X \times \mathbb{R}^+$ $\overline{\mu}$-misurabili.
Facciamo lo stesso su L_s; sia Γ_s il semianello di tutti li insiemi del tipo $F - G$ con $f, g \in L_s^+$ e sia μ_s la misura su di esso tale che $\mu_s(F - G) = I(f - g)$; procedendo con la solita estensione si ottiene la σ algebra Λ di tutti i sottoinsiemi di $X \times \mathbb{R}^+$ μ_s misurabili.

Dare una risposta affermativa al nostro problema equivale provare che $\overline{\Lambda} = \Lambda$ e $\mu_s = \overline{\mu}$.

Per fare questo ci serviamo del teorema 2.3.2 e cioè proviamo che $\mu_s^* = \overline{\mu}$ su $\overline{\Gamma}$ e $\overline{\mu^*} = \mu_s$ su Γ_s.

Quest'ultima è facile da provare perchè su Γ_s vale che $\mu_s(F-G) = I(f-g) = = \overline{\mu}(F-G) = \overline{\mu^*}(F-G)$.

Vediamo ora di provare invece che vale $\mu_s^* = \overline{\mu}$ su $\overline{\Gamma}$.

Sia $f \in L^+$ il cui insieme delle ordinate esterne sia F allora proviamo che F è μ_s misurabile e $\mu_s(F) = I(f)$.

Dal momento che f è non negativa e sommabile allora per il teorema 4.1.8 esiste una successione di funzioni $f_n \in L_s^+$ $\forall n \in \mathbb{N}$ monotona crescente e tendente a f su X; dunque essendo $F = \lim_{n\to+\infty} F_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ F è μ_s misurabile e $\mu_s(F) = \lim_{n\to+\infty} \mu_s(F)_n = \lim_{n\to+\infty} \mu_s I(f_n)$ dove F_n è l'insieme delle ordinate esterne di f_n.

Per via del fatto che f_n è una successione monotona crescente tendente a f allora $I(f_n) \to I(f)$ per $n \to +\infty$ e $I(f_n)$ è monotona crescente; perciò vale che $\mu_s(F) = I(f)$.

Sia $A \in \overline{\Gamma}$ allora $A = F - G$ con $f, g \in L$; perciò essendo sia F, G μ_s misurabili allora lo è pure A e risuta che $\mu_s(A) = \mu_s(F-G) = \mu_s(F) - \mu_s(G)$ visto che posso assumere che $f \geq g$ e perciò $\mu_s(A) = I(f) - I(g) = I(f-g) = \overline{\mu}(A)$.

Ora chiameremo I(f), se lo spazio vettoriale lineare iniziale L è uno spazio di funzioni semplici corrispondenti alla misura μ in X, l'integrale di Daniell che è generato integrale di Stieltjes-Lebesgue e lo indicheremo usualmente con $I(f) = \int_X f\, d\mu$.

Ora vediamo di riassumere il risultato precedente con il seguente teorema:

Teorema 4.1.10.
Se L rappresente il dominio di definizione dell'integrale di Daniell e soddisfa anche l'ipotesi che se $f \in L$ allora $\min(f, 1) \in L$ allora $I(f)$ è l'integrale di Stieltjes-Lebesgue $\int_X f\, d\nu$ rispetto alla misura $\nu(E) = I(\chi_E)$ su X.

Denotando ora con Γ la σ algebra di tutti i sottoinsiemi I-misurabili di X sappiamo che $\nu(E) = I(\chi_E)$ è una misura su Γ ma non è così evidente che $\Gamma = \Lambda$ con Λ σ algebra di tutti i sottoinsiemi ν-misurabili di X.
Infatti si può creare una certa confusione tra i due insiemi; comunque dato $E \in \Gamma$ allora significa che $\chi_E \in M^+$ e che $\nu(E) = \overline{\mu}(P_E)$ con P_E insieme delle ordinate esterne di χ_E mentre Λ è la σ algebra ottenuta con la solita procedura di estensione partendo da (X, Γ, ν).
È evidente che $\Gamma \subset \Lambda$ per quello dimostrato anche in precedenza ma fortunatamente vale che $\Gamma = \Lambda$.

Teorema 4.1.11.
$\forall E \in \Lambda$ $E \in \Gamma$.

Dimostrazione.
Proviamo tale affermazione per un insieme $E \in \Lambda$ di misura nulla.
Sia perciò $E \in \Lambda$ tale che $\nu(E) = 0$; allora $\forall \epsilon > 0$ esiste $O \supset E$ con O σ-insieme tale che $\nu(O) < \epsilon$. Ora $O \in \Gamma$ dal momento che Γ è una σ-algebra; perciò il suo insieme delle ordinate esterne $P_O \in \overline{\Lambda}$ e $\overline{\mu}(P_O) = \nu(O) < \epsilon$. Segue allora che $\overline{\mu^*}(P_E) < \epsilon$ $\forall \epsilon > 0$ visto che $P_E \subset P_O$. Quindi $P_E \in \Lambda$ e $\overline{\mu}(P_E) = 0$
Ora proviamo la tesi nel caso in cui E sia un σ-insieme e di misura finita.
Essendo E un σ-insieme allora $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ dove $A_n \in \Gamma$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e visto che Γ è una σ algebra allora $E \in \Gamma$; quindi questo implica che il limite di ogni successione decrescente di σ insiemi appartiene a Γ visto che un insieme è misurabile se e solo se lo è il suo complementare.
Perciò dal momento che E è anche di misura finita sappiamo che esiste una successione decrescente di σ insiemi O_n tale che detto $O_\sigma = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} = O_n$ vale che $\nu(E - O_\sigma) = 0$ perciò risulta che $E \sim O_\sigma$ e quindi che $E \in \Gamma$.
Ora torniamo al caso generale ricordando che se vogliamo provare che $E \in \Gamma$ è sufficiente provare che $\forall A \in \Gamma$ di misura finita si abbia che $A \cap E \in \Gamma$. Questo può essere riformulato dicendo: provare che $E \in \Gamma$ è come provare

che
$P_E \cap P_A \in \Gamma\ \forall P_A\ \overline{\mu}$-misurabile e di misura finita.
Ora se $0 \leq c < \infty$ allora:

$$P_E \cap (cP_A) = \begin{cases} P_E \cap P_A & \text{per } c \geq 1 \\ c(P_E \cap P_A) & \text{per } 0 \leq c < 1 \end{cases}$$

così risulta che $P_E \cap (cP_A)$ è misurabile $\forall P_A\ \overline{\mu}$-misurabili e di misura finita. In questo modo risulta che l'intersezione di P_E con l'insieme delle ordinate esterne di una funzione semplice non negativa è $\overline{\mu}$-misurabile in quanto il suo insieme delle ordinate esterne non è altro che unione disgiunta di insiemi del tipo di cP_A cioè risulta $P_E \cap \bigcup_{n=1}^{p} c_n P_{A_n} = \bigcup_{n=1}^{p}(P_E \cap c_n P_{A_n})$ quindi risulta che P_E è $\overline{\mu}$-misurabile visto che $\overline{\mu}$ è generata proprio dalla restrizione degli insiemi delle ordinate esterne di funzioni semplici non negative. Quindi $E \in \Gamma$. Sia ora $E \in \Lambda$ allora $E \cap A \in \Lambda\ \forall A \in \Gamma$ di misura finita visto che $\Gamma \subset \Lambda$ quindi $E \cap A \in \Gamma\ \forall A \in \Gamma$ di misura finita dal momento che essendo $E \cap A$ di misura finita allora posso applicare il caso precedente a $E \cap A$; perciò alla fine ne viene che $E \in \Gamma$. □

Da questo teorema ne viene dunque che $\Gamma = \Lambda$ come volevamo che fosse.
Ora consideriamo la misura μ su una σ-algebra Λ (non è detto che sia $\Lambda = \Lambda_\mu$, con Λ_μ la σ-algebra di tutti i sottoinsiemi di X μ-misurabili ottenuta estendento (X, Λ, μ)). Sappiamo che il dominio di definizione di $I(f)$ è L lo spazio vettoriale delle funzioni semplici corrispondenti alla misura μ su Λ.
Perciò sappiamo che $f(x) = \sum_{n=1}^{p} c_n \chi_{E_n}$ con $c_n \neq 0$,$E_n \in \Lambda$ e $\mu(E_n) < \infty$ per $n = 1, 2, ...p$, e $I(f) = \sum_{n=1}^{p} c_n \mu(E_n)$. Ovviamente L soddisfa la condizione che se $f \in L$ allora $\min(f, 1) \in L$.
Inoltre l'integrale esteso $I(f)$ induce su X la misura ν. Ora proviamo il seguente teorema con il quale i concetti di I-misurabile, μ-misurabile e ν-misurabile sono equivalenti e allo stesso lo sarà per le nozioni di $I(f)$,$\int_X f\, d\mu$ e $\int_X f\, d\nu$.

Teorema 4.1.12.

Sia Λ_ν la σ-algebra di tutti i sottoinsiemi di X ν-misurabili allora vale che $\Lambda_\nu = \Lambda_\mu$ e $\nu(E) = \mu(E)$ $\forall E \in \Lambda_\nu = \Lambda_\mu$.

Dimostrazione.
Prima di dimostrare a passi il teorema facciamo questa considerazione: sia f_n una successione di funzioni semplici, non negative, monotona crescente relativa alla misura μ su Λ, $f_n \in L^+$ tendente a f e sia $0 < a < \infty$.
Allora vale che $\{x \in X|\ f(x) > a\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x \in X|\ f_n(x) > a\}$ e dal momento che ognuno dei $\{x \in X|\ f_n(x) > a\}$ è μ-misurabile lo è anche $\{x \in X|\ f(x) > a\}$; quindi anche l'insieme $\{x \in X|\ f(x) \geq a\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{x \in$ $\in X|\ f(x) > a-\frac{1}{n}\}$ è μ-misurabile dal momento che lo è ogni $\{x \in X|\ f(x) >$ $> a - \frac{1}{n}\}$ per via del fatto che $a > \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ infatti se esistesse $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a < \frac{1}{n}$ allora $a < \frac{1}{j}$ $\forall j \geq \overline{n}$ allora mandando j a infinito si troverebbe che $a \leq 0$ il che è un assurdo.
Ora proviamo il teorema per insiemi E di misura finita. È triviale che se $E \in \Lambda$ e $\mu(E) < \infty$ allora $E \in \Lambda_\nu$ dal momento che $\Lambda \subset \Lambda_\mu$ e quindi vale $\nu(E) = I(\chi_E) = \mu(E)$ e da qui ne segue anche che per ogni $E \in \Lambda_\mu$ tale che $\mu(E) = 0$ allora $\nu(E) = 0$ per il fatto che essendo $\mu(E) = 0$ allora $\forall\epsilon > 0$ esiste O σ-insieme con $O_\sigma \in \Lambda$ visto che Λ è una σ-algebra tale che $\mu(O_\sigma) = \nu(O_\sigma) < \epsilon$ (questo per quanto dimostrato prima) quindi $\nu^*(E) < \epsilon$ $\forall\epsilon > 0$ allora $\nu(E) = 0$.
Perciò sia $E \in \Lambda_\mu$ di misura finita allora vale che $E = E_1 - E_2$ con $E_1, E_2 \in \Lambda$ e $\mu(E_2) = 0$ ed essendo ora Λ una σ-algebra ed E di misura finita per quello detto in precedenza vale che $E \in \Lambda_\nu$ e $\nu(E) = \mu(E)$.
Ora sia viceversa $E \in \Lambda_\nu$ con $\nu(E) = \overline{\mu}(E) < \infty$.
Dunque $\forall\epsilon > 0$ esiste un σ-insieme $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(F_n - G_n) \supset P_E$ dove $F_n - G_n$ sono a due a due disgiunti e tale che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mu}(F_n - G_n) - \overline{\mu}(P_E) < \epsilon$.
Notiamo inoltre che come al solito F_n, G_n sono rispettivamente gli insiemi delle ordinate esterne di $f, g \in L^+$ e possiamo come fatto in precedenza senza perdere di generalità che $f \geq g$.
Senza perdere di generalità possiamo inoltre supporre che $f_n - g_n \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e quindi supporre che $F_n - G_n \subset P_X$ $\forall n \in \mathbb{N}$ in modo che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(F_n - G_n) \subset$

P_X (nel caso in cui questo non accadesse normalizzo ognuna delle funzioni $f_n - g_n$).
Sia $s_p(x) = \sum_{n=1}^{p}(f_n - g_n)$ allora s_p al variare di $p \in \mathbb{N}$ rappresenta una successione monotona crescente; denotiamo con $s(x)$ il limite di tale successione; perciò abbiamo che $s(x) \leq 1$ su X e $s(x) = 1$ su E.
Inoltre l'insieme delle ordinate esterne S di $s(x)$ è tale che $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(F_n - G_n)$, perciò $\overline{\mu}(S) = I(S) = \sum_{n\in\mathbb{N}} I(f_n - g_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mu}(F_n - G_n)$ e in questo modo vale che $\overline{\mu}(S) - \overline{\mu}(E) < \epsilon$.
Sia $A = \{x \in X |\ s(x) \geq 1\}$; per quanto fatto e detto nella considerazione iniziale ne viene che A è μ-misurabile e dunque A è anche I-misurabile e vale che $\overline{\mu}(P_A) - \overline{\mu}(P_E) < \epsilon$ dal momento che $P_E \subset P_A \subset S$.
Perciò abbiamo che $\forall \epsilon > 0$ esiste $A \supset E$ μ-misurabile tale che $\overline{\mu}(P_A) + - \overline{\mu}(P_E) < \epsilon$. Perciò se in particolare vale che $\nu(E) = \overline{\mu}(P_E) = 0$ allora $\overline{\mu}(P_A) < \epsilon$ e quindi $\mu(A) < \epsilon$ da cui poi $\mu^*(E) < \epsilon\ \forall \epsilon > 0$; quindi E è μ-misurabile e $\mu(E) = \nu(E) = 0$.
Ora sia $0 < \nu(E) = \overline{\mu}(P_E) < \infty$ allora esiste una successione decrescente di insiemi A_n μ-misurabili tale che $A_n \supset E$ e $\overline{\mu}(P_{A_n}) - \overline{\mu}(P_E) < \frac{1}{n}$. Ora detto $A = \lim_{n\to+\infty} A_n$ allora risulta che A è μ-misurabile e $A \supset E$ e passando al limite per $n \to +\infty$ in $\overline{\mu}(P_{A_n}) - \overline{\mu}(P_E) < \frac{1}{n}$ si ottiene $\overline{\mu}(P_A) - \overline{\mu}(P_E) = 0$ quindi $\overline{\mu}(P_{A-E}) = \overline{\mu}(P_A) - \overline{\mu}(P_E) = 0$ perciò per quanto provato in precedenza ne viene che $A - E$ è μ-misurabile e $\mu(A - E) = 0$ e quindi E è μ-misurabile e vale $\mu(E) = \mu(A) = \overline{\mu}(P_A) = \overline{\mu}(P_E) = \nu(E)$.
Questo prova la tesi per insiemi di misura finita.
$E \in \Lambda_\mu \Leftrightarrow\ E \cap A\ \forall A \in \Lambda_\mu$ di misura finita $\Leftrightarrow\ E \cap A \in \Lambda_\nu\ \forall A \in \Lambda_\nu \Leftrightarrow$
$E \in \Lambda_\nu$.
Questo completa la dimostrazione. $\square$

4.2 Proprietà dell'integrale di Stieltjes-Lebesgue.

Ora vediamo alcune proprietà dell'integrale di Stieltjes-Lebesgue
$I(f) = \int_X f\, d\mu$ rispetto alla misura μ su X.

In precedenza avevamo definito una funzione nulla una funzione che soddisfava $I(|f|) = \int_X f\, d\mu = 0$ e un insieme nullo un sottoinsieme $E \subset X$ per cui $I(\chi_E) = \int_X \chi_E\, d\mu = 0$; però in questo caso $\int_X \chi_E\, d\mu = \mu(E)$ così un insieme nullo è esattamente un insieme di misura μ-nulla.
Inoltre il teorema per cui f è una funzione nulla $\Leftrightarrow \{x \in X|\ f(x) \neq 0\}$ è un insieme nullo può essere riformulato dicendo che f è una funzione nulla $\Leftrightarrow$ $f = 0$ q.d. su X per quello sottolineato in precedenza.

Teorema 4.2.1.
$\forall f$ sommabile l'insieme $\{x \in X|\ f(x) \neq 0\}$ è un insieme di misura μ-finita.

Dimostrazione.
$\{x \in X|\ f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x \in X|\ f(x) > \frac{1}{n}\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x \in X|\ f(x) < -\frac{1}{n}\}$ e ognuno di questi insiemi per il teorema 4.1.3 è sommabile e dunque di misura μ-finita e perciò $\{x \in X|f(x) \neq 0\}$ essendo unione numerabile di insiemi di misura μ-finita allora è anche lui di misura μ-finita. □

Osservazione 27.
Sia f una funzione integrabile e $E \subset X$ misurabile allora il prodotto $f\chi_E$ è misurabile e $(f\chi_E)^+ \leq f^+$ e $(f\chi_E)^- \geq f^-$.
Da qui segue che $\int_X (f\chi_E)^+\, d\mu$ e $\int_X (f\chi_E)^-\, d\mu$ esistono e che almeno uno dei due è finito; perciò $\int_X f\chi_E\, d\mu$ esiste.
Ora tale integrale $\int_X f\chi_E\, d\mu$ si dice integrale di f sul sottoinsieme E di X e lo denoteremo con $\int_E f\, d\mu$.

Teorema 4.2.2.
Se f è integrabile su E sottoinsieme μ-misurabile e $-\infty \leq a \leq f(x) \leq b \leq \infty$ su E allora

$$a\mu(E) \leq \int_E f\, d\mu \leq b\mu(E).$$

Dimostrazione.
Questo risultato viene direttamente dal fatto che $\int_E a\, d\mu = a\mu(E)$ $\forall a$ tale che $-\infty \leq a \leq \infty$ e dall'ipotesi che f è integrabile su E sottoinsieme μ-misura-

bile e $-\infty \leq a \leq f(x) \leq b \leq \infty$ su E (ricordiamo che vale $(\pm\infty)0 = 0(\pm\infty) = 0$). $\square$

Teorema 4.2.3.
Sia E_n una successione di sottoinsiemi di X disgiunti e misurabili e sia f integrabile su $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ allora $\int_E f\,d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{E_n} f\,d\mu$.

Dimostrazione.
Supponiamo di aver dimostrato il teorema per f^+ e f^- dunque il teorema risulterebbe vero anche per f visto che $I(f) = I(f^+)+I(f^-) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{E_n} f^+\,d\mu$ $+ \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{E_n} f^-\,d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{E_n} (f^+ + f^-)\,d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{E_n} f\,d\mu$.
Perciò supponiamo che $f \geq 0$ su E.(Notiamo che $I(f^-) = -I(-f^-)$ con $-f^- \geq 0$) Allora $f\chi_{E_n} \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ e $f\chi_E = \sum_{n\in\mathbb{N}} f\chi_{E_n}$ con $E_n = \{x \in X|$ $f(x) \geq \frac{1}{n}\}$; perciò $\int_E f\,d\mu = \int_X f\chi_E\,d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f\chi_{E_n}\,d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{E_n} f\,d\mu$ per il corollario 3.2.7 . Con ciò dunque il teorema è dimostrato. $\square$

Osservazione 28.
Con l'ultimo teorema dimostrato abbiamo anche provato che presa f misurabile e non negativa su X allora $\nu(E) = \int_E f\,d\mu$ è una misura sulla σ-algebra di tutti i sottoinsiemi $E \subset X$ perchè si è provata la completa addittività dell'integrale appena scritto.

Osservazione 29.
Sia f misurabile su X e $\int_E f\,d\mu = 0\ \forall E \subset X$ allora $f = 0$ q.d su X.
Per mostrare ciò mi basta mostrare che $\{x \in X|f(x) \neq 0\} = \{x \in X|$ $f(x) > 0\} \cup \{x \in X|f(x) < 0\}$ è un insieme di misura nulla.
Sia $E = \{x \in X|f(x) > 0\}$ dal momento che f è misurabile risulta che E è misurabile e $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{X \in X|f(x) > \frac{1}{n}\}$. Quindi detti $E_n = \{x \in X|$ $f(x) > \frac{1}{n}\}$ si ottiene $0 = \int_E f\,d\mu \geq \int_{E_n} f\,d\mu \geq \int_{E_n} \frac{1}{n}\,d\mu = \frac{1}{n}\mu(E_n) \geq 0$ quindi $\mu(E_n) = 0$ e per la proprietà di subaddittività della misura vale che $\mu(E) = 0$.
Ora osservando che $E = \{x \in X|f(x) < 0\} = \{x \in X| - f(x) > 0\}$ si ottiene il medesimo risultato precedente procedendo come prima; perciò risulta che $\{x \in X|f(x) \neq 0\}$ è un insieme di misura-μ nulla. Quindi la tesi è provata.

Teorema 4.2.4.
Se la misura μ su X è generata dalla procedura di ampliamento applicata su (X, Γ, μ) dove Γ è il semianello e se f è misurabile su X e $\int_A f\, d\mu = 0$ $\forall A \subset \Gamma$ allora $f = 0$ q.d su ogni insieme sequenzialmente ricoperto da insiemi $A_n \in \Gamma$.

Dimostrazione.
È sufficiente provare la tesi per $A \in \Gamma$ infatti poi dato E ricoperto sequenzialmente da $A_n \in \Gamma$ allora $E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ed essendo dunque $f = 0$ q.d su A_n $\forall n \in \mathbb{N}$ allora ne segue $f = 0$ su E q.d .
Per prima cosa dimostriamo la tesi nel caso in cui $\mu(A) < \infty$. Con questa ipotesi possiamo dunque ridurci senza perdere di generalità a $E \subset A$ μ-misurabile e dimostrare che $\int_E f\, d\mu = 0$ (ricordiamo che essendo f sommabile su A e $E \subset A$ μ-misurabile allora f è sommabile su E). Perciò se ora E è un σ-insieme allora $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ con $A_n \in \Gamma$ e quindi $E = A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup$ $\cup\, (A_3 - A_1 - A_2) \cup ... \cup \cup (A_k - \bigcup_{n=1}^{k-1} A_n)$, $k = 1, 2, ...$ perciò per il teorema precedentemente dimostrato abbiamo che $\int_E f\, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} f\, d\mu = 0$ essendo $\int_{A_n} f\, d\mu = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ per l'ipotesi che abbiamo; ora nel caso in cui $A - E$ fosse un σ-insieme allora per il ragionamento di prima si avrebbe che anche $\int_{A-E} f\, d\mu = 0$.
Ora diremo ma solo per dimostrare la tesi proposta che per ogni insieme $E \subset A$ per cui $A - E$ è un σ-insieme allora E è un σ-insieme.
Sia allora $E \subset A$ μ-misurabile e dal momento che abbiamo supposto che $\mu(A) < \infty$ sappiamo che esiste un insieme $O_\delta = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ con O_n successione decrescente di σ-insiemi per cui (posso supporre che $O_n \subset A \quad \forall n \in \mathbb{N}$ visto che $E \subset A$) $\mu(O_\delta - E) = 0$; da qui abbiamo che $\mu(O_\delta) = \mu(E) + \mu(O_\delta - E)$ quindi $\mu(E) = \mu(O_\delta) - \mu(O_\delta - E)$ e $E = O_\delta - (O_\delta - E)$.
Perciò $A - E = A - (O_\delta - (O_\delta - E)) = (O_\delta - E) \cup$ $\cup\, (A - O_\delta) = (O_\delta - E) \cup (A - \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n) = (O_\delta - E) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A - O_n)$ con $A - O_n \subset A - O_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ dal momento che $O_n \supset O_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$; indicando con $D_0 = (O_\delta - E)$ e $D_n = A - O_n$ $\forall n = 1, 2...$ allora si ha $A - E = D_0 \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n = D_0 \cup D_1 \cup (D_2 - D_1) \cup ... \cup (D(k+1) - D_k)$

$\forall k = 1, 2, ...$; quindi $A - E$ è un σ-insieme e siccome su ognuno dei termini del membro di destra l'integrale di f è nullo per ipotesi allora $\int_{A-E} f \, d\mu = 0$ e quindi per quanto dimostrato prima ne viene che E è un σ-insieme e perciò $\int_E f \, d\mu = 0$.
In questo modo essendo $\int_A f \, d\mu = \int_E f, d\mu + \int_{A-E} f \, d\mu$ ne viene che $\int_A f \, d\mu = 0 \ \forall A \in \Gamma$ con $\mu(A) < \infty$.
Sia $A \in \Gamma$ e $0 < a < \infty$. Dal momento che f è sommabile su A per ipotesi allora $A_a = \{x \in A | \ f(x) > a\}$ allora per il teorema 4.1.3 è sommabile ovvero di misura finita e per questo per quanto dimostrato in precedenza ne viene che $f = 0$ q.d. su A_a. Ma su A_a vale che $f > a > 0$ perciò ne viene che $\mu(A) = 0$ e questo lo posso fare $\forall a > 0$; procedendo nello stesso modo si trova che $\mu(A_b) = 0 \ \forall b < 0$ con $A_b = \{x \in A | \ f(x) < b\}$.
Da qui ne viene che perciò $f = 0$ su A. $\square$

Bibliografia

[1] B.Pini, *Primo corso di analisi matematica*, CLUEB, 1971.

[2] B.Pini, *Secondo corso di analisi matematica parte I*, CLUEB, 1972.

[3] A.Zaanen, *An introduction to the theory of integration*, North-Holland Publishing Company-Amsterdam,1958.

[4] Bourbaki, *Storia della matematica*, Feltrinelli, 1963.

[5] Carl B.Boyer, *Storia della matematica*, Mondadori, 1976.