

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

# L'atmosfera termica e il suo ruolo nell'entropia dei buchi neri

**Relatore:**  
**Prof. Roberto Casadio**

**Presentata da:**  
**Enrico Parisini**

Anno Accademico 2015/2016



## Sommario

Con il testo presente, si intende mostrare come i gradi di libertà associati all'entropia di un buco nero possano essere ricercati in parte fruttuosamente nell'interazione dei campi quantistici con la struttura causale e geometrica esibita da un buco nero.

Nel Capitolo 1, si affrontano le principali caratteristiche dei buchi neri alla luce della teoria classica di Relatività Generale. Sono analizzate perciò le proprietà della soluzione di Schwarzschild e della struttura causale nello spazio-tempo conseguente, discutendo le definizioni di orizzonte e di singolarità e il rapporto che le lega, in relazione ai risultati di Penrose e Hawking.

Introdotta, all'inizio del Capitolo 2, il concetto di gravità superficiale e la metrica di Kerr-Newman per buchi neri elettricamente carichi con momento angolare non nullo, si studia il significato delle Quattro Leggi dei buchi neri, che pongono restrizioni di carattere dinamico sul comportamento dei parametri di massa, carica e momento angolare di buchi neri stazionari.

Il Capitolo 3 espone quali motivazioni spingano a proporre una caratterizzazione termodinamica dei buchi neri, attribuendovi una temperatura  $T_H$  e un'entropia  $S_{BH}$  di natura geometrica, dipendente dall'area dell'orizzonte. Si trattano qui i problemi che si incontrano nel costruire una corrispondente Meccanica Statistica, con particolare attenzione alle difficoltà che presenta la scelta dei gradi di libertà associati all'entropia  $S_{BH}$ . Si descrive dunque in quali termini il processo di radiazione di Hawking riesca a dare una spiegazione fisica della temperatura  $T_H$ , e se ne ricava la fenomenologia per la soluzione di Schwarzschild; si precisano alcune sue conseguenze dirette, come l'evaporazione e la presenza, secondo osservatori statici, di un'*atmosfera termica* nei pressi dell'orizzonte.

Infine, si esamina la possibilità di attribuire alla radiazione di Hawking i gradi di libertà relativi all'entropia  $S_{BH}$ . In particolare, si illustra il modello a muro di mattoni di 't Hooft, che lega i gradi di libertà all'atmosfera termica, e porta al corretto valore di  $S_{BH}$  se si impone un cut-off UV dell'ordine della lunghezza di Planck nell'integrazione dei modi dell'atmosfera termica nei pressi dell'orizzonte. Considerando modelli che includano la deformazione dell'orizzonte dovuta a fluttuazioni quantistiche, si rende concepibile associare all'orizzonte uno spessore efficace, di lunghezza propria maggiore della lunghezza di Planck nel caso di buchi neri astronomici. Si rivisita allora il calcolo di 't Hooft e si giunge alla conclusione che l'entropia dell'atmosfera termica rappresenta non un'interpretazione dell'entropia  $S_{BH}$ , bensì una sua correzione al secondo ordine.



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 La definizione di buco nero</b>	<b>2</b>
1.1 Le equazioni di Einstein . . . . .	2
1.2 Lo spazio-tempo di Schwarzschild . . . . .	3
1.3 La struttura causale in Relatività Generale . . . . .	7
1.4 Orizzonti . . . . .	9
1.5 Singolarità . . . . .	12
<b>2 La Meccanica dei buchi neri</b>	<b>16</b>
2.1 La metrica di Kerr-Newman . . . . .	16
2.2 Gravità superficiale e Legge Zero . . . . .	19
2.3 Prima Legge . . . . .	22
2.4 Seconda Legge . . . . .	24
2.5 Terza Legge . . . . .	25
<b>3 La Termodinamica dei buchi neri</b>	<b>27</b>
3.1 Le Quattro Leggi in chiave termodinamica . . . . .	27
3.2 La temperatura e la radiazione di Hawking . . . . .	30
3.3 L'origine statistica dell'entropia . . . . .	39
3.4 Il modello a muro di mattoni e le deformazioni dell'orizzonte . . . . .	42
<b>Conclusioni</b>	<b>51</b>
<b>Riferimenti bibliografici</b>	<b>54</b>



# Introduzione

Se in un sistema statistico sono presenti sottosistemi interagenti, allora, come è noto, l'interazione ne influenza l'evoluzione in due modi: aggiungendo effetti dinamici tra i sottosistemi, e mettendo a disposizione del sistema nuovi gradi di libertà legati all'interazione stessa. Prendendo in esame l'interazione gravitazionale dal punto di vista relativistico, si nota che per la maggior parte degli oggetti astrofisici (come sistemi stellari e ammassi) i gradi di libertà associati allo spazio-tempo sono in pratica inaccessibili, ed è sufficiente una descrizione newtoniana dei fenomeni. Da questo punto di vista, i buchi neri sono invece un'eccezione, in quanto sono definibili in modo essenziale solamente con un approccio geometrico. Come sarà chiaro fin dal Capitolo 1, è proprio la geometria delle soluzioni alle equazioni di Einstein contenenti un buco nero che porta le caratteristiche di maggiore interesse per questi oggetti. Una delle più rilevanti è sicuramente l'esistenza di una regione da cui i segnali fisici non possono uscire, ossia causalmente sconnessa rispetto al resto dello spazio-tempo.

In base alle sue proprietà causali, un buco nero si comporta come se emettesse uno spettro (in prima approssimazione) di corpo nero, di temperatura fissata e indipendente dal campo a cui la radiazione emessa è associata. Nel caso in cui si intenda compiere una descrizione statistica delle sue caratteristiche termodinamiche, ci si deve perciò aspettare che la sua entropia sia costituita da almeno due contributi. Il primo considererà i gradi di libertà propri della gravitazione, ossia, rimanendo nell'ambito della relatività classica, sarà di natura geometrica; il secondo risulterà legato ai gradi di libertà dei campi presenti in natura, di cui un buco nero emette radiazione e mediante i quali scambia energia con l'ambiente. L'intento di questa trattazione è analizzare la Termodinamica dei buchi neri e riprodurre una parziale Meccanica Statistica, alla luce di queste considerazioni.

Si manterrà il sistema delle unità di misura naturali  $c = G = \hbar = k_B = 1$ , salvo i casi in cui sia necessaria una scrittura esplicita al fine di una maggiore chiarezza della fisica in esame (per esempio, si riporterà esplicitamente il coefficiente  $\hbar^3$  compiendo calcoli di volume su uno spazio delle fasi). Infine, con il simbolo  $\sim$  si intenderà un'uguaglianza a meno di un fattore numerico di ordine pari all'unità.

# Capitolo 1

## La definizione di buco nero

### 1.1 Le equazioni di Einstein

Le equazioni di campo di Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

hanno lo scopo di legare la geometria dello spazio tempo descritta dal tensore metrico  $g_{\mu\nu}$  con la distribuzione di massa ed energia indicata dal tensore di energia-impulso  $T_{\mu\nu}$ . Queste equazioni possono essere ricavate in diversi modi, sia cercando una generalizzazione relativistica consistente della gravitazione newtoniana (approccio, questo, seguito da Einstein), sia derivandole da un principio variazionale (secondo la strada seguita da Hilbert) trattando lo scalare di Ricci come la lagrangiana  $L_G$  del campo gravitazionale. Seguendo questa strada, la lagrangiana totale risulta la somma di  $L_G$  con la lagrangiana associata alla materia descritta da  $T_{\mu\nu}$ ; richiedendo allora che l'integrale di azione corrispondente sia stazionario, si trovano le equazioni di Einstein.

È tuttavia necessario analizzare il significato di una soluzione di queste equazioni. Si ricordi innanzitutto che il tensore di Ricci-Curbastro  $R_{\mu\nu}$  e lo scalare di curvatura intrinseca risultano dalla contrazione del tensore di Riemann  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ , e dunque sono a loro volta funzioni di derivate seconde del tensore metrico. Considerando la simmetria di  $g_{\mu\nu}$ , le (1.1) corrispondono a dieci equazioni differenziali del secondo ordine, nelle dieci componenti indipendenti del tensore metrico. Si potrebbe dunque pensare che il tensore metrico sia completamente determinato, data una distribuzione di materia  $T_{\mu\nu}$  e appropriate condizioni al contorno. In realtà, le sue componenti sono espresse in uno specifico set di coordinate, per cui dipendono dalla scelta della carta. Ci si aspetta, però, che il contenuto fisico della soluzione delle equazioni di Einstein sia indipendente dalla scelta delle coordinate. In questo senso, una soluzione delle (1.1) deve essere vista come una classe di equivalenza costituita da tutte le metriche 4-dimensionali legate da

un cambio di coordinate. Proprio per questo motivo, si usa dire che la vera incognita delle equazioni di Einstein sia lo spazio-tempo, e non semplicemente  $g_{\mu\nu}$ .

Secondo questa logica, dunque, ci si aspetta che siano presenti quattro gradi di libertà nelle componenti della metrica, uno per ogni coordinata. Effettivamente, è utile ricordare che all'identità di Bianchi

$$\nabla_\nu \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \right) = 0 \quad (1.2)$$

corrispondono quattro relazioni differenziali tra le dieci equazioni di campo, delle quali, perciò, ne restano solamente sei indipendenti a fissare le componenti del tensore metrico.

Si riporta, infine, una veste alternativa delle equazioni di campo, spesso più maneggevole. Se si considera infatti la traccia della (1.1), lo scalare di Ricci risulta

$$R = -8\pi T \quad (1.3)$$

dove si è indicata la traccia del tensore energia-impulso come  $T := T^\mu{}_\mu$ ; si giunge facilmente così alla forma

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (1.4)$$

## 1.2 Lo spazio-tempo di Schwarzschild

Un'applicazione particolarmente importante della Relatività Generale è legata allo studio della geometria dello spazio-tempo  $\mathcal{M}$  all'esterno di una sorgente statica e a simmetria sferica [7, 29].

Quest'ultima ipotesi garantisce l'esistenza di tre vettori di Killing  $\partial\theta_i$  riconducibili alle rotazioni intorno ai tre assi coordinati usuali. È noto che queste formino un'algebra di Lie, e dunque siano generatrici di una fogliazione di  $\mathbb{R}^3$  in sfere, che è quindi possibile descrivere con le coordinate sferiche standard  $(r, \theta, \varphi)$ . La condizione sulla staticità della sorgente si propaga su una richiesta di staticità del campo, da cui deriva perciò l'esistenza di un vettore di Killing  $\vec{e}_t := \partial_t$  con coordinata associata  $t$ . In analogia con la coordinata temporale nello spazio di Minkowski, è possibile assumere che  $\vec{e}_t$  sia ortogonale ai vettori  $\partial\theta_i$  di rotazione spaziale, in modo da rendere valide le coordinate sferiche descritte in precedenza su foglie di  $\mathcal{M}$  a  $t$  costante.

Con queste scelte, la metrica risulterà diagonale, e in particolare si può mostrare che è esprimibile nella forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + R(r)^2 d\Omega^2 \quad (1.5)$$

con  $r$  coordinata radiale generica e  $f$ ,  $h$  e  $R$  funzioni unicamente di  $r$ . Si può semplificare ulteriormente questa espressione scegliendo una coordinata radiale  $r'$  in modo che  $r' := R(r)$ ; in questo caso la metrica si riduce a

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (1.6)$$

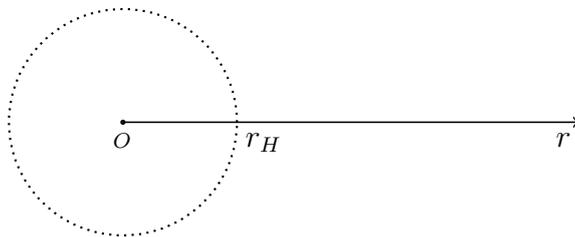


Figura 1.1: Si riporta lo schema per la coordinata radiale  $r$  di Schwarzschild.

omettendo per semplicità l'apice a  $r'$  e indicando con  $d\Omega^2$  la metrica della sfera unitaria. Queste coordinate  $(t, r, \theta, \varphi)$  sono note come *coordinate di Schwarzschild*, dove  $r$  è chiamato *raggio areale* (vedi Figura 1.1). Con questa scelta della funzione  $R(r)$ , infatti, l'area di una sfera di coordinata radiale  $r$  è data proprio da  $4\pi r^2$ ; è necessario sottolineare quindi che  $r$  non costituisce la distanza propria dall'origine delle coordinate  $r = 0$ .

Notiamo ora che le ipotesi di simmetria implicano una considerevole semplificazione del problema: al posto di dieci componenti del tensore metrico, l'equazione (1.6) ha come incognite solo le due funzioni scalari  $f(r)$  e  $h(r)$ . Si tratta, perciò, di sostituire questa metrica nelle equazioni di Einstein; siamo tuttavia interessati al campo esterno alla sorgente, dunque si devono considerare le equazioni di campo nel vuoto  $R_{\mu\nu} = 0$ , da cui si ottiene

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{C}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{C}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (1.7)$$

con  $C$  costante di integrazione. Considerando infine il limite di campo debole, richiedendo cioè che il potenziale newtoniano sia  $\phi = -M/r$ , si trova la *metrica di Schwarzschild*, che in forma esplicita figura:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2) \quad (1.8)$$

La prima proprietà notevole della metrica ottenuta è che risulta *asintoticamente piatta*, cioè ritorna alla metrica di Minkowski per  $r \rightarrow \infty$ ; è poi interessante il fatto che i coefficienti della (1.8) siano singolari per  $r = 0$  e per  $r = r_H$ , con  $r_H := 2M$  detto *raggio di Schwarzschild*. Notiamo che per oggetti astrofisici convenzionali, come stelle e pianeti, di solito  $r_H$  è molto minore del raggio reale dell'oggetto stesso, per cui, essendo quella di Schwarzschild una soluzione nel vuoto, essa non è valida per  $r$  interni all'oggetto, quindi in questi casi non è necessario preoccuparsi delle singolarità che presenta la metrica. Se d'altra parte, come nella nostra situazione, si tratta la soluzione di Schwarzschild corrispondente a una particella puntiforme, è opportuno considerare la natura di entrambe queste singolarità.

A questo proposito, esaminiamo il comportamento di un corpo  $A$  di massa  $m$  non nulla in caduta libera da un punto con  $r > r_H$ ; è noto che la sua orbita risulterà una

geodetica, per cui, indicando con  $\tau$  il suo tempo proprio e con  $u$  la 4-velocità, la sua traiettoria estremizzerà l'azione

$$S = m \int_0^\tau ds = m \int_0^\tau \sqrt{-g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} d\tau' \quad (1.9)$$

È evidente quindi che, in questo quadro di lavoro, basta l'energia cinetica  $T$  a generare le equazioni di Eulero-Lagrange; in particolare, nella metrica di Schwarzschild si ottiene

$$2T := -g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \left(1 - \frac{r_H}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{r_H}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \left(\sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2\right) \quad (1.10)$$

dove le derivate sono compiute rispetto al tempo proprio  $\tau$ . Ricordando la presenza del vettore di Killing  $\vec{e}_t$ , si trova l'equazione per l'energia

$$E = \frac{m}{2} \frac{\partial T}{\partial \dot{t}} = m \left(1 - \frac{r_H}{r}\right) \dot{t} \quad (1.11)$$

da cui è possibile ricavare la relazione tra tempo proprio  $\tau$  di una particella in caduta libera e la coordinata  $t$ , che, come visto, coincide con la coordinata temporale minkowskiana per un osservatore  $O$  posto a  $r \rightarrow \infty$ :

$$dt = \frac{E}{m} \frac{d\tau}{1 - \frac{r_H}{r}} \quad (1.12)$$

Otteniamo quindi che in generale l'osservatore all'infinito percepisce dilatato il tempo proprio  $\tau$  di  $A$  al di fuori del raggio di Schwarzschild, e notiamo che  $dt$  diverge per  $r \rightarrow r_H$ , perciò secondo  $O$  il corpo impiega un tempo infinito per raggiungere  $r_H$ .

Per semplicità, al fine di analizzare più in dettaglio la dinamica della particella in caduta libera, può essere utile restringersi al caso delle geodetiche radiali. Assumendo dunque  $\theta = \frac{\pi}{2}$  e  $\dot{\varphi} = 0$  e sfruttando la relazione di *mass-shell*  $u^\mu u_\mu = -1$ , dall'equazione (1.10) si ricava

$$2T = \left(1 - \frac{r_H}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{r_H}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 \equiv 1 \quad (1.13)$$

Ricordando infine l'uguaglianza (1.11), si trova l'equazione per  $\dot{r}(r)$ :

$$\dot{r}^2 = \left(1 - \frac{r_H}{r}\right) + \frac{E^2}{m^2} \quad (1.14)$$

Ciò mostra che la dinamica di  $A$  non presenta alcuna discontinuità o divergenza per  $r \rightarrow r_H$ , cioè in sintesi la particella in caduta libera non si accorge di oltrepassare  $r_H$ .

Effettivamente, a supporto del fatto che la singolarità per  $r = r_H$  non è fisica si può anche compiere un calcolo esplicito nella metrica di Schwarzschild delle componenti del tensore di Riemann, che intuitivamente indica la natura della curvatura della varietà, e

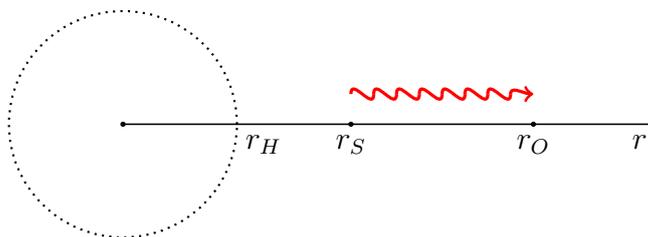


Figura 1.2: È mostrato il redshift di un segnale emesso dalla posizione radiale  $r_S$  e ricevuto in  $r_O$ , secondo l'equazione (1.18).

si giunge in questo modo a solo sei componenti non nulle (data l'alta simmetria dello spazio-tempo considerato), tutte nella forma

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} \sim \frac{r_H}{r^3} \quad (1.15)$$

Perciò nessuna di esse presenta singolarità per  $r = r_H$ , mentre sono tutte singolari per  $r = 0$ : questo permette di affermare che il campo gravitazionale è regolare nel primo caso e non nel secondo, che è infatti l'unica singolarità fisica della soluzione considerata. Per  $r = r_H$ , dunque, è la carta di Schwarzschild  $(t, r, \theta, \varphi)$  ad entrare in difficoltà; possono tuttavia essere introdotti numerosi altri set di coordinate lisce anche in corrispondenza di  $r_H$ .

Si può trovare un altro aspetto rilevante legato al ruolo di  $r_H$  nella metrica di Schwarzschild: per  $r < r_H$ , si nota che le coordinate  $r$  e  $t$  si scambiano di ruolo, in quanto  $r$  diventa una coordinata di tipo tempo ( $g_{11} < 0$ ), mentre  $t$  diventa di tipo spazio ( $g_{00} > 0$ ). Dal punto di vista fisico, l'avanzare del tempo diventa così equivalente a una diminuzione della coordinata areale  $r$ , e possiamo dire che un corpo procede verso valori minori di  $r$  per la stessa ragione per cui il tempo scorre in avanti; in particolare, nessuna forza applicata al corpo potrà invertire la sua traiettoria o impedire che raggiunga la singolarità  $r = 0$ , dove, insieme alle componenti del tensore di Riemann, le forze mareali divergono.

È utile ricordare, infine, che sfruttando la presenza del vettore di Killing  $\vec{e}_t$  si può calcolare esplicitamente il redshift che due osservatori *statici*  $O$  e  $S$ , posti a coordinate radiali distinte  $r_O$  e  $r_S$  maggiori di  $r_H$ , percepiscono sull'energia di un segnale (vedi Figura 1.2). È facile dimostrare che il rapporto tra le energie che misurano vale

$$\frac{E_O}{E_S} = \frac{\sqrt{|\xi^\mu(S) \xi_\mu(S)|}}{\sqrt{|\xi^\nu(O) \xi_\nu(O)|}} \quad (1.16)$$

dove  $\xi^\mu(S)$  indica le componenti del vettore  $\vec{e}_t$  valutate in  $r_S$ , e in modo analogo  $\xi^\mu(O)$  in  $r_O$ . Ricordando allora l'espressione (1.8) della metrica di Schwarzschild, dalla definizione

di  $\vec{e}_t$  risulta

$$\xi^\mu \xi_\mu = -1 + \frac{r_H}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{E_O}{E_S} = \sqrt{\frac{1 - \frac{r_H}{r_S}}{1 - \frac{r_H}{r_O}}} \quad (1.17)$$

Perciò, se l'osservatore  $O$  è a una coordinata radiale maggiore di  $S$  ( $r_O > r_S > r_H$ ), allora  $O$  misurerà un'energia del segnale minore di quella che stima  $S$ ; considerando il caso limite per cui  $O$  si trova a  $r_O \gg r_H$ , vale che

$$E_O \approx E_S \sqrt{1 - \frac{r_H}{r_S}} \quad (1.18)$$

Si troverà inoltre una certa comodità nel definire il *fattore di redshift*  $z$  in modo che

$$\frac{E_O}{E_S} = \frac{1}{z + 1} \quad (1.19)$$

da cui segue

$$z = \frac{\sqrt{1 - \frac{r_H}{r_O}}}{\sqrt{1 - \frac{r_H}{r_S}}} - 1 \quad (1.20)$$

### 1.3 La struttura causale in Relatività Generale

Si ricordi il significato dell'equazione (1.12): un osservatore statico che si trova a  $r \gg r_H$  non vedrà mai la particella in caduta libera oltrepassare  $r_H$ . Possiamo affermare allora che non gli giungerà che in un tempo idealmente infinito qualsiasi segnale che la particella abbia trasmesso da un  $r \rightarrow r_H$ , e ci si aspetta perciò che non vedrà mai alcun segnale emesso dal corpo in caduta libera a un  $r < r_H$ . Si comprende come, in un qualche senso, la regione all'interno del raggio di Schwarzschild sia causalmente sconnessa da quella all'esterno; lo scopo della sezione presente è approfondire questo concetto.

Nella Relatività Speciale, la struttura causale dello spazio-tempo minkowskiano è sostanzialmente semplice: il cono di luce di uno specifico evento indica quali altri eventi possono essere raggiunti da esso mediante un segnale fisico. In Relatività Generale si tratta con varietà lorentziane generiche, e, data la piatezza locale di tutti gli spazio-tempi, ci si aspetta che localmente la struttura causale funzioni come nel caso precedente. Globalmente, però, la situazione può rendersi notevolmente diversa, perché c'è la possibilità sia di trovare una topologia non banale, sia di incorrere in singolarità fisiche, come quella presente per  $r = 0$  nella metrica di Schwarzschild.

Per un approccio più sistematico, introduciamo ora alcune nozioni proprie della geometria su una varietà lorentziana  $\mathcal{M}$ . Se possiamo introdurre su tutta  $\mathcal{M}$  un campo vettoriale  $\vec{Y}$  che indichi, secondo una qualche scelta, la direzione di avanzamento del tempo, allora nello spazio tangente associato a ogni punto di  $\mathcal{M}$  il tensore metrico  $g_{\mu\nu}$

induce naturalmente la separazione dei vettori di tipo tempo in due classi, grazie alla definizione della 1-forma  $g(\cdot, \vec{Y})$ . Dato un vettore  $\vec{X}$ , diremo infatti che esso è *diretto futuro* o *diretto passato* a seconda del segno dello scalare  $g_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu$ . È necessario sottolineare che scegliere un campo vettoriale  $\vec{Y}$  di tale natura equivale a definire in modo continuo in ogni punto una base di vettori  $\{\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n\}$  con la stessa direzione temporale su tutta  $\mathcal{M}$ ; se questo è possibile, la varietà si dice *temporalmente orientabile*, e la richiesta di tale proprietà si assumerà sempre sottintesa.

Si definisce quindi una *curva causale* una il cui vettore tangente in ogni suo punto è di tipo tempo o nullo, ed è causale diretta futura se il suo vettore tangente è anche diretto futuro. È ora possibile determinare una generalizzazione del cono di luce minkowskiano: chiamiamo il *futuro causale*  $J^+(P)$  di un evento  $P$  l'insieme di tutti gli eventi su  $\mathcal{M}$  che possono essere raggiunti partendo da  $P$  da una curva causale diretta futura, e in modo simile il *futuro cronologico*  $I^+(P)$  come il set di quelli raggiungibili da una curva diretta futura di tipo tempo. Ugualmente per il *passato causale* e *cronologico*.

Queste ultime nozioni permettono di definire un cosiddetto *set acronale*, cioè un sottoinsieme  $\mathcal{S}$  della varietà  $\mathcal{M}$  tale che, presi due eventi qualsiasi in  $\mathcal{S}$ , nessuno dei due è nel futuro cronologico dell'altro, ossia  $\mathcal{S}$  è di tipo spazio o nullo ovunque. Dato allora un insieme acronale, il suo *dominio di dipendenza futura*  $D^+(\mathcal{S})$  è specificato dagli eventi  $P$  di  $\mathcal{M}$  tali che ogni curva causale diretta passata che attraversa  $P$  interseca  $\mathcal{S}$ . In modo meno formale,  $D^+(\mathcal{S})$  è la regione di  $\mathcal{M}$  causalmente determinata dai punti di  $\mathcal{S}$ , e solo da quelli; la conoscenza degli eventi in  $\mathcal{S}$  è quindi sufficiente a prevedere con assoluta certezza gli eventi in  $D^+(\mathcal{S})$ , dato che nessun segnale fisico può raggiungerli dall'esterno di  $\mathcal{S}$ . Possiamo poi definire in modo analogo il dominio di dipendenza passata  $D^-(\mathcal{S})$ ; l'unione del dominio di dipendenza passata e futura viene chiamato *dominio di dipendenza completo*  $D(\mathcal{S})$ , e la sua frontiera viene detta *orizzonte di Cauchy*.

Un'importante applicazione di questi concetti è la nozione di *superficie di Cauchy*, che consiste in un insieme acronale  $\Sigma$  tale che il suo dominio completo di dipendenza  $D(\Sigma)$  sia l'intera varietà  $\mathcal{S}$ , o, in altre parole, tale che il suo orizzonte di Cauchy coincida con l'insieme vuoto. Dal punto di vista fisico della Relatività Generale, è chiaro che, data una superficie di Cauchy, risulta possibile prevedere l'intera storia dello spazio-tempo, sia nel futuro che nel passato. Tuttavia, se esiste una superficie di Cauchy, essa dovrà essere necessariamente non unica, in quanto potremmo deformarla lievemente e ottenere una nuova superficie di Cauchy: intuitivamente, questo può anche essere considerato come un sintomo del fatto che in contesto relativistico non è presente una nozione assoluta di simultaneità.

Si noti che, per esempio, nello spazio-tempo minkowskiano una qualsiasi superficie a  $t$  costante risulta di Cauchy, ma non tutti gli spazio-tempi posseggono una superficie di Cauchy; nel caso in cui essa esista, si dice che lo spazio è *globalmente iperbolico*.

## 1.4 Orizzonti

Riprendendo la discussione sul significato e sul ruolo del raggio di Schwarzschild, si rende necessario dare una definizione precisa di buco nero; si intende dunque formalizzare la natura del confine che separa una regione da cui segnali fisici possono raggiungere l'infinito spaziale da un'altra regione da cui non possono [1, 9].

Si consideri la cosiddetta *mappa conforme* di uno spazio-tempo fisico  $\mathcal{M}$  in uno non fisico  $\widetilde{\mathcal{M}}$  tale per cui

$$\widetilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} \quad (1.21)$$

dove il *fattore conforme*  $\Omega$  rappresenta una funzione scalare regolare che si annulla sulla frontiera  $\partial Q$  di una qualche regione limitata di  $\widetilde{\mathcal{M}}$ . Secondo il quadro sviluppato da Penrose, il procedimento per costruire tale mappa consiste in genere nel cambiamento delle coordinate in cui è espressa  $g_{\mu\nu}$ , in modo da ridurre la varietà fisica a un compatto  $Q$ , la cui frontiera può essere pensata corrispondente a eventi che sono infinitamente distanti (secondo la metrica  $g_{\mu\nu}$ ) in  $\mathcal{M}$ .  $\partial Q$  è allora detta *infinità conforme*, e la sua definizione ha lo scopo principale di rendere al finito il concetto di confine dello spazio-tempo, a cui solitamente ci si può riferire solo attraverso un'operazione di limite. Si può poi mostrare che la struttura di  $\partial Q$  è determinata unicamente dallo spazio-tempo fisico, mentre quella del resto della varietà conforme  $\widetilde{\mathcal{M}}$  non è fissata e dipende dalla scelta del fattore conforme  $\Omega$ .

La mappa da  $\mathcal{M}$  a  $\widetilde{\mathcal{M}}$  è costruita perciò in modo che abbia una serie di proprietà. Per prima cosa, è rassicurante notare che essa non cambi in alcun modo le caratteristiche causali di una varietà lorentziana descritte nella Sezione 1.3: dall'equazione (1.21) segue che il segno della norma di un vettore è invariante per trasformazioni conformi, dunque non si hanno nuovi problemi di inversione temporale e non-orientabilità, nè si riscontrano cambiamenti nei passati o nei futuri causali, ossia la struttura dei coni di luce è conservata. È interessante vedere come anche gli angoli in  $\widetilde{\mathcal{M}}$ , definiti da rapporti tra norme, siano uguali a quelli misurati in  $\mathcal{M}$ . Per quanto riguarda l'infinità conforme, risulta che tutte le curve spaziali infinitamente estese in  $\mathcal{M}$  intersecano  $\partial Q$  in un unico punto  $i^0$  di  $\widetilde{\mathcal{M}}$ , noto come *infinità spaziale*. In generale, in un intorno di  $i^0$  è presente inoltre una regione del bordo corrispondente alle curve nulle che sono estese infinitamente nel futuro, insieme a un'altra regione relativa a quelle estese infinitamente nel passato; queste sono chiamate *infinità nulla futura*  $\mathcal{I}^+$  e *passata*  $\mathcal{I}^-$ .

Avanzando, infine, nel futuro di spazio-tempi che sono topologicamente semplici, tutte le traiettorie di tipo tempo infinitamente estese si incontrano necessariamente nel punto  $i^+$ , detto di *infinità futura*, e in modo simile in  $i^-$  procedendo nel passato. Un esempio di queste strutture è presente nel diagramma conforme dello spazio-tempo di Minkowski, riportato in Figura 1.3.

Siamo ora in grado di affrontare in modo più formale il concetto di buco nero.

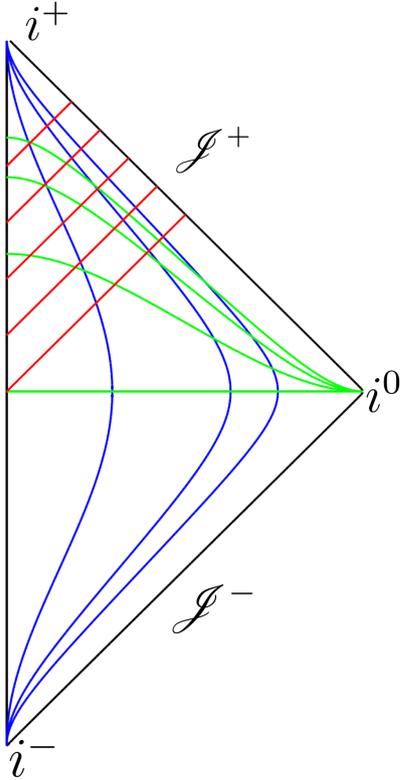


Figura 1.3: È mostrata la varietà conforme del cosiddetto *cilindro di Einstein* per lo spazio-tempo minkowskiano; le coordinate angolari sono state eliminate, in modo che ogni punto sul grafico rappresenti una sfera nella varietà fisica. Le traiettorie in verde sono quelle di tipo spazio infinitamente estese, mentre in blu sono riportate quelle di tipo tempo. I segmenti in rosso costituiscono le curve di tipo luce dirette future, e, come tali, terminano su  $\mathcal{I}^+$ ; si noti che, se si considera una particella uniformemente accelerata in grado di raggiungere l'infinito spaziale, la sua traiettoria nel diagramma conforme avrebbe proprio uno di questi segmenti come asintoto [5].

**Definizione.** Si dice che uno spazio-tempo globalmente iperbolico  $\mathcal{M}$  contiene un buco nero se il dominio di dipendenza passato dell'infinità futura nulla  $D^-(\mathcal{I}^+)$  non è l'intero  $\mathcal{M}$ . In questo caso, la regione del buco nero  $\mathcal{B}$  è definita come

$$\mathcal{B} := \mathcal{M} - D^-(\mathcal{I}^+) \quad (1.22)$$

La frontiera  $\mathcal{H} := \partial\mathcal{B}$  è chiamata *orizzonte degli eventi*.

In sintesi, perciò, se non tutte le curve causali nulle che partono da un punto qualsiasi dello spazio-tempo arrivano ad intersecare  $\mathcal{I}^+$ , diremo che è presente un buco nero, definito come la regione da cui le curve nulle (e dunque anche le causali in genere) non possono fuggire verso l'infinito. È facile tuttavia notare quanto sia problematica la definizione di orizzonte degli eventi: per determinare dove si trovi, sarebbe necessario conoscere l'intera storia di  $\mathcal{M}$ , al fine di decidere quali traiettorie nulle giungano all'infinito e quali no. È dunque la non-località a rendere la nozione di orizzonte degli eventi difficilmente sfruttabile.

Si consideri una regione chiusa di una ipersuperficie tridimensionale  $\Sigma$ , e si indichi con  $S$  la sua frontiera bidimensionale. Siano  $s^\mu$  le componenti del vettore space-like

di norma unitaria ortogonale a  $S$  in  $\Sigma$ , e  $n^\mu$  quello del vettore unitario di tipo tempo ortogonale a  $\Sigma$ . Definiamo allora i vettori

$$l^\mu := \frac{1}{\sqrt{2}}(n^\mu + s^\mu) \quad j^\mu := \frac{1}{\sqrt{2}}(n^\mu - s^\mu) \quad (1.23)$$

È facile verificare che siano entrambi di tipo nullo, e questo perché in effetti corrispondono ai campi vettoriali tangenti alla congruenza di geodetiche rispettivamente uscenti ed entranti in  $S$ .

Ricordiamo la nozione di operatore di proiezione su una ipersuperficie ortogonale a un vettore unitario  $\vec{x}$

$$P_\nu^\mu := \delta_\nu^\mu \pm x^\mu x_\nu \quad (1.24)$$

dove il segno è positivo nel caso in cui  $\vec{x}$  sia di tipo tempo, viceversa è negativo se è di tipo spazio; con una verifica diretta, si possono provare le proprietà caratteristiche dei proiettori, come la disuguaglianza di Bessel o l'idempotenza. Risulta allora che il proiettore sulla superficie  $S$  precedentemente considerata è nella forma

$$P_\nu^\mu := \delta_\nu^\mu + n^\mu n_\nu - s^\mu s_\nu \quad (1.25)$$

in modo che il secondo termine di destra proietti un vettore arbitrario su  $\Sigma$ , e che il terzo ne renda, una volta su  $\Sigma$ , la proiezione su  $S$ . È così possibile definire il tensore  $\kappa_{\mu\nu}$  (detto *di curvatura estrinseca*, in altri contesti) come la proiezione sulla superficie bidimensionale  $S$  della derivata covariante del vettore  $l^\mu$ , tangente alla congruenza  $\mathcal{T}$  di geodetiche nulle uscenti da  $S$ :

$$\kappa_{\mu\nu} := P_\mu^\alpha P_\nu^\beta \nabla_\alpha l_\beta \quad (1.26)$$

Il senso di questo tensore è intuitivamente chiaro, è una misura su  $S$  della variazione delle geodetiche uscenti. Definiamo, per questo, lo scalare *espansione*  $\theta$  di  $\mathcal{T}$  come la traccia di  $\kappa_{\mu\nu}$

$$\theta := \kappa^\mu_\mu \quad (1.27)$$

L'espansione è una delle tre deformazioni utilizzate per descrivere la dinamica di una congruenza di geodetiche, ed in particolare indica l'aumento nella separazione tra le geodetiche di  $\mathcal{T}$  al passaggio attraverso  $S$ .

Diremo allora che la superficie è *intrappolata* se l'espansione è negativa ovunque su  $S$ , mentre se  $\theta = 0$  diremo che la superficie è *marginamente intrappolata*. È chiara, a questo punto, la rilevanza di questi concetti nella trattazione presente: dal punto di vista fisico, se, per esempio, un fascio di raggi di luce è fatto passare attraverso una superficie intrappolata, allora il volume che racchiudono risulterà minore nell'immediato futuro rispetto al volume iniziale, e questo implica che la loro distanza reciproca sta diminuendo. Nel caso dello spazio-tempo di Schwarzschild, si può effettivamente calcolare che

$$\theta_H \leq 0 \quad \iff \quad \left(1 - \frac{r_H}{r}\right) \leq 0 \quad \iff \quad 0 < r \leq r_H \quad (1.28)$$

per cui si può concludere che ogni sfera con raggio  $r < r_H$  è una superficie intrappolante, e che quella con  $r = r_H$  lo è marginalmente; in tal senso, congruenze di geodesiche uscenti da superfici di questo tipo tenderanno a chiudersi su se stesse e a ricadere verso la singolarità in  $r = 0$ .

Siamo in grado di indicare allora una nozione più locale di orizzonte: definiamo *orizzonte apparente* la frontiera di una regione composta da superfici intrappolate. Nel caso della soluzione di Schwarzschild o di altre topologie relativamente semplici, si caratterizza come la più esterna superficie marginalmente intrappolata; dalle condizioni (1.28), emerge che in Schwarzschild è presente un orizzonte apparente in coincidenza con la sfera di coordinata areale  $r = r_H$ . Notiamo che è definizione sostanzialmente cinematica, in quanto ricorre solamente al moto di particelle di tipo luce e alla valutazione delle loro traiettorie su una superficie al finito; è tuttavia questo fatto a rendere in generale dipendente dall'osservatore la nozione di orizzonte apparente, a differenza di quella di orizzonte degli eventi, caratterizzata unicamente dalla struttura globale dello spazio-tempo.

Se, però, per  $r < r_H$  si hanno sfere intrappolate, le geodetiche nulle uscenti da questa regione necessariamente ritorneranno verso la singolarità, non giungendo all'infinità nulla futura  $\mathcal{I}^+$ . Ricordando allora la definizione (1.22), pare lecito affermare che nella regione in questione sia presente un buco nero, con orizzonte degli eventi coincidente con la sfera di coordinata areale  $r_H$ , che tuttavia, per quanto detto, è anche un orizzonte apparente. Effettivamente, si può dimostrare che in uno spazio globalmente iperbolico la presenza di un orizzonte apparente implica l'esistenza di un orizzonte degli eventi che è esterno o coincide con l'orizzonte apparente; in particolare, in uno spazio-tempo statico come quello di Schwarzschild (si ricordi l'esistenza del vettore di Killing  $\partial_t$ ), questi due orizzonti coincidono.

## 1.5 Singolarità

È facile accorgersi che un qualsiasi spazio-tempo può essere considerato come una soluzione delle equazioni di Einstein; a partire da una qualsiasi metrica, infatti, è possibile calcolare il tensore di Einstein  $G_{\mu\nu}$  e definire il corrispondente tensore di energia-impulso come  $T_{\mu\nu} := G_{\mu\nu}/8\pi$ . In genere, ovviamente,  $T_{\mu\nu}$  risulterà in una forma di materia priva di senso fisico, e proprio per evitare questo sono presenti criteri, le *condizioni energetiche*, che in ambito classico rispecchiano le proprietà basilari delle forme di materia conosciute<sup>1</sup>, e che per questo vengono prese come presupposti per stabilire quali forme di materia siano ragionevoli [19].

Una prima richiesta è senza dubbio che la materia non si muova con velocità superiore a quella della luce; se pensiamo allora a un osservatore con 4-velocità  $u^\alpha$ , egli misurerà della materia che incontra una corrente di energia-momento  $j^\alpha = -T^\alpha_\beta u^\beta$ , e ci

---

<sup>1</sup>È necessario tuttavia sottolineare che le condizioni energetiche vengono spesso violate in presenza di campi quantistici, anche nel caso di un semplice campo scalare.

aspettiamo che questa sia un vettore causale quanto  $u^\alpha$ . Ciò motiva la presenza di una condizione più generale, valida per qualsiasi osservatore:

**Condizione di energia dominante:**  $-T^\alpha_\beta V^\beta$  è un vettore causale diretto futuro, per ogni vettore causale  $V^\beta$ .

È poi possibile richiedere, in modo meno restrittivo, semplicemente che la densità di energia misurata dagli osservatori sia non negativa:

**Condizione di energia debole:**  $T_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta \geq 0$  per ogni  $V^\alpha$  causale.

Riportiamo, infine, una condizione energetica più dibattuta, che richiede la positività della quantità definita dalla densità di energia sommata a ciò che, per un fluido perfetto, sono le pressioni principali:

**Condizione di energia forte:**  $(T_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T^\mu_\mu) V^\alpha V^\beta \geq 0$  per ogni vettore  $V^\alpha$  causale.

È facile vedere come le equazioni di campo nella forma (1.4) implicino che quest'ultima definizione sia equivalente al richiedere che  $R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \geq 0$ , ossia che la forza gravitazionale sia attrattiva. Nonostante la nomenclatura, per motivi storici, possa essere fuorviante, la condizione di energia forte non implica le altre condizioni riportate<sup>2</sup>. In realtà, il fatto che l'universo sia in espansione pare evidentemente in contraddizione con questa condizione; essa risulta tuttavia utile nella trattazione delle singolarità [10].

Effettivamente, si può intravedere la presenza di singolarità già in gravitazione newtoniana. Si pensi, per esempio, al collasso di una sfera di bosoni non interagenti: con questi presupposti, nel centro della sfera si giungerebbe indubbiamente a una condizione di densità e forze mareali idealmente infinite. È necessario notare, tuttavia, che nel quadro newtoniano la condizione di singolarità prevede ipotesi fortemente *ad hoc*, in quanto non si ottiene nessuna singolarità se nell'esempio precedente si includono condizioni più realistiche, come un'interazione interna al gas o anche solo uno stato iniziale di simmetria sferica non ideale.

D'altra parte, in Relatività Generale la condizione di singolarità emerge sempre in un sistema con caratteristiche in larga misura generiche. Nello studio della soluzione di Schwarzschild, è stata trovata un'unica singolarità fisica, in  $r = 0$ . Si è quindi notata la divergenza delle componenti non nulle del tensore di Riemann in quel punto, da cui seguono la curvatura infinita dello spazio tempo e la divergenza delle forze mareali all'avvicinarsi a  $r = 0$ , in accordo con il senso newtoniano. Dal punto di vista geometrico, è però possibile una generalizzazione di questo concetto, in analogia con il procedimento

---

<sup>2</sup>Si chiama condizione di energia *forte* semplicemente perchè lega due condizioni energetiche: quella debole e quella cosiddetta *di traccia* [3], impiegata spesso nelle trattazioni degli anni '60 ma ora abbandonata, che richiede la non negatività della traccia  $T^\mu_\mu$ .

seguito per stabilire la presenza o meno di una singolarità fisica in corrispondenza del raggio di Schwarzschild nella Sezione 1.2. Si consideri uno spazio-tempo con curvatura infinita in un punto; se si taglia la singolarità insieme a un suo intorno, si ottiene ovviamente una varietà con curvatura finita in ogni punto. Notiamo, tuttavia, che in uno spazio-tempo del genere le traiettorie dei corpi che incontravano la singolarità sono ora troncate sul bordo della regione tagliata, e questo fatto non ne determina una dinamica regolare.

Per questo motivo, si indica con il termine *singolarità* non solo un punto di divergenza della curvatura della varietà in esame, ma anche uno in cui termina una curva causale. Si intende che tale punto si debba trovare al finito (ossia corrisponda a un valore finito del parametro affine della curva in esame), altrimenti, per esempio, anche la definizione di infinità futura  $i^+$  della geometria conforme ricadrebbe nell'accezione di singolarità, nonostante non si incorra in alcuna irregolarità della dinamica in quel punto.

Siamo ora in grado di investigare quale sia il collegamento tra le due maggiori peculiarità riscontrate nello spazio-tempo di Schwarzschild e nella fenomenologia legata al concetto di buco nero: l'orizzonte e la singolarità.

**Teorema** (Penrose, 1965). *Sia  $\mathcal{M}$  uno spazio-tempo in cui è soddisfatta la condizione di energia debole e in cui è presente almeno una superficie di Cauchy non compatta. Allora, se esiste una superficie intrappolata,  $\mathcal{M}$  non può essere completo rispetto alle geodetiche nulle.*

Notiamo che questo è equivalente ad affermare che esiste necessariamente almeno una curva di tipo luce che si interrompe ad un valore finito del suo parametro affine, e ciò coincide, secondo la trattazione precedente, con l'esistenza di una singolarità in  $\mathcal{M}$ . In altre parole, quindi, se durante l'evoluzione di uno spazio-tempo globalmente iperbolico che soddisfa la condizione di energia debole si sviluppa una superficie intrappolata, allora il collasso gravitazionale verso la condizione di singolarità è inevitabile.

In soluzioni statiche come quella di Schwarzschild, si osserva che l'orizzonte apparente (definito come frontiera di una regione di superfici intrappolate) coincide con l'orizzonte degli eventi, ma, in realtà, non è detto che in condizioni più generali si formi un buco nero. La singolarità può allora essere *nuda*, cioè non protetta dalla presenza di un orizzonte degli eventi e visibile da osservatori distanti. Essa può così essere collegata causalmente al resto dello spazio-tempo, e ciò segna la rottura della predicibilità, perché, come noto, la divergenza delle componenti del tensore di Riemann porta le equazioni di Einstein a perdere di utilità in quella località. Dunque, la Relatività Generale non è in grado di prevedere il comportamento della singolarità.

È necessario sottolineare, perciò, che, postulando nel Teorema precedente l'esistenza di una superficie di Cauchy in  $\mathcal{M}$ , si ammette l'esistenza di un set acronale di cui lo spazio-tempo è dominio di dipendenza futura, ossia a partire dal quale l'intero futuro di  $\mathcal{M}$  è predicibile. La presenza di una singolarità nuda implica quindi che lo spazio-tempo in esame non sia globalmente iperbolico.

Effettivamente, il fatto che nei casi generalmente studiati non si sviluppino singolarità nude ha portato [17] alla *Congettura di censura cosmica (debole)*, che afferma che non può risultare una singolarità nuda da un'evoluzione di condizione iniziale regolare, con assunzioni fisicamente ragionevoli sul tensore di energia impulso  $T_{\nu}^{\mu}$ .

Esistono generalizzazioni del Teorema di Penrose riportato in precedenza; mostriamo qui un enunciato con funzione simile, ma applicabile in altre condizioni.

**Teorema** (Hawking e Penrose, 1970). *Uno spazio-tempo  $\mathcal{M}$  contiene necessariamente una singolarità se sono soddisfatte le seguenti condizioni:*

1. *in  $\mathcal{M}$  non esistono curve di tipo tempo chiuse;*
2. *è soddisfatta la condizione energetica forte;*
3. *in  $\mathcal{M}$  esiste almeno una superficie intrappolata.*

Notiamo che la seconda parte della prima condizione risulta una richiesta sulla causalità di  $\mathcal{M}$ , e, in particolare, che si possa distinguere con certezza il futuro cronologico di un evento dal suo passato cronologico. Si osservi che questo enunciato permette di garantire la presenza di una singolarità anche nel caso in cui le ipotesi di iperbolicità globale del Teorema di Penrose non vengano soddisfatte, sia questo dovuto alla presenza di una singolarità nuda o al trovarsi in un universo chiuso, per esempio. In entrambe queste situazioni, infatti, il Teorema di Penrose non sarebbe applicabile (nel primo caso, perché non esisterebbe alcuna superficie di Cauchy, mentre nel secondo perché, se esistesse, essa sarebbe necessariamente compatta).

# Capitolo 2

## La Meccanica dei buchi neri

### 2.1 La metrica di Kerr-Newman

Nel capitolo precedente, sono state illustrate le principali caratteristiche dello spazio-tempo generato da una sorgente statica a simmetria sferica; pensando alle situazioni rilevanti in astrofisica, tuttavia, è chiaro che solo idealmente si può raggiungere per tempi lunghi uno stato approssimabile a un livello di simmetria tanto alto quanto quello presentato dalla soluzione di Schwarzschild. Intendiamo perciò mostrare una sua generalizzazione, in cui si ammetta anche una carica elettrica e un momento angolare non nullo dello spazio-tempo, nella condizione di *elettro-vacuum*, ossia di vuoto a meno di campi elettromagnetici associati alla sorgente.

In questo caso, [29, 31] la metrica di un buco nero di Kerr-Newman nelle coordinate omonime legge:

$$ds^2 = - \left( \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\rho^2} dt d\phi + \left( \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \quad (2.1)$$

dove

$$\Delta := r^2 + a^2 + Q^2 - 2Mr, \quad \rho^2 := r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (2.2)$$

con  $Q$ ,  $a$  e  $M$  parametri reali. Notiamo, innanzitutto, che risulta una metrica asintoticamente piatta, in quanto  $\Delta$  e  $\rho^2$  vanno entrambi come  $r^2$ , e dunque è facile vedere che la (2.1) tende alla metrica di Minkowski per  $r \rightarrow \infty$ .

Si ricordi, inoltre, che una soluzione asintoticamente piatta delle equazioni di Einstein è detta *stazionaria* se esiste un gruppo a un parametro di isometrie generate da un campo vettoriale di Killing  $\vec{e}_t$  che all'infinito è di tipo tempo con norma unitaria. In particolare, si dice che una soluzione stazionaria è *statica* nel caso in cui esista almeno una 3-ipersuperficie di tipo spazio ortogonale, in ogni punto, al campo di Killing  $\vec{e}_t$ .

Analogamente, una metrica gode della proprietà di *assialsimmetria* nel caso in cui esista un gruppo a un parametro di isometrie che all'infinito corrispondono alle rotazioni.

Notiamo che i coefficienti della metrica di Kerr-Newman sono indipendenti dal tempo, nonché dall'angolo azimutale  $\phi$ , per cui la soluzione risulta stazionaria e assialsimmetrica, ed esistono i campi di Killing  $\vec{e}_t$  e  $\vec{e}_\phi$ ; si può tuttavia mostrare che non è statica, come intuitivamente si comprende dal fatto che si intende studiare una sorgente rotante.

A questo punto, si rende necessario fare una precisazione [2]. È noto che in Relatività Generale il tensore di energia-impulso soddisfa una legge di conservazione nella forma  $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ , che coincide con una conservazione locale percepita da un osservatore in caduta libera. In contrasto con la Relatività Ristretta, tuttavia, questa legge di conservazione locale non porta a una conservatività globale, se integrata su un volume finito. La ragione è ovviamente che  $T^{\mu\nu}$  tiene conto solamente dell'energia della materia (intesa in senso lato, come al solito), senza includere i contributi del campo gravitazionale, a cui, tra l'altro, non è neanche possibile associare localmente una densità di energia, in generale.

Nonostante queste difficoltà e il fatto che sia sempre problematico definire quantità non locali in Relatività Generale, si possono specificare le nozioni di *energia totale*, *carica elettromagnetica* e *momento angolare totale* associati alla materia in uno spaziotempo asintoticamente piatto, considerando l'analogia con la condizione di campo gravitazionale debole. In quest'ottica, i parametri  $Q$ ,  $a$  e  $M$ , che caratterizzano la famiglia di metriche di Kerr-Newman, risultano avere un'interpretazione fisica ben definita. Come citato, infatti, la metrica (2.1) per  $Q \neq 0$  è una soluzione non delle equazioni di Einstein nel vuoto, ma di quelle di Einstein-Maxwell, che prevedono campi elettromagnetici. Si può allora vedere come il 4-potenziale di questa soluzione abbia componenti

$$A_\mu = -\frac{rQ}{\rho^2} (1, 0, 0, a \sin^2 \theta), \quad (2.3)$$

espressione che, considerando il caso di  $a = 0$ , si riduce a

$$A_\mu = -\frac{Q}{r} (1, 0, 0, 0) \quad (2.4)$$

Essendo lo spazio-tempo asintoticamente piatto, all'infinito deve valere necessariamente  $A^\mu = (\varphi, A^i)$ , dove con  $\varphi$  si indica il potenziale elettrostatico e con  $A^i$  le componenti del potenziale vettore magnetico. Questo implica  $A_0 = -\varphi$ , che, confrontata con la (2.4), porta all'identificazione  $\varphi = Q/r$ , cioè  $Q$  risulta la carica elettrica della sorgente, misurata da un osservatore lontano. Secondo questa stessa logica, è possibile vedere che  $M$  corrisponde alla massa totale dello spazio-tempo, mentre il momento angolare totale è dato da  $J = aM$ , per cui il parametro  $a$  costituisce il momento angolare per unità di massa. Queste conclusioni sono in accordo con il fatto che, per  $a = 0$  e  $Q = 0$ , la soluzione in esame ritorni a quella di Schwarzschild, dove la sorgente è statica ed elettricamente neutra.

Un aspetto interessante della metrica di Kerr-Newman è lo studio delle sue singolarità; notiamo, innanzitutto, che le componenti di (2.1) diventano singolari se  $\Delta = 0$  o  $\rho^2 = 0$ . Per quanto riguarda quest'ultimo caso, il calcolo delle componenti del tensore di Riemann mostra che le venti non nulle sono nella forma

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} \sim \frac{P(r)}{\rho^6} \quad (2.5)$$

dove con  $P(r)$  si indica un polinomio di grado non superiore al terzo. Effettivamente, è dunque presente una singolarità fisica per

$$\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0 \quad (2.6)$$

che implica  $\cos \theta = 0$  e  $r = 0$ , condizioni che sembrerebbero indicare la presenza di una singolarità puntiforme, che giace tuttavia solamente sul piano equatoriale. Se però ci riduciamo al caso di  $M = Q = 0$  e  $a \neq 0$ , risulta  $\Delta = r^2 + a^2$  e  $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ , da cui la metrica

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \Delta \sin^2 \theta d\phi^2 - + + +^2 \quad (2.7)$$

che è niente più che la metrica di Minkowski in un particolare set di coordinate sferoidali. È allora facile calcolare la lunghezza di una circonferenza sul piano equatoriale, con  $\theta = \pi/2$ :

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\Delta} d\phi = 2\pi\sqrt{r^2 + a^2} \quad (2.8)$$

La condizione  $r = 0$  corrisponde dunque a una circonferenza di raggio  $a$ , e non a un punto; ritornando al caso generico, si può affermare allora che  $\rho^2 = 0$  porta a una singolarità fisica sul piano equatoriale, a forma di anello.

D'altra parte, per  $\Delta = 0$  il tensore di curvatura è regolare, e perciò si ha solo una singolarità delle coordinate in

$$r^2 + a^2 + Q^2 - 2Mr = 0 \quad \implies \quad r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} \quad (2.9)$$

A questi due possibili valori  $r_+$  e  $r_-$  della coordinata radiale è concepibile che corrispondano due orizzonti, uno interno all'altro; per il caso di Schwarzschild  $a = 0$  e  $Q = 0$ ,  $r_+$  coincide con  $r_H = 2M$ , mentre  $r_-$  collassa a zero. La singolarità per  $r_+$  è effettivamente della stessa natura di  $r_H$  in Schwarzschild, per cui è possibile estendere la soluzione di Kerr-Newman con una trasformazione conforme, da cui, studiando l'infinità nulla futura  $\mathcal{I}^+$ , si ottiene che  $r_+$  è proprio l'orizzonte degli eventi esterno  $\mathcal{H}^+$  di questo spazio-tempo. Notiamo, a questo punto, che per  $M^2 < a^2 + Q^2$  non si ha alcun orizzonte, e dunque si è in presenza di una singolarità nuda; il caso di

$$M^2 = a^2 + Q^2 \quad (2.10)$$

viene spesso chiamato di buco nero *estremale*. È anche utile calcolare l'area dell'orizzonte degli eventi:

$$\begin{aligned} A_H &= \int_{r=r_+} \sqrt{g_{\theta\theta} g_{\phi\phi}} d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta (r^2 + a^2) \sin \theta \\ &= 4\pi(r^2 + a^2) = 4\pi \left( 2M^2 - Q^2 + 2M\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

che porta, come da aspettativa, a un'area dell'orizzonte degli eventi in Schwarzschild di  $16\pi M^2$ , pari all'area della sfera di raggio  $r_H$ .

È poi presente un altro aspetto interessante da considerare per questa soluzione. Si ricordi la presenza del campo vettoriale di Killing  $\vec{e}_t$ ; la sua norma sarà data da

$$\|\vec{e}_t\| = g_{tt} = \frac{a^2 \sin^2 \theta - \Delta}{\rho^2} = \frac{2Mr - r^2 - Q^2 - a^2 \cos^2 \theta}{\rho^2} \quad (2.12)$$

da cui è facile vedere come, per  $a \neq 0$ , esista una regione

$$r_+ < r < r^2 + Q^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2Mr \quad (2.13)$$

al di fuori dell'orizzonte degli eventi in cui la sua norma è negativa e dunque un osservatore non potrebbe rimanere statico, in quanto la sua traiettoria sarebbe di tipo spazio. Questa regione viene chiamata *ergosfera*, dal fatto che da qui sarebbe possibile estrarre energia rotazionale dal buco nero attraverso il noto *processo di Penrose*, e si può mostrare come effettivamente osservatori con coordinate  $r$  e  $\theta$  fissate ruotino intorno all'origine nello stesso senso in cui sta ruotando il buco nero, con velocità angolare

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} \equiv -\frac{g_{t\phi}}{g_{tt}} \xrightarrow{r \rightarrow r_+} \Omega_H := \frac{a}{r_+^2 + a^2} \quad (2.14)$$

e quest'ultima quantità può essere vista come la velocità angolare con cui ruota l'orizzonte degli eventi. Siamo allora in grado di definire il campo vettoriale di componenti

$$\xi^\alpha = (\vec{e}_t)^\alpha + \Omega_H (\vec{e}_\phi)^\alpha \quad (2.15)$$

ed è facilmente verificabile che esso sia di Killing; in particolare, si noti come esso sia di norma nulla per  $r = r_+$ .

## 2.2 Gravità superficiale e Legge Zero

Si può effettivamente approfondire la fenomenologia legata ai vettori di Killing generalizzando le osservazioni precedenti [6, 19]; consideriamo inizialmente una *ipersuperficie nulla*  $\mathcal{N}$ , ossia una 3-superficie il cui vettore normale è ovunque a norma nulla, ma con

componenti non identicamente zero. Allora  $\mathcal{N}$  si dice *orizzonte di Killing* se esiste un campo vettoriale di Killing  $\xi^a$  con un intorno di  $\mathcal{N}$  come dominio, tale che  $\xi^a$  è normale a  $\mathcal{N}$ . Si può dimostrare che, sotto condizioni di analiticità dello spazio-tempo, se quest'ultimo è stazionario e asintoticamente piatto, allora l'orizzonte degli eventi è un orizzonte di Killing. È facile ritrovare tutto questo nelle soluzioni presentate: quella di Schwarzschild è stazionaria e ha orizzonte degli eventi per  $r = r_H$ , dove il vettore  $\partial_t$  passa da tipo tempo a tipo spazio; ugualmente per la soluzione di Kerr-Newman in  $r = r_+$  con il campo definito dalla equazione (2.15). Notiamo come la definizione risulti ben posta: i campi di Killing cambiano natura causale sull'orizzonte di Killing associato, dove hanno perciò norma nulla; è naturale che  $\xi^a$  sia allora normale alla ipersuperficie su cui ha norma costante.

Per lo stesso motivo, anche il vettore associato alla 1-forma gradiente di  $\xi^a \xi_a$  sarà ortogonale all'orizzonte di Killing, risultando, così, proporzionale a  $\xi^a$ . Esisterà allora una funzione scalare  $\kappa$  su  $\mathcal{N}$  tale che

$$\nabla_a(\xi^b \xi_b)|_{\mathcal{N}} = -2\kappa \xi_a \quad (2.16)$$

dove il fattore numerico è stato estratto per comodità. Chiamiamo la funzione  $\kappa$  così definita *gravità superficiale* associata all'orizzonte di Killing  $\mathcal{N}$ . Utilizzando la definizione di vettore di Killing, possiamo tuttavia riscrivere la (2.16) come

$$\nabla_a(\xi^b \xi_b)|_{\mathcal{N}} = 2\xi^b \nabla_a \xi_b = -2\xi^b \nabla_b \xi_a \quad (2.17)$$

da cui

$$\xi^b \nabla_b \xi^a|_{\mathcal{N}} = \kappa \xi^a \quad (2.18)$$

È utile ricordare che la parametrizzazione affine di una curva geodetica è unica a meno di trasformazioni affini; se però si descrive una geodetica di vettore tangente  $\vec{V}$  con un parametro arbitrario, è noto che non si ha più l'equazione geodetica

$$\nabla_{\vec{V}} \vec{V} = 0 \quad (2.19)$$

ma la forma più generale

$$\nabla_{\vec{V}} \vec{V} \propto \vec{V} \quad (2.20)$$

Consideriamo l'equazione (2.18) in questi termini:  $\kappa$  misura essenzialmente in che misura la curva integrale di  $\xi^a$  non possa essere parametrizzata in modo affine.

Si pensi, infatti, a un osservatore statico  $\mathcal{O}$  nello spazio-tempo di Schwarzschild; esso segue necessariamente una traiettoria del vettore di Killing  $\vec{\xi} := \vec{e}_t$ , che non è una geodetica, e dunque  $\mathcal{O}$  è soggetto a un'accelerazione. Si può mostrare effettivamente che  $\kappa$  è la forza per unità di massa che è necessario esercitare su  $\mathcal{O}$  all'infinito affinché questi rimanga statico nei pressi dell'orizzonte di Killing, ed è in questo senso che  $\kappa$  misura quanto non è inerziale un osservatore.

È necessario sottolineare che  $\kappa$  non è in alcun modo la forza locale a cui è sottoposto l'osservatore [29]; la 4-velocità di quest'ultimo, in quanto statico, sarà chiaramente

$$u^a = \frac{\xi^a}{\sqrt{-\xi^b \xi_b}} \quad (2.21)$$

Le componenti della sua accelerazione propria risulteranno così

$$z^a = u^b \nabla_b u^a = \frac{\xi^b \nabla_b \xi^a}{-\xi^c \xi_c} + \frac{\xi^a}{2(-\xi^c \xi_c)^2} \xi^b \nabla_b (\xi^d \xi_d) \quad (2.22)$$

Ma, essendo  $\xi^a$  di Killing, notiamo che

$$\xi^b \nabla_b (\xi^d \xi_d) = 2\xi^b \xi^d \nabla_b \xi_d = 0 \quad (2.23a)$$

$$\xi^b \nabla_b \xi^a = -\xi^b \nabla_a \xi_b = -\frac{1}{2} \nabla_a (\xi^b \xi_b) \equiv -\frac{1}{2} \partial_a (\xi^b \xi_b) \quad (2.23b)$$

da cui si ottiene facilmente la 1-forma  $z_a$  associata

$$z_a = \frac{\partial_a (-\xi^b \xi_b)}{2(-\xi^c \xi_c)} = \frac{1}{2} \partial_a \log(-\xi^2) \quad (2.24)$$

Ma è noto che  $\xi^2 \rightarrow 0$  all'avvicinarsi all'orizzonte di Killing, per cui le componenti  $z^a$  dell'accelerazione locale devono necessariamente divergere all'orizzonte.

Si può effettivamente dire di più sul rapporto della gravità superficiale con l'accelerazione locale. Riscriviamo la relazione (2.16) come

$$\kappa \xi_a = \frac{1}{2} \nabla_a (-\xi^b \xi_b)|_{\mathcal{N}} \quad (2.25)$$

Sostituendovi l'uguaglianza sinistra della (2.24), si ottiene

$$\kappa \xi_a = z_a (-\xi^2)|_{\mathcal{N}} \quad (2.26)$$

da cui, prendendo la norma di entrambi i termini, risulta

$$\kappa = \lim_{\xi^2 \rightarrow 0} \sqrt{-\xi^2} \|z\| \quad (2.27)$$

dove  $\sqrt{-\xi^2}$  è semplicemente la forma generica del fattore di redshift indicato nell'equazione (1.18): in ultima analisi, è la relazione appena trovata a giustificare il nome di *gravità superficiale*.

È utile compiere un calcolo esplicito nel caso di Schwarzschild; dalla equazione (2.24) segue

$$z_a = \frac{1}{2} \partial_a \log \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) = \frac{M}{r^2 \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)} dr \quad (2.28)$$

ossia l'unica componente non nulla è quella associata alla coordinata radiale  $r$ , e  $z_a = z_{\hat{r}}$ ; la norma di  $z$  si riduce allora a

$$\|z\| = \sqrt{g^{rr} z_r z_r} = \sqrt{\frac{M^2}{r^4 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)}} = \frac{M}{r^2 \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} \quad (2.29)$$

Dalla (2.27) si ricava infine

$$\kappa_s = \lim_{r \rightarrow r_H} \sqrt{-\xi^2} \|z\| = \frac{M}{r^2} \Big|_{r=r_H} = \frac{1}{4M} \quad (2.30)$$

Perciò un buco nero più massivo ha gravità superficiale minore; è notevole che questa risulti pari all'accelerazione gravitazionale superficiale newtoniana di un corpo sferico di massa  $M$  e di raggio  $r_H$ . Partendo dalla definizione (2.16), si può anche compiere il calcolo per la soluzione di Kerr-Newman, che porta a

$$\kappa_{\text{KN}} = \frac{r_+ - r_-}{2(r_+^2 + a^2)} = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}}{2M^2 - Q^2 + 2M\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}} \quad (2.31)$$

Nel caso di Schwarzschild, è facile vedere che  $\kappa_s$  assume lo stesso valore sull'intero orizzonte di Killing (il quale, essendo lo spazio-tempo stazionario, coincide con l'orizzonte degli eventi). Ripercorrendo il calcolo, si nota come ciò derivi essenzialmente da una congiunzione di molteplici aspetti favorevoli della soluzione di Schwarzschild. Infatti, per l'alto grado di simmetria della soluzione, la componente  $g_{tt}$  dipende esclusivamente dalla coordinata  $r$ , così come, perciò,  $-\xi^2$ ; in primo luogo, ciò fa sì che anche  $z$ , al pari della sua norma, dipenda a sua volta solamente dalla coordinata radiale; in secondo luogo, ciò rende ininfluenze come si compia l'operazione di limite  $\xi^2 \rightarrow 0$ , che si riduce a  $r \rightarrow r_H$ .

Esiste tuttavia una formulazione più generale di questa osservazione, che copre anche soluzioni con un grado di simmetria minore rispetto a quella di Schwarzschild; questo risultato è noto come *Legge Zero* della Meccanica dei buchi neri.

**Teorema** (Legge Zero).  $\kappa$  è costante sull'orizzonte degli eventi di uno spazio-tempo stazionario in cui valga la condizione di energia dominante.

## 2.3 Prima Legge

La Prima Legge consiste in un'identità che lega la variazione dei parametri caratteristici di un buco nero stazionario:

**Teorema** (Prima Legge). *Per due buchi neri stazionari in condizione di elettro-vacuum che differiscono per piccole variazioni della massa  $M$ , del momento angolare  $J$  e della carica  $Q$  vale la relazione*

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \Omega_H \delta J + \Phi_H \delta Q \quad (2.32)$$

dove  $\kappa$  indica la gravità superficiale,  $A$  l'area dell'orizzonte degli eventi, mentre  $\Omega_H$  e  $\Phi_H$  sono rispettivamente il momento angolare e il potenziale elettrico sull'orizzonte

Analizziamo il significato di questo enunciato [11, 19, 30]. In primo luogo, è necessario specificare che è una relazione valida al primo ordine, ed è in questo senso che le variazioni devono essere piccole. In secondo luogo, si noti che le quantità  $\kappa$ ,  $\Omega_H$  e  $\Phi_H$  sono definite solo localmente sull'orizzonte degli eventi; è già stato tuttavia discusso come, sotto opportune condizioni, la gravità superficiale sia costante sull'orizzonte, così come lo sono  $\Omega_H$  e  $\Phi_H$ , per definizione.

Dato che si può dimostrare che la soluzione di Kerr-Newman è il caso più generico di spazio-tempo stazionario in condizione di elettro-vacuum, per la prova della (2.32) è sufficiente differenziare la (2.11):

$$\frac{\delta A}{8\pi} = 2M\delta M - Q\delta Q + \delta M \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} + \frac{M(M\delta M - Q\delta Q - a\delta a)}{\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}} \quad (2.33)$$

da cui, raccogliendo, si ottiene

$$\left( \frac{1}{\kappa_{\text{KN}}} - \frac{a^2}{\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}} \right) \delta M = \frac{\delta A}{8\pi} + \frac{aM}{\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}} \delta a + Q \left( 1 + \frac{M}{\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}} \right) \delta Q \quad (2.34)$$

Possiamo riscrivere  $\delta a$  come

$$\delta a = \delta \left( \frac{J}{M} \right) = \frac{\delta J}{M} - \frac{J}{M^2} \delta M \quad (2.35)$$

quindi si ha

$$\delta M = \frac{\kappa_{\text{KN}}}{8\pi} \delta A + \frac{\kappa_{\text{KN}} a}{\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}} \delta J + \kappa_{\text{KN}} Q \left( 1 + \frac{M}{\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}} \right) \delta Q \quad (2.36)$$

Sostituendo infine  $\kappa_{\text{KN}}$  e riordinando risulta:

$$\delta M = \frac{\kappa_{\text{KN}}}{8\pi} \delta A + \frac{a}{2M^2 - Q^2 + 2M\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}} \delta J + \frac{Q(M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2})}{2M^2 - Q^2 + 2M\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}} \delta Q \quad (2.37)$$

Nel termine in  $\delta J$  riconosciamo immediatamente la velocità angolare  $\Omega_H$ , mentre si può mostrare facilmente dall'equazione (2.3) che il coefficiente di  $\delta Q$  è effettivamente il potenziale elettrico sull'orizzonte  $\Phi_H$ , da cui la (2.32) risulta provata.

## 2.4 Seconda Legge

La Seconda Legge coincide con il noto *Teorema dell'Area* di Hawking, il quale afferma che, sotto opportune condizioni, l'area  $A$  dell'orizzonte degli eventi più esterno è una funzione non decrescente della coordinata temporale; in termini più formali:

**Teorema** (Seconda Legge). *Sia  $\mathcal{M}$  uno spazio-tempo che soddisfi la condizione di energia forte  $R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq 0$  e sia  $U \subset \mathcal{M}$  una regione globalmente iperbolica per la quale  $\overline{D^-(\mathcal{I}^+)} \subset U$ . Con  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  superfici di Cauchy di  $U$  tali che  $\Sigma_2 \subset D^+(\Sigma_1)$ , definiamo  $H_i := \mathcal{H}^+ \cap \Sigma_i$ . Vale allora che*

$$A(H_2) \geq A(H_1) \quad (2.38)$$

Sono presenti diverse varianti di questo enunciato, a seconda di quale condizione energetica si prende come ipotesi, ma la sua prova deriva essenzialmente da alcuni risultati di ottica in presenza di superfici intrappolate. Nella versione originale, si mostra per assurdo che su  $\mathcal{H}^+$  l'espansione  $\theta$  data dalla (1.27) è non negativa<sup>1</sup>. Si sfrutta quindi il fatto che l'orizzonte degli eventi è costituito da geodetiche nulle che non hanno un punto di fine (ossia che non incontrano mai la singolarità) e che non possono sovrapporsi, secondo un noto risultato di Penrose. Una qualsiasi di queste geodetiche non può lasciare  $\mathcal{H}^+$ , per cui deve necessariamente passare per un punto di  $H_1$  e intersecare  $H_2$  in un altro. Viene così definita implicitamente una mappa  $\psi : H_1 \rightarrow H_2$ , da cui risulta  $A(H_2) \geq A(\psi(H_1))$ , in quanto  $\psi(H_1) \subset H_2$ . Dalla non negatività dell'espansione delle geodetiche nulle su  $\mathcal{H}^+$  segue poi che  $A(\psi(H_1)) \geq A(H_1)$ , e la (2.38) si mostra così provata.

È facile vedere come questo Teorema ponga seri vincoli sul bilancio energetico di processi dinamici che coinvolgano buchi neri. Consideriamo il caso di due buchi neri con momento angolare trascurabile di masse  $M_1$  e  $M_2$  che sono inizialmente abbastanza lontani affinché le metriche nei loro pressi siano approssimabili alla soluzione di Schwarzschild; assumiamo allora che essi collidano in un singolo buco nero di massa  $M_3$ . Dalla relazione (2.38), segue che

$$A_3 \geq A_1 + A_2 \quad \text{i.e.} \quad 16\pi M_3^2 \geq 16\pi M_1^2 + 16\pi M_2^2 \quad (2.39)$$

ossia

$$M_3 \geq \sqrt{M_1^2 + M_2^2} \quad (2.40)$$

---

<sup>1</sup>Notiamo come questo sia strettamente legato al fatto che l'orizzonte degli eventi coincide con l'orizzonte apparente o vi è esterno, come accennato alla fine della Sezione 1.4.

Si pensi dunque alla frazione  $\eta$  di energia dispersa nel processo, concepibilmente come radiazione gravitazionale:

$$\eta = \frac{M_1 + M_2 - M_3}{M_1 + M_2} \leq 1 + \frac{\sqrt{M_1^2 + M_2^2}}{M_1 + M_2} \quad (2.41)$$

Dividendo per  $M_1$  il numeratore e il denominatore del secondo termine, troviamo che quest'ultimo è massimo per  $M_1 = M_2$ , perciò

$$\eta \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.29 \quad (2.42)$$

cioè non può essere disperso più del 29% di energia nel processo di collisione.

Si può poi vedere una conseguenza ancora più essenziale per la teoria classica dei buchi neri. Si osservi innanzitutto dall'uguaglianza (2.11) che, a parità di parametro di massa  $M$ , la soluzione stazionaria con area dell'orizzonte degli eventi massima è quella statica di Schwarzschild. Supponiamo allora che in uno spazio-tempo globalmente iperbolico sia presente una superficie intrappolata; se è vera l'ipotesi di censura cosmica, deve esistere un orizzonte degli eventi  $\mathcal{H}$  a racchiuderla. Per la Seconda Legge, l'area di  $\mathcal{H}$  deve necessariamente crescere con il tempo, per cui, se l'energia totale dello spazio-tempo è  $E$ , l'area massima che questo orizzonte potrà sviluppare è  $16\pi E^2$ . Questo scenario si presta a simulazioni di relatività numerica, in quanto ricordiamo che la nozione di superficie intrappolata è locale, e dunque è possibile settare senza ambiguità i dati iniziali in modo che ne sia presente una. Se si trovasse un set di condizioni iniziali che portasse ad un orizzonte degli eventi con area maggiore di  $16\pi E^2$ , allora la Congettura del censore cosmico troverebbe una violazione esplicita, per quanto numerica.

## 2.5 Terza Legge

Un altro importante vincolo al comportamento di un buco nero stazionario è espresso dalla cosiddetta Terza Legge [10]:

**Teorema** (Terza Legge). *Non è possibile ridurre a zero la gravità superficiale  $\kappa$  dell'orizzonte degli eventi di un buco nero in un numero finito di passi.*

Per prima cosa, si noti dalla (2.31) che  $\kappa$  si annulla per  $M^2 = a^2 + Q^2$ , ossia nel caso di un buco nero estremale, per cui l'enunciato precedente coincide con l'affermare che non è possibile rendere estremale un buco nero in un numero finito di passi. Calcoli espliciti [28] mostrano che, più un buco nero si avvicina allo stato estremale, più sono restrittive le condizioni sulle possibilità di compiere un passo ulteriore in quella direzione.

Ciò assume un significato notevole in relazione alla Congettura del censore cosmico, che esclude il presentarsi di una singolarità nuda (caratterizzata dalla condizione  $M^2 <$

$a^2 + Q^2$ ). In questo senso la condizione di estremalità diventa una barriera fisicamente invalicabile tra lo stato di buco nero e di singolarità nuda: se si potesse ridurre la gravità superficiale a zero, allora si sarebbe infinitamente vicini alla condizione di singolarità nuda, violando l'ipotesi di iperbolicità globale dello spazio-tempo.

Si potrebbe tuttavia tentare di rendere nulla  $\kappa$  iniettando nel buco nero abbastanza carica elettrica o momento angolare da raggiungere la condizione estrema. Pensiamo di far cadere una particella di carica  $q$  di massa  $m$  in un buco nero non rotante di massa  $M$  e carica  $Q < M$ , in modo da raggiungere la condizione  $Q + q = M + m$  (per cui  $q$  deve essere maggiore di  $m$ ). La carica  $q$  deve avere lo stesso segno di  $Q$ , quindi la particella è soggetta a una forza coulombiana repulsiva, come segue dalla (2.4). Considerando allora la lagrangiana della particella, emerge che, affinché essa cada nel buco nero, la sua energia all'infinito deve soddisfare

$$E_\infty M \geq qQ \quad (2.43)$$

che si riduce alla relazione classica  $mM \geq qQ$  nel caso in cui la velocità della particella all'infinito sia nulla; si può vedere quindi come questa disuguaglianza implichi che  $Q + q < M + m$ , in contrasto con l'estremalità richiesta. Non si può nemmeno tentare di aumentare la velocità all'infinito, perché in realtà ciò aumenterebbe la massa finale del buco nero, rendendo la disuguaglianza ancora più forte.

Secondo uno schema simile a quello appena seguito, non è nemmeno possibile aggiustare il momento angolare di una particella in caduta verso un buco nero rotante elettricamente neutro in modo da portarlo alla condizione estrema, in quanto la particella avrebbe un grande parametro di impatto e dunque mancherebbe semplicemente il buco nero.

# Capitolo 3

## La Termodinamica dei buchi neri

### 3.1 Le Quattro Leggi in chiave termodinamica

Un primo motivo che spinge a considerare un buco nero come un oggetto termodinamico è il fatto evidente che sarebbe altrimenti molto facile violare il Secondo Principio della Termodinamica: sarebbe infatti sufficiente far cadere all'interno dell'orizzonte degli eventi un sistema fisico qualsiasi per avere la perdita completa della sua entropia nel bilancio totale. Riprendiamo e ampliamo per la trattazione presente uno spunto del celebre articolo [4] di Bekenstein, stimando l'esito del gettare un oscillatore armonico in un buco nero di Schwarzschild nei termini dell'entropia che quest'ultimo dovrebbe acquistare per non portare a una decrescenza dell'entropia totale dell'universo. Poniamo che l'oscillatore armonico sia a una certa temperatura  $T$ , e sia costituito da due masse  $m/2$  collegate da una molla di costante elastica  $C$ . La sua energia sarà dell'ordine  $E \sim k_B T$ , da cui segue un'ampiezza media di oscillazione

$$y = \sqrt{\frac{2E}{C}} \sim \sqrt{\frac{2k_B T}{C}} \quad (3.1)$$

È noto che la lunghezza propria  $\rho$  corrispondente a una distanza radiale  $\delta r$  dall'orizzonte di un buco nero di Schwarzschild è

$$\begin{aligned} \rho &= \int_{2GM}^{2GM+\delta r} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} = \sqrt{\delta r(2GM + \delta r)} + GM \ln \left( 1 + \frac{\delta r}{GM} \right) \\ &\simeq \sqrt{2GM\delta r} \sim \sqrt{GM\delta r} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Quindi l'oscillatore armonico entrerà effettivamente nel buco nero per

$$\sqrt{\frac{2k_B T}{C}} \sim \rho \sim \sqrt{GM\delta r} \Rightarrow \delta r \sim \frac{2k_B T}{GMC} \quad (3.3)$$

L'oscillatore ha inizialmente massa  $m$  (trascurando la sua energia vibrazionale), ma la variazione  $\Delta M$  nella massa del buco nero consiste nella massa  $m$  vista dall'infinito, ossia con un redshift (1.18) valutato in  $r = 2GM + \delta r$ . Il buco nero guadagnerà allora una massa

$$\Delta M \sim m \sqrt{1 - \frac{2GM}{2GM + \delta r}} \simeq m \sqrt{\frac{\delta r}{2GM}} \sim \frac{m}{GM} \sqrt{\frac{k_B T}{C}} \quad (3.4)$$

Possiamo infine stimare che  $y$  sia in genere maggiore o al più prossima alla lunghezza d'onda termica  $\lambda$  associata all'oscillatore armonico, caratterizzata da

$$\lambda \sim \frac{\hbar}{E} \sim \frac{\hbar}{k_B T} \quad \longrightarrow \quad T \sim \frac{\hbar}{k_B \lambda} \quad (3.5)$$

L'entropia dell'oscillatore armonico sarà proporzionale alla sua energia (approssimabile con quella a riposo) divisa per la sua temperatura, quindi imponiamo che la variazione dell'entropia del buco nero sia pari a quella dell'oscillatore armonico cadutovi dentro:

$$\Delta S \sim \frac{m}{T} \sim k_B \frac{m \lambda}{\hbar} \sim k_B \frac{m y}{\hbar} \quad (3.6)$$

Sostituendovi  $y$ , e riscrivendo in modo opportuno, si ottiene

$$\Delta S \sim k_B \frac{m}{\hbar} \sqrt{\frac{2k_B T}{C}} \sim k_B \frac{GM \Delta M}{\hbar} \sim k_B \frac{\Delta A}{\hbar G} \quad (3.7)$$

Considerazioni simili possono essere svolte in modo analogo per un raggio di luce o per un volume finito di gas perfetto, e spinsero Bekenstein ad attribuire a un buco nero un'entropia nella forma

$$S_{BH} = \mathcal{C} \frac{A}{l_P^2} \quad (3.8)$$

dove  $A$  rappresenta l'area dell'orizzonte degli eventi (2.11),  $l_P \doteq \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$  la lunghezza di Planck, e  $\mathcal{C}$  una costante generica con le dimensioni di un'entropia.

Questa ipotesi pare ulteriormente giustificata dalla somiglianza esplicita tra le Quattro Leggi dei buchi neri e le Leggi della Termodinamica. Già dall'analisi della Leggi Zero e Terza in questi termini, emerge un'analogia tra il comportamento della temperatura  $T$  di un sistema termodinamico e quello dell'accelerazione superficiale  $\kappa$  di un buco nero.

Si ricordi poi il significato del Primo Principio della Termodinamica: la variazione di energia interna a cui è soggetto un sistema in una data trasformazione è pari alla differenza tra il calore assorbito e il lavoro compiuto dal sistema nel processo. In particolare, in presenza di una trasformazione a temperatura costante:

$$dU = \delta Q - \delta W = T dS - \delta W \quad (3.9)$$

Con riferimento alla (2.32), si trova una corrispondenza tra la massa di un buco nero  $M$  e l'energia interna di un sistema termodinamico, così come tra  $\delta W$  e i termini di lavoro  $\Omega_H \delta J + \Phi_H \delta Q$ . Prevediamo dunque che, in un qualche senso, a un buco nero si possano attribuire una temperatura e un'entropia (compatibile con i ragionamenti condotti da Bekenstein)

$$T_H = \lambda \kappa \quad (3.10a)$$

$$S_{BH} = \frac{A}{8\pi G \lambda} \quad (3.10b)$$

per una qualche costante  $\lambda$ . Con un'entropia in questa forma, segue direttamente anche una corrispondenza per la Seconda Legge (l'area dell'orizzonte di un buco nero stazionario aumenta sempre, e lo stesso ci si aspetta che faccia la sua entropia).

Siamo ora in grado di risolvere il problema posto inizialmente, definendo una *Seconda Legge Generalizzata*: è infatti sufficiente definire un'entropia generalizzata somma di quella del buco nero e di quella consueta,  $S' := S_{thermo} + S_{BH}$ , che è non decrescente

$$\Delta S' \geq 0 \quad (3.11)$$

e perciò l'entropia (generalizzata) dell'universo non diminuisce, se gettiamo un sistema fisico in un buco nero [27].

Come citato nella Sezione 2.3, si può dimostrare che la dinamica di un buco nero stazionario è caratterizzata da un numero limitato di variabili, ossia dai tre  $M$ ,  $Q$  e  $J$ , insieme alla gravità superficiale  $\kappa$  e area  $A$  dell'orizzonte, loro funzioni. Questo ricorda effettivamente il comportamento delle variabili di stato nel caso di un sistema in equilibrio termodinamico, e rende ancora più verosimile il parallelismo tra buchi neri stazionari e sistemi termodinamici all'equilibrio. Vestire i buchi neri di un significato termodinamico comporta tuttavia quesiti sulla fisica che ciò presuppone, in primo luogo sulla temperatura, che per un buco nero, classicamente, si considera nulla (quando un buco nero è posto in contatto con una qualsiasi fonte di calore, ne assorbe energia senza emetterne alcuna). Emergono poi diversi problemi nel momento in cui si proceda alla costruzione di una meccanica statistica dei buchi neri stazionari, in modo da spiegarne la termodinamica secondo un procedimento *à la Boltzmann*.

Solitamente, si assume l'ergodicità del sistema termodinamico studiato [14]: data una funzione  $f$  sullo spazio delle fasi  $\Omega$ , si suppone che la media sui tempi di  $f$  sia uguale alla sua media sull'ensemble:

$$\bar{f} = \langle f \rangle \quad (3.12)$$

Analogamente, anche per introdurre una nozione di entropia del tipo  $S = k \log W$  è necessario misurare volumi all'interno dello spazio delle fasi. Si pone così il problema di individuarne uno associato a un buco nero e di misurarne volumi. Questo si rivela particolarmente complesso, già dal momento in cui si intende determinare lo spazio delle configurazioni: per esempio, si può fare l'ipotesi che un buco nero di Schwarzschild sia

poco di più di un gas (non all'equilibrio) confinato dall'orizzonte degli eventi. Anche in questa modellizzazione, però, non si potrebbe determinare il volume contenuto all'interno dell'orizzonte, dato che le coordinate di Schwarzschild sono singolari sull'orizzonte e valide o all'interno o al suo esterno, non contemporaneamente. Si potrebbe pensare a un set di coordinate più liscio, ma è utile citare il fatto [16, 22] che l'interno di un buco nero di Schwarzschild è descrivibile con una carta corrispondente a un intero universo di Friedmann, di volume arbitrario. Il problema di associare uno spazio delle fasi in questo modo risulta evidentemente mal posto, e si intuisce che non si debba trattare l'entropia come un conteggio di stati relativi al buco nero in senso stretto.

## 3.2 La temperatura e la radiazione di Hawking

In questa sezione si intende mostrare che un effetto di natura prettamente quantistica (e dunque non contemplato dalla Relatività Generale), noto come radiazione di Hawking, in parte giustifica e completa il quadro termodinamico tracciato precedentemente a partire da considerazioni fisiche.

In sintesi, il fenomeno di Hawking consiste nell'emissione di radiazione da parte di un qualsiasi buco nero. Più precisamente, dato uno spazio-tempo contenente un buco nero e un campo  $\phi$  che si propaga al suo interno, in tempi asintoticamente lunghi un osservatore all'infinito spaziale rileverà particelle del campo  $\phi$  tali da seguire, in prima approssimazione, lo spettro di un corpo nero a una certa temperatura  $T_H$ . A livello intuitivo, le ragioni di questo fenomeno possono essere fatte risalire a due aspetti distinti (vedi Figura 3.1).

Il primo è l'esistenza, anche in condizione di vuoto, di coppie particella/antiparticella virtuali, dove, per la conservazione dell'energia, un componente della coppia ha energia  $E$  positiva e l'altro negativa  $-E$ , con tempo di vita di ordine  $\tau \sim \hbar/E$ . Il secondo elemento essenziale è il fatto che in Relatività Generale l'energia, insieme al suo segno, è dipendente dalla carta introdotta; questo è consistente con il fatto che l'hamiltoniana è il generatore delle traslazioni temporali, e dunque dipende dalla scelta che si compie di una coordinata di tipo tempo. Come citato nella Sezione (1.2), bisogna costruire due carte distinte e non sovrapposte all'interno e all'esterno dell'orizzonte; usando sia dentro che fuori le coordinate di Schwarzschild  $(t, r, \theta, \phi)$ , alcune componenti della metrica cambiano segno e dunque  $t$  e  $r$  si scambiano ruolo. Ciò implica che una particella entrante con energia negativa rispetto a un osservatore esterno può avere energia positiva vista da uno interno. Se, perciò, il membro a energia negativa di una coppia attraversa l'orizzonte, non deve più annichilarsi in un tempo  $\hbar/E$ , per cui il suo partner a energia positiva può fuggire all'infinito.

Seguendo questo ragionamento, si pensi a una coppia a distanza radiale  $\delta r$  dall'orizzonte di un buco nero di Schwarzschild; dall'equazione (3.2), segue che il tempo proprio

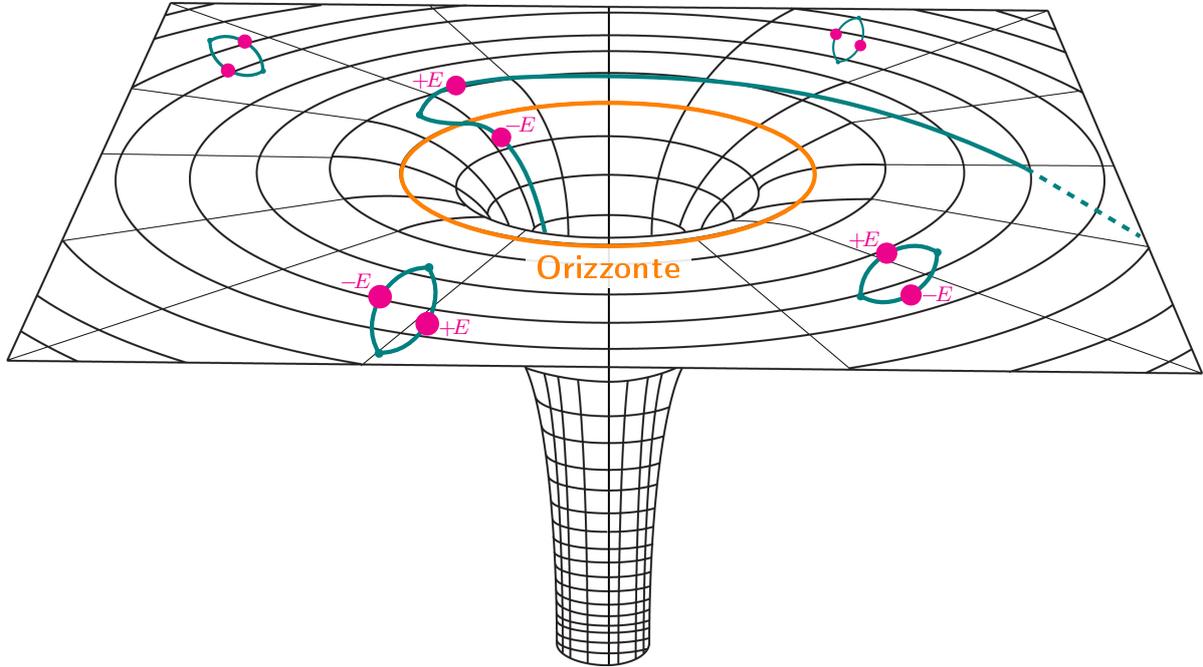


Figura 3.1: Si mostrano in figura i due elementi principali che portano al fenomeno di radiazione di Hawking: la presenza di coppie virtuali particella/antiparticella nel vuoto, e il fatto che nella carta di Schwarzschild all'interno dell'orizzonte le coordinate  $t$  e  $r$  si scambiano di ruolo. Le energie  $E$  riportate sono in modulo, e il loro segno è quello determinato da un osservatore all'infinito spaziale.

che un membro della coppia impiega a raggiungere l'orizzonte è

$$\tau \sim \sqrt{GM\delta r} \quad (3.13)$$

Ponendolo dell'ordine della vita della coppia  $\hbar/E$ , si ottiene

$$E \sim \frac{\hbar}{\sqrt{GM\delta r}} \quad (3.14)$$

che rappresenta l'energia del membro in fuga all'infinito, quando si trova a  $\delta r$  dall'orizzonte. Un osservatore all'infinito (dopo un tempo asintoticamente lungo) vede allora un'energia

$$E_\infty \sim \frac{\hbar}{\sqrt{GM\delta r}} \sqrt{1 - \frac{2GM}{2GM + \delta r}} \sim \frac{\hbar}{GM} \quad (3.15)$$

indipendentemente dalla posizione iniziale  $\delta r$ . Ci si aspetta così che un buco nero emetta con una temperatura caratteristica

$$k_B T_H \sim \frac{\hbar}{GM} \sim \hbar \kappa \quad (3.16)$$

che è proprio la forma della temperatura ipotizzata nella sezione precedente.

Costruiamo ora [25] un ragionamento quantitativamente più preciso, in modo da fissare il valore del parametro  $\lambda$  nelle (3.10). Si consideri un osservatore che si muove su geodetiche entranti radiali di tipo tempo, nello spazio-tempo di Schwarzschild [13]. Con il suo tempo proprio, esso introduce un set di coordinate  $(T, r, \theta, \varphi)$ , dette di Painlevé-Gullstrand, con

$$T = t + 4M \left( \sqrt{\frac{r}{2M}} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{r}{2M}} - 1}{\sqrt{\frac{r}{2M}} + 1} \right| \right) \quad (3.17)$$

dove  $t$ ,  $r$ ,  $\theta$  e  $\varphi$  sono le coordinate di Schwarzschild. Come citato nella Sezione 1.2, un osservatore in caduta non si accorge di attraversare l'orizzonte, e perciò non si hanno dubbi che questa carta sia regolare per  $r = r_H$ . La metrica di Schwarzschild in queste coordinate non è diagonale, ma legge:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r}} dt dr + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.18)$$

Si prenda ora un campo scalare  $\phi(r, t)$  in questo spazio-tempo; siamo di fronte a un problema radiale, e possiamo considerare per l'onda  $s$  (radiale, con  $l = 0$ ) il regime di approssimazione eikonale<sup>1</sup>: l'onda si può scrivere come

$$\phi(r, t) = \mathcal{A}(r, t) e^{\mp i \varphi(r, t)} \quad (3.19)$$

e, assumendo che l'ampiezza  $\mathcal{A}(r, t)$  vari lentamente rispetto alla fase  $\varphi(r, t)$ , dalla teoria WKB possiamo esplicitare la fase in modo che

$$\phi(r, t) = \mathcal{A}(r, t) \exp \left\{ \mp i \left( \omega t - \int^r k(r') dr' \right) \right\} \quad (3.20)$$

con  $k$  vettori d'onda radiali, e dove l'estremo inferiore di integrazione non è stato indicato perché, come è stato suggerito dalla stima intuitiva precedente e come sarà chiaro in seguito, esso è influente. La variazione lenta dell'ampiezza rispetto alla fase è in gran parte giustificata, nella pratica, dall'assenza di altre singolarità fisiche oltre a quella nell'origine, e dall'evoluzione lenta dello spazio-tempo, che, in particolare, nel caso studiato

---

<sup>1</sup>Siamo rassicurati di questa scelta a posteriori, dal fatto che effettivamente l'onda  $s$  contribuisce per circa il 90% del totale della radiazione di Hawking.

è statico. In uno spazio tempo semplicemente stazionario, questa approssimazione diventa tanto più giustificata quanto maggiore è la frequenza di riferimento  $\omega_p$  di picco dello spettro termico.

In queste condizioni, l'equazione eikonale legge

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + i\varepsilon = 0 \quad (3.21)$$

dove la prescrizione dello  $i\varepsilon$  (nel limite di  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) è qui richiesta per l'analicità del campo  $\phi$  sulla complessificazione del cono di luce passato di ogni punto  $x$  della varietà  $\Gamma(x) = \{z = x + iy \mid y \in J^-(x)\}$ . Si noti perciò che mantenere il termine  $i\varepsilon$  diventa importante solo nei pressi dell'orizzonte, dato il suo significato causale; altrove il limite è regolare e si può porre  $\varepsilon = 0$ . Sostituendo nella (3.21) la metrica di Painlevé-Gullstrand, si ottiene

$$\omega^2 - 2\sqrt{\frac{2M}{r}} \omega k - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) k^2 + i\varepsilon = 0 \quad (3.22)$$

da cui

$$\left(\omega - \sqrt{\frac{2M}{r}} k\right)^2 = k^2 + i\varepsilon \quad (3.23)$$

quindi i vettori d'onda radiali si possono scrivere nella forma

$$k = \frac{\sigma(1 + i\varepsilon) - \sqrt{\frac{2M}{r}}}{(1 + i\varepsilon)^2 - \sqrt{\frac{2M}{r}}} \omega \quad (3.24)$$

con  $\sigma = 1$  per onde uscenti ( $k > 0$ ) e  $\sigma = -1$  per onde entranti ( $k < 0$ ).

Essendo poi quello analizzato un problema a simmetria sferica, le leggi di conservazione impongono che

$$|\mathcal{A}(r, t)| \propto \frac{1}{r} \quad (3.25)$$

da cui otteniamo la scrittura esplicita della soluzione approssimata

$$\phi(r, t) = \frac{\mathcal{N}}{r} \exp \left\{ \mp i \left( \omega t - \int^r k(r') dr' \right) \right\} \quad (3.26)$$

dove  $\mathcal{N}$  è una costante di normalizzazione opportuna e i vettori d'onda  $k$  sono quelli trovati precedentemente.

Studiamo ora i modi di vibrazione nei pressi dell'orizzonte. Quelli entranti ( $\sigma = 1$ ) non sono particolarmente significativi per questa trattazione; analizziamo quindi quelli uscenti ( $\sigma = +1$ ). Dalla (3.24), si ottiene

$$k(r) = \frac{\omega}{1 + \sqrt{\frac{2M}{r}} + i\varepsilon} \quad (3.27)$$

Ricordiamo che, in senso distribuzionale,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} = \text{P}\left(\frac{1}{x}\right) \mp i\pi \delta(x) \quad (3.28)$$

quindi riscriviamo i vettori d'onda come

$$k = \omega \left\{ \text{P}\left(\frac{1}{1 + \sqrt{\frac{2M}{r}}}\right) - i\pi \delta\left(1 + \sqrt{\frac{2M}{r}}\right) \right\} \quad (3.29)$$

Appena fuori dall'orizzonte, varrà allora

$$K(r) \doteq \int_a^r k(r') dr' \approx \omega \int_a^r \frac{dr'}{1 + \sqrt{\frac{2M}{r}}} \quad (3.30)$$

che risulta

$$K(r) \approx \omega \left( C(a) - 2\sqrt{2} r \sqrt{\frac{M}{r}} + r + 2M \ln(r - 2M) + 4M \arctan\left(\sqrt{\frac{r}{2M}}\right) \right) \quad (3.31)$$

dove  $C(a)$  è una semplice costante che dipende dall'estremo inferiore di integrazione. Ma abbiamo assunto  $r \simeq 2M$ , perciò

$$K(r) \approx \omega ( 2M \ln(r - 2M) + (\pi - 2)M + C(a) ) \quad (3.32)$$

L'unico contributo decisivo nei pressi dell'orizzonte viene quindi dal logaritmo, e, includendo i termini costanti nella normalizzazione opportuna  $\mathcal{N}_{out}$ , risulta

$$\phi(r, t)_{out} \approx \mathcal{N}_{out} \exp(\pm 2iM\omega \ln(r - r_H)) e^{\mp i\omega t} \quad (3.33)$$

Dal calcolo emerge una prima caratteristica essenziale: la radiazione uscente presenta una divergenza logaritmica del numero dei modi di vibrazione del campo avvicinandosi all'orizzonte.

Consideriamo ora i modi relativi a una propagazione uscente che attraversano l'orizzonte; a cavallo tra la regione interna e quella esterna si ha

$$\int_{r_H - \eta}^{r_H + \eta} k(r') dr' = \omega \int_{r_H - \eta}^{r_H + \eta} \left( \text{P}\left(\frac{1}{1 + \sqrt{\frac{2M}{r'}}}\right) - i\pi \delta\left(1 + \sqrt{\frac{2M}{r'}}\right) \right) dr' \quad (3.34)$$

Conosciamo già cosa porta il termine della parte principale; studiamo il contributo della delta, che, in questo caso, è immaginario e non nullo. Facendo il cambio di variabile

$$y(r') \doteq \sqrt{\frac{2M}{r'}} \quad (3.35)$$

si ottiene

$$-i\pi\omega \int_{r_H-\eta}^{r_H+\eta} \delta\left(1 + \sqrt{\frac{2M}{r'}}\right) dr' = i\pi\omega \int_{y(r_H-\eta)}^{y(r_H+\eta)} \frac{4M}{y^3} \delta(y+1) dy = -4\pi i M \omega \quad (3.36)$$

Quindi, nei pressi dell'orizzonte per  $r < r_H$ , abbiamo la soluzione approssimata

$$\phi(r, t)_{r < r_H} \approx \mathcal{N} \exp(\pm 2iM\omega \ln(r - r_H)) \exp(4M\pi\omega) e^{\mp i\omega t} \quad (3.37)$$

mentre appena fuori dall'orizzonte ( $r > r_H$ ) vale la (3.33), con l'accortezza che il fattore  $\mathcal{N}$  segue da un'integrazione su tutto il semiasse  $r > 0$  (a differenza del caso precedente dei modi in fuga all'infinito con  $\mathcal{N}_{out}$ , dove la normalizzazione era sull'intervallo  $r > r_H$ ):

$$\phi(r, t)_{r > r_H} \approx \mathcal{N} \exp(\pm 2iM\omega \ln(r - r_H)) e^{\mp i\omega t} \quad (3.38)$$

In sintesi, la soluzione approssimata per una propagazione attraverso l'orizzonte è nella forma

$$\phi(r, t) \approx \mathcal{N} [\theta(r_H - r) \exp(4M\pi\omega) + \theta(r - r_H)] \exp(\pm 2iM\omega \ln(r - r_H)) e^{\mp i\omega t} \quad (3.39)$$

Come citato,  $\mathcal{N}_{out}$  segue da una normalizzazione su  $r > r_H$ ,  $\mathcal{N}$  su  $r > 0$ . Integrando su questi domini le equazioni (3.33) e (3.39), otteniamo l'uguaglianza

$$|\mathcal{N}|^2 [\exp(2\pi\omega 4M) - 1] = |\mathcal{N}_{out}|^2 \quad (3.40)$$

Per cui la normalizzazione relativa legge

$$\left| \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}_{out}} \right|^2 = \frac{1}{\exp(2\pi\omega 4M) - 1} \quad (3.41)$$

che porta direttamente a una distribuzione planckiana per il flusso di radiazione uscente, caratterizzato, riportando in unità standard, da una temperatura

$$T_H = \frac{\hbar}{2\pi k_B(4GM)} \quad (3.42)$$

dove riconosciamo la gravità superficiale  $\kappa$  della soluzione di Schwarzschild. È interessante vedere come il procedimento seguito equivalga al settare lo stato di vuoto sugli osservatori in caduta libera, gli stessi con cui sono state definite le coordinate di Painlevé-Gullstrand, che, come ricordato, non vedono alcuna peculiarità durante l'attraversamento dell'orizzonte. È rispetto a questo stato di vuoto che un osservatore all'infinito vede un flusso di particelle uscenti di spettro planckiano.

Effettivamente, questo calcolo può essere esteso facilmente al caso di buchi neri stazionari (sempre ammessa un'evoluzione lenta dello spazio-tempo, tale da garantire la legittimità dell'approssimazione WKB), e in questo caso si ha

$$T_H = \frac{\hbar\kappa}{2\pi k_B} \quad (3.43)$$

D'altra parte, non è diretto estendere il procedimento a una soluzione non stazionaria, dove non vale più la Legge Zero, e quindi  $\kappa$  non veste più un ruolo chiaro. In linea di principio,  $T_H$  e  $\kappa$  potrebbero variare in modo diverso su regioni distinte dell'orizzonte. Anche se naturalmente non emerge con chiarezza dal calcolo eseguito per la soluzione di Schwarzschild, la radiazione di Hawking si riferisce esclusivamente all'orizzonte apparente, che, ricordiamo, è di natura cinematica.

Per quanto riguarda l'intensità della radiazione di Hawking, si trova che vi è associata un'energia difficilmente accessibile per rilevazioni sperimentali nell'ambito di buchi neri astronomici, in quanto dalla (3.43) segue che un buco nero statico di massa  $M$  emette con

$$T_H \simeq 6 \cdot 10^{-8} \left( \frac{M_\odot}{M} \right) K \quad (3.44)$$

che è ben al di sotto del CMB.

Riprendendo la forma generica delle equazioni (3.10), se si associa a un buco nero stazionario la temperatura (3.43), allora si trova

$$\lambda = \frac{\hbar}{2\pi k_B} \quad \longrightarrow \quad S_{BH} = \frac{A}{4l_P^2} k_B \quad (3.45)$$

Si osservi tuttavia che l'entropia  $S_{BH}$ , proporzionale dall'area  $A$ , è di natura essenzialmente geometrica; d'altra parte, come suggerito dalla dipendenza da  $\kappa$ ,  $T_H$  non ha bisogno di un inquadramento geometrico (in nessuna parte del calcolo compiuto si sono utilizzate le equazioni di Einstein), o dinamico (in prima approssimazione, lo spettro non dipende dalla massa del campo  $\phi$  studiato). Ciò spinge ad affermare che la radiazione di Hawking sia un fenomeno unicamente cinematico, e dunque molto più primitivo della Relatività Generale [25]. Questo ne giustifica un impiego come test dei principi di teoria dei campi in spazio-tempi curvi, e anche come test del limite semiclassico, a basse energie, della cinematica di una teoria quantistica della gravità.

È interessante rilevare che un osservatore su un'orbita del vettore di Killing  $\xi^a$  di una soluzione stazionaria non all'infinito spaziale vede uno spettro di temperatura caratteristica

$$T = \frac{T_H}{V} = \frac{\hbar\kappa}{2\pi V} \quad (3.46)$$

dove  $V = \sqrt{-\xi^a \xi_a}$  è il fattore di redshift e le componenti  $\xi^a$  sono valutate nel punto in cui si trova l'osservatore. Per un buco nero di Schwarzschild, usando l'equazione (1.18),

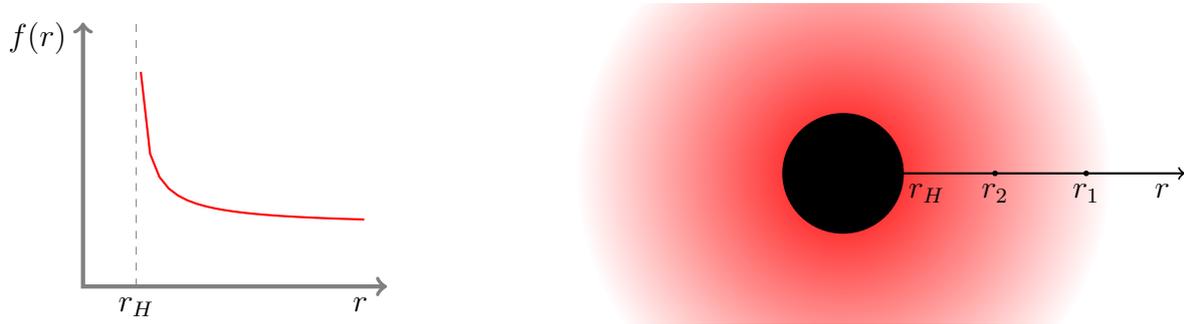


Figura 3.2: A sinistra è riportato il grafico dell'andamento del redshift  $f(r) = \frac{1}{\sqrt{1-r_H/r}}$ , che porta a un aumento della temperatura dell'atmosfera termica (nel disegno di destra indicata in rosso) percepita da un osservatore che si spostasse da  $r_1$  a  $r_2$ . Si nota la divergenza della temperatura percepita  $T(r) \rightarrow \infty$  nel limite  $r \rightarrow r_H$ .

ciò si riduce a

$$T(r) = \frac{\hbar\kappa}{2\pi\sqrt{1-\frac{2M}{r}}} \quad (3.47)$$

Quindi, secondo osservatori statici, il buco nero è circondato da una *atmosfera termica* [27]. Come riportato in precedenza, un osservatore in caduta libera non percepisce alcuna radiazione uscente dal buco nero, perché egli vede semplicemente uno stato di vuoto (con al più creazione e distruzione di coppie); su osservatori statici o quasi-stazionari, invece, l'atmosfera termica ha il notevole effetto di trasferire energia, di intensità crescente avvicinandosi all'orizzonte, come è mostrato in Figura 3.2.

Chiediamoci ora quale sia la fonte di energia della radiazione di Hawking. Secondo quanto esposto, per un osservatore esterno le particelle in caduta hanno un'energia negativa, e dunque riducono la massa  $M$  del buco nero, che diventa la sorgente effettiva dell'energia dello spettro di Hawking. È il buco nero ad emettere il flusso di Hawking, ed è in questo senso che il buco nero subisce un processo di evaporazione, di cui si studiano ora le caratteristiche.

Si consideri la Legge di Stefan-Boltzmann e la si applichi allo spettro di Hawking prodotto da un buco nero di Schwarzschild:

$$\dot{M} = -\sigma T_H^4 A \quad (3.48)$$

dove  $\sigma T_H^4$  è la potenza emessa per unità di area. Scrivendo la costante di Stefan-Boltzmann in unità naturali con  $k_B = 1$

$$\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 \hbar^3 c^2} = \frac{\pi^2}{60} \quad (3.49)$$

e sostituendo i valori noti di  $T_H = \frac{1}{8\pi M}$  e  $A = 16\pi M^2$ , si ottiene

$$\dot{M} = -\frac{1}{15 \cdot 2^{10} \pi} \frac{1}{M^2} \quad (3.50)$$

che integrata porta a una stima del tempo di evaporazione

$$t_{evap} = -15 \cdot 2^{10} \pi \int_M^0 \widetilde{M}^2 d\widetilde{M} = 5120\pi M^3 \quad (3.51)$$

che per un buco nero di massa solare risulta di circa  $10^{75}$  secondi.

Si noti che la diminuzione della massa  $M$  porta a una diminuzione dell'area  $A$  del buco nero; questo non è in contrasto con il Teorema dell'Area (2.38), poiché per campi scalari la condizione di energia forte non è soddisfatta [3, 27], ma porta comunque a chiedersi quale sia la sorte della Seconda Legge Generalizzata (3.11) se si prende in considerazione la radiazione di Hawking.

Come riportato, lo spettro è solo in prima approssimazione planckiano, e sono stati identificati almeno tre effetti che ne modificano la forma [26]. I *fattori di corpo grigio* sono dovuti alla curvatura della varietà al di fuori dell'orizzonte, la quale si comporta come una barriera di potenziale che filtra la radiazione di Hawking, causando una riflessione verso l'interno del buco nero di una frazione del flusso uscente, parzialmente soppresso [8].

Si noti poi che considerare, come si è soliti fare, soluzioni stazionarie a massa  $M$  costante è già di per sè un'approssimazione: l'emissione stessa di un singolo quanto varia la massa del buco nero, e, con essa, anche la gravità superficiale  $\kappa$ , che a sua volta causa un cambiamento in  $T_H$  e quindi nella distribuzione di frequenze del flusso uscente. Affinché quest'ultimo rimanga approssimativamente planckiano, le richieste sulla coerenza temporale della radiazione rilevata all'infinito si rispecchiano nella necessità di avere una evoluzione lenta della gravità superficiale, ossia *vincoli di adiabaticità* sul buco nero. Si deve quindi porre che un quanto del campo emesso non veda alcun cambiamento significativo nella gravità superficiale durante un suo periodo di oscillazione, che corrisponde a chiedere che sia di frequenza  $\omega$  sufficientemente alta:

$$\omega \gtrsim \omega_{min} = \sqrt{|\dot{\kappa}|} \quad (3.52)$$

e ciò porta a un cut-off infrarosso nel flusso di Hawking.

Ammettendo poi la Censura cosmica, troviamo anche un effetto associato allo spazio delle fasi, che porta a un cut-off ultravioletto. Infatti, l'energia del quanto emesso deve essere on-shell, e quindi non può essere tale da rendere il buco nero estemale, ossia

$$\omega < \omega_{max} = M - M_{estr} \quad (3.53)$$

dove con  $M_{estr}$  si intende la massa definita dalla condizione (2.10).

In sintesi, lo spettro emesso  $n(\omega)$  è non nullo nell'intervallo  $(\omega_{min}, \omega_{max})$ , dove è *al più* planckiano:

$$n(\omega) = \frac{f(\omega)}{\exp(\frac{\hbar\omega}{k_B T_H}) - 1} \quad (3.54)$$

con  $f(\omega) \in (0, 1)$  fattore di corpo grigio che tiene conto dei tre effetti descritti, con  $f(\omega) \simeq 0$  per  $\omega \notin (\omega_{min}, \omega_{max})$ . Come è ovvio, questo spettro definisce, in termini di potenza emessa con la Legge di Stefan-Boltzmann, una temperatura efficace  $T_{eff} \leq T_H$ .

Pur spingendo la Termodinamica dell'equilibrio al confine dei suoi domini, siamo ora in grado di stimare il contributo entropico dell'evaporazione di un buco nero sul bilancio dell'universo. Istantaneamente, l'emissione di radiazione di Hawking porta a una diminuzione dell'entropia del buco nero

$$dS_{BH} = -\frac{|dM|}{T_H} \quad (3.55)$$

mentre alla radiazione uscente è associata un'entropia

$$dS_{rad} = +\frac{|dM|}{T_{eff}} \quad (3.56)$$

quindi il bilancio complessivo rispetto all'entropia generalizzata è

$$dS' = dS_{BH} + dS_{rad} = |dM| \left( \frac{1}{T_{eff}} - \frac{1}{T_H} \right) \geq 0 \quad (3.57)$$

Perciò, nonostante l'area dell'orizzonte diminuisca, si è piuttosto rassicurati sulla validità della Seconda Legge Generalizzata, anche in presenza della radiazione di Hawking.

### 3.3 L'origine statistica dell'entropia

Nella sezione precedente è stato determinato il valore del fattore numerico dell'entropia di Bekenstein-Hawking. A meno di correzioni di ordine superiore, l'entropia associata a un buco nero risulta la (3.45), ma non è stata ancora individuata la fisica che essa sottintende.

Si osservi che, per definizione, la regione interna all'orizzonte è causalmente sconnessa rispetto a quella esterna<sup>2</sup>, quindi le condizioni interne al buco nero sono irrilevanti per un osservatore esterno. Alla luce di questo, viene giustificato sensibilmente il fatto che  $S_{BH}$  dipenda dall'area  $A$  e non dal volume, inteso in un qualche senso, del buco nero, come in un sistema termodinamico classico. L'essenzialità di questo motivo intuitivo spinge

<sup>2</sup>Per soluzioni stazionarie, questo è vero tanto per un orizzonte degli eventi quanto, a maggior ragione, per un orizzonte apparente, per quanto detto nella Sezione 1.4

a pensare che, nel costruire una meccanica statistica adeguata, si debbano contare dei gradi di libertà associati all'orizzonte, più che dei microstati "interni" al buco nero.

Seguendo questa linea, Sorkin [21] ha individuato una divisione dei modi con cui, negli anni, ci si è approcciati al problema, facendo risalire i gradi di libertà associati a  $S_{BH}$ :

1. alla forma geometrica dell'orizzonte, e, in particolare, a correzioni non previste classicamente dalla Relatività Generale;
2. ai modi dei campi quantistici che si propagano nei pressi e all'esterno dell'orizzonte, ossia si assume che le caratteristiche della radiazione di Hawking o dell'atmosfera termica costituiscano l'origine per l'entropia  $S_{BH}$ ;
3. ai gradi di libertà fondamentali di una teoria di gravità quantistica.

Non è detto che queste tre vie si escludano l'un l'altra, e, ugualmente, esse non includono tutte le interpretazioni che sono state date dell'entropia di Bekenstein-Hawking. Si compirà ora un'analisi di alcune ipotesi relative alla seconda strada, sviluppandole anche alla luce di ragionamenti propri della prima.

Un semplice e interessante ragionamento in grado di legare la radiazione di Hawking ai gradi di libertà relativi all'entropia  $S_{BH}$  è stato compiuto, senza completa intenzione manifesta, da Zurek e Thorne [32]. L'intento è di stimare il numero  $W$  dei modi con cui un buco nero di Schwarzschild di massa  $M$  può essere costruito per accrescimento con quanti in caduta libera dall'infinito spaziale, secondo un'idea che è presente, tra le righe, già nei primi lavori di Bekenstein [4].

Poniamo che nel buco nero si propagano  $\nu_\phi$  campi; possiamo pensare che vi cadano quanti per lo più a bassa energia, cioè prossima a quella relativa alla lunghezza d'onda minima che può assorbire un corpo delle dimensioni del buco nero. L'energia di un singolo quanto è allora stimabile come

$$\varepsilon \simeq \frac{\hbar}{2M} \quad (3.58)$$

Introducendo, per comodità, il *numero di Bekenstein*

$$N_B := \frac{4\pi M^2}{\hbar} \quad (3.59)$$

pari ( $k_B = 1$ ) all'entropia di un buco nero di Schwarzschild di massa  $M$ , risulta che il numero di quanti necessari per costruire il buco nero è

$$n_\infty \simeq \frac{M}{\varepsilon} = \frac{2M^2}{\hbar} = \frac{N_B}{2\pi} \quad (3.60)$$

Calcoliamo ora il volume totale  $\Gamma$  nello spazio delle fasi che gli  $n_\infty$  quanti occupano prima di entrare nel buco nero. Per quanto riguarda lo spazio delle configurazioni, la sezione d'urto di assorbimento classica per fotoni è

$$\sigma = 27\pi M^2 \quad (3.61)$$

Pensando poi a particelle in regime relativistico<sup>3</sup>, il volume spaziale effettivo può essere stimato come

$$V = \sigma t_{evap} = 27\pi M^2 t_{evap} \quad (3.62)$$

Con queste assunzioni, nello spazio dei momenti sarà occupato un volume di circa  $\varepsilon^3$ , da cui

$$\Gamma = 27\pi \varepsilon^3 M^2 t_{evap} \quad (3.63)$$

Usando la (3.58) e notando che, con  $\nu_\phi$  campi, il tempo di evaporazione (3.51) va diviso per il numero di campi, ossia

$$t_{evap} = \frac{5120\pi M^3}{\nu_\phi \hbar} = \frac{1280 N_B M}{\nu_\phi} \quad (3.64)$$

risulta allora

$$\Gamma = 27 \cdot 160 \pi \frac{\hbar^3}{\nu_\phi} N_B \quad (3.65)$$

D'altra parte, ci aspettiamo che la densità degli stati nello spazio delle fasi sia  $\rho = \nu_\phi / (2\pi\hbar)^3$ , per cui il numero di modi in cui le  $n_\infty$  particelle possono essere iniettate nel buco nero è

$$N = \Gamma \rho \simeq \frac{540}{\pi^2} N_B \quad (3.66)$$

Assumendo infine che siano bosoni, il numero di modi in cui gli  $n_\infty$  quanti possono essere distribuiti negli  $N$  stati è

$$W \simeq \frac{(N-1+n_\infty)!}{(N-1)! n_\infty!} \quad (3.67)$$

Per cui l'entropia associata  $S = \ln W$  vale

$$S \simeq N \ln \left(1 + \frac{n_\infty}{N}\right) + n_\infty \ln \left(\frac{N}{n_\infty} + 1\right) \simeq \left(\frac{540}{\pi^2} \ln \left(1 + \frac{\pi}{1080}\right) + \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1080}{\pi} + 1\right)\right) N_B$$

Da cui si giunge a  $S \simeq 1.09 N_B$ , cioè si ritrova l'ordine di grandezza del valore corretto  $N_B$ .

Vi sono due commenti principali che è necessario fare sul procedimento seguito. Il primo è che viene definito uno spazio delle fasi che è relativo alle particelle dei campi che si propagano nei pressi dell'orizzonte, ed è estraneo al buco nero stesso. Si noti, in

---

<sup>3</sup>Si noti, non ultra-relativistico, condizione che andrebbe contro all'assunzione di basse energie  $\varepsilon$ .

particolare, come è stato evitato il problema di definire il volume interno al buco nero mediante la sezione d'urto di assorbimento, la quale non è altro che un multiplo dell'area  $A$ .

In secondo luogo, è interessante osservare che l'analisi dell'accrescimento seguita ricalca in tutto un'inversione temporale approssimata dell'evaporazione dovuta alla radiazione di Hawking: basti vedere che  $\varepsilon$  è molto prossima all'energia di picco dello spettro emesso da un buco nero di Schwarzschild di massa  $M$ , e anche che il tempo di accrescimento considerato è proprio  $t_{evap}$ . Non è inaspettato, perciò, che calcoli diretti sulla radiazione di Hawking basati sulla Legge di Stefan-Boltzmann portino a un'entropia sempre di ordine compatibile con  $N_B$  [15].

### 3.4 Il modello a muro di mattoni e le deformazioni dell'orizzonte

Si vuole ora analizzare un semplice modello di 't Hooft [23, 24] che intende legare i gradi di libertà di  $S_{BH}$  all'atmosfera termica del buco nero. Nell'approccio, differisce profondamente dalla stima presentata da Zurek e Thorne, basata sulla natura corpuscolare della radiazione incidente (ed emessa); la conseguenza principale è una diversa identificazione dello spazio delle fasi associato all'entropia  $S_{BH}$ , non essendo più connesso alla dinamica di particelle ma, come si vedrà, alla propagazione di funzioni d'onda.

Da quanto detto sull'atmosfera termica, emerge che nella soluzione di Schwarzschild, secondo un osservatore statico posto a  $r \gtrsim r_H$ , le particelle emesse dal buco nero hanno un'energia relativamente grande ( $T(r) \rightarrow \infty$  per  $r \rightarrow r_H$ ); ciò fa intuire che sono portatrici di una quantità arbitraria di entropia  $dS \sim dE/T_H$ , tanto più ci si avvicina all'orizzonte. Si considerino allora  $Z$  campi scalari propagantisi nel buco nero (premessa analoga a quella di Zurek e Thorne). Al fine di trovare un'entropia finita associata all'atmosfera termica, si può pensare di regolarizzare la divergenza citata imponendo un cut-off ultravioletto nella propagazione delle funzioni d'onda nei pressi dell'orizzonte:

$$\phi(r) = 0 \quad \text{per} \quad r \leq 2M + h \quad (3.68)$$

dove  $\phi$  è uno degli  $Z$  campi; questo procedimento di regolarizzazione è stato denominato *muro di mattoni* (*brick wall*<sup>4</sup>), che in questo caso è di spessore  $h$ . Aggiungiamo anche un cut-off infrarosso, ininfluenza sui risultati, a grande distanza dall'orizzonte, in modo da ottenere una scatola di potenziale finita:

$$\phi(r) = 0 \quad \text{per} \quad r \geq L \quad (3.69)$$

Lo schema delle condizioni poste è riportato in Figura 3.3

---

<sup>4</sup>Nonostante il nome, è bene notare che un osservatore in caduta libera lo vedrebbe piuttosto come uno specchio uniformemente accelerato verso la sua direzione.

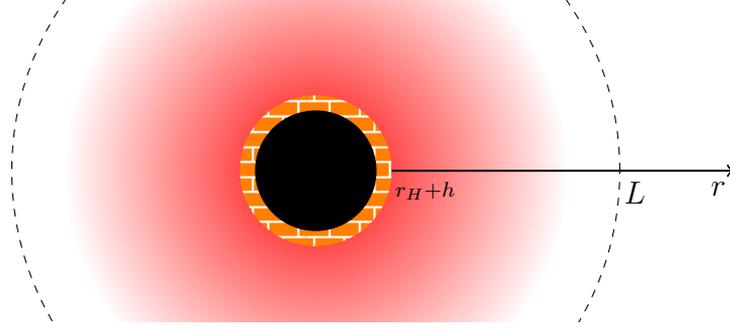


Figura 3.3: La figura riporta lo schema del *brick wall model*, con il cut-off UV di spessore  $h$ , e quello a grandi distanze per  $r \geq L$ , imposto al fine di avere una scatola di potenziale finita.

Associando quindi al campo una massa  $m \ll m_p = 1 \ll M$ , l'equazione di Klein-Gordon legge

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E^2 \phi + \frac{1}{r} \partial_r \phi + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \partial_r^2 \phi - \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + m^2\right) \phi = 0 \quad (3.70)$$

dove è stata sottintesa per  $\phi$  la scrittura  $\phi_{E,l}$ . Definiamo il vettore d'onda radiale

$$k^2(r; l, E) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \left[ E^2 - \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + m^2\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \right] \quad (3.71)$$

e riscriviamo la (3.70) come

$$\partial_r^2 \phi + \frac{2}{r} \frac{r-M}{r-2M} \partial_r \phi + k^2 \phi = 0 \quad (3.72)$$

Con questa equazione, seguendo un procedimento simile a quello compiuto per la radiazione di Hawking, si possono trovare le soluzioni nell'approssimazione WKB. Ci interessa però, più della loro forma esplicita, il numero di queste soluzioni, in particolare di quelle con energia associata inferiore di una certa  $E$ . Il caso è quello di una scatola di potenziale, perciò è sufficiente un calcolo diretto del volume nello spazio delle fasi; detto  $n$  il numero di modi radiali fissato un doppietto  $(l, E)$ , vale che

$$\pi n(l, E) = \int_{2M+h}^L dr k(r; l, E) \quad (3.73)$$

Per cui il numero totale di soluzioni con energia inferiore a  $E$  nei pressi  $(2M + h, L)$  dell'orizzonte è

$$N(E) = \int_{\Lambda(E)} (2l+1) \pi n(l, E) dl \quad (3.74)$$

con  $\Lambda(E)$  insieme dei valori di  $l$  che, fissata  $E$ , rendono reale il vettore d'onda  $k$ . Sostituendo,

$$N(E) = \int_{2M+h}^L dr \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \int_{\Lambda(E)} dl (2l+1) \sqrt{E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(m^2 + \frac{l(l+1)}{r^2}\right)} \quad (3.75)$$

dove si vede chiaramente che sarebbe riscontrata una divergenza di  $N(E)$  causata dal termine di redshift, integrando in  $dr$  su  $(2M, L)$ .

Possiamo ora studiare la termodinamica del sistema. Notiamo innanzitutto che con le coordinate di Schwarzschild stiamo considerando un osservatore statico all'infinito spaziale, e si osservi perciò che egli vede l'atmosfera termica alla temperatura di Hawking  $T_H$ . Definiamo la funzione di partizione

$$Z_C(\beta) = \int_m^\infty e^{-\beta E} \frac{dN}{dE}(E) dE \quad (3.76)$$

con  $\beta = \frac{1}{T_H} = 8\pi M$ . Si può allora calcolare per ogni campo l'energia libera  $\Phi$ , che, per l'onda  $s$  ( $l=0$ ) e ricordando le assunzioni di  $m \ll M$  e  $L \gg 2M$ , risulta costituita da due contributi principali:

$$\Phi(\beta) = -\frac{1}{\beta} \ln Z_C(\beta) \simeq -\frac{2\pi^3}{45h} \left(\frac{2M}{\beta}\right)^4 - \frac{2}{9\pi} L^3 \int_m^\infty dE \frac{(E^2 - m^2)^{3/2}}{e^{\beta E} - 1} \quad (3.77)$$

Il secondo termine dipende dalle condizioni del campo a grandi distanze, mentre il primo racchiude il parametri di cut-off  $h$  ed è quello di interesse. Calcolando con quest'ultimo l'energia totale  $U$ , l'entropia comprensiva di tutti i  $Z$  campi risulta infine

$$S_{at} = Z\beta(U - \Phi) \simeq \frac{8\pi^3 (2M)^4}{45h \beta^3} Z \quad (3.78)$$

Come da aspettativa, il parametro di cut-off  $h$  deve avere un valore non nullo, perchè  $S_{at}$  diverge linearmente per  $h \rightarrow 0$ .

L'intento iniziale era ovviamente quello di ricavare l'entropia di Bekenstein-Hawking; uguagliando allora la (3.78) all'entropia nota  $S_{BH} = 4\pi M^2$ , si ottiene il valore

$$h = \frac{Z}{720\pi M} \quad (3.79)$$

Leggendola in termini di lunghezza propria,

$$h_0 = \int_{2M}^{2M+h} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} = \sqrt{\frac{Z}{90\pi}} \quad (3.80)$$

quindi il cut-off risulta unicamente una proprietà dei campi che si propagano nei pressi di un orizzonte, indipendente dallo specifico buco nero. Notiamo anche che, per un valore di  $Z$  non troppo elevato, si ha  $h_0 \simeq 1$ , cioè dell'ordine della lunghezza di Planck  $l_P$ .

Questo risultato suggerisce innanzitutto la presenza di una scala fondamentale in natura, legata a una qualche granularità dello spazio-tempo associata a  $h_0$ ; non si indagherà oltre questo aspetto. D'altra parte, si rivela problematica la dipendenza dell'entropia (3.78) dal numero delle specie  $Z$ , quando  $S_{BH}$  ha evidentemente riguardo soltanto dell'area  $A$ . È ragionevole però che l'area  $A$  sia legato al numero di campi, mediante un qualche processo di retroazione dei campi sulla forma dell'orizzonte. Al fine di indagare in questo senso e ottenere una prima stima sulle conseguenze di tale presupposto, si intende presentare un calcolo in approssimazione newtoniana che riprende in maniera più stringente alcune considerazioni esposte da Sorkin [20].

Si pensi alla naturale definizione newtoniana di orizzonte, inteso come superficie equipotenziale sulla quale la velocità di fuga è pari a quella della luce: detto  $V(r)$  il potenziale gravitazionale newtoniano,

$$\frac{1}{2}m + mV = 0 \quad \longrightarrow \quad V = -\frac{1}{2} \quad (3.81)$$

Facendo riferimento alla Figura 3.4, si consideri allora una massa  $M$  puntiforme: con questa definizione, è noto che l'orizzonte associato coincide proprio con la sfera di raggio  $R = 2M$ , da cui segue che il potenziale gravitazionale imperturbato in  $r$  è

$$V_0 = -\frac{R}{2r} \quad (3.82)$$

Assumiamo di avere una fluttuazione isolata di massa  $m$  con distribuzione deltiforme centrata in  $R + \lambda$ , dove  $\lambda = \frac{1}{m}$  è la lunghezza Compton della massa e caratteristica della fluttuazione. Il potenziale gravitazionale risultante è

$$V_1(r) = 4\pi \int_0^\infty \frac{\rho(r')}{r - r'} dr' = -4\pi m \int_0^\infty \frac{\delta(r' - R - \lambda)}{r' - r} dr' = -\frac{4\pi}{\lambda(R - r + \lambda)} \quad (3.83)$$

Quindi risulta un potenziale perturbato complessivo

$$V(r) = -\frac{R}{2r} - \frac{4\pi}{\lambda(R - r + \lambda)} \quad (3.84)$$

La nuova posizione radiale dell'orizzonte è data dalla (3.81), cioè, indicando con  $|h| \doteq r - R$  l'altezza del rigonfiamento che si forma sull'orizzonte:

$$\frac{R}{R + h} + \frac{8\pi/\lambda}{h + \lambda} = 1 \quad (3.85)$$

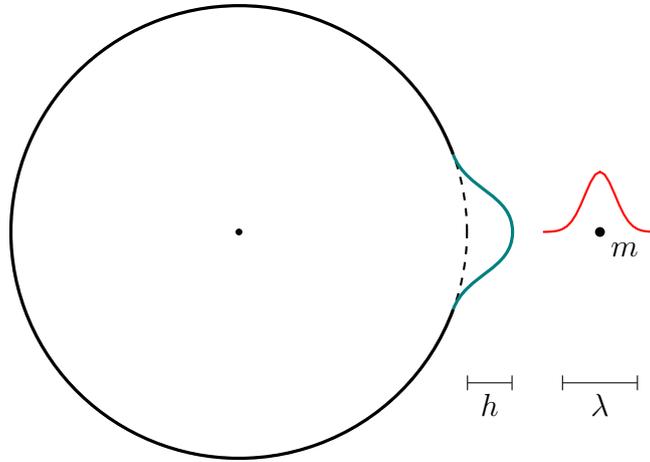


Figura 3.4: È mostrato lo schema dell'ipotesi di deformazione dell'orizzonte a seguito di fluttuazioni quantistiche, qui trattata in approssimazione newtoniana: l'orizzonte è infatti definito come la superficie equipotenziale su cui la velocità di fuga è pari a  $c$ .

Risolta nell'approssimazione  $R \gg h$ , quest'equazione porta alla soluzione fisica

$$\left| \frac{h}{\lambda} \right| = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + 32\pi \left( \frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^3} + 1 \right) \quad (3.86)$$

con  $\lambda_0 = \sqrt[3]{Mt_P^2} = \sqrt[3]{M}$ . Emergono così due casi fenomenologicamente distinti:

- per  $\lambda \gtrsim \lambda_0$ , si ha  $h \sim \lambda \lesssim \lambda_0$ , ossia un accoppiamento lineare tra distorsione dell'orizzonte e fluttuazione, che presentano dimensioni dello stesso ordine;
- per  $\lambda \ll \lambda_0$ , segue che  $\frac{h}{\lambda} \simeq 2\sqrt{2}\pi \left( \frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^{\frac{3}{2}} \gg 1$ , cioè troviamo un rigonfiamento molto maggiore della fluttuazione, e dunque non possiamo più considerare il nostro modello (di singola fluttuazione isolata) valido.

Per quanto riguarda quest'ultimo caso, si noti però che, per ora, sono stati ignorati i ritardi di propagazione del disturbo dovuto alla fluttuazione, di ordine pari alla vita  $\lambda$  della fluttuazione stessa; nel caso in cui se introducessero gli effetti, è concepibile che l'altezza del rigonfiamento non potrebbe mai superare  $\lambda$  stesso, ossia la distanza di influenza della fluttuazione, che è molto minore di  $\lambda_0$ .

In conclusione, diventa ragionevole che le distorsioni dell'orizzonte dovute a fluttuazioni di lunghezza caratteristica  $\lambda$  siano a loro volta di dimensioni di ordine non superiore

a  $\lambda_0$ . Si potrebbe perciò interpretare l'insieme di questi rigonfiamenti come in grado di conferire all'orizzonte uno spessore efficace radiale  $\Delta r \sim \lambda_0$ , dipendente dalla massa del buco nero in esame. Non si può certo caratterizzare la regione compresa nello spessore  $\Delta r$  come esterna al buco nero, ed è quindi concepibile che questo parametro introduca un cut-off fisico nel calcolo dell'entropia, di ruolo del tutto analogo a quello imposto con  $h$  nel modello di 't Hooft al fine di ottenere  $S_{BH}$ . Notiamo infine che a  $M \gg m_P$  segue  $\Delta r \gg h \sim l_P$ ; l'entropia  $S_{at}$  relativa all'atmosfera termica risulterebbe così molto minore di  $S_{BH}$ , della quale diventerebbe una correzione al secondo ordine, in quanto sempre propria di un buco nero ma non della geometria del suo orizzonte (la quale entra in gioco con l'area  $A$ ). Si ricordi, a questo proposito, che l'entropia di Bekenstein-Hawking non è l'espressione esatta dell'entropia di un buco nero, ma al più una sua approssimazione al primo ordine, in quanto ottenuta direttamente dalla Prima Legge.

Con ragionamenti simili a quello presentato, si può anche mostrare che, per  $\lambda \sim \lambda_0$ , le distorsioni dell'orizzonte sono circa larghe quanto alte. Si può infine verificare che questi risultati non dipendono in maniera essenziale dalla distribuzione di massa scelta; si potrebbero infatti compiere calcoli fisicamente più realistici, per esempio con una distribuzione gaussiana, o con un dipolo allineato radialmente, senza che le conclusioni subissero modifiche.

Ci si può chiedere quale sia il comportamento di una generalizzazione relativistica di questa discussione [12]. Si osservi che, anche in questo caso, sarà sufficiente compiere stime sugli ordini di grandezza e sulle dipendenze dai parametri classici che caratterizzano un buco nero, senza bisogno dei corretti fattori numerici, al fine di giungere a conclusioni rilevanti.

Come primo passo, consideriamo i gradi di libertà associati all'atmosfera termica nei pressi dell'orizzonte: si prenda un pacchetto d'onda localizzato entro una distanza propria  $L$  dall'orizzonte di un buco nero di Schwarzschild, con  $L$  molto minore della scala di curvatura locale. È utile ricordare che, in uno spazio-tempo piatto, quando un modo di un campo è localizzato in una regione molto limitata, vi è associata un'energia corrispondentemente grande. D'altra parte, in uno spazio-tempo che presenta un buco nero, per effetto del redshift, modi molto localizzati nei pressi dell'orizzonte hanno per un osservatore all'infinito un'energia associata relativamente bassa.

Dalla (1.20), risulta che un osservatore all'infinito ( $r_O \gg r_H$ ) vede l'energia del pacchetto d'onda ridotta da un fattore di redshift

$$z \simeq \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_H}{r_S}}} - 1 \simeq \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_H}{r_S}}} \quad (3.87)$$

dove  $r_S \simeq r_H$  è la posizione radiale del pacchetto d'onda. Riscriviamo l'equazione (1.19) come  $E_O(z + 1) = E_S$ , con  $E_S \sim 1/L$ . Allora l'energia del pacchetto d'onda vista dall'infinito è

$$E_O \sim \frac{1}{L(z + 1)} \simeq \frac{1}{Lz} \quad (3.88)$$

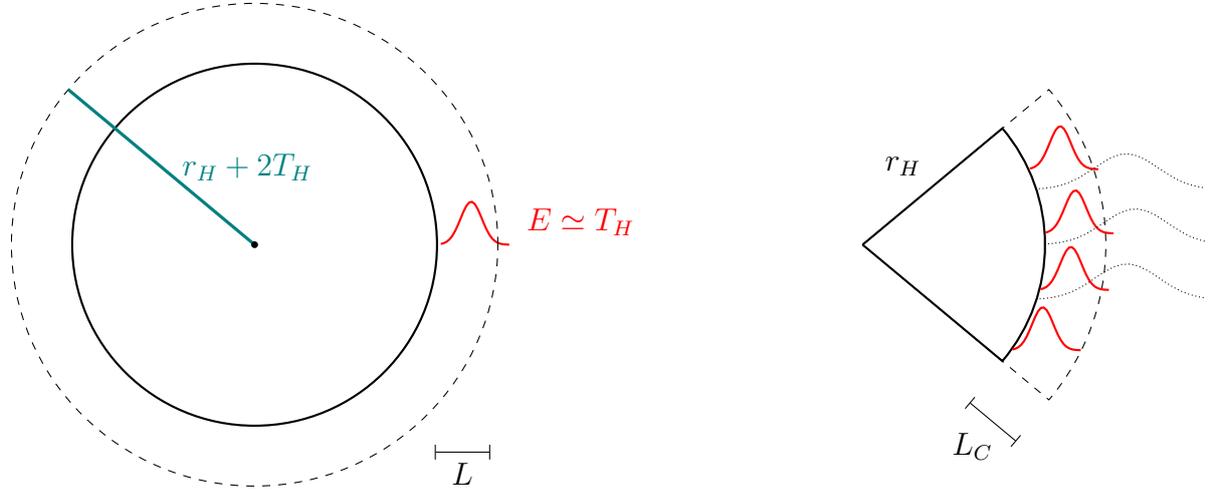


Figura 3.5: A sinistra è rappresentata la discussione dell'energia dei modi a distanza propria  $L$  dall'orizzonte, mentre a destra l'espansione dell'orizzonte di  $L_C$  causata dal contributo energetico dei modi nei suoi pressi. Con il segmento  $\dashv$  sono indicate le lunghezze proprie.

Ma, per quanto detto nella Sezione 3.2, questa energia è dell'ordine di quella relativa allo spettro di Hawking, quindi

$$\frac{1}{Lz} \sim T_H \quad (3.89)$$

Si osservi che questo ragionamento può essere compiuto per ogni  $L$ , perciò, alla luce di questa stima, non è inaspettato che i modi nei pressi dell'orizzonte (di energia dell'ordine di  $T_H$ ) diano un contributo infinito all'entropia dell'atmosfera termica, nel caso in cui non si introduca alcun cut-off.

Effettivamente, però, non è lecito descrivere fisicamente un modo di energia  $T_H$  al di sotto del raggio  $r = r_H + 2T_H$ , semplicemente perchè una particella in un modo del genere sarebbe interna al buco nero di raggio  $r_H + T_H$  (vedi Figura 3.5). Si conclude allora che oscillazioni relative a questi modi siano più propriamente descritte da eccitazioni dell'orizzonte, e che, in questo senso, debbano essere già comprese nell'equazione geometrica (3.45), intendendo con  $A$  non l'area classica ma quella effettiva. Quel che rimane dell'entropia di atmosfera termica, deve essere necessariamente un contributo ulteriore rispetto a  $S_{BH}$ .

Cerchiamo dunque un cut-off (pari allo spessore efficace dell'orizzonte dovuto alle fluttuazioni) che ricalchi questo ragionamento; si faccia anche in questo caso l'ipotesi ragionevole che la fluttuazione sia isolata: essa infatti ha vita nell'ordine di  $L$ , e, di

conseguenza, la fluttuazione non può ricevere informazioni da punti più lontani di una distanza propria dell'ordine di  $L$ . Perciò, non può sapere di essere o meno parte di un guscio sferico di fluttuazioni simili. Supponendo allora che il buco nero sia circondato da un guscio sferico di questo tipo, ci si propone di determinarne lo spessore massimo che includa abbastanza fluttuazioni da essere in grado di inglobarle in un orizzonte (perturbato) di coordinata radiale  $R > r_H$ , grazie al contributo energetico da esse portato.

Compiendo un calcolo al primo ordine perturbativo, si consideri la metrica imperturbata (1.8) di un buco nero di Schwarzschild. Studiamo lo spostamento dell'orizzonte verso l'esterno nel momento in cui si aggiunge un guscio sferico di massa  $\Delta m_{sph}$  al buco nero. Il nuovo orizzonte avrà coordinata radiale  $R = 2(M + \Delta m_{sph})$ , a cui, dal risultato (3.2), corrisponde una distanza radiale propria dall'orizzonte imperturbato

$$\xi = \int_{2M}^{2(M+\Delta m_{sph})} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} \simeq \sqrt{2M\Delta m_{sph}} \quad (3.90)$$

ossia

$$\Delta m_{sph} \simeq \frac{\xi^2}{2M} \quad (3.91)$$

Consideriamo poi il numero  $N$  di modi contenuti nel guscio sferico individuato dalle distanze radiali  $L$  e  $L + dL$  dall'orizzonte. I pacchetti d'onda in analisi hanno dimensione  $L$  in ogni direzione, e da questo si può giungere alla stima

$$N \sim \frac{\mathcal{S}}{L^2} \sim \frac{(R+L)^2}{L^2} \simeq \frac{R^2}{L^2} \quad (3.92)$$

dove  $\mathcal{S}$  è l'area della superficie (interna) del guscio sferico, che risulta, in sintesi, divisa in "celle" di area  $L^2$  (al pari della superficie dell'orizzonte, nell'approssimazione  $R+L \simeq R$ ).

Sappiamo dalla (3.89) che una singola fluttuazione di dimensione caratteristica  $L$  a distanza  $L$  dall'orizzonte imperturbato ha energia dell'ordine di  $\delta m \sim T_H \sim 1/M$ . Detto allora  $Z(L)$  il numero di campi che ammettono modi con lunghezza caratteristica  $L$ , un guscio sferico di queste fluttuazioni presenta una massa

$$\Delta m_{sph} \sim N \delta m Z(L) \sim Z T_H \left(\frac{R}{L}\right)^2 \sim Z \frac{M}{L^2} \quad (3.93)$$

Uguagliando quest'ultima equazione alla (3.91), si ottiene

$$\xi \sim \sqrt{Z(L)} \frac{M}{L} \quad (3.94)$$

Confrontando le due lunghezze proprie  $\xi$  e  $L$  trovate, emerge che  $L > \xi$  se e solo se  $L > L_C$ , con

$$L_C \sim Z^{\frac{1}{4}} \sqrt{M} = Z^{\frac{1}{4}} \sqrt{M l_P} \quad (3.95)$$

che figura quindi come una stima dello spessore dell'orizzonte dovuto a oscillazioni quantistiche, le quali, al di sotto della distanza propria  $L_C$  dall'orizzonte, non possono essere distinte dal buco nero stesso. Si deve segnalare qui una differente dipendenza del cut-off da  $M$  rispetto a quella in radice cubica trovata precedentemente in  $\lambda_0$ ; tuttavia, si ha ancora  $L_C \gg l_P$  per  $M \gg m_P$ , quindi troviamo la conferma che l'entropia dell'atmosfera termica vada considerata una correzione al secondo ordine di  $S_{BH}$ , e non il suo corrispondente, come si intuiva già dal calcolo precedente in approssimazione newtoniana.

Notiamo inoltre che  $L_C$  dipende da  $L$  attraverso  $Z(L)$ , anche se si può considerare il suo ordine di grandezza stabile, data la sostanziale piattezza della radice quarta lontano dall'origine. Questo calcolo suggerisce così che nell'entropia associata all'atmosfera termica rimanga sostanzialmente la dipendenza dal numero delle specie  $Z$ , come, d'altra parte, è ragionevole che sia. Riprendiamo infatti l'entropia  $S_{at}$  (3.78) trovata nel caso di un buco nero di Schwarzschild, e sostituiamo  $L_C$  al cut-off  $h$ :

$$S_{at} \simeq \frac{8\pi^3}{45L_C} \frac{(2M)^4}{\beta^3} Z \simeq \alpha M^{1/2} Z^{3/4} \quad (3.96)$$

dove  $\alpha$  è un'opportuna costante numerica. Includendo questa correzione al secondo ordine, l'entropia totale associata a un buco nero di Schwarzschild risulta

$$S = S_{BH} + S_{at} = 4\pi M^2 + \alpha M^{1/2} Z^{3/4} \quad (3.97)$$

ed è chiaro come  $S_{at}$  sia parametricamente minore rispetto all'entropia di Bekenstein-Hawking, ma sempre non trascurabile.

# Conclusioni

Sono state studiate le caratteristiche più importanti della soluzione statica di Schwarzschild, analizzando il comportamento di osservatori statici e in caduta libera, e il redshift sui segnali percepiti da osservatori a coordinate radiali diverse. Prendendo a esempio questa soluzione, sono state discusse le definizioni di orizzonte degli eventi, di tipo geometrico, e di orizzonte apparente, di tipo cinematico, alla luce del concetto di causalità in Relatività Generale. Sono state quindi trattate le condizioni energetiche ed è stata compiuta una breve descrizione di alcuni dei maggiori risultati di Hawking e Penrose sulle singolarità, volti a legare quest'ultimo concetto con quello di orizzonte.

Sono stati poi ripresi gli aspetti più rilevanti della metrica di Kerr-Newman, la più generale delle soluzioni stazionarie, soffermandosi sulle proprietà delle sue singolarità e orizzonti. Partendo dal concetto di orizzonte di Killing, si è definita la gravità superficiale  $\kappa$  e la sua relazione con l'accelerazione propria. Si sono quindi discusse le Quattro Leggi dei buchi neri, il cui ruolo è porre vincoli sul comportamento dinamico delle variabili macroscopiche di massa, carica e momento angolare di un buco nero, attraverso i parametri di area dell'orizzonte  $A$  e di gravità superficiale.

Si è visto in che modo la richiesta di una Seconda Legge Generalizzata e la somiglianza delle Quattro Leggi con i Principi della Termodinamica spingano ad attribuire ai buchi neri una temperatura  $T_H$ , dipendente dalla gravità superficiale, e un'entropia  $S_{BH}$ , proporzionale ad  $A$ . Queste due quantità rimangono tuttavia di dubbia interpretazione fisica, se si rimane nell'ambito della Relatività Generale classica. Considerando, però, la propagazione dei campi quantistici nei pressi dell'orizzonte, si è giunti alla conclusione che un buco nero, visto da un osservatore statico all'infinito, in prima approssimazione emette uno spettro di corpo nero a temperatura fissata  $T_H$ . Si tratta dell'effetto Hawking, di cui è stata data una derivazione diretta nel caso di un buco nero di Schwarzschild, in regime eikonale; si sono quindi discussi l'evaporazione di un buco nero, insieme ad alcune precisazioni sulla termalità del flusso di Hawking. È stato poi introdotto il concetto di atmosfera termica, intesa come la densità energetica locale della radiazione di Hawking percepita da un osservatore statico in un punto al finito; si è notato, invece, che per un osservatore in caduta libera si è in presenza semplicemente di uno stato di vuoto.

Sono stati quindi analizzati alcuni approcci che si possono adottare nel tentativo di costruire una Meccanica Statistica della Termodinamica dei buchi neri, in particolare,

in relazione all'attribuzione dei gradi di libertà alla radiazione di Hawking. Si è ripreso un argomento di Zurek e Thorne, inteso dagli autori per legare  $S_{BH}$  al numero di modi in cui può avvenire l'accrescimento di un buco nero, ma che essere in realtà letto come il calcolo approssimato del numero delle possibili evaporazioni con cui può spegnersi un dato buco nero.

Si è quindi cercato di attribuire, secondo un'idea di 't Hooft, l'entropia dei buchi neri ai modi dell'atmosfera termica. Come si è visto, si trova tuttavia una divergenza di  $S_{at}$  a meno che non si imponga un cut-off  $h$  nell'integrazione dei modi nei pressi dell'orizzonte; nel caso in cui  $h$  sia dell'ordine della lunghezza di Planck  $l_P$ , si ritrova con questo calcolo la corretta entropia  $S_{BH}$ . Alla luce di considerazioni relative alla retroazione dei campi sulla forma dell'orizzonte, con un modello newtoniano e, successivamente, con un approccio relativistico si è mostrato che è possibile dare un'interpretazione fisica al cut-off introdotto a posteriori da 't Hooft. Risulta infatti che all'orizzonte potrebbe essere associato uno spessore efficace  $\xi \sim \sqrt{Ml_P}$ , di lunghezza propria ben maggiore di  $l_P$  per buchi neri astronomici. Si è quindi calcolata l'entropia  $S_{at}$  imponendo un cut-off pari a  $\xi$ ; questa si mostra dipendente dal numero di campi presenti in natura, e parametricamente minore rispetto all'entropia  $S_{BH}$ . Si è concluso, perciò, che l'entropia dell'atmosfera termica non è un'interpretazione alternativa, ma una vera e propria correzione al secondo ordine dell'entropia solitamente attribuita ai buchi neri.

Può sembrare plausibile collegare almeno una parte dell'entropia di un buco nero alla radiazione di Hawking, visto il comportamento tipicamente dissipativo di quest'ultima. Già prima di considerare i modelli di retroazione sull'orizzonte, però, si aveva motivo di sospettare che l'idea di 't Hooft di attribuire l'entropia  $S_{BH}$  all'atmosfera termica non fosse del tutto accettabile. Come si è avuto modo di notare nella Sezione 3.2, infatti, la radiazione di Hawking ha origine unicamente cinematica, mentre  $S_{BH}$  è di natura geometrica e, in particolare, è legata in modo evidente alla gravitazione. La prima, d'altra parte, non lo è. Si pensi al noto effetto Unruh, secondo il quale un osservatore accelerato nello spazio-tempo di Minkowski percepisce una radiazione, proveniente dal punto verso cui sta accelerando, di temperatura caratteristica

$$T_U = \frac{\hbar a}{2\pi} \quad (3.98)$$

dove  $a$  è il modulo della sua accelerazione. È chiaro come questo fenomeno sia *qualitativamente*<sup>5</sup> identico alla radiazione di Hawking, nonostante non vi sia alcuna partecipazione della gravità.

Nel percorso seguito, l'orizzonte è centrale sia per la produzione della radiazione di Hawking, sia per la possibilità di attribuirvi uno spessore efficace dovuto alla retroazione

---

<sup>5</sup>Non lo è quantitativamente, come si vede immediatamente inserendo il modulo dell'accelerazione locale (2.29) nella (3.98), e constatando la differenza sostanziale con la rispettiva temperatura di Hawking percepita da un osservatore statico fornita dalla (3.46); è rilevante notare, non per questa trattazione, che le due temperature coincidono nel limite  $r \rightarrow r_H$ , dove divergono allo stesso modo.

dei campi. Riflettendo sulla sua natura, si osserva che in effetti all'orizzonte possono essere dati molti ruoli, anche distanti da quelli qui riportati. In ultima analisi, è tuttavia il richiedere una Seconda Legge Generalizzata (ossia la non decrescenza di  $S'$  per qualsiasi osservatore) che fa sì che l'orizzonte abbia spesso una funzione centrale nelle interpretazioni statistiche, perchè, in qualche modo, i gradi di libertà associati all'entropia  $S_{BH}$  devono essere per forza accessibili alla regione esterna. Si pensi ai risultati di Pretorius, Vollick e Israel [18], che, con un'analisi di pura termodinamica classica, calcolano l'entropia associata a un guscio sferico in contrazione verso  $r_H$ . Considerando un'ampia classe di equazioni di stato, giungono al corretto fattore di proporzionalità di  $1/4$  di  $S_{BH}$ , in modo da esprimere quest'ultima come l'entropia della materia che forma un buco nero, se fosse raccolta in un sottile strato a cavallo dell'orizzonte. Alla luce della Seconda Legge Generalizzata, ciò non è inaspettato, in quanto quella dello strato sottile di materia è l'ultima entropia che un osservatore esterno vede, quindi, in qualche modo, deve poter essere letta anche nell'entropia del buco nero.

Già nel corso del Capitolo 3 si sarà sicuramente notato che sono presenti molte strade che portano al corretto ordine di grandezza del fattore numerico di  $S_{BH}$ , pur basandosi su interpretazioni fisiche dei gradi di libertà associati del tutto diverse. Bisogna ammettere che, allo stato attuale, sono molto meno numerose le teorie che determinano precisamente il valore corretto di  $S_{BH}$ , e si è per lo più lontani dall'aver ragioni discriminanti (diverse dall'apprezzamento personale) per identificare in modo univoco la fisica legata alla Meccanica Statistica dei buchi neri.

Sorge spontaneo chiedersi cosa implichi la presenza di un gran numero di modelli in gran parte equivalenti, ognuno caratterizzato da pregi e difetti. È naturale pensare che ciò sia semplicemente conseguenza di una fundamentalità che è per ora oscura, e che si percepisce anche nella discussione riguardo le definizioni di singolarità e orizzonte nel Capitolo 1, dove, per la dimostrazione dei teoremi, è frequente la richiesta di ipotesi *ad hoc* solo parzialmente giustificate da un senso fisico. L'esempio più chiaro di questo è la Congettura del censore cosmico, così come si è citato che non c'è alcun posto per le condizioni energetiche sul tensore di energia-impulso in una teoria che includa campi quantistici. Non è dunque immotivata la speranza che gli sviluppi della Termodinamica diano modo di risolvere anche i problemi e di capire le assunzioni fatte nello studio dei buchi neri in contesto classico.

In conclusione, quella che è stata tracciata nel presente testo si mostra come la ricerca, più che di una Meccanica Statistica dei buchi neri, di una sua approssimazione semi-classica, a basse energie. Nondimeno, è con questo approccio che ha senso cercare indicazioni per una teoria più fondamentale sottesa alla Relatività Generale.

# Bibliografia

- [1] M. Alcubierre. *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*. Oxford University Press, 2008.
- [2] R. Arnowitt, S. Deser e C. W. Misner. «The Dynamics of General Relativity». In: *Gravitation: an introduction to current research*, Louis Witten ed. (Wiley), chapter 7, pp 227–265 (1962). URL: <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0405109>.
- [3] C. Barcelo e M. Visser. «Twilight for the energy conditions?» In: *Int.J. Mod. Phys. D11:1553-1560* (2002). URL: <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0205066>.
- [4] Jacob D. Bekenstein. «Black Holes and Entropy». In: *Phys. Rev. D* 7 (8 apr. 1973), pp. 2333–2346.
- [5] N. D. Birrell e P. C. W. Davies. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge University Press, 1984.
- [6] S. Carlip. «Black Hole Thermodynamics and Statistical Mechanics». In: *Lect.Notes Phys.769:89-123* (2009). URL: <http://arxiv.org/abs/0807.4520>.
- [7] R. Casadio. *Elements of Relativity*. 2015.
- [8] Jorge Escobedo. «Greybody Factors: Hawking Radiation in Disguise». Tesi di laurea mag. U. Amsterdam, 2008.
- [9] J. Frauendiener. «Conformal Infinity». In: *Living Rev. Relativity* 7.1 (2004). URL: <http://www.livingreviews.org/lrr-2004-1>.
- [10] V. P. Frolov e I. D. Novikov. *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments*. Springer, 1998.
- [11] T. Jacobson. *Introductory Lectures on Black Hole Thermodynamics*. 2005. URL: <http://www.physics.umd.edu/grt/taj/776b/lectures.pdf>.
- [12] D. Marolf. «On the quantum width of a black hole horizon». In: *Springer Proc. Phys. 98:99-112* (2005). URL: <http://arxiv.org/abs/hep-th/0312059>.
- [13] K. Martel e E. Poisson. «Regular coordinate systems for Schwarzschild and other spherical spacetimes». In: *Am.J.Phys.* 69 (2001), pp. 476–480.

- [14] R.A. Minlos. *Introduction to Mathematical Statistical Physics*. University lecture series. American Mathematical Society, 1999.
- [15] W. Mück. «Hawking radiation is corpuscular». In: (2016). URL: <https://arxiv.org/abs/1606.01790>.
- [16] Ken-ichi Nakao. «The Oppenheimer-Snyder space-time with a cosmological constant». In: *General Relativity and Gravitation* 24.10 (1992), pp. 1069–1081. ISSN: 1572-9532. DOI: 10.1007/BF00756947. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF00756947>.
- [17] R. Penrose. In: *Riv. Nuovo Cimento* 1. Special number, pp.252-276 (1969). "Does there exist a cosmic censor who forbids the appearance of naked singularities, clothing each one in an absolute event horizon?"
- [18] F. Pretorius, D. Vollick e W. Israel. «An operational approach to black hole entropy». In: *Phys. Rev. D* 57 (10 mag. 1998), pp. 6311–6316. URL: <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9712085>.
- [19] H. Reall. *Black Holes Lectures*. 2014. URL: [http://www.damtp.cam.ac.uk/user/hsr1000/black\\_holes\\_lectures\\_2014.pdf](http://www.damtp.cam.ac.uk/user/hsr1000/black_holes_lectures_2014.pdf).
- [20] R. D. Sorkin. «How Wrinkled is the Surface of a Black Hole?» In: *Proceedings of the First Australasian Conference on General Relativity and Gravitation, held February 1996, Adelaide, Australia, edited by David Wiltshire, pp. 163-174 (University of Adelaide)* (1996). URL: <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9701056>.
- [21] R. D. Sorkin. «The Statistical Mechanics of Black Hole Thermodynamics». In: *in Black Holes and Relativistic Stars, edited by R.M. Wald (University of Chicago Press)* (1998). URL: <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9705006>.
- [22] Mark Stuckey. «The observable universe inside a black hole». In: *American Journal of Physics* 62(9):788-795 (1994).
- [23] G. 't Hooft. «On the Quantum Structure of a Black Hole». In: *Nuclear Physics* 256.B (1985), pp. 727–745.
- [24] G. 't Hooft. «The Scattering Matrix Approach for the Quantum Black Hole». In: *Int.J.Mod.Phys.A* 11:4623-4688 (1996). URL: <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9607022>.
- [25] M. Visser. «Essential and inessential features of Hawking radiation». In: *Int.J. Mod. Phys. D* 12:649-661 (2003). URL: <http://arxiv.org/abs/hep-th/0106111>.
- [26] M. Visser. «Thermalty of the Hawking flux». In: (2015). URL: <https://arxiv.org/abs/1409.7754>.
- [27] R. M. Wald. «Black Holes and Thermodynamics». In: (1996). URL: <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9702022>.

- [28] R. M. Wald. «Gedanken experiments to destroy a black hole». In: *Ann. Phys. (USA)* 82 (1974), pp. 548–556.
- [29] R. M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.
- [30] R. M. Wald. «The Thermodynamics of Black Holes». In: *Living Rev. Relativity* 4:6 (2001). URL: <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9912119>.
- [31] Christian Wuthrich. «On Time Machines in Kerr-Newman Spacetime». Tesi di laurea mag. Universitat Bern, 1999.
- [32] W. H. Zurek e Kip S. Thorne. «Statistical Mechanical Origin of the Entropy of a Rotating, Charged Black Hole». In: *Phys. Rev. Lett.* 54.20 (1985), pp. 2171–2175.