

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

## Distribuzioni di quasi-probabilità: la funzione di Wigner

Relatore:  
Prof. Elisa Ercolessi

Presentata da:  
Daniele Lombardi

Anno Accademico 2015/2016



# Indice

<b>1</b>	<b>La quantizzazione di Weyl</b>	<b>9</b>
1.1	La relazione di commutazione canonica . . . . .	9
1.1.1	Il teorema di Wintner . . . . .	10
1.1.2	Il teorema di Stone . . . . .	11
1.2	Preambolo alla quantizzazione . . . . .	12
1.2.1	Varietà simplettica . . . . .	12
1.2.2	Sistema di Weyl . . . . .	14
1.2.3	Il teorema di von Neumann . . . . .	15
1.3	Mappa e simbolo di Weyl . . . . .	16
1.3.1	La mappa di Weyl . . . . .	16
1.3.2	Simbolo di Weyl . . . . .	18
1.3.3	Un cenno alle parentesi di Moyal . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Distribuzioni di quasi-probabilità</b>	<b>23</b>
2.1	La funzione di Wigner . . . . .	23
2.1.1	L'operatore densità di probabilità . . . . .	24
2.1.2	La rappresentazione di Wigner . . . . .	26
2.2	Esempi di funzioni di Wigner . . . . .	31
2.2.1	Richiami sull'oscillatore armonico . . . . .	31
2.2.2	Stati di Fock . . . . .	32
2.2.3	Operatore di <i>squeezing</i> . . . . .	35
2.2.4	Stati coerenti . . . . .	40
2.2.5	Sovrapposizioni e miscele . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Verso l'ottica quantistica</b>	<b>49</b>
3.1	Generazione di stati ottici quantistici . . . . .	49
3.1.1	La SPDC ed il fotone singolo . . . . .	50
3.1.2	Il divisore di fascio . . . . .	50
3.1.3	Ulteriori sviluppi . . . . .	53
3.2	La <i>balanced homodyne detection</i> . . . . .	53
3.3	Idee base di tomografia quantistica . . . . .	57

<b>A</b>	<b>Pillole di geometria differenziale</b>	<b>61</b>
A.1	Definizioni fondamentali . . . . .	61
A.1.1	Varietà differenziale . . . . .	61
A.1.2	Enti geometrici principali . . . . .	62
A.2	Strutture supplementari . . . . .	64
A.3	Derivate . . . . .	65
A.3.1	Derivata di Lie . . . . .	65
A.3.2	Derivata esterna . . . . .	66
A.3.3	Derivata covariante . . . . .	67
	<b>Bibliografia</b>	<b>69</b>

# Abstract

L'elaborato fornisce una introduzione alla funzione di Wigner, ovvero una funzione di fase che gioca un ruolo chiave in alcuni ambiti della fisica come l'ottica quantistica.

Nel primo capitolo viene sviluppato sommariamente l'apparato matematico-fisico della quantizzazione di Weyl e quindi introdotta l'omonima mappa di quantizzazione tra funzioni di fase ed operatori quantistici.

Nella seconda parte si delinea la nozione di distribuzione di quasi-probabilità e si danno alcune importanti esemplificazioni della funzione di Wigner per gli autostati dell'oscillatore armonico.

Per finire l'ultimo capitolo tratteggia il panorama sperimentale all'interno del quale la funzione di Wigner viene utilizzata.



# Introduzione

Come spesso si verifica in fisica, nello studio di particolari classi di fenomeni un cambio di prospettiva può essere cruciale. È noto, infatti, come molto di frequente vi sia più di una teoria atta a descrivere in modo soddisfacente i risultati di esperimenti, dove ciascuna di esse apporta il suo originale contributo evidenziando aspetti che all'altra sfuggono. Proprio in questi termini può essere presentato il ruolo che la meccanica quantistica ha svolto nel suo subentrare alla meccanica classica. Benchè in molte circostanze l'ultima fosse più che apprezzabile nel presentare una giustificazione dei fenomeni microscopici, il complesso apparato matematico della meccanica quantistica risultava fornire spiegazioni più coerenti ed al contempo aprire nuove e feconde prospettive di indagine.

Tuttavia, il vastissimo panorama aperto dalla teoria quantistica presenta al suo interno diverse sfaccettature e possibili declinazioni. Tra queste riveste un ruolo del tutto peculiare la formulazione della meccanica quantistica nel formalismo di Weyl. Se, infatti, nella maggioranza dei casi l'approccio quantistico classico basato sulla ricerca della funzione d'onda risolvete l'equazione differenziale di Schrödinger risulta assolutamente sufficiente, l'approccio introdotto da Weyl si rivela estremamente utile alla caratterizzazione di particolari fenomeni quantistici tra i quali, ad esempio, quelli che concernono i sistemi ottici.

Anche la teoria di Weyl, pur muovendosi all'interno dell'alveo della meccanica quantistica, può essere intesa come un cambio di prospettiva. Se infatti l'originario approccio della fisica quantistica avviato da Schrödinger si limita a precisare lo stato quantico di un sistema attraverso una funzione d'onda definita ora nello spazio delle coordinate ed ora in quello degli impulsi, questa formulazione alternativa procede nel tentativo di rifrasare l'intera meccanica quantistica a partire dallo spazio delle fasi classico. Come ogni scelta, anche questa porta con sè tutto un insieme di conseguenze ed evidenzia aspetti che originariamente restavano in secondo piano. Innanzitutto in questo modo si raggiungono due risultati teorici di primissimo ordine: da una parte si riesce a dirimere ogni sorta di ambiguità insita nel processo di quantizzazione standard alla Dirac, dove l'associazione tra funzioni di fase classiche ed operatori quantistici risulta spesso non univoca; dall'altra si è in grado di evidenziare in modo matematicamente lucido il legame tra la formulazione classica e quantistica della meccanica, proprio grazie al fatto che, con l'approccio di Weyl, le due teorie risultano vivere all'interno dello stesso spazio geometrico (lo spazio

delle fasi).

Eppure, affinché una teoria fisica possa effettivamente definirsi tale, non può limitarsi a restare un puro e semplice insieme di idee matematiche più o meno complesse, ma deve essere anche in grado di manifestare una buona capacità predittiva e magari, come si diceva poco prima, essere capace di aprire nuovi orizzonti. Da questo punto di vista il formalismo alla Weyl si rivela vincente. Una volta messe a punto tutta una serie di prescrizioni che permettono di ricavare la corrispondente versione nello spazio delle fasi degli operatori quantistici e viceversa, si è in grado di estrarre da questa teoria una nuova caratterizzazione di un sistema quantistico del tutto alternativa alla funzione d'onda: la funzione di Wigner, ovvero la funzione di fase che copre il ruolo dell'originario operatore densità di probabilità.

La ricchezza di proprietà possedute da tale funzione non è l'unica giustificazione che ne legittima l'introduzione. Come infatti sarà possibile evidenziare nel corso di questa trattazione, la funzione di Wigner rappresenta proprio il ponte tra la teoria e la ricerca sperimentale. Infatti lo studio dello stato di un sistema quantistico può effettivamente essere condotto tramite la misura della funzione di Wigner per mezzo di opportune procedure messe a punto dalla cosiddetta *tomografia quantistica*. E benchè la formulazione di Weyl appaia un capitolo a sè stante all'interno della fisica quantistica, i panorami di ricerca che si servono dell'approccio atto ad identificare un sistema tramite la sua funzione di Wigner e quindi, implicitamente, a fare uso dei risultati di questa formulazione della meccanica quantistica sono numerosi e tra i più all'avanguardia.

Uno di questi, come si è già avuto modo di sottolineare, coincide proprio con quella importante branca della fisica che è l'ottica quantistica. Per quanto riguarda gli stati quantici della luce più elementari, infatti, la funzione di Wigner assume forme piuttosto semplici, anche grazie al forte legame, dal punto di vista della descrizione matematica, che intercorre tra un'onda elettromagnetica ed un oscillatore armonico. Sono proprio gli stati di Fock, quelli coerenti o anche stati più propriamente quantistici, come gli stati *gatto di Schrödinger*, ad essere generati con opportuni set up sperimentali all'interno di laboratori di ottica quantistica tra i più moderni. E la chiave di lettura dei risultati concretamente ottenuti risulta niente poco di meno che la funzione di Wigner del sistema quantistico generato. Se ciò non fosse sufficiente per convincersi dell'importanza che tale formulazione della meccanica quantistica ricopre, basti pensare che lo studio di tali sistemi ottici è ben lungi dall'essere un puro strumento appagante sul piano intellettuale: la capacità di saper controllare e quindi conoscere lo stato di questi è alla base di tutta la ricerca relativa alla creazione di porte a qubit e quindi dell'informatica quantistica, che forse un giorno rivoluzionerà il mondo della tecnologia per come oggi lo conosciamo nelle sue radici più profonde.

# Capitolo 1

## La quantizzazione di Weyl

Nonostante la quantizzazione di Weyl occupi un ruolo a sè stante all'interno del vasto panorama della teoria quantistica, nondimeno essa riveste tanto uno spiccato interesse teorico quanto pratico. Da un punto di vista concettuale infatti essa si propone come una risposta originale al problema della quantizzazione, che affligge le fondamenta teoriche della meccanica quantistica come teoria fisica, e permette di mettere in luce, in una certa misura, il rapporto tra quest'ultima e la fisica classica stessa. Il percorso che ha portato alla nascita della teoria di Weyl e alla sua riformulazione della meccanica quantistica sarà tratteggiato in questo primo capitolo. I risvolti pratici di questa teoria, ben lungi dall'essere un insieme di speculazioni fini a sè stesse, verranno invece presentati nel seguito. Infatti la quantizzazione di Weyl trova vaste applicazioni proprio all'interno della tomografia quantistica, disciplina con forti legami con ambiti di ricerca di primaria importanza.

### 1.1 La relazione di commutazione canonica

Nell'usuale formulazione della meccanica quantistica alla Schrödinger è noto come, dall'ispezione della struttura dei valori medi relativi alle variabili dinamiche descrittive del sistema fisico, risulti naturale associare a queste ultime un operatore hermitiano (ed in particolare autoaggiunto, come si deduce proseguendo nello sviluppo della teoria) agente all'interno dello spazio delle funzioni  $L^2(\mathbb{R})$ . Limitando il discorso alle variabili canoniche posizione ed impulso, che rivestono un ruolo di primo piano nella formulazione alla Hamilton della meccanica classica, il risultato di tale associazione può essere mostrato tanto nella rappresentazione delle coordinate quanto in quella degli impulsi. Nella prima, ove la funzione d'onda è espressa in termini di una variabile  $\vec{x}$  appartenente allo spazio delle configurazioni ( $\mathbb{R}^3$ ), l'operatore posizione si riduce ad un operatore moltiplicativo, mentre l'impulso ad uno differenziale del primo ordine:

$$\hat{x}\varphi(\vec{x}) = \vec{x}\varphi(\vec{x}), \quad \hat{p}\varphi(\vec{x}) = -i\hbar\vec{\nabla}_x\varphi(\vec{x}).$$

Nella rappresentazione degli impulsi, invece, dove la funzione d'onda è definita nello spazio della variabile canonica coniugata ad  $\vec{x}$ , i ruoli dei due operatori si invertono e si ottiene:

$$\hat{x}\phi(\vec{p}) = i\hbar\vec{\nabla}_p\phi(\vec{p}), \quad \hat{p}\phi(\vec{p}) = \vec{p}\phi(\vec{p}).$$

Indipendentemente dalla rappresentazione adottata, è semplice mostrare come tra i due operatori intercorra la seguente relazione di commutazione:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar\hat{1}.$$

I passaggi concettuali esposti fino ad ora ricalcano il percorso storico seguito dallo sviluppo della teoria quantistica: a partire da una particolare realizzazione degli operatori posizione ed impulso, si giunge alla famosa relazione di commutazione canonica, che racchiude in sé uno dei principali tasselli della meccanica quantica. Eppure risulta anche possibile seguire un percorso più astratto, come fece Weyl: si può infatti assumere la relazione di commutazione come punto di partenza, piuttosto che di arrivo. I pregi di questo approccio sono infatti numerosi e condussero Weyl verso una teoria capace di dirimere i problemi di ambiguità insiti nel processo di quantizzazione e che riuscisse a dare una formulazione della meccanica quantistica nello spazio delle fasi, in cui vivono le funzioni di fase associate ad osservabili classiche, rendendo quindi più immediato il confronto tra il mondo classico e quello quantistico.

### 1.1.1 Il teorema di Wintner

Si assuma di avere a disposizione unicamente due operatori  $\hat{Q}$  e  $\hat{P}$ , senza curarsi di disporre di una loro particolare realizzazione, e si supponga che questi soddisfino la relazione di commutazione canonica (con  $\hbar = 1$ )  $\hat{Q}\hat{P} - \hat{P}\hat{Q} = i\hat{1}$ . Senza nemmeno conoscere la precisa azione dei due operatori, il teorema di Wintner permette di ricavare una loro proprietà caratteristica.

**Teorema 1 (di Wintner)** *Dati due operatori  $\hat{Q}$  e  $\hat{P}$ , che soddisfino la relazione di commutazione  $\hat{Q}\hat{P} - \hat{P}\hat{Q} = i\hat{1}$ , questi non possono essere entrambi limitati.*

La dimostrazione di questo semplice, ma importante, risultato si ottiene applicando la relazione di commutazione enunciata per  $\hat{Q}^n$  e  $\hat{P}$ , ottenendo:

$$[\hat{Q}^n, \hat{P}] = \sum_{l=0}^{n-1} \hat{Q}^l [\hat{Q}, \hat{P}] \hat{Q}^{n-l-1} \Rightarrow \hat{Q}^n \hat{P} - \hat{P} \hat{Q}^n = in\hat{Q}^{n-1}.$$

Nell'ipotesi in cui i due operatori siano limitati, si avrebbe quindi:

$$n\|\hat{Q}\|^{n-1} = n\|\hat{Q}^{n-1}\| \leq 2\|\hat{P}\|\|\hat{Q}\|^n \Rightarrow \|\hat{P}\|\|\hat{Q}\| \geq n/2 \quad \forall n,$$

il che produce un assurdo. Proprio questo risulta essere il problema che legittima l'introduzione del formalismo di Weyl. Per ovviare infatti alla difficoltà tecnica di dover lavorare con operatori illimitati, Weyl propose il passaggio ad una *versione esponenziale* delle relazioni di commutazione della forma:

$$U(s)V(t) = e^{ist}V(t)U(s) \quad \text{dove} \quad U(s) \equiv e^{is\hat{P}} \quad V(t) \equiv e^{it\hat{Q}},$$

che rappresenta una relazione tra gruppi ad un parametro aventi per generatori infinitesimi degli operatori soddisfacenti la relazione di commutazione canonica. La possibilità di assumere tale relazione come punto di partenza della teoria affonda le sue radici in un importante risultato matematico quale il teorema di Stone: le relazioni di commutazione alla Dirac potranno poi essere recuperate nel corso della teoria di Weyl come semplice corollario.

## 1.1.2 Il teorema di Stone

La relazione di commutazione in forma esponenziale risulta uno dei capisaldi del programma di quantizzazione di Weyl: proprio l'assunzione di questo punto di vista diverso consentirà la risoluzione di un certo numero di problemi della formulazione standard della meccanica quantistica. Tuttavia tale *versione esponenziale* acquista significato solo alla luce del teorema di Stone. Il risultato di Stone riguarda i gruppi di operatori unitari ad un parametro e fortemente continui. Detto  $\mathcal{H}$  un generico spazio di Hilbert ed  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$  l'insieme degli operatori unitari agenti su esso, sia data l'applicazione  $U$  tale che  $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ .  $U$  definisce un gruppo unitario ad un parametro se  $\forall t \in \mathbb{R}$  allora  $U(t)$  è unitario e  $U(t+s) = U(t)U(s) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$ , con la richiesta aggiuntiva che  $U(0) = \hat{1}$ . In più  $U$  è fortemente continuo se  $\forall \phi \in \mathcal{H}$  è vero che  $U(t)\phi \rightarrow U(t_0)\phi$  con  $t \rightarrow t_0$ . Detto questo risulta ora possibile enunciare il teorema di Stone.

**Teorema 2 (di Stone)** *Se è dato un gruppo unitario ad un parametro fortemente continuo  $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ , allora le funzioni  $\phi \in \mathcal{H}$  per cui esiste il limite*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(t)\phi - \phi}{t} \equiv iA\phi$$

*definiscono il dominio del generatore infinitesimo  $A$  del gruppo, su cui esso risulta essere essenzialmente autoaggiunto.*

Quanto segue dal teorema precedente è che l'operatore  $U(t)$  dovrà soddisfare l'equazione differenziale:

$$\frac{dU(t)}{dt} = iAU(t),$$

con la condizione iniziale  $U(0) = \hat{1}$  e che, quindi, esso potrà essere scritto in forma esponenziale come  $U(t) = \exp(itA)$ . In più è bene ricordare come la proprietà dell'operatore

di essere *essenzialmente autoaggiunto* sul dominio definito dalle funzioni  $\phi$ , per cui il limite del teorema converge, indichi come tale dominio sia denso in uno spazio di Hilbert e come l'operatore medesimo risulti su esso chiudibile e con chiusura autoaggiunta.

Come si vede dal teorema di Stone, lavorare con questa particolare categoria di gruppi di operatori porta con sè numerosi vantaggi ed è proprio ciò che rende la versione esponenziale delle relazioni di commutazione particolarmente efficace. Ma è giunto il momento di inquadrare in modo più preciso la posizione di quanto detto fino ad ora all'interno della teoria di Weyl.

## 1.2 Preambolo alla quantizzazione

Uno dei maggiori risultati del programma di quantizzazione alla Weyl sta proprio nel riuscire a fondare la meccanica quantistica sulla stessa struttura geometrica su cui sono definite le funzioni di fase della meccanica di Hamilton. Sarà quindi necessario richiamare rapidamente la definizione di tale varietà geometrica. Per fare questo si farà frequente uso della terminologia propria della geometria differenziale, le cui definizioni principali vengono presentate nell'apposita appendice.

### 1.2.1 Varietà simplettica

Una varietà simplettica risulta essere un particolare tipo di varietà differenziale equipaggiata, però, di una specifica struttura geometrica aggiuntiva, ovvero una forma simplettica. Ci si limiterà alla trattazione di varietà bidimensionali per semplicità di notazione (tali concetti possono infatti essere estesi a qualsiasi varietà avente un numero pari di dimensioni).

**Definizione 1 (Forma simplettica)** *Si definisce forma simplettica una qualsiasi 2-forma  $\tilde{\omega}$ :*

- *non degenera, ovvero tale che  $\tilde{\omega}(x, y) = 0 \quad \forall y \in T_P M \Rightarrow x = 0, \forall p \in M$  (dove  $M$  ed  $T_P M$  indicano rispettivamente la varietà differenziale e lo spazio tangente al punto  $P$ );*
- *chiusa, ovvero per cui vale che  $\tilde{d}\tilde{\omega} = 0$  (dove  $\tilde{d}$  indica la derivata esterna).*

Nel contesto della meccanica di Hamilton una tale varietà  $M$  prende il nome di *spazio delle fasi*, le cui coordinate risultano essere la posizione  $q$ , che vive nello spazio delle configurazioni, e l'impulso  $p$ , appartenente allo spazio duale (delle 1-forme). Su  $M$  si definisce in modo naturale la struttura simplettica  $\tilde{\omega} \equiv \tilde{d}q \wedge \tilde{d}p$ . È bene sottolineare come la definizione di forma simplettica non implichi l'esattezza di  $\tilde{\omega}$ , ossia la possibilità di associare ad essa un potenziale simplettico, tale che  $\tilde{\omega} = \tilde{d}\theta$ . Questo risulta realizzabile in generale solo a livello locale e sotto le condizioni dettate dal Lemma di Poisson.

**Lemma 1 (di Poisson)** *Se  $\tilde{\omega}$  è una forma chiusa definita in un certo aperto  $U$  di una varietà simplettica e se esiste una mappa iniettiva e differenziabile che associa ad  $U$  l'interno della sfera  $S^2$  definita come  $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x|^2 < 1\}$ , allora esiste una 1-forma  $\theta$  su  $U$  tale che  $\tilde{\omega} = \tilde{d}\theta$ .*

Nello spazio delle fasi sarà possibile quindi definire localmente un potenziale simplettico nella forma  $\theta = p\tilde{d}q$ . Come è noto, tuttavia, la forma simplettica definita poco sopra vanta ulteriori importanti proprietà in relazione alle equazioni del moto di Hamilton. Infatti un qualsiasi campo vettoriale  $\vec{T}$ , definito come vettore tangente alla curva  $\{q = f(t), p = g(t)\}$ , soluzione delle equazioni di Hamilton

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{dp}{dt} \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{dq}{dt},$$

conserva, lungo il suo flusso, la forma  $\tilde{\omega}$ , ovvero, in termini di derivate di Lie,

$$\mathcal{L}_{\vec{T}}\tilde{\omega} = 0.$$

A partire dal concetto di forma simplettica è possibile poi introdurre una particolare struttura moltiplicativa tra funzioni definite sullo spazio delle fasi che prende il nome di *parentesi di Poisson*.

**Definizione 2 (Parentesi di Poisson)** *Si definisce una parentesi di Poisson  $\{, \}$  su una varietà simplettica  $M$  una qualsiasi applicazione che a due funzioni  $f$  e  $g$  su  $M$  ne associa una seconda definita da:*

$$\{f, g\} \equiv \tilde{\omega}(X_f, X_g) \equiv \langle \tilde{d}f, X_g \rangle,$$

dove  $X_f$  ed  $X_g$  sono definiti dalle condizioni  $\tilde{\omega}(X_f, \cdot) = \tilde{d}f$  e  $\tilde{\omega}(X_g, \cdot) = \tilde{d}g$ .

Poichè dalla relazione per  $g$  che stabilisce una mappa tramite la forma simplettica  $\tilde{\omega}$  dai vettori alle 1-forme è possibile risalire ad una forma esplicita per  $X_g$ , pari a

$$X_g = \frac{\partial g}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q},$$

si può ricavare una forma in coordinate per le parentesi di Poisson, anche più utile dal punto di vista calcolistico:

$$\{f, g\} \equiv \langle \tilde{d}f, X_g \rangle = \frac{\partial g}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial q}.$$

Come sarà ripreso nel corso della trattazione, le parentesi di Poisson sono strettamente connesse all'evoluzione dinamica di una qualsiasi funzione nello spazio delle fasi.

## 1.2.2 Sistema di Weyl

La breve digressione effettuata non poteva che essere inevitabile, dal momento che il concetto di sistema di Weyl presuppone l'idea di varietà simplettica. Tale nozione, che ora si va a definire, risulta il primo passo verso il processo di quantizzazione, in quanto permette di dar vita ad una mappa tra un elemento dello spazio delle fasi e l'insieme degli operatori unitari fortemente continui: a partire da questa sarà possibile connettere successivamente, senza ambiguità, operatori e funzioni di fase.

Per prima cosa però è bene definire una *rappresentazione*  $T$  di un gruppo  $G$  sullo spazio vettoriale  $V$  come quella mappa continua che ad ogni elemento di  $G$  associa un operatore lineare agente su  $V$  e tale che  $T(ab) = T(a)T(b)$  con  $a, b \in G$  e  $T(e) = \hat{1}$ , ove  $e \in G$  è l'elemento neutro del gruppo. Si dirà che tale rappresentazione  $T$  è *continua* ed *unitaria* se gli operatori lineari associati agli elementi del gruppo vantano queste proprietà di continuità ed unitarietà.

**Definizione 3 (Sistema di Weyl)** *Un sistema di Weyl è una rappresentazione continua ed unitaria di uno spazio vettoriale simplettico  $S$ , dotato della forma simplettica  $\tilde{\omega}$ :*

$$W : S \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}),$$

*tale che  $W$  è fortemente continuo come funzione di  $z \in S$  e  $W(z+z') = e^{-\frac{i}{2}\tilde{\omega}(z,z')}W(z)W(z')$ .*

Dalla proprietà enunciata discende subito come un qualunque sistema di Weyl soddisfi la seguente relazione di commutazione:

$$W(z')W(z) = e^{i\tilde{\omega}(z,z')}W(z)W(z')$$

che si ricava immediatamente sfruttando la commutatività degli elementi dello spazio simplettico rispetto alla somma e l'antisimmetria di  $\tilde{\omega}$ . Qualora lo spazio simplettico  $S$  possa essere scritto come somma diretta dello spazio vettoriale (delle configurazioni)  $L$  e del suo duale  $L^*$ , sarà possibile dare una definizione più pratica di sistema di Weyl come dato dalla coppia di rappresentazioni  $U$  e  $V$  fortemente continue ed unitarie:

$$U : L \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}) \quad V : L^* \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}).$$

$(U, V)$  definisce un sistema di Weyl se:

$$V(\alpha)U(x) = e^{i\alpha(x)}U(x)V(\alpha) \quad \text{con } (x, \alpha) \in L \oplus L^*$$

e

$$U(x)U(x') = U(x')U(x) \quad V(\alpha)V(\alpha') = V(\alpha')V(\alpha).$$

È necessario precisare come, diversamente da  $W$  (per cui  $W(z+z') \neq W(z)W(z')$ ),  $U$  e  $V$  definiscano due gruppi ad un parametro (unitari e fortemente continui come specificato).

Per recuperare il formalismo precedente basterà porre innanzitutto  $z \equiv (x, \alpha)$  e  $\tilde{\omega}(z, z') = \tilde{\omega}((x, \alpha), (x', \alpha')) = \alpha(x') - \alpha'(x)$  ed esprimere  $W(z)$  come  $W(z) \equiv e^{\frac{i}{2}\alpha(x)}U(x)V(\alpha)$ . Da ciò si potrà scrivere:

$$W(z)W(z') = e^{\frac{i}{2}\alpha(x)}U(x)V(\alpha)e^{\frac{i}{2}\alpha'(x')}U(x')V(\alpha')$$

e

$$\begin{aligned} W(z + z') &= e^{\frac{i}{2}(\alpha+\alpha')(x+x')}U(x+x')V(\alpha+\alpha') \\ &= e^{\frac{i}{2}(\alpha+\alpha')(x+x')}U(x)U(x')V(\alpha)V(\alpha') \\ &= e^{\frac{i}{2}(\alpha+\alpha')(x+x')}U(x)e^{-i\alpha(x')}V(\alpha)U(x')V(\alpha') \\ &= e^{\frac{i}{2}\tilde{\omega}((x,\alpha),(x',\alpha'))}e^{\frac{i}{2}\alpha(x)}U(x)V(\alpha)e^{\frac{i}{2}\alpha'(x')}U(x')V(\alpha') \end{aligned}$$

Osservando le due equazioni ottenute si vede chiaramente come le due definizioni di sistema di Weyl fornite risultino equivalenti.

### 1.2.3 Il teorema di von Neumann

Per comprendere quale posizione occupi la rappresentazione di Schrödinger e la sua particolare realizzazione degli operatori posizione ed impulso all'interno della teoria di Weyl, sarà necessario fare qualche piccola precisazione. Stando al teorema di Stone, innanzitutto, sarà possibile esprimere le rappresentazioni  $U$  e  $V$ , nei termini dei propri generatori infinitesimi:

$$U(x) \equiv e^{ix\hat{P}} \quad V(\alpha) \equiv e^{i\alpha\hat{Q}},$$

dove  $x$  ed  $\alpha$  giocano il ruolo di parametri per i due gruppi unitari  $U$  e  $V$ . Si otterrà la rappresentazione di Schrödinger dei due operatori qualora questi vengano realizzati come:

$$U : x \rightarrow e^{ix\hat{P}} \quad (e^{ix\hat{P}}\phi)(y) \equiv \phi(y+x) \quad V : \alpha \rightarrow e^{i\alpha\hat{Q}} \quad (e^{i\alpha\hat{Q}}\phi)(y) \equiv e^{i\alpha(y)}\phi(y).$$

Risulta semplice verificare come i generatori infinitesimi  $\hat{P}$  e  $\hat{Q}$  rappresentino proprio l'operatore di derivazione e quello moltiplicativo del formalismo standard della meccanica quantistica. Tuttavia l'importanza della rappresentazione di Schrödinger si spinge ben oltre: infatti, come emerge dal teorema di von Neumann, essa risulta essere il *prototipo* di una qualunque realizzazione in meccanica quantistica.

**Teorema 3 (von Neumann)** *Se sono dati due gruppi di operatori ad un parametro unitari e fortemente continui  $U(x)$  e  $V(\alpha)$  su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  che soddisfano la relazione di commutazione di Weyl, allora esistono dei sottospazi chiusi  $\mathcal{H}_l$  tali che:*

- $\mathcal{H} = \bigoplus_{l=1}^N \mathcal{H}_l, N > 0, N \leq \infty;$

- ogni  $\mathcal{H}_l$  risulta un sottospazio invariante sotto l'azione di  $U(x)$  e  $V(\alpha)$ ;
- per ogni  $l$  esiste una trasformazione unitaria  $T_l$ , tale che  $T_l U(x) T_l^{-1}$  è un operatore di traslazione e  $T_l V(\alpha) T_l^{-1}$  un operatore di moltiplicazione per la fase  $e^{i\alpha(y)}$ .

Per completare il quadro e riguadagnare da un punto di vista diverso ciò da cui si era partiti, vale la pena enunciare il seguente corollario del teorema precedente.

**Corollario 1** *Se  $\hat{P}$  e  $\hat{Q}$  sono i generatori infinitesimi di  $U(x)$  e  $V(\alpha)$ , allora esiste un dominio denso  $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$  tale per cui:*

- $\hat{P}$  e  $\hat{Q}$  agiscono da  $\mathcal{D}$  a  $\mathcal{D}$ ;
- $\hat{Q}\hat{P}\phi - \hat{P}\hat{Q}\phi = i\phi \quad \forall \phi \in \mathcal{D}$ ;
- $\hat{P}$  e  $\hat{Q}$  sono essenzialmente autoaggiunti sul dominio  $\mathcal{D}$ .

Questo significa che, dato un sistema di Weyl, è possibile recuperare le usuali regole di commutazione canoniche a livello dei generatori infinitesimi degli operatori unitari e fortemente continui che costituiscono il sistema.

## 1.3 Mappa e simbolo di Weyl

Una volta chiarito come il programma di Weyl si armonizzi con la formulazione standard della meccanica quantistica, è giunto il momento di definire quali siano i vantaggi di tale modo di procedere, ossia analizzare la sua risposta al problema della quantizzazione.

### 1.3.1 La mappa di Weyl

Come è noto, l'usuale procedura (*mappa*) che associa ad una funzione classica definita sullo spazio delle fasi un operatore quantistico risulta affetta da problemi di ambiguità. Infatti pensare di poter risolvere tale associazione semplicemente correlando la funzione classica  $f(q, p)$  all'operatore  $f(\hat{Q}, \hat{P})$  conduce a problematiche parzialmente dissolubili solo attraverso alcune prescrizioni sul processo di quantizzazione stesso. Le richieste minimali sulla mappa suddetta sono:

- che questa sia lineare nei suoi argomenti, ovvero  $\widehat{af + bg} = a\hat{f} + b\hat{g}$ ;
- che alla funzione costante di valore uno sia associato l'operatore identico;
- che restituisca un operatore autoaggiunto;
- che soddisfi la prescrizione di quantizzazione di Dirac, ossia che  $[\hat{f}, \hat{g}] = i\hbar \widehat{\{f, g\}} + O(\hbar^2)$ .

Oltre a queste semplici regole, si fa in modo di analizzare caso per caso, verificando che la propria ipotesi di quantizzazione sia fisicamente sensata. Una originale soluzione alla questione, capace di dirimere numerosi problemi insiti in tale processo, risiede proprio nella *mappa di Weyl*. Questa fa uso della definizione effettuata di sistema di Weyl (che da ora indicheremo con  $\hat{W}(x, \alpha)$ , per risaltarne la natura operatoriale), capace di associare ad un vettore dello spazio delle fasi un operatore definito dalla formula:

$$\hat{W}(x, \alpha) \equiv e^{\frac{i}{2}\alpha(x)} e^{i\alpha\hat{Q}} e^{ix\hat{P}} = e^{\frac{i}{2}\alpha(x)} e^{i\alpha\hat{Q}+ix\hat{P}+\frac{1}{2}[i\alpha\hat{Q}, ix\hat{P}]+0} = e^{i\alpha\hat{Q}+ix\hat{P}},$$

dove si è utilizzata la formula di Baker-Campbell-Hausdorff [1] e la nota proprietà dell'identità  $\hat{1}$  di commutare con qualsiasi operatore. Si ottiene così una semplice mappa tra esponenziali (prima definiti sullo spazio delle fasi e poi come funzioni di operatori):

$$e^{i\alpha q+ixp} \longrightarrow e^{i\alpha\hat{Q}+ix\hat{P}}.$$

Questa può essere utilizzata per risolvere il problema della quantizzazione. Infatti la procedura di Weyl fa proprio uso di una trasformata integrale il cui nucleo consiste di un esponenziale immaginario: la *trasformata di Fourier*. Nota la definizione di trasformata di Fourier  $\mathcal{F}(f)(x, \alpha)$  di una funzione  $f(q, p)$ :

$$\mathcal{F}(f)(x, \alpha) \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} dqdp f(q, p) e^{-i(\alpha q+xp)},$$

sarà possibile, per mezzo della formula della trasformata di Fourier inversa, associare ad  $f$  il suo operatore corrispondente:

$$f \longrightarrow \hat{f}$$

$$\hat{f} \equiv \int_{\mathbb{R}^2} dx d\alpha \mathcal{F}(f)(x, \alpha) e^{i\alpha\hat{Q}+ix\hat{P}} = \int_{\mathbb{R}^2} dx d\alpha \mathcal{F}(f)(x, \alpha) \hat{W}(x, \alpha),$$

che definisce proprio la mappa di Weyl. La scrittura riportata precedentemente è da intendersi come segue:

$$\langle \psi | \hat{f} | \psi' \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} dz \mathcal{F}(f)(z) \langle \psi | \hat{W}(z) | \psi' \rangle.$$

Vale la pena sottolineare come la possibilità di definire la mappa indicata risieda nella legittimità o meno di associare alla funzione  $f$  una trasformata di Fourier  $\mathcal{F}$ . Come è noto, tale trasformata ha come spazio naturale di definizione quello di Schwarz  $\mathcal{S}$ , ovvero delle funzioni a decrescenza rapida, salvo poi poter estendere l'azione dell'operatore  $\mathcal{F}$  su una qualsiasi funzione quadratosommabile (sfruttando la densità di  $\mathcal{S}$  in  $L^2(\mathbb{R}^n)$ ).

### 1.3.2 Simbolo di Weyl

Uno dei punti cruciali del programma di Weyl risiede, tuttavia, proprio nella possibilità di invertire la mappa definita precedentemente, associando, quindi, ad un operatore una funzione di fase. Questo permette perciò di definire osservabili quantistiche sulla stessa struttura geometrica che ospita quelle classiche, dando origine a tutta una serie di possibilità ed interpretazioni che saranno sviscerate nel seguito. Per giungere alla definizione di quello che sarà poi chiamato *simbolo di Weyl*, sarà necessario eseguire qualche breve precisazione matematica. Infatti l'applicazione capace di associare ad un operatore  $\hat{A}$  una funzione di fase  $f$  sfrutta l'idea di utilizzare gli operatori  $\hat{W}(z)$  come base generalizzata in cui espandere  $\hat{A}$ . Per fare questo viene introdotto nello spazio degli operatori agenti su  $\mathcal{H}$  il prodotto scalare indotto dalla definizione di *traccia operatoriale*.

**Definizione 4 (Traccia di un operatore)** *Un operatore  $\hat{A}$  è detto di classe traccia se esiste una base hilbertiana tale per cui:*

$$\sum_n^{\infty} \langle \phi_n | \hat{A} | \phi_n \rangle < \infty.$$

Se  $\hat{A}$  è di classe traccia allora si definisce come traccia di  $\hat{A}$  la seguente serie:

$$tr \hat{A} \equiv \sum_n^{\infty} \langle \phi_n | \hat{A} | \phi_n \rangle.$$

È bene sottolineare come la traccia operatoriale così definita goda di alcune proprietà importanti, tra le quali ricordiamo:

1. la proprietà di linearità rispetto agli argomenti, ovvero  $tr(\hat{A} + \hat{B}) = tr(\hat{A}) + tr(\hat{B})$  e  $tr(c\hat{A}) = c(tr\hat{A})$ ;
2. la proprietà relativa al calcolo della traccia dell'aggiunto, secondo cui  $tr\hat{A}^* = \overline{tr\hat{A}}$  (dove, come sempre,  $\hat{A}^*$  indica l'aggiunto di  $\hat{A}$ );
3. la proprietà di ciclicità, in base alla quale la traccia del prodotto di più operatori (di cui almeno uno di classe traccia)  $tr(\hat{A}\hat{B}\hat{C}\dots)$  è uguale alla traccia del prodotto di una qualsiasi permutazione *ciclica* degli stessi.

Il nuovo tipo di prodotto scalare tra due operatori, utilizzabile ai nostri scopi, sarà quindi definito come la traccia del prodotto dei due operatori stessi. Come ogni prodotto scalare, questo si può utilizzare per esprimere una norma, che compare in questa ulteriore definizione.

**Definizione 5 (Operatore di Hilbert-Schmidt)** *Un operatore  $\hat{A}$  è detto di Hilbert-Schmidt se esiste una base hilbertiana tale per cui:*

$$\sum_n^{\infty} \|\hat{A}\phi_n\|^2 = \text{tr}|\hat{A}|^2 = \text{tr}(\hat{A}^*\hat{A}) < \infty,$$

dove  $\|\cdot\|$  è la norma indotta dal prodotto scalare in  $\mathcal{H}$ .

È importante sottolineare come le due definizioni sopra poste non dipendano dalla base hilbertiana prescelta.

Il risultato matematico decisivo è, tuttavia, il seguente, poichè permette di associare una traccia al prodotto di due operatori di Hilbert-Schmidt. Infatti è noto dall'analisi funzionale come il prodotto di due operatori  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  di Hilbert-Schmidt sia un operatore di classe traccia, per cui è lecito scrivere:

$$\text{tr}(\widehat{BC}) = \sum_n^{\infty} \langle \hat{B}^*\phi_n | \hat{C}\phi_n \rangle.$$

Per gli operatori  $\hat{W}$ , in particolare, vale una relazione che mostra come essi risultino essere di tipo Hilbert-Schmidt in senso generalizzato. Come per le onde piane, pensabili come limite matematico di stati fisici, è possibile definire una relazione di ortonormalità generalizzata da intendersi in termini distribuzionali, così per gli operatori  $\hat{W}$  si potrà scrivere:

$$\text{tr}(\hat{W}(x, \alpha)\hat{W}^*(x', \alpha')) = \delta(x - x')\delta(\alpha - \alpha'). \quad [2]$$

Fissato quindi un operatore  $\hat{A}$  di Hilbert-Schmidt, si potrà definire simbolo di Weyl la seguente mappa dallo spazio degli operatori a quello delle funzioni di fase:

$$f_{\hat{A}}(x, \alpha) \equiv \text{tr}(\hat{A}\hat{W}^*(x, \alpha)).$$

In questo modo il cerchio si chiude. Sfruttando la formula che descrive la traccia del prodotto  $\hat{W}(x, \alpha)\hat{W}^*(x', \alpha')$  è possibile verificare che il simbolo e la mappa di Weyl sono l'uno l'applicazione inversa dell'altra. Si è quindi costruita un'applicazione che ad una qualunque funzione di Schwarz dello spazio delle fasi associa un operatore, mentre un'altra che ad un qualsiasi operatore di Hilbert-Schmidt fa corrispondere una funzione di fase. Se le condizioni di definizione delle due applicazioni da uno spazio all'altro vengono rispettate, allora il processo di quantizzazione risulta realizzato in completa assenza di ambiguità.

### 1.3.3 Un cenno alle parentesi di Moyal

Per poter effettivamente apprezzare il pregio di aver esteso la formulazione della meccanica quantistica allo spazio симпlettico delle funzioni classiche, vale la pena spendere

qualche breve parola sul concetto di parentesi di Moyal. Come accennato nella sezione 1.2.1, le parentesi di Poisson consentono di descrivere l'evoluzione dinamica di una funzione dello spazio delle fasi lungo una traiettoria che sia soluzione delle equazioni di Hamilton. Queste stesse possono essere riscritte come:

$$\frac{dq^i}{dt} = \{q^i, H\} \quad \frac{dp^i}{dt} = \{p^i, H\}.$$

Esprimendo il risultato del teorema di Liouville nel caso di una funzione  $f$  indipendente dal tempo, si avrà quindi:

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}.$$

Si è anche accennato, in questa stessa sezione, alle prescrizioni di quantizzazione, ed in particolare a come le analoghe proprietà formali del commutatore di due operatori e delle parentesi di Poisson spingano all'identificazione  $[\hat{f}, \hat{g}] = i\hbar \widehat{\{f, g\}} + O(\hbar^2)$ . Quello che la costruzione di Weyl permette di fare è individuare gli ulteriori termini di ordine superiore in  $\hbar$  dell'uguaglianza precedente.

Fondamentale in tutto questo è l'invertibilità della mappa di Weyl (che designeremo con  $\mathcal{M}_W$ ). Infatti, date due funzioni  $f$  e  $g$ , a queste corrisponderanno, sulla base di quanto detto precedentemente, due operatori  $\hat{f}$  e  $\hat{g}$  agenti sullo spazio di Hilbert. Se classicamente la struttura moltiplicativa tra due funzioni di fase è data dall'usuale prodotto  $\cdot$ , una nuova algebra potrà essere indotta tra le funzioni associate ad operatori quantistici tramite il simbolo di Weyl: questa sarà semplicemente un'immagine opportuna del prodotto non commutativo tra operatori. In termini espliciti, definendo questo nuovo prodotto con  $\star$ , si avrà:

$$f \star g \equiv \mathcal{M}_W^{-1}(\hat{f}\hat{g}).$$

Quest'ultima espressione definisce il *prodotto di Moyal*. Si può dimostrare come tale prodotto ammetta la forma:

$$(f \star g)(p, q) = fg + \frac{i\hbar}{2}\{f, g\} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^k \frac{D_k(f, g)}{k!}, \quad [3]$$

con

$$D_k(f, g)(p, q) \equiv \frac{\partial^k f}{\partial q^k} \frac{\partial^k g}{\partial p^k} - \binom{k}{1} \frac{\partial^k f}{\partial q^{k-1} \partial p} \frac{\partial^k g}{\partial p^{k-1} \partial q} + \dots + (-1)^k \frac{\partial^k f}{\partial p^k} \frac{\partial^k g}{\partial q^k}.$$

Si può notare come il prodotto di Moyal risulti una deformazione dell'usuale prodotto  $fg$ , e come quest'ultimo venga recuperato solo nel limite in cui  $\hbar \rightarrow 0$ . Per mezzo di questa nuova struttura algebrica, è possibile definire, in analogia con quanto accade classicamente, la controparte quantistica delle parentesi di Poisson, ovvero le parentesi di Moyal:

$$[f, g]_M = f \star g - g \star f,$$

le quali risultano essere esattamente l'immagine, tramite il simbolo di Weyl, del commutatore di due operatori, ovvero  $[f, g]_M = \mathcal{M}_W^{-1}([\hat{f}, \hat{g}])$ . In questo modo le parentesi di Moyal soddisfano le medesime proprietà già comuni al commutatore e alle parentesi di Poisson, ovvero l'antisimmetria, la bilinearità, l'identità di Jacobi e la regola di Leibniz (rispetto al prodotto di Moyal):

$$\begin{aligned} [f, g]_M + [g, f]_M &= 0, \\ [f, g + h]_M &= [f, g]_M + [f, h]_M, \quad [f + h, g]_M = [f, g]_M + [h, g]_M, \\ [f, [g, h]_M]_M + [g, [h, f]_M]_M + [h, [f, g]_M]_M &= 0, \\ [f \star g, h]_M &= f \star [g, h]_M + [f, h]_M \star g = 0, \end{aligned}$$

Anche per queste parentesi sarà possibile fornire una significativa espressione (ricavabile direttamente dalla forma esplicita del prodotto di Moyal):

$$[f, g]_M = i\hbar\{f, g\} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^k \frac{D_k(f, g) - D_k(g, f)}{k!}, \quad [3]$$

che mette in evidenza come le parentesi di Moyal riproducano esattamente quelle di Poisson per il primo ordine in  $\hbar$ , così come vuole la prescrizione di quantizzazione di Dirac. In completa analogia con il caso classico sarà quindi possibile descrivere l'evoluzione di una funzione di fase associata ad un operatore quantistico  $\hat{A}$  come:

$$\frac{df_{\hat{A}}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[f_{\hat{A}}, f_{\hat{H}}]_M,$$

dove con  $f_{\hat{H}}$  si è indicata la funzione di fase associata all'operatore di Hamilton.



## Capitolo 2

# Distribuzioni di quasi-probabilità

Una volta sviluppato il bagaglio matematico minimale utile alla manipolazione e comprensione teorica del formalismo di Weyl della meccanica quantistica, sarà utile soffermarsi su alcuni importanti esempi che si incontrano nello sviluppo di questa teoria. È importante sottolineare come, malgrado la semplicità e basilarietà dei casi presi in analisi in questa trattazione come semplice applicazione della quantizzazione di Weyl, saremo costretti ad affrontare ed ad interrogarci su aspetti che giacciono al cuore della meccanica quantistica e la contraddistinguono nettamente dal mondo classico, che invece si avvicina alla nostra intuizione. Tutto questo si riassume, fondamentalmente, nell'idea di distribuzione di quasi-probabilità, che racchiude in sé tutte le peculiarità del panorama quantistico, risultando, inoltre, il trampolino di lancio per l'investigazione sperimentale di quest'ultimo e di tutte le sue stranezze.

### 2.1 La funzione di Wigner

Nel capitolo precedente abbiamo visto come la quantizzazione di Weyl ci metta a disposizione una serie univoca di regole per passare direttamente dal mondo matematico descrittivo di grandezze fisiche classiche (lo spazio delle fasi) a quello delle variabili quantistiche (insieme di operatori agenti in uno spazio di Hilbert) e viceversa. Si è anche sottolineato come il vantaggio di questo formalismo giaccia proprio nel suo riuscire a dare una descrizione di due teorie tanto diverse sulla stessa struttura geometrica, permettendo di coglierne a pieno similarità e differenze. Per poter mettere in pratica questo programma sarà necessario individuare quell'operatore quantistico che, fra tutti, sia gravido di contenuto informativo circa lo stato del nostro sistema e che, quindi, consenta anche di esprimere i valori di aspettazione di tutti i rilevanti parametri fisici dello stesso. Quello che si sta cercando, essenzialmente, è l'analogo della funzione di distribuzione di probabilità associata ad un *ensemble* classico, che vive nello spazio delle fasi.

### 2.1.1 L'operatore densità di probabilità

È noto come il modello matematico descrittivo del mondo quantistico porti ad associare allo stato, in cui un dato sistema fisico è preparato, un *raggio* di un opportuno spazio di Hilbert, ovvero un vettore di stato  $|\psi\rangle$  definito a meno di una fase complessa e del modulo (legato alla scelta della normalizzazione). Differentemente dal caso classico, ad un certo stato  $|\psi\rangle$  non risulta univocamente associato il valore di un osservabile  $X$ , ma al più la probabilità che quest'ultimo cada in un certo range di valori. Solo se il sistema si trova in un cosiddetto *autostato*, allora la ripetizione dell'esperimento di misura fornirà sempre il medesimo risultato per quanto riguarda il valore  $x$  di  $X$  (ovvero gli autostati sono analoghi per certi aspetti ad uno stato classico, essendo per essi ripristinata una corrispondenza biunivoca stato-valore dell'osservabile). Solo quindi se il sistema si trova in un autostato di  $X$  sarà possibile estrarre un valore  $x$  dal sistema. Questo implica che, al momento della misura, la funzione d'onda  $\psi$  del sistema collasserà in uno dei suoi autostati. Come è noto dalla meccanica quantistica una generica funzione d'onda può essere espansa in una base di  $n$  autostati come  $|\psi\rangle = \sum_{q=0}^n |q\rangle \langle q|\psi\rangle$ . Da questa espressione si ricava quindi la probabilità che, al momento della misurazione, il sistema collassi nell'autostato  $|q\rangle$ , ovvero:

$$p_q = \frac{|\langle q|\psi\rangle|^2}{\langle \psi|\psi\rangle}.$$

Note queste probabilità, il valore di aspettazione di un osservabile  $Q$ , a cui risulta associato l'operatore autoaggiunto  $\hat{Q}$ , sarà:

$$\langle Q \rangle = \sum_{q=0}^n p_q q = \langle \psi|\hat{Q}|\psi\rangle,$$

dove  $q$  indica l'autovalore associato all'autostato  $|q\rangle$ .

È importante sottolineare come fino ad ora si sia presupposto di aver a che fare con sistemi dei quali fosse esattamente noto lo stato iniziale prima dell'applicazione del protocollo sperimentale. Il che significa non necessariamente dire che il sistema si trovasse in un autostato, ma anche solo in uno stato generico risultante dalla sovrapposizione di autostati stessi. A qualsiasi stato al quale si può far corrispondere un vettore (sempre a meno di una fase complessa e di una costante legata al modulo) in uno spazio di Hilbert si dà il nome di stato *puro*.

Supponiamo ora invece di non avere un completo controllo sperimentale sullo stato del nostro sistema e poter conoscere questo solo con un approccio di tipo statistico, ovvero poter attribuire soltanto una probabilità  $\rho_n$  che il sistema si trovi nello stato  $|\psi_n\rangle$  (non necessariamente un autostato). In questo caso si parlerà di *stati misti*. Il valore di aspettazione di un osservabile  $\langle Q \rangle$  sarà dato dalla media pesata dei singoli valori di

aspettazione  $\langle \psi_n | \hat{Q} | \psi_n \rangle$ , ovvero:

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle &= \sum_n \rho_n \langle \psi_n | \hat{Q} | \psi_n \rangle = \sum_q \sum_n \rho_n \langle \psi_n | \hat{Q} | q \rangle \langle q | \psi_n \rangle = \sum_q \langle q | \sum_n \rho_n | \psi_n \rangle \langle \psi_n | \hat{Q} | q \rangle = \\ &= \text{tr} \{ \hat{\rho} \hat{Q} \}, \end{aligned}$$

dove si è finalmente introdotto l'operatore densità di probabilità  $\hat{\rho}$ , definito come:

$$\hat{\rho} = \sum_n \rho_n | \psi_n \rangle \langle \psi_n |.$$

Si può dire come l'operatore densità di probabilità risulti lo strumento principe per descrivere lo stato di un sistema quantistico, di qualunque natura esso sia. Infatti persino uno stato puro potrà essere espresso con questo formalismo: sarà semplicemente necessario sostituire alla somma di proiettori pesata il singolo proiettore  $|\psi\rangle\langle\psi|$ . In più, così come si è vista la probabilità che una misura sperimentale faccia collassare la funzione d'onda  $|\psi\rangle$  (che ora si assume normalizzata) in un autostato  $|q\rangle$ , così per uno stato misto tale probabilità sarà data da:

$$p_q = \sum_q \rho_q \sum_n \rho_n |\langle q | \psi_n \rangle|^2 = \text{tr} \{ \hat{\rho}_q \hat{\rho} \},$$

con  $\hat{\rho}_q$  l'operatore densità descrittivo della distribuzione statistica degli autostati, ovvero:

$$\hat{\rho}_q = \sum_q \rho_q |q\rangle \langle q|,$$

dove l'autostato  $|q\rangle$  si presenta con probabilità  $\rho_q$ .

Questo operatore densità di probabilità vanta alcune proprietà del tutto generali ed importanti, che possono essere ordinatamente raggruppate nel seguente teorema.

**Teorema 4** *Un operatore  $\hat{\rho}$  risulta del tipo densità, ovvero*

$$\hat{\rho} = \sum_n \rho_n | \psi_n \rangle \langle \psi_n |$$

*se e solo se soddisfa alle seguenti proprietà:*

- $\hat{\rho}$  è limitato;
- $\hat{\rho}$  è autoaggiunto, ovvero  $\hat{\rho}^* = \hat{\rho}$ ;
- $\hat{\rho}$  è non negativo (ossia ammette solo autovalori non negativi):

$$\langle \psi | \hat{\rho} | \psi \rangle \geq 0;$$

- la traccia di  $\rho_n$  è unitaria

$$\text{tr}\{\hat{\rho}\} = 1.$$

L'ultimo punto del teorema risulta abbastanza ovvio in base alla definizione data di operatore di tipo densità. Infatti, sfruttando la normalizzazione dei singoli stati  $|\psi_n\rangle$  e delle probabilità  $\rho_n$ , in pochi passaggi si ha:

$$\begin{aligned} \text{tr}\{\hat{\rho}\} &= \sum_n \rho_n \text{tr}\{|\psi_n\rangle\langle\psi_n|\} = \sum_n \sum_q \rho_n \langle q|\psi_n\rangle\langle\psi_n|q\rangle = \\ &= \sum_n \rho_n \langle\psi_n|\psi_n\rangle = 1. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda invece gli autovalori di un tal tipo di operatore, di cui si parla al punto tre del teorema, si può aggiungere qualcosa in più. È noto dalla teoria infatti come gli autovalori  $\rho_n$  di  $\hat{\rho}$  siano sempre compresi nell'intervallo  $[0, 1]$  (se così non fosse, essendo gli autovalori non negativi, si violerebbe il vincolo precedente sulla traccia di  $\hat{\rho}$ , che degli autovalori è la somma).

Esiste inoltre una ulteriore proprietà che afferma come l'operatore  $\hat{\rho}$  definisca, quando descrive uno stato puro, un proiettore su di uno spazio unidimensionale. In quanto proiettore si avrà l'usuale proprietà di idempotenza  $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$  e che gli autovalori  $\rho_n$  saranno esclusivamente 0  $\forall n$  eccetto uno, che risulterà unitario. È importante evidenziare come la proprietà di idempotenza valga se e solo se lo stato è puro.

Sulla base di quanto descritto fino ad ora è possibile introdurre un importante parametro indice della purezza di uno stato che è la traccia del quadrato di  $\hat{\rho}$ . Per un generico stato misto vale la disuguaglianza:

$$\text{tr}\{\hat{\rho}^2\} = \sum_n \rho_n^2 \leq \sum_n \rho_n = 1,$$

raggiungendo l'uguaglianza solo in corrispondenza di uno stato puro.

### 2.1.2 La rappresentazione di Wigner

L'operatore densità di probabilità  $\hat{\rho}$ , introdotto nella sezione precedente, si è rivelato come adatto a fornire una descrizione statistica circa lo stato di un sistema quantistico non noto con precisione. Risulta intuitivamente chiaro come tale funzione possa risultare la controparte quantistica della funzione di probabilità classica definita sullo spazio delle fasi. Perchè tuttavia il ruolo di quest'ultima possa essere esteso alla descrizione di un sistema quantistico, sarà necessario associare all'operatore  $\hat{\rho}$  la corrispondente funzione proprio servendosi del simbolo di Weyl. Ricordando come, per un sistema di Weyl, si possa scrivere:

$$\hat{W}^*(x, \alpha) = \hat{W}(-x, -\alpha) = e^{-i\alpha\hat{Q}-ix\hat{P}} = e^{\frac{i}{2}\alpha(x)} e^{-i\alpha\hat{Q}} e^{-ix\hat{P}},$$

ove si è fatto uso della regola di Baker-Campbell-Hausdorff [1], e richiamando alla memoria la realizzazione di questo sistema nella rappresentazione di Schrödinger, sarà possibile ricavare il simbolo di Weyl come segue. Si avrà:

$$\text{tr}\{\hat{\rho}\hat{W}^*(x, \alpha)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} dq \langle q | \hat{\rho} \hat{W}^*(x, \alpha) | q \rangle = e^{\frac{i}{2}\alpha(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \langle q | \hat{\rho} e^{-i\alpha(q-x)} | q-x \rangle.$$

Dopo una serie di passaggi algebrici [4], si otterrà l'espressione della funzione di fase associata all'operatore densità, ovvero la cosiddetta *funzione di Wigner*:

$$\mathcal{W}(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ipx} \langle q - \frac{x}{2} | \hat{\rho} | q + \frac{x}{2} \rangle.$$

Per uno stato puro, in cui  $\hat{\rho} = |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$ , allora la funzione di Wigner assumerà la forma:

$$\mathcal{W}_n(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ipx} \psi_n^*(q - \frac{x}{2}) \psi_n(q + \frac{x}{2}).$$

Poichè, per una generica miscela quantistica, la matrice densità di probabilità può essere espressa come somma pesata di proiettori, ovvero di singoli stati puri, per la linearità dell'operazione di integrazione non stupisce come la funzione di Wigner di uno stato qualsiasi possa essere espressa come combinazione lineare di funzioni del tipo  $\mathcal{W}_n(q, p)$ , ossia:

$$\mathcal{W}(q, p) = \sum_n \lambda_n \mathcal{W}_n(q, p).$$

Per come è stata definita, la funzione di Wigner appare un'ottima generalizzazione quantistica della funzione di probabilità classica nello spazio delle fasi. Infatti, ragionando sulla teoria che permette di ricavare l'equazione di Schrödinger come descrittiva di una funzione d'onda a monte di un *ensemble quantistico statistico*, è possibile cogliere una sfumatura ulteriore di questa funzione introdotta. Nel costrutto teorico a cui si è fatto riferimento, l'ensemble statistico classico viene visto come approssimazione in un limite formale per  $\hbar \rightarrow 0$  di un sistema descritto da una funzione d'onda obbediente all'equazione di Schrödinger. Così pure, per estrapolazione, i campi rappresentativi del primo, come quello di densità di probabilità spaziale  $\rho_C$ , ed il loro significato fisico vengono visti come particolari distorsioni di grandezze quantistiche. A  $\rho_C$ , con opportune considerazioni, è associato un  $\rho_Q$  quantistico, corrispondente proprio al modulo quadro della funzione d'onda e col significato probabilistico pari esattamente all'analogo classico. Vediamo qui come questa descrizione probabilistica possa essere connessa a  $\mathcal{W}(q, p)$  proprio nella misura in cui:

$$\int \mathcal{W}(q, p) dp = \int \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ipx} \psi^*(q - \frac{x}{2}) \psi(q + \frac{x}{2}) \right) dp =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left( \frac{1}{2\pi} \int dp e^{ipx} \right) \psi^* \left( q - \frac{x}{2} \right) \psi \left( q + \frac{x}{2} \right) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) \psi^* \left( q - \frac{x}{2} \right) \psi \left( q + \frac{x}{2} \right) = \psi^*(q) \psi(q) = \rho_Q.
\end{aligned}$$

Un discorso analogo vale per la rappresentazione nello spazio dei momenti (del resto, nella rappresentazione di Wigner, le due formulazioni sono unificate):

$$\int \mathcal{W}(q, p) dq = \tilde{\psi}^*(p) \tilde{\psi}(p).$$

Una volta illustrate però queste similarità in buona parte qualitative, è giunto il momento di addentrarsi nei dettagli delle proprietà principali di questa funzione, per poter toccare con mano le singolarità e peculiarità del mondo quantistico.

Una prima, apparentemente banale, proprietà derivante dall'hermiticità dell'operatore  $\hat{\rho}$  è il fatto che la funzione di Wigner sia a valori reali: questo ci permette, per esprimersi in termini pratici, di dare rappresentazioni grafiche della suddetta funzione, cogliendo in modo immediato le proprietà statistiche di un sistema quantistico nello spazio delle fasi. A prova di ciò basta osservare che:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}^*(q, p) &= \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ipx} \langle q - \frac{x}{2} | \hat{\rho} | q + \frac{x}{2} \rangle \right)^* = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ipx} \langle q + \frac{x}{2} | \hat{\rho}^* | q - \frac{x}{2} \rangle = \mathcal{W}(q, p),
\end{aligned}$$

eseguendo la sostituzione  $-x \rightarrow x$ .

In più la funzione di Wigner risulta normalizzata ad uno:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}(q, p) dp dq = 1,$$

come risulta ovvio da quanto mostrato precedentemente (se una integrazione in  $p$  o  $q$  restituisce il modulo quadro della funzione d'onda nella rappresentazione delle posizioni o degli impulsi, dal significato probabilistico di quest'ultimo discende l'uguaglianza precedente).

Una relazione davvero fondamentale ed alla base di numerose proprietà risulta poi essere la cosiddetta *formula di sovrapposizione*, che permette di scrivere la traccia di due operatori quantistici in termini espliciti. Benchè, infatti, in questa sezione sia stato introdotto il simbolo di Weyl per l'operatore densità espresso in modo particolarmente esplicito (nella *rappresentazione di Wigner*, appunto), è noto come ogni operatore  $\hat{A}$ , nel contesto della quantizzazione alla Weyl, possa essere associato ad una funzione di fase e

si deduce come ad ognuno corrisponda una rappresentazione di Wigner, che indicheremo con  $\mathcal{W}_{\hat{A}}$ . Detto questo, vale la formula di sovrapposizione:

$$tr\{\hat{A}\hat{B}\} = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}_{\hat{A}}(q, p) \mathcal{W}_{\hat{B}}(q, p) dq dp.$$

Il modo in cui si ricava è semplice. Infatti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ip(x_A+x_B)} \langle q - \frac{x_A}{2} | \hat{A} | q + \frac{x_A}{2} \rangle \langle q - \frac{x_B}{2} | \hat{B} | q + \frac{x_B}{2} \rangle dx_A dx_B dq dp = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle q - \frac{x}{2} | \hat{A} | q + \frac{x}{2} \rangle \langle q + \frac{x}{2} | \hat{B} | q - \frac{x}{2} \rangle dx dq = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle q' | \hat{A} | q'' \rangle \langle q'' | \hat{B} | q' \rangle dq'' dq' = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle q' | \hat{A}\hat{B} | q' \rangle dq' = tr\{\hat{A}\hat{B}\}, \end{aligned}$$

dove nel primo passaggio si è nuovamente utilizzata la rappresentazione integrale della delta di Dirac e nel penultimo la relazione di completezza per i vettori di base  $|q''\rangle$ .

La ragione per cui una formula simile riveste un'importanza centrale è molto semplice. Se immaginiamo di calcolare la traccia tra l'operatore densità ed un qualsiasi altro operatore  $\hat{A}$  associato ad un osservabile fisico, staremo, come abbiamo mostrato inizialmente, calcolando il valore di aspettazione di  $\hat{A}$  stesso secondo l'approccio della meccanica quantistica standard. Con la formula di sovrapposizione questa procedura assume una completa analogia con il calcolo del valore medio di una certa grandezza fisica in meccanica statistica classica, in quanto:

$$\langle A \rangle = tr\{\hat{\rho}\hat{A}\} = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}(q, p) \mathcal{W}_{\hat{A}}(q, p) dq dp,$$

dove  $\mathcal{W}$  gioca a tutti gli effetti il ruolo di una distribuzione di probabilità classica nello spazio delle fasi.

Un altro semplice esempio di come il formalismo operatoriale quantistico si traduca nella rappresentazione di Wigner è offerto dal parametro di purezza  $tr\{\hat{\rho}^2\}$ , precedentemente introdotto. Sempre facendo uso della formula di sovrapposizione, in cui entrambi gli operatori sono sostituiti da  $\hat{\rho}$ , si ottiene:

$$tr\{\hat{\rho}^2\} = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}^2(q, p) dq dp.$$

Si vede quindi come semplicemente integrando il quadrato della funzione di Wigner si ottengano informazioni circa la natura dello stato quantistico del sistema in analisi. In

più tale formula lascia trasparire in modo ancor maggiore il forte contenuto informativo di tale funzione.

Fino a questo punto, tuttavia, si è avuta principalmente cura di sottolineare le analogie che  $\mathcal{W}$  ha con una funzione di probabilità classica e quindi di come queste somiglianze fungano da trampolino di lancio per una formulazione della meccanica quantistica in piena analogia con il formalismo classico. Eppure la forza di tale approccio sta proprio nella capacità con cui, una volta posti sullo stesso piano tanto il mondo classico quanto quello quantistico, è in grado di farci cogliere le reciproche differenze.

Un primo *marchio* della non-classicità di un sistema statistico può essere colta osservando come una generica funzione di Wigner debba soddisfare al vincolo:

$$|\mathcal{W}(p, q)| \leq \frac{1}{\pi}.$$

Questo si ricava facilmente facendo uso della disuguaglianza integrale di Schwarz nel modo seguente. Consideriamo innanzitutto la funzione di Wigner di uno stato puro. Avremo:

$$|\mathcal{W}(p, q)|^2 \leq \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\langle q - x/2 | \psi \rangle|^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\langle q + x/2 | \psi \rangle|^2 dx = \frac{1}{\pi^2},$$

dove si è sfruttata la proprietà secondo cui l'integrale di  $|\psi\rangle$  nello spazio delle configurazioni è pari ad uno. Per uno stato misto il discorso va ripetuto per ogni  $\mathcal{W}_n$ , che soddisfarà un vincolo simile, a meno dell'opportuno peso  $\lambda_n$  con cui contribuisce alla funzione di Wigner complessiva.

Come accennato, tale vincolo risulta un segno capace di contraddistinguere una distribuzione di probabilità classica da una quantistica. Dire infatti come il valore di  $\mathcal{W}$  non possa essere arbitrariamente grande equivale ad escludere la possibilità che la funzione tenda ad una delta di Dirac  $\delta(p - p_0)\delta(q - q_0)$  e che quindi descriva la certa localizzazione del sistema in un punto dello spazio delle fasi. Questo è compatibile con quanto imposto dal principio di indeterminazione di Heisenberg, che dice come il valore di una coppia di variabili canoniche misurate simultaneamente non possa essere determinato con precisione arbitraria.

Una ulteriore proprietà, forse ancor più fondamentale, si può dedurre considerando la traccia di due proiettori associati rispettivamente ad uno stato  $a$  e  $b$ .

$$\begin{aligned} \text{tr}\{|\psi_a\rangle\langle\psi_a|\psi_b\rangle\langle\psi_b|\} &= \sum_c \langle c|\psi_a\rangle\langle\psi_a|\psi_b\rangle\langle\psi_b|c\rangle = \\ &= \langle\psi_b|\left(\sum_c |c\rangle\langle c|\right)|\psi_a\rangle\langle\psi_a|\psi_b\rangle = \\ &= |\langle\psi_a|\psi_b\rangle|^2 = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}_a(q, p)\mathcal{W}_b(q, p)dqdp. \end{aligned}$$

Tale traccia, come appare evidente dallo svolgimento dei passaggi, descrive la probabilità che un sistema, ad esempio all'atto della misurazione, transisca da uno stato  $a$  ad uno stato  $b$ . Se i due stati sono individuati da autovettori ortogonali, si avrà che  $|\langle \psi_a | \psi_b \rangle|^2 = 0$ . Un risultato simile non può essere ottenuto eseguendo l'integrazione del prodotto di due funzioni positive  $\mathcal{W}_a$  e  $\mathcal{W}_b$ . Ciò lascia intendere come, in generale, la funzione di Wigner possa anche assumere valori negativi. Questa proprietà contraddistingue un sistema quantistico da uno classico anche solo per il fatto che il primo non può essere descritto da una distribuzione di probabilità. Benchè infatti fino a questo momento si sia usato tale termine riferito a  $\mathcal{W}$ , quanto visto mette in luce l'inadeguatezza di quello che è stato fatto: una distribuzione di probabilità risulta infatti non negativa per definizione. Per le funzioni di Wigner infatti si utilizza il termine di *distribuzioni di quasi-probabilità*, proprio per sottolineare la compresenza di similarità e pesanti differenze con le distribuzioni di probabilità classiche. Qualche parola in più su queste regioni a probabilità negativa potrà essere spesa una volta che si sarà in grado di affrontare alcuni casi espliciti della funzione di Wigner, che ora ci si appresta ad analizzare.

## 2.2 Esempi di funzioni di Wigner

Una volta visto come, nella funzione di Wigner, si concretizzi l'apparato matematico della quantizzazione di Weyl e come tale funzione sia descrittiva delle peculiarità di un sistema quantistico, è bene soffermarsi sullo studio di alcuni esempi di grande interesse. In particolare ci si concentrerà sulla descrizione delle distribuzioni di quasi-probabilità associate a speciali autostati dell'oscillatore armonico quantistico. Non è infatti necessario ricordare quanto importante e basilare sia, in tutta la fisica, il ruolo di quest'ultimo. Se tuttavia ciò non fosse abbastanza a giustificare la scelta di una sua analisi dettagliata, allora è bene tener presente come questo sia direttamente connesso al campo elettromagnetico e come quindi gli stati di un oscillatore armonico quantistico siano direttamente oggetto di esperimenti e ricerche, in quanto riproducibili in laboratorio. Questi sono, in particolare, indagati dal vasto campo di ricerca dell'ottica quantistica, che, non a caso, si avvale proprio delle funzioni di Wigner come strumento matematico principe.

### 2.2.1 Richiami sull'oscillatore armonico

L'espressione dell'operatore di Hamilton associato ad un oscillatore armonico può essere ricavata ricalcando la formula classica e limitandosi a sostituire alle variabili canoniche  $p$  e  $q$  i corrispettivi operatori, ottenendo quindi la ben nota forma:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\hat{q}^2}{2},$$

con opportuna scelta delle unità di misura. In particolare in questa, così come nelle formule successive, è stata fatta la scelta di porre  $\hbar = 1$ .

Tuttavia, dati gli operatori  $\hat{p}$  e  $\hat{q}$  è possibile anche definire una coppia di operatori di creazione e distruzione, ovvero soddisfacenti la relazione di commutazione  $[\hat{a}, \hat{a}^*] = \hat{1}$ , nel modo seguente:

$$\hat{a} = \frac{\hat{q} + i\hat{p}}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \hat{a}^* = \frac{\hat{q} - i\hat{p}}{\sqrt{2}}.$$

A partire da questi due è possibile poi definire l'operatore numero come  $\hat{N} = \hat{a}^*\hat{a}$ . Tramite questo si può infatti ottenere, come è noto, una espressione alternativa (ma altamente significativa) per l'operatore  $\hat{H}$ , semplicemente esprimendo  $\hat{p}$  e  $\hat{q}$  in funzione degli operatori di creazione e distruzione, ossia:

$$\hat{H} = \hat{N} + \frac{1}{2}.$$

All'oscillatore armonico, così come ad ogni sistema quantistico, sono associati infiniti stati, alcuni dei quali risultano essere più significativi di altri, per esempio perchè su di essi un certo osservabile assume valori definiti. Gli stessi autostati  $|q\rangle$  e  $|p\rangle$  degli operatori  $\hat{p}$  e  $\hat{q}$  (detti anche *stati di quadratura*) ne costituiscono un esempio. Per essi si hanno le ben note relazioni agli autovalori  $\hat{p}|p\rangle = |p\rangle p$  e  $\hat{q}|q\rangle = |q\rangle q$ , a cui si aggiungono le relazioni di ortogonalità e completezza, come è richiesto per un sistema di autovettori diagonalizzanti operatori autoaggiunti. Questi autostati associati all'oscillatore armonico non sono importanti in sè stessi, in quanto, come ci insegna la teoria quantistica, essi non sono riproducibili sperimentalmente (per via della loro non normalizzabilità in senso ordinario), ma possono essere pensati solo come limite ideale di stati fisici. Nonostante questo risultano calcolisticamente significativi, in quanto permettono di esprimere le funzioni d'onda di quadratura, ovvero  $\psi(q) = \langle q|\psi\rangle$  e  $\tilde{\psi}(p) = \langle p|\psi\rangle$ . Il modulo quadro di queste ha un noto significato probabilistico fortemente legato, come già sottolineato, alla funzione di Wigner stessa.

### 2.2.2 Stati di Fock

Stati dell'oscillatore armonico quantistico fisicamente più rilevanti risultano essere quelli sui quali l'operatore numero presenta valori ben precisi: gli *stati di Fock*. Questi sono definiti dall'equazione algebrica:

$$\hat{N}|n\rangle = |n\rangle n.$$

È facilmente dimostrabile come gli operatori  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^*$  assumano su questi stati un comportamento ben preciso (da cui deriva il loro stesso nome). Essi infatti non risultano diagonali sugli stati di Fock, ma si comportano come segue:

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle; \quad \hat{a}^*|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

Per mezzo di questi operatori è quindi possibile transire da stati ad autovalori  $n + 1$  od  $n - 1$  a partire da uno stato  $|n\rangle$ . L'interpretazione fisica degli stati di Fock suggerita da quanto descritto fino ad ora e corroborata dalla teoria quantistica è che lo stato associato presenti un numero ben definito di quanti (che nei casi di interesse di questa trattazione risulteranno essere fotoni), sintetizzato proprio nell'autovalore del medesimo.

Per poter scendere però un po' più nel dettaglio, si consideri la seguente equazione:

$$\hat{N}|0\rangle = \hat{a}^*\hat{a}|0\rangle = 0,$$

e si prenda in esame la possibile soluzione ottenuta richiedendo che  $\hat{a}|0\rangle = 0$ . Sostituendo all'operatore di distruzione la sua espressione in funzione degli operatori di quadratura nella rappresentazione delle coordinate spaziali si ricava una equazione differenziale per la funzione d'onda  $\psi_0(q)$  associata allo stato di Fock  $|0\rangle$

$$\hat{a}\psi_0(q) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q + \frac{\partial}{\partial q}\right)\psi_0(q) = 0,$$

che risulta essere banalmente risolta da una gaussiana (già normalizzata)

$$\psi_0(q) = \frac{1}{\pi^{1/4}}e^{-\frac{q^2}{2}}.$$

Anche nella rappresentazione dei momenti, connessa alla precedente tramite una trasformata di Fourier, la soluzione ha una espressione analitica analoga. Questa funzione d'onda è quella che descrive lo stato fisico privo di fotoni e per questo detto *stato di vuoto*. Salta all'occhio come tale soluzione coincida con l'espressione della funzione d'onda per lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico. Ben lungi dal rappresentare un caso, il fatto che l'operatore di Hamilton sia esprimibile in funzione dell'operatore numero implica come i due ammettano autostati simultanei: quindi gli stati di Fock non solo presentano un numero definito di quanti, ma anche una energia ben precisa. Partendo infatti dall'espressione che fornisce uno stato di Fock generico a partire da quello di vuoto

$$|n\rangle = \frac{\hat{a}^{*n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle,$$

e procedendo come fatto nel caso precedente, si può giungere all'espressione:

$$\psi_n(q) = \langle q|n\rangle = \frac{\mathcal{H}_n(q)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}e^{-\frac{q^2}{2}},$$

dove  $\mathcal{H}_n$  indica l' $n$ -esimo polinomio di Hermite.

Poichè l'operatore numero è hermitiano (e, come ipotesi di lavoro, autoaggiunto), chiaramente anche i suoi autostati soddisfarranno le relazioni di ortogonalità e completezza ben note:

$$\langle n'|n\rangle = \delta_{n',n} \quad \sum_n |n\rangle\langle n| = \hat{1}.$$

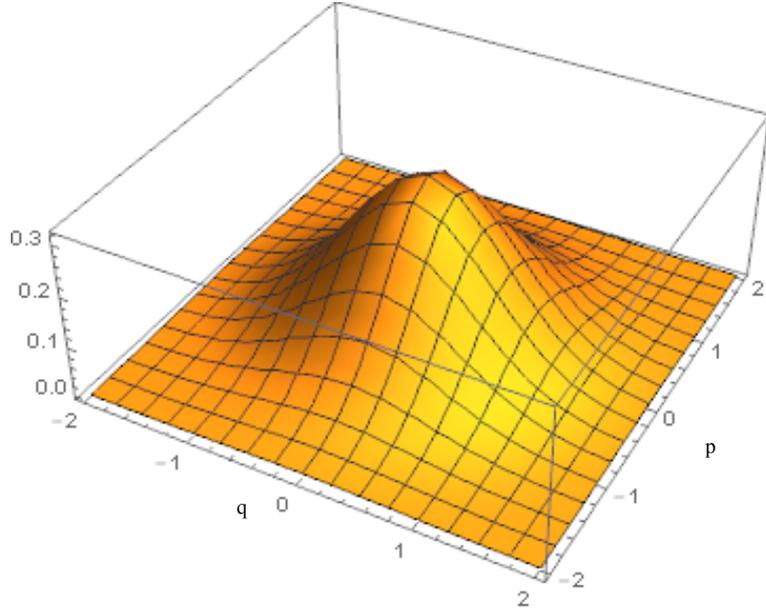


Figura 2.1: *Distribuzione di Wigner dello stato di vuoto: si può apprezzare dalla figura come questa sia descritta da una gaussiana bidimensionale centrata sull'origine del piano.*

Ma vediamo ora come si comporta la funzione di Wigner di questi stati iniziando proprio dal caso più semplice, ma che si rivelerà fondamentale per i vari esempi di questa trattazione, ovvero lo stato di vuoto. Facendo uso dell'espressione di  $\psi_0(q)$  precedentemente trovata, la funzione  $\mathcal{W}(q, p)$  può essere calcolata molto facilmente.

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_0(q, p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ipx}}{\pi^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(q-x/2)^2} e^{-\frac{1}{2}(q+x/2)^2} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} e^{-(q^2-x^2/4)} dx = \frac{e^{-q^2-p^2}}{2\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(ix/2+p)^2} dx = \frac{1}{\pi} e^{-q^2-p^2}. \end{aligned}$$

Come mostrato in *Figura 1*, la funzione di Wigner per lo stato di vuoto si presenta come una gaussiana bidimensionale centrata sull'origine e avente, lungo entrambe le direzioni di quadratura, deviazione standard pari a  $1/\sqrt{2}$ . Ciò significa che le oscillazioni quantistiche associate alle due variabili canoniche saturano il principio di indeterminazione, in quanto, per questo stato,  $\Delta p \Delta q = 1/2$ . Poichè, come abbiamo visto, per il modulo di una distribuzione di quasi-probabilità non è possibile superare il valore di  $1/\pi$ , ciò sta ad indicare che lo stato di vuoto approssima una delta di Dirac al massimo di quanto è concesso ad una funzione di Wigner: al di sotto di questa precisione nella localizzazione della distribuzione attorno ad un punto  $(q, p)$  dello spazio delle fasi non è possibile scendere per ragioni intrinseche alla meccanica quantistica. Si osserva, inoltre, come  $\mathcal{W}_0$

non presenti valori negativi: il significato profondo di questo potrà essere compreso solo proseguendo nella trattazione.

Senz'altro il comportamento dello stato di vuoto è assolutamente peculiare se confrontato con quello delle distribuzioni di probabilità associate ad uno stato di Fock con autovalore  $n > 0$  (rappresentate in *Figura 2*). Queste ultime assumono la ben più articolata forma:

$$\mathcal{W}_n(q, p) = \frac{(-1)^n}{\pi} e^{-q^2 - p^2} \mathcal{L}_n(2q^2 + 2p^2), \quad [4]$$

dove  $\mathcal{L}_n$  denota l' $n$ -esimo polinomio di Laguerre. Come si può vedere direttamente ispezionando l'equazione precedente, la funzione di Wigner per un generico stato di Fock  $n$  conserva una simmetria radiale, data la dipendenza da  $r^2 = q^2 + p^2$ . Tuttavia emerge anche che, per la comparsa aggiuntiva nell'espressione della dipendenza da  $r$  tramite un polinomio di Laguerre, la funzione assumerà in generale tanto valori positivi quanto negativi. Proprio questo è ciò che fa degli stati a numero definito di fotoni degli stati intrinsecamente quantistici. La negatività, del resto, è anche una conseguenza diretta della formula di sovrapposizione: poichè gli stati di Fock sono tra loro ortogonali, necessariamente l'integrazione di due generiche  $\mathcal{W}_n$  e  $\mathcal{W}_{n'}$  potrà essere nulla solo in presenza di regioni a valori negativi.

Si vede molto chiaramente dai grafici riportati in *Figura 2* come queste distribuzioni assumano un comportamento oscillante e come, in particolare, gli stati pari presentino un picco nell'origine, mentre quelli dispari una gola. Il numero di queste fluttuazioni cresce, senza sorpresa, al crescere di  $n$ , in modo consistente con quanto accade con la distribuzione di probabilità  $|\psi(q)|^2$  (riottenibile, tramite integrazione lungo una qualsiasi direzione radiale passante per l'origine, dalla più generale  $\mathcal{W}_n$ ), dove le funzioni d'onda sono espresse per mezzo dei polinomi di Hermite. Tuttavia, il numero di oscillazioni resta sempre confinato entro una regione circolare centrata sull'origine e avente raggio pari a  $\tilde{r}_n = \sqrt{2n + 1}$ , delimitante la cosiddetta *banda di Bohr-Sommerfeld*. Noto come, in opportune unità di misura, gli autovalori dell'energia di un oscillatore armonico quantistico possano essere scritti come:

$$\omega_n = n + \frac{1}{2},$$

allora  $\tilde{r}_n$  rappresenta classicamente l'ampiezza delle oscillazioni di un oscillatore armonico in moto attorno all'origine.

### 2.2.3 Operatore di *squeezing*

Come è già stato richiamato nel paragrafo precedente, lo stato di vuoto concretizza l'impossibilità di poter spingere la determinazione dei valori di quadratura  $\hat{p}$  e  $\hat{q}$  al di sotto del valore imposto dal principio di indeterminazione: il prodotto delle due deviazioni standard deve essere sempre superiore o al più uguale al valore  $1/2$  (sempre in unità tali per cui  $\hbar = 1$ ). Questo vincolo risulta invalicabile. Ciò nonostante, pur muovendosi

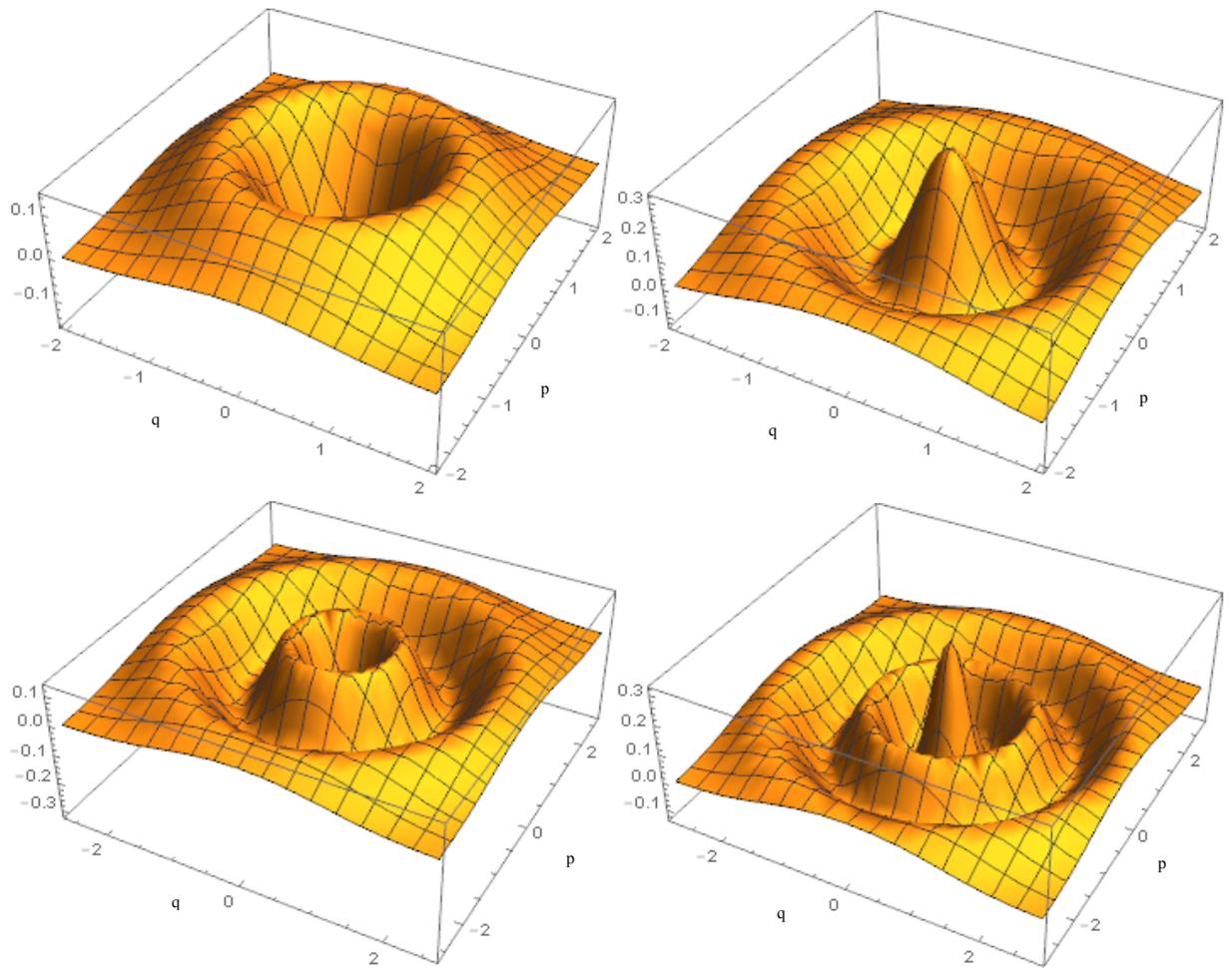


Figura 2.2: *Distribuzioni di Wigner di stati di Fock con numero di fotoni via via crescente da uno a quattro. È possibile apprezzare come il numero delle oscillazioni compiute dalla distribuzione cresce all'aumentare del numero di fotoni stessi e come le distribuzioni a numero di fotoni pari esibiscano un picco positivo nell'origine, mentre quelle a numero dispari una gola negativa.*

nelle regole imposte dalla meccanica quantistica, è possibile pensare di poter abbassare l'indeterminazione di una delle due variabili canoniche al di sotto del livello del vuoto, facendo in modo che ciò risulti compensato da un crescere dell'indeterminazione sulla variabile coniugata. Si ottiene così uno *stato spremuto* (più elegantemente noto come stato *squeezed*). Questo va al di là di un semplice esperimento mentale: stati quantici in cui questo si verifica sono effettivamente ottenibili in laboratorio!

Quanto descritto sopra può essere matematicamente concretizzato introducendo un parametro reale  $\zeta$  (noto appunto con il nome di *parametro di squeezing*) che quantifichi l'effetto di deformazione dello stato attraverso la sua azione sulle varianze delle quadrature:

$$\Delta^2 q = \frac{1}{2}e^{-2\zeta}; \quad \Delta^2 p = \frac{1}{2}e^{+2\zeta}.$$

Si osservi come i segni degli esponenziali siano discordi, al fine di soddisfare il vincolo del principio di Heisenberg. Se l'effetto sulle varianze può essere così espresso, allora si è in grado ora di determinare come si modifica lo stato di vuoto in queste circostanze: semplicemente le variabili canoniche risulteranno moltiplicate per un fattore di scala  $e^{\pm\zeta}$ . Facendo attenzione a mantenere le funzioni delle coordinate spaziali e degli impulsi opportunamente normalizzate, queste potranno essere scritte per lo stato di vuoto come:

$$\psi_{0(\text{squeezed})}(q) = e^{\zeta/2}\psi_0(e^\zeta q); \quad \tilde{\psi}_{0(\text{squeezed})}(p) = e^{-\zeta/2}\psi_0(e^{-\zeta} p).$$

Al fine di soddisfare il più volte citato vincolo, quindi, se la funzione d'onda  $\psi_0$  è compressa, la sua trasformata di Fourier risulterà dilatata. Questa azione di *squeeze* può essere matematicamente espressa da un operatore molto utile, la cui espressione può essere ricavata in pochi passaggi. Se infatti si differenzia la prima delle due equazioni precedenti rispetto alla variabile  $q$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{0(\text{squeezed})}(q)}{\partial q} &= \frac{1}{2} \left( q \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q} q \right) \psi_{0(\text{squeezed})} = \\ &= \frac{1}{2} (i\hat{q}\hat{p} + i\hat{p}\hat{q}) \psi_{0(\text{squeezed})} = \frac{1}{2} (\hat{a}^2 + \hat{a}^{*2}) \psi_{0(\text{squeezed})}. \end{aligned}$$

L'operatore che risolve l'equazione differenziale ricavata è proprio l'*operatore di squeezing*:

$$\hat{S} \equiv e^{\frac{\zeta}{2}(\hat{a}^2 + \hat{a}^{*2})},$$

che risulta essere unitario, essendo l'argomento dell'esponenziale autoaggiunto. Lo stato di vuoto *squeezed* potrà quindi essere ottenuto dalla semplice applicazione di tale operatore allo stato di Fock corrispondente, ossia  $\psi_{0(\text{squeezed})} = \hat{S}(\zeta)|0\rangle$ .

Anche se già di per sè molto curiosi, gli stati *squeezed* vantano un'altra inaspettata proprietà. Si è detto come gli stati di Fock siano autostati dell'operatore numero, ovvero aventi un numero definito di fotoni (oltre che un preciso valore di energia). Ovviamente

non ci si aspetta che lo stato di vuoto, dopo l'applicazione dell'operatore  $\hat{S}$ , permanga un autostato di  $\hat{N}$ . Quindi, al di fuori di un autostato, come insegna la meccanica quantistica, solamente un approccio statistico può essere applicato. Questa considerazione ci tornerà ancor più utile successivamente. Eppure, volendo studiare la statistica del numero di fotoni presenti in uno stato di vuoto *squeezed*, basterà calcolare la probabilità che lo stato  $\hat{S}|0\rangle$  collassi in  $|n\rangle$ , ovvero:

$$p_n = |\langle n|\hat{S}|0\rangle|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(q) e^{\zeta/2} \psi_0(e^{\zeta/2} q) dq \right|^2.$$

Poichè la parità della funzione d'onda di uno stato di Fock è enucleata nella parità dei polinomi di Hermite, i quali soddisfano la condizione di parità ben nota  $\mathcal{H}_n(-x) = (-1)^n \mathcal{H}_n(x)$ , l'integrando nella formula precedente avrà parità positiva o negativa a seconda del valore di  $n$ . Quindi è immediato osservare come la probabilità di trovare, in una misurazione sullo stato di vuoto spremuto, un numero dispari di fotoni sia nulla. Una peculiarità di questi stati, tutt'altro che riconducibile ad un fenomeno classico, è quindi che i fotoni vengono prodotti sempre in coppia.

Ma per comprendere meglio dal punto di vista qualitativo questa operazione che ha luogo sullo spazio delle fasi, viene ancora una volta in nostro soccorso la rappresentazione di Wigner. A partire da una funzione di Wigner generica risulta semplice calcolare l'azione dell'operatore di *squeezing*. Tenendo conto infatti di come tale operatore agisca alla stregua di un fattore di scala sulla coordinata  $q$ , si avrà:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{squeezed}(q, p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} \langle q - \frac{x}{2} | \hat{S} \hat{\rho} \hat{S}^* | q + \frac{x}{2} \rangle dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} e^{\zeta} \left\langle e^{\zeta} \left( q - \frac{x}{2} \right) \left| \hat{\rho} \right| e^{\zeta} \left( q + \frac{x}{2} \right) \right\rangle dx = \mathcal{W}(e^{\zeta} q, e^{-\zeta} p). \end{aligned}$$

Questo comportamento non sorprende, dato che la funzione di Wigner riassume in sé il comportamento tanto di  $\psi(q)$  quanto di  $\tilde{\psi}(p)$ . Concentrandosi in particolare sullo stato di vuoto *squeezed* (il cui grafico è riportato in *Figura 3*), si otterrà, in base alla definizione generale:

$$\mathcal{W}_{0(squeezed)}(q, p) = \frac{1}{\pi} e^{-e^{2\zeta} q^2 - e^{-2\zeta} p^2}.$$

La funzione di Wigner di  $\hat{S}|0\rangle$  coincide ancora una volta con una distribuzione di quasi-probabilità totalmente positiva a forma di gaussiana centrata nell'origine. A differenza del caso iniziale di assoluta simmetria cilindrica, tuttavia, in questa situazione le deviazioni standard sono sbilanciate proprio per effetto dello *squeezing delle quadrature*.

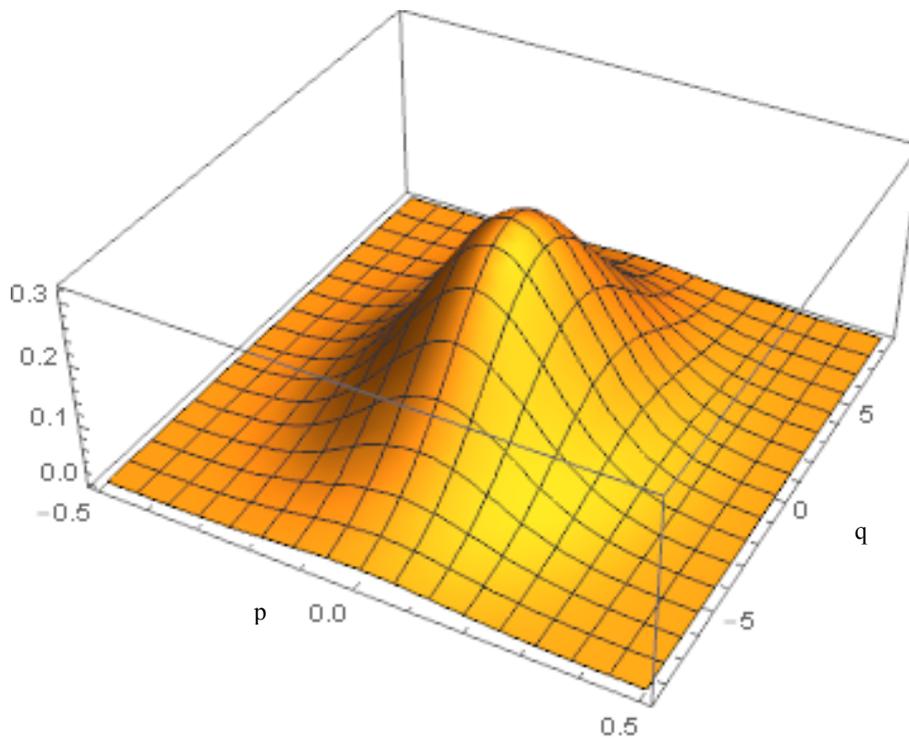


Figura 2.3: *Distribuzione di Wigner dello stato di vuoto squeezed con  $\zeta = 1.6$ . Si osservi come, in questo caso, la gaussiana bidimensionale descrivente la distribuzione di quasi-probabilità risulti compressa lungo la direzione di quadratura  $p$  ed allargata nell'altra, al fine di garantire la validità del principio di indeterminazione.*

## 2.2.4 Stati coerenti

Un altro set di autostati associati all'oscillatore armonico estremamente importanti al fine di comprendere la potenzialità descrittiva dell'approccio di Wigner è quello degli stati coerenti. Questi sono definiti come gli autostati dell'operatore di distruzione (e di creazione):

$$\hat{a}|\alpha\rangle = |\alpha\rangle\alpha \quad \hat{a}^*|\alpha\rangle = |\alpha\rangle\bar{\alpha}.$$

Nella misura in cui  $\hat{a}$  può essere visto come l'operatore associato all'ampiezza delle fluttuazioni di un oscillatore armonico (interpretazione particolarmente utile nel caso specifico del campo elettromagnetico),  $\alpha$  potrà essere letto come quel numero complesso il cui modulo quadro  $|\alpha|^2$  e la cui fase  $\arg(\alpha)$  definiscono rispettivamente ampiezza e fase della fluttuazione stessa. A corroborare questa interpretazione interviene l'espressione del valor medio dell'energia su di uno stato  $|\alpha\rangle$ , data da:

$$\langle\alpha|\hat{H}|\alpha\rangle = \langle\alpha|(\hat{a}^*\hat{a} + 1/2)|\alpha\rangle = |\alpha|^2 + 1/2,$$

che ricorda la relazione di proporzionalità classica tra l'energia e il quadrato dell'ampiezza delle oscillazioni armoniche. Alla luce di quanto dello le due grandezze  $|\alpha|^2$  e  $\arg(\alpha)$  risulteranno ben definite solamente in uno stato  $|\alpha\rangle$ , che, proprio per le sue spiccate analogie con un fenomeno ondulatorio, viene spesso definito stato classico. È bene precisare come  $\alpha \in \mathbb{C}$ : ciò ci ricorda proprio come l'operatore  $\hat{a}$  non sia autoaggiunto!

Fatta questa breve introduzione, è conveniente presentare un utile operatore, ovvero l'*operatore di traslazione*, agente in modo ben preciso proprio su questi autostati speciali. Esso si definisce come:

$$\hat{D}(\alpha) = e^{i(\alpha\hat{a}^* - \bar{\alpha}\hat{a})}.$$

Poichè l'argomento dell'esponenziale sopra introdotto risulta autoaggiunto,  $\hat{D}$  non potrà che essere unitario. Possiamo usare questa proprietà per definire la sua azione su  $\hat{a}$  considerando una variazione infinitesima del parametro  $\alpha$ . Facendo ora uso della proprietà generale riguardante gli operatori unitari scritti come esponenziale di un operatore autoaggiunto  $\hat{U}$ , in base alla quale:

$$e^{i\hat{U}}\hat{A}e^{-i\hat{U}} = \hat{A} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} \underbrace{[\hat{U}, [\hat{U}, \dots [\hat{U}, \hat{A}] \dots ]]}_{n \text{ fattori } \hat{U}},$$

arrestandosi al primo ordine si avrà:

$$\hat{D}^*(\delta\alpha)\hat{a}\hat{D}(\delta\alpha) = \hat{a} + [\hat{a}, \delta\alpha\hat{a}^* - \bar{\delta\alpha}\hat{a}] = \hat{a} + \delta\alpha.$$

Iterando il procedimento per una serie di variazioni infinitesime si otterrà nel caso finito la formula voluta:

$$\hat{D}^*(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha\hat{1},$$

con  $\alpha = \sum \delta\alpha$ . Come si vede, quindi, tale operatore agisce traslando  $\hat{a}$  di una quantità complessa. Il significato profondo di questo potrà essere colto come segue. Innanzitutto è bene notare come anche lo stato di vuoto  $|0\rangle$  risulti uno stato coerente con  $\alpha = 0$ . Vorremmo, avendo già una espressione nota per questo stato in termini di funzioni d'onda, poter ricavare da esso un qualsiasi stato coerente. Per fare questo ci avvaliamo della relazione:

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle.$$

Ricavarla è immediato. Infatti basterà scrivere questa serie di uguaglianze:

$$\begin{aligned} \hat{a}\hat{D}(-\alpha)|\alpha\rangle &= \hat{D}(-\alpha)\hat{D}^*(-\alpha)\hat{a}\hat{D}(-\alpha)|\alpha\rangle = \hat{D}(-\alpha)[(\hat{a} - \alpha)|\alpha\rangle] = \\ &= \hat{D}(-\alpha)|0\rangle = 0, \end{aligned}$$

dove ci si è avvalsi delle proprietà dell'operatore di spostamento sopra mostrate. In particolare l'ultima uguaglianza a zero implica che  $\hat{a}\hat{D}(-\alpha)|\alpha\rangle$  sia uguale a zero, ossia che  $\hat{D}(-\alpha)|\alpha\rangle$  coincida con lo stato di vuoto. Da qui discende l'importante risultato enunciato: tutti gli stati coerenti possono essere ottenuti da  $|0\rangle$  tramite semplice traslazione. Questo risulta essenziale per ottenere una formula esplicita degli stati coerenti, come si stava di fatto cercando.

Se esprimiamo  $\alpha$  in funzione delle due variabili canoniche come  $\alpha = 2^{-1/2}(q_0 + ip_0)$  e gli operatori di creazione e distruzione in funzione delle quadrature, si potrà ottenere una utile espressione per  $\hat{D}$  in termini di:

$$\hat{D} = e^{(ip_0\hat{q} - iq_0\hat{p})}.$$

Tuttavia questo esponenziale non ci è nuovo: esso viene proprio a coincidere con la definizione data di sistema di Weyl in funzione dei due generatori infinitesimi. Per questo, sfruttando calcoli già effettuati, sarà possibile scomporre tale operatore in tre contributi che, espressi nella rappresentazione di Schrödinger, risulteranno restituire la seguente espressione per la funzione d'onda di  $|\alpha\rangle$  quando applicati a  $|0\rangle$ :

$$\psi_\alpha(q) = \psi_0(q - q_0) \exp\left(ip_0q - \frac{ip_0q_0}{2}\right) = \frac{1}{\pi^{1/4}} \exp\left(-\frac{(q - q_0)^2}{2} + ip_0q - \frac{ip_0q_0}{2}\right),$$

essendo  $\psi_0$  la funzione d'onda del vuoto. Una espressione analoga si può ottenere nella rappresentazione degli impulsi. Come si può apprezzare, il modulo quadro della funzione d'onda di uno stato coerente altro non è se non una gaussiana traslata di  $q_0$  (dando gli esponenziali immaginari contributo unitario). Come vedremo, questa idea si ritroverà anche nella rappresentazione di Wigner in modo ancora più evidente. Ma prima di passare a questa è bene soffermarsi su una proprietà che ci permetterà di capire a fondo il perchè tali stati vengano chiamati classici.

Se torniamo all'espressione di  $\hat{D}$  in funzione degli operatori di creazione e distruzione, e, facendo uso della regola di Baker-Campbell-Hausdorff [1], lo si scrive come:

$$\hat{D} = e^{-(1/2)|\alpha|^2} e^{(\alpha\hat{a}^*)} e^{(-\alpha^*\hat{a})},$$

lo si potrà applicare a  $|0\rangle$  per ottenere una nuova espressione per uno stato coerente. Considerando come il terzo esponenziale si traduca in una moltiplicazione per l'unità (come si vede attraverso una espansione di Taylor e ricordando che  $\hat{a}|0\rangle = 0$ ), basterà espandere il secondo esponenziale ed avvalersi della formula che esprime uno stato generico di Fock in funzione di  $|0\rangle$ . Da quì si otterrà:

$$|\alpha\rangle = e^{-(1/2)|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

Benchè la formula sia estremamente ricca di contenuto, per i nostri scopi sarà sufficiente osservare che la statistica di uno stato coerente, espressa in termini di probabilità  $p_n$  di misurare, in presenza di un tale stato, un certo numero  $n$  di fotoni, è descritta dalla distribuzione di Poisson:

$$p_n = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}.$$

Questo ci dice che la statistica alla radice di uno stato coerente è perfettamente classica. Una situazione diversa, per esempio, era stata trovata per lo stato *squeezed*, il quale rivelava effetti puramente quantistici. In questo caso si è di fronte ad una semplice distribuzione di Poisson avente valore medio pari a  $|\alpha|^2$ , ossia proporzionale all'intensità stessa dell'oscillazione.

Tutto il formalismo sviluppato fino a questo punto ci permette di trattare con estrema semplicità quanto si verifica per uno stato coerente nella rappresentazione di Wigner. Cerchiamo anche in questo caso di riprodurre la funzione di Wigner in piena generalità, come fatto per gli stati *squeezed*. Per fare questo inseriremo nella formula di Wigner l'operatore densità corrispondente ad uno stato coerente generico, ottenuto tramite l'applicazione dell'operatore di spostamento. Si avrà perciò:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_C(q, p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} \left\langle q - \frac{x}{2} \left| \hat{D}\hat{\rho}\hat{D}^* \right| q + \frac{x}{2} \right\rangle dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(p-p_0)x} \left\langle q - \frac{x}{2} - q_0 \left| \hat{\rho} \right| q + \frac{x}{2} - q_0 \right\rangle dx. \end{aligned}$$

Da ciò si deduce in generale che:

$$\mathcal{W}_C(p, q) = \mathcal{W}_C(q - q_0, p - p_0).$$

Quindi recuperiamo quanto ricavato precedentemente in termini generali: gli stati coerenti corrispondono ad una traslazione per un parametro  $\alpha = 2^{-1/2}(q_0 + ip_0)$  nello spazio

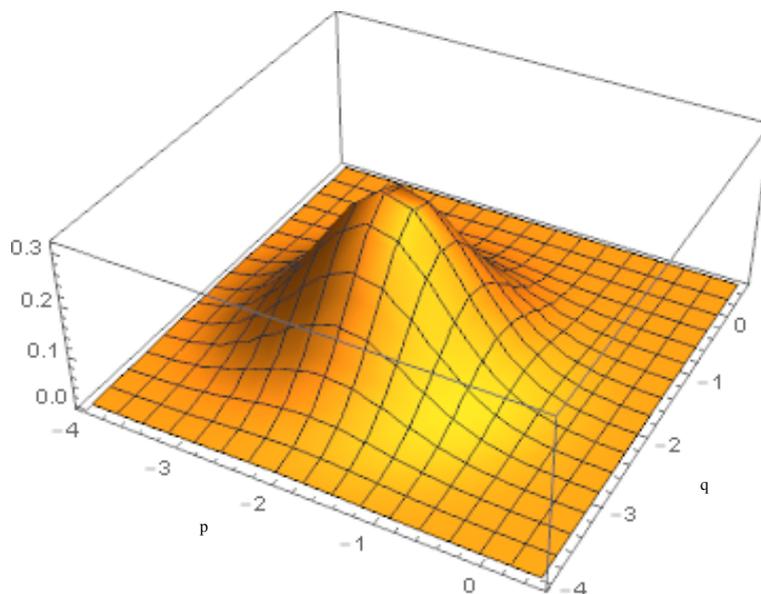


Figura 2.4: *Distribuzione di Wigner dello stato coerente con  $(q_0, p_0) = (2, 2)$ . In questo caso la distribuzione risulta corrispondere alla funzione di Wigner per lo stato di vuoto, a meno di una traslazione del centro della gaussiana di un vettore  $(2, 2)$ .*

delle fasi. Per avere un risultato concreto su cui ragionare, se applichiamo la formula precedente alla funzione di Wigner dello stato di vuoto, otteniamo:

$$\mathcal{W}_C(p, q) = \frac{1}{\pi} \exp(-(q - q_0)^2 - (p - p_0)^2),$$

ovvero, coerentemente con quanto visto limitatamente alle funzioni d'onda di quadratura, abbiamo una gaussiana centrata su di un punto ottenuto per traslazione con un vettore  $(q_0, p_0)$  a partire dall'origine (*Figura 4*). Si noti come le deviazioni standard nelle due direzioni di quadratura non risultino affette dalla trasformazione: questo sta ad indicare come gli stati coerenti condividano con lo stato  $|0\rangle$  il rumore di vuoto, ossia l'inevitabile presenza di fluttuazioni quantistiche. Tuttavia, come per esso, anche in questo caso esse risultano minimizzate, avvicinandosi quanto più possibile ad una localizzazione precisa (tipicamente classica) in un punto  $(q_0, p_0)$ . Come abbiamo già visto, però, il formalismo di Wigner ha un modo assolutamente elegante di rendere ragione della classicità di questi stati coerenti, che fino ad ora è stata esibita tramite considerazioni qualitative o di tipo statistico: basta infatti notare che la distribuzione di quasi-probabilità in questo caso coincide pienamente con una distribuzione classica, data la completa positività. Come vedremo a breve, il formalismo sviluppato per gli stati coerenti si rivelerà fondamentale per discutere un ultimo interessante esempio che permette di osservare le impressionanti singolarità che il mondo quantistico riserva.

Eppure, prima di abbandonare la trattazione degli stati coerenti, è bene fare uso di essi per estrapolare una ulteriore curiosa proprietà della funzione di Wigner, all'inizio difficilmente affrontabile. Per fare questo consideriamo la convoluzione della funzione di Wigner con una funzione gaussiana  $\mathcal{G}$ :

$$\begin{aligned} (\mathcal{W} * \mathcal{G})(q, p) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}(q', p') \exp(-(q - q')^2 - (p - p')^2) dq' dp' = \\ &= \frac{1}{2\pi} \text{tr}\{\hat{\rho}|\alpha\rangle\langle\alpha|\} = \frac{1}{2\pi} \langle\alpha|\hat{\rho}|\alpha\rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Infatti una gaussiana centrata in un punto diverso dall'origine altro non è se non la funzione di Wigner di uno stato coerente. In più nelle formule precedenti si è anche sfruttata la definizione di media operatoriale nella rappresentazione di Wigner introdotta nella prima parte di questo capitolo. Come si vede, quindi, il seguente integrale altro non definisce se non la probabilità di trovare il sistema quantistico in analisi (descritto dall'operatore  $\hat{\rho}$ ) nello stato  $|\alpha\rangle$ . L'ultima disuguaglianza, invece, deriva proprio dalle proprietà dell'operatore densità, che risulta essere non negativo. Questa innocua serie di passaggi presenta però conseguenze importanti. Infatti il calcolo di una convoluzione con una funzione gaussiana implica l'eseguire una operazione di media della funzione di Wigner attorno al punto  $(p, q)$ . Poiché tale convoluzione risulta essere sempre positiva  $\forall(p, q)$ , ciò implica che le regioni in cui la funzione di Wigner assume valori negativi non potranno estendersi su aree molto maggiori del prodotto delle due deviazioni standard lungo le direzioni di quadratura della gaussiana stessa (ovvero  $1/2$ ). Questo fornisce un ulteriore vincolo alle caratteristiche che una funzione di Wigner può assumere: l'ampiezza delle regioni intrinsecamente quantistiche della distribuzione avranno sempre una risoluzione non superiore alle fluttuazioni statistiche dello stato di vuoto.

## 2.2.5 Sovrapposizioni e miscele

Resta ora da esplorare a livello principalmente qualitativo e sicuramente non esaustivo (data l'enormità dei casi possibili) cosa si verifica se si passa a considerare sistemi quantistici descritti da più di uno degli stati sopra esaminati simultaneamente. Si hanno in fisica quantistica due possibilità, a cui si era già accennato: le miscele classiche di stati quantistici e la sovrapposizione di stati.

Da una parte le prime descrivono una situazione del tutto simile a quanto accade classicamente. Infatti si parla di miscela classica quando lo stato di un sistema è noto solo statisticamente, ovvero è nota solo la probabilità  $p_n$  che un sistema occupi uno stato  $n$  generico. Sistemi quantistici di questo tipo, come noto, sono descritti da un operatore densità dato dalla somma di proiettori: questo significa, come già accennato, che la funzione di Wigner associata sarà semplicemente data dalla somma lineare pesata di funzioni di Wigner, ciascuna associata ad un possibile risultato di una operazione di

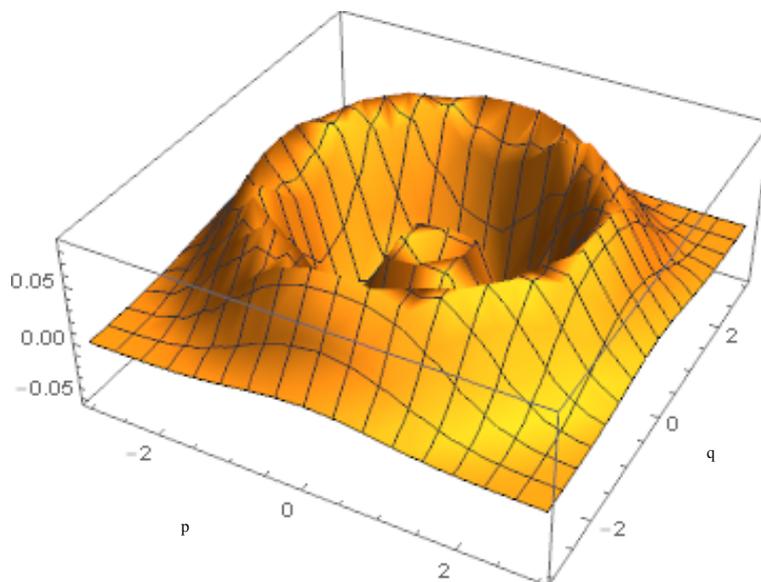


Figura 2.5: *Distribuzione di Wigner di una miscela classica di stati di Fock  $0.5|2\rangle\langle 2| + 0.5|3\rangle\langle 3|$ .*

misura. Un esempio di tale stato è riportato in *Figura 5*. È interessante sottolineare come un qualsiasi ensemble quantistico possa essere di fatto pensato in tali termini e quindi trattato statisticamente (un riferimento più concreto possono essere gli *stati termici* descritti da particelle quantistiche).

Una situazione invece ben diversa è rappresentata dal concetto di sovrapposizione. L'aspetto profondo che distingue uno stato descritto da sovrapposizione da una miscela classica è che il primo è esso stesso uno stato puro, ovvero un vettore in uno spazio di Hilbert (cosa che non può essere detta di una miscela, espressa per mezzo di una somma di proiettori). Basti pensare al famoso esperimento in cui un fotone polarizzato linearmente attraversa una lastra di materiale polarizzatore, avendo probabilità tanto di essere assorbito quanto di proseguire indisturbato. La probabilità suddetta dipende proprio dallo stato di polarizzazione del fotone medesimo, ma, essendo i risultati della misura soltanto due, si deduce che tale stato potrà essere descritto come sovrapposizione lineare di essi (polarizzazione parallela od ortogonale all'asse ottico del filtro polarizzatore). Si osservi come lo stato di polarizzazione iniziale del fotone sia noto con esattezza e non con una certa probabilità: ad essere affetto da considerazioni statistiche è solo il risultato della misura di un dato osservabile.

Come si può immaginare, gli esempi di sovrapposizione di stati che si trovano in meccanica quantistica sono innumerevoli. Tuttavia gli aspetti più interessanti possono essere colti da una sovrapposizione proprio di stati coerenti. Questi infatti rappresentano, come abbiamo ricordato spesso, un insieme di stati analoghi ad un sistema classico.

Eppure la sovrapposizione di tali stati può produrre effetti prettamente quantistici. Se consideriamo la sovrapposizione di stati coerenti che puntano in direzioni diametralmente opposte nello spazio delle fasi quale  $|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle$ , otteniamo il cosiddetto *stato gatto di Schrödinger*. Come è facile intuire, il nome di questo fa riferimento al celebre esperimento mentale pensato da Schrödinger proprio per descrivere in modo efficace l'effetto di sovrapposizione quantistico, facendone emergere il carico rivoluzionario tramite la sua applicazione al mondo fisico macroscopico. Se però per quest'ultimo caso si va incontro ad effetti paradossali, il mondo atomico e subatomico presenta comportamenti di questa natura.

La sovrapposizione di stati coerenti che si è presa in considerazione sarà semplicemente descritta dalla somma delle due funzioni d'onda dei medesimi nello spazio delle coordinate spaziali, ovvero:

$$\psi(q) \propto \exp(-1/2(q - q_0)^2) + \exp(-1/2(q + q_0)^2).$$

Abbiamo quindi un sistema simultaneamente collocato tanto in  $+q_0$  quanto in  $-q_0$ . Se ora si fa uso della formula opportuna per ricavare la funzione di Wigner associata a tale stato si otterrà, sempre a meno di costanti di proporzionalità:

$$\mathcal{W}(q, p) \propto \exp(-(q - q_0)^2 - p^2) + \exp(-(q + q_0)^2 - p^2) + 2 \exp(-q^2 - p^2) \cos(2pq_0).$$

Si osserva immediatamente come la distribuzione di quasi-probabilità sia piccata attorno ai valori  $\pm q_0$  descrittivi degli stati coerenti, ma come essa sia ben lungi dal rappresentare, come nel caso delle miscele classiche, una semplice combinazione lineare di termini. Si vede infatti che nella regione centrale ai due picchi sopra citati la funzione esibisce oscillazioni di frequenza proporzionale alla separazione stessa tra i medesimi: tanto più la separazione è netta e tanto più la funzione di Wigner presenterà nella regione centrale una struttura interferenziale accentuata. Per evidenziare quest'ultima basterà integrare l'espressione di  $\mathcal{W}(q, p)$  nella coordinata  $q$ , ottenendo la distribuzione di probabilità nello spazio dei momenti:

$$\tilde{\psi}(p) \propto e^{-p^2} \cos^2(pq_0).$$

Ovviamente anche in questo caso la non classicità dello stato si ripercuote sulla presenza di valori negativi nella distribuzione. In *Figura 6* si riportano alcuni esempi di questi stati di sovrapposizione in funzione del valore di  $q_0$ , con il conseguente evidenziarsi della regione intermedia tra i due picchi gaussiani.

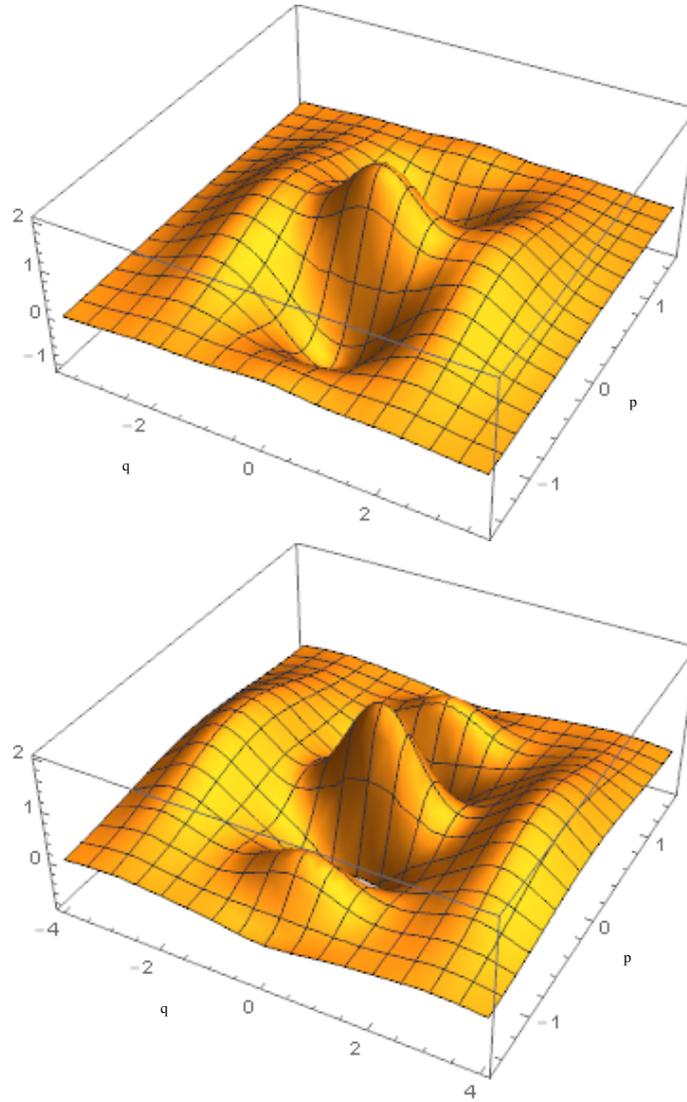


Figura 2.6: *Distribuzioni di Wigner di stati gatto di Schrödinger con  $q_0 = 2$  (sinistra) e  $q_0 = 3$  (destra). Si può apprezzare dalle figure come al crescere del valore di  $q_0$  aumentino le oscillazioni d'interferenza (descrittive del comportamento puramente quantistico del fenomeno) tra i due picchi gaussiani.*



# Capitolo 3

## Verso l'ottica quantistica

Nella seguente ed ultima sezione si desidera portare esempi che mostrino come le distribuzioni di quasi-probabilità siano al centro di un vastissimo panorama di ricerca. Il formalismo di Wigner, ampiamente presentato fino a questo punto, costituisce infatti il cuore pulsante dell'apparato matematico atto a descrivere tutta una serie di esperimenti nell'ambito di una branca della fisica quale l'ottica quantistica. Quest'ultima, ben lungi dall'essere una disciplina di secondo piano, rappresenta uno dei settori più all'avanguardia, i cui risultati e scoperte risultano in diretto legame con possibili sviluppi nel campo, tanto per dirne uno, dell'informatica quantistica.

### 3.1 Generazione di stati ottici quantistici

Nel capitolo precedente, al fine di portare alcuni significativi esempi di applicazioni della funzione di Wigner, si è rivolta l'attenzione alle varie forme da essa assunte nel caso degli stati dell'oscillatore armonico quantistico e, quindi, del campo elettromagnetico. È giunto quindi il momento di mostrare come questo formalismo matematico non resti pura e semplice astrazione fine a sè stessa, bensì presenti importati riscontri sperimentali. La cosa straordinaria, infatti, è che le funzioni di Wigner possono effettivamente essere ottenute in laboratorio dall'analisi di stati quantistici! La maggiore galleria di esempi viene offerta proprio dall'ambito dell'ottica quantistica: i tentativi di generare e misurare stati di Fock, *squeezed* ... sono innumerevoli ed altrettanto numerose sono le modalità con cui ciò può essere realizzato. Tuttavia pressochè tutti risultano essere accomunati da uno schema generale.

Al fine di tratteggiare, ad un livello principalmente qualitativo, la struttura degli esperimenti che coinvolgono le misurazioni delle distribuzioni di quasi-probabilità, si prenderà come riferimento la prova condotta da Alexei Ourjoumtsev, Hyunseok Jeong, Rosa Tualle-Brouri e Philippe Grangier e presentata in un articolo del 16 Agosto 2007 dal curioso titolo *Generation of optical 'Schrödinger cats' from photon number states*.

### 3.1.1 La SPDC ed il fotone singolo

Come il titolo dell'articolo sottolinea, lo scopo dell'esperimento consiste proprio nella generazione di uno stato gatto di Schrödinger, ovvero di uno degli stati quantici con le più spiccate peculiarità quantistiche, a partire da stati di Fock. Benchè un'analisi dettagliata del procedimento sperimentale richiederebbe tempo e ci porterebbe lontano dalle finalità esemplificative di questo capitolo, nondimeno sarà possibile tratteggiare i punti salienti della procedura.

In particolare ci si pone davanti un primo problema: come generare stati di Fock, richiesti dall'esperienza come stati di partenza? Malgrado gli stati ottici a numero definito di fotoni siano estremamente delicati da realizzare, oggi questo appare possibile. Una tecnica classica, benchè non unica, risulta quella che parte dalla generazione di uno stato di Fock a singolo fotone. Ottenuto questo, opportuni protocolli sperimentali consentono di ottenere uno stato  $|n\rangle$ , con  $n$  arbitrario (almeno in linea di principio).

Allora il baricentro del problema si sposta sulla possibilità di ottenere lo stato  $|1\rangle$ . Questo può essere realizzato tramite la cosiddetta *spontaneous parametric downconversion* (SPDC). Questa è basata sull'utilizzo di cristalli non lineari, quali il *BBO* (*borato di  $\beta$ -bario*) o il *KH<sub>2</sub>OPO<sub>4</sub>* (*fosfato di diidrogeno di potassio*), che presentano la particolare proprietà di essere in grado di produrre coppie di fotoni quando colpiti da una sorgente luminosa (tipicamente un laser). Come lo stesso nome sottolinea, il processo è spontaneo ed avviene con una certa probabilità che contraddistingue l'efficienza del cristallo medesimo. Ma quello che rende effettivamente possibile la produzione di un singolo fotone è che la coppia generata risulta essere *entangled*: il comportamento di un elemento della coppia è strettamente connesso all'altro (fenomeno che in meccanica quantistica risulta formalizzato dal fatto di descrivere i costituenti di un sistema entangled con un'unica funzione d'onda).

I due elementi della coppia entangled generati presenteranno, per la conservazione della quantità di moto, due direzioni spaziali diverse: eppure una misurazione effettuata su uno dei due fotoni porterà al collasso della funzione d'onda complessiva e costringerà il restante elemento della coppia a trovarsi in uno stato ben definito. Se i fotodetettori dell'opportuno apparato sperimentale riveleranno la presenza di un fotone in una direzione, si avrà la certezza di aver generato uno stato ad un singolo fotone nell'altra.

### 3.1.2 Il divisore di fascio

Una volta muniti dell'apparato atto a generare un singolo fotone, è possibile ottenere uno stato di Fock ad  $n$  fotoni tramite un metodo basato sullo sfruttamento di un importante strumento, che spesso compare in un set up sperimentale di ottica quantistica: il *beam splitter* (ovvero un divisore di fascio). Al fine di avere una idea circa l'aspetto di un tale dispositivo ne viene riportata una immagine indicativa in *Figura 1*. Malgrado la sua semplicità costruttiva (generalmente risulta infatti costituito di due prismi di ve-

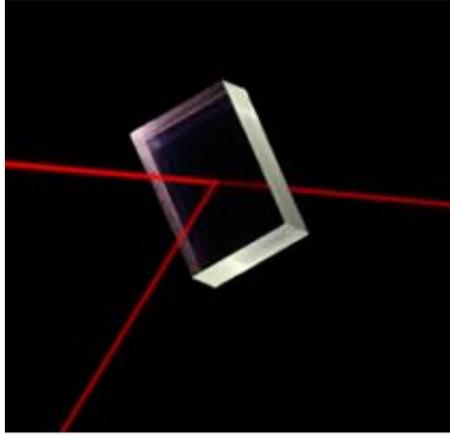


Figura 3.1: Esempio di un *beam splitter* tipicamente utilizzato in un laboratorio di ottica quantistica.

tro saldati alla base), il *beam splitter* risulta uno strumento estremamente utile e dal funzionamento spiegabile come segue. Se immaginiamo di far incidere due fasci di luce monocromatici e di uguale frequenza (ma arbitraria intensità) su due delle quattro facce di questo oggetto, si avranno in uscita dalle due facce residue due ulteriori fasci descritti da modi di oscillazione la cui ampiezza è data da una ben precisa relazione. Se infatti teniamo presente come, in meccanica quantistica, a ciascun modo di oscillazione di un campo elettromagnetico possa essere associato un operatore di distruzione (e creazione)  $\hat{a}$  ( $\hat{a}^*$ ), detti  $\hat{a}_1$  ed  $\hat{a}_2$  gli operatori associati ai modi in ingresso al divisore di fascio e  $\hat{b}_1$  ed  $\hat{b}_2$  quelli in uscita (si osservi, per chiarezza, la *Figura 2*), tra le quattro grandezze intercorrerà la seguente semplice relazione:

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & -\bar{r} \\ r & \bar{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{bmatrix} \quad \text{equazione di trasmissione del } \textit{beam splitter} \quad [4]$$

dove  $r$  e  $t$  rappresentano i coefficienti di riflessione e trasmissione, soddisfacenti la relazione  $|r|^2 + |t|^2 = 1$ . Ricordiamo ora come con il vettore  $|n, m\rangle$  venga indicato un autoket appartenente allo spettro congiunto di due operatori numero  $\hat{N}_1$  ed  $\hat{N}_2$  associati a due modi indipendenti del campo elettromagnetico. A questo punto si è in possesso di tutto ciò che serve ad una comprensione qualitativa del funzionamento del dispositivo nel contesto di esperimenti sulla generazione di stati di Fock. Se infatti ci si pone nella condizione di inviare sulle due facce del divisore rispettivamente un singolo fotone, generato per esempio tramite la SPDC, il sistema iniziale sarà descritto dall'autoket  $|1, 1\rangle = \hat{a}_1^* \hat{a}_2^* |0, 0\rangle$ . Considerando l'equazione del *beam splitter*, si avrà:

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{t} & \bar{r} \\ -r & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix},$$

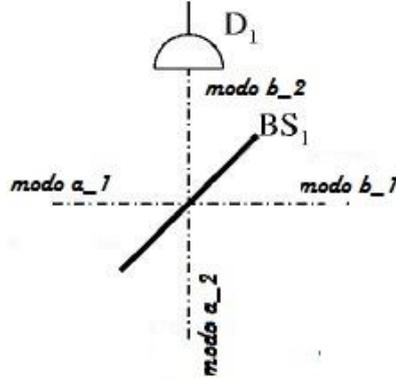


Figura 3.2: Rappresentazione schematica che illustra i vari modi  $\hat{a}_1$  ed  $\hat{a}_2$  in ingresso al beam splitter e  $\hat{b}_1$  e  $\hat{b}_2$  in uscita (B. M. Escher, A. T. Avelar e B. Baseia, *Synthesis of arbitrary Fock states via conditional measurement on beam splitters*, *PHYSICAL REVIEW A* **72**, 045803 (2005)).

dove ci si è limitati ad invertire la relazione precedente, e quindi  $\hat{a}_1^* = t\hat{b}_1^* + r\hat{b}_2^*$  e  $\hat{a}_2^* = -\bar{r}\hat{b}_1^* + \bar{t}\hat{b}_2^*$ . Da ciò si deduce come la funzione d'onda descrittiva del sistema in uscita dal divisore di fascio sia:

$$|\psi_{out}\rangle = (t\hat{b}_1^* + r\hat{b}_2^*)(-\bar{r}\hat{b}_1^* + \bar{t}\hat{b}_2^*)|0, 0\rangle = -\bar{r}t|2, 0\rangle + (|t|^2 - |r|^2)|1, 1\rangle + r\bar{t}|0, 2\rangle.$$

Si osserva quindi come la probabilità di avere 2 fotoni nell'output 1 (e quindi zero nel secondo) sia pari a  $|rt|^2$  e risulti uguale alla situazione diametralmente opposta. La possibilità che tanto il primo che il secondo output presentino un singolo fotone è data invece da  $1 - 2|rt|^2$ . Quest'ultima risulta essere nulla nel caso in cui  $r = t = 1/\sqrt{2}$  (in cui il divisore di fascio assume il nome specifico di *50:50 beam splitter*).

A questo punto si può seguire il ragionamento attuato per la produzione di un singolo fotone: la certezza di aver generato nel secondo output uno stato di Fock  $|2\rangle$  si avrà quando sul primo sarà effettuata una misura restituente il valore di zero fotoni. La probabilità che questo avvenga risulta massimizzata dal valore dei parametri del *beam splitter* proprio di  $r = t = 1/\sqrt{2}$ . Il processo potrà essere ripetuto iterativamente inviando il fascio di uscita contenente due fotoni alla faccia di un secondo divisore, al cui secondo ingresso viene sempre presentato uno stato di Fock  $|1\rangle$ . Con conti analoghi, ma via via più complessi, potrà essere calcolata la probabilità di ottenere in uscita tre fotoni, facendo in modo che questa risulti massima aggiustando i valori di  $r$  e  $t$ . Come si comprenderà, al crescere di  $n$  la probabilità di ottenere lo stato  $|n\rangle$  andrà diminuendo, in quanto si dovranno verificare simultaneamente tutta una serie di eventi indipendenti di ricezione di stati a zero fotoni nei fasci di output degli  $n$  *beam splitter* costituenti l'apparato sperimentale. Opportuni calcoli mostrano come la probabilità massimizzata

di ottenere lo stato di Fock  $|n\rangle$  sia data da:

$$\mathcal{P}_{|n\rangle}^{max} = \prod_{k=0}^n \mathcal{P}_{|k\rangle}^{max} = \frac{n!}{n^n}. \quad [5]$$

### 3.1.3 Ulteriori sviluppi

Come si può apprezzare da quanto descritto fino ad ora, l'idea che sta al di sotto del funzionamento di un divisore di fascio risulta piuttosto semplice, benchè un'implementazione pratica di esperimenti che lo coinvolgano risulti tecnicamente delicata. Tuttavia si è anche potuto intuire come, al crescere della complessità delle situazioni analizzate, la descrizione matematica diventi via via più sofisticata.

Fino ad ora, infatti, non si è fatto altro che descriver il punto di partenza del nostro esperimento preso a modello di generazione di uno stato gatto di Schrödinger. Una volta che lo stato  $|n\rangle$  è stato opportunamente generato, l'esperimento in analisi prosegue facendo incidere questo sulla superficie di un ulteriore divisore di fascio 50 : 50. Sulla seconda faccia di ingresso del *beam splitter* non viene inviato alcuno stato preparato sperimentalmente, il che equivale a dire come, secondo il formalismo sviluppato precedentemente, lo stato iniziale del sistema sia descritto dall'autoket  $|n, 0\rangle$ . Benchè la complessità della situazione sia cresciuta, ancora una volta possiamo riscontrare il modo di procedere descritto fino a questo punto: tramite l'ispezione di uno dei due output del *beam splitter*, sfruttando le proprietà dei due fasci di uscita di essere *entangled*, si ottengono informazioni sul secondo. Nel caso particolare dell'esperimento analizzato, se uno dei modi di uscita soddisfa, entro gli errori sperimentali, particolari prerequisiti, allora con buona approssimazione si potrà dire di aver generato nel secondo uno stato ottico gatto di Schrödinger!

Eppure non è sufficiente accontentarsi delle previsioni teoriche per poter dire di essere effettivamente riusciti a produrre uno degli stati che rappresenta una prerogativa del mondo quantistico. Infatti questi stati quantici della luce posso essere misurati. Cercheremo di farci un'idea di come questo possa avvenire.

## 3.2 La *balanced homodyne detection*

Sappiamo ormai bene come la chiave di accesso alle proprietà di un sistema quantistico possa essere ben riconosciuta nella funzione di Wigner. Questa, infatti, porta con sè tutto un insieme di proprietà che permettono di dare una descrizione completa del sistema e delle grandezze fisiche che lo contraddistinguono. Risulta evidente quindi come possa mostrarsi appetibile la possibilità di ricavare la distribuzione di quasi-probabilità del sistema fisico in analisi.

In linea di principio basterebbe determinare la distribuzione statistica delle coppie di valori posizione-impulso a seguito della ripetuta misura di queste per lo stato fisico

sotto indagine. Un problema nella sua determinazione però deriva ancora una volta dai principi alla base della meccanica quantistica: i valori che la funzione di Wigner assume nello spazio delle fasi non possono essere direttamente misurati, poichè il principio di indeterminazione di Heisenberg impedisce di ricavare simultaneamente i termini della coppia  $(q, p)$ . Serve quindi aggirare l'ostacolo con una procedura diversa.

Se infatti le leggi della fisica quantistica ci impediscono di determinare con precisione arbitraria i valori delle quadrature, nulla vieta di misurare quella che viene definita una *distribuzione marginale* della distribuzione di Wigner  $pr(q, \theta)$ , ovvero l'integrale di tale funzione lungo una retta passante per l'origine del sistema di riferimento e formante con uno dei due assi un angolo  $\theta$ :

$$pr(q, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}(q \cos(\theta) - p \sin(\theta), q \sin(\theta) + p \cos(\theta)) dp.$$

Come appare evidente, tale quantità rappresenta a sua volta una distribuzione (quì unidimensionale), ma dove in questo caso la grandezza statistica coinvolta è rappresentata dai valori della quadratura  $q$  lungo la direzione definita dall'angolo  $\theta$  ( $q_\theta$ ). Prima di procedere è bene sottolineare ulteriormente il significato delle quadrature  $q$  e  $p$  nel contesto dell'ottica quantistica: se infatti per un oscillatore armonico queste rappresentano rispettivamente la posizione e l'impulso di una particella, per un campo elettromagnetico questa interpretazione cade per ovvie ragioni. La descrizione formale è la medesima, ma ora le quadrature indicano il valore dell'ampiezza delle componenti dell'onda elettromagnetica in fase ed in quadratura di fase rispetto ad un riferimento opportuno.

Ma come è possibile ottenere un istogramma contenente tutte le occorrenze dei valori di  $q_\theta$  ad angolo fissato? È a questo punto che interviene la *balanced homodyne detection*. Il funzionamento schematico di questa tecnica di indagine è il seguente. Una volta generato in modo opportuno il segnale codificante lo stato quantico da studiare (nel nostro caso lo stato gatto di Schödinger), questo viene direzionato su una delle due facce di un *beam splitter 50:50*. Chiamiamo le ampiezze di quadratura del campo elettrico associato con tale segnale rispettivamente  $E_s^q$  ed  $E_s^p$ . Nel secondo ingresso di questo viene invece inviato un segnale detto *oscillatore locale* (LO), generalmente derivante da una sorgente laser di ampiezza  $E_{LO}$  e fase (relativa al segnale sul primo ingresso)  $\theta_{LO}$ . Sulla base delle relazioni del divisore di fascio viste precedentemente si avrà per i due modi di uscita:

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{LO}e^{i\theta_{LO}} + E_s) = \frac{1}{\sqrt{2}}[(E_{LO} \cos(\theta_{LO}) + E_s^q) + i(E_{LO} \sin(\theta_{LO}) + E_s^p)],$$

$$E_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{LO}e^{i\theta_{LO}} - E_s) = \frac{1}{\sqrt{2}}[(E_{LO} \cos(\theta_{LO}) - E_s^q) + i(E_{LO} \sin(\theta_{LO}) - E_s^p)].$$

Questi due modi in uscita vengono poi rispettivamente fatti incidere su due fotodiodi polarizzati inversamente. Come è noto, nella configurazione *reverse bias* questi dispositivi

funzionano come fotorivelatori, in quanto in grado di produrre una corrente proporzionale all'intensità della radiazione incidente. Le due correnti fotogenerate vengono infine sottratte, fornendo la grandezza fisica di vero interesse. Infatti la differenza tra le due correnti, come si ricava facilmente, risulta essere, a meno di costanti di proporzionalità:

$$i_1 - i_2 \propto 2E_{LO}(E_s^q \cos(\theta_{LO}) + E_s^p \sin(\theta_{LO})).$$

L'intero ragionamento può essere rifrasedo in termini di operatori quantistici, facendo corrispondere ad  $E_s$  l'operatore di distruzione  $\hat{a}$  ed a  $E_s^q$  ed  $E_s^p$  le quadrature  $\hat{q}$ ,  $\hat{p}$ . Poiché l'intensità dell'oscillatore locale è generalmente molto maggiore di quella del segnale fisico oggetto di studio, per esso è più che sufficiente la trattazione classica già implementata. A questo punto i modi di uscita dal divisore di fascio saranno associati agli operatori:

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + E_{LO}\hat{1}) \quad \hat{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} - E_{LO}\hat{1}).$$

Basterà ora ricordare come, quantisticamente, il valore delle correnti fotogenerate possa essere messo in rapporto con il numero di fotoni incidenti sulla giunzione del fotodiode (maggiori saranno questi ultimi e maggiore sarà il quantitativo di elettroni promossi alla banda di conduzione) per poter scrivere quindi:

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 &\propto \hat{N}_1 - \hat{N}_2 = \hat{a}_1^* \hat{a}_1 - \hat{a}_2^* \hat{a}_2 = \\ &= \sqrt{2}|E_{LO}|(\hat{q} \cos(\theta_{LO}) + \hat{p} \sin(\theta_{LO})) = \sqrt{2}|E_{LO}|\hat{q}_{\theta}, \end{aligned}$$

dove  $\hat{N}_1$  e  $\hat{N}_2$  rappresentano gli operatori numero associati ai due modi di uscita e  $\hat{q}_{\theta}$  l'operatore relativo alla quadratura  $q$  lungo la direzione precisata da  $\theta$ , il cui valore di aspettazione stavamo cercando.

A questo livello risulta chiaro il ruolo fondamentale dell'oscillatore locale: da una parte la sua fase permette proprio di fissare la direzione lungo la quale viene analizzato il valore dell'integrale della funzione di Wigner. A fase fissata, tramite la misura del valore di differenza delle correnti fotogenerate eseguita su più sistemi preparati al medesimo modo, potrà essere costruito l'istogramma contenente i valori di aspettazione dell'operatore  $\hat{q}_{\theta}$ . Come emerge lucidamente dalla descrizione classica, questi valori forniscono l'ampiezza della componente del campo elettrico  $E_s$  in fase con l'oscillatore locale. Facendo poi variare la fase di quest'ultimo, potranno essere raccolte le diverse distribuzioni marginali per vari  $\theta$  (di cui un esempio in *Figura 3*). Come è facile intuire, tuttavia, il sistema quantistico faticosamente preparato risulta associato ad una radiazione di debole intensità. Proprio per questo è richiesto che l'oscillatore locale sia piuttosto intenso: le formule ricavate evidenziano come l'ampiezza del campo elettrico ad esso associato vada a moltiplicare come fattore di amplificazione proprio il valore di  $\hat{q}_{\theta}$ , aumentando l'efficienza della misurazione.

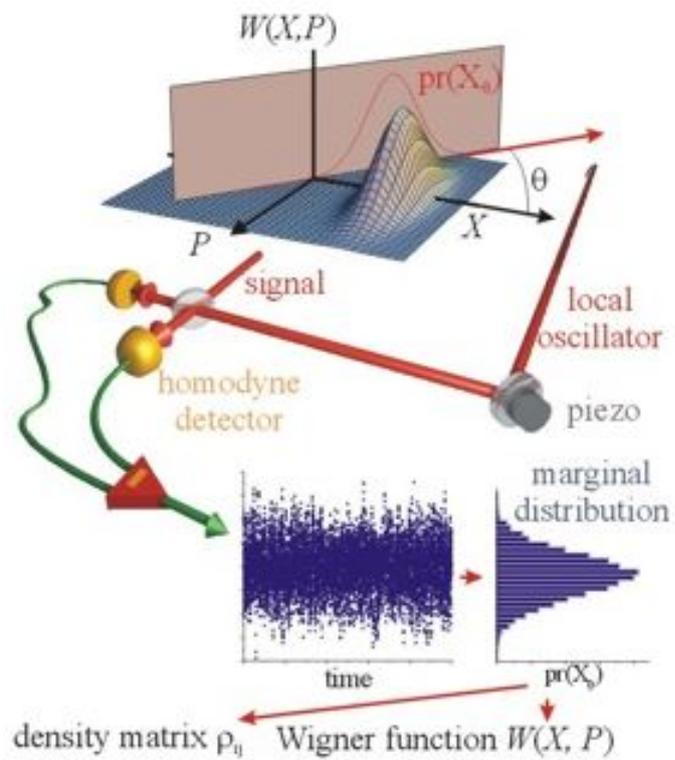


Figura 3.3: Grafico che sottolinea come la misura della differenza delle correnti foto-generate dai fasci in uscita dal beam splitter 50:50 servano a ricostruire una distribuzione marginale a fissato valore della fase relativa tra l'oscillatore locale e la sorgente da analizzare (immagine tratta dal sito della Institute for Quantum Science and Technology).

### 3.3 Idee base di tomografia quantistica

Come possiamo utilizzare la collezione di distribuzioni marginali ottenute per la funzione di Wigner in corrispondenza dei diversi angoli  $\theta$ ? L'idea che permette di risalire tramite queste alla distribuzione di quasi-probabilità nello spazio delle fasi presenta pesanti analogie con quanto si verifica, nell'ambito classico, con la *tomografia assiale computerizzata* (TAC).

Abbiamo già sottolineato come la necessità di intraprendere la strada della *balanced homodyne detection* per lo studio dello stato quantico del nostro sistema sia stata dettata dall'impossibilità di misurare direttamente la funzione di Wigner per via del principio di indeterminazione. Questo si presenta quindi come un velo che ci nasconde la visione diretta della distribuzione di Wigner. Di questa possiamo solo misurare proprietà indirette che si rifanno a questa (la  $pr(q, \theta)$  ad esempio). La situazione è molto simile a quanto accade in ambito medico, quando si desidera prendere visione di regioni interne del corpo senza avere la possibilità di eseguire osservazioni dirette. Per fare questo viene utilizzata proprio la TAC, che, inviando un fascio di raggi X sulla regione di cui si desidera ottenere una ricostruzione lungo angoli via via diversi e misurando il valore di attenuazione dell'intensità della radiazione a seguito dell'attraversamento della zona corporea suddetta, permette di ottenere una immagine soddisfacente dell'oggetto a noi celato. Attraverso, infatti, le misure di attenuazione è possibile risalire tramite metodi algoritmici non banali alla forma del tessuto in analisi. Benchè l'ambito sia diverso, è possibile apprezzare la decisa similarità del processo d'ispezione attuato tramite la *tomografia assiale computerizzata* con quanto descritto a proposito della *balanced homodyne detection*, dove alla rotazione lungo un piano prefissato di un fascio di raggi X si sostituisce, come strumento utilizzato per sondare il sistema, la variazione della fase di oscillazione di un raggio laser oppure in luogo della misura di valori di intensità attenuate subentra la registrazione di distribuzioni marginali.

Resta però da comprendere quale sia il legame tra la funzione di Wigner e l'insieme delle  $pr(q, \theta)$  ricavate: come è possibile, a partire da queste, ricostruire l'immagine del sistema nello spazio delle fasi? Vedremo come alcuni passaggi matematici ci guideranno con naturalezza alla risposta. Per fare questo però è prima necessario introdurre una ulteriore proprietà che riguarda la funzione di Wigner, o meglio la sua trasformata di Fourier. Infatti:

$$\widetilde{\mathcal{W}}(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}(q, p) e^{-iup} e^{-ivp} dq dp$$

rappresenta proprio la trasformata di Fourier di  $\mathcal{W}$ . Se ora prendiamo in considerazione la trasformata di Fourier di una generica distribuzione marginale di angolo  $\theta$ , avremo:

$$\widetilde{pr}(\xi, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} pr(q, \theta) e^{-i\xi q} dq =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}(q \cos(\theta) - p \sin(\theta), q \sin(\theta) + p \cos(\theta)) e^{-i\xi q} dq dp.$$

Con un semplice cambio di variabile  $q' \Rightarrow q \cos(\theta) - p \sin(\theta)$  e  $p' \Rightarrow q \sin(\theta) + p \cos(\theta)$  avremo:

$$\widetilde{pr}(\xi, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}(q', p') e^{-i\xi q' \cos(\theta)} e^{-i\xi p' \sin(\theta)} dq' dp' = \widetilde{\mathcal{W}}(\xi \cos(\theta), \xi \sin(\theta)).$$

Quello che otteniamo è quindi un risultato estremamente interessante: la trasformata di Fourier di una distribuzione marginale risulta profondamente legata alla trasformata di Fourier della funzione di Wigner. Quello che ci interessa però è risalire alle relazioni per le funzioni antitrasformate, per via del nostro diretto accesso sperimentale a  $pr(q, \theta)$ . Calcoliamo quindi l'antitrasformata di  $\widetilde{\mathcal{W}}(\xi \cos(\theta), \xi \sin(\theta))$  (ovvero  $\mathcal{W}(q, p)$ ) come:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(q, p) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \widetilde{\mathcal{W}}(\xi \cos(\theta), \xi \sin(\theta)) e^{i\xi(q \cos(\theta) + p \sin(\theta))} |\xi| d\xi d\theta = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, \theta) e^{i\xi(q \cos(\theta) + p \sin(\theta) - x)} dx |\xi| d\xi d\theta, \end{aligned}$$

dove si è semplicemente fatto uso di coordinate polari nell'integrazione e sfruttata una evidente sostituzione. Definendo ora il seguente nucleo integrale  $\mathcal{K}$ :

$$\mathcal{K}(w) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi| e^{i\xi w} d\xi,$$

potremo riscrivere più compattamente la formula come:

$$\mathcal{W}(q, p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} p(x, \theta) \mathcal{K}(q \cos(\theta) + p \sin(\theta) - x) dx d\theta.$$

Resta ora qualche altra piccola manipolazione matematica per giungere al risultato che stiamo cercando. In particolare servirà lavorare su  $\mathcal{K}$ . Avremo, tenendo presente l'espressione di questo nucleo integrale:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{+\infty} e^{i\xi x} \xi d\xi - \int_{-\infty}^0 e^{i\xi x} \xi d\xi \right] = \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^{+\infty} e^{i\xi x} d\xi - \int_0^{+\infty} e^{-i\xi x} d\xi \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{I}m \int_0^{+\infty} e^{i\xi x} d\xi. \end{aligned}$$

Tuttavia è facile osservare come l'ultimo integrale diverga all'infinito (l'integrale di un'onda piana non esiste infatti in senso ordinario). Servirà quindi intendere l'integrazione precedente in senso distribuzionale attraverso l'aggiunta all'argomento dell'esponenziale

immaginario di un piccolo termine regolarizzante  $-\xi\epsilon$ , pensando  $\epsilon$  tendente a zero. In questo modo:

$$\mathcal{K} = \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{I}m \int_0^{+\infty} e^{i\xi(x+i\epsilon)} d\xi = \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{R}e \frac{1}{x+i\epsilon} = -\mathcal{P} \frac{1}{x^2},$$

dove abbiamo utilizzato l'importante relazione distribuzionale:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \pm i\epsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x). \quad [6]$$

Avremo così l'espressione definitiva che permette di esprimere la funzione di Wigner per mezzo delle infinite distribuzioni marginali esistenti:

$$\mathcal{W}(q, p) = -\mathcal{P} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{p(x, \theta) dx d\theta}{(q \cos(\theta) + p \sin(\theta) - x)^2}.$$

Proprio il complesso percorso che si snoda tra la *balanced homodyne detection* e la tomografia quantistica è quello che consente di ricostruire e studiare gli stati ottici quantistici ottenibili in laboratorio. La stessa cosa è stata fatta per l'esperimento di generazione dello stato gatto di Schrödinger, che abbiamo utilizzato come spunto per questo rapido excursus nel mondo dell'ottica quantistica. Una interessante ricostruzione della funzione di Wigner ottenuta nell'esperimento suddetto è riportata in *Figura 4*: si vede molto chiaramente come i dati ottenuti in laboratorio corrispondano alla descrizione teorica data per questa distribuzione di quasi-probabilità nel capitolo precedente. Ovviamente il vastissimo campo della tomografia quantistica ha nella formula che abbiamo ricavato, così come nelle tecniche sperimentali tratteggiate, il suo punto di partenza. Per noi, invece, una volta presentata questa, il cerchio si chiude e ci accingiamo a concludere nella speranza di aver esemplificato in modo sufficiente come le funzioni di Wigner, che vivono all'interno dell'apparato teorico della quantizzazione alla Weyl, risultino al centro di un vivace e straordinario panorama sperimentale.

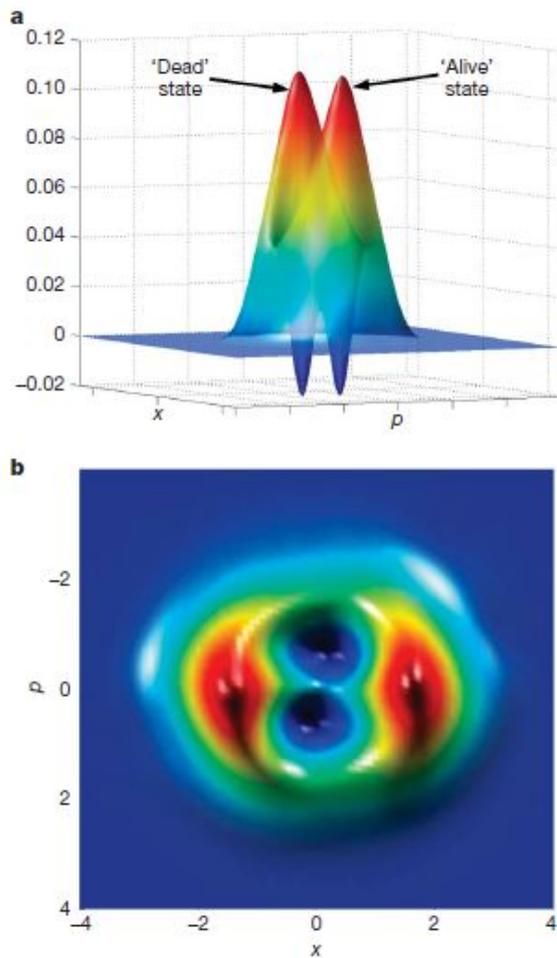


Figura 3.4: Ricostruzione dei risultati sperimentali relativi alla misurazione della distribuzione di Wigner di uno stato gatto di Schrödinger prodotta a partire da due fotoni in una visione laterale (a) e dall'alto (b) (Alexei Ourjoumtsev, Hyunseok Jeong, Rosa Tualle-Brouri e Philippe Grangier *Generation of optical 'Schrödinger cats' from photon number states*, *NATURE*—Vol. **448** (16 Agosto 2007)).

# Appendice A

## Pillole di geometria differenziale

Nella seguente sezione vengono presentate le definizioni ed i concetti principali che costituiscono l'ossatura di una vastissima branca della matematica quale la geometria differenziale.

### A.1 Definizioni fondamentali

#### A.1.1 Varietà differenziale

Il concetto fondante di tutta la geometria differenziale è quello di *varietà differenziale*. La definizione di questa può essere ricostruita a partire da altre più elementari.

Innanzitutto, dato un insieme di punti  $\mathcal{M}$  costituenti lo spazio in analisi, è bene che in esso sia data una certa nozione di *vicinanza* per mezzo dell'introduzione di una *topologia*. Si dice infatti topologia una qualsiasi collezione di insiemi  $\{A_i\}$  (detti aperti), sottoinsiemi di un insieme  $X$ , tali che:

- l'insieme vuoto  $\emptyset$  e  $X$  appartengono a  $\{A_i\}$ ;
- una unione arbitraria di insieme  $A_i$ ,  $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_i$ , è un aperto;
- una intersezione finita di  $A_i$ ,  $\bigcap_{n=0}^N A_i$ , è un aperto.

Si richiede, inoltre, che lo spazio topologico così definito sia uno spazio *di Hausdorff*, ovvero tale che, comunque presi due punti  $P$  e  $Q$  dello spazio, sia sempre possibile trovare due aperti disgiunti contenenti rispettivamente i due punti.

È poi importante introdurre una *mappa*, ovvero una qualsiasi applicazione  $\phi$  definita a partire da un aperto  $D$  di  $\mathcal{M}$  in  $\mathbb{R}^n$ :  $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ . La coppia  $(D, \phi)$ , dove  $\phi$  è una mappa continua ed invertibile e  $D$  un aperto, viene indicata con il nome di *carta*.

Si definisce poi un *atlante* una collezione di carte  $\mathcal{A}$ , tali che  $\mathcal{A} = \{(D_i, \phi_i) : \mathcal{M} \subseteq \bigcup_i D_i\}$ . Tra le varie mappe  $\phi_i$  è inoltre richiesta una compatibilità di base, legata ai

valori associati a punti che appartengono all'intersezione degli aperti che ne definiscono i domini. In termini espliciti, dato un  $P \in D_1 \cap D_2$ , con  $D_1$  e  $D_2$  aperti delle mappe  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , allora deve essere vero che:

$$(\phi_2^{-1} \circ f \circ \phi_1) = \mathbb{I} \quad (\phi_1^{-1} \circ f^{-1} \circ \phi_2) = \mathbb{I},$$

dove  $f$  è una funzione definita a partire dall'immagine di  $D_1$  tramite  $\phi_1$  all'immagine di  $D_2$  per mezzo di  $\phi_2$ :  $f : \phi_1(D_1) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \phi_2(D_2) \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $f$  definisce fondamentalmente un cambio di coordinate in  $\mathbb{R}^n$ , ove  $n$  rappresenta quindi la dimensione della varietà  $\mathcal{M}$  che si sta definendo. Se  $f$  è differenziabile un certo numero di volte,  $\mathcal{M}$  stessa verrà definita differenziabile.

È ora possibile dare la tanto attesa definizione di varietà differenziale a partire da quanto detto fino ad ora.

**Definizione 6 (Varietà differenziale)** *Si definisce varietà differenziale una classe di equivalenza di atlanti, ove due atlanti sono detti equivalenti se esiste una corrispondenza biunivoca tra essi.*

L'essenza della geometria differenziale giace proprio in questo: nella sua capacità di mettere a disposizione un formalismo matematico atto a trattare, indipendentemente dalla scelta delle coordinate, una qualsiasi varietà geometrica, sulla quale, però, è possibile introdurre una corrispondenza biunivoca con  $\mathbb{R}^n$  nel modo sopra esaminato.

### A.1.2 Enti geometrici principali

Per poter parlare di geometria differenziale è necessario introdurre alcuni oggetti geometrici minimali senza i quali non sarebbe possibile dare alcuna definizione.

Innanzitutto è basilare la nozione di curva su di una varietà.

**Definizione 7 (Curva)** *Si definisce curva  $\gamma$  su di una varietà differenziabile  $\mathcal{M}$  una qualsiasi mappa continua da un intervallo di  $\mathbb{R}^n$  alla varietà:  $\gamma : I \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}$ .*

Come emerge dalla definizione, una curva non dipende dalla scelta delle coordinate assegnate sulla varietà. Nonostante questo, se  $\mathcal{M}$  è una varietà, è sempre possibile assegnare una mappa  $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , ove  $D$  è un aperto contenente  $\gamma$  e scrivere una espressione per quest'ultima in funzione di un set di coordinate, ottenendo la funzione composta  $\phi \circ \gamma : I \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , anche scrivibile come  $x^i = x^i(\lambda)$ , ove  $\lambda \in \mathbb{R}$  parametrizza i punti della curva e le  $x^i$  individuano le coordinate nella carta assegnata.

Si ha poi la definizione di funzione, che in geometria differenziale generalizza il concetto di *funzione a valori scalari*.

**Definizione 8 (Funzione)** *Si definisce una funzione  $f$  su  $\mathcal{M}$  una applicazione  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ .*

Allo stesso modo, introducendo un sistema di coordinate si avrà l'applicazione  $f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , esprimibile anche come  $f = f(x^i)$ .

Una definizione fondamentale è poi quella di vettore, che estende l'idea di vettore tangente ad una curva.

**Definizione 9 (Vettore)** *Data una curva  $\gamma$  passante per un punto  $P \in \mathcal{M}$ , tale che  $\gamma(\lambda_P) = P$ , ed una funzione  $f$  differenziabile definita in un intorno contenente la curva, allora si definisce un vettore  $\vec{v}$  in  $P$  una applicazione che associa ad una qualunque funzione  $f$  (con le caratteristiche precisate) la sua derivata lungo la curva  $\gamma$ :  $\vec{v} : f \rightarrow \vec{v}_\lambda(f) = \frac{df}{d\lambda}|_{\lambda=\lambda_P}$ .*

Non è difficile convincersi che tale applicazione sia lineare. Introducendo, inoltre, una carta opportuna, un vettore potrà anche essere espresso come:

$$\vec{v}_\lambda = \frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^i},$$

dove gli oggetti  $\vec{e}_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$  rappresentano, nel punto  $P$  in cui il vettore è definito, i vettori tangenti alle linee coordinate (curve indotte dalla scelta di una carta e definite dall'equazione  $x^i = \text{costante}$ ). Un qualsiasi vettore di  $P$  è esprimibile come combinazione lineare dei vettori coordinati  $\vec{e}_i$ , che quindi definiscono in  $P$  uno spazio vettoriale, detto *spazio tangente* ( $T_P\mathcal{M}$ ). Dalla definizione di vettore segue con naturalezza quella di *campo vettoriale*.

**Definizione 10 (Campo vettoriale)** *Si definisce campo vettoriale una applicazione che associa ad ogni punto  $P$  di un eventuale aperto  $U \subseteq \mathcal{M}$  un vettore appartenente a  $T_P\mathcal{M}$ .*

La controparte geometrica di un vettore è quello che spesso viene definito un *covettore*, o meglio una *1-forma*.

**Definizione 11 (1-forma)** *Si definisce una 1-forma  $\tilde{\omega}$ , definita in un punto  $P$  della varietà, un funzionale lineare  $\tilde{\omega} : T_P\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , con le seguenti proprietà:*

- $\tilde{\omega}(\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) = \alpha \tilde{\omega}(\vec{v}) + \beta \tilde{\omega}(\vec{w});$
- $(\alpha \tilde{\omega})(\vec{v}) = \alpha \tilde{\omega}(\vec{v});$
- $(\tilde{\omega} + \tilde{\sigma})(\vec{v}) = \tilde{\omega}(\vec{v}) + \tilde{\sigma}(\vec{v}).$

Le 1-forme agenti sullo spazio tangente in  $P$  formano uno spazio vettoriale, detto spazio duale di  $T_P\mathcal{M}$  o cotangente ed indicato con  $T_P^*\mathcal{M}$ . Anche per lo spazio cotangente è inoltre possibile introdurre una base coordinata (la base duale), i cui elementi  $\tilde{e}^i$  sono definiti dall'azione sui vettori coordinati di base dello spazio tangente come  $\tilde{e}^i(\vec{e}_j) = \delta_j^i$ .

Tuttavia tanto i vettori quanto le 1-forme rappresentano un caso particolare di un oggetto matematico del tutto generale: il tensore.

**Definizione 12 (Tensore)** Si definisce un tensore  $T$  di tipo  $(n, m)$  un funzionale lineare agente su  $n$  1-forme ed  $m$  vettori:

$$T : \underbrace{T_P^* \mathcal{M} \otimes \cdots \otimes T_P^* \mathcal{M}}_n \otimes \underbrace{T_P \mathcal{M} \otimes \cdots \otimes T_P \mathcal{M}}_m \rightarrow \mathbb{R}.$$

Un tensore risulta quindi una combinazione di vettori e covettori, dove la combinazione viene indicata con il simbolo di prodotto esterno  $\otimes$ .

## A.2 Strutture supplementari

Una volta assegnata una varietà differenziale, questa può essere equipaggiata con alcuni enti geometrici aggiuntivi, utili alla definizione di idee che non sono insite a priori in uno spazio geometrico.

Al fine di fornire il concetto di lunghezza di una curva od angolo tra due vettori risulta indispensabile definire un campo tensoriale metrico, ovvero una applicazione che ad ogni punto della varietà associa un particolare tipo di tensore, ovvero il *tensore metrico*.

**Definizione 13 (Tensore metrico)** Si definisce un tensore metrico  $g$  un qualsiasi tensore di tipo  $(0, 2)$  che associa a due vettori definiti in un punto  $P$  un numero reale e che gode delle seguenti proprietà:

- è simmetrico:  $g(\vec{v}, \vec{w}) = g(\vec{w}, \vec{v})$ ;
- è non degenere, ossia  $g(\vec{v}, \vec{w}) = 0 \quad \forall \vec{w} \in T_P \mathcal{M} \Leftrightarrow \vec{v} = 0$ .

Dalla geometria differenziale emerge come sia quindi possibile definire la lunghezza di una curva  $l(\lambda_1, \lambda_2)$  tra i due punti individuati dai due valori di  $\lambda$  in maniera indipendente dal sistema di coordinate scelto, proprio avvalendosi della metrica di cui lo spazio è stato munito, nel modo seguente:

$$l(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{g(\vec{v}, \vec{v})} d\lambda,$$

dove i vettori  $\vec{v}$  sono quelli tangenti alla curva in ogni suo punto.

Allo stesso modo, perchè si possa parlare di aree o volumi in dimensioni arbitrarie, è bene che la varietà sia guarnita di un campo tensoriale che ad ogni suo punto associa una *p-forma*.

**Definizione 14 (p-forma)** Si definisce una *p-forma*  $\tilde{w}$  un qualsiasi tensore antisimmetrico di tipo  $(0, p)$ , che in forma generale potrà essere scritto come:

$$\tilde{w} = \frac{1}{p!} w_{i_1, i_2, \dots, i_p} \tilde{e}^{i_1} \wedge \tilde{e}^{i_2} \wedge \cdots \wedge \tilde{e}^{i_p},$$

dove  $w_{i_1, i_2, \dots, i_p}$  sono opportuni coefficienti di espansione nella base di p-forme data dal prodotto wedge ( $\wedge$ ) di elementi della base duale, dove con tale prodotto si indica il prodotto esterno antisimmetrico ottenuto eseguendo la somma dei termini rappresentanti permutazioni pari e la differenza di quelli rappresentanti delle dispari:

$$\tilde{e}^{i_1} \wedge \tilde{e}^{i_2} \wedge \dots \wedge \tilde{e}^{i_p} = \tilde{e}^{i_1} \otimes \tilde{e}^{i_2} \otimes \dots \otimes \tilde{e}^{i_p} + \text{permutazioni.}$$

È bene sottolineare come anche le p-forme individuino in ogni punto uno spazio vettoriale e come il prodotto wedge di una p-forma con una q-forma risulti una (p+q)-forma. La geometria differenziale è in grado di mostrare come proprio tali proprietà di antisimmetria facciano delle p-forme le candidate ideali a definire degli elementi di volume p-dimensionali infinitesimi in una varietà n-dimensionale (con  $n \geq p$ ) e quindi permettano di descrivere il volume di un aperto  $U$  della varietà come l'integrale della p-forma su vale aperto:

$$V_U = \int_U \tilde{w},$$

dove si dimostra come la definizione sia indipendente dalla p-forma  $\tilde{w}$  prescelta.

Una ulteriore struttura aggiuntiva che può essere data su di una varietà differenziale è quella che permette di dire con quali criteri un vettore (o più in generale un qualsiasi ente geometrico) debba essere *trasportato parallelamente* a sè stesso lungo una certa curva  $\gamma$ . Infatti anche il concetto di parallelismo non rappresenta una idea di cui la varietà risulta intrinsecamente dotata. Tali regole di trasporto devono essere quindi fornite esternamente e risultano indispensabili alla definizione di una delle tre tipologie di operazioni di derivazione introducibili in una varietà e che ora passiamo a presentare in sintesi.

## A.3 Derivate

La grande generalità con cui è stato definito il concetto di varietà differenziale fa sì che tale spazio geometrico manchi di una nozione intrinseca di operazione di derivazione, nella misura in cui esso è sguarnito di una idea intuitiva con cui confrontare due punti diversi della varietà. Tale operazione di confronto può quindi essere effettuata in modi molto diversi, dando luogo ad altrettante definizioni di derivazione.

### A.3.1 Derivata di Lie

Se è data una curva  $\gamma_0$  ed un campo vettoriale  $\vec{v}$ , i vettori  $\vec{v}_i$  di questo e definiti sui punti della curva medesima genereranno una *congruenza*, ovvero una famiglia di curve tangenti ai vettori  $\vec{v}_i$ . Muovendosi lungo una singola linea della congruenza sarà possibile mappare punti  $P(\lambda_0)$  di  $\gamma_0$  in nuovi punti  $P(\lambda_0 + \Delta\lambda)$  (dove  $\lambda$  parametrizza i punti della curva della congruenza), detti punti *trasportati di Lie*. Il concetto di trasporto

può essere esteso in modo analogo a funzioni e vettori. Si definisce la funzione trasportata  $f^*$  la funzione che assume sul punto trasportato  $Q = P(\lambda_0 + \Delta\lambda)$  lo stesso valore che  $f$  assumeva in  $P(\lambda_0)$ , dove questo è vero per tutti i punti  $P$  su cui la funzione originaria è definita. In simboli:

$$f_{\Delta\lambda}^*(Q) = f(P).$$

Per un vettore l'idea è simile. Si definirà infatti il vettore trasportato  $\vec{v}_{\Delta\lambda}^*$  come:

$$\vec{v}_{\Delta\lambda}^*(f_{\Delta\lambda}^*)|_Q = \vec{v}(f)|_P.$$

Detto questo sarà possibile dare la seguente definizione di derivata di Lie.

**Definizione 15 (Derivata di Lie)** *Dato un campo vettoriale  $\vec{v} = d/d\lambda$  ed una funzione  $f$ , si definisce la sua derivata di Lie nel punto  $P = P(\lambda_0)$  il seguente rapporto incrementale:*

$$\mathcal{L}_{\vec{v}}f|_{\lambda_0} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{f_{-\Delta\lambda}^*(\lambda_0) - f(\lambda_0)}{\Delta\lambda},$$

dove la notazione con  $-\Delta\lambda$  indica il trascinato all'indietro dell'oggetto geometrico in questione. Allo stesso modo si definisce la derivata di Lie di un vettore  $\vec{w}$  in  $P = P(\lambda_0)$  rispetto al medesimo campo vettoriale:

$$\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w}(f)|_{\lambda_0} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\vec{w}_{-\Delta\lambda}^* - \vec{w}}{\Delta\lambda}(f)|_{\lambda_0}.$$

Poichè si dimostra come, data una funzione  $f$  ed un vettore  $\vec{w}$ , valga la regola di Leibniz  $\mathcal{L}_{\vec{v}}(f\vec{w}) = (\mathcal{L}_{\vec{v}}f)\vec{w} + f\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w}$ , allora risulta possibile definire la derivata di Lie di una 1-forma come:

$$(\mathcal{L}_{\vec{v}}\tilde{\omega})(\vec{w}) = \mathcal{L}_{\vec{v}}(\tilde{\omega}(\vec{w})) - \tilde{\omega}(\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w}),$$

ed iterativamente per un qualsiasi tensore.

La derivata di Lie, quindi, quantifica la variazione di una certa quantità geometrica lungo le linee di flusso di un certo campo vettoriale.

### A.3.2 Derivata esterna

La definizione di derivata esterna nasce dall'esigenza di fornire una operazione di derivazione che rappresenti l'inverso di una operazione di integrazione (definita precedentemente tramite le p-forme), così come avviene nel calcolo ordinario. Si dimostra in geometria differenziale come questo può essere fatto con la seguente nozione di derivata che, per le finalità con cui nasce, risulta definita esclusivamente sulle p-forme.

**Definizione 16 (Derivata esterna)** *Si definisce la derivata esterna  $\tilde{d}$  di una p-forma una operazione soddisfacente le seguenti proprietà:*

- data la  $p$ -forma  $\tilde{\alpha}$  e la  $q$ -forma  $\tilde{\beta}$ , allora  $\tilde{d}(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) = (\tilde{d}\tilde{\alpha}) + (\tilde{d}\tilde{\beta})$ ;
- data la  $p$ -forma  $\tilde{\alpha}$  e la  $q$ -forma  $\tilde{\beta}$ , allora  $\tilde{d}(\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta}) = (\tilde{d}\tilde{\alpha}) \wedge \tilde{\beta} + (-1)^p \tilde{\alpha} \wedge \tilde{d}\tilde{\beta}$ ;
- data la  $p$ -forma  $\tilde{\alpha}$ , è vero che  $\tilde{d}(\tilde{d}\tilde{\alpha}) = 0$ .

### A.3.3 Derivata covariante

La derivata covariante rappresenta un particolare tipo di operazione con enormi applicazioni e grande importanza in tutta la geometria differenziale ed in molte teorie della fisica. Anche in questo caso la definizione richiede che sia definito un modo di mappare vettori in punti diversi della varietà, come fatto per la derivata di Lie, ma in questo caso ciò avviene previa introduzione di opportune regole di trasporto parallelo. Note queste, allora data una curva  $\gamma$  parametrizzata da  $\lambda$  ed un vettore  $\vec{w}$  definito nello spazio tangente di  $P(\lambda_0)$ , si può definire il vettore trasportato parallelamente lungo  $\gamma$  di  $\Delta\lambda$ , indicato come  $\vec{w}'_{\Delta\lambda}$ . Da ciò nasce la definizione di derivata covariante.

**Definizione 17 (Derivata covariante)** Dato un vettore tangente  $\vec{v}$  definito in  $P(\lambda_0)$  individuante la curva  $\gamma$ , si dice derivata covariante di  $\vec{w}$  rispetto a  $\vec{v}$  e calcolata in  $P(\lambda_0)$  il vettore definito dal rapporto incrementale:

$$\vec{\nabla}_{\vec{v}} \vec{w} |_{\lambda_0} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\vec{w}'_{-\Delta\lambda}(\lambda_0) - \vec{w}(\lambda_0)}{\Delta\lambda},$$

al quale è richiesto il soddisfacimento delle seguenti proprietà:

- la derivata covariante di una funzione scalare coincide con la nozione ordinaria di derivata:

$$\vec{\nabla}_{\vec{v}} f = \frac{df}{d\lambda};$$

- valgono le regole di Leibniz:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_{\vec{v}}(f\vec{w}) &= f\vec{\nabla}_{\vec{v}}\vec{w} + \vec{w}\frac{df}{d\lambda}, \\ \vec{\nabla}_{\vec{v}}(\vec{a} \otimes \vec{b}) &= \vec{a} \otimes \vec{\nabla}_{\vec{v}}(\vec{b}) + \vec{\nabla}_{\vec{v}}(\vec{a}) \otimes \vec{b}, \\ \vec{\nabla}_{\vec{v}}[\tilde{\omega}(\vec{w})] &= (\vec{\nabla}_{\vec{v}}\tilde{\omega})\vec{w} + \tilde{\omega}(\vec{\nabla}_{\vec{v}}\vec{w}); \end{aligned}$$

- l'operazione è indipendente dalla parametrizzazione scelta della curva:

$$\vec{\nabla}_{h\vec{v}} \vec{w} = h\vec{\nabla}_{\vec{v}} \vec{w};$$

- valgono proprietà di linearità:

$$\vec{\nabla}_{f\vec{v}+g\vec{w}} = f\vec{\nabla}_{\vec{v}} + g\vec{\nabla}_{\vec{w}}.$$



# Bibliografia

- [1] Sadri Hassani *Mathematical Physics. A Modern Introduction to its Foundation*, Springer, 1999.
- [2] Giampiero Esposito, Giuseppe Marmo, Gennaro Miele, George Sudarshan *Advanced Concepts in Quantum Mechanics* Cambridge University Press, 2015.
- [3] George Sudarshan, Giampiero Esposito, Giuseppe Marmo, *From Classical to Quantum Mechanics*, Cambridge Press University, 2004.
- [4] Ulf Leonhardt, *Measuring the Quantum State of Light*, Cambridge University Press, 1997.
- [5] B. M. Escher, A. T. Avelar, B. Baseia, *Synthesis of arbitrary Fock states via conditional measurement on beam splitters*, PHYSICAL REVIEW A **72**, 045803, 2005.
- [6] Fabio Ortolani *Appunti di metodi matematici*, 2007.