Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica - Indirizzo Didattico

L'INTRODUZIONE DELLE FUNZIONI SINUSOIDALI NELLA SCUOLA SECONDARIA SUPERIORE A PARTIRE DALL'OTTICA GEOMETRICA

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
GIORGIO BOLONDI

Correlatore:
Chiar.ma Prof.ssa
BARBARA PECORI

Presentata da:
MARIKA ZAMA

II Sessione
Anno Accademico 2014-2015

Alla mia famiglia

Introduzione

Questo elaborato descrive la proposta di un percorso didattico per introdurre le funzioni sinusoidali nella scuola secondaria superiore a partire da un esperimento di fisica riguardante l'ottica geometrica. L'idea di questa trattazione è nata dalla mia esperienza di tirocinio presso il Liceo Torricelli di Faenza quando vidi lo sguardo perplesso di alcuni studenti che si avvicinavano allo studio della trigonometria mediante un approccio tradizionale.

La prima parte di questa tesi presenta un approfondimento teorico sulla conoscenza accreditata dell'argomento matematico in questione, seguito dalle tappe principali dello sviluppo storico della trigonometria e dall'analisi critica dei libri di testo attualmente più in uso nella scuola secondaria superiore.

Nel Capitolo 2 viene riportata una critica all'approccio tradizionale basata sui risultati della Ricerca in Didattica della Matematica e viene descritta una proposta alternativa a tale approccio volta a favorire una rielaborazione dei contenuti matematici, proponendo la ricerca di una regolarità all'interno di una situazione a-didattica che vedrà la necessità dell'introduzione della funzione seno. Questa scelta si propone di stimolare negli studenti la capacità di affrontare situazioni problematiche con l'utilizzo di conoscenze già acquisite per favorire la produzione di conoscenze nuove.

Una valutazione dell'efficacia della proposta effettuata, attraverso una sperimentazione del percorso realizzata all'interno di una classe terza del Liceo sopracitato, è contenuta nel Capitolo 3. Gli strumenti utilizzati per tale valutazione sono stati la lettura delle relazioni degli studenti secondo una griglia predisposta e l'analisi delle risposte al questionario assegnato loro al termine del percorso.

L'ultima parte della tesi contiene alcune riflessioni conclusive sulla base dei risultati ottenuti. Il materiale didattico utilizzato durante la sperimentazione è riportato in Appendice: l'Appendice A contiene la presentazione che è stata proiettata agli studenti in aula, l'Appendice B raccoglie le tabelle relative all'analisi delle relazioni di laboratorio di ciascuno studente attraverso le quali è stato possibile formulare una valutazione complessiva della validità della proposta.

Indice

Capitolo 1

L'insegnamento della trigonometria

L'obiettivo di questo Capitolo è fare il punto sull'insegnamento della trigonometria nella scuola secondaria superiore per collocare in questo contesto la nostra proposta. A tale scopo descriveremo una trattazione a livello avanzato facendo riferimento ai testi [1] e [2] redatti a scopo divulgativo, per aiutare gli studenti a conseguire conoscenze e capacità più approfondite nei fondamenti di matematica. Un breve excursus storico ci permetterà di vedere come lo studio della trigonometria abbia occupato la mente di matematici e fisici per molti secoli. Successivamente la critica ai libri di testo mostrerà le modalità di introduzione della trigonometria nella scuola secondaria superiore.

1.1 A lezione di trigonometria: introduzione tradizionale

Analizzando le lezioni di matematica nei testi [1] e [2] si illustrerà di seguito un'introduzione standard della trigonometria. Anzitutto viene introdotta la goniometria.

Definizione 1.1. *Due semirette con la stessa origine dividono il piano in due parti, ciascuna delle quali è detta* ***angolo****. Le due semirette si dicono* ***lati*** *dell'angolo (distinti in* ***lato iniziale*** *e* ***lato terminale****) e la loro comune origine viene detta* ***vertice*** *dell'angolo.*

*Un angolo così generato è **positivo** se il senso della rotazione, indicato da un arco orientato, è antiorario; è **negativo** se il senso della rotazione è orario.*

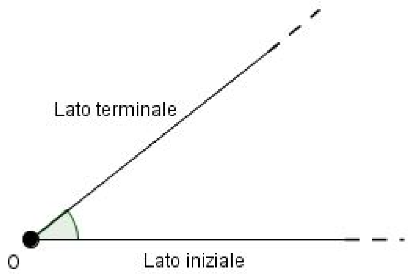


Figura 1.1: Angolo

Questa è la definizione classica che viene utilizzata per inserire gli studenti nell'ottica della goniometria. Si prosegue poi con l'illustrazione dell'angolo interno ed esterno, che porterà a considerare non più la misura assoluta dell'angolo, ma la misura relativa tenendo conto del verso orario ed antiorario.
Si procede poi con la definizione della misura in gradi e radianti.

Definizione 1.2. *Il **grado** ($\circ$) è per definizione la misura dell'angolo al centro sotteso da un arco di cerchio pari a $\frac{1}{360}$ dell'angolo giro. Il **radiante** (rad) è la misura dell'angolo al centro sotteso da un arco di circonferenza pari al raggio della circonferenza stessa.*

Dopo aver definito le unità di misura prevalentemente adoperate si affrontano le relazioni seguenti che collegano gradi e radianti:

$$360 : 2\pi = \alpha : x \quad \text{da cui} \quad x = \frac{\alpha * 2\pi}{360} = \frac{\alpha * \pi}{180} \quad \text{e, viceversa} \quad \alpha = \frac{x * 180}{\pi}$$

dove x esprime l'angolo misurato in gradi, mentre α l'angolo espresso in radianti.
A questo punto le definizioni di seno, coseno e tangente vengono affrontate attraverso approcci differenti: talvolta si preferisce partire dalla circonferenza goniometrica, altre volte invece viene fatta un'osservazione sui triangoli rettangoli simili nel piano cartesiano. Nel primo caso si prende in considerazione il triangolo che si forma tracciando la

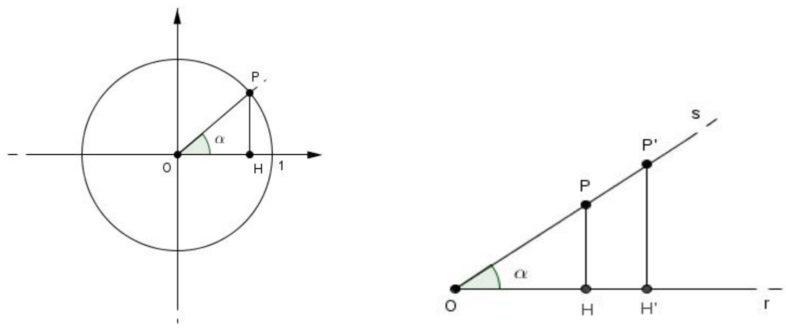
proiezione sull'asse x del punto di intersezione (P) tra la semiretta che parte dall'origine e la circonferenza, a questo punto il seno è il rapporto tra il lato opposto (ad α) e l'ipotenusa, il coseno è il rapporto tra il lato adiacente (ad α) e l'ipotenusa, mentre la tangente è il rapporto tra il seno e il coseno. Siccome si sta lavorando su una circonferenza goniometrica l'ipotenusa, cioè il raggio vale 1, perciò il seno e il coseno saranno rispettivamente l'ordinata e l'ascissa del punto P.
Il secondo approccio, visto in [1], aiuta ad osservare le proprietà dei triangoli simili ed a non considerare il seno ed il coseno soltanto all'interno della circonferenza goniometrica. Di seguito le formule relative alla Figura 1.2:

$$\sin\alpha = \frac{ordinata}{distanza} = \frac{PH}{OP} \tag{1.1}$$

$$\cos\alpha = \frac{ascissa}{distanza} = \frac{OH}{OP} \tag{1.2}$$

$$\tan\alpha = \frac{ordinata}{ascissa} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{PH}{OH} \tag{1.3}$$

Questo risulterà utile nello studio dei teoremi relativi ai triangoli che generalmente verranno affrontati come ultimo argomento della trigonometria.



(a) Circonferenza goniometrica (b) Triangoli simili

Figura 1.2: Approcci per introdurre seno e coseno

La dualità è stata riscontrata anche nella scuola secondaria di secondo grado, dove la scelta è a discrezione dell'insegnante, nonostante il primo metodo sia il più utilizzato negli ultimi anni dai libri di testo. Infatti, storicamente l'approccio introduttivo nella circonferenza precede l'approccio attraverso l'uso dei triangoli simili perché cronologicamente ha avuto priorità lo studio della trigonometria sferica. Dopo aver individuato le

definizioni, si procede determinando il seno e il coseno dei principali angoli noti (30, 45, 60, 90, 180 gradi).
Successivamente si studieranno le definizioni della *cotangente*, *secante* e *cosecante* che riportiamo di seguito:

$$\cot\alpha = \frac{ascissa}{ordinata} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{OH}{PH} \tag{1.4}$$

$$\sec\alpha = \frac{distanza}{ascissa} = \frac{OP}{OH} \tag{1.5}$$

$$\csc\alpha = \frac{distanza}{ordinata} = \frac{OP}{PH} \tag{1.6}$$

Restando sulla circonferenza goniometrica, si osservano angoli ed archi associati che permetteranno di calcolare seni e coseni di angoli non noti, ma riconducibili a quelli già studiati. Iniziano in questo modo ad esserci le prime espressioni da risolvere, e a poco a poco si tenderà ad utilizzare gli angoli espressi in radianti.
Le principali formule affrontate sono:

- Addizione:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \tag{1.7}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{1.8}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \tag{1.9}$$

- Sottrazione:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \tag{1.10}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \tag{1.11}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} \tag{1.12}$$

- Duplicazione:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha \tag{1.13}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \tag{1.14}$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} \tag{1.15}$$

- Bisezione:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \tag{1.16}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \tag{1.17}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \tag{1.18}$$

- Prostaferesi

$$\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \tag{1.19}$$

$$\sin A - \sin B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \tag{1.20}$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \tag{1.21}$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \tag{1.22}$$

- Werner:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)] \tag{1.23}$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)] \tag{1.24}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)] \tag{1.25}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)] \tag{1.26}$$

Nelle formule di Prostaferesi $A = \alpha+\beta$ e $B = \alpha-\beta$.
Successivamente si procede analiticamente definendo le funzioni di seno, coseno, tangente e cotangente; attraverso lo studio dei grafici si individuano le funzioni pari, dispari, si definiscono le funzioni periodiche e si cerca di determinare le funzioni inverse.

Definizione 1.3. *Un'**equazione** si dice **goniometrica** quando nelle sue incognite compaiono angoli e funzioni goniometriche ad essi associate.*

Nel momento in cui si affrontano queste equazioni, viene effettuata una casistica abbastanza articolata sui metodi di risoluzione.

- Equazioni elementari:

$$\sin x = a \quad -1 \leq a \leq 1 \tag{1.27}$$

$$\cos x = b \quad -1 \leq b \leq 1 \tag{1.28}$$

$$\tan x = c \quad \forall c \tag{1.29}$$

- Equazioni quadratiche in funzione goniometrica: in questo caso compare una sola funzione goniometrica al quadrato, la funzione stessa e non il suo argomento come incognita libera.

- Equazioni con più funzioni goniometriche (es. $3\cos^2 x - 4\sin x = 4$);

- Equazioni lineari in seno e coseno:

$$a\sin x + b\cos x + c = 0 \quad con \quad a, b, c \in \mathbb{R} \tag{1.30}$$

  se $c = 0$ si parla di **equazione omogenea**, altrimenti **non omogenea**.

Similmente avremo una casistica per le disequazioni, nelle quali è necessario porre attenzione al segno delle funzioni seno, coseno, tangente e cotangente a seconda del quadrante in cui si trovano.
La trattazione della trigonometria solitamente si conclude con lo studio dei seguenti teoremi. Sia dato un triangolo rettangolo come in Figura 1.3.

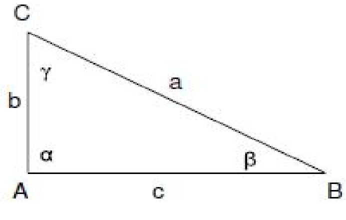


Figura 1.3: Triangolo rettangolo

Teorema 1.1. ***(Relazioni angoli-lati in un triangolo rettangolo)*** *Valgono le seguenti relazioni:*

$$\sin\beta = \frac{CA}{BC} = \frac{b}{a} \quad b = a\sin\beta \tag{1.31}$$

$$\cos\beta = \frac{BA}{BC} = \frac{c}{a} \quad c = a\cos\beta \tag{1.32}$$

$$\tan\beta = \frac{CA}{BA} = \frac{b}{c} \quad b = c\tan\beta \tag{1.33}$$

$$\cot\beta = \frac{BA}{CA} = \frac{c}{b} \quad c = b\cot\beta \tag{1.34}$$

Teorema 1.2. ***(Area di un triangolo qualsiasi)*** *Sia dato un triangolo qualsiasi, siano note la lunghezza di due suoi lati (diciamo a e b) e l'ampiezza dell'angolo tra essi compreso (diciamo γ), l'area del triangolo è pari al semiprodotto dei due lati conosciuti per il seno dell'angolo tra essi compreso.*

$$Area = \frac{1}{2}ab\sin\gamma \tag{1.35}$$

Teorema 1.3. ***(Teorema dei seni)*** *In un triangolo qualunque le lunghezze dei lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti, cioè*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \tag{1.36}$$

Teorema 1.4. ***(Teorema della corda)*** *In una circonferenza qualsiasi il rapporto tra una corda e il seno di un angolo qualsiasi che insiste su quella corda è pari al diametro della circonferenza.*

$$AB = 2r\sin(A\hat{C}B) \tag{1.37}$$

Teorema 1.5. ***(Teorema di Carnot o del coseno)*** *In un qualunque triangolo, note le misure a e b di due lati e l'angolo γ tra essi compreso, si può trovare la misura c del terzo lato.*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \tag{1.38}$$

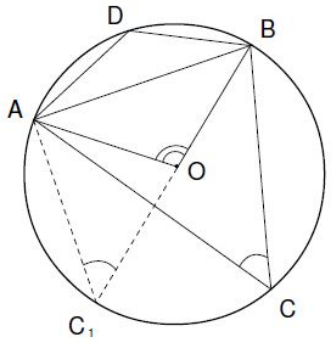


Figura 1.4: Teorema della corda

Teorema 1.6. ***(Formula di Erone)*** *Sia dato un triangolo qualsiasi e sia nota la lunghezza di tutte e tre i suoi lati (diciamo a, b e c), allora, è possibile conoscerne anche l'area mediante la formula seguente:*

$$Area = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \tag{1.39}$$

dove p è il semi-perimetro del triangolo considerato.

1.2 La trigonometria nella storia

La trigonometria è una branca della matematica che presenta radici lontane e nacque per soddisfare le esigenze di calcolo legate all'astronomia. Lo studio dei fenomeni celesti per prevedere fenomeni quali la piena del fiume Nilo, la necessità di saper calcolare angoli portarono i greci alla scoperta dei primi rudimenti delle funzioni angolari. Nella costruzione delle piramidi era infatti essenziale dare una inclinazione uniforme alle facce. Il problema n.56 del Papiro di Rhind risalente al 1650 *a.C.* contiene i primi rudimenti di trigonometria e una teoria dei triangoli simili. Successivamente la civiltà babilonese (3000 *a.C.*) studiò i movimenti celesti e a loro si deve il sistema di numerazione sessagesimale. Nelle sezioni che seguiranno vedremo come lo studio della trigonometria abbia interessato i grandi matematici per risolvere, in primo luogo, problemi di tipo pratico per poi arrivare allo studio delle funzioni sinusoidali dal punto di vista teorico.

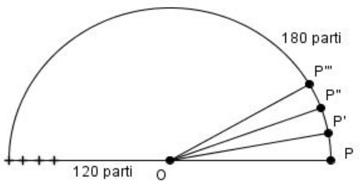
1.2.1 Le origini nella civiltà greca e lo sviluppo nella tradizione indiana e araba

Lo studio della trigonometria nella civiltà greca venne preceduta dalla gnomonica, disciplina che si occupava dell'osservazione delle ombre degli oggetti. ANASSIMANDRO ($610 - 547$ *a.C.*), discepolo di Talete e considerato il primo filosofo greco, eseguiva dei prodigiosi esperimenti matematici nella sua città preferita, Sparta osservando l'ombra del Sole proiettata da un'asta fatta di qualsiasi materiale. Più tardi quest'asta verrà denominata "*gnomone*" perché in greco, il termine "*gnomon*" significa "indicatore" e, nel caso della gnomonica, indicatore di frazioni di tempo. Il periodo di Anassimandro viene oggi generalmente accettato come l'inizio della gnomonica, ma orologi solari di tipo gnomonico erano in uso anche nelle altre civiltà: egiziani, babilonesi e non solo.
L'invenzione della trigonometria vera e propria si può associare con un certa sicurezza agli studi astronomici della scuola geometrica di Alessandria. La città egiziana di Alessandria, che porta il nome di ALESSANDRO MAGNO che la fondò nel III secolo *a.C.*, fu la capitale del regno ellenistico dei TOLOMEI fino alla conquista romana. La sua posizione centrale nel mondo mediterraneo dell'antichità e la presenza di una biblioteca famosa per più di un millennio, fecero di Alessandria il centro della matematica greca fin quasi alla conquista araba, e il ponte attraverso il quale la geometria classica è pervenuta, mediante la tradizione araba, fino all'età moderna. Uno dei tratti della matematica alessandrina, accanto agli studi di matematica pura che proseguirono vigorosi per vari secoli, fu un'attenzione costante per le applicazioni scientifiche e tecniche, e di conseguenza per una matematica quantitativa, attraverso la quale i risultati teorici della geometria classica potevano trovare il loro corrispettivo nelle scienze della natura. Vengono così sviluppate, accanto alle matematiche tradizionali, una serie di nuove discipline, che oggi chiameremmo col nome di "*matematica applicata*", che spaziavano dall'ottica alla pneumatica, dalla meccanica alla geodesia. Questo nuovo punto di vista trova un terreno particolarmente favorevole in astronomia, dove a un'indagine prevalentemente cosmologica, mirante cioè a indagare la struttura dell'universo e le cause dei moti degli astri[1], si sostituisce un'astronomia quantitativa, capace di prevedere i fenomeni celesti

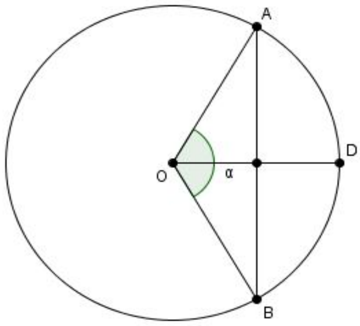
[1]Il massimo esempio sono le opere aristoteliche, in particolare la *Fisica* e il trattato *Del cielo*.

(posizioni dei pianeti, eclissi, congiunzioni) e quindi di essere di aiuto in una serie di attività umane, come la determinazione dell'ora, la misura dell'anno, la geografia, la navigazione, e non ultimo la compilazione degli oroscopi. L'astronomia quantitativa ha bisogno di una geometria altrettanto quantitativa, in particolare di una geometria della sfera, dato che sulla sfera celeste si svolgono i moti di cui si vuole costruire una teoria.
Per misurare le distanze Terra, Luna e Sole, gli astronomi greci disegnavano triangoli in cielo. ARISTARCO di Samo ($310 - 230$ *a.C.*), assertore del sistema eliocentrico, stabilì anche che l'angolo fra le visuali del Sole e della Luna differisce da un angolo retto per un trentesimo di quadrante e determinò le dimensioni della Luna e del Sole e la loro distanza dalla Terra.
Più tardi ERATOSTENE di Cirene ($276 - 194$ *a.C.*) fu il primo a calcolare la misura del raggio terrestre, servendosi di uno strumento da lui stesso inventato per misurare l'inclinazione dei raggi solari rispetto alla superficie terrestre. Lo strumento di cui si serve Eratostene è proprio lo gnomone. Studiando l'ombra che si genera si possono seguire i movimenti del Sole. Di qui la spiegazione del fatto che gli inventori della trigonometria sono gli stessi astronomi che l'avrebbero applicata allo studio del cielo, e del fatto un po' paradossale che la trigonometria sferica (cioè lo studio dei triangoli sferici, tracciati sulla superficie della sfera e i cui lati sono archi di cerchio) preceda storicamente la trigonometria piana, nonostante quest'ultima appaia cognitivamente più semplice della prima.
IPPARCO DA RODI (*II sec. a.C.*), osservando la posizione ed il movimento dei corpi celesti, trasformò l'astronomia da una materia osservativa ad una materia che poteva essere prevista. Egli viene considerato il fondatore della trigonometria greca perché fu il primo a compilare una tavola trigonometrica che gli permetteva di risolvere qualsiasi tipo di triangolo. La maggior parte di notizie sui metodi trigonometrici alessandrini ci vengono dal massimo astronomo dell'antichità TOLOMEO CLAUDIO (*II sec. d.C.*), che con la sua opera dal titolo *Composizione Matematica*, che assunse poi il nome arabo di *Almagesto* (dal greco, "il massimo"), pose le basi della teoria astronomica che dominò la scena scientifica fino al *XVII* secolo. La differenza fondamentale tra la trigonometria greca e quella moderna è che al posto dei seni la trigonometria alessandrina usa le corde. Seguendo la tradizione babilonese, che è in parte in uso ancor oggi, la semicirconferenza veniva divisa in 180 parti uguali, i gradi, e il suo diametro in 120.

Viene così a formarsi una specie di goniometro, in cui si utilizza la parte curva per misurare gli archi, e quella piatta per misurare le corde relative.



(a) Goniometro babilonese



(b) Definizione di Aryabhata $AB = 2\sin(\frac{\alpha}{2})$

I successivi importanti sviluppi della trigonometria si ebbero in India con l'elaborazione di un concetto equivalente al seno di un angolo e la creazione di tavole con i valori da 0 a 90 gradi. Il matematico e astronomo ARYABHATA (476550), nella sua opera *Aryabhata-Siddhanta*, diede per la prima volta la definizione moderna di seno[2] come la relazione fra la metà di un angolo al centro e la metà della corda, definendo anche il coseno, il senoverso, e l'inverso del seno. Le sue opere contengono anche le più antiche tavole pervenuteci dei valori del seno e del senoverso ($1 - coseno$), con un'accuratezza di 4 cifre decimali. Un'ipotesi circa l'origine del nome *seno* è che tale nome derivi da "*semi-inscripta*" (semicorda inscritta nella circonferenza goniometrica) abbreviato in *S-ins*, *sins* e poi *sinus*. Altri asseriscono che la parola moderna seno sia derivata dalla parola latina *sinus*, che significa "baia" o "insenatura", a causa di un errore di traduzione dall'arabo della parola sanscrita *jiva*, altrimenti detta *jya*. I traduttori europei confusero *jiba* (che non significa nulla ma associata a *jya* per assonanza) per *jaib*, che significa "baia", probabilmente perché *jiba* e *jaib* sono scritti allo stesso modo nella scrittura araba. Altri matematici indiani estesero successivamente i lavori di Aryabhata sulla trigonometria. VARAHAMIHIRA sviluppò le formule $\sin(2x) + \cos(2x) = 1$, $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$, e

[2]La corda che insiste sull'angolo al centro di una circonferenza goniometrica è due volte il seno di $\frac{\alpha}{2}$; dove α è l'angolo al centro.

$\frac{1-\cos(2x)}{2} = \sin(2x)$.
Il matematico BRAHMAGUPTA (*600 d.C.*) presentò nella sua opera un teorema analogo al teorema della corda o teorema dei seni e formulò una generalizzazione della formula di Erone per calcolare l'area di un quadrilatero.

Le opere indiane furono in seguito tradotte ed ampliate dai matematici musulmani. Gli astronomi arabi studiarono sistematicamente le funzioni circolari, e vi apportarono importanti innovazioni e miglioramenti. La trigonometria araba risentiva sia della trigonometria greca delle corde che delle tavole indiane del seno. Il matematico persiano MUAMMAD IBN MUSA AL-KUWARIZMI compilò tavole dei seni e delle tangenti, e contribuì anche alla trigonometria sferica. A partire dal X secolo, nelle opere di Abu'l-Wafa, i matematici musulmani usavano già tutte le sei funzioni trigonometriche principali, e possedevano tavole per i seni con incrementi di $0,25$ gradi, con una precisione di 8 cifre decimali, come pure tavole dei valori delle tangenti. Abu'l-Wafa sviluppò anche la formula trigonometrica $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$. Il matematico persiano Omar Khayyam risolse le equazioni cubiche tramite soluzioni numeriche approssimate trovate per interpolazione nelle tavole trigonometriche.
La tangente e la cotangente sono legate allo sviluppo della gnomonica, la scienza degli orologi solari.

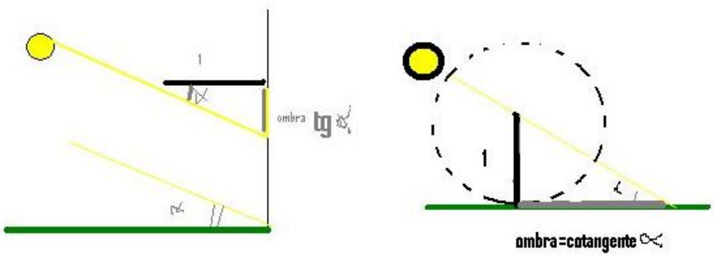


Figura 1.5: L'ombra dello gnomone

In particolare, la tangente di α è l'ombra che uno gnomone (un'asta infissa perpendicolarmente su un muro verticale) di lunghezza unitaria proietta sul muro per una data altezza del Sole. Mentre la cotangente è l'ombra dello gnomone piantato verticalmente

su un piano orizzontale[3] (vedi Figura 1.5). In ambedue i casi, l'angolo è una misura dell'altezza del Sole sull'orizzonte, che poteva così essere determinato dalla misura delle ombre. Similmente, la secante e la cosecante rappresentano l'ipotenusa dei triangoli che hanno come cateti lo gnomone e la sua ombra.
E' importante ricordare che la trigonometria, e in special modo la trigonometria sferica, era particolarmente importante, oltre che per motivi astronomici, anche per motivi religiosi. Come si sa, i musulmani recitano le loro preghiere con il viso rivolto verso la Mecca, la città natale di Maometto. Nel mondo arabo, la direzione della Mecca, la *Qibla*, è indicata da una nicchia, la *mihrab*, tracciata su tutti gli orologi solari pubblici, la cui direzione era determinata risolvendo il triangolo sferico che ha come vertici il posto in cui ci si trova, la Mecca e il Polo Nord, a partire dalla conoscenza della latitudine e della longitudine del posto e della Mecca.

1.2.2 La trigonometria in Europa: il periodo rinascimentale

In Europa l'interesse per la trigonometria riprende nel Rinascimento. La trigonometria giunge in Occidente soprattutto attraverso fonti arabe. Ancora una volta, a promuovere gli studi di trigonometria sono le necessità dell'astronomia; la maggior precisione degli strumenti richiede tavole sempre più perfezionate in due direzioni: i seni vengono calcolati con un numero sempre maggiore di decimali e per angoli a intervalli sempre minori. Da questo momento la trigonometria si sviluppa con continuità prevalentemente in Europa: il primo trattato di trigonometria composto in Occidente, e per molto tempo il più importante, è il *De triangulis omnimodis* di JOHANNES MÜLLER detto Regiomontano, scritto attorno al 1464, ma stampato solo nel 1533.
Un ulteriore impulso allo sviluppo della trigonometria viene dalla topografia: è infatti per le necessità dei rilevamenti topografici che vengono studiati i triangoli e la loro risoluzione. Tali problemi non tardano però ad esulare dalle applicazioni immediate e diventano occasione per i matematici per dimostrare la propria abilità sfidando i loro emuli alla soluzione di problemi sempre più elaborati e complessi. Successivamente vennero scritti

[3]I termini originari per denotare tangente e cotangente erano: *zill* e *zill màkus*, tradotti in latino come *umbra recta* e *umbra versa*, mentre i termini moderni *tangente* e *cotangente* furono introdotti successivamente.

numerosi trattati, in parte autonomi, in parte propedeutici a scritti astronomici. Tra questi ultimi è da citare quello che NICOLÓ COPERNICO (1473-1543) inserì nella sua celebre opera "*De revolutionibus orbium caelestium*", nella quale Copernico ripudiò la teoria cosmologica di Tolomeo e pose il Sole al centro del sistema riducendo la posizione della Terra a quella di uno dei tanti pianeti. Copernico per evitare di essere accusato di eresia rifiutò di pubblicare le sue scoperte fino all'anno della sua morte. La sua opera fu edita da G. J. RETICO (1514-1577), che preparò una monumentale serie di tavole delle sei funzioni circolari, stampate postume 1596 col titolo "*Opus palatinum de triangulis*". L'Opus palatinum de triangulis di Rheticus, fu probabilmente la prima a definire le funzioni trigonometriche direttamente attraverso l'utilizzo di triangoli rettangoli, invece delle circonferenze, oltre che contenere le tavole per tutte le sei funzioni trigonometriche.

1.2.3 Dalla nascita della goniometria ai giorni nostri

Il primo matematico a trattare la trigonometria considerando la circonferenza di raggio unitario fu FRANCOIS VIÈTE (1540-1603). Nella sua opera *Canon Mathematicus* del 1579 risolve i problemi dei triangoli qualunque riconducendoli ai triangoli rettangoli. Suo è questo commento: "*la trigonometria è la massima gloria dei matematici perché abilita a sottomettere ad un calcolo meraviglioso cielo, terra e mare*". Viète può essere considerato il padre di quel metodo analitico per trattare la trigonometria che viene anche detto *goniometria*. Egli deriva, con un metodo diverso dall'applicazione ricorsiva delle formule di Tolomeo, le formule per determinare $\sin(nx)$ e $\cos(nx)$. Inoltre applica la trigonometria a problemi aritmetici ed algebrici, tra cui quello della trisezione dell'angolo. Ricava anche alcune delle formule dette oggi di *Prostaferesi* (formule che trasformano il prodotto di due funzioni trigonometriche in una somma) o di *Werner* (dal nome di Johann Werner, 1468-1522, matematico tedesco). Pare che tali formule fossero già note parzialmente agli Arabi, ma l'uso generale di esse prevale solo verso la fine del XVI secolo. Oltre al seno, la funzione trigonometrica più usata in questo periodo è il *seno verso*, che ora non si usa più, definibile in notazioni attuali come segue: $versinx = 1 - \cos x$. Essa corrisponde al seno ruotato di 90 gradi. Per indicare il coseno di un angolo, il matematico francese François Viète (1540-1603) usa il termine *sinus residuae* mentre l'inglese Edmund Gunter suggerirà nel 1620 il termine *cosinus* e l'abbreviazione *cos.*

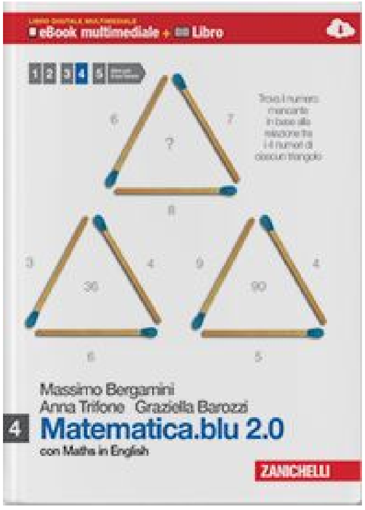
Dalla fine del XVI secolo nasce un grosso entusiasmo per la trigonometria, con la conseguente produzione di manuali e compendi. Il termine trigonometria appare per la prima volta nel titolo del libro *Trigonometria di Bartholomaeus Pitiscus* (1561-1613) nel 1595. Proprio in quegli anni si inventano i logaritmi e uno dei principali artefici della nascita dei logaritmi è lo scozzese John Napier (1550-1617), affascinato pare proprio dal metodo di Prostaferesi.
Intorno alla metà del $XVII$ secolo comincia ad emergere anche un punto di vista diverso: quello funzionale, o meglio, dato che il concetto di funzione non era ancora ben definito, quello geometrico. Vengono così studiate la curva del seno, e insieme ad essa quella del coseno, della tangente e così via. Nel $XVIII$ secolo comincia lo studio delle funzioni trigonometriche di variabile complessa. I matematici svizzeri JOHANN BERNOULLI (1667-1748) e JAKOB BERNOULLI (1654-1705) riscoprono le serie per $\sin(nx)$ e $\cos(nx)$ già note a Viète e le estendono anche a valori razionali di n. Nello stesso periodo il francese ABRAHAM DE MOIVRE (1667-1754) stabilisce la formula che oggi porta il suo nome: $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$ e che lega la trigonometria all'analisi. BROOK TAYLOR (1685-1731) definendo in generale le serie che prendono il suo nome fornisce le espansioni in serie e le approssimazioni di tutte le sei funzioni trigonometriche. Il matematico svizzero LEONHARD EULER (1707-1783) dimostra la formula: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, equivalente a quella forse già nota al matematico inglese ROGER COTES (1682-1716), nella versione: $ix = \log(\cos x + i \sin x)$ e grazie a tale relazione Eulero chiarisce varie proprietà dei logaritmi in campo complesso. L'*Introductio in analysin infinitorum* (1748) di Eulero ha il merito di stabilire la moderna trattazione analitica delle funzioni trigonometriche in Europa, definendole tramite serie infinite facendo uso delle abbreviazioni *sin.*, *cos.*, *tang.*, *cot.*, *sec.*, e *cosec.* rimaste quasi invariate anche nell'uso moderno. LAZAR CARNOT (1753-1823) nella sua opera *Geometrie de position* del 1803 enuncia il teorema del coseno per la risoluzione dei triangoli qualunque: il teorema era noto sin dai tempi di Euclide ma Carnot ne produce una generalizzazione relativa al tetraedro. In questo modo si passa dai primi usi pratici della trigonometria, in topografia e in astronomia, fino a quelli più moderni in ottica, acustica ed elettronica. Tutti i fenomeni fisici sono scomponibili in un insieme di oscillazioni elementari che possono essere rappresentate da una sinusoide. Fourier applica lo studio delle curve si-

nusoidali per riuscire ad interpretare la tipologia delle maree. Successivamente lo studio della trigonometria è continuato durante il Novecento fino ad arrivare ai giorni nostri, cercando di sviluppare le principali intuizioni lasciate in sospeso nel secolo precedente.

1.3 La trigonometria nei libri di testo della scuola secondaria superiore

Tenendo presente la conoscenza matematica accreditata per quanto riguarda la trigonometria e le tappe principali dello sviluppo di questo settore della matematica, abbiamo analizzato l'approccio didattico proposto nei libri di testo della scuola secondaria di secondo grado, in particolare nei due testi maggiormente adottati nei licei scientifici nel secondo biennio e nel quinto anno. L'analisi si è concentrata sull'introduzione della funzione seno, argomento centrale della proposta didattica formulata nel Capitolo 2 di questo lavoro di tesi. Nelle figure seguenti abbiamo riportato le caratteristiche generali dei due testi presi in considerazione.
Innanzitutto possiamo affermare che l'approccio alla trigonometria è per entrambi i testi decisamente tradizionale; osservando più in dettaglio si possono però notare alcune differenze nelle scelte operate dagli autori.
Il *Sasso* pone già le basi della goniometria nel volume 3 con un approccio alquanto scarno ed approssimativo, per poi svilupparla in modo più esaustivo nel volume 4. La definizione di seno viene enunciata soltanto nella circonferenza goniometrica, utilizzando il secondo quadrante anche se successivamente la trattazione avviene nel primo. La parte teorica occupa il penultimo capitolo del volume 3 e si sviluppa in un numero ridotto di pagine (circa 40), coerentemente con il titolo del capitolo ("Introduzione alla trigonometria"). Circa lo stesso numero di pagine è occupato dagli esercizi, alcuni applicati alla fisica e al mondo reale. Il ruolo dello sviluppo storico è piuttosto marginale, essendo presente solo qualche cenno nell'ultima pagina del capitolo dedicato alla teoria.
Nel volume 4, viene ripreso il contenuto affrontato nel volume 3 e sono dedicati alla trigonometria altri 4 capitoli, per un totale di circa 300 pagine di cui circa la metà dedicate agli esercizi. In questo volume alcune notizie di carattere storico sono contenute alla fine

dell'ultimo capitolo dedicato alla trigonometria.
Il *Bergamini* sviluppa l'intero argomento nelle prime 200 pagine circa del volume 4, descrivendo tutta la teoria nei primi 4 capitoli fino ad arrivare all'applicazione nei principali teoremi. La definizione di seno e coseno compare all'improvviso qualche pagina dopo la definizione di angolo e senza alcun riferimento alla definizione alternativa a partire dai triangoli simili. Gli esercizi si trovano alla fine di ogni capitolo e sono suddivisi per argomento. Nella parte finale di ogni capitolo si trovano esempi ed esercizi dal titolo "*Realtà e modelli*" per guidare lo studente alle applicazioni della teoria alla realtà quotidiana. Qualche breve excursus storico compare solo nel secondo capitolo, dopo aver introdotto le principali funzioni trigonometriche, ma senza attirare particolarmente l'attenzione del lettore. Al contrario acquistano maggior rilievo le applicazioni legate alla fisica che spaziano dai moti armonici alla teoria delle fibre ottiche, arricchite da numerose illustrazioni.
Concludendo si può affemare che l'introduzione del seno e del coseno avviene in modo analogo in entrambi i testi, senza alcuna considerazione che giustifichi allo studente la necessità o l'utilità di questa introduzione.
La proposta illustrata nel prossimo capitolo nasce dalla convinzione che sia possibile e didatticamente opportuno individuare un approccio all'introduzione delle funzioni trigonometriche (a partire dalla funzione seno) alternativo a quello tradizionale e suggerisce un possibile percorso didattico a partire dallo studio sperimentale del fenomeno della rifrazione della luce.



Titolo: Matematica.blu 2.0 vol. 4

Autori: M. Bergamini, A. Trifone, G. Barozzi

Casa editrice: Zanichelli, anno 2012, 630 pagine

N. pagine dedicate alla teoria: circa 160 pagine

N. di pagine dedicate agli esercizi: circa 240 pagine.

Segni particolari:

−Sviluppo storico: cenni nel capitolo 11 (“L’inafferrabile pi greco”).

−Rapporto con le scienze sperimentali: moto armonico e fibre ottiche.

Titolo: La matematica a colori vol. 3 e 4

Autori: L. Sasso

Casa editrice: Petrini, anno 2015,
800 pagine (vol. 3), 700 pagine (vol. 4)

N. pagine dedicate alla teoria: circa 190 pagine (vol. 3 e 4)

N. di pagine dedicate agli esercizi: circa 200 pagine (vol. 3 e 4)

Segni particolari:

−La trattazione è suddivisa tra i volumi 3 e 4.

−Sviluppo storico: cenni nell’ultima pagina di teoria (vol. 3) e nell’ultimo capitolo dedicato alla teoria (vol. 4).

−Rapporto con le scienze sperimentali: esempio di andamento sinusoidale della temperatura (vol. 3), e analisi armonica (vol. 4).

Figura 1.6

Capitolo 2

Una proposta didattica per introdurre la funzione seno

2.1 Critica dell'introduzione tradizionale della trigonometria

In ambito scientifico, lo studente, durante la propria carriera scolastica, affronta molti argomenti; alcuni risultano più semplici, altri più difficili. Tra gli argomenti di matematica più ostici emerge la trigonometria, che a priori viene considerata arida, inutile e mnemonica, nonostante si presti a numerose applicazioni in geometria, fisica, chimica, architettura, topografia, geodesia, astronomia, ecc...
Le nuove Indicazioni Nazionali [13] per la matematica relative ai Licei Scientifici (31 maggio 2010) riducono molto lo spazio della trigonometria rispetto al passato. Fin dal I biennio troviamo l'introduzione dei primi elementi in **Geometria** (*Saranno inoltre studiate le funzioni circolari e le loro proprietà e relazioni elementari, i teoremi che permettono la risoluzione dei triangoli e il loro uso nell'ambito di altre discipline, in particolare nella fisica*) e all'interno del paragrafo **Relazioni e funzioni** (*Lo studente studierà [...] le funzioni circolari sia in un contesto strettamente matematico sia in funzione della rappresentazione e soluzione di problemi applicativi*). Mentre tra gli obiettivi specifici di apprendimento del II biennio, alla voce **Aritmetica e Algebra**, vengono

citate *definizione e proprietà dei numeri complessi nella forma algebrica, geometrica e trigonometrica* e alla voce **Geometria**, vengono affrontate *le proprietà della circonferenza e del cerchio e il problema della determinazione dell'area del cerchio, nonché la nozione di luogo geometrico, con alcuni esempi significativi.* Tali obiettivi, sono preceduti dalla descrizione del profilo generale e delle competenze che lo studente dovrà possedere al termine del suo percorso di studi, in cui è specificato che: "*Lo studente avrà acquisito una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico*".
Una possibile scelta è quella di procedere all'introduzione della trigonometria attraverso un approccio storico (fortemente sostenuto da Vailati [10]); ma il ruolo marginale della storia nei libri di testo non favorisce certamente questa scelta. Troviamo infatti qualche breve excursus alla fine del capitolo dedicato alla trigonometria che certamente non costituisce un elemento motivante per lo studente (vedi Paragrafo 1.3).
Una difficoltà nello studio della trigonometria è legata probabilmente anche ai due possibili approcci concettuali alla disciplina; da un lato viene introdotta con lo studio del triangolo rettangolo, in cui gli angoli vengono misurati in gradi e le funzioni trigonometriche sono il rapporto tra cateto e ipotenusa, dall'altro viene introdotta nella circonferenza goniometrica, con gli angoli misurati in radianti e le funzioni trigonometriche vengono espresse attraverso le coordinate del punto individuato su di essa. Entrambi gli approcci, la cui priorità è a discrezione dell'insegnante, non sottolineano comunque l'importanza dello studio della trigonometria se non vengono preceduti da un'introduzione sull'utilità dell'argomento.
L'insegnante ha il compito di adattare la conoscenza matematica per trasformarla in "conoscenza per essere insegnata". Il concetto di trasposizione didattica, definito da D'Amore [8], consiste *nell'estrarre un elemento del sapere dal suo contesto (universitario, sociale, eccetera) per ricontestualizzarlo nel contesto sempre singolare, sempre unico, della propria classe.* In questo caso è necessario riuscire a trasmettere che un concetto matematico è sia uno strumento, che permette di risolvere problemi, sia un oggetto che trova la sua collocazione nel sapere matematico. La formazione di un concetto matematico richiede una sequenza di fasi diverse, dunque un progressivo avvicinamento ai concetti fondamentali. A tal proposito i libri di testo non sono molto di aiuto (vedi Ca-

pitolo 1), in quanto viene sviluppata prima la goniometria poi la trigonometria senza una rielaborazione didattica dell'argomento. Successivamente troviamo un formulario molto ricco seguito da numerosi esercizi volti solo a verificare la padronanza delle formule. Al fine della comprensione dei contenuti, dopo l'introduzione della nozione, non basta conoscere le formule a memoria perché *nell'ambito del funzionamento didattico deve scattare un meccanismo in base al quale ci si impossessa di tale nozione per farne qualche cosa. Ecco che avviene la ricontestualizzazione della nozione, non più all'interno del sapere matematico bensì [...] nel sapere insegnato* [8]. In questo modo, dice Brousseau in [9], l'allievo costruisce la propria conoscenza solo se si interessa personalmente alla risoluzione del problema che gli è stato proposto attraverso la situazione didattica, in tal caso si è raggiunta la *devoluzione* da parte dell'allievo.
Scrive D'Amore [8]:

> "*la devoluzione è il processo o l'attività di responsabilizzazione attraverso i quali l'insegnante ottiene che lo studente impegni la sua propria personale responsabilità nella risoluzione di un problema (in una attività cognitiva) che diventa allora problema dell'allievo, accettando le conseguenze di questo trasferimento momentaneo di responsabilità, in particolare per quanto concerne l'incertezza che questa assunzione genera nella situazione*"

Questo processo è favorito nelle situazioni a-didattiche, in cui non sono presenti obblighi didattici e l'insegnante ha un ruolo indiretto. Gli studenti cercano di rispondere alle esigenze che la situazione propone, utilizzando varie strategie e modificando il proprio sistema di conoscenze. Nel caso in cui, dopo alcuni tentativi, l'attività non riesca, gli studenti discutono tra di loro per accordarsi sulle modalità; si ha così una produzione di conoscenza, non richiesta direttamente dall'insegnante. Se il coinvogimento dello studente non avviene, entra in gioco il contratto didattico che intercorre tra le abitudini specifiche del docente attese dall'allievo ed i comportamenti dell'allievo attesi dal docente. *Spesso queste attese non sono dovute ad accordi espliciti, imposti [...] dagli insegnanti [...], ma alla concezione della scuola, della matematica, alla ripetizione di modalità* [8]. In questo caso gli studenti scelgono di affrontare l'argomento memorizzando nozioni, in vista di ottenere un esito positivo nel compito in classe. Lo scopo di tale apprendimento non è finalizzato alla costruzione di una conoscenza scientifica accreditata, che lo studente

dovrà maturare al termine degli studi.
Sulla base di queste osservazioni è stata elaborata la proposta che descriverò di seguito, nella quale si è partiti da una situazione sperimentale per poi giungere alla definizione della funzione del seno.

2.2 Le caratteristiche della proposta

Penso che la principale finalità dell'insegnamento della matematica sia quella di condurre gli studenti ad acquisire la capacità di affrontare e risolvere varie situazioni problematiche. L'insegnante dovrebbe stimolare gli studenti al fine di infondere in loro la fiducia nelle proprie capacità, necessaria per affrontare le situazioni nuove, utilizzando le conoscenze acquisite. Alla luce di questa premessa e dopo aver analizzato in modo critico le tipologie tradizionali di introduzione delle funzioni trigonometriche, verrà illustrata di seguito una proposta alternativa.
Si è pensato di iniziare con un esperimento sulla rifrazione della luce in cui gli studenti operano, raccolgono dati e discutono sulle modalità di misurazione[1]. In questo modo viene a crearsi una situazione a-didattica in cui sono coinvolti gli studenti e l'oggetto della conoscenza, che riteniamo possa motivare e giustificare lo studio dell'argomento. Infatti la funzione seno viene introdotta a scopo di formalizzare la relazione tra angolo di incidenza e angolo di rifrazione nel passaggio della luce da mezzi diversi. Nel tentativo di determinare una regolarità osservando i dati sperimentali, lo studente interagisce con gli elementi dell'ambiente, modifica il suo sistema di conoscenze a causa degli adattamenti che si rendono necessari utilizzando varie strategie. È proprio in questo ambiente non tradizionale che pensiamo che si possa giungere alla costruzione personale della conoscenza accreditata dello studente. L'idea dell'apprendimento come rischio personale durante il processo di devoluzione, favorisce la produzione di conoscenze provocando così la rottura del contratto didattico. Contrariamente alla didattica trasmissiva che vede

[1]In rete è possibile trovare altre proposte didattiche che partono da questo esperimento (ad esempio "Trigonometria e luce" a cura dell'Enciclopedia Treccani) il cui scopo è essenzialmente quello di proporre un'applicazione della trigonometria piuttosto che utilizzare una situazione sperimentale per introdurre le funzioni trigonometriche.

protagonista l'insegnante impegnato a proporre una serie di concetti codificati, questa proposta vuole favorire una rielaborazione dei contenuti, proponendo un approccio didattico volto alla ricerca di una regolarità che vedrà la necessità dell'introduzione della funzione seno. È presente anche un contributo della storia della trigonometria, che viene utilizzata per introdurre la rappresentazione di dati sperimentali mediante la costruzione delle semicorde corrispondenti agli angoli di incidenza e di rifrazione.
La proposta è indicata per una classe terza della scuola secondaria di secondo grado, nella quale non è stata ancora affrontato uno studio sistematico della trigonometria, e si prevede che per il suo svolgimento siano necessarie 6-7 ore.

2.3 Le fasi del percorso didattico

In questo paragrafo sintetizziamo il percorso didattico che permette di introdurre la funzione seno a partire da una descrizione fenomenologica del fenomeno della rifrazione della luce. Una sintesi del percorso è rappresentata in Figura 2.1. Tale sintesi può essere anche utilizzata per illustrare agli studenti prima dell'inizio del percorso lo scopo delle attività che verranno svolte. Questa scelta didattica, adottata in [11], favorisce il coinvolgimento degli studenti aiutando a dare un significato alle diverse tappe del lavoro.

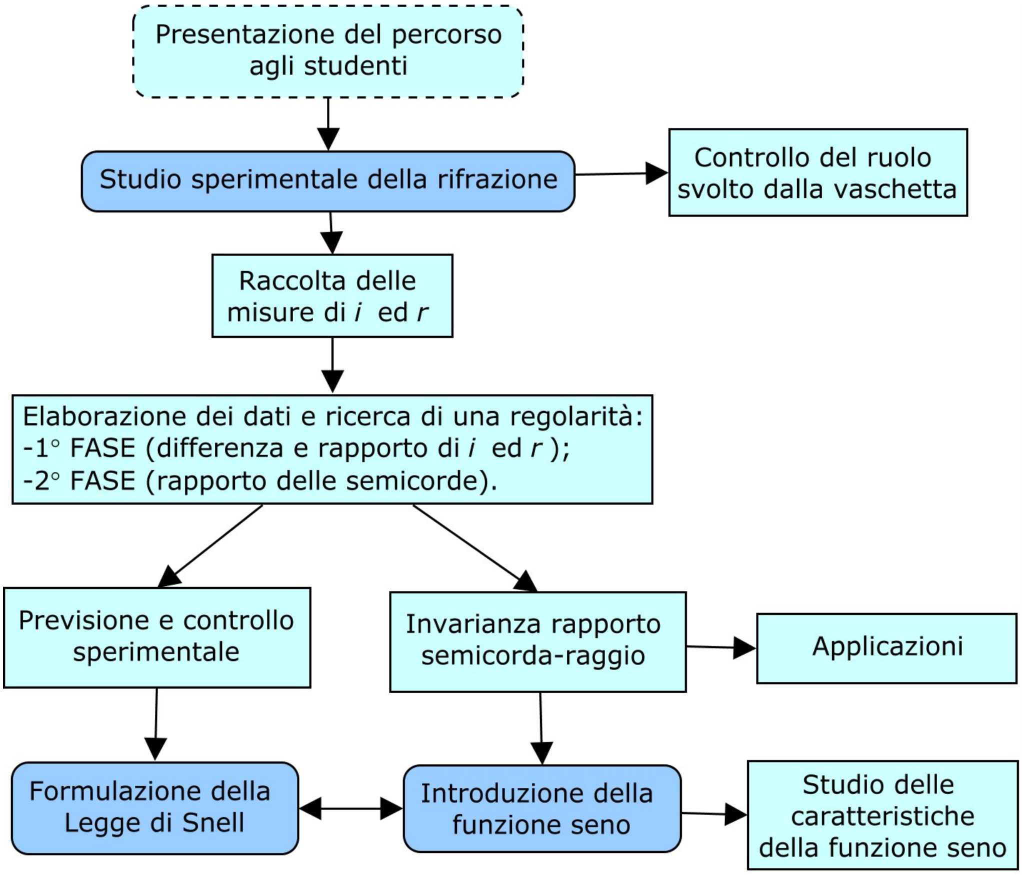


Figura 2.1: Mappa concettuale

Un esperimento sul fenomeno della rifrazione della luce: allestimento e raccolta dati

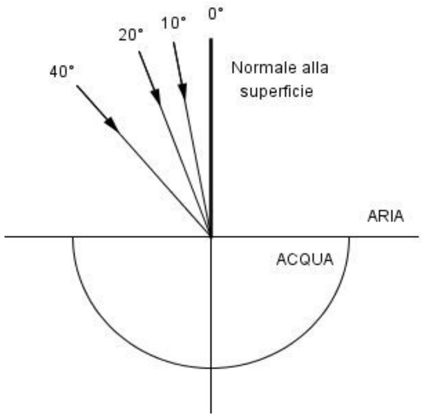
La proposta parte presentando agli studenti il fenomeno della rifrazione attraverso esempi tratti dalla vita quotidiana. Si propone poi di studiare questo fenomeno attraverso un esperimento realizzato con attrezzatura molto semplice e realizzabile anche in una normale aula purché i banchi siano mobili e si possano unire per suddividere la classe in gruppi di lavoro. L'esperimento, rielaborato a partire da quello proposto nel corso di Fisica a cura del PSSC [6 e 7] consiste nell'osservare la deviazione della luce nel passaggio dall'aria all'acqua. A questo scopo si utilizza una vaschetta semicircolare e, seguendo il percorso di un raggio di luce incidente sul centro della vaschetta, si misurano diversi angoli di incidenza e di rifrazione.
Alla classe, suddivisa in gruppi, viene proposta la scheda di lavoro riportata in Figura 2.2 e 2.3 e ciascun gruppo raccoglie i propri dati nelle prime due colonne della tabella contenuta nella scheda.
L'insegnante avrà cura di seguire il lavoro di ciascun gruppo sottolineando in particolare le modalità di esecuzione dell'esperimento, ponendo l'attenzione sulle tecniche di misurazione invitando gli studenti ad una maggiore precisione, se necessario. È importante far riflettere la classe sull'attendibilità dei dati raccolti, ricontrollando i valori della tabella al termine dell'attività ed eventualmente ripetendo quelle misure che, nel quadro complessivo dei dati raccolti, appaiono poco attendibili. Successivamente, alla ricerca di una legge fenomenologica, gli studenti calcoleranno la differenza e il rapporto tra gli angoli di incidenza i e gli angoli di rifrazione r in modo da completare le colonne corrispondenti della tabella.

Gruppo n.

Come mai la matita sembra spezzata?

Per spiegare questo fenomeno studieremo il comportamento della luce quando passa dall'aria all'acqua e viceversa. Parte della luce diffusa dalla matita, infatti, arriva ai nostri occhi attraversando prima l'acqua nel bicchiere e poi l'aria, mentre un'altra parte arriva viaggiando solo in aria.

1) Prendete una scatola di plastica trasparente, a sezione semicircolare e disponetela al centro di un foglio bianco, posto su un foglio di cartoncino, in modo che la parte piana della scatola sia posizionata sul foglio. Con una matita disegnate sul foglio il contorno della vaschetta e segnate il punto che corrisponde al centro della semicirconferenza. Segnate poi sul foglio delle semirette uscenti dal centro che formino con la perpendicolare alla vaschetta gli angoli riportati nella tabella qui sotto (detti "angoli di incidenza").



2) Per studiare il comportamento della luce in aria dovete individuare un particolare raggio di luce diffuso da un oggetto e seguire il suo percorso. A questo scopo piantate uno spillo di fronte alla parete piana della scatola in corrispondenza di uno dei valori degli angoli, sarà questo l'oggetto sorgente di luce diffusa. Osservate lo spillo attraverso la vaschetta, dalla parte della parete curva della scatola, spostate la testa finché non vedete allineati lo spillo e la linea verticale segnata al centro della scatola; in questo modo avete selezionato una particolare direzione in cui si propaga la luce diffusa dallo spillo.
A questo punto piantate dalla vostra parte un altro spillo allineato con il primo e con la linea. Ripetete l'operazione per altri due valori dell'angolo.
Togliete la vaschetta e congiungete il centro della semicirconferenza con ciascuna delle tre posizioni trovate. Misurate col goniometro l'angolo che formano le direzioni individuate con la perpendicolare alla superficie della vaschetta.

Figura 2.2: Scheda di laboratorio (fronte)

Che cosa potete notare? I vostri risultati erano prevedibili?

3) Riempite la scatola per metà d'acqua e disponetela esattamente nella posizione precedente. Piantate uno spillo di fronte alla parete piana della scatola, sulla normale che passa per il centro della scatola. Osservate lo spillo attraverso l'acqua, dalla parte della parete curva della scatola, spostate la testa finché non vedete allineati lo spillo e la linea verticale segnata sulla scatola, poi piantate un altro spillo allineato.

Che cosa di può dire sulla direzione seguita dalla luce nel suo passaggio dall'aria all'acqua e dall'acqua all'aria, quando l'angolo di incidenza è 0°?

Ripetete l'operazione per tutti valori degli angoli riportati nella tabella qui sotto, segnando ogni volta la posizione del secondo spillo.

NB: Per ottenere una un'immagine nitida del primo spillo, a grandi angoli di incidenza, occorre che questo non sia mai posto oltre una distanza di 4,0 cm dal segno verticale sulla scatola.

Togliete la vaschetta e, usando una matita colorata congiungete il centro della semicirconferenza con ciascuna delle posizioni trovate. Misurate con il goniometro l'angolo che formano le direzioni così individuate con la perpendicolare alla superficie della vaschetta ("angoli di rifrazione").

Completate la tabella registrando tutte le misure ottenute.

Angolo di incidenza i in gradi	Angolo di rifrazione r in gradi	Differenza $i - r$	Rapporto $\frac{i}{r}$			
0						
10						
20						
30						
40						
50						
60						
70						

E' possibile individuare una relazione semplice fra i valori di i e di r ?

Provate a calcolare:

1. La differenza fra gli angoli di incidenza e di rifrazione
2. Il loro rapporto

Che cosa potete concludere?

Figura 2.3: Scheda di laboratorio (retro)

Elaborazione dei dati, ricerca di una regolarità, formulazione e controllo di previsioni

Durante l'elaborazione dei dati è importante il coinvolgimento della classe, che si può ottenere ad esempio, proiettando un file Power Point contenente i dati campione di ogni gruppo, potendo discutere insieme le particolarità. Nel momento in cui i dati vengono osservati complessivamente, si crea una situazione favorevole per discutere gli eventuali errori di misurazione e osservare la precisione e la sensibilità degli strumenti utilizzati. Seguendo i ragionamenti degli studenti, l'insegnante dovrà cercare di dare una risposta alle domande poste dagli studenti durante la raccolta dei dati per poi guidarli nella ricerca di una regolarità. A tale scopo sarà necessario osservare come variano la differenza e il rapporto tra gli angoli di incidenza e di rifrazione all'aumentare degli angoli di incidenza, discutendo con gli studenti la possibilità di formulare una legge fenomenologica. Dopo questi tentativi infruttuosi, si propone un breve excursus storico, che vede fin dall'antica Grecia l'utilizzo delle semicorde nello studio della goniometria, suggerendo agli studenti di procedere alla costruzione delle semicorde nel loro foglio di lavoro. Questa operazione permetterà agli studenti di raccogliere un'altra serie di dati: le ultime tre colonne della tabella sono infatti dedicate alla lunghezza della semicorda di incidenza, di rifrazione e al loro rapporto. È necessario che l'insegnante lasci del tempo agli studenti affinché riflettano sulla regolarità del rapporto delle semicorde che dovrebbe risultare più costante del rapporto degli angoli. Le considerazioni sul rapporto delle semicorde costituirà la fase nella quale interrogarsi sulla possibilità di formulare previsioni, calcolando il valore di un angolo di rifrazione corrispondente ad un angolo di incidenza non considerato durante l'esperimento. La previsione per altri angoli sarà effettuata prima attraverso il calcolo mediante la formula inversa e, in seguito confrontata con i dati ottenuti sperimentalmente. La maggiore stabilità del rapporto tra le semicorde può rappresentare una buona occasione per procedere ad una prima definizione dell'indice di rifrazione.

Introduzione della funzione seno, formulazione della legge di Snell e altre applicazioni

Nel procedere al calcolo necessario per la previsione, gli studenti si accorgeranno per primi che il procedimento risulta essere troppo laborioso e che il valore delle semicorde dipende dal raggio della circonferenza in questione. Questo giustifica la ricerca di una funzione matematica che dipenda soltanto dall'angolo, svincolandosi dal raggio della circonferenza. Prese due circonferenze concentriche di raggio differente, si noterà come il rapporto semicorda-raggio resti costante perché i triangoli che si formano all'interno di esse sono simili. In questo modo si procederà con la definizione del seno di un angolo formulata, in un primo momento, all'interno di un triangolo rettangolo e in seguito nella circonferenza goniometrica. Si preferisce seguire questo ordine per evitare la formazione di misconcezioni nella mente degli studenti. Infatti se si parte dalla definizione all'interno della circonferenza goniometrica il cui raggio vale 1, il seno viene spesso erroneamente ricondotto al valore dell'ordinata del punto P[2] appartenente a tale circonferenza. Successivamente, con l'aiuto del software *GeoGebra*, si può riflettere sull'andamento del grafico della funzione seno e aprire così il discorso che porterà allo studio delle sue caratteristiche dal punto di vista analitico. Infine per sottolineare il ruolo che la funzione matematica svolge nella formalizzazione della legge fisica si esprimerà il rapporto delle semicorde mediante il rapporto dei seni degli angoli (i ed r) formulando così la *Legge di Snell* che definisce l'indice di rifrazione caratteristico del passaggio della luce da un mezzo ad un altro.

Ci sembra importante che, a conclusione del percorso vengano discusse alcune applicazioni, sia della funzione seno per risolvere problemi di fisica (ad esempio piano inclinato e calcolo della distanza Sole-Terra), sia dello studio della rifrazione per spiegare fenomeni della vita quotidiana (ad esempio la matita spezzata vista all'inizio del percorso).

[2]P è il punto di intersezione tra la semiretta che passa per il centro e la circonferenza.

Capitolo 3

Sperimentazione della proposta in una classe terza di Liceo Scientifico

In questo Capitolo ripercorreremo la sperimentazione della proposta didattica, analizzando le varie fasi dell'attività svolta in classe e cercheremo di focalizzare i punti forza del percorso che ci hanno permesso di arrivare alla definizione della funzione seno. Si cercherà di mettere in luce inoltre, le osservazioni e i dubbi costruttivi che sono emersi da parte degli studenti e hanno contribuito al perfezionamento della proposta.

3.1 Il contesto della sperimentazione

La proposta descritta nel Capitolo 2 è stata sperimentata in una classe terza del Liceo Torricelli di Faenza. Il Professor Gian Luigi Alberghi, docente di fisica, si è reso molto disponibile e collaborativo nell'affrontare la sperimentazione, nonostante si trattasse della sua penultima settimana di insegnamento prima di trasferirsi al CERN di Ginevra. La classe presa in esame è una terza liceo ad indirizzo scientifico composta da 16 studenti, 14 femmine e 2 maschi, tra i quali non sono presenti studenti con difficoltà di apprendimento. Si è pensato di sperimentare la proposta proprio in questa classe sulla quale non è ancora stata studiata né la trigonometria né l'ottica geometrica. La sperimentazione si è svolta in 4 ore della durata di 60 minuti ciascuna, distribuite all'interno della stessa settimana. Durante la prima lezione del lunedì (1 ora), dopo una breve presentazione dell'attività, gli studenti divisi in gruppi hanno eseguito l'esperimento in classe. Mentre la lezione del venerdì (1 ora) e la lezione del sabato (2 ore) si sono svolte nell'aula multimediale della scuola per proiettare i lucidi contenenti i dati raccolti e discutere le caratteristiche. Di seguito riassumeremo passo dopo passo lo svolgimento delle lezioni.

3.2 Diario della sperimentazione

La lezione del lunedì è iniziata in aula con una presentazione alla classe della sperimentazione, composta da una prima fase sperimentale e di raccolta dati seguita dalla discussione dei risultati nei giorni successivi. Dopo aver spiegato lo scopo per il quale era stata scelta proprio quella classe sono state introdotte le modalità dell'esperimento, distribuendo il materiale necessario. In questo modo gli studenti, suddivisi in 7 gruppi da 2-3 persone ciascuno, hanno iniziato a lavorare seguendo la scheda di laboratorio che è stata consegnata loro (Figura 2.2 e Figura 2.3) completando la fase di raccolta dei dati e compilando le prime 2 colonne della tabella relativa agli angoli di incidenza e di rifrazione (Figura 3.1), che sono stati poi raccolti in vista della lezione successiva.
La lezione di venerdì si è svolta nell'aula multimediale della scuola. Nel file Power Point che è stato proiettato, sono stati riportati i dati sperimentali degli studenti, organizzati in tabelle per essere confrontati, in particolare per osservare il calcolo della differenza e del rapporto tra gli angoli. Gli studenti sono stati invitati a riflettere sui dati ottenuti sperimentalmente provando ad individuare una legge fenomenologica, nel caso fosse possibile. Non trovando alcuna regolarità, è stato suggerito ai ragazzi di misurare la lunghezza delle semicorde relative agli angoli di incidenza e di rifrazione e di calcolarne il rapporto che è risultato essere più costante di quello degli angoli, questo ci ha permesso di formulare una relazione che ci permetteva di determinare teoricamente l'angolo di rifrazione corrispondente ad un angolo qualsiasi. Dopo aver calcolato l'angolo di rifrazione corrispondente a 35 gradi (non ricavato precedentemente) è stato effettuato un controllo sperimentale. Benché il metodo per formulare previsioni si sia dimostrato efficace, esso è risultato troppo lungo e noioso, sottolineando così l'esigenza di individuare uno strumento matematico più agevole per effettuare previsioni.
Nelle ultime 2 ore del sabato abbiamo osservato il disegno, utilizzato per l'esperimento

dal punto di vista matematico: abbiamo notato che nelle circonferenze con misura del raggio differente i triangoli formati dalle semicorde e dai raggi erano simili, perciò il loro rapporto restava costante. In questo modo si è giunti alla definizione del seno di un angolo e si è mostrato l'andamento della funzione $y = \sin(x)$ con l'aiuto del software *GeoGebra*.

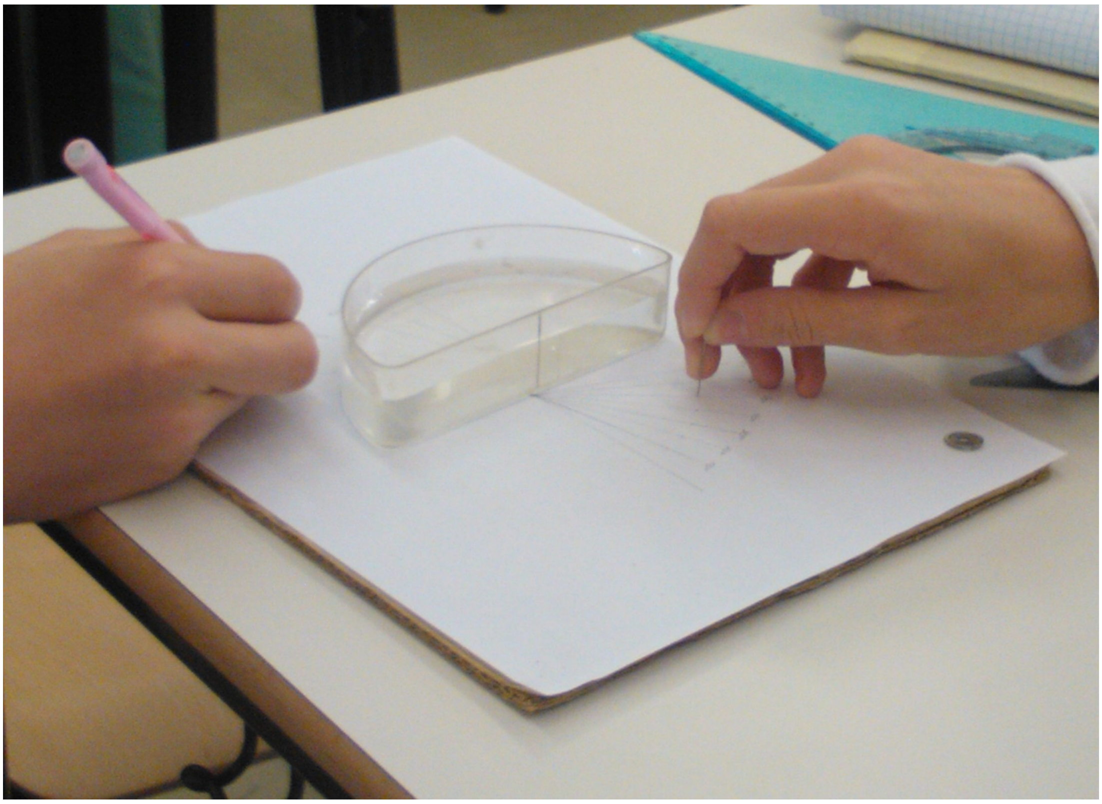


Figura 3.1: La raccolta dei dati sperimentali

Nella parte conclusiva della lezione sono stati proposti alcuni esercizi, in cui il calcolo del seno è stato effettuato attraverso i dati sperimentali (rapporto semicorda-raggio), senza l'uso della calcolatrice. Dato il tempo limitato a disposizione della sperimentazione, rispetto alla proposta descritta nel Capitolo 2, abbiamo privilegiato l'introduzione della funzione seno e delle sue caratteristiche, rispetto alla formulazione canonica della Legge di Snell e quindi della definizione dell'indice di rifrazione. Infine ripercorrendo l'intero percorso della sperimentazione con gli studenti, sono stati messi in evidenza i passaggi fondamentali che hanno poi costituito la linea guida per la stesura di una relazione che avrebbero consegnato la settimana successiva; essa rappresenta l'oggetto di valutazione per il professore di fisica e l'oggetto dello studio, per il mio lavoro di tesi, che verrà sviluppato nel prossimo paragrafo.

Guida per la stesura della relazione

1° Lezione:
- Descrizione dell'esperimento (vaschetta vuota e piena)
- Osservazione del fenomeno (immagine spezzata)
- Raccolta dati (tabella e considerazioni su come prendere i dati)
- Ricerca di una regolarità (differenza e rapporti)

2° Lezione
- Costruzione delle semicorde (definizione)
- Rapporto delle semicorde che risulta più costante del rapporto tra gli angoli di incidenza e quelli di rifrazione
- Formulazione di ipotesi e previsione

3°-4° Lezione
- Controllo sperimentale
- Considerazione sui triangoli
- Rapporto costante fra semicorda e raggio, indipendente dal raggio
- Definizione del seno di un angolo, grafico della funzione seno, calcolo del seno di un angolo senza calcolatrice
- Applicazione alla risoluzione di problemi

- Osservazioni, problemi aperti

Figura 3.2: Sintesi del percorso concordato con gli studenti

3.3 Valutazione dell'intervento didattico

Al termine delle 4 ore trascorse a scuola, il Professor Alberghi mi ha dato l'opportunità di leggere le relazioni consegnate dagli studenti. Tali relazioni sono state lo strumento principale di valutazione al fine di testare la validità della sperimentazione del percorso didattico descritto nel Capitolo 2.
Per raccogliere le impressioni degli studenti sul percorso svolto, sono state inviate tramite mail alcune domande aperte, alle quali gli studenti hanno risposto sempre tramite mail.

Analisi delle relazioni

Per prima cosa seguendo la guida in Figura 3.2, sono state lette tutte le relazioni per avere una panoramica complessiva del lavoro svolto dagli studenti. Da questa prima lettura si evince che alcuni hanno privilegiato la descrizione dell'esperimento rispetto all'inserimento della tabella dei dati, altri invece non hanno approfondito le considerazioni sul rapporto tra semicorda e raggio, necessari alla definizione della funzione seno. Allo scopo di rendere quantificabile la valutazione delle relazioni è stata costruita una tabella tramite la quale è stato possibile attribuire un giudizio di *Insufficiente*, *Sufficiente*, *Buono* e *Molto buono* in corrispondenza dei punti qualificanti della relazione, ricavati da quelli contenuti nella guida costruita con gli studenti. Successivamente una rilettura delle relazioni ha permesso di compilare prima una tabella per ogni studente e poi la tabella riassuntiva di Figura 3.3 contenente i numeri assoluti degli studenti. In Appendice B sono state riportate le tabelle relative ad ogni studente.

16 STUDENTI	Insufficiente	Sufficiente	Buono	Molto buono	Voce assente
Descrizione dell'esperimento e osservazione del fenomeno	1	3	6	6	0
Raccolta dati	1	1	6	5	3
Ricerca di una regolarità	3	6	4	3	0
Costruzione delle semicorde	2	7	5	2	0
Considerazioni sulla costanza del rapporto	2	6	6	2	0
Previsione e controllo sperimentale	3	3	1	3	6
Considerazioni sul rapporto tra semicorda e raggio	3	4	5	3	1
Definizione della funzione seno	0	6	6	4	0
Applicazioni	0	5	2	3	6

Figura 3.3: Tabella riassuntiva delle valutazioni per punti

Poiché alcuni studenti hanno scelto di trattare soltanto alcuni punti, nonostante fossero tutti contenuti all'interno della guida concordata con l'intera classe è stata introdotta la colonna *Voce assente* per segnalare le mancanze riscontrate. Analizzando la tabella che riassume i risultati dell'analisi si può fare qualche considerazione riguardo le seguenti voci:

- Descrizione dell'esperimento e osservazione del fenomeno;
- Ricerca di una regolarità;
- Costruzione delle semicorde;
- Considerazioni sulla costanza del rapporto.

In generale la prima parte della relazione relativa al procedimento dell'esperimento è stata descritta da tutti in modo esauriente. Le quattro voci elencate sopra sono state sviluppate da tutti gli studenti e sono quelle in cui troviamo una maggiore frequenza di voti medio-positivi. Infatti ripercorrendo la sperimentazione queste voci hanno segnato due momenti di transizione dalla realtà fisica alla ricerca di una legge fenomenologica; il primo partendo dall'esperienza empirica del fenomeno, il secondo costruendo graficamente le semicorde. Una piccola parte degli studenti è risultata insufficiente nella costruzione delle semicorde, la motivazione potrebbe essere dovuta al fatto che quest'ultima è stata interpretata soltanto come riferimento storico, senza utilizzare questo passaggio per notare la maggiore stabilità del rapporto delle semicorde rispetto a quello tra gli angoli.
Non sappiamo con certezza se la classe sia stata abituata a seguire una struttura standard nella stesura di una relazione durante le esperienze di laboratorio incontrate durante gli anni scolastici. Sembra comunque che gli studenti non ritengano sia necessaria la presenza della tabella che raccoglie tutti i dati dell'esperimento, visto che 3 persone non l'hanno inserita e 1 persona ha trascritto i dati incompleti. Riteniamo che l'inserimento dei dati sperimentali all'interno di una relazione di fisica sia importante e fondamentale per supportare le conclusioni che si vogliono trarre, a questo scopo sarebbe stato sufficiente allegare la scheda di laboratorio.
I risultati evidenziano 9 persone che (per la mancanza o per il giudizio) non hanno dato importanza alla fase di formulazione e controllo di una previsione basata sulla regolarità

individuata. Probabilmente lo studente "per abitudine" ritiene che un'esperienza di laboratorio si debba concludere con la determinazione di una "regola", considerandola lo scopo ultimo dell'esperimento. In questo caso invece il calcolo dell'angolo di rifrazione di un angolo non osservato sperimentalmente, effettuato risalendo alla determinazione della semicorda mette in luce l'importanza di una legge fisica come strumento per formulare previsioni. Effettivamente non è stato dedicato abbastanza tempo al controllo sperimentale, e questo può aver portato gli studenti a non considerare importante questa componente del lavoro.
Un altro risultato interessante riguarda la voce *Considerazioni sul rapporto tra semicorda e raggio*, le cui riflessioni e osservazioni volevano aiutare gli studenti a ragionare sui triangoli simili, portandoli alla definizione della funzione seno. Vi sono 4 studenti (di cui 3 insufficienti e 1 assente) che non hanno focalizzato l'importanza di queste cosiderazioni, perdendo così probabilmente il senso di tutto il percorso. Spesso accade che l'insegnante dia per scontato il rapporto che intercorre tra la fisica e la matematica. Allora nel momento in cui si coinvolgerà lo studente in un'attività che vede protagoniste entrambe le discipline egli continuerà a vedere, come in questo caso, prima la fisica e poi la matematica senza cogliere il punto di cui entra in gioco la matematica come strumento di formalizzazione delle leggi fisiche. A questo scopo sarà quindi necessaria da parte dell'insegnante l'introduzione di riflessioni ad hoc che sottolineino le relazioni tra matematica e fisica nella costruzione di conoscenza scientifica. Visto il ruolo marginale che la voce *Applicazioni* possiede nella mappa concettuale (Figura 2.1) non vanno tenuti particolarmente in considerazione gli studenti che non hanno inserito gli esempi del piano inclinato e della distanza Sole-Terra al termine della relazione. Al contrario può essere considerato positivamente il fatto che alcuni studenti li hanno dettagliatamente riportati completi di spiegazione ed illustrazione.
Al termine di questa analisi, per riuscire ad avere un giudizio in termini di efficacia del percorso si è ritenuto necessario tener conto della diversa importanza delle voci presenti in tabella. Sono state così selezionate le tre voci seguenti:

- Raccolta dati;

- Previsione e controllo sperimentale;

- Considerazioni sul rapporto tra semicorda e raggio.

che rappresentano al tempo stesso tre punti qualificanti delle relazioni e i passaggi risultati più difficili dell'intera sperimentazione. Contando i giudizi ottenuti soltanto su queste voci sono stati riportati nella tabella in Figura 3.4 i risultati per ogni studente. Tali risultati mettono in evidenza le valutazioni relative alle tre voci alle quali è stato attribuito maggior peso, contando il numero di giudizi assegnati ad ogni studente. Considerando il valore che compare con maggiore frequenza per ogni studente è stato possibile effettuare un bilancio complessivo sul rendimento della classe: solo una minoranza (7 studenti) ha ottenuto un giudizio *Insufficiente* mentre la maggior parte degli studenti (9) è rientrata nella fascia da *Sufficiente* a *Molto Buono*. Ricordando che questa valutazione puntuale è stata effettuata guardando proprio gli argomenti più difficili, si può assegnare un giudizio positivo al percorso didattico dal punto di vista della sua efficacia didattica.

	Insufficiente	Sufficiente	Buono	Molto buono
STUDENTE 1	2	1		
STUDENTE 2		1	2	
STUDENTE 3			1	2
STUDENTE 4	3			
STUDENTE 5	3			
STUDENTE 6	2	1		
STUDENTE 7	1	1	1	
STUDENTE 8				3
STUDENTE 9	2		1	
STUDENTE 10	2		1	
STUDENTE 11	1		2	
STUDENTE 12				3
STUDENTE 13	2	1		
STUDENTE 14			1	2
STUDENTE 15		1	2	
STUDENTE 16		2	1	

Figura 3.4: Tabella delle frequenze dei giudizi relativi alle tre voci principali

Durante la rilettura delle relazioni è stata effettuata anche una valutazione di stile, che comprende la forma espressiva (sintassi e ortografia), l'apparato iconografico (disegni e tabelle) e l'ordine. È risultato abbastanza facile leggere le relazioni dal punto di vista della calligrafia, probabilmente ciò è dovuto al fatto che la maggioranza degli studenti sono femmine. Spesso la confusione delle idee ha causato difficoltà nella forma espressiva risultate in una struttura sintattica carente. Dal punto di vista iconografico molti studenti si sono impegnati a riprodurre i vari disegni relativi alle "tappe" dell'esperimento. Tra tutte le relazioni ne emergono 4, esaurienti nei contenuti e nel formalismo, nelle quali troviamo alcuni interrogativi, le cui risposte guidano i passaggi fondamentali dell'esperienza. In particolare, in una di queste vengono messe in evidenza le osservazioni "step by step": per esempio dopo l'osservazione degli spilli attraverso la vaschetta vuota, lo studente ha racchiuso in un rettangolo "*angolo di incidenza* $\cong$ *angolo di rifrazione*".
È utile infine sottolineare che nella parte finale delle relazioni più della metà degli studenti ha inserito alcune osservazioni e problemi aperti che elenchiamo di seguito:

- Se si utilizza un liquido più denso l'angolo di rifrazione aumenta o diminuisce?
- Perché l'angolo di incidenza e quello rifrazione sono uguali per l'angolo 0?
- Perché le semicorde di incidenza di 10, 20 e 30 gradi hanno differenze costanti che diminuiscono all'aumentare dell'angolo di incidenza?

Si è provveduto a rispondere alle domande nella mail che è stata inviata agli studenti e che conteneva in allegato la presentazione completa riportata in Appendice A.

Risultati del questionario

Nella settimana successiva alla sperimentazione è stata inviata agli studenti una mail con un questionario, composto dalle seguenti tre domande aperte, affinché esprimessero un giudizio sul lavoro svolto senza essere condizionati dalla valutazione dell'insegnante (ancora ignota):

- Se ti capitasse di parlare con un amico/a del lavoro che vi abbiamo proposto, che cosa sottolineeresti in particolare?

- Se il prof vi proponesse di fare un'altra esperienza dello stesso tipo, che cosa ne penseresti?
- Vorremmo proporre questo lavoro anche ad altri studenti, che suggerimenti ci puoi dare?

Gli studenti hanno dimostrato interesse e impegno verso l'attività rispondendo in 11 su un totale di 16, pari circa al 70% degli studenti. Dalle risposte si evince un certo entusiasmo nell'aver preso parte all'attività: gli studenti sarebbero pronti a ripeterla se venisse loro proposta.
"*È stata un'esperienza molto interessante, che parlava di cose nuove di cui non avevamo trattato a scuola e quindi ho sicuramente imparato cose nuove su un nuovo argomento. È stato bello partire da una situazione nota, la matita nell'acqua che appare spezzata, per poi fare un esperimento a coppie che ci ha dato la possibilità di partecipare attivamente e poi di registrare e confrontare i nostri dati sentendomi coinvolta. Se ci fosse quindi la possibilità di rifare un'esperienza simile parteciperei volentieri*" (Studente 12).
È naturale che gli studenti apprezzino le lezioni leggermente diverse dalle solite lezioni frontali e le preferiscano al solito studio sui libri. Soprattutto l'intervento di persone che non fanno parte dell'ambiente scolastico, aiuta a catturare maggiormente l'attenzione anche degli studenti meno interessati.
"*Sottolineerei in particolare che è stato un lavoro originale e non pesante, che l'idea di lavorare con ragazzi che si stanno laureando è molto bella e stimolante e che l'esperimento mi ha sorpreso perché ho imparato cose che non conoscevo minimamente*" (Studente 11).
La parte sperimentale è stata ovviamente quella che ha maggiormente stimolato la collaborazione e il coinvolgimento dell'intera classe. Nella risposta alla prima domanda viene sottolineato inoltre l'utilità di riuscire a determinare il seno di un angolo senza calcolatrice, osservazione che nei libri di testo non viene normalmente riportata. È stata percepita una certa difficoltà nell'introduzione del seno dal punto di vista teorico, che viene però superata nel contesto dell'esperimento.
"*L'esperienza è stata utile, poiché concetti come seno e coseno di un angolo non sono facili da capire se si dispone soltanto di uno studio teorico; con un esperimento si riesce a cogliere meglio perché si usa una certa formula, ma si riesce anche a dare una spiega-*

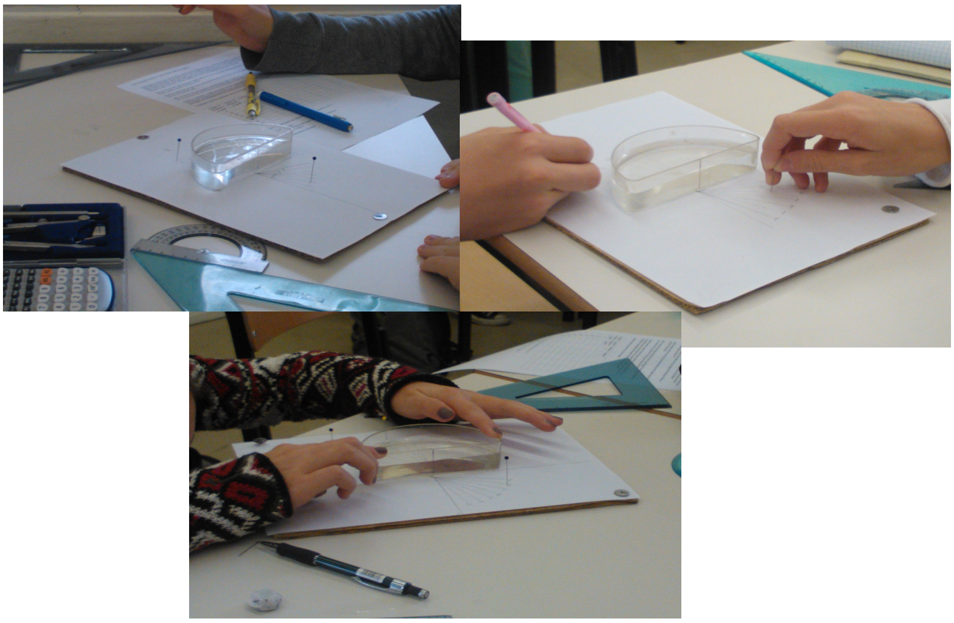
zione a un determinato evento poiché lo si osserva da vicino e non sui libri di scuola" (Studente 2).
L'interdisciplinarietà della proposta permette agli studenti di considerare gli argomenti di matematica e di fisica insieme per costruire così una propria conoscenza scientifica accreditata. Tra i suggerimenti contenuti nelle risposte all'ultima domanda vi è la richiesta di una spiegazione più chiara dell'immagine della matita spezzata dalla quale era partito il percorso.
"*Siamo partiti con il voler dire perché quando vediamo una matita nell'acqua la vediamo spezzata e secondo me andando avanti con l'esperimento abbiamo un po' perso il filo di ciò che volevamo dire, cioè almeno io non sono riuscita a capire del tutto perché la matita la vedo spezzata*" (Studente 10).
In effetti avere a disposizione qualche ora in più sarebbe stato utile soprattutto per evidenziare come lo studio della rifrazione permetta di interpretare fenomeni dell'esperienza quotidiana.
Tra i suggerimenti troviamo l'esigenza di formalizzare la legge di Snell (rapporto tra il seno dell'angolo di incidenza e il seno dell'angolo di rifrazione) e introdurre quindi la definizione di indice di rifrazione:
"*Utilizzare semmai una o due ore in più per l'esperienza a scuola per avere più tempo da dedicare a concetti più difficili e per eventuali domande*" (Studente 12).
Si è cercato di rispondere ai problemi aperti che alcuni studenti hanno inserito alla fine delle relazioni completando la presentazione inviata con la definizione dell'indice di rifrazione e la legge di Snell.

Riflessioni conclusive

A conclusione di questo lavoro di tesi cercheremo di fare un primo bilancio sulla validità della proposta avanzata.
A questo scopo utilizzeremo i risultati della sperimentazione, anche se essi non costituiscono un vero e proprio banco di prova del percorso didattico in quanto il tempo a disposizione è stato certamente inferiore a quello ipotizzato nella formulazione della proposta.
Possiamo affermare che alcuni degli obiettivi che il percorso si proponeva sono stati effettivamente raggiunti. In particolare ha funzionato l'approccio scelto in termini di studio di un fenomeno, sia dal punto di vista del coinvolgimento degli studenti sia da quello dei risultati sperimentali ottenuti. Quindi possiamo dire che è risultato positivo partire da una situazione a-didattica in cui gli studenti, interagendo con gli elementi dell'ambiente e non essendo sottoposti a obblighi didattici, si sono impegnati a costruire la propria conoscenza. La proposta ha inoltre raggiunto certamente l'obiettivo di giustificare l'introduzione della funzione trigonometrica dando quindi un senso all'impegno richiesto allo studente nel successivo studio della trigonometria.
Vi sono poi due obiettivi per i quali il percorso proposto ha fornito in un tempo così breve solo alcuni stimoli iniziali. Si tratta del rapporto esistente tra la conoscenza fisica e la conoscenza matematica e il significato di una legge fisica come strumento di previsione e di scoperta di nuovi fenomeni. D'altra parte questi sono certamente obiettivi di lungo periodo raggiungibili solo se perseguiti nello svolgimento di diversi argomenti e sottolineati nel corso di tutto l'insegnamento scientifico.

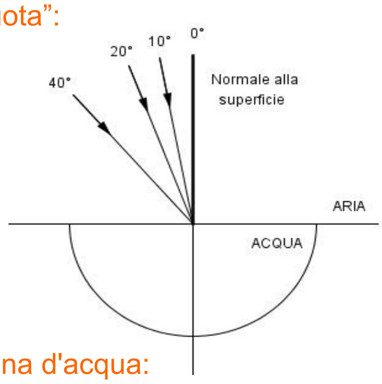
Appendice A

ANALISI DEI DATI RACCOLTI



Ripercorriamo le fasi dell'esperimento :

Osserviamo gli spilli attraverso la scatola “vuota”:



- Che cosa potete notare?
- I risultati erano prevedibili?

Osserviamo gli spilli attraverso la scatola piena d'acqua:

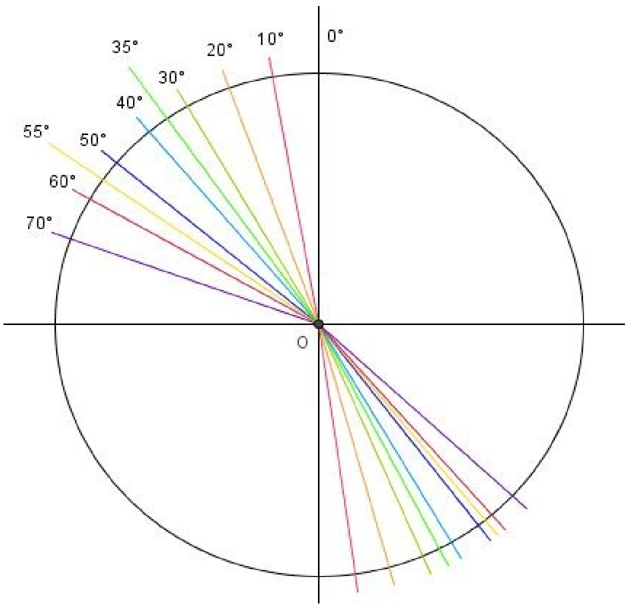
- Che cosa si può dire sulla direzione seguita dalla luce nel suo passaggio dall'aria all'acqua e dall'acqua all'aria, quando l'angolo di incidenza ***i*** è 0° ?

Angoli di rifrazione *r* osservando gli spilli allineati attraverso la vaschetta piena d'acqua

	Gruppo 1	Gruppo 2	Gruppo 3	Gruppo 4	Gruppo 5	Gruppo 6	Gruppo 7
0	0	0	0	0	0	0	0
10	8	7	8	8	8	7	6
20	15	12	15	15	16	14	15
30	22	22	21	22	23	21	22
40	29	27	29	28	29	30	29
50	35	33	34	35	36	35	36
60	41	42	39	39	41	41	39
70	45	47	44	43	44	**72**	41

- Come sono gli angoli di rifrazione rispetto a quelli di incidenza ?
- È possibile individuare una semplice relazione fra i valori di ***i*** ed ***r*** ?

Angoli di rifrazione ottenuti con una precisione maggiore



0	0,0
10	8,0
20	15,5
30	23,0
35	27,0
40	30,0
50	37,0
55	39,0
60	41,0
70	47,0

Provate a calcolare la differenza tra gli angoli ***i*** ed ***r***

	Gruppo 1	Gruppo 2	Gruppo 3	Gruppo 4	Gruppo 5	Gruppo 6	Gruppo 7	***i-r***
0	0	0	0	0	0	0	0	0,0
10	2	3	2	2	2	3	4	2,0
20	5	8	5	5	4	6	5	4,5
30	8	8	9	8	7	9	8	7,0
40	11	13	11	12	11	10	11	10,0
50	15	17	16	15	14	15	14	13,0
60	19	18	21	21	19	19	21	19,0
70	25	23	26	27	26	**-2**	29	23,0

Provate a calcolare il rapporto tra gli angoli ***i*** *ed* ***r***

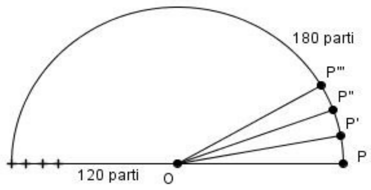
	Gruppo 1	Gruppo 2	Gruppo 3	Gruppo 4	Gruppo 5	Gruppo 6	Gruppo 7	$\frac{i}{r}$
0								
10	1,2	1,4	1,2	1,2	1,2	1,4	1,5	1,2
20	1,3	1,7	1,3	1,3	1,2	1,4	1,3	1,3
30	1,4	1,4	1,4	1,4	1,3	1,4	1,4	1,3
40	1,4	1,5	1,4	1,4	1,4	1,3	1,4	1,3
50	1,4	1,5	1,5	1,4	1,4	1,4	1,4	1,3
60	1,5	1,4	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
70	1,6	1,5	1,6	1,6	1,6	**1,0**	1,7	1,5

- In relazione agli angoli, com'è il rapporto?
- È presente una qualche regolarità?

Per trovare una regolarità, proviamo a studiare le semicorde invece degli angoli

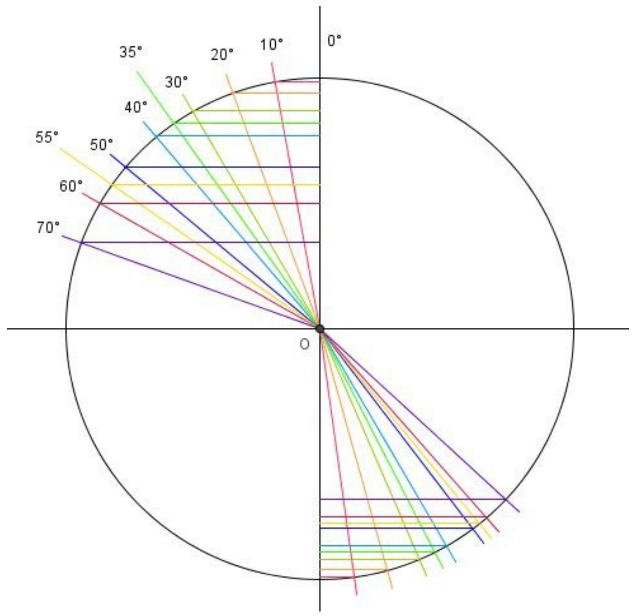
Perché si ricorre alle semicorde?

- Per affrontare problemi di natura astronomica.
- Tolomeo Claudio (II sec. a.C.) nell' A*lmagesto* pose le basi per la teoria astronomica, seguendo la suddivisione della circonferenza adottata dai babilonesi e tracciando le corde corrispondenti agli angoli.



Tracciamo le semicorde e misuriamo la loro lunghezza

Disegniamo le semicorde



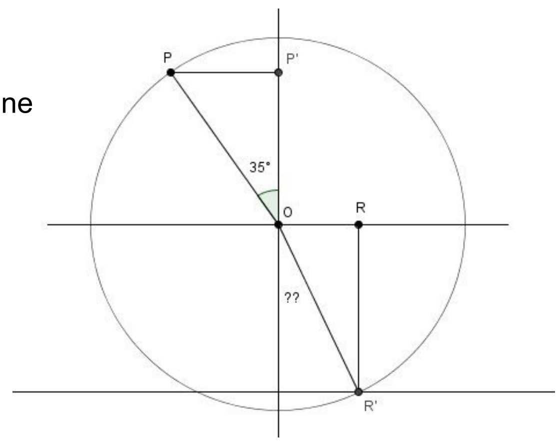
Dopo aver calcolato i rapporti tra le semicorde confrontiamo i risultati...

Angolo di incidenza ***i*** in gradi	Angolo di rifrazione ***r*** in gradi	***i - r***	$\frac{i}{r}$	Semicorda ***i*** in centimetri	Semicorda ***r*** in centimetri	Rapporto semicorde
0,0	0,0	0,00		0,0	0,0	
10,0	8,0	2,00	1,25	0,7	0,6	1,2
20,0	15,5	4,50	1,29	1,4	1,1	1,3
30,0	23,0	7,00	1,30	2,0	1,5	1,3
40,0	30,0	10,0	1,33	2,6	2,0	1,3
50,0	37,0	13,0	1,35	3,1	2,4	1,3
60,0	41,0	19,0	1,46	3,5	2,6	1,3
70,0	47,0	23,0	1,49	3,7	2,9	1,3

Il rapporto delle semicorde è più costante del rapporto degli angoli?

Possiamo prevedere l'angolo di rifrazione corrispondente all'angolo di incidenza di 35° ?

- Media rapporto semicorde: 1,3
- Misuro la semicorda ***i*** e conoscendo il rapporto trovo la misura della semicorda ***r***
- Riporto la semicorda ***r*** sul diametro e con la parallela individuo il punto di intersezione con la circonferenza
- Misuro l'angolo di rifrazione trovato



Il procedimento è corretto...ma...

- È troppo laborioso
- Non permette di fare previsioni agevolmente
- I valori delle semicorde dipendono dal raggio della circonferenza

Sarebbe più comodo lavorare con una grandezza che non dipenda dalla circonferenza ma soltanto dall'angolo

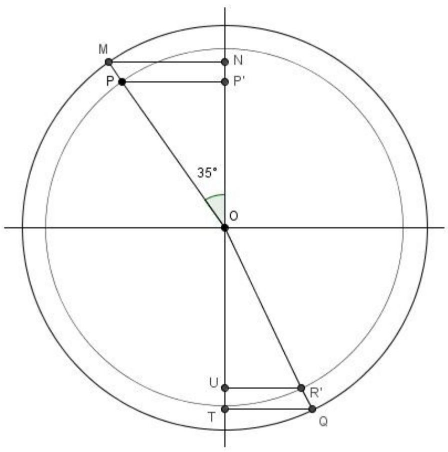
Dati ottenuti sperimentalmente per gli angoli di 35° e 55°

Angolo di incidenza ***i*** in gradi	Angolo di rifrazione ***r*** in gradi	***i-r***	$\frac{i}{r}$	Semicorda ***i*** in centimetri	Semicorda ***r*** in centimetri	Rapporto semicorde
0,0	0,0	0,00		0,0	0,0	
10,0	8,0	2,00	1,25	0,7	0,6	1,2
20,0	15,5	4,50	1,29	1,4	1,1	1,3
30,0	23,0	7,00	1,30	2,0	1,5	1,3
35,0	27,0	8,00	1,30	2,3	1,8	1,3
40,0	30,0	10,0	1,33	2,6	2,0	1,3
50,0	37,0	13,0	1,35	3,1	2,4	1,3
55,0	39,0	16,0	1,41	3,3	2,5	1,3
60,0	41,0	19,0	1,46	3,5	2,6	1,3
70,0	47,0	23,0	1,49	3,7	2,9	1,3

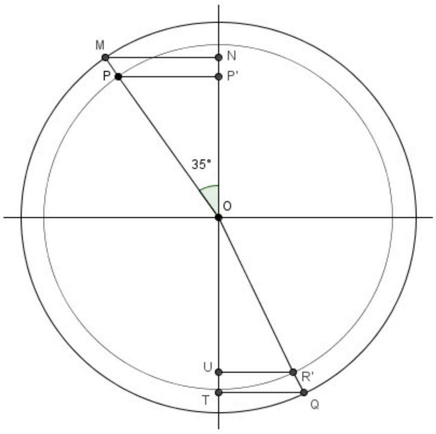
Calcolo degli angoli di rifrazione di 35° e 55° con il metodo visto precedentemente

	Angolo di incidenza 35°	Angolo di incidenza 55°
Gruppo 1	27,0°	37,5°
Gruppo 2	27,0°	37,0°
Gruppo 3	26,0°	40,0°
Gruppo 4	25,0°	36,0°
Gruppo 5	29,0°	38,0°
Gruppo 6	26,0°	38,0°
Gruppo 7	27,0°	39,0°
Dati sperimentali	27,0°	39,0°

E se cambiassimo il raggio della circonferenza, cambierebbe il rapporto tra le semicorde?



- Che proprietà hanno questi triangoli?
- Proviamo ora a calcolare il rapporto tra semicorda e raggio? Che cosa osserviamo?



$$\frac{PP'}{OP}=\frac{MN}{OM}$$

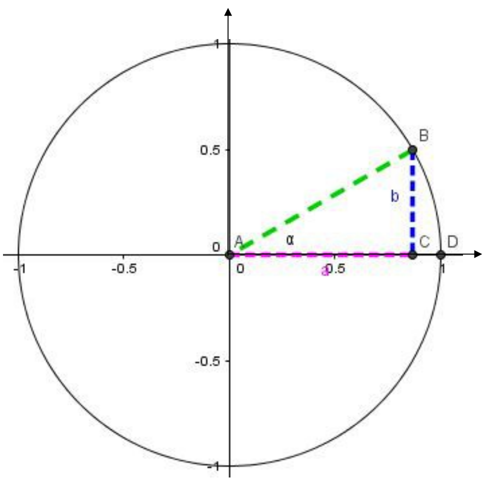
$$\frac{UR'}{R'O}=\frac{TQ}{QO}$$

$$\frac{semicorda}{raggio}$$ **É una grandezza invariante!!**

Definizione: *Detto α l'angolo PÔP'. Il rapporto tra il cateto opposto ad α e l'ipotenusa si dice* ***seno di α****.*

$$\sin(\alpha)=\frac{PP'}{OP}$$

Nella circonferenza goniometrica:

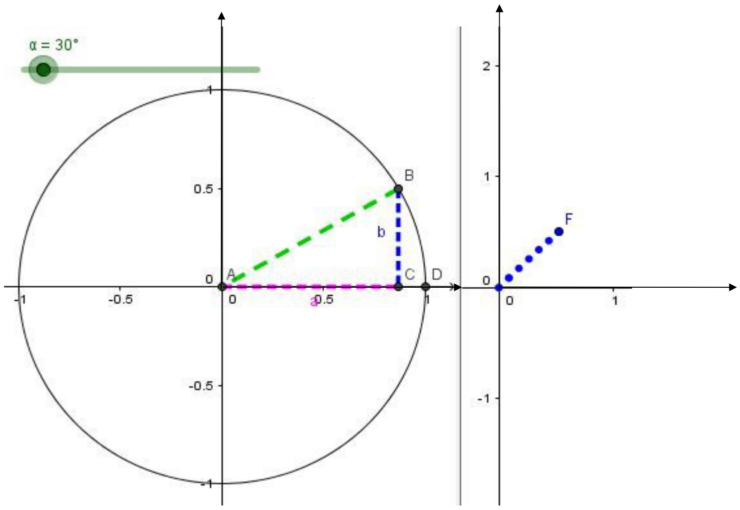


$$\sin(\alpha)=\frac{BC}{AB}=BC=y_B$$

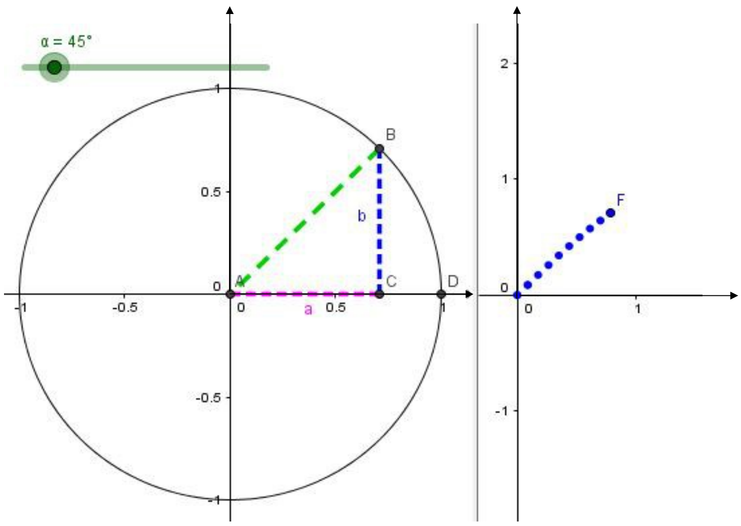
Vediamo il grafico della funzione *y* = *sin(x)*

Grafico della funzione seno di alcuni angoli noti:

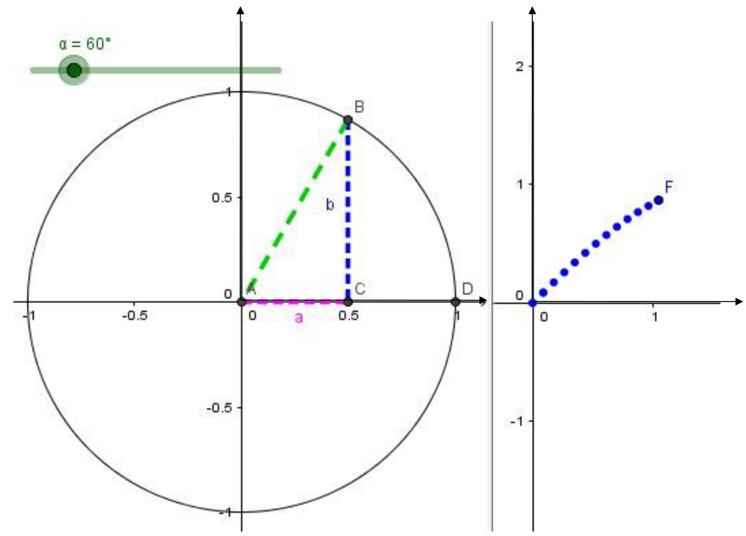
α = 30°



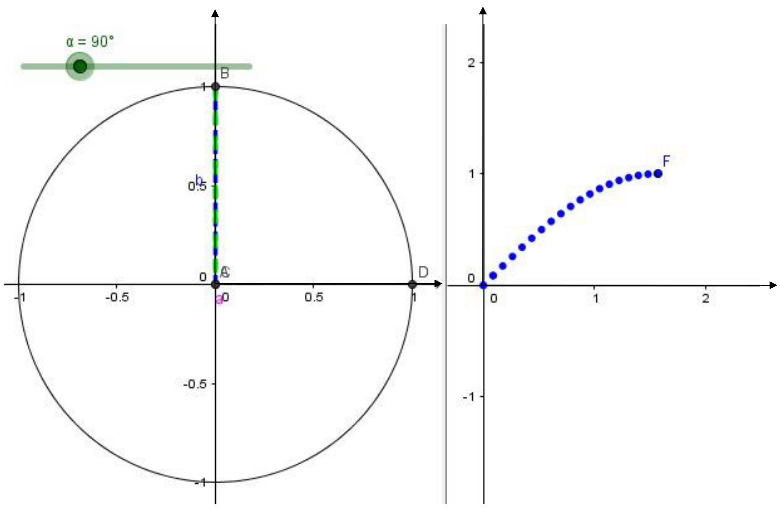
α = 45°



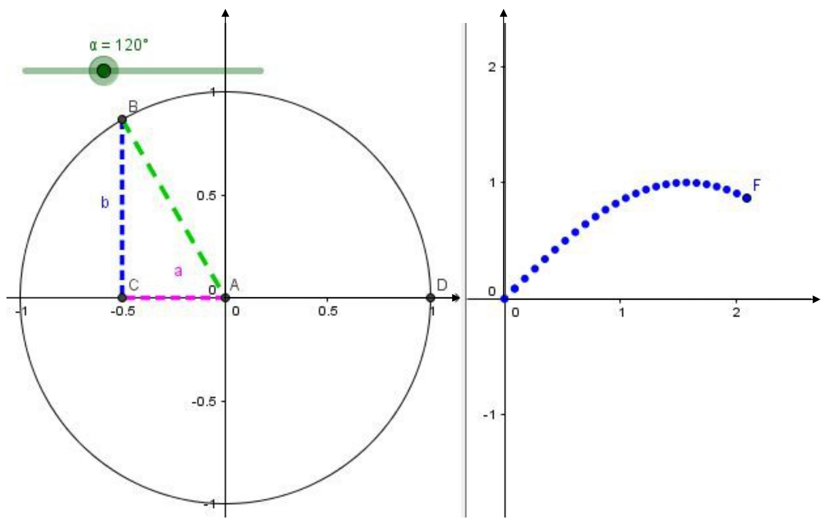
$\alpha = 60°$



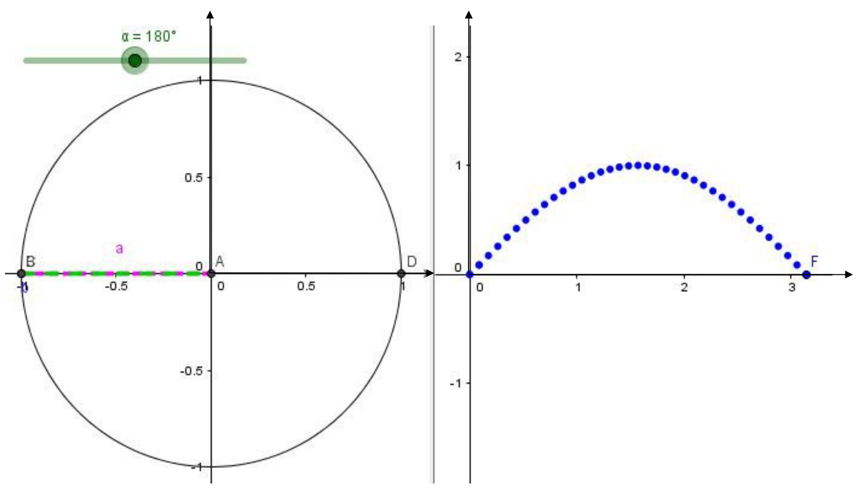
$\alpha = 90°$



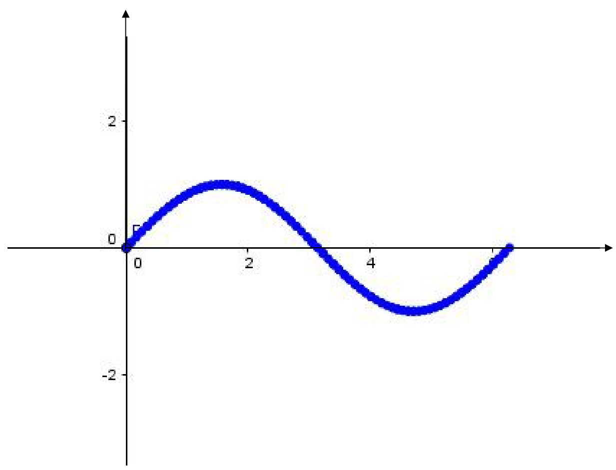
α = 120°



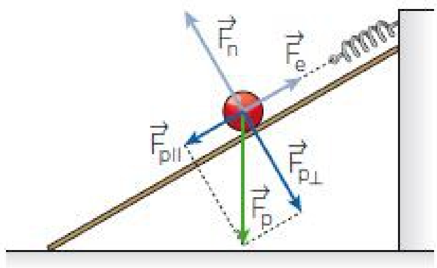
α = 180°

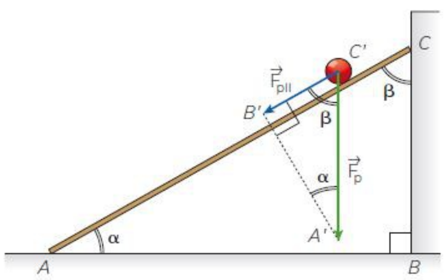


La funzione seno da 0° a 360°



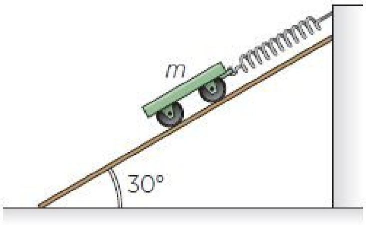
Qualche esempio di applicazione della funzione seno: il piano inclinato





$$B'C'=\sin(\alpha)*F_P$$

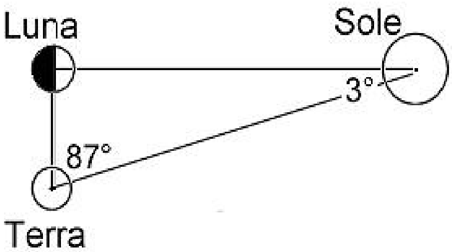
Un carrello di massa 55 kg si trova su un piano inclinato di 30° rispetto all'orizzontale. Quale forza bisogna applicare parallelamente al piano per mantenerlo in equilibrio?



SOLUZIONE Dato che la forza equilibrante è uguale e opposta alla forza $\vec{F}_{p\|}$, allora

$$F_e = F_p \sin\alpha = (55\ \text{kg}) \times (9{,}8\ \text{N/kg}) \times \sin 30° = 2{,}7 \times 10^2\ \text{N}$$

Aristarco di Samo



Data la distanza Terra-Luna = 384400 km e sapendo che sin(3°)=TL/ST, calcolare la distanza Sole-Terra.

Risposte ad alcuni problemi aperti

Formulazione della legge di Snell:

Il rapporto delle semicorde che abbiamo trovato descrive quanto la direzione di propagazione della luce è deviata nel passare da un mezzo ad un altro.

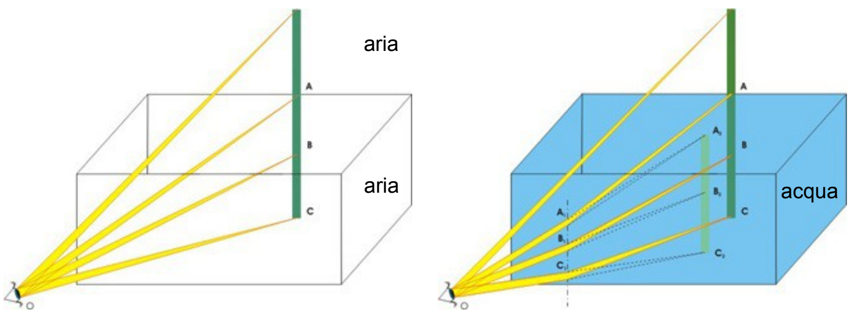
Se esprimiamo questo risultato mediante il rapporto dei seni degli angoli (***i*** ed ***r***) troviamo la Legge di Snell:
che definisce anche l'indice di rifrazione caratteristico del passaggio della luce da un mezzo ad un altro, nel nostro caso dall'aria all'acqua:

$$\frac{\sin(i)}{\sin(r)} = n_{aria-acqua} = 1{,}33$$

Risposte ad alcuni problemi aperti

Spiegazione della "matita spezzata":

L'occhio dell'osservatore interpreta il segnale luminoso che passa dall'acqua all'aria come se venisse da una posizione diversa da quella reale.



Se un oggetto è immerso solo parzialmente in acqua, lo spostamento dell'immagine della parte immersa rispetto all'immagine della parte vista direttamente attraverso l'aria provoca la nota percezione che l'oggetto sia spezzato o piegato.

Appendice B

STUDENTE 1	Insufficiente	Sufficiente	Buono	Molto buono
Descrizione dell'esperimento e osservazione del fenomeno		X		
Raccolta dati	X			
Ricerca di una regolarità		X		
Costruzione delle semicorde		X		
Considerazioni sulla costanza del rapporto			X	
Previsione e controllo sperimentale	/	/	/	/
Considerazioni sul rapporto tra semicorda e raggio		X		
Definizione della funzione seno			X	
Applicazioni		X		

STUDENTE 2	Insufficiente	Sufficiente	Buono	Molto buono
Descrizione dell'esperimento e osservazione del fenomeno				X
Raccolta dati			X	
Ricerca di una regolarità			X	
Costruzione delle semicorde			X	
Considerazioni sulla costanza del rapporto		X		
Previsione e controllo sperimentale		X		
Considerazioni sul rapporto tra semicorda e raggio			X	
Definizione della funzione seno			X	
Applicazioni			X	

STUDENTE 3	Insufficiente	Sufficiente	Buono	Molto buono
Descrizione dell'esperimento e osservazione del fenomeno				X
Raccolta dati				X
Ricerca di una regolarità				X
Costruzione delle semicorde				X
Considerazioni sulla costanza del rapporto				X
Previsione e controllo sperimentale				X
Considerazioni sul rapporto tra semicorda e raggio			X	
Definizione della funzione seno				X
Applicazioni				X

STUDENTE 4	Insufficiente	Sufficiente	Buono	Molto buono
Descrizione dell'esperimento e osservazione del fenomeno			X	
Raccolta dati				X
Ricerca di una regolarità	X			
Costruzione delle semicorde	X			
Considerazioni sulla costanza del rapporto	X			
Previsione e controllo sperimentale	X			
Considerazioni sul rapporto tra semicorda e raggio	X			
Definizione della funzione seno		X		
Applicazioni		X		

STUDENTE 5	Insufficiente	Sufficiente	Buono	Molto buono
Descrizione dell'esperimento e osservazione del fenomeno		X		
Raccolta dati	/	/	/	/
Ricerca di una regolarità		X		
Costruzione delle semicorde		X		
Considerazioni sulla costanza del rapporto		X		
Previsione e controllo sperimentale	/	/	/	/
Considerazioni sul rapporto tra semicorda e raggio	/	/	/	/
Definizione della funzione seno		X		
Applicazioni	/	/	/	/

STUDENTE 6	Insufficiente	Sufficiente	Buono	Molto buono
Descrizione dell'esperimento e osservazione del fenomeno	X			
Raccolta dati		X		
Ricerca di una regolarità	X			
Costruzione delle semicorde	X			
Considerazioni sulla costanza del rapporto		X		
Previsione e controllo sperimentale	X			
Considerazioni sul rapporto tra semicorda e raggio	X			
Definizione della funzione seno		X		
Applicazioni	/	/	/	/

STUDENTE 7	Insufficiente	Sufficiente	Buono	Molto buono
Descrizione dell'esperimento e osservazione del fenomeno			X	
Raccolta dati			X	
Ricerca di una regolarità	X			
Costruzione delle semicorde		X		
Considerazioni sulla costanza del rapporto		X		
Previsione e controllo sperimentale	/	/	/	/
Considerazioni sul rapporto tra semicorda e raggio		X		
Definizione della funzione seno			X	
Applicazioni		X		

STUDENTE 8	Insufficiente	Sufficiente	Buono	Molto buono
Descrizione dell'esperimento e osservazione del fenomeno				X
Raccolta dati				X
Ricerca di una regolarità		X		
Costruzione delle semicorde			X	
Considerazioni sulla costanza del rapporto			X	
Previsione e controllo sperimentale				X
Considerazioni sul rapporto tra semicorda e raggio				X
Definizione della funzione seno				X
Applicazioni	/	/	/	/

STUDENTE 9	Insufficiente	Sufficiente	Buono	Molto buono
Descrizione dell'esperimento e osservazione del fenomeno		X		
Raccolta dati			X	
Ricerca di una regolarità		X		
Costruzione delle semicorde		X		
Considerazioni sulla costanza del rapporto	X			
Previsione e controllo sperimentale	X			
Considerazioni sul rapporto tra semicorda e raggio	X			
Definizione della funzione seno			X	
Applicazioni	/	/	/	/

STUDENTE 10	Insufficiente	Sufficiente	Buono	Molto buono
Descrizione dell'esperimento e osservazione del fenomeno				X
Raccolta dati	/	/	/	/
Ricerca di una regolarità				X
Costruzione delle semicorde		X		
Considerazioni sulla costanza del rapporto			X	
Previsione e controllo sperimentale	/	/	/	/
Considerazioni sul rapporto tra semicorda e raggio			X	
Definizione della funzione seno			X	
Applicazioni		X		

STUDENTE 11	Insufficiente	Sufficiente	Buono	Molto buono
Descrizione dell'esperimento e osservazione del fenomeno			X	
Raccolta dati			X	
Ricerca di una regolarità		X		
Costruzione delle semicorde		X		
Considerazioni sulla costanza del rapporto		X		
Previsione e controllo sperimentale	/	/	/	/
Considerazioni sul rapporto tra semicorda e raggio			X	
Definizione della funzione seno		X		
Applicazioni	/	/	/	/

STUDENTE 12	Insufficiente	Sufficiente	Buono	Molto buono
Descrizione dell'esperimento e osservazione del fenomeno				X
Raccolta dati				X
Ricerca di una regolarità				X
Costruzione delle semicorde				X
Considerazioni sulla costanza del rapporto				X
Previsione e controllo sperimentale				X
Considerazioni sul rapporto tra semicorda e raggio				X
Definizione della funzione seno				X
Applicazioni				X

STUDENTE 13	Insufficiente	Sufficiente	Buono	Molto buono
Descrizione dell'esperimento e osservazione del fenomeno			X	
Raccolta dati	/	/	/	/
Ricerca di una regolarità			X	
Costruzione delle semicorde			X	
Considerazioni sulla costanza del rapporto			X	
Previsione e controllo sperimentale	/	/	/	/
Considerazioni sul rapporto tra semicorda e raggio		X		
Definizione della funzione seno		X		
Applicazioni		X		

STUDENTE 14	Insufficiente	Sufficiente	Buono	Molto buono
Descrizione dell'esperimento e osservazione del fenomeno				X
Raccolta dati				X
Ricerca di una regolarità			X	
Costruzione delle semicorde			X	
Considerazioni sulla costanza del rapporto			X	
Previsione e controllo sperimentale			X	
Considerazioni sul rapporto tra semicorda e raggio				X
Definizione della funzione seno				X
Applicazioni				X

STUDENTE 15	Insufficiente	Sufficiente	Buono	Molto buono
Descrizione dell'esperimento e osservazione del fenomeno			X	
Raccolta dati			X	
Ricerca di una regolarità		X		
Costruzione delle semicorde			X	
Considerazioni sulla costanza del rapporto		X		
Previsione e controllo sperimentale		X		
Considerazioni sul rapporto tra semicorda e raggio			X	
Definizione della funzione seno		X		
Applicazioni	/	/	/	/

STUDENTE 16	Insufficiente	Sufficiente	Buono	Molto buono
Descrizione dell'esperimento e osservazione del fenomeno			X	
Raccolta dati			X	
Ricerca di una regolarità			X	
Costruzione delle semicorde		X		
Considerazioni sulla costanza del rapporto			X	
Previsione e controllo sperimentale		X		
Considerazioni sul rapporto tra semicorda e raggio		X		
Definizione della funzione seno			X	
Applicazioni			X	

Bibliografia

[1] F. Ayres Jr., *Matematica generale*, McGrawill Schaum's Milano (1994)

[2] L. Berzolari, G. Vivanti, D. Gigli, *Enciclopedia delle Matematiche Elementari e complementi*, vol. 2 Parte 1, Ulrico Hoepli Milano (1937)

[3] C. B. Boyer, *Storia della matematica*, Mondadori Milano (2011)

[4] M. Bergamini, A. Trifone, G. Barozzi, *Matematica.blu 2.0*, vol. 3 e 4, Zanichelli Bologna (2012)

[5] L. Sasso, *La matematica a colori*, vol. 3 e 4, Petrini (2015)

[6] P.S.S.C., *Fisica*, vol. 1, Zanichelli Bologna (1973)

[7] P.S.S.C., *Guida al laboratorio*, Zanichelli Bologna (1973)

[8] B. D'Amore, *Elementi di Didattica della Matematica*, Pitagora Bologna (1999)

[9] G. Brousseau, *Fondements et Méthods de la Didactique des Mathématiques*, (1986)

[10] G. Vailati, *Sull'importanza delle ricerche relative alla storia delle scienze*, (1896)

[11] G.Melandri, E.Toth, *Ha più senso sgusciare un uovo se si lavora ad un progetto*, La Fisica nella Scuola, Quaderno n.6, Le scienze sperimentali nella scuola di base, p.68 (1996)

Sitografia

[12] Goniometria e trigonometria,
www.treccani.it/enciclopedia/tag/goniometria

[13] Indicazioni Nazionali,
www.archivio.pubblica.istruzione.it

[14] Trigonometria e luce: una lezione interdisciplinare,
www.treccani.it/scuola/lezioni/matematica/trigonometria2.html

Ringraziamenti

Ritengo sia necessario ringraziare coloro che mi hanno permesso di raggiungere questo importante traguardo e che hanno contribuito alla mia formazione in vista di una nuova avventura da affrontare nel mondo del lavoro.
Ringrazio il Professor Giorgio Bolondi per i preziosi suggerimenti nella realizzazione e nel perfezionamento di questo lavoro di tesi.
Ringrazio la Professoressa Barbara Pecori per la disponibilità che mi ha dimostrato e per avermi trasmesso la sua passione per l'insegnamento durante le ore che abbiamo trascorso insieme per la progettazione di questo elaborato.
Desidero ringraziare alcuni professori che ho incontrato nel mio percorso di studi: il Professor Francesco Rotundo per la professionalità e la determinazione nell'insegnarmi la matematica durante gli anni del liceo, la Professoressa Angela Drei per avermi accolta come tirocinante insegnandomi ad avere cura degli studenti ed infine ringrazio il Professor Gian Luigi Alberghi per la disponibilità concessa per la sperimentazione all'interno della sua classe.
Colgo l'occasione per ringraziare gli studenti che ho avuto il piacere di seguire durante il mio periodo di tirocinio e quelli che hanno partecipato con impegno alla sperimentazione della proposta.
Ringrazio i miei genitori che mi hanno sostenuto durante la mia carriera universitaria sia economicamente che moralmente e che mi hanno dato sempre lo stimolo giusto per andare avanti.
Grazie a Selenia che, pur non comprendendo la mia passione per la matematica, mi è stata vicino nei miei momenti di sconforto dandomi la forza di credere nelle mie capacità con la sua energia.

Grazie a Moreno che si è preso cura del mio cuore, che mi ha sopportato e supportato nei momenti no e che regalandomi un sorriso riesce sempre a far tornare il sereno.
Ringrazio tutte le mie amiche bolognesi e non per aver condiviso con me in questi anni di università la fatica dello studio, l'impegno nell'aiuto reciproco, la felicità di una chiacchierata in compagnia e la gioia dopo l'esito positivo di un esame.
Un ultimo ringraziamento va a tutti i miei amici "vecchi" e "nuovi" perché sono persone speciali e in modo particolare grazie ai "Pastorelli" che anche se non vedo tutti i giorni ci accomuna l'intento di seguire i ragazzi nella loro crescita spirituale.