

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Fisica

**Misure di rumore in corrente in un circuito
per la generazione di un campo magnetico
stabile**

Relatore:
Prof. Marco Prevedelli

Presentata da:
Nicolò Antolini

Correlatore:
Dott. Francesco Minardi

Sessione II
Anno Accademico 2015/2016

– I call that “The Falling Problem”. You encounter it when you first study physics. You realize that, if you were ever dropped from a plane without a parachute, you could calculate with a high degree of accuracy how long it’d take to hit the ground, your speed, how much energy you’ll deposit into the Earth. And yet, you would still be just as dead as a particularly stupid gorilla dropped the same distance. Mastery of the nature of reality grants you no mastery over the behaviour of reality. I could tell you why grandpa is very sick. I could tell you what each cell is doing wrong, why it’s doing wrong, and roughly when it started doing wrong. But I can’t tell them to stop.

– Why can’t you make a machine to fix it?

– Same reason you can’t make a parachute when you fall from the plane.

– Because it’s too hard?

– Nothing is too hard. Many things are too fast.

– I think I could solve “The Falling Problem” with a jetpack. Can you try to get me the parts?

– That’s all I do, kiddo.

SMBC COMICS

Alla mia famiglia.

Abstract

Questo lavoro di Tesi, svolto nell'ambito dell'esperimento BEC3 presso il LENS, costituisce il primo approccio al problema della stabilizzazione del campo magnetico di bias in una trappola per atomi ultra-freddi. Stabilizzare il campo magnetico generato da una coppia di bobine si traduce nello stabilizzare la corrente che le attraversa e il primo passo verso la soluzione di questo problema consiste nello stimare lo spettro di potenza del rumore in corrente del circuito. A questo scopo è stata misurata la PSD (Power Spectral Density) del segnale ai capi di diversi sensori per alcuni valori di corrente erogata da due diversi alimentatori. La PSD è stata misurata sia in maniera diretta, che indiretta, attraverso la trasformata di Fourier della Funzione di Autocorrelazione del segnale, misurata nelle stesse condizioni descritte. I dati raccolti costituiscono la base da cui partire per la progettazione e la realizzazione del circuito di stabilizzazione.

Indice

| | |
|--|-----------|
| Introduzione | 2 |
| 1 Rumore | 4 |
| 1.1 Varianza e densità spettrale di rumore | 4 |
| 1.2 Funzione di autocorrelazione | 7 |
| 1.3 Sorgenti di rumore elettrico | 9 |
| 1.3.1 Rumore termico o <i>Johnson noise</i> | 9 |
| 1.3.2 Rumore granulare o <i>shot noise</i> | 10 |
| 1.3.3 Rumore $1/f$ o <i>flicker noise</i> | 11 |
| 1.3.4 Interferenze | 11 |
| 2 Misure di rumore in corrente | 12 |
| 2.1 Setup sperimentale | 13 |
| 2.1.1 Il circuito da stabilizzare | 13 |
| 2.1.2 Strumenti e sensori | 15 |
| 2.2 Densità spettrale di rumore | 16 |
| 2.2.1 Spettro di potenza in un circuito puramente resistivo | 17 |
| 2.2.2 Spettro di potenza del circuito completo con due diversi sensori | 19 |
| 2.3 Cross-correlazione | 23 |
| 2.3.1 Autocorrelazione e spettro di potenza | 24 |
| 3 Prospettive per la stabilizzazione | 29 |
| 3.1 Filtro π su Agilent N5744A | 31 |
| 3.2 Simulazione di un filtro efficiente | 33 |
| 4 Conclusioni | 35 |
| Bibliografia | 37 |

Introduzione

Questo lavoro di Tesi, svolto nell'ambito dell'esperimento BEC3 presso il LENS, Laboratorio Europeo di Spettroscopia Non-Lineare, costituisce un primo approccio al problema della stabilizzazione del rumore in corrente in un circuito elettrico, finalizzato a ridurre il rumore di campo magnetico in un esperimento di atomi ultra-freddi. Nell'esperimento si analizza in particolare il comportamento in sistemi a bassa dimensionalità ($D < 3$) di un gas quantistico, costituito dai bosoni ^{87}Rb e ^{41}K , per studiare fenomeni di magnetismo quantistico. Il campione di atomi viene innanzitutto raffreddato [1] in una trappola magneto ottica, trasferito mediante una trappola di quadrupolo in una trappola di Ioffe-Pritchard per il raffreddamento evaporativo e infine portato in una trappola ottica [2]. In questa fase vengono indotte le transizioni iperfini, necessarie ad ottenere un *doppio* condensato di Rb e K, in presenza di un campo magnetico esterno. Il rumore del campo magnetico, generato da una coppia di bobine, si ripercuote sul sistema tramite una fluttuazione della separazione in energia tra i livelli coinvolti nelle transizioni. Si rende quindi necessaria una stabilizzazione del campo magnetico che si traduce nello stabilizzare la corrente che attraversa le bobine utilizzate per produrlo. L'approccio preliminare al problema della stabilizzazione consiste nel misurare la quantità fisica che descrive il rumore nel circuito elettrico utilizzato, ossia il suo spettro di potenza. Tale spettro fornisce il ritratto del rumore che si sta osservando, sulla base del quale è possibile ricavare le informazioni essenziali da cui partire per la progettazione e la messa a punto di un circuito di stabilizzazione, ossia di un apparato elettronico in grado di ridurre la soglia di rumore al di sotto di un livello decretato accettabile.

La necessità di *stabilizzare* una qualche quantità caratteristica di un sistema fisico risulta, in effetti, un fatto ricorrente non solo in fisica, ma in generele in tutte le discipline in cui, presto o tardi, si rende necessaria una misura. Un *sistema stabile* può essere inteso come un sistema fisico che si comporta nel modo sperato per un certo intervallo di tempo. Dalla creazione del primo cronografo alla misura delle costanti fondamentali attraverso le cui relazioni spieghiamo la Natura, il disporre di un sistema stabile è sempre stato motivo di progresso, sia in campo tecnologico che scientifico. In particolare, la necessità

di *stabilizzare* un circuito elettrico risulta, in effetti, un fatto sempre più comune nella fisica odierna. La crescente complessità della gran parte degli esperimenti nell'ambito della fisica di base e applicata e la necessità di ottenere risultati sempre più precisi, a fronte di uno sviluppo tecnologico che abbassa sempre di più la soglia del *trascurabile*, rende infatti indispensabile ai fini di una misura il disporre di un'apparato elettronico, sia esso analogico o digitale. Risulta dunque chiaro come il problema del rumore elettrico si presenti puntualmente ogni volta che ci apprestiamo a compiere una qualche misura.

Lo studio del rumore ed in particolare del rumore elettrico, nasce [3] con l'avvento dell'elettronica nei primi anni del Novecento [4] e prende forma con lo sviluppo delle telecomunicazioni. Nella sua complessità, il rumore fa parte di quella classe di fenomeni, che spesso si incontrano in fisica, i quali non possono essere descritti da un'unica elegante equazione. In effetti, una trattazione generale del rumore elettrico rende necessario il prendere in prestito alcuni strumenti [5] da tre diverse discipline: la *meccanica statistica*, la *teoria dei circuiti* e l'*analisi statistica*. I processi fisici fondamentali che danno origine al rumore nelle componenti elettroniche riguardano sostanzialmente i fenomeni di fluttuazione-dissipazione propri della meccanica statistica. Lo studio dei modi con cui il rumore entra e si propaga in un sistema elettronico richiede inoltre gli strumenti propri della teoria dei circuiti. Una volta chiarite l'*origine* e la *dinamica* del fenomeno, bisogna dunque interpretare tali risultati dal punto di vista statistico.

Nel primo capitolo di questo lavoro saranno descritti alcuni dei concetti matematici necessari alla comprensione del problema del rumore elettrico attraverso il modello della *teoria dei segnali*. Inoltre verranno trattate alcune tra le più frequenti sorgenti di rumore elettrico, senza la pretesa di darne una descrizione esaustiva, ma in modo da affiancare la trattazione teorica del problema con esempi concreti.

Nel secondo capitolo vengono descritti l'apparato sperimentale ed i metodi utilizzati per la misura delle grandezze di interesse, con riferimenti ad una trattazione discreta (e quindi meno *ideale*) delle stesse. Vengono inoltre mostrati i dati ottenuti e discussi i limiti di stabilità del sistema in base agli obiettivi dell'esperimento BEC3.

Nel terzo capitolo vengono suggeriti, sulla base dei risultati discussi al capitolo precedente, alcuni metodi di stabilizzazione del circuito. In particolare viene descritto e caratterizzato un filtro π e simulato un secondo filtro, teoricamente più efficace.

Nel quarto capitolo si discutono le conclusioni di questo lavoro.

1 Rumore

In teoria dei segnali si studiano le proprietà matematiche e statistiche dei segnali, intesi come funzioni matematiche nel dominio del tempo. In tutta generalità si può definire un segnale come la variazione temporale dello stato di un sistema fisico o di una grandezza fisica, atta a rappresentare e trasmettere informazione. Un'altra maniera di intendere un segnale, che non differisce nella sostanza da quella appena citata, è di pensarlo come funzione di una frequenza (l'inverso di un tempo). Questo modo di rappresentare i segnali deriva dall'aver sviluppato uno schema matematico nel quale si fa un largo utilizzo della trasformata di Fourier [6]. Essendo il rumore esso stesso un segnale, è possibile quindi osservarlo in entrambi i domini del tempo e delle frequenze. Una volta compiuta una caratterizzazione del rumore, in particolare del rumore elettrico, risulterà chiaro che ne esistano di diversi tipi, le cui particolarità emergono dall'aver studiato il loro comportamento in entrambi i domini. In questa fase si cerca di capire *quanto* rumore si sta osservando e *come* questo sia fatto, ossia com'è composto il suo *spettro*. Per rispondere a queste domande è però necessario fornire alcuni concetti di base.

1.1 — Varianza e densità spettrale di rumore

La volontà di trattare il rumore come un segnale dà un'opportunità di introdurre tre teoremi di fondamentale importanza: il teorema di Parseval [6], il teorema di Wiener-Khinchin [7] e il teorema della convoluzione. Vedremo in seguito come ricavare da questi risultati alcuni strumenti matematici per la caratterizzazione dei segnali ed in particolare del rumore. In generale sia $h(t) = s(t) + n(t)$ una funzione che rappresenta il segnale totale, dove chiamiamo $s(t)$ *segnale*, cioè la parte che contiene l'informazione e $n(t)$ *rumore*, che si può pensare come un disturbo del *segnale* (dovuto ad una caratteristica del sistema fisico o del sistema di misura). Poniamo inoltre che esistano, ben definite, le

rispettive trasformate di Fourier $H(f) = S(f) + N(f)$.¹

Sia x una variabile aleatoria di media μ e varianza σ^2 . Un processo casuale è una sequenza, indicata con $x(t)$, di variabili aleatorie che dipendono da un parametro continuo t (identificabile come il tempo). Un *processo gaussiano stazionario* a media nulla è descritto da una sequenza $x(t)$ tale che:

$$\forall t, \quad \langle x(t) \rangle = \mu(t) = 0; \quad \sigma^2(t) = \sigma^2 = \text{costante}$$

dove l'assumere che $x(t)$ abbia una distribuzione gaussiana è un risultato diretto del *Teorema del limite centrale* [8].

Il rumore $n(t)$ è essenzialmente un processo di questo tipo, dunque risulta immediato intuire quanto poco sia utile, ai fini della sua caratterizzazione, osservarlo tramite un'oscilloscopio (cioè nel dominio del tempo). Non è sempre facile, infatti, distinguere a colpo d'occhio un tipo di rumore da un altro. Quello che si può fare in prima approssimazione è calcolarne la varianza:

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T n^2(t) dt \quad (1.1)$$

dove si è posto che $n(t)$ sia definita su un intervallo $-T, T$ detto *intervallo di quasi-periodicità* [9] e si è sfruttato il fatto che abbia media nulla, in modo tale che la media temporale del quadrato del segnale coincida con la varianza.

Se ora si estende il dominio di $n(t)$ in maniera banale (fuori dall'intervallo $-T, T$ la funzione vale zero) si può riscrivere la 1.1 come:

$$\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \sigma_T^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|n(t, T)|^2}{2T} dt \quad (1.2)$$

dove si è messo in evidenza il fatto che $n(t, T)$ dipende dall'ampiezza *intervallo di quasi-periodicità*. In maniera esplicita si può scrivere che $n(t, T) = n(t) \cdot g(T)$, dove $g(T)$ è una funzione di *gate* che vale 1 tra $-T, T$ e zero altrove.

Formalmente diciamo che se il limite 1.2 esiste ed è finito, questo esprime la varianza di $n(t)$. Inoltre $n(t)$ risulta essere L^2 e ammette quindi trasformata di Fourier.

Per una tale funzione vale il Teorema di Parseval, secondo il quale l'integrale nel dominio naturale (in questo caso il tempo) del modulo quadro di una funzione è equivalente a quello del modulo quadro della sua trasformata di Fourier nel dominio trasformato (quello delle frequenze) [10]:

¹Questo fatto non è vero in generale, data la natura discreta e aleatoria del rumore, ma risulta essere un buon compromesso per avere una trattazione semplificata della teoria riguardante il rumore.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) F^*(\nu') \exp -i2\pi(\nu + \nu')t dt d\nu d\nu' \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) F^*(-\nu') \exp -i2\pi(\nu - \nu')t dt d\nu d\nu' \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) F^*(\nu) d\nu \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 d\nu
\end{aligned} \tag{1.3}$$

avendo posto $FT\{f(t)\} = F(\nu)$ e sfruttando il fatto che per una f reale $F^*(-\nu) = F(\nu)$.

Se pensiamo a questo teorema applicato al caso fisico di un generico segnale elettrico, ciò equivale a dire che la potenza totale si conserva passando dal dominio del tempo a quello delle frequenze. In effetti la potenza va come il quadrato del segnale, ed è ragionevole pensare che l'energia si conservi, in assenza di effetti dissipativi. Un'altra cosa che si può notare sta nel fatto che se ci si limitasse a considerare l'energia totale, cioè l'integrale del modulo quadro del segnale, nel limite in cui T che tende ad infinito l'integrale andrebbe a divergere. Questo fatto non è fisico, ma è ragionevole: se misurassimo un segnale per un tempo infinito avremmo in effetti infinita energia.

Inserendo la 1.3 nella 1.2, risulta:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|n(t, T)|^2}{2T} dt = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|N(\nu, T)|^2}{2T} d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|N(\nu, T)|^2}{2T} d\nu
\end{aligned} \tag{1.4}$$

dove $N(\nu, T)$ indica la trasformata di Fourier di $n(t, T)$. In effetti si può vedere che:

$$\begin{aligned}
FT\{n(t, T)\}(\nu) &= FT\{n(t) \cdot g(T)\} = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} N(\nu') G(\nu' - \nu) d\nu'
\end{aligned} \tag{1.5}$$

e quando T tende all'infinito, $G(\nu' - \nu)$ tende ad una delta di Dirac, e la 1.5 tende ad $N(\nu)$, cioè la trasformata di Fourier di $n(t)$.

L'integrando nella 1.4 definisce la *densità spettrale di rumore* o *spettro di potenza*, in breve PSD (*Power Spectral Density*), che si indica con $S_{n^2}(\nu)$:

$$S_{n^2}(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|N(\nu, T)|^2}{2T} d\nu \tag{1.6}$$

La PSD è essenzialmente il quadrato dell'ampiezza della trasformata di Fourier del segnale e ci dice come è distribuita la varianza alle varie frequenze. Essendo proporzionale al quadrato dell'ampiezza, inoltre, non contiene informazioni sulla fase. Ponendo, ad esempio, che il rumore $n(t)$ sia espresso in A, si ha che $S_{n^2}(\nu)$ ha dimensioni A^2/Hz . Spesso viene chiamata *densità spettrale di rumore* anche la radice quadrata di $S_{n^2}(\nu)$, che ha dimensioni $A/\sqrt{\text{Hz}}$ e si indica con $S_n(\nu)$, mentre un'altra notazione utile riguarda la *densità spettrale di rumore "unilaterale"* (*single-sided PSD*) definita, per le sole frequenze positive, da:

$$S_{n^2}^1(\nu) = S_{n^2}(\nu) + S_{n^2}(-\nu) \quad (1.7)$$

Con queste notazioni appare chiaro, dalla 1.4 che sia:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{n^2}(\nu) d\nu = \int_0^{+\infty} S_{n^2}^1(\nu) d\nu \quad (1.8)$$

Un concetto che ritornerà nella prossima sezione è quello di rumore *bianco*, cioè tale per cui la sua PSD è costante, ossia non varia con la frequenza. Se calcoliamo la varianza di un rumore bianco tramite la 1.8 otteniamo però una quantità infinita.²

Ai fini pratici, l'approccio basato sulla misura della PSD risulta indubbiamente più vantaggioso dato che, potendola misurare con una buona risoluzione $\Delta\nu$ in frequenza, è possibile costruire la varianza del segnale come somma di contributi del tipo $S_{n^2,i} \cdot \Delta\nu$. In sostanza la misura della PSD e di conseguenza il calcolo della varianza, diventano relativamente semplici.

1.2 — Funzione di autocorrelazione

Un altro approccio che si può utilizzare nel caratterizzare il rumore si basa sulla sua *funzione di autocorrelazione*, ossia la correlazione del segnale con se stesso.

Se al tempo t il segnale $n(t)$ ha un dato valore, ci chiediamo con quale probabilità possiamo prevedere che valore abbia al tempo t' . Se c'è anche una minima probabilità che questo accada, allora i dati sono correlati. Esprimiamo la correlazione tra due segnali tramite la covarianza, mediando sul tempo i prodotti $n(t) \cdot n(t')$. Assumendo l'invarianza temporale si avrà che la correlazione verrà a dipendere solo da $\tau = t - t'$ e, più formalmente, definiamo la *funzione di autocorrelazione* $n(t)$ come:

$$c(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T n^*(t)n(t + \tau) dt \quad (1.9)$$

²Questo fatto non propriamente fisico, si spiega, ad esempio, considerando il fatto che la corrente sia un flusso quantizzato di carica. In quest'ottica infatti il rumore non può mai essere *bianco*, dato che esiste un tempo medio finito t_m entro il quale, in media, il flusso di carica – e quindi la corrente – è nullo. In termini di frequenza si ha dunque che sopra $1/t_m$ il rumore va a zero e quindi la varianza è una quantità finita.

Ponendo $\tau = 0$ otteniamo dalla 1.9 la 1.2 e quindi risulta chiaro che $c(0) = \sigma^2$. Inoltre, per simmetria, si ha che $c(\tau) = c(-\tau)$. Spesso è possibile approssimare l'autocorrelazione ad una esponenziale decrescente e definire il *tempo di correlazione* τ_c come il tempo impiegato da $c(\tau)$ per abbattersi di un fattore $1/e$. Tipicamente, per τ grandi rispetto a τ_c , l'integrale si media a zero, cioè i dati non sono più correlati. Per un rumore gaussiano bianco ideale, per esempio, $\tau_c = 0$ e $c(\tau)$ è diversa da zero solo nell'origine, dove in accordo con il risultato del capitolo precedente, vale: $c(0) = \sigma^2\delta(\tau)$.³

È importante notare la somiglianza dell'integrale 1.9 con l'espressione del prodotto di convoluzione di $n(t)$ con se stesso:

$$(n * n)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(t)n(\tau - t)dt$$

per cui vale il teorema della convoluzione:

$$FT\{(n * n)\} = FT\{n\} \cdot FT\{n\} = N^2$$

Nel caso in questione, infatti, vale un risultato analogo, che prende il nome di *teorema di Wiener-Khinchin*, secondo il quale la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione di un segnale è pari alla sua densità spettrale. Poniamo infatti di avere un integrale del tipo:

$$I(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h^*(t)k(t + \tau) dt$$

e di voler calcolare la trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} FT\{I\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{-i2\pi\nu\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} dt h^*(t)k(t + \tau) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau dt e^{-i2\pi\nu\tau} h^*(t)k(t + \tau) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Tramite il cambio di variabile $t + \tau = \vartheta$, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} FT\{I\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\vartheta dt e^{-i2\pi\nu(\vartheta-t)} h^*(t)k(\vartheta) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\vartheta e^{-i2\pi\nu\vartheta} k(\vartheta) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i2\pi\nu t} h^*(t) \\ &= FT\{k\} \cdot FT^*\{h\} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Se ora riscriviamo la 1.9 nella forma:

$$c(\tau) = \int_{-T}^T \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n^*(t)}{\sqrt{2T}} \frac{n(t + \tau)}{\sqrt{2T}} dt \quad (1.12)$$

³In realtà una piccola correlazione è sempre presente quando si prova a misurare la $c(\tau)$ di un rumore bianco.

in base alla 1.11 otteniamo:

$$FT\{c(\tau)\}(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|N(\nu, T)|^2}{2T} = S_{n^2}(\nu) \quad (1.13)$$

Il teorema di Wiener-Khinchin fornisce quindi un utile strumento di conversione tra la funzione di autocorrelazione e la densità spettrale e rende possibile, dunque, passare in modo agile dal dominio del tempo a quello delle frequenze e viceversa, a seconda di quale descrizione sia più utile a rappresentare il fenomeno fisico in analisi.

1.3 — Sorgenti di rumore elettrico

Nell'introdurre i concetti di varianza, densità spettrale e funzione di autocorrelazione di un segnale, abbiamo detto che sarebbero stati utili per caratterizzare un certo segnale di rumore. In effetti, per quanto riguarda il rumore elettrico, esistono diversi processi fisici che danno origine a tipi diversi di rumore che di solito sono sempre presenti, con proporzioni variabili, quando si analizza un segnale. Ogni tipo di rumore [11] è caratterizzato in particolare da un certo andamento della PSD e da una certa densità di probabilità.

1.3.1 — Rumore termico o *Johnson noise*

Un qualsiasi resistore reale di resistenza R , non necessariamente collegato ad un circuito elettrico, genera ai suoi capi un rumore in tensione noto con il nome di *rumore Johnson*. Questo rumore, di natura termica, è essenzialmente bianco e *gaussiano*, cioè tale per cui la densità di probabilità del rumore approssima una curva gaussiana. Se misuriamo la tensione del rumore generato ai capi del resistore otteniamo:

$$V_{noise}(rms) = V_{nR} = (4kTRB)^{\frac{1}{2}} \quad (1.14)$$

dove k è la costante di Boltzmann, T è la temperatura espressa in Kelvin e B è la larghezza della banda spettrale dello strumento di misura espressa in Hz. La quantità $V_{noise}(rms)$ è in sostanza quello che si potrebbe misurare disponendo di un filtro passa-banda ideale, cioè perfettamente privo di rumore e tale per cui trasmetta tutto il segnale all'interno di B e niente all'esterno.

La presenza del rumore termico mette un limite inferiore al rumore di qualsiasi elemento o circuito elettrico dotato di componenti resistive in quanto è sempre presente, anche quando il resistore non è di fatto collegato a nessuna rete. Data la sua semplice espressione possiamo stimare la tensione 1.14 a temperatura ambiente:

$$V_{nR}/\sqrt{B} = (4kTR)^{\frac{1}{2}} \sim 1.27 \cdot 10^{-4} R^{\frac{1}{2}} \quad \mu\text{V}/\sqrt{\text{Hz}}$$

In termini di densità spettrale di rumore, si può scrivere la 1.14 per basse frequenze ($\nu \ll kT/\hbar \sim 6\text{THz}$; a T ambiente) come:

$$S_{V_2}^1(\nu) = 4kTR \quad (1.15)$$

Il limite per basse frequenze, viene dal fatto che la 1.15 è frutto di un'approssimazione. Se si considera una linea di trasmissione ai cui capi sono collegati in serie due resistori con temperatura $T = 0K$, si ottiene sostanzialmente un corpo nero monodimensionale, dato che qualsiasi segnale – radiazione elettromagnetica – esca dalla linea di trasmissione, viene assorbito dai resistori. Per un tale sistema la densità spettrale in tensione si scrive:

$$S_{V_2}^1(\nu) = \frac{4Rh\nu}{\exp h\nu\beta - 1} \quad (1.16)$$

che per $h\nu\beta \ll 1$ diventa la 1.15.

È interessante notare come il rumore Johnson sia un caso particolare di un fenomeno che accade spesso in fisica. In analogia con la resistenza di un circuito elettrico, consideriamo un qualunque fenomeno dissipativo, per esempio l'attrito viscoso a cui sono soggette delle piccole particelle immerse in un fluido, e studiamone la grandezza tipica, in questo caso la velocità. Dalla termodinamica sappiamo che a questa grandezza sono associate delle fluttuazioni, responsabili di quello che chiamiamo *moto browniano*. In quest'ottica è facile intuire come il rumore Johnson sia causato dalla natura di questo fenomeno di fluttuazione-dissipazione.

1.3.2 – Rumore granulare o *shot noise*

Un'altra sorgente di rumore, tipica di reti in cui scorre una corrente, è detta rumore *shot* o *granulare*. Quest'ultimo termine risulta intimamente legato al processo fisico che da origine questo rumore, basato sul fatto che il *quanto* di carica sia una quantità finita. In effetti la corrente è data dal moto di portatori di carica discreti e non dal flusso continuo di carica, e questo si traduce in fluttuazioni statistiche della corrente.

Se i portatori di carica sono indipendenti gli uni dagli altri si ha:

$$I_{noise}(rms) = I_{nR} = (2eI_{DC}B)^{\frac{1}{2}} \quad (1.17)$$

dove e è la carica dell'elettrone espressa in Coulomb, I_{DC} è la corrente continua che attraversa la rete e B è la larghezza della banda spettrale espressa in Hz.

Similmente al rumore Johnson, anche il rumore granulare è *bianco* e *gaussiano*.

La relazione 1.17 si traduce in termini di densità spettrale, espressa come tensione ai capi di una resistenza R , come:

$$S_{V_2}^1(\nu) = 2eR^2I_{DC} \quad (1.18)$$

Se i portatori di carica sono invece correlati tra loro, come ad esempio succede nei conduttori metallici, il rumore in corrente sarà in generale più basso o più alto [12], rispetto alla 1.17, a seconda che il segno della correlazione sia positivo o negativo.

1.3.3 – Rumore $1/f$ o *flicker noise*

Il rumore Johnson e quello granulare sono per definizione sempre presenti, in egual forma, in ogni circuito elettrico, dal più rozzo al più sofisticato e non dipendono in nessuna maniera dalla qualità degli elementi circuitali utilizzati, né dai materiali di cui sono costituiti.⁴ In aggiunta a questi due tipi di rumore, si osserva sempre del *rumore in eccesso*. Questo è dovuto principalmente alle fluttuazioni della resistenza che affliggono tutti i resistori reali. Queste fluttuazioni dipendono da molti fattori, ma si ha in generale che lo spettro di potenza di questa sorgente di rumore ha un andamento inversamente proporzionale con la frequenza. Per questo motivo viene chiamato rumore $1/f$ o *flicker noise*. A differenza dei primi due tipi di rumore considerati il rumore $1/f$ non è bianco, per questa ragione è anche indicato con il termine *pink noise*.

È curioso notare come il rumore $1/f$ sia presente un po' ovunque in natura, nei sistemi fisici più disparati: dalla velocità delle correnti oceaniche al flusso della sabbia in una clessidra, dalla frequenza del battito cardiaco a quella delle piene del fiume Nilo (che vengono misurate dall'uomo da più di 2000 anni). Di fatto non si conosce ancora il principio comune secondo il quale questa sorgente di rumore pervade la natura, anche se in molti casi è possibile dare una spiegazione specifica.

1.3.4 – Interferenze

Un'interferenza nel segnale che si sta misurando o un fenomeno di *pick-up* danno origine ad un rumore aggiuntivo sulla misura. Lo spettro di questo genere di rumore è parecchio variabile, a seconda del segnale di interferenza. Per esempio, un pick-up ad una precisa frequenza si traduce in uno spettro con un picco molto marcato a quella frequenza. Diversamente, per un fenomeno impulsivo lo spettro è sparpagliato in frequenza, in accordo il principio di indeterminazione classico $\Delta t \Delta \nu \sim 1$.

⁴In realtà è possibile [13] mettere a punto circuiti di feedback che limitano lo shot noise. Nell'esempio citato, la corrente prodotta è dell'ordine di 100mA, dunque lo shot noise atteso è dell'ordine di $\sim 2\text{nA}/\sqrt{\text{Hz}}$. Utilizzando per il circuito di feedback una R di sensing da 50Ω e un amplificatore operazionale con un rumore di $\sim 1\text{nV}/\sqrt{\text{Hz}}$, il rumore nel circuito viene limitato a $20\text{pA}/\sqrt{\text{Hz}}$. È opportuno notare che per grandi valori di corrente la potenza dissipata ai capi della R di sensing può diventare un problema – di cui si parla nel *capitolo 3*.

2

Misure di rumore in corrente

L'aver caratterizzato il rumore in un circuito elettrico, porta notevoli vantaggi quando si vuole cercare di ridurlo. La base da cui partire è lo *spettro di potenza* che, come si è visto nel capitolo precedente, costituisce il ritratto del rumore che stiamo studiando. In base a come la varianza è distribuita alle varie frequenze si può infatti ipotizzare qual è il modo migliore per ridurla. Capita spesso che per diminuire l'*rms* di un certo fattore basti modificare lo spettro di potenza, ad esempio filtrando il segnale, solo in un predeterminato intervallo di frequenze. A volte invece si rende necessaria una correzione *dinamica* del segnale e quindi lo sviluppo di algoritmi di regolazione e sistemi di retroazione. Ad ogni modo, la cosa che si deve avere ben chiara nell'approcciarsi a questi problemi è dove si vuole arrivare, cioè di quanto si vuole *ridurre* il rumore.

Nell'ambito dell'esperimento BEC3, si richiede di indurre transizioni di dipolo magnetico tra livelli iperfini di atomi di ^{87}Rb . La separazione in energia tra i due livelli coinvolti, ovvero lo stato iniziale ($5^2S_{1/2}, F = 2, m_F = 2$) e lo stato finale ($5^2S_{1/2}, F = 1, m_F = 1$) dipende linearmente dal campo magnetico generato due bobine uguali. Nella configurazione di lavoro, le fluttuazioni di corrente nelle bobine si convertono in fluttuazioni di campo magnetico, con un rapporto di conversione di circa 0.8 mT/A, e quindi in fluttuazioni della separazione in energia tra i due livelli, con rapporto di conversione pari a circa 16 MHz/A.¹

La transizione dallo stato $|2\rangle$ allo stato $|1\rangle$ viene indotta in presenza di un campo di *bias* di intensità $7200\mu\text{T}$ e diretto lungo una direzione \vec{z} .² Ciò equivale ad una separazione

¹Per convenzione l'energia viene espressa in termini di una frequenza, ricordando che per ottenere i valori in eV è necessario moltiplicare per \hbar . Il termine *energia* verrà d'ora in poi utilizzato in questo senso.

²In presenza di un campo magnetico esterno il momento angolare totale F non è più un buon numero quantico, ma possiamo etichettare gli stati con m_F . Se il campo è diretto lungo \vec{z} , si conserva infatti la simmetria di rotazione attorno a questo asse. Chiamiamo quindi gli stati ($5^2S_{1/2}, F = 2, m_F = 2$) e

in energia tra i livelli coinvolti di 6987MHz. Dunque per indurre tale transizione è necessario un campo a microonde.

Dato che la transizione è indotta dall'hamiltoniana di dipolo magnetico:

$$H_Z = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (2.1)$$

la *frequenza di Rabi* [14] della transizione si scrive come:

$$\Omega_R = -\langle 1 | \mu_z | 2 \rangle B / \hbar \quad (2.2)$$

Da misure preliminari è stato osservato che la frequenza di Rabi massima, dato il livello di potenza a micro-onda disponibile, è $\Omega_R \simeq 2\pi \times 10\text{kHz}$, con un'incertezza del 50%. Questo valore determina il livello di stabilità di campo magnetico – e quindi di corrente – richiesto. Assumendo come obiettivo di avere una fluttuazione *rms* della frequenza di risonanza inferiore di un ordine di grandezza alla frequenza di Rabi, si chiede che:

$$\delta i_{rms} < \frac{1 \text{ kHz}}{(16 \text{ MHz/A})} < 0.06 \text{ mA} \quad (2.3)$$

Evidentemente le fluttuazioni molto veloci rispetto alla frequenza di Rabi non sono rilevanti, quindi la banda di frequenze su cui integrare il rumore in corrente è anch'essa determinata dalla frequenza di Rabi. In conclusione, l'obiettivo da raggiungere con la stabilizzazione è una corrente con una *rms*, integrata da 0 a 20 kHz, minore di 0.06mA.

2.1 — Setup sperimentale

2.1.1 – Il circuito da stabilizzare

Il circuito che si vuole stabilizzare in corrente, mostrato in Figura 2.1, è composto in prima approssimazione da un generatore di corrente DC (Agilent N5744A oppure Kepco BOP-20-10M) in serie ad una resistenza di potenza e ad un carico. Questo è costituito essenzialmente da una coppia di bobine Helmholtz, con un'induttanza equivalente di circa 2mH, utilizzate per generare il campo magnetico e da un invertitore di corrente collegato ad una delle bobine. Grazie all'invertitore si può scegliere di far circolare la corrente in tale bobina in senso opposto, realizzando dunque una coppia di anti-Helmholtz e utilizzare un secondo alimentatore di corrente DC (Agilent 6692) per generare il campo magnetico di una trappola di quadrupolo [15]. La configurazione utilizzata durante tutte le misure che verranno descritte prevede che questo secondo alimentatore resti spento e che le bobine vengano sempre utilizzate in configurazione di Helmholtz, ad ogni modo è importante non trascurare la presenza di questa componente.

($5^2S_{1/2}, F = 1, m_F = 1$) rispettivamente $|2\rangle$ e $|1\rangle$.

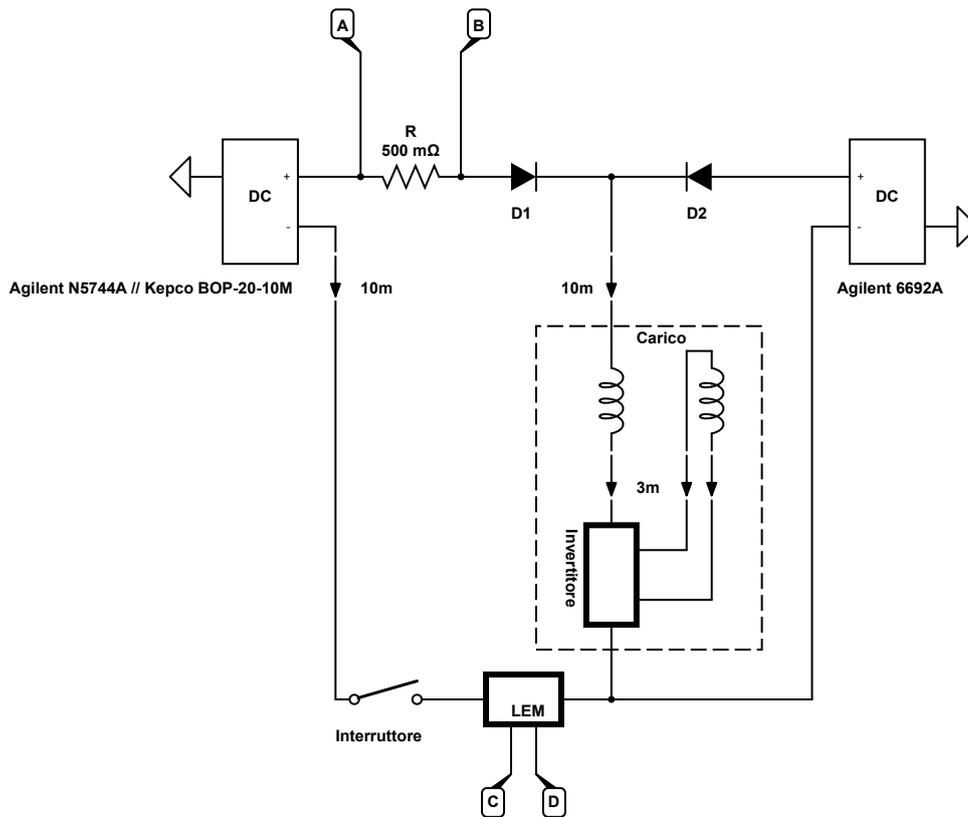


Figura 2.1: Schema del circuito da stabilizzare

Entrambi gli alimentatori utilizzati prevedono un modo di funzionamento manuale e uno in remoto. Nel modo manuale, la corrente erogata viene impostata direttamente dal pannello frontale dello strumento e può essere letta tramite il display digitale dell'Agilent N5744A o attraverso l'indicatore analogico del Kepco BOP-20-10M. Il funzionamento in remoto prevede l'utilizzo di una tensione di programmazione, impostabile dal calcolatore, che comanda in tensione uno degli alimentatori. In questo caso la corrente erogata può essere misurata con un amperometro sull'uscita dell'alimentatore. L'Agilent N5744A eroga corrente fino ad un valore massimo di 38A ed è caratterizzato da un rumore residuo *-ripple noise- rms* tra 5Hz e 1MHz pari a 76mA. Il Kepco BOP-20-10M eroga corrente in un intervallo di $\pm 10A$ con un rumore residuo *-ripple noise- rms* inferiore allo 0.03% del valore DC.³

Sul ritorno dell'alimentatore è connesso in parallelo varistore S20 K75, che lo protegge da fenomeni transitori di sovratensione.

³La banda di integrazione del valore *rms* di rumore residuo del Kepco BOP-20-10M non è ben specificato dal costruttore.

2.1.2 – Strumenti e sensori

Per effettuare le misure di densità spettrale e cross-correlazione si utilizza un analizzatore di spettro (Agilent-35670-90053), mentre per le misure di tensione è necessario un multimetro digitale (Fluke 175).

In modalità *FFT Analysis* l'analizzatore di spettro Agilent-35670-90053 può misurare in un intervallo di frequenze che va da 0Hz a 102.4KHz e la gamma dinamica della misura è garantita ad 80dB. La risoluzione massima è data dal rapporto tra la frequenza massima, impostabile dall'utente entro il range definito, e il numero massimo di punti pari a 1600. In modalità *Correlation Analysis* la minima ampiezza dell'intervallo temporale $[-\tau, \tau]$ è di 15ms, con una sequenza di massimo 2048 punti. Inoltre lo strumento accetta tensioni in entrata non superiori ai 4V.

Il multimetro Fluke 175 è caratterizzato da una gamma che va da 0.1mV a 1000V e un'incertezza dello $0.15\% + 2$ digit.

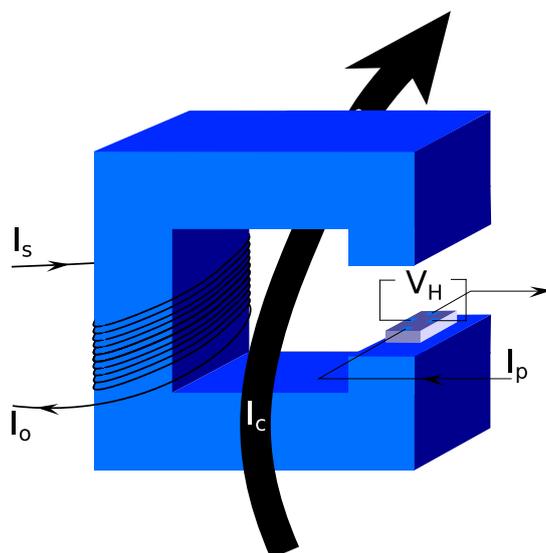


Figura 2.2: Schema di funzionamento del sensore ad effetto Hall LEM it-150s.

Le misure di rumore vengono prese sia ai capi del resistore di potenza (resistore di *sensing*) Isabellenhütte con resistenza $R_I = 500 \pm 1\% m\Omega$, sia ai capi di un sensore ad effetto Hall LEM it-150s. Questo sensore, schematizzato in figura 2.2, è costruito in modo tale da poter essere attraversato da un cavo percorso da una corrente I_C . Il flusso del campo magnetico generato dal passaggio di questa corrente viene bilanciato dal flusso complementare prodotto dal fluire della corrente I_S , che attraversa il sensore in senso opposto un numero S di volte (pari al numero degli avvolgimenti attorno al corpo ferromagnetico del sensore). La corrente di compensazione I_S è gestita dall'uscita in tensione V_H di un dispositivo a semiconduttore sensibile all'effetto Hall. Allo stato

stazionario la corrente I_p attraversa il semiconduttore tenendo costante V_H a zero. In presenza di corrente – cioè di campo magnetico – $V_H \propto I_p \cdot B$ e quindi si ha che I_S è un'esatta copia della corrente I_C , ma ridotta di un fattore S . Ponendo in serie all'uscita di corrente $I_O - I_O = I_S$ – una resistenza, si ottiene in fine un segnale di tensione.

Il sensore LEM it-150s ha un rapporto di conversione tra I_C e I_S pari a $1/750$, mentre la resistenza interna è stimata essere 100Ω , dunque la resistenza equivalente del sensore risulta essere $R_L = 133m\Omega$.

Al di là degli elementi fino a questo momento descritti, l'esperimento BEC3 comprende un gran numero di altre apparecchiature elettroniche. Inoltre è da considerare la presenza di cavi lunghi (fino a circa 10m) tra l'alimentazione e il carico, necessari per tenere lontano dagli apparati ottici i diversi alimentatori di corrente. L'impatto di questa parte di hardware sulle misure che verranno descritte sarà analizzato più avanti.

2.2 — Densità spettrale di rumore

Come si era accennato nel capitolo precedente, sperimentalmente non si misura l'espressione analitica dello spettro di potenza, ma l'analizzatore di spettro campiona il segnale di interesse in un numero finito di punti. L'ipotesi che viene a cadere, e per cui sono validi i risultati visti, è che il parametro t da cui dipende la sequenza casuale $n(t)$ sia continuo. L'analizzatore acquisisce quindi i dati per un tempo T pari all'intervallo di quasi-periodicità, ottenendo una sequenza n_i , di cui calcola la DFT, cioè la trasformata di Fourier *discreta* (*Discrete Fourier Transform*). Quindi l'intervallo di quasi-periodicità viene espanso, per emulare il limite in cui esso tende ad infinito.

Dal *teorema del campionamento* si ha che, avendo cura di campionare il segnale ad almeno il doppio della frequenza massima ν_{max} dello spettro (in modo che per $\nu > \nu_{max}$ lo spettro è identicamente nullo), tutta l'informazione contenuta nella trasformata di Fourier del segnale *reale* viene conservata nella DFT della sequenza discreta.

Data la natura casuale della sequenza n_i , si ha che una qualsiasi misura di PSD è caratterizzata da un certo grado di aleatorietà e quindi, in generale, una misura successiva dello stesso spettro fornisce un risultato diverso. Quello che può essere fatto dal punto di vista sperimentale per limitare il contributo di queste fluttuazioni consiste nel mediare, frequenza per frequenza, misure successive dello spettro di potenza.

Supponendo dunque di impostare la frequenza massima dello spettro ad una certa ν_{max} e di voler ottenere un numero P di punti, la relazione 1.8 si scrive come:

$$\langle n^2 \rangle = \frac{1}{T} \sum_{i=0}^Q n_i^2 \cdot \Delta t = \sum_{i=0}^P S_{n^2_i}^1 \cdot \Delta \nu \quad (2.4)$$

dove $\Delta t = T/Q$ è pari al tempo di campionamento, $\nu_{max} = 1/2\Delta t$ e $\Delta \nu = \nu_{max}/P$; inoltre si è posto che la sequenza n_i sia definita per tempi positivi. In effetti l'analizzatore

di spettro misura la *single-sided* PSD, in modo che le somme della 2.4 siano sulle sole frequenze positive.

2.2.1 – Spettro di potenza in un circuito puramente resistivo

Avendo a disposizione due alimentatori differenti è necessario capire quale dei due si adatti meglio alle esigenze di basso rumore e affidabilità. Il primo approccio al problema consiste nel ridurre il circuito in figura 2.1 ad un circuito puramente resistivo, come mostrato in figura 2.3 e misurare la PSD della caduta di tensione ai capi della resistenza, che funge essenzialmente da sensore, tramite l'analizzatore di spettro. In questo modo è possibile, in via preliminare, caratterizzare quale dei due alimentatori disponibili sia il miglior candidato per l'esperimento.

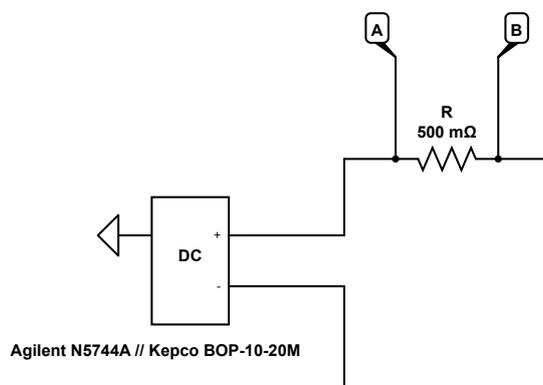
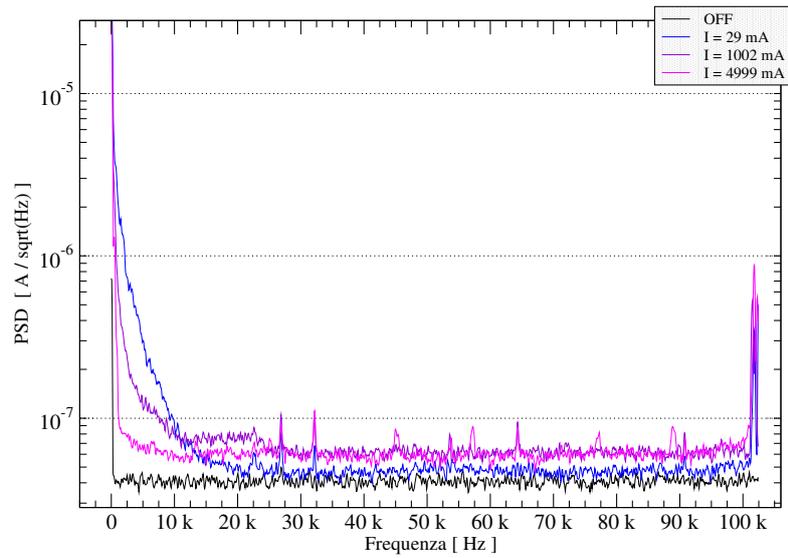
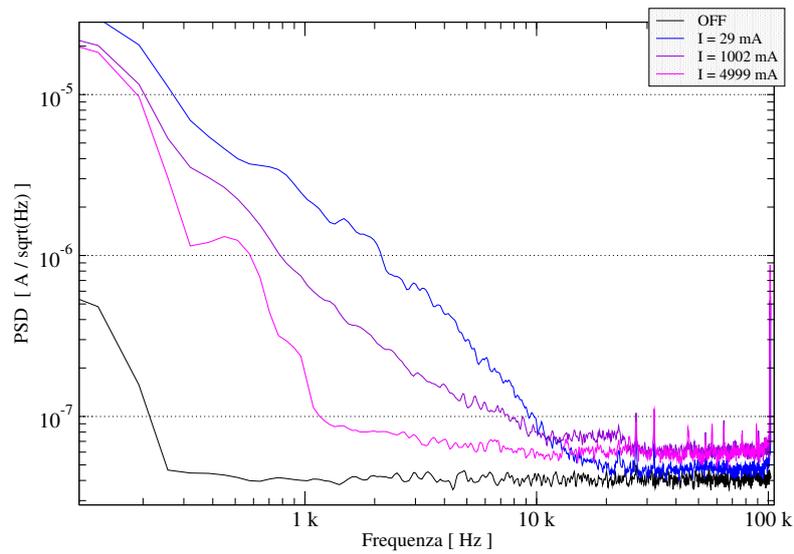


Figura 2.3: Schema del circuito resistivo.

La sonda dell'analizzatore viene collegata ai nodi A e B del circuito e si misura la PSD per diversi valori di corrente erogata. L'analizzatore è impostato in modo da misurare fino ad una frequenza massima di 102.4kHz, con una risoluzione di 64Hz (1600 punti). Il numero di misure M mediate dallo strumento è 100. Una misura tipica è riportata in figura 2.4. I parametri delle misure condotte sono riportati in tabella 2.1.



(a) .



(b) .

Figura 2.4: *Densità spettrale di rumore misurata ai capi della resistenza in un circuito puramente resistivo, per diversi valori di corrente.* Le curve mostrate sono state ottenute utilizzando l'alimentatore Agilent N744A e sono relative alla stessa misura. Nella figura b), dove l'asse delle frequenze è in scala logaritmica, si nota che il circuito di stabilizzazione interno dell'Agilent N744A è più efficiente al crescere della corrente, per basse frequenze.

Tabella 2.1: Valori di corrente, caduta di tensione ai capi di R e valore rms della PSD ai capi della resistenza in un circuito resistivo. Vengono riportati due valori rms della corrente calcolati integrando rispettivamente fino a 102.4kHz e 20kHz.

| Alimentatore | $I(mA)$ | $V_R(mV)$ | $I_{rms}(mA)$ | |
|------------------|----------------|-----------------|---------------|-------|
| Agilent N5744A | 28.6 ± 1.0 | 14.3 ± 0.1 | 19.16 | 15.07 |
| | 1001 ± 5 | 500.3 ± 0.6 | 13.91 | 8.44 |
| | 5002 ± 10 | 2501 ± 3 | 11.67 | 6.15 |
| Kepco BOP-20-10M | 3.2 ± 0.9 | 1.6 ± 0.1 | 5.22 | 2.08 |
| | 1005 ± 5 | 502.5 ± 0.6 | 5.12 | 2.00 |
| | 5004 ± 10 | 2502 ± 3 | 5.17 | 2.04 |

Le misure effettuate con l'alimentatore Kepco BOP-20-10M sono del tutto indipendenti dal valore della corrente erogata. Questo lascia presupporre che il rumore in questa configurazione sia abbastanza basso da non poter essere misurato. Quello che di fatto si è misurato è una caratteristica dello strumento, infatti i valori rms ottenuti risultano confrontabili con quello che si ottiene da una misura analogica con la sonda dell'analizzatore scollegata (osservando dunque il *fondo* dello strumento).

2.2.2 – Spettro di potenza del circuito completo con due diversi sensori

Una volta ottenuta una caratterizzazione del rumore sull'uscita di corrente di entrambi gli alimentatori è possibile ricollegare il carico, portando il circuito alla configurazione originaria. Avendo a disposizione due diversi sensori si hanno ora a disposizione due diverse configurazioni di misura per ogni alimentatore. Una prima opzione è quella di ripetere le misure ai capi della resistenza di sensing, fidandosi del fatto che, con l'alimentatore Agilent 6692 spento, la corrente I_R che attraversa la resistenza sia la stessa che attraversa anche le bobine. Ciò è ragionevole dato che, nell'intervallo di valori di interesse della corrente, non è possibile avere tensioni sufficientemente grandi da polarizzare il diodo D2, il quale si comporta come un interruttore aperto. Una seconda opzione è costituita dall'utilizzare un trasduttore ad Effetto Hall (LEM it150-s) sul ritorno delle bobine e misurare la PSD della caduta di tensione ai suoi capi. In questo modo non viene misurata direttamente la corrente I_C che attraversa le bobine, bensì la corrente indotta sul sensore dal campo magnetico prodotto da I_C .

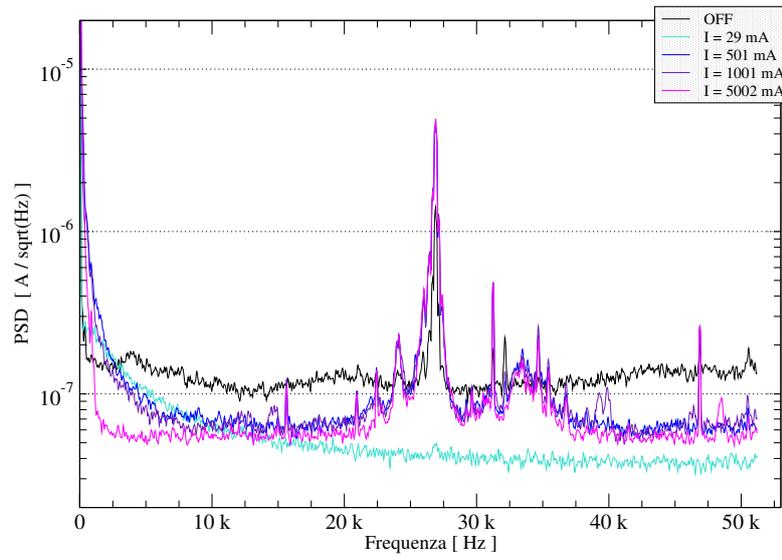
Il circuito viene riportato nella configurazione illustrata in figura 2.1 e viene misurata la PSD ai capi della resistenza di sensing. Si ripete inoltre tale misura ai capi del trasduttore ad effetto Hall. Le misure vengono ripetute per entrambi i tipi di alimentatore. Le misure della caduta di tensione V_R ai capi della resistenza forniscono inoltre il valore effettivo della corrente che circola nel circuito. Vengono inoltre misurate le PSD

quando l'alimentatore è spento. La frequenza massima è impostata a 51.2kHz, con una risoluzione di 32Hz (1600 punti). Il numero di misure M mediate dallo strumento è 100.

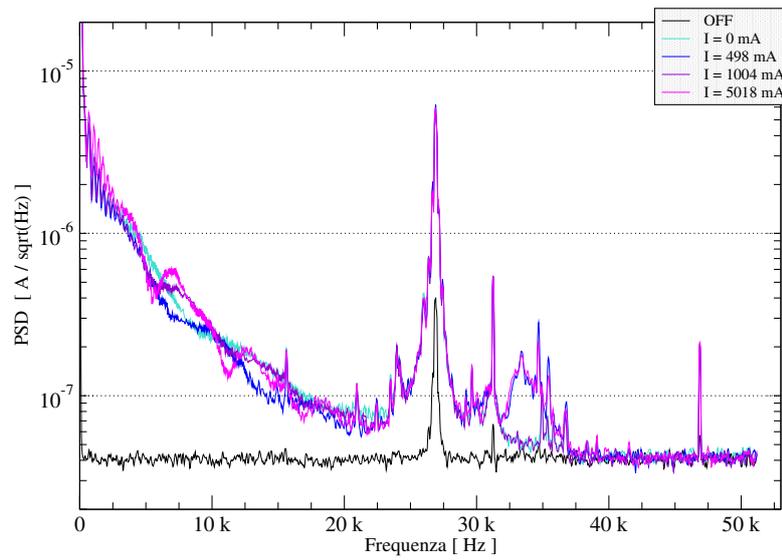
In tabella 2.2 sono riportati i parametri delle misure condotte, mentre nelle figure 2.5 e 2.6 è riportato l'andamento della PSD.

Tabella 2.2: *Valori di corrente, caduta di tensione ai capi di R e valore rms della PSD ai capi di due diversi sensori, utilizzando due diversi alimentatori.* Vengono riportati due valori rms della corrente calcolati integrando rispettivamente fino a 51.2kHz e 20kHz.

| Sensore | Alimentatore | $I(mA)$ | $V_R(mV)$ | $I_{rms}(mA)$ | |
|-------------|------------------|----------------|-------------------|---------------|-------|
| R | Kepco BOP-10-20M | 0.01 ± 0.1 | 0.005 ± 0.001 | 22.83 | 18.53 |
| | | 498 ± 4 | 249 ± 1 | 21.80 | 17.22 |
| | | 1004 ± 5 | 502 ± 1 | 22.67 | 18.46 |
| | | 5018 ± 10 | 2509 ± 3 | 25.78 | 21.21 |
| | | <i>OFF</i> | 0.00 | 2.27 | 0.86 |
| | Agilent N5744A | 28.6 ± 1.0 | 14.3 ± 0.1 | 4.59 | 3.34 |
| | | 501 ± 3 | 250.3 ± 0.3 | 10.57 | 5.99 |
| | | 1001 ± 5 | 500.3 ± 0.6 | 9.76 | 5.09 |
| | | 5002 ± 10 | 2501 ± 3 | 17.87 | 13.50 |
| | | <i>OFF</i> | 0.00 | 8.05 | 3.71 |
| LEM it-150s | Kepco BOP-10-20M | 0.2 ± 0.9 | 0.1 ± 0.1 | 17.40 | 6.86 |
| | | 496 ± 3 | 248.2 ± 0.3 | 20.42 | 10.06 |
| | | 1003 ± 5 | 501.3 ± 0.6 | 20.63 | 10.60 |
| | | 5018 ± 10 | 2509 ± 3 | 20.69 | 10.39 |
| | | <i>OFF</i> | 0.00 | 16.35 | 5.96 |
| | Agilent N5744A | 30 ± 3 | 15 ± 1 | 16.41 | 6.18 |
| | | 502 ± 4 | 251 ± 1 | 16.28 | 6.20 |
| | | 1002 ± 5 | 500.8 ± 0.6 | 16.98 | 6.88 |
| | | 5002 ± 10 | 2501 ± 3 | 16.53 | 6.60 |
| | | <i>OFF</i> | 0.00 | 15.89 | 5.64 |

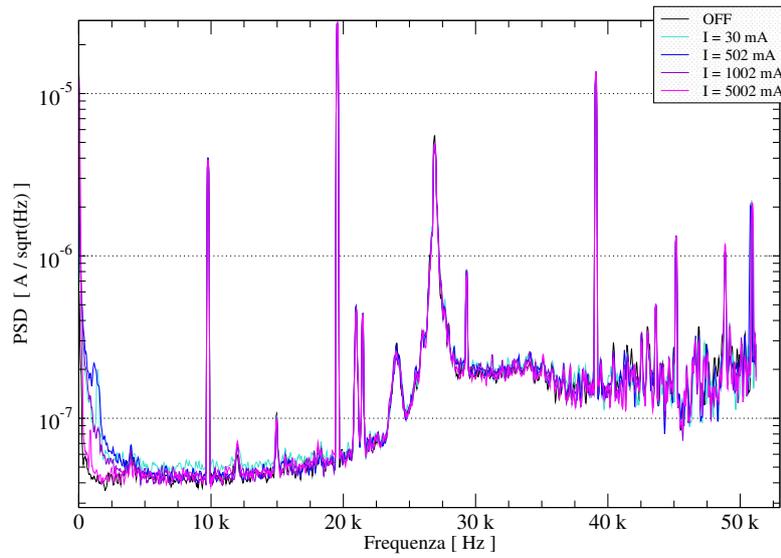


(a) Agilent N5744A.

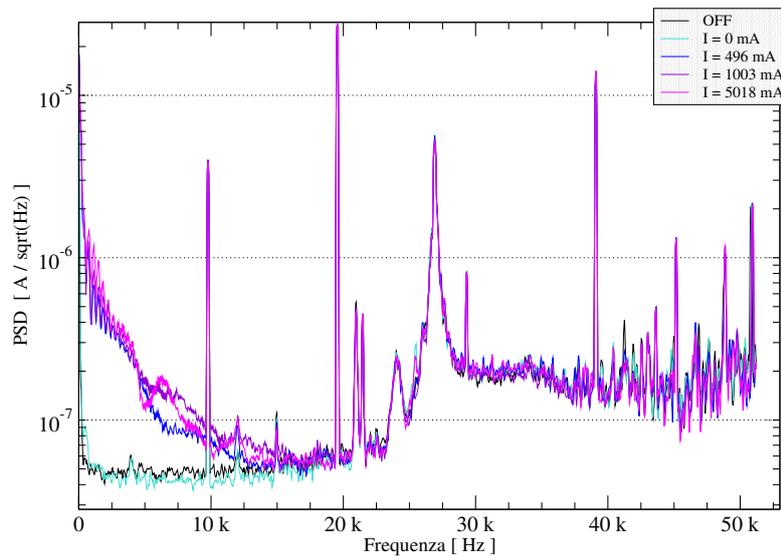


(b) Kepco BOP-20-10M.

Figura 2.5: Densità spettrale di rumore misurata ai capi della resistenza di sensing per diversi valori di corrente utilizzando due diversi alimentatori.



(a) Agilent N5744A.



(b) Kepco BOP-20-10M.

Figura 2.6: Densità spettrale di rumore misurata ai capi del sensore ad effetto Hall per diversi valori di corrente utilizzando due diversi alimentatori.

In base a queste misure si possono fare alcune rapide considerazioni. Come si può vedere dalle figure 2.5 e 2.6, il sensore ad effetto Hall ha un fondo di rumore più alto rispetto alla resistenza di sensing, inoltre risulta più rumoroso. In buona parte degli spettri è presente un picco a 26.88kHz, probabilmente dovuto ad un fenomeno di pick-up. Inoltre gli spettri relativi al sensore ad effetto Hall presentano picchi molto marcati,

che spazzano quasi tutto lo spettro, dati dalle risonanze degli alimentatori a commutazione impiegati in altre zone dell'esperimento. Si può anche vedere come la misura ad alimentatore spento ai capi della resistenza, utilizzando l'Agilent N5744A abbia un fondo notevolmente più alto rispetto a quello della misura analoga a corrente zero. Questo fatto è probabilmente accidentale, ma a posteriori non è possibile rincondurlo ad una ragione precisa.

2.3 — Cross-correlazione

Un altro modo per conoscere lo spettro di potenza di un certo segnale è, come abbiamo visto nel primo capitolo, misurare la sua autocorrelazione. Supponiamo dunque di voler misurare l'autocorrelazione di un segnale $s(t)$, e supponiamo inoltre di disporre di uno strumento con due canali di entrata. Collegando ad entrambi i canali il segnale $s(t)$ otteniamo in generale due segnali in entrata diversi tra loro e tali che:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= s(t) + n_1(t) \\x_2(t) &= s(t) + n_2(t)\end{aligned}$$

dove n_1 ed n_2 rappresentano rispettivamente i segnali di rumore sui canali 1 e 2, introdotti dallo strumento. Quello che succede andando a misurare $c_i(\tau)$, cioè la correlazione tra il segnale i_1 e i_2 , se n_1 ed n_2 non sono correlati tra loro né con s , è che:

$$\begin{aligned}c^x(\tau) &= E[x_1(t) \cdot x_2(t + \tau)] = \\&= E[(s(t) + n_1(t)) \cdot (s(t + \tau) + n_2(t + \tau))] = \\&= E[s(t)s(t + \tau)] = c^s(\tau)\end{aligned}\tag{2.5}$$

indicando con $E[f(t)]$ il valore di aspettazione della generica funzione $f(t)$. In sostanza il contributo alla correlazione del rumore si media a zero e quello che otteniamo è l'autocorrelazione di $s(t)$. A questo punto per avere lo spettro di potenza $S_{s^2}(\nu)$ basta applicare il teorema di Wiener-Khinchin, cioè fare la trasformata di Fourier di $c^s(\tau)$.

Come si è detto però, il parametro t non è più continuo quando si fanno le misure. Possiamo riscrivere la 1.9, per una generica sequenza n_i come:

$$c_j = \frac{1}{T} \sum_i n_i \cdot n_{i+j}\tag{2.6}$$

e, analogamente a quello che si è detto in merito alla PSD, espandere il tempo di misura T , fermo restando che le sequenze n_i e c_j esistono in un numero finito di punti. Notiamo che la quantità j non è in generale un numero naturale, dato che la funzione di autocorrelazione è definita anche per τ negativi e nel caso ideale è simmetrica rispetto a $\tau = 0$. Ad essere precisi, in effetti, l'autocorrelazione non dipende da un vero e proprio

indice ma da un parametro $\tau_j = jt_s$, dove t_s è il tempo di campionamento per la sequenza n_i e j è un numero intero. Sottointendendo tale notazione, le relazioni 2.5 si possono esplicitare:

$$\begin{aligned}
c_j^x &= \frac{1}{T} \sum_i x_{1i} \cdot x_{2i+j} = \\
&= \frac{1}{T} \sum_i (s_i + n_{1i}) \cdot (s_{i+j} + n_{2i+j}) = \\
&= \frac{1}{T} \sum_i \{(s_i s_{i+j}) + (n_{1i} s_{i+j}) + (s_i n_{2i+j}) + (n_{1i} n_{2i+j})\} = \\
&= c_j^s + c_j^{n_1, s} + c_j^{s, n_2} + c_j^{n_1, n_2} = c_j^s
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Il teorema di Wiener-Khinchin, espresso dalle relazioni 1.13, si riporta nel caso discreto, nella forma:

$$DFT\{c_j^n\} = S_{n^2, j}^1 \tag{2.8}$$

dove $DFT\{f_i\}$ indica la trasformata di Fourier *discreta* della generica sequenza f_i .

Una volta chiariti questi concetti risulta chiaro che se il segnale che vogliamo studiare è il rumore $n(t)$, una misura di cross-correlazione risulta più efficace rispetto ad una misura diretta dello spettro di potenza. In effetti quando applichiamo la procedura descritta i disturbi sulla misura si mediano a zero, come si è mostrato nelle relazioni 2.5 e 2.7, e si ottiene una traccia con un *fondo* più basso ed è possibile misurare un segnale più debole del rumore del singolo canale di misura.

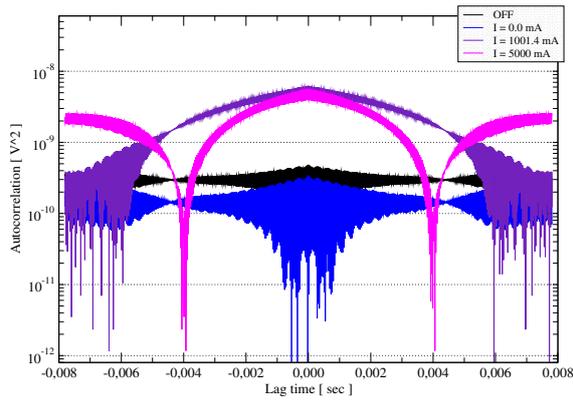
2.3.1 – Autocorrelazione e spettro di potenza

Nella stessa configurazione circuitale in cui si è misurata la PSD ai capi della resistenza e del sensore ad effetto Hall, viene misurata la cross-correlazione del segnale, allo scopo di ottenere uno spettro non limitato dal rumore indotto dallo strumento sulla misura a canale singolo. L'analizzatore viene impostato in maniera da ottenere il numero massimo di punti per traccia, pari a 2048. Allo scopo di poter avere, una volta fatta la DFT della sequenza, uno spettro confrontabile con quelli ottenuti tramite misura diretta della PSD, si imposta l'ampiezza dell'intervallo $[-\tau, \tau]$ a 15ms, in modo che la frequenza massima sia pari a circa 65.5kHz. La risoluzione in frequenza risulta essere circa di 64Hz. Analogamente ai casi precedenti, il numero di misure mediate M è impostato a 100.

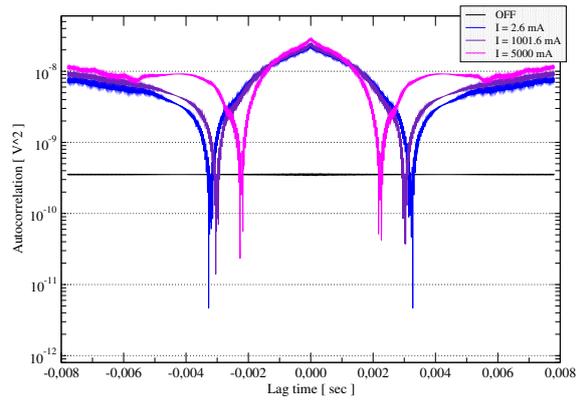
Tabella 2.3: Valori di corrente, caduta di tensione ai capi di R e valore rms di $DFT\{c(\tau)\}$ per due diversi sensori, utilizzando due diversi alimentatori. Vengono riportati due valori rms della corrente calcolati integrando rispettivamente fino a 65.5kHz e 20kHz.

| Sensore | Alimentatore | $I(mA)$ | $V_R(mV)$ | $I_{rms}(mA)$ | | |
|----------------|------------------|------------------|-----------------|-----------------|-------|-----|
| R | Kepco BOP-10-20M | 2.6 ± 0.9 | 1.3 ± 0.1 | 23.59 | 12.47 | |
| | | 1002 ± 5 | 500.8 ± 0.6 | 24.85 | 13.26 | |
| | | 5000 ± 10 | 2500 ± 3 | 29.55 | 15.82 | |
| | | <i>OFF</i> | 0.00 | 1.16 | 0.45 | |
| | Agilent N5744A | 0.0 ± 0.3 | 0.00 ± 0.1 | 4.54 | 1.07 | |
| | | 1001 ± 5 | 500.7 ± 0.6 | 13.40 | 4.73 | |
| | | 5000 ± 10 | 2500 ± 3 | 11.66 | 4.90 | |
| | | <i>OFF</i> | 0.00 | 2.59 | 0.50 | |
| | LEM it-150s | Kepco BOP-10-20M | 2.0 ± 0.9 | 1.0 ± 0.1 | 406 | 136 |
| | | | 1001 ± 5 | 500.4 ± 0.6 | 409 | 139 |
| 5000 ± 10 | | | 2500 ± 3 | 398 | 137 | |
| <i>OFF</i> | | | 0.00 | 390 | 134 | |
| Agilent N5744A | | 0.0 ± 0.3 | 0.00 ± 0.1 | 226 | 76 | |
| | | 1001 ± 5 | 500.7 ± 0.6 | 233 | 75 | |
| | | 5002 ± 10 | 2501 ± 3 | 234 | 78 | |
| | | <i>OFF</i> | 0.00 | 237 | 79 | |

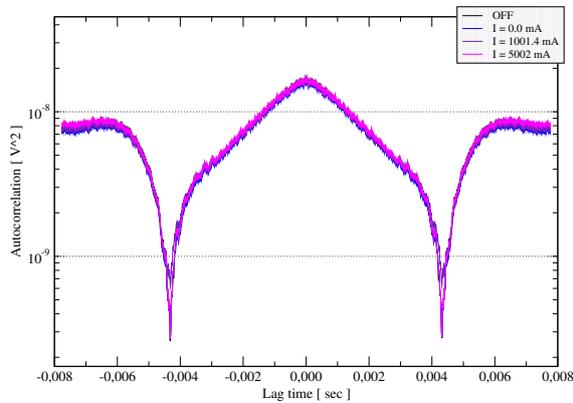
In tabella 2.3 sono riportati i parametri di misura e il valore rms di ogni traccia. In figura 2.7 è mostrata la correlazione del segnale per diversi valori di corrente nelle varie configurazioni. La correlazione è espressa in V^2 dato che il segnale è misurato in V. Per ogni traccia è stata successivamente calcolata la trasformata di Fourier discreta (figure 2.8 e 2.9) che viene espressa in A/\sqrt{Hz} .



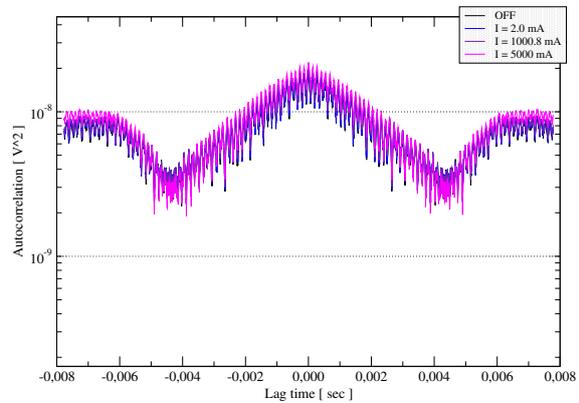
(a) *Agilent N5744A.*



(b) *Kepco BOP-20-10M.*

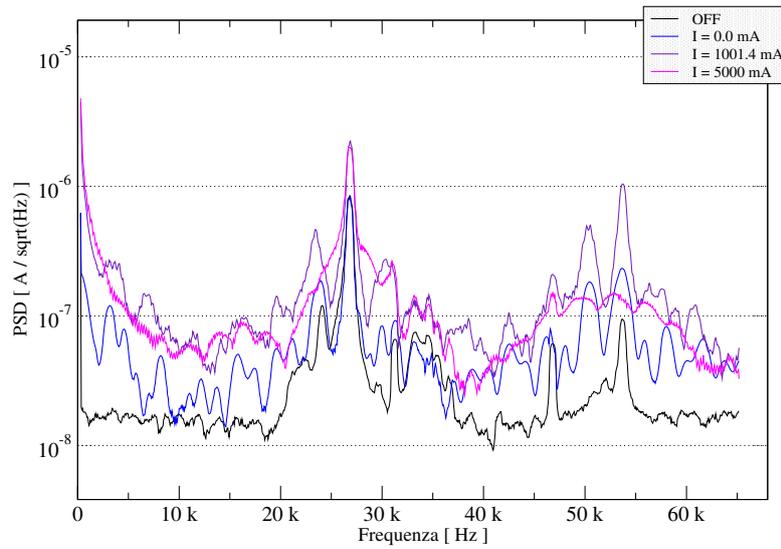


(c) *Agilent N5744A.*

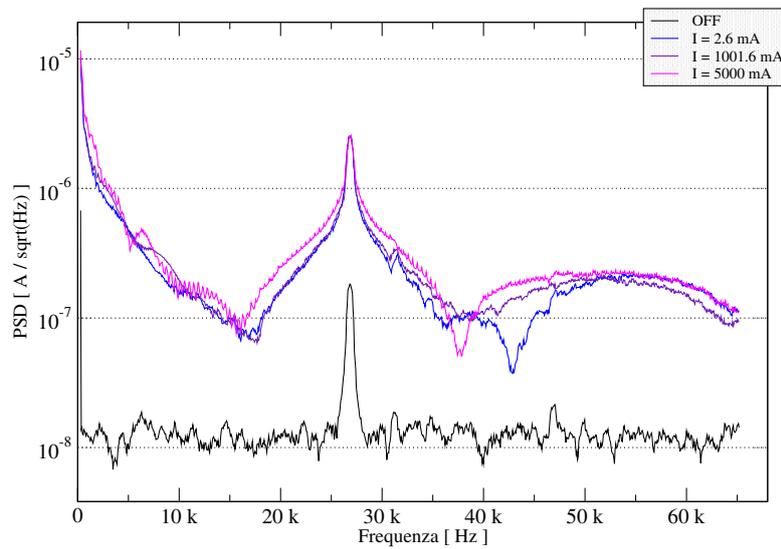


(d) *Kepco BOP-20-10M.*

Figura 2.7: *Correlazione del rumore ai capi della resistenza di sensing e del sensore ad effetto Hall utilizzando due diversi alimentatori. L'andamento di $c(\tau)$ misurata ai capi di R è mostrato nelle figure a) e b), mentre nelle figure c) e d) sono mostrate le curve per la $c(\tau)$ ai capi del sensore LEM it-150s, sulle quali si è operata una media mobile a 10 punti.*

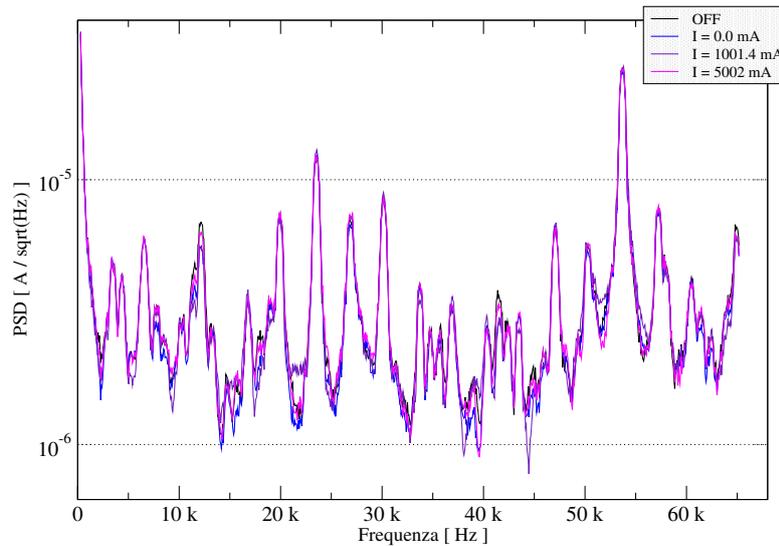


(a) *Agilent N5744A.*

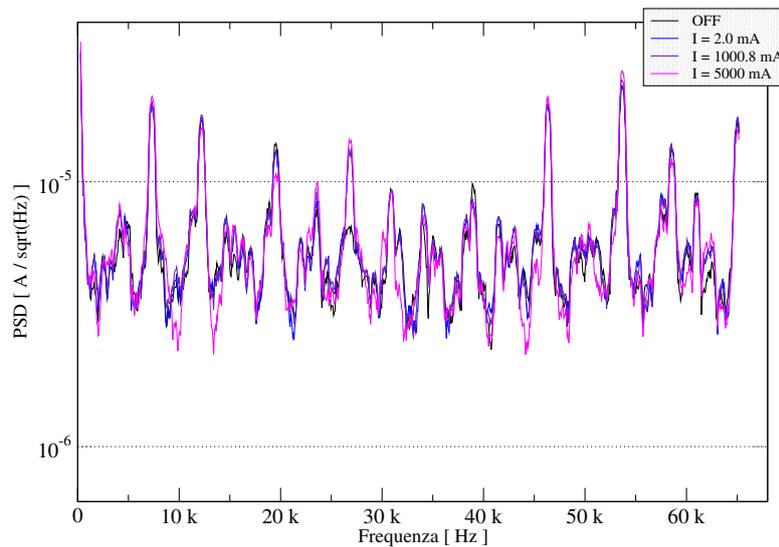


(b) *Kepco BOP-20-10M.*

Figura 2.8: *Trasformata di Fourier discreta della correlazione misurata ai capi della resistenza di sensing.* Sulle due tracce è stata operata una media mobile a 10 punti.



(a) *Agilent N5744A.*



(b) *Kepco BOP-20-10M.*

Figura 2.9: *Trasformata di Fourier discreta della correlazione misurata ai capi del sensore ad effetto Hall LEM it-150s.* Sulle due tracce è stata operata una media mobile a 10 punti.

Dalle misure di cross-correlazione ai capi della resistenza si ottengono, come ci si aspettava, spettri caratterizzati da un *fondo* più basso. Lo stesso non vale per le misure ai capi del sensore ad effetto Hall. Utilizzando l'alimentatore Kepco BOP-20-10M si nota che il picco a 26.88kHz tende ad allargarsi al crescere della corrente. Questo particolare è probabilmente dovuto alla presenza di due picchi a frequenze abbastanza vicine da non essere risolte dallo strumento.

3 Prospettive per la stabilizzazione

Lo scopo delle misure sopra descritte, come si è già detto, è principalmente quello di *quantificare* il rumore. Ad ogni modo questo lascia spazio per qualche osservazione.

La prima domanda a cui si può cercare di rispondere in base ai dati riportati riguarda i sensori utilizzati. Come si è visto, il sensore ad effetto Hall si è dimostrato di gran lunga più rumoroso della resistenza di sensing ed efficace entro un ristretto intervallo di frequenze (da 0 a 15kHz). Nonostante i migliori risultati ottenuti utilizzando la resistenza di sensing, c'è almeno un fattore da considerare: nella configurazione ottimale di misura il sensore andrebbe posizionato il più vicino possibile alle bobine per minimizzare il rumore e gli effetti parassiti. A differenza del sensore ad effetto Hall, per la resistenza questo non è possibile a causa della presenza di grandi correnti (è il caso dell'alimentatore Agilent 6692) le quali dissiperebbero troppa potenza scaldando il circuito per effetto Joule. Questo è un problema in generale, ma diventa molto importante in un esperimento di atomi freddi, dove un qualsiasi fenomeno di riscaldamento può provocare la perdita di tutto il campione, dato che la profondità di trappola (nel caso presente una trappola ottica[2]) è tipicamente $20 \div 30 \mu\text{K}$.

In assenza di rumore tecnico, inoltre, un contributo non trascurabile per grandi valori di corrente è il rumore *shot*. Nel *capitolo 1* è stato mostrato come poter realizzare un circuito di feedback *sub-shot*, ma per correnti elevate è necessario fare alcune osservazioni. La dissipazione è proporzionale alla corrente, mentre il segnale sulla resistenza – la sua caduta di potenziale – viene mantenuto costante. Questo si traduce in un S/N inversamente proporzionale alla corrente.¹ Il rumore *shot* è invece proporzionale alla radice della corrente. Quello che si ha è che, anche utilizzando una resistenza *piccola*, con grandi valori di corrente il S/N diminuisce drasticamente, rendendo dunque impos-

¹Il rapporto S/N [11] (o *S.N.R.*, letteralmente *Signal to Noise Ratio*), è il rapporto tra la potenza del segnale S e quella del rumore N .

sibile distinguere il segnale dal fondo di rumore e avere una corrente *sub-shot*. Quello che invece misuriamo nel caso presente è essenzialmente un rumore tecnico (interferenze, risonanza degli alimentatori switching e circuito di feedback dell'alimentatore DC), caratterizzato da un *fondo* ben più alto rispetto al rumore *shot*, che per 5A ha una PSD di $\sim 1.3\text{nA}/\sqrt{\text{Hz}}$ (circa sei volte più piccola di quelle misurate).

Una seconda osservazione riguarda gli alimentatori. Guardando alle tabelle del capitolo precedente e considerando le misure ai capi della resistenza, si nota un diverso comportamento tra i due alimentatori in termini di rumore alle basse frequenze, ossia nell'intervallo di frequenze di interesse. Per il Kepco BOP-20-10M, il valore *rms* integrato entro 20kHz si assesta, per quasi tutte le misure di PSD diretta, attorno al 53% del valore *rms* integrato su tutto lo spettro. Per le misure di cross-correlazione il valore è più alto, pari a circa l'80%. Per l'Agilent N5744A, invece l'*rms* sulle sole basse frequenze va, per le misure di PSD diretta, da circa il 23% al 42% del valore *rms* totale.

Questo fatto lascia ipotizzare due metodi per una possibile stabilizzazione del circuito. Il più semplice dal punto di vista della progettazione consiste nel filtrare l'uscita dell'Agilent N5744A, in maniera da tagliare tutto il possibile fuori dai 20kHz. Il secondo metodo, a cui accenniamo, consiste nel mettere a punto un circuito di feedback sull'uscita del Kepco BOP-20-10M, in grado di misurare il rumore a bassa frequenza e ridurlo mediante un circuito di retroazione. Tale circuito può essere costituito, ad esempio [11], da un transistor bipolare in parallelo al carico, che assorbe la corrente in eccesso. In altre parole si può implementare un sistema di controllo in grado di misurare la differenza tra la corrente effettiva e quella fissata dalla configurazione di lavoro, tradurla in termini di tensione e, tramite questa, pilotare il transistor per assorbire la quantità di corrente necessaria a portare la differenza a zero. Un tale sistema di controllo può essere costituito da un regolatore PI [16] che lavori a basse frequenze – cioè nella banda di frequenze di interesse – in modo tale da avere un guadagno costante (dell'ordine di 10^2) che vada a zero rapidamente dopo i 20kHz. In questo modo, utilizzando il Kepco BOP-20-10M, si dovrebbe riuscire a ridurre dinamicamente il rumore a basse frequenze e a raggiungere il limite di stabilità.

Inoltre per ottenere un sistema ancora più efficiente si possono combinare i due metodi, utilizzando l'Agilent N5744A filtrato per generare un certo valore di offset della corrente e il Kepco BOP-20-10M per la componente variabile, fissata dalla configurazione di lavoro, che viene corretta in modo dinamico dal transistor comandato dal PI.

3.1 — Filtro π su Agilent N5744A

Quello di cui si ha bisogno per filtrare l'uscita dell'Agilent N5744A è un filtro passabasso detto *filtro π* . In un filtro passabasso ben progettato l'attenuazione del segnale è circa 6dB/ottava per ogni elemento reattivo utilizzato: condensatori e induttanze. I condensatori devono essere posti in parallelo tra il carico e la massa, mentre le induttanze devono essere poste in serie tra l'alimentatore e il carico. Il problema con cui ci si deve confrontare riguarda ancora una volta le correnti elevate nel circuito. In effetti, per avere un filtro funzionante a correnti elevate, le induttanze devono essere costruite avvolgendo un filo abbastanza spesso da non bruciarsi e questo le rende ingombranti, pesanti e poco maneggevoli. Quindi bisogna progettare il filtro in modo tale da minimizzare il numero di elementi induttivi. Una soluzione consiste nell'utilizzare due condensatori da $1\mu\text{F}$ e una sola induttanza da 1mH , a formare schematicamente una *pi greca*, da cui il filtro prende il nome. Lo schema del filtro che è stato costruito è rappresentato in figura 3.1a, mentre in figura 3.1b) viene mostrato come il filtro viene inserito nel circuito.

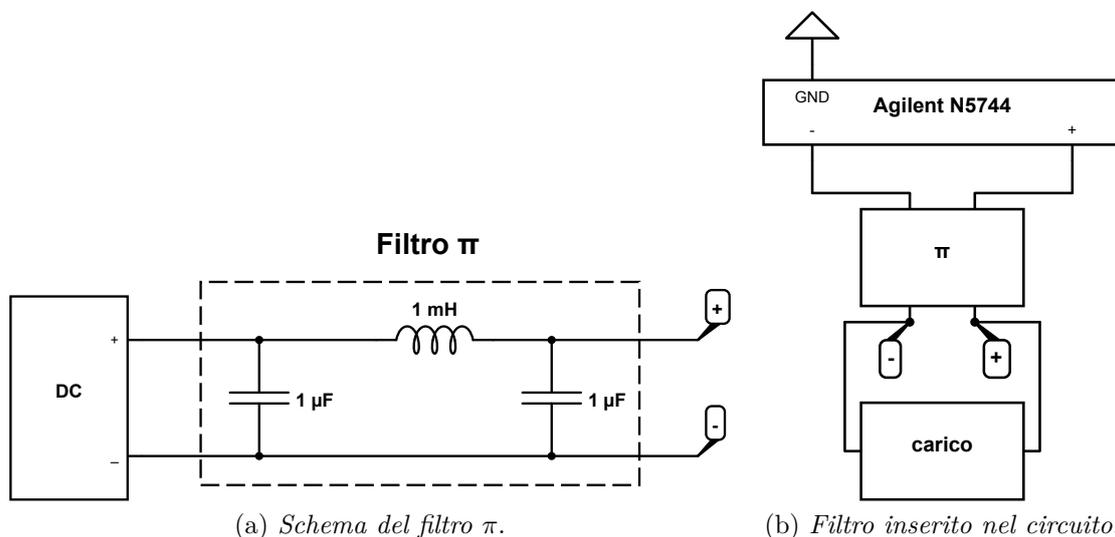


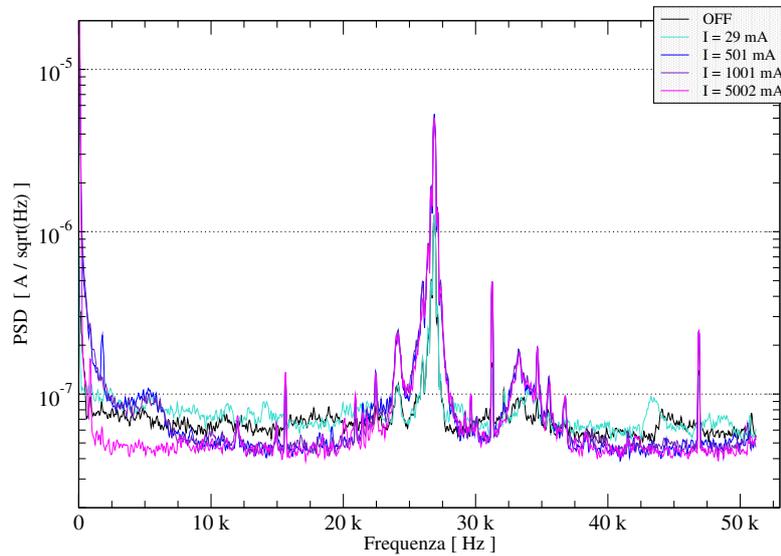
Figura 3.1: Nella figura b), il carico rappresenta sia la resistenza di sensing che le bobine.

La frequenza di taglio si calcola come:

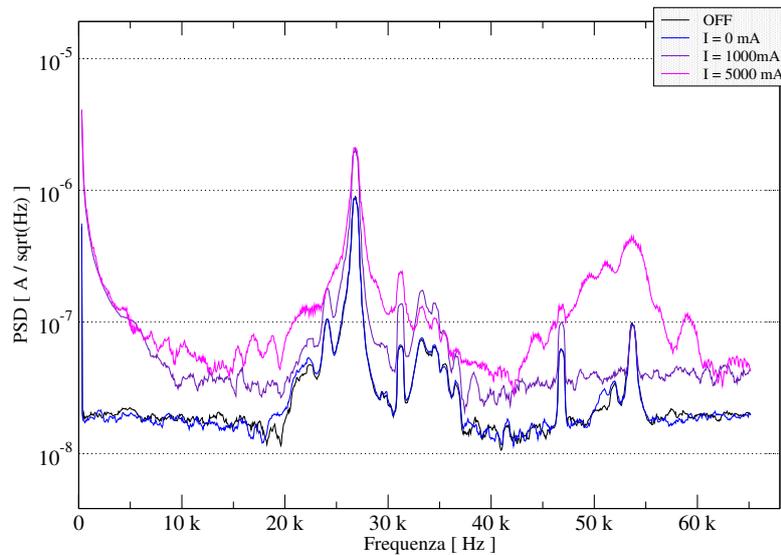
$$f_0 = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{LC}} \sim 5\text{kHz} \quad (3.1)$$

In questa configurazione viene misurata la PSD e la cross-correlazione ai capi della resistenza di sensing per diversi valori di corrente, in maniera analoga a quanto fatto senza la presenza del filtro. Le misure sono riportate in figura 3.2. Per le misure di PSD diretta, la frequenza massima è impostata a 51.2kHz e lo strumento ha una risoluzione

in frequenza di 32Hz. Per le misure di crosscorrelazione si utilizzano gli stessi parametri delle misure presentate nel capitolo precedente.



(a) *Densità spettrale.*



(b) *DFT della correlazione del segnale filtrato.*

Figura 3.2: Il grafico *a)* rappresenta la misura diretta di PSD, mentre il grafico *b)* rappresenta la trasformata di Fourier discreta della correlazione.

Tabella 3.1: Valori di corrente, caduta di tensione ai capi di R e valore rms della PSD ai capi della resistenza di sensing, utilizzando l'alimentatore Agilent N5744A. Nella tabella sono riportati i dati relativi alle misure dirette di PSD e alle misure della trasformata di Fourier della correlazione. Vengono riportati due valori rms della corrente: il primo è calcolato integrando su tutto lo spettro, il secondo integrando fino a 20kHz. La frequenza massima dello spettro per la PSD diretta e per la $DFT\{c(\tau)\}$ è rispettivamente 51.2kHz e ~ 65.5 kHz.

| Tipo misura | $I(mA)$ | $V_R(mV)$ | $I_{rms}(mA)$ | |
|-------------------|----------------|-----------------|---------------|-------|
| PSD diretta | 0.00 ± 0.3 | 0.00 ± 0.1 | 4.30 | 1.64 |
| | 501 ± 3 | 250.4 ± 0.3 | 8.20 | 3.84 |
| | 1000 ± 5 | 500.2 ± 0.6 | 8.22 | 3.85 |
| | 5000 ± 10 | 2500 ± 3 | 8.50 | 4.30 |
| | <i>OFF</i> | 0.00 | 3.97 | 1.45 |
| DFT $\{c(\tau)\}$ | 0.00 ± 0.3 | 0.00 ± 0.01 | 2.69 | 0.527 |
| | 1001 ± 5 | 500.3 ± 0.6 | 8.00 | 3.66 |
| | 5000 ± 10 | 2500 ± 3 | 11.92 | 4.09 |
| | <i>OFF</i> | 0.00 | 2.66 | 0.529 |

I dati in tabella 3.1 mostrano chiaramente come il valore rms della corrente sia più basso per il segnale filtrato. La specifica 2.3 non viene però raggiunta. In effetti dalla figura 3.2 si vede che il segnale, pur avendo un *fondo* più basso, è sempre caratterizzato dalla presenza di alcuni picchi, il più alto dei quali è a 26.88kHz.

3.2 — Simulazione di un filtro efficiente

È evidente che il filtro va progettato diversamente, in modo da attenuare il picco principale e ottenere un rumore più basso alle frequenze entro i 20kHz. Una possibilità può essere quella di modificare il filtro π inserendo in serie al primo condensatore una resistenza, come mostrato in figura 3.3. Inoltre si può aumentare la capacità dei condensatori in modo da ridurre ulteriormente la frequenza di taglio: se si aumenta di un fattore 100 la capacità dei condensatori, la frequenza di taglio, secondo la relazione 3.1 diminuisce di un fattore 10. È possibile simulare il comportamento di questo filtro, in termini di attenuazione alle varie frequenze, in modo da avere un'idea di quanto effettivamente possa ridurre il rumore. Utilizzando il software di simulazione di circuiti *ngspice* si ottengono i dati mostrati in figura 3.4, dove vengono messi a confronto il filtro utilizzato per le misure – il filtro π – e il filtro modificato.

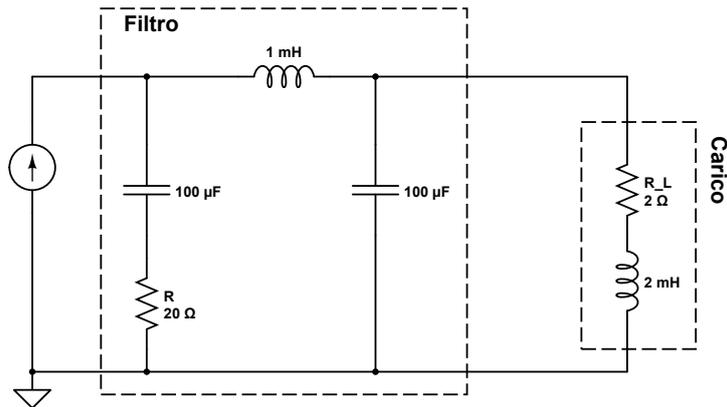


Figura 3.3: *Schema del filtro utilizzato per la simulazione.* La resistenza $R_L = 2\Omega$ rappresenta la componente resistiva del carico, valutato come la resistenza equivalente di cavi, bobine ed R di sensing. L'induttanza da 2mH rappresenta le bobine utilizzate per produrre il campo magnetico.

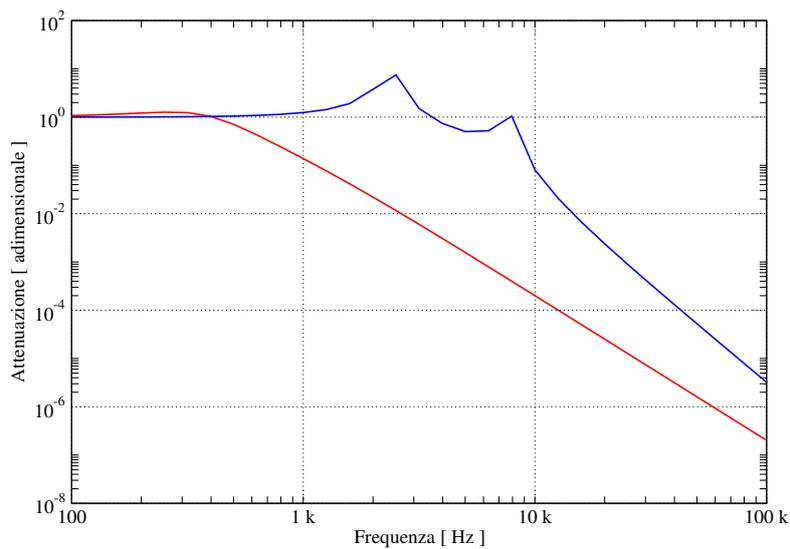


Figura 3.4: *Simulazione dell'attenuazione del filtro.* La curva in rosso rappresenta l'attenuazione del filtro schematizzato in figura 3.3. La curva in blu rappresenta l'attenuazione del filtro utilizzato per le precedenti misure.

In base alla simulazione si può vedere come un filtro di questo tipo abbia un'attenuazione di circa -60dB attorno a 10kHz . Per questa caratteristica un tale filtro potrebbe rivelarsi efficace nel cercare di ridurre il rumore nell'intervallo di frequenze di interesse e raggiungere il limite di stabilità ricercato.

4 Conclusioni

L'obiettivo di questo lavoro di tesi è stato quello di caratterizzare il rumore in corrente del circuito elettrico che verrà utilizzato per produrre il campo magnetico di bias in una trappola ottica, nell'ambito dell'esperimento BEC3 presso il LENS, Laboratorio Europeo di Spettroscopia Non-Lineare. La caratterizzazione del rumore è stata effettuata grazie alla misura della sua densità spettrale, mediante l'utilizzo di un analizzatore di spettro FFT. Le misure di densità spettrale di rumore sono state ottenute tramite una misura diretta e tramite la trasformata di Fourier dell'autocorrelazione. I due metodi di misura hanno fornito dati tra loro consistenti e si è osservato che il secondo metodo risulta più sensibile in quanto minimizza il rumore indotto sulla misura dallo strumento. Per riuscire a raggiungere il limite di stabilità, che consiste nell'avere un valore *rms* del rumore in corrente compatibile con quello stimato da misure preliminari, sono stati proposti due metodi che utilizzano rispettivamente un filtro ed un circuito di feedback con retroazione. Il primo metodo è stato realizzato sperimentalmente con un filtro π , tramite il quale si è riusciti a ridurre di un ordine di grandezza il valore *rms* del rumore. Sulla base di questi dati è stato simulato un altro tipo di filtro con cui dovrebbe essere possibile ridurre ulteriormente il rumore fino al raggiungimento del limite di stabilità. Questo renderà possibile avere un campo magnetico di bias stabile all'interno della trappola ottica e quindi fluttuazioni sufficientemente basse della separazione iperfine tra i livelli energetici degli atomi di ^{87}Rb utilizzati nell'esperimento. Questo costituisce il primo passo per riuscire ad ottenere un doppio condensato di ^{87}Rb e ^{41}K dal quale studiare fenomeni di magnetismo quantistico.

Bibliografia

- [1] H. J. Metcalf, P. van der Straten, *Laser cooling and Trapping*, Springer Science & Business Media (2001).
- [2] R. Grimm, M. Weidemüller, Y. B. Ovchinnikov, *Optical dipole traps for neutral atoms* Adv. At. Mol. Phys. **42**, 95-170 (2000). arXiv:physics/9902072
- [3] L. D. Smullin, H. A. Haus, *Noise in Electron Devices* MIT Press (2003).
- [4] W. Schottky, *Über spontane Stromschwankungen in verschiedenen Elektrizitätsleitern*, Ann. d. Phys. **57**, 541–567 (1918).
- [5] F. N. H. Robinson, *Noise and fluctuations in electronic devices and circuits*, Clarendon Press (1974).
- [6] F. Ortolani, *Appunti di metodi matematici*, Università di Bologna (2013).
- [7] A. Papoulis, S. U. Pillai, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw-Hill Companies (1991).
- [8] B. V. Gnedenko, A. N. Kolmogorov, K. L. Chung, *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*, Addison-Wesley (1968).
- [9] G. Poggi, *Appunti sul rumore elettrico*, <http://hdl.handle.net/2158/337452> (2004).
- [10] L. Page, D. Marlow, K. Kelly, *Lecture Notes on Characterizing Noise*, Princeton University, (2011). http://phy-page-imac.princeton.edu/~page/phy312/lecture_notes_s11/noise.pdf
- [11] P. Horowitz, W. Hill, *The art of electronics*, Cambridge University Press, (1989).

- [12] G. Kießlich, A. Wacker, E. Schöll, *Super-Poissonian current fluctuations in tunneling through coupled quantum dots*, Springer Proceedings in Physics, **110**, (2006).
- [13] K. G. Libbrecht, J. L. Hall, *A low-noise high-speed diode laser current controller*, Rev. Sci. Instrum., **64**, 2133–2135, (1993)
- [14] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company (1994).
- [15] A. L. Migdall, J. V. Prodan, W. D. Phillips, T. H. Bergeman, H. J. Metcalf *First Observation of Magnetically Trapped Neutral Atoms*, Phys. Rev. Lett. **54**, 2596 (1985)
- [16] M. Veronesi, *Regolazione PID*, Franco Angeli (2002)

Ringraziamenti

Desidero ringraziare il mio correlatore F. Minardi e tutto il gruppo di BEC3 per avermi dato la possibilità di svolgere questo lavoro di tesi. In particolare ringrazio Devang e Sara per aver reagito con entusiasmo alla mia curiosità in laboratorio.

Ringrazio inoltre il mio relatore M. Prevedelli, per aver scostato una porta che da su una fisica a me nuova, e avermi lasciato sbirciare.

Infine ringrazio i miei colleghi ed Amici, per tutte le *soluzioni ai problemi difficili*.