

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Matematica

# Presentazione di varietà tridimensionali tramite poliedri

Tesi di Laurea in Topologia Algebrica

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
Massimo Ferri

Presentata da:  
Caterina Tamburini

II Sessione  
Anno Accademico 2014/2015



*Questo suggerimento  
d'uno spazio finito ma illimitato  
è una delle massime idee  
che siano mai state concepite  
sulla natura del mondo.*



# Introduzione

Qual è la forma del nostro Universo?

Questa è una delle domande più importanti ed interessanti cui i cosmologi hanno, da sempre, tentato di dar risposta. Spesso siamo indotti a credere che tutto il nostro universo sia  $\mathbb{R}^3$ , ossia lo spazio Euclideo tridimensionale; questa intuizione non è del tutto errata perchè la nostra esperienza ci assicura che viviamo in uno spazio tridimensionale. Ma se il nostro universo fosse solo *localmente* come  $\mathbb{R}^3$ ? Se fosse invece una *varietà tridimensionale* diversa?

Tutte queste domande di tipo più cosmologico e fisico che matematico sottolineano l'importanza dello studio e la comprensione delle varietà tridimensionali. La prima difficoltà che si incontra quando ci si avvicina allo studio delle 3-varietà è sicuramente il fatto che non possiamo vederle nello spazio tridimensionale. Infatti per avere una visione completa ed oggettiva di una varietà tridimensionale, è necessario immergerla in uno spazio almeno quadridimensionale; ciò risulta ovviamente estraneo alla nostra percezione in quanto il nostro mondo sembra avere solo tre dimensioni. Per capire come superare questo problema possiamo, per un momento, ridurci al caso delle varietà bidimensionali. Se volessimo spiegare ad un abitante di  $\mathbb{R}^2$  com'è fatto un toro, potremmo prendere un rettangolo, oggetto conosciuto ed esistente nel piano, e dirgli di immaginare di incollare i lati opposti così da creare la superficie  $T^2$ , la quale può essere completamente vista solo in uno spazio con almeno tre dimensioni. In termini leggermente più formali, questo ragionamento è la presentazione di una superficie mediante un  $2n$ -poligono con lati identificati a coppie. Immaginando di aumentare di una unità la dimensione degli oggetti presi in considerazione, si può facilmente intuire, con i dovuti accorgimenti, come una varietà tridimensionale possa essere presentata da un poliedro con le facce identifica-

te. La differenza sostanziale che si ritrova nello studio delle 2-varietà e in quello delle 3-varietà è l'assenza, in dimensione tre, di un teorema di classificazione. Infatti, per quanto riguarda le varietà bidimensionali compatte e senza bordo, esiste un teorema di classificazione formulato da Von Dick nel 1888, mentre per le 2-varietà non compatte, un primo enunciato fu presentato da Kerékjártó tra il 1922 e il 1923, per poi essere revisionato da Richards nel 1963. In dimensione tre, invece, il problema della classificazione delle varietà non è ancora stato risolto. Uno dei risultati dimostrati più recentemente è la Congettura di Geometrizzazione formulata da Thurston negli anni '70, la quale però non offre comunque una classificazione delle varietà tridimensionali.

Lo scopo principale di questa tesi è illustrare il metodo di presentazione delle varietà tridimensionali mediante poliedri. Daremo quindi una dimostrazione del teorema che offre una condizione necessaria e sufficiente affinché il poliedro considerato, con le sue identificazioni, presenti davvero una varietà tridimensionale.

Nel primo capitolo si affronta il caso delle superfici. Inizialmente si dimostra il teorema che permette di presentare una 2-varietà come un poligono con i lati identificati a coppie. Inoltre, dopo aver dato l'enunciato del teorema di classificazione delle superfici, ci si pone l'obiettivo di illustrare come questi due teoremi possano essere utilizzati per riconoscere tutte le possibili superfici ottenibili da un poligono dato.

Nel secondo capitolo e corpo centrale dell'elaborato, è trattato il caso delle varietà tridimensionali. La prima sezione è principalmente dedicata a risultati teorici, i quali permetteranno di dimostrare che ogni varietà di dimensione dispari ha caratteristica di Eulero nulla. Nella seconda sezione è illustrata la costruzione che permette di presentare una 3-varietà mediante un poliedro con facce identificate. Infine si dimostra l'invertibilità, solo in dimensione tre, del risultato esposto nella prima sezione, ossia dimostreremo che un poliedro con facce identificate presenta una 3-varietà se e solo se la sua caratteristica di Eulero è nulla.

Per concludere la tesi, nel terzo capitolo sono riportati alcuni esempi di varietà tridi-

mensionali presentate da poliedri ed un controesempio in dimensione 5. In particolare, nell'ultima sezione, è illustrata la costruzione di un politopo 5-dimensionale, con caratteristica di Eulero nulla, che però non risulta essere una varietà combinatoria.





# Indice

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introduzione</b>  | <b>i</b>  |
| <b>1 Superfici e poligoni</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1 Presentazione e classificazione . . . . .                                | 1         |
| 1.2 Un esempio: le superfici ottenibili da un esagono . . . . .              | 6         |
| <b>2 Varietà tridimensionali e poliedri</b>                                  | <b>11</b> |
| 2.1 Caratteristica di Eulero di una varietà con dimensione dispari . . . . . | 11        |
| 2.1.1 Coomologia . . . . .   | 11        |
| 2.1.2 Dualità di Poincaré . . . . .  | 12        |
| 2.1.3 Varietà di dimensione dispari . . . . .                                | 14        |
| 2.2 Presentazione di 3-varietà mediante poliedri . . . . .                   | 15        |
| <b>3 Esempi e controesempi</b>   | <b>21</b> |
| 3.1 Poliedri regolari . . . . .  | 21        |
| 3.2 Spazi lenticolari . . . . .  | 25        |
| 3.3 Un controesempio in dimensione 5 . . . . .                               | 27        |
| <b>Bibliografia</b>  | <b>29</b> |



# Capitolo 1

## Superfici e poligoni

### 1.1 Presentazione e classificazione

Il problema della presentazione delle superfici mediante  $2n$ -poligoni con lati identificati a coppie è fondamentale per poter classificare tutte le 2-varietà. Infatti la dimostrazione del teorema della classificazione delle 2-varietà connesse e chiuse, cioè compatte senza bordo, si basa proprio su tale presentazione.

Una caratteristica fondamentale delle 2-varietà compatte è che sono tutte triangolabili quindi è facile immaginare come si possa passare da una superficie chiusa e connessa ad un poligono con i lati identificati a coppie.

Supponiamo di avere una superficie e di triangolarla; dato che la nostra varietà non ha bordo, ogni lato apparterrà esattamente a due triangoli distinti. Ora immaginiamo di ritagliare tutti i triangoli della triangolazione tenendo memoria dei nomi dei lati.

Per costruire il poligono cominciamo prendendo un triangolo ed incollando lungo ogni lato l'altro triangolo cui il lato appartiene nella triangolazione. Dopo un numero finito di passi otteniamo il risultato cercato.

Al fine di formalizzare la situazione, dopo aver ricordato alcune definizioni, proviamo alcuni risultati utili nella dimostrazione del teorema principale di questa sezione.

**Definizione 1.1.** Uno spazio di Hausdorff  $M$  è detto  **$n$ -varietà**, o varietà  $n$ -dimensionale, se ogni punto di  $M$  possiede un intorno omeomorfo ad un aperto di  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione 1.2.** Sia  $K$  un complesso simpliciale. Per ogni punto  $x$  di  $|K|$  è possibile considerare l'insieme  $N_K(x)$  con tutti i simplessi di  $K$ , che contengono  $x$ , e con tutte le loro facce. Definiamo **link** di  $x$  in  $K$ ,  $Lk_K(x)$ , il sottoinsieme di simplessi di  $N_K(x)$  che non contengono  $x$ .

**Proposizione 1.1.1.** *Sia  $K$  un complesso simpliciale il cui corpo è una varietà  $n$ -dimensionale. Allora, per ogni  $x \in |K|$ ,  $|Lk(x)| \simeq S^{n-1}$ .*

*Osservazione 1.* Prima di dimostrare la proposizione ricordiamo una proprietà del link dei complessi simpliciali.

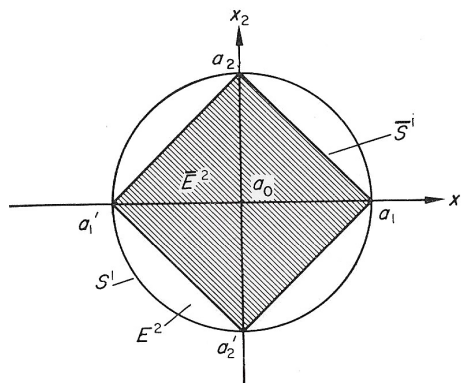
Se  $K$  ed  $L$  sono due complessi simpliciali ed  $f : |K| \rightarrow |L|$  è un omeomorfismo lineare a tratti: allora, per ogni  $x \in |K|$  tale che  $f(x)$  è contenuto in un insieme aperto  $U$  di  $|L|$ , con  $U$  contenuto nell'immagine di  $f$ , abbiamo  $|Lk_K(x)| \simeq |Lk_L(f(x))|$ .

Grazie a questa osservazione possiamo ora dimostrare la proposizione 1.1.1.

*Dimostrazione.* Dalla definizione di  $n$ -varietà abbiamo che esiste un aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^n$  ed un omeomorfismo  $h$  da  $U$  in un sottoinsieme  $h(U)$  di  $|K|$  che contiene  $x$ .

Sia  $y = h^{-1}(x)$ . Dato che  $U$  è aperto, esiste un  $\varepsilon > 0$  tale che l'insieme  $B$  dei punti  $z$ , per cui  $d(y, z) \leq \varepsilon$ , sia contenuto in  $U$ : allora  $h$  è anche un omeomorfismo da  $B$  in un sottoinsieme di  $|K|$  ed  $x$  è in un aperto contenuto in  $h(B)$ .

Ma essendo  $B$  un disco, può essere triangolato dal complesso simpliciale ombreggiato nella figura sottostante con  $y$  come il vertice  $a_0$ . Quindi, dall'osservazione 1, abbiamo  $|Lk(x)| \simeq |Lk(y)|$ , il quale è omeomorfo a  $S^{n-1}$ .  $\square$



**Corollario 1.1.2.** *Sia  $K$  un complesso simpliciale.*

*Se  $|K|$  è una 2-varietà, allora*

1.  $\dim K = 2$ ;
2. ogni 1-simplesso di  $K$  è faccia di esattamente due 2-simplessi.

*Dimostrazione.* Supponiamo esista un simplesso  $\sigma \in K$  di dimensione  $n > 2$ . Allora preso un punto  $x$  nell'interno di  $\sigma$ , si ha che  $|Lk(x)|$  è omeomorfo a  $S^{n-1}$  ma  $\pi_1(S^{n-1}) \cong 0$  per ogni  $n > 2$ , mentre  $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ ; quindi  $S^{n-1}$  non ha lo stesso tipo di omotopia di  $S^1$ . Di conseguenza un simplesso come  $\sigma$  non può esistere in  $K$  perchè il  $|K|$  è una 2-varietà, per ipotesi, quindi ogni punto  $x \in K$  deve avere  $|Lk(x)|$  omotopicamente equivalente ad  $S^1$ .

Quindi  $\dim K = 2$ .

Ora sia  $x$  un punto dell'interno di un 1-simplesso  $\tau$  e supponiamo che  $\tau$  sia faccia di  $r$  2-simplessi. Allora il  $Lk(x)$  è il sottocomplesso mostrato in figura 1.1, con  $r$  "archi" che congiungono i vertici  $a^0$  e  $a^1$  di  $\sigma$ .

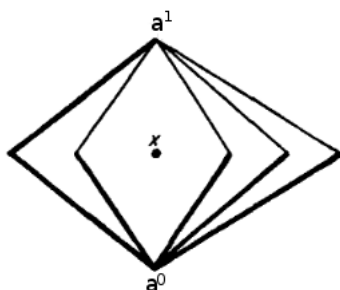


Figura 1.1:

Notiamo subito che necessariamente si deve avere  $r > 0$  altrimenti  $|Lk(x)| = a^0 \cup a^1$  che non è omotopicamente equivalente a  $S^1$ .

Se ora consideriamo un albero massimale del  $Lk(x)$ , come ad esempio quello evidenziato in figura 1.1, abbiamo che  $\pi_1(|Lk(x)|, a^0)$  è il gruppo libero su  $(r - 1)$  generatori, grazie all'isomorfismo con il gruppo dei lati. Infatti per calcolare il gruppo dei lati considero come generatori tutti gli 1-simplessi di  $Lk(x)$ , che sono  $2r$ ; per quanto riguarda le relazioni

invece, esse coinvolgono ed eguagliano ad 1 esattamente  $(r - 1)$  generatori, ossia quei simplessi di  $Lk(x)$  che appartengono all'albero massimale. Quindi ottengo un gruppo con la seguente presentazione:

$$\pi_1(|Lk(x)|, a^0) = \langle g_1, \dots, g_{2r} | g_{i_1}, \dots, g_{i_{r+1}} \rangle$$

Applicando delle opportune trasformazioni di Tietze ottengo:

$$\pi_1(|Lk(x)|, a^0) = \langle g_{i_1}, \dots, g_{i_{r-1}} | \emptyset \rangle$$

cioè il gruppo libero su  $(r - 1)$  generatori.

Questo è però in contraddizione con la proposizione 1.1.1 tranne che per il caso  $r = 2$ .

Quindi anche il secondo punto dell'enunciato è dimostrato.  $\square$

**Teorema 1.1.3.** *Sia  $K$  un complesso simpliciale il cui corpo è una 2-varietà connessa per archi. Allora  $|K|$  è omeomorfo allo spazio ottenuto da un  $2n$ -poligono regolare di  $\mathbb{R}^2$  mediante l'identificazione a coppie dei suoi lati.*

*Dimostrazione.* Possiamo costruire uno spazio omeomorfo a  $|K|$  come segue.

Scegliamo un qualunque 2-simplesso  $\sigma_1$  di  $K$ ; questo è omeomorfo ad un triangolo equilatero di  $\mathbb{R}^2$ . Ora scegliamo una qualunque 1-faccia  $\tau$  di  $\sigma_1$ ; per il corollario 1.1.2  $\tau$  è faccia di solamente un altro 2-simplesso, sia esso  $\sigma_2$ . Il sottospazio  $\sigma_1 \cup \sigma_2$  di  $|K|$  è omeomorfo a due triangoli equilateri incollati tra loro lungo un lato; tale spazio è a sua volta omeomorfo ad un quadrato di  $\mathbb{R}^2$ , come si vede in figura 1.2.

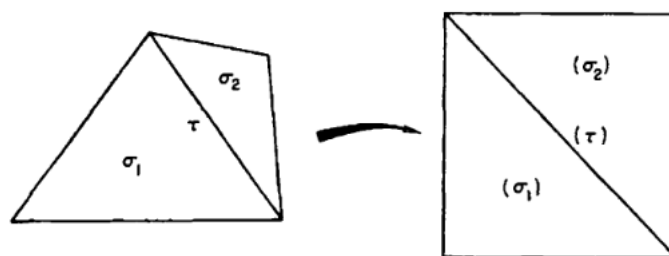


Figura 1.2:

Ripetendo il procedimento, ad un passo generico, avremo  $\sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_m$  omeomorfo ad un poligono regolare di  $\mathbb{R}^2$  con  $(m + 2)$  lati ed alcune coppie di lati in questo poligono

dovranno essere identificate. Infatti ogni lato corrisponde ad un 1-simplesso di  $K$  che è faccia di due 2-simplessi e, se entrambi questi simplessi sono già presenti nel poligono, allora il lato deve essere identificato con un altro lato del poligono. Se invece nel poligono è già presente solo uno dei due 2-simplessi, denotiamo l'altro con  $\sigma_{m+1}$  e costruiamo un poligono regolare di  $(m + 3)$  lati incollando il triangolo corrispondente a  $\sigma_{m+1}$  lungo il lato opportuno. Infine applichiamo a questo spazio un omeomorfismo che lo porta in un poligono regolare di  $\mathbb{R}^2$ .

È chiaro che possiamo continuare ad incollare triangoli e deformare lo spazio ottenuto in un poligono regolare, finché raggiungiamo un poligono  $P$  di  $2n$  lati in cui ogni lato è identificato con un altro.

Così abbiamo dimostrato quasi completamente il teorema; ci rimane solo da provare che tutti i 2-simplessi di  $K$  sono presenti in  $P$ .

Supponiamo per assurdo che  $P$ , con le sue identificazioni, sia omeomorfo al  $|L|$ , dove  $L$  è un sotto-complesso proprio di  $K$ . Scegliamo un vertice di  $L$  ed un vertice di  $K - L$  e congiungiamoli con un cammino di lati; ciò è possibile perché  $|K|$  è connesso per archi. Sia  $a$  l'ultimo vertice del cammino appartenente ad  $L$  e sia  $b$  il vertice successivo ad  $a$  nel cammino di lati, così  $\langle a, b \rangle$  è un 1-simplesso di  $K - L$ . Possiamo ottenere una contraddizione mostrando che  $|Lk_K(a)|$  non è connesso per archi e quindi certamente non ha lo stesso tipo di omotopia di  $S^1$ .

Supponiamo che  $|Lk(a)|$  sia connesso per archi, ossia supponiamo che un qualche vertice in  $Lk(a) \cap L$  possa essere congiunto con  $b$  mediante un cammino di lati in  $Lk(a)$ .

Come prima, denoto con  $c$  l'ultimo vertice del cammino di lati appartenente a  $Lk(a) \cap L$  e con  $d$  il vertice successivo nel cammino, come si vede in figura 1.3.

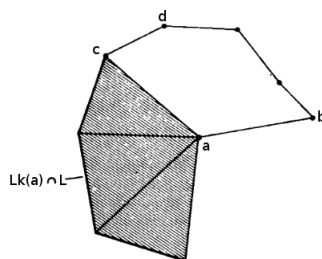


Figura 1.3:

Ora,  $\langle c, d \rangle \in Lk(a)$ , quindi  $\langle a, c, d \rangle$  è un 2-simplesso di  $K - L$ . Dalla costruzione di  $L$  però si evince che ogni 1-simplesso di  $L$ , in particolare anche  $\langle a, c \rangle$ , è faccia di esattamente due 2-simplessi di  $L$ . Quindi  $\langle a, c \rangle$  è faccia di almeno tre 2-simplessi di  $K$ , che è in contraddizione con il corollario 1.1.2. Di conseguenza  $|Lk(a)|$  non può essere connesso per archi e ciò è di nuovo una contraddizione quindi  $L$  deve necessariamente essere l'intero complesso  $K$ .  $\square$

Al fine di completare la trattazione, diamo l'enunciato del teorema di classificazione per le superfici:

**Teorema 1.1.4.** *Sia  $S$  una superficie chiusa e connessa.*

*Allora vale una delle seguenti affermazioni:*

1.  $S \cong S^2$ ,
2.  $\exists g \geq 1$  tale che  $S \cong T_g$ , dove  $T_g$  indica la somma connessa di  $g$  tori,
3.  $\exists g \geq 1$  tale che  $S \cong U_g$ , dove  $U_g$  indica la somma connessa di  $g$  piani proiettivi.

## 1.2 Un esempio: le superfici ottenibili da un esagono

Forniamo ora un esempio di come i due teoremi 1.1.3 e 1.1.4 possano essere utilizzati nello studio delle possibili superfici ottenibili da un esagono con i lati identificati. Prima di affrontare l'esercizio ricordiamo la definizione di un importante invariante per tipo di omotopia degli spazi topologici: *la caratteristica di Eulero*

**Definizione 1.3.** Sia  $X$  una varietà di dimensione  $n$  tale che, per il  $k$ -esimo gruppo di omologia singolare, valga  $H_k(X) \cong 0 \quad \forall k > n$ .

Si definisce **caratteristica di Eulero** di  $X$  il numero

$$\chi(X) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \beta_k(X)$$

dove con  $\beta_k$  si indica il  $k$ -esimo numero di Betti, cioè il rango di  $H_k(X)$ .



Se lo spazio topologico preso in considerazione è triangolabile e  $K$  è una sua triangolazione, abbiamo che la caratteristica di Eulero può essere scritta come segue:

$$\chi(K) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha_k$$

dove  $\alpha_k$  rappresenta il numero di  $k$ -simplessi di  $K$ .

Ovviamente se  $\dim K = n$  avremo  $\alpha_k = 0 \forall k > n$ .

Diamo ora un lemma che ci permette di calcolare la caratteristica di Eulero di una somma connessa:

**Lemma 1.2.1.** *Siano  $M$  ed  $N$  due superfici chiuse triangolate. Allora*

$$\chi(M \# N) = \chi(M) + \chi(N) - 2$$

*Dimostrazione.* Dato che sto lavorando con delle superfici triangolate, nel calcolo della caratteristica di Eulero interverranno solo i vertici, indicati con  $v$ , i lati, indicati con  $e$ , e le facce, indicate con  $f$ .

Sia quindi  $\chi(M \# N) = v - e + f$ .

Per come è definita la somma connessa, posso decidere di tagliare lungo le identificazioni per ottenere  $\tilde{M} = M - \text{int}(D^2)$  e, separatamente,  $\tilde{N} = N - \text{int}(D^2)$ . Nella triangolazione di  $\tilde{M}$  e  $\tilde{N}$  il bordo del disco mancante è un poligono con  $p$  vertici e  $p$  lati.

Quindi ora ho  $v + p$  vertici,  $e + p$  lati ed  $f$  facce.

Ora riempio il buco nelle due superfici per riottenere  $M$  ed  $N$  e lo triangolo utilizzando un numero  $q$  di 1-simplessi così da avere  $v + p$  vertici,  $e + p + 2q$  lati ed  $f + 2(q + 1)$  facce. Quindi

$$\chi(M) + \chi(N) = (v + p) - (e + p + 2q) + (f + 2(q + 1)) = v - e + f + 2 = \chi(M \# N) + 2$$

□

**Esempio 1.1.** • **La sfera**  $\chi(S^2) = 2$

- **Somma connessa di  $g$  tori.** Dato che  $\chi(T) = 0$  ed ho  $(g - 1)$  somme connesse, ottengo  $\chi(T_g) = 2 - 2g$ .

- **Somma connessa di  $g$  piani proiettivi.** Dato che  $\chi(\mathbb{RP}^2) = 1$  ed ho sempre  $(g - 1)$  somme connesse, ottengo  $\chi(U_g) = 2 - g$ .

Siamo ora pronti ad affrontare lo studio delle possibili superfici presentate da un esagono regolare  $E$  con i lati identificati a coppie; al variare delle identificazioni avremo come risultato delle superfici diverse. Iniziamo supponendo che sui lati ci siano delle identificazioni come quelle in figura 1.4.

Dato che nessuna identificazione inverte l'orientazione dei lati, abbiamo che la superficie presentata in questo caso sarà orientabile poiché non contiene un nastro di Moebius. Per quanto riguarda la caratteristica di Eulero, in questo caso ho, a causa delle identificazioni, tre lati e due vertici, indicati con i numeri 1 e 2 in figura 1.4. Quindi  $\chi(E) = 2 - 3 + 1 = 0$ ; essendo la superficie presentata dall'esagono orientabile, l'unica possibilità che abbiamo è che sia un toro.

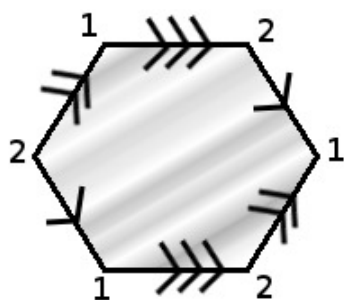


Figura 1.4: Nessuna identificazione inverte l'orientazione

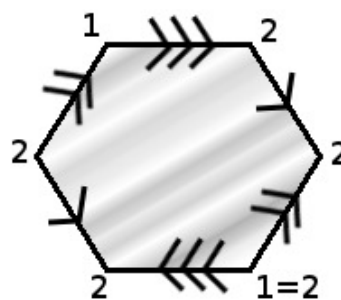


Figura 1.5: Una identificazione inverte l'orientazione

Supponiamo ora che una delle identificazioni inverte l'orientazione. Di conseguenza il poligono ha solamente un vertice, come si vede dal calcolo in Fig.1.5; quindi  $\chi(E) = -1$ . Inoltre, a differenza del caso precedente, la superficie contiene un nastro di Moebius quindi non è orientabile. L'unica possibilità è quindi che sia una somma connessa di piani proiettivi: quanti? Eguagliando la caratteristica di Eulero dell'esagono e quella di  $U_g$  otteniamo  $g = 3$ ; quindi la superficie presentata è  $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ .

Procediamo considerando il caso in cui due identificazioni invertono l'orientazione, Fig. 1.6, e poi il caso in cui tutte e tre le identificazioni invertono l'orientazione, Fig. 1.7.

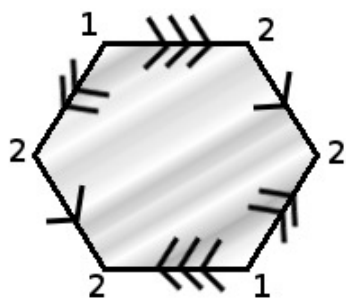


Figura 1.6: Due identificazioni  
invertono l'orientazione

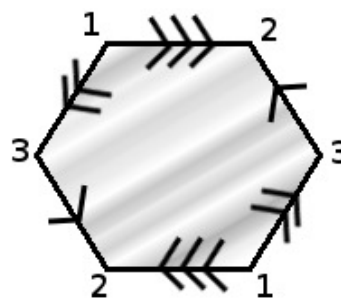


Figura 1.7: Tutte le identificazio-  
ni invertono l'orientazione

In entrambi i casi la superficie presentata non è orientabile, quindi è una somma connessa di piani proiettivi; la differenza nel numero degli addendi della somma ci sarà data dalla caratteristica di Eulero dell'esagono, nei due casi distinti.

Nel caso presentato dalla 1.6 il poligono risulta avere due vertici distinti quindi  $\chi(E) = 0$  e dunque la superficie è una somma connessa di due piani proiettivi:  $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ .

Invece, nel caso presentato dalla figura 1.7, il poligono ha 3 vertici distinti quindi la sua caratteristica di Eulero è 1: la superficie è proprio  $\mathbb{RP}^2$ .



# Capitolo 2

## Varietà tridimensionali e poliedri

### 2.1 Caratteristica di Eulero di una varietà con dimensione dispari

Lo scopo di questa sezione è dimostrare che, se  $M$  è una varietà di dimensione dispari, allora la sua caratteristica di Eulero è nulla.

Fondamentale in questa dimostrazione è l'utilizzo di un altro invariante per tipo di omotopia; la *coomologia*. Sarà quindi necessario definire la coomologia ed illustrare il suo legame con l'omologia. Infine, come ultimo strumento usato nella dimostrazione, enunceremo il teorema di Dualità di Poincaré.

In tutta la sezione indicheremo con  $C_k(X; R)$  e con  $C^k(X; R)$  i gruppi di  $k$ -catene e  $k$ -cocatene a coefficienti in  $R$ ; analogamente per i gruppi di omologia e coomologia. Per quanto riguarda l'omologia a coefficienti arbitrari si rimanda al paragrafo 3.A di [4].

#### 2.1.1 Coomologia

Dato uno spazio  $X$  ed un gruppo abeliano  $G$ , definiamo il gruppo  $C^k(X; G)$  delle  **$k$ -cocatene singolari** a coefficienti in  $G$  come il gruppo  $Hom(C_k(X); G)$ , il duale del gruppo delle  $k$ -catene singolari  $C_k(X)$ .

La **mappa cobordo**  $\delta : C^k(X; G) \rightarrow C^{k+1}(X; G)$  è la mappa duale  $\partial^*$ , quindi presa una cocatena  $\varphi \in C^k(X; G)$ , il suo cobordo  $\delta\varphi$  è la composizione

$$C_{k+1}(X) \xrightarrow{\partial} C_k(X) \xrightarrow{\phi} G.$$

Da questa definizione si ha automaticamente che  $\delta^2 = 0$ , essendo  $\delta$  la mappa duale di  $\partial$ . Di conseguenza è possibile definire il **gruppo di coomologia**  $H^k(X; G)$  a coefficienti in  $G$  come il quoziente  $\ker\delta/Im\delta$  a  $C^k(X; G)$  nel seguente complesso di cocatene:

$$\dots \leftarrow C^{k+1}(X; G) \xleftarrow{\delta} C^k(X; G) \xleftarrow{\delta} C^{k-1}(X; G) \leftarrow \dots$$

Gli elementi di  $\ker\delta$  sono detti **cocicli** e gli elementi di  $Im\delta$  sono i **cobordi**.

Per quanto riguarda il legame tra omologia e coomologia, enunciamo il seguente teorema (Corollario 3.3 in [4]):

**Teorema 2.1.1.** *Se i gruppi di omologia  $H_n$  e  $H_{n-1}$  di un complesso di catene libero  $C$  sono finitamente generati, allora, indicando i sottogruppi di torsione rispettivamente con  $T_n$  e  $T_{n-1}$ , si ha il seguente isomorfismo:*

$$H^n(C; \mathbb{Z}) \approx (H_n/T_n) \oplus T_{n-1}$$

## 2.1.2 Dualità di Poincaré

**Definizione 2.1.** Per uno spazio arbitrario  $X$  e un anello di coefficienti  $R$ , definiamo la mappa  $R$ -bilineare, detta **prodotto cap**,

$$\frown : C_k(X; R) \times C^l(X; R) \longrightarrow C_{k-l}(X; R)$$

per  $k \geq l$ , come segue:

$$\sigma \frown \varphi = \varphi(\sigma | [v_0, \dots, v_l]) \sigma | [v_l, \dots, v_k]$$

per ogni  $\sigma : \Delta^k \longrightarrow X$  e  $\varphi \in C^l(X; R)$ .

Per quanto riguarda omologia e coomologia, è possibile vedere che il prodotto cap induce la seguente applicazione

$$H_k(X; R) \times H^l(X; R) \xrightarrow{\frown} H_{k-l}(X; R)$$

che è  $R$ -lineare in ogni variabile.

Per una trattazione approfondita si rimanda al paragrafo 3.3.b di [4].

Illustriamo ora il teorema di Dualità di Poincaré omettendone la dimostrazione; l'enunciato è tratto dal teorema 3.30 in [4].

**Teorema 2.1.2.** *Se  $M$  è una  $n$ -varietà chiusa, connessa ed orientabile, con classe fondamentale  $[M] \in H_n(M)$ , allora la mappa*

$$D : H^k(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n-k}(M)$$

*definita da  $D(\alpha) = [M] \frown \alpha$ , è un isomorfismo per ogni  $k$ .*

Il teorema può essere enunciato, con i dovuti accorgimenti, anche utilizzando un generico anello  $R$  al posto di  $\mathbb{Z}$ . In particolare, nella dimostrazione del teorema 2.1.3, nel caso di una varietà non orientabile, useremo la versione che coinvolge  $\mathbb{Z}_2$  come campo dei coefficienti.

*Osservazione 2.* Per particolari tipi di varietà, le varietà combinatorie, esiste una dimostrazione geometrica della dualità di Poincaré che utilizza la nozione di *struttura cellulare duale*. Le radici di questa idea possono essere ritrovate nei cinque solidi Platonici, che sono gli unici poliedri regolari presenti in dimensione tre: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Ognuno di questi poliedri ha un poliedro duale i cui vertici sono i punti centrali delle facce del poliedro iniziale. Di conseguenza il duale del cubo è l'ottaedro e viceversa. Analogamente il dodecaedro e l'icosaedro sono duali l'uno dell'altro. Rimane solo il tetraedro, che è il duale di se stesso. È possibile ottenere ognuno di questi poliedri definendo una struttura cellulare  $C$  su  $S^2$ , che abbia come struttura cellulare duale  $C^*$  quella determinata dal poliedro duale. In questo modo ogni vertice di  $C$  giace in una 2-cella duale di  $C^*$ , ogni lato di  $C$  attraversa un lato duale di  $C^*$  ed ogni 2-cella di  $C$  contiene un vertice duale di  $C^*$ . In figura 2.1 si vede tale costruzione nel caso della coppia cubo-ottaedro.

L'aspetto fondamentale di questa trasformazione è che, nel passaggio da una cella alla sua duale, si “invertano” cobordo e bordo. Di conseguenza, con qualche particolare accorgimento di tipo algebrico, è possibile giungere all'isomorfismo espresso dal teorema di dualità 2.1.2.

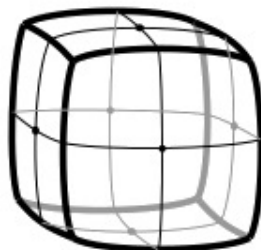


Figura 2.1: Dualità cubo-ottaedro

### 2.1.3 Varietà di dimensione dispari

Possiamo ora dimostrare il teorema che ci fornisce il valore della caratteristica di Eulero di una varietà con dimensione dispari.

**Teorema 2.1.3.** *Una varietà chiusa di dimensione dispari ha caratteristica di Eulero zero.*

*Dimostrazione.* Sia  $M$  una  $n$ -varietà chiusa.

Se  $M$  è orientabile allora il teorema 2.1.2 ci assicura che  $\text{rank}H_i(M; \mathbb{Z}) = \text{rank}H^{n-i}(M; \mathbb{Z})$ .

Quest'ultimo però è uguale al  $\text{rank}H_{n-i}(M; \mathbb{Z})$  per il teorema 2.1.1.

Di conseguenza, se  $n$  è dispari, si ottiene:

$$\sum_i (-1)^i \text{rank}H_i(M; \mathbb{Z}) = \beta_0 - \beta_1 + \dots + \beta_{n-1} - \beta_n = \beta_0 - \beta_1 + \dots + \beta_1 - \beta_0 = 0$$

Se invece  $M$  non è orientabile, possiamo utilizzare le medesime argomentazioni cambiando però l'anello dei coefficienti; passiamo al campo  $\mathbb{Z}_2$ . In questo caso il  $\text{rank}H_i(M; \mathbb{Z})$  è sostituito con  $\dim H_i(M; \mathbb{Z}_2)$ , cioè la dimensione di  $H_i(M)$  come spazio vettoriale su  $\mathbb{Z}_2$ . Giungiamo quindi alla conclusione che  $\sum_i (-1)^i \dim H_i(M; \mathbb{Z}_2) = 0$ . Rimane solo da dimostrare che tale somma equivale alla caratteristica di Eulero  $\sum_i (-1)^i \text{rank}H_i(M; \mathbb{Z})$ . Possiamo dimostrare l'equivalenza utilizzando l'isomorfismo  $H_i(M; \mathbb{Z}_2) \cong H^i(M; \mathbb{Z}_2)$  e il teorema dei coefficienti universali per la coomologia (per il quale si rimanda al paragrafo 3.1.a di [4]).



Infatti ogni addendo  $\mathbb{Z}$  in  $H_i(M; \mathbb{Z})$  dà una copia di  $\mathbb{Z}_2$  che deve essere sommata in  $H^i(M; \mathbb{Z}_2)$ . Ogni addendo  $\mathbb{Z}_m$  di  $H_i(M; \mathbb{Z})$ , con  $m$  pari, dà una copia di  $\mathbb{Z}_2$  come addendo di  $H^i(M; \mathbb{Z}_2)$  ed anche come addendo di  $H^{i+1}(M; \mathbb{Z}_2)$ , i cui contributi nella somma  $\sum_i (-1)^i \dim H_i(M; \mathbb{Z}_2)$  si cancellano. Infine ogni addendo  $\mathbb{Z}_m$  di  $H_i(M; \mathbb{Z})$ , con  $m$  dispari, non contribuisce alla costruzione di  $H^i(M; \mathbb{Z}_2)$  per alcun  $i$ .  $\square$

## 2.2 Presentazione di 3-varietà mediante poliedri

Il risultato dimostrato nella sezione precedente non è, in generale, invertibile. Infatti non è detto che se uno spazio di dimensione dispari ha caratteristica di Eulero nulla allora sia una varietà.

Ciò che ci apprestiamo a dimostrare in questo paragrafo e che rappresenta lo scopo principale dell'elaborato, è il fatto che, per quanto riguarda le varietà tridimensionali, è possibile dare una loro presentazione mediante poliedri e, grazie ciò, invertire il risultato 2.1.3 per questa specifica dimensione.

Iniziamo richiamando alcune definizioni.

**Definizione 2.2.** Dato un complesso simpliciale finito  $(n-1)$ -dimensionale  $A^{n-1}$ , è possibile ottenere un complesso  $n$ -dimensionale detto **stella simpliciale**  $St^n$  nel modo seguente: scegliamo un vertice addizionale  $O$  e congiungiamo ogni  $i$ -simpleso  $\langle v_0, \dots, v_i \rangle$  con  $O$  creando un  $(i+1)$ -simpleso  $\langle O, v_0, \dots, v_i \rangle$ .

Il punto  $O$  è detto **centro** e il complesso  $A^{n-1}$  è detto **bordo esterno** della stella.

**Esempio 2.1.** • Tutti i semplici di un complesso simpliciale aventi un vertice in comune formano una stella simpliciale.

- Come altro esempio di stella simpliciale riportiamo la figura 2.2; il centro della stella è il punto  $O$  mentre il complesso di partenza è evidenziato in nero.

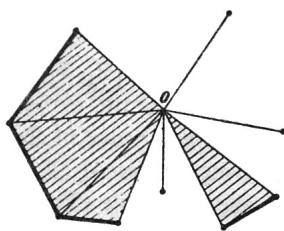


Figura 2.2: Esempio di stella simpliciale

*Osservazione 3.* Volendo calcolare la caratteristica di Eulero di una stella simpliciale è necessario fare il seguente ragionamento.

Indichiamo con  $\alpha^i$  il numero di  $i$ -simplessi dell' $(n-1)$ -complesso di partenza e con  $\bar{\alpha}^i$  il numero di  $i$ -simplessi della stella  $St^n$ . Dato che per creare la stella aggiungo un vertice al complesso, avrò  $\bar{\alpha}^0 = \alpha^0 + 1$ . Per quanto riguarda gli altri  $k$ -simplessi, con  $k \leq (n-1)$ , invece abbiamo che  $\bar{\alpha}^k = \alpha^k + \alpha^{k-1}$ . Infine, per gli  $n$ -simplessi della stella ho  $\bar{\alpha}^n = \alpha^{n-1}$ . Di conseguenza la caratteristica di Eulero di una stella simpliciale è uguale a 1.

*Osservazione 4.* Notiamo inoltre che ogni regione convessa  $n$ -dimensionale di  $\mathbb{E}^n$ , il cui bordo sia un complesso costituito da  $(n-1)$ -simplessi, può essere utilizzata per costruire una stella simpliciale: è sufficiente tracciare la proiezione dei simplessi a partire da un punto interno alla regione considerata.

Diamo ora una definizione formale di *poliedro solido* che ci permetterà di procedere con la costruzione della presentazione della 3-varietà.

**Definizione 2.3.** Un **poliedro solido tridimensionale** è una 3-palla chiusa il cui bordo  $B$  è suddiviso in “poligoni” che soddisfino le seguenti condizioni:

1. ogni poligono ha almeno due lati e due vertici,
2. ogni punto di  $B$  appartiene almeno ad un poligono,
3. due poligoni sono disgiunti o hanno dei lati o dei vertici in comune, di conseguenza sono escluse eventuali auto-intersezioni.

**Esempio 2.2.** Grazie alla definizione 2.3 possiamo etichettare come poliedri non solo i solidi che comunemente immaginiamo, come il dodecaedro o il cubo, ma anche una 3-palla il cui bordo è diviso in due emisferi e sull'equatore sono fissati almeno due vertici.

Lavoriamo ora sul poliedro solido  $a^3$  al fine di ottenere un complesso simpliciale; attuiamo una suddivisione baricentrica.

Inizialmente decomponiamo ogni lato del poliedro fissandone il baricentro, così da avere due 1-simplessi. Più precisamente, ciò che stiamo costruendo è un omeomorfismo tra una stella simpliciale  $St^1$  e il lato del poliedro. Ripetendo il procedimento per ogni lato di una faccia  $f^2$ , avremo che il bordo di tale faccia diventerà un complesso simpliciale omeomorfo alla circonferenza. Scegliamo ora una stella simpliciale  $St^2$  il cui bordo esterno sia suddiviso come il bordo di  $f^2$  e creiamo un omeomorfismo tra la stella e la faccia del poliedro, cosicché la suddivisione del bordo di  $St^2$  ricopra quella del bordo di  $f^2$ . In questo modo la stessa faccia  $f^2$  diventa una stella simpliciale.

Procedendo in maniera analoga per ogni faccia del poliedro, riusciamo a trasformare il bordo del poliedro solido in un complesso simpliciale. Scegliamo infine una stella simpliciale  $St^3$ , il cui bordo esterno sia suddiviso come il bordo del poliedro, e creiamo un omeomorfismo tra questa stella e  $a^3$  in modo che le suddivisioni dei due bordi coincidano. Alla fine di questo procedimento avremo, da una parte, il poliedro solido iniziale e dall'altra la sua suddivisione baricentrica.

Cominciamo quindi con le identificazioni. Supponiamo di associare le facce del poliedro a coppie e richiediamo che tali associazioni siano degli omeomorfismi che mandano vertici in vertici e lati in lati; come conseguenza di questa prima richiesta abbiamo che le facce identificate devono avere lo stesso numero di vertici.

Inoltre richiediamo che i sottosimplessi delle rispettive suddivisioni di due facce associate siano mandati gli uni negli altri. Infine supponiamo che le identificazioni non mandino mai un lato orientato in se stesso, con l'orientazione opposta; così facendo non permettiamo che i punti interni di un lato siano tra loro equivalenti.

Notiamo che è possibile ottenere un complesso simpliciale dal poliedro solido mediante l'identificazione dei punti equivalenti. Per quanto riguarda però la suddivisione baricentrica del poliedro, avremo che questa non si trasforma in un complesso simpliciale perché alcuni sottosimplessi non equivalenti in  $a^3$  potrebbero avere vertici equivalenti. Quindi

dopo le identificazioni potremmo avere due semplici differenti con gli stessi vertici e ciò viola la definizione di complesso simpliciale.

Fortunatamente possiamo risolvere questo problema attuando una seconda suddivisione baricentrica prima di effettuare le associazioni; otteniamo così il complesso  $A^3$ .

Un risultato importante di questa costruzione è il fatto che il complesso  $A^3$  è univocamente determinato, a meno di omeomorfismi, dallo schema del poliedro, cioè dalla lista dei suoi vertici, lati, facce e associazioni.

In generale  $A^3$  non sarà una varietà, quando si applicano delle identificazioni arbitrarie sulle facce del poliedro. Quindi possiamo porci la seguente domanda: quali sono le condizioni da soddisfare affinché  $A^3$  sia una 3-varietà?

Notiamo subito che i punti in cui può non essere verificata l'ipotesi di omogeneità, propria delle varietà, sono i vertici del poliedro  $v_1, v_2, \dots, v_{\alpha^0}$ . Infatti se  $P$  è un punto interno al poliedro, allora esiste banalmente un intorno di  $P$  omeomorfo ad una 3-palla. Se  $P'$  è un punto interno ad una faccia  $f'$  e  $P''$  è il punto corrispondente nella faccia  $f''$  associata ad  $f'$ , allora possiamo scegliere due mezze palle, intorni di  $P'$  e  $P''$ , che dopo le identificazioni vanno a formare un'intera copia di  $D^3$ . Infine se  $e_1, \dots, e_r$  sono un insieme di lati equivalenti e  $P_1, \dots, P_r$  sono dei loro punti interni rispettivamente, allora possiamo scegliere dei settori sferici, intorni di questi punti, che dopo le identificazioni formino una palla. Se invece  $P$  è uno dei vertici del poliedro allora è possibile che un suo intorno sia una superficie chiusa.

Dimostriamo quindi il teorema che dà una risposta alla nostra domanda e che ci offre un utile criterio per riconoscere una varietà, quando ci è presentata da un poliedro con le facce identificate.

**Teorema 2.2.1.** *Un complesso,  $A^3$ , ottenuto identificando le facce di un poliedro è una varietà se e solo se la sua caratteristica di Eulero  $N$  è zero.*

*Dimostrazione.* La condizione che  $A^3$  sia ottenuto da un poliedro con facce identificate a coppie implica, come mostrato sopra, che  $A^3$  sia non omogeneo solo in un numero finito di punti,  $v_1, v_2, \dots, v_{\alpha^0}$ , e che gli intorni di tali punti sono superfici chiuse.

Grazie alla doppia suddivisione baricentrica abbiamo che  $v_1, \dots, v_{\alpha^0}$  sono vertici rispettivamente delle stelle simpliciali  $St_1^3, \dots, St_{\alpha^0}^3$  e queste sono tra loro disgiunte. Il bordo esterno  $U_i$  di  $St_i^3$  è una superficie chiusa la cui caratteristica di Eulero sarà indicata con

$N_i$ , per ogni  $i = 1, \dots, \alpha^0$ . Dimostriamo che dall'ipotesi  $N = 0$  segue che  $N_i = 2$  così, non solo il bordo della stella tridimensionale è una superficie, ma ha anche caratteristica di Eulero pari a 2 quindi è omeomorfa a  $S^2$ . Di conseguenza la stella tridimensionale risulta avere bordo omeomorfo a  $S^2$ , quindi essa stessa è un  $D^3$ , cioè si ha omogeneità anche nei vertici del poliedro.

Verifichiamo dunque che  $N_i = 2$ .

Sia  $\bar{A}^3$  il complesso formato da  $A^3$  togliendo le stelle simpliciali  $St_1^3, \dots, St_{\alpha^0}^3$  ma lasciando i loro bordi esterni. Così facendo,  $\bar{A}^3$  è un complesso tridimensionale il cui bordo è formato dalle superfici  $U_i$ . La caratteristica di Eulero di questo complesso è

$$\chi(\bar{A}^3) = N + \sum_{i=1}^{\alpha^0} (N_i - 1)$$

perché, per ogni stella tolta, bordo compreso, la caratteristica diminuisce di 1 per l'osservazione 3, ma dato che i bordi vengono reinseriti nel complesso, si ha che per ogni  $i$  la caratteristica aumenta di  $N_i$ . Consideriamo ora il complesso  $\bar{A}_2^3$ , formato mediante l'identificazione di punti corrispondenti sul bordo di due copie di  $\bar{A}^3$ . La caratteristica di Eulero di questo complesso sarà quindi il doppio di quella di  $\bar{A}^3$ , meno la caratteristica delle intersezioni, cioè

$$\chi(\bar{A}_2^3) = 2N + 2 \sum_{i=1}^{\alpha^0} (N_i - 1) - \sum_{i=1}^{\alpha^0} N_i = 2N + \sum_{i=1}^{\alpha^0} (N_i - 2) \quad (2.1)$$

Osserviamo ora che  $\bar{A}_2^3$  è omogeneo in ogni punto. Infatti i vertici del poliedro, in cui sapevamo che l'omogeneità era violata, sono stati eliminati togliendo le stelle simpliciali. Per quanto riguarda i bordi  $U_i$  si ha comunque l'omogeneità grazie alle identificazioni fatte proprio per creare  $\bar{A}_2^3$ . Di conseguenza  $\bar{A}_2^3$  è una varietà tridimensionale e per il teorema 2.1.3 ha caratteristica di Eulero nulla. Inoltre  $N = 0$  quindi l'equazione 2.1 diventa

$$\sum_{i=1}^{\alpha^0} (N_i - 2) = 0$$

Di conseguenza, dato che ogni termine non può essere minore di zero, abbiamo il risultato cercato, ossia  $N_i = 2$ .  $\square$



# Capitolo 3

## Esempi e controesempi

### 3.1 Poliedri regolari

In questa sezione vedremo come sia possibile applicare il teorema 2.2.1 per riconoscere alcune varietà tridimensionali presentate da poliedri con facce identificate a coppie. Il primo esempio che presentiamo è lo spazio dodecaedrico di Poincaré. Esso è costituito da un dodecaedro in cui ogni faccia è identificata con la sua opposta ruotata di un decimo di angolo giro, ossia  $\pi/5$ ; il senso di rotazione è fissato e comune a tutte le identificazioni. Così facendo sono rispettate le condizioni sulle associazioni richieste nel capitolo precedente. Inoltre, volendo applicare il teorema, possiamo calcolare la caratteristica di Eulero contando esplicitamente il numero di vertici, lati e facce presenti dopo le identificazioni.

Per quanto riguarda i vertici, si ha che vengono raggruppati in 5 distinte classi di equivalenza, ognuna con 4 vertici. I lati sono raggruppati in 10 classi mentre le facce, essendo identificate a coppie, sono raggruppate in 6 classi. Quindi, indicando con  $D$  lo spazio ottenuto dal dodecaedro con le identificazioni, si ha:

$$\chi(D) = 5 - 10 + 6 - 1 = 0$$

Di conseguenza,  $D$  presenta una varietà tridimensionale.

Nonostante non si conoscesse ancora la possibilità di presentarla usando il dodecaedro, questa varietà fu studiata dallo stesso Poincaré poiché possiede gli stessi gruppi di omologia della sfera  $S^3$ ; ciò aveva una rilevanza notevole per il matematico in quanto, fino a

quel momento, si era creduto che l'unica 3-varietà con l'omologia della 3-sfera fosse  $S^3$  stessa.

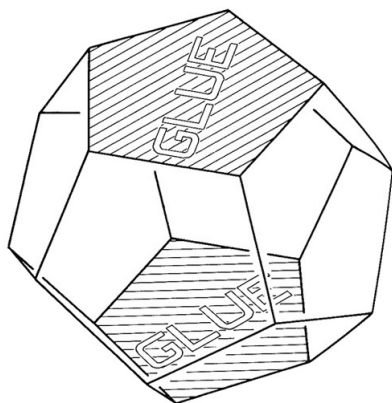


Figura 3.1: Spazio dodecaedrico di Poincaré

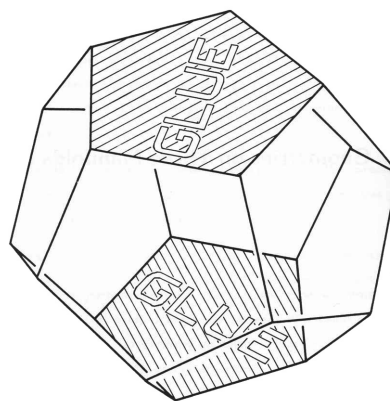


Figura 3.2: Spazio di Seifert-Weber

Un'ultima osservazione che si può fare sullo spazio dodecaedrico di Poincaré è che possiede la geometria omogenea della 3-sfera, ossia una geometria tridimensionale ellittica. Volendo lavorare ancora con il dodecaedro, è possibile definire delle nuove identificazioni per ottenere una varietà con una geometria iperbolica; lo *spazio di Seifert-Weber*.

Consideriamo nuovamente il dodecaedro ma questa volta identifichiamo ogni faccia con la sua opposta ruotata di tre decimi di un angolo giro, ossia  $3\pi/5$ . In questo caso tutti i vertici sono identificati e formano un'unica classe di equivalenza; per quanto riguarda i lati, questi sono invece raggruppati in 6 classi distinte. Quindi nuovamente abbiamo  $\chi(D_2) = 1 - 6 + 6 - 1 = 0$  e ciò ci assicura che lo spazio preso in considerazione è una varietà.

Consideriamo ora degli altri solidi regolari, in particolare studiamo tre esempi: il tetraedro, il cubo e l'ottaedro.

### 1. Tetraedro

Consideriamo un tetraedro con le identificazioni presentate in figura 3.3. Tali associazioni rispettano le richieste del secondo capitolo e raggruppano tutti i vertici del tetraedro in un'unica classe di equivalenza. I lati sono raggruppati in due classi



distinte e, analogamente, le facce. Di conseguenza la caratteristica di Eulero sarà nulla, quindi lo spazio ottenuto è una varietà. Ciò è osservabile anche analizzando il tetraedro stesso. Infatti per i punti interni è sempre possibile trovare un intorno omeomorfo ad una palla  $D^3$  e per ogni punto sulle facce posso prendere una mezza palla, che sia intorno del punto, in modo da ottenere, dopo le identificazioni, un intero  $D^3$  come intorno. Infine per quanto riguarda i punti sui lati o i vertici del tetraedro, è possibile considerare come intorni degli spicchi che dopo le identificazioni si uniscono a formare una palla.

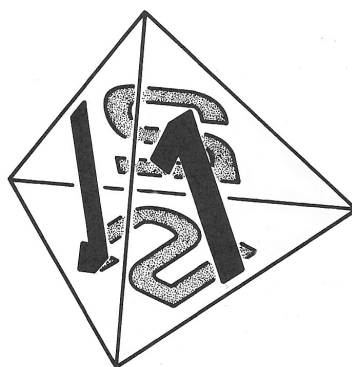


Figura 3.3: Tetraedro

## 2. Cubo

Consideriamo ora un cubo in cui ogni faccia è identificata con quella opposta ruotata in senso orario di  $\pi/2$ , come si vede in figura 3.4. Le associazioni raggruppano gli otto vertici del cubo in due classi distinte mentre i lati vanno a formare quattro classi distinte; come sempre il numero di facce invece si dimezza. Quindi, indicando con  $C$  il cubo con le identificazioni, abbiamo  $\chi(C) = 2 - 4 + 3 - 1 = 0$ . La varietà presentata dal cubo  $C$  è chiamata *varietà quaternionica*. Questo nome deriva dal fatto che le simmetrie di tale varietà possono essere modellate utilizzando i quaternioni; un sistema numerico simile a quello dei numeri complessi ma con tre unità

immaginarie invece di una sola.

Se invece consideriamo delle identificazioni che associano ad ogni faccia del cubo la sua opposta, senza però ruotarla, otteniamo un'altra varietà: il  $\mathcal{B}$ -toro. Infatti proprio come è possibile formare un toro  $T^2$  da un quadrato con i lati opposti identificati, è possibile formare un toro  $T^3$  da un cubo. Inoltre il cubo con le facce opposte identificate ha un solo vertice, tre lati e tre facce, quindi la sua caratteristica di Eulero è nulla.

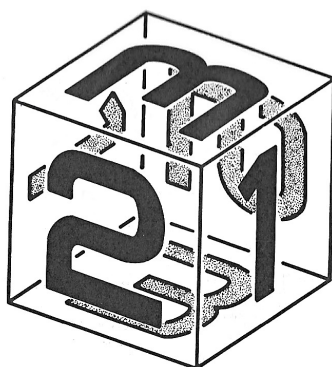


Figura 3.4: Varietà quaternionica

### 3. Ottaedro

Come ultimo esempio di solido regolare, consideriamo un ottaedro in cui ogni faccia è identificata con l'opposta ruotata in senso orario di un angolo con ampiezza  $\pi/3$ . Anche in questo caso le associazioni ci portano ad avere una varietà tridimensionale, detta *spazio ottaedrico*. Infatti il solido, dopo le identificazioni avrà un solo vertice, quattro lati distinti e quattro facce, dunque la caratteristica di Eulero risulterà nulla.

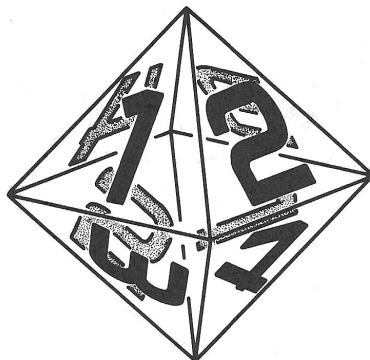


Figura 3.5: Spazio Ottaedrico

## 3.2 Spazi lenticolari

In questa sezione presentiamo un esempio leggermente diverso dai precedenti in quanto il poliedro considerato non avrà dei lati rettilinei, bensì curvi. Le varietà presentate da questi poliedri sono dette spazi lenticolari.

Definiamo *lente* una regione dello spazio tridimensionale racchiusa tra due calotte sferiche che si intersecano in una circonferenza detta equatore. Supponiamo ora di dividere il cerchio equatoriale in  $p$  archi uguali; in questo modo le due calotte diventano due  $p$ -poligoni che denotiamo con  $f'$  ed  $f''$ . Otteniamo così un poliedro con due facce,  $p$  vertici e  $p$  lati.

A questo punto è possibile definire le associazioni sulle facce  $f'$  ed  $f''$  come si preferisce: ad esempio, possiamo riflettere la faccia  $f'$  rispetto al piano passante per l'equatore al fine di farla corrispondere con la calotta superiore  $f''$ . Più in generale, è possibile supporre che la riflessione segua una rotazione di una delle due calotte in se stessa; l'angolo di rotazione è ampio  $2\pi q/p$  radianti e definisce univocamente le associazioni sui punti delle due facce. Inoltre non è restrittivo assumere che i due interi  $p$  e  $q$  siano primi tra loro e che  $0 \leq q \leq p/2$  poiché non è rilevante, ai fini del risultato, che la rotazione avvenga

in senso orario o antiorario. Dopo le identificazioni, i  $p$  vertici e i lati, in cui è stato suddiviso l'equatore, diventano equivalenti così si ottiene che  $\alpha^0 = \alpha^1 = \alpha^2 = \alpha^3 = 1$ . Di conseguenza, la caratteristica di Eulero dello spazio presentato è nulla. L'omogeneità di tale spazio è verificabile in ogni suo punto e questo fa di lui una varietà detta *spazio lenticolare*  $L(p, q)$ .

Nel caso  $p = 2$  le associazioni diventano identificazioni tra punti antipodali quindi la varietà risultante  $L(2, 1)$  è lo spazio proiettivo  $\mathbb{P}^3$ . Per  $p = 1$  la lente non diventa un poliedro poiché si viola la prima condizione nella definizione di poliedro: infatti il lato presenta un'autointersezione.

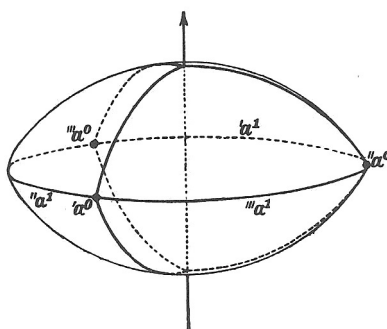


Figura 3.6: Esempio di spazio lenticolare  $L(3,1)$

Infine ricordiamo che, attualmente, gli spazi lenticolari sono classificati sia a meno di equivalenze omotopiche che a meno di omeomorfismi. Il primo risultato è stato raggiunto da J.H.C. Whitehead nel 1941 mentre al secondo problema fu data una risposta definitiva da K. Reidemeister nel 1935.

**Teorema 3.2.1.** *Dati due spazi lenticolari  $L(p, q_1)$  ed  $L(p, q_2)$  valgono le seguenti equivalenze:*

$$L(p, q_1) \simeq L(p, q_2) \Leftrightarrow \pm q_1 q_2 \equiv n^2 \pmod{p} \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}$$

$$L(p, q_1) \cong L(p, q_2) \Leftrightarrow q_2 = \pm q_1^{\pm 1} \pmod{p}$$

### 3.3 Un controesempio in dimensione 5

In quest'ultima sezione si vuole dare un controesempio al teorema 2.2.1. Infatti, come dimostrato in precedenza, tutte le varietà di dimensione dispari hanno caratteristica di Eulero nulla ma questa asserzione è invertibile solo in dimensione tre. L'obiettivo che ci si pone ora è dunque quello di presentare un complesso simpliciale la cui caratteristica di Eulero sia nulla ma che non sia una varietà combinatoria.

A tal fine cominciamo con la definizione di *sospensione* di uno spazio topologico.

**Definizione 3.1.** Dato uno spazio topologico  $X$ , la sua **sospensione**  $S(X)$  è il quoziente del *cilindro*  $C(X) := X \times [-1, 1]$  di  $X$  mediante la relazione di equivalenza che ha come uniche classi non banali quella del Polo Nord, costituita da tutti i punti del tipo  $(x, 1)$ , e quella del Polo Sud, costituita da tutti i punti del tipo  $(x, -1)$ .

Più semplicemente, nel caso di un complesso simpliciale  $K$ , possiamo costruire la sospensione nel modo seguente: consideriamo due vertici aggiuntivi e per ogni  $i$ -simplesso di  $K$  tracciamo due  $(i+1)$ -simplessi, ognuno formato congiungendo l' $i$ -simplesso con uno dei due vertici aggiunti.

Quindi, intuitivamente, fare una sospensione di un complesso simpliciale equivale a considerare due stelle simpliciali distinte che si intersecano nel bordo esterno, cioè il complesso stesso, che è comune ad entrambe. Di conseguenza, proprio come nel caso delle stelle simpliciali, se  $K$  è un  $n$ -complesso allora la sua sospensione  $S(K)$  sarà un  $(n+1)$ -complesso. Inoltre, per quanto riguarda la caratteristica di Eulero, si ha che  $\chi(S(K)) = 2 - \chi(K)$ . Dato che il nostro obiettivo finale è quello di costruire un complesso 5-dimensionale con caratteristica di Eulero nulla, possiamo considerare un complesso 4-dimensionale  $K$  tale che  $\chi(K) = 2$ ; in questo modo, la sua sospensione sarà un complesso 5-dimensionale con caratteristica zero.

Consideriamo quindi lo spazio 4-dimensionale  $S^2 \times \mathbb{RP}^2$ . In questo modo, dato che la caratteristica di Eulero di un prodotto cartesiano è il prodotto delle due caratteristiche, abbiamo che  $\chi(S^2 \times \mathbb{RP}^2) = \chi(S^2) \cdot \chi(\mathbb{RP}^2) = 2 \cdot 1 = 2$ .

Ognuno dei due fattori nel prodotto può essere presentato come un disco  $D^2$  con delle identificazioni; di conseguenza anche il loro prodotto cartesiano può essere presentato come prodotto dei due poligoni, cioè un politopo 4-dimensionale  $P_4$ , poiché  $D^2 \times D^2 = D^4$ .

Per quanto riguarda le identificazioni su  $P_4$ , abbiamo che queste sono indotte dalle associazioni presenti sui due poligoni. Indicando con  $R_1$  la relazione di equivalenza sul poligono che presenta  $S^2$  e con  $R_2$  quella sul poligono che presenta  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ , allora possiamo considerare una relazione  $\rho$ , che risulta di equivalenza, su  $D^4$  così definita:  $(a, b)\rho(a', b') \Leftrightarrow aR_1a' e bR_2b'$ .

Il politopo  $P_4$  con le identificazioni può esser visto come un complesso simpliciale, che denotiamo ancora con  $P_4$ , su cui è definita una relazione di equivalenza  $\rho$ .

Ora possiamo fare la sospensione di  $P_4$  ottenendo un politopo 5-dimensionale  $P_5$ ; su quest'ultimo le identificazioni sono indotte da quelle di  $P_4$ . Infatti è possibile fare il seguente ragionamento. Siano  $\sigma_4$  e  $\sigma'_4$  due simplessi di  $P_4$  che si identificano mediante la relazione di equivalenza  $\rho$ . Siano  $\sigma_5$  e  $\sigma'_5$  i simplessi che corrispondono rispettivamente a  $\sigma_4$  e  $\sigma'_4$  in una delle due stelle simpliciali che formano la sospensione, supponiamo di usare quella con vertice  $V$ . Allora, se  $P \in \sigma_4$  e  $Q \in \sigma'_4$  sono tali che  $P\rho Q$ , possiamo definire una relazione  $\rho'$ , che risulta essere di equivalenza, tra  $\sigma_5$  e  $\sigma'_5$  imponendo  $P'\rho'Q'$  dove  $P' = tP + (1 - t)V$  e  $Q' = tQ + (1 - t)V$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ .

Il politopo  $P_5$ , con le identificazioni appena definite, risulta avere caratteristica di Eulero nulla ma non presenta una varietà combinatoria. Infatti, in una dimensione dispari diversa da tre, non è detto che un complesso con caratteristica di Eulero zero presenti una varietà.

# Bibliografia

- [1] C.R.F. Maunder, Algebraic Topology, Van Nostrand Reinhold Company (1970).
- [2] Jeffrey R. Weeks, The Shape of Space: how to visualize surfaces and three-dimensional manifolds, Marcel Dekker INC. (1985).
- [3] H. Seifert e W. Threelfall, A textbook of topology, Academic Press (1980).
- [4] A. Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge University Press (2001).