

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Fisica

L'importanza dei tempi di osservazione nella formulazione dell'ipotesi ergodica

Relatore:

Prof. Loris Ferrari

Presentata da:

Pietro Verzelli

Sessione II

Anno Accademico 2014/2015

*Alla mia famiglia,
per avermi supportato.*

*Ai miei amici tutti,
per avermi sopportato.*

6.371 - Tutta la moderna concezione del mondo si fonda sull'illusione che le cosiddette leggi naturali siano le spiegazioni dei fenomeni naturali.

L. Wittgenstein

Sommario

Questo elaborato tratta dell'ipotesi ergodica, problema centrale nell'ambito della giustificazione dei risultati della meccanica statistica, e dell'importanza che svolge in essa il tempo di osservazione. Dopo aver presentato varie formulazioni del problema ergodico, si esamina la questione dei tempi di ritorno e si mostra come il teorema di ricorrenza di Poincaré non sia in contraddizione con la possibilità del raggiungimento dell'equilibrio. Infine, l'analisi dell'apparente paradosso di Fermi-Pasta-Ulam e la discussione di alcune proposte di soluzione mostrano un'applicazione della trattazione astratta condotta precedentemente.

Indice

Ringraziamenti	iii
Introduzione	v
1 L'ipotesi ergodica	1
1.1 L'ipotesi ergodica	2
1.1.1 Equilibrio	2
1.1.2 Descrizione del problema	3
1.1.3 Prima assunzione: indipendenza dal tempo	4
1.1.4 Seconda assunzione: indipendenza dalle coordinate iniziali	4
1.1.5 L'ergodicità di Boltzmann	6
1.2 Teoremi ergodici	6
1.2.1 Teorema di Birkhoff	6
1.2.2 Teorema di Von Neumann	8
1.3 Formulazione astratta della teoria ergodica	11
1.3.1 Sistemi dinamici	11
1.3.2 Transitività metrica	11
1.3.3 Miscelamento (Mixing)	13
1.4 Oltre i sistemi dinamici: sistemi a molti gradi di libertà	14
1.4.1 Un approccio fisico	14
1.4.2 Quasi-ergodicità	16
1.4.3 Tempi di permanenza	16

2	Tempi di ricorrenza	18
2.1	Teorema di ricorrenza di Poincaré	19
2.1.1	Enunciato	19
2.1.2	Generalizzazione ai sistemi dinamici	21
2.2	Tempi di ritorno	22
2.2.1	Irreversibilità	22
2.2.2	comportamenti medi del tempo di ritorno	23
3	Il problema di Fermi-Pasta-Ulam	25
3.1	Sistemi non integrabili	26
3.1.1	Introduzione	26
3.1.2	Alcuni risultati sull'integrabilità	26
3.1.3	Il risultato di Fermi	28
3.2	Il problema di Fermi-Pasta-Ulam	29
3.2.1	Il modello	29
3.2.2	La simulazione	30
3.3	Soluzioni al problema di FPU	32
3.3.1	Risonanza	32
3.3.2	Solitoni	33
3.3.3	Teoria KAM	35
3.4	Un lavoro recente	35
3.4.1	Un diverso approccio teorico	35
3.4.2	Risultati numerici	37
	Conclusioni	41
	Bibliografia	43

Ringraziamenti

In primo luogo vorrei ringraziare il Prof. Ferrari per la pazienza e la disponibilità con le quali mi ha accompagnato lungo tutto lo svolgimento della tesi. Un ringraziamento particolare è dovuto al Prof. Servizi, per i consigli e l'aiuto che mi ha offerto, non solo in ambito accademico. Vorrei anche ringraziare il Prof. Bazzani per avermi trasmesso alcune idee sul senso della fisica e la Prof. Fiorese per i saggi consigli dispensati.

Ringrazio tutti i miei familiari per il sostegno, non solo economico, che mi hanno fornito lungo il percorso universitario e per avermi sostenuto e incoraggiato, spingendomi con delicatezza verso quella che ritengo essere la giusta direzione.

Tra i colleghi, è doveroso ringraziare in primo luogo Octavio, poichè il fatto che io abbia terminato questo percorso lo devo in larga parte alla pazienza con cui mi ha aiutato in tutti gli aspetti del mio percorso universitario e umano. Ringrazio poi Marco che ha dovuto sopportarmi nelle varie sessioni d'esame, Lorenzo per avermi ammonito quando ne avevo bisogno, Alessandra con cui ho condiviso con gioia le varie difficoltà, Marina per avermi mostrato quanto sono "preso male", Michelangelo per avermi risollevato dal baratro con i suoi preziosi aiuti, Emanuele per aver allietato la convivenza e lo studio, Sunny per l'aiuto informatico e teorico, Laura per aver condiviso con me i dolori della microelettronica, Arturo per la pragmaticità dei suoi consigli, Paolo per essere l'unico disposto alle divagazioni epistemologiche, Caterina per la vivacità con cui mi ha rallegrato, Alejandra per avermi richiamato all'ordine, Alessia per avermi scosso quando mi era più necessario, Pit per i preziosi insegnamenti, Luca per le gare di cibo, Rocco per avermi dato ragione, Sofia per gli appunti e le risate, Elena per i sorrisi, Onofrio per i numeri, Stenghel per l'esperienza e Giacomo per le citazioni.

Tra i non-fisici, ringrazio Michele per le discussioni interminabili ed interminate, Rapa

per aver ascoltato con pazienza le mie digressioni, Valerio che tiene in considerazione i miei “insegnamenti”, Drina, Mona, Sergio e Gaspa per la lega del male, le cene dei maschi e tutto ciò che ne è derivato, Valentina per la stima che nutre nei miei confronti (con la promessa di cercare di meritarmela), Elena che mi ha parlato schiettamente quando è stato necessario, Michela per aver bilanciato i miei eccessi, Camilla per avermi sostenuto quando ne avevo più bisogno, Chiara e Barbara che continuano a starmi a fianco dal liceo, Kurosh per aver colto sempre gli aspetti centrali, Picci, Richi ed Erri per le chiacchiere sui massimi sistemi, Maria Dalia, Lorenza, Barbara e tutti i compagni di Pergola con cui sono cresciuto, tutti coloro che sono passati per Via Murri ad allietare le serate, Ayn Rand, Lucio Battisti, Nietzsche, N.N. Taleb, Battiato, Federico Fiumani, D. Hofstadter, Gödel, Escher, Bach, Asimov, Arnold, Eraclito, Stirner, Amélie Nothomb, Alan Moore, Justin Hawkins, Woody Allen, G.L. Ferretti, Nanni Moretti, Joey Di Maio, Joni Mitchell, Borges e tutti coloro che hanno perturbato, come me, la funzione d’onda dell’universo.

Introduzione

L'apparato formale e concettuale della meccanica classica presenta difficoltà applicative notevoli quando si cerca di utilizzarlo per descrivere sistemi con un numero elevato di gradi di libertà. Scrivendo infatti le equazioni del moto per ogni grado di libertà ed integrandole sarebbe possibile ottenere una descrizione completa del comportamento del sistema, ma ciò risulta praticamente impossibile, per una questione meramente computazionale, da un punto di vista pratico. Inoltre, anche ammesso che fosse possibile integrare tali equazioni, non si riuscirebbero a conoscere le condizioni iniziali con abbastanza accuratezza, sia per l'inesistenza di un apparato sperimentale capace di misurare con la precisione necessaria un numero così elevato di variabili sia, a livello quantistico, per il principio di indeterminazione di Heisenberg che, come è noto, limita categoricamente le nostre possibilità di conoscere la posizione ed il momento contemporaneamente.

Tuttavia il fatto di avere un numero così elevato di gradi di libertà porta alla creazione di nuove leggi, legate alle proprietà statistiche del sistema in questione, che ci permettono di definire delle nuove grandezze con cui descrivere lo stato del sistema nel suo complesso, senza prendere in considerazione le componenti microscopiche che lo compongono. Questo non significa che tale descrizione del sistema prescindano dalle proprietà delle componenti elementari in esso presenti: quello che si vuole fare è ottenere una descrizione che non dipenda dalle proprietà di ogni singolo costituente, sfruttando appunto il fatto che un numero così elevato di gradi di libertà porta a nuove proprietà emergenti.

L'applicabilità di tali leggi statistiche è argomento di discussione: non è chiaro se queste proprietà macroscopiche possano discendere in modo naturale dalle leggi della meccanica (classica o quantistica) applicate ad un numero enorme di corpi o se sia invece necessario introdurre delle ipotesi aggiuntive pensate appositamente per spiegare l'emergenza di tali

proprietà. In tale contesto, gioca un ruolo fondamentale quella che Boltzmann chiamò *Ipotesi Ergodica*, la cui discussione è l'oggetto di questo lavoro.

Nel Capitolo 1 viene introdotto il problema dell'ergodicità come la discussione sulla possibilità di identificare la media di una grandezza termodinamica calcolata sullo spazio delle fasi con la sua media temporale. Una prima soluzione venne data da Boltzmann (al quale si deve il termine "Ergodicità"), ma risultò subito chiaro che la sua proposta aveva dei problemi concettuali. Dopo una discussione preliminare della questione, nel corso del capitolo vengono presentati due approcci al problema dovuti rispettivamente a Birkhoff e Von Neumann, a cui fa seguito una trattazione dal punto di vista dei sistemi dinamici. Il capitolo si conclude con una discussione fisica del problema.

Il capitolo 2 si concentra sul problema della ricorrenza: il teorema del ritorno di Poincaré, secondo cui un sistema hamiltoniano ritornerà sempre nei pressi delle condizioni iniziali, sembra affermare sostanzialmente l'impossibilità del raggiungimento di uno stato di equilibrio: l'irreversibilità appare compromessa e, con essa, le fondamenta della termodinamica. Nel capitolo si discute la valenza del teorema nell'ambito della questione termodinamica, basandosi su alcuni risultati dovuti ai sistemi dinamici.

Il problema di Fermi-Pasta-Ulam è l'oggetto del Capitolo 3: l'osservazione, in una delle prime simulazioni numeriche fatte al computer, di una violazione dell'ergodicità per un sistema mise in crisi un risultato ottenuto da Fermi in giovane età. Dopo aver introdotto il modello, si discutono varie soluzioni, tra cui un lavoro del Marzo 2015.

Capitolo 1

L'ipotesi ergodica



Figura 1.1: **Ludwig Boltzmann** (1844-1906) *“Sono dell’opinione che il compito della teoria sia la costruzione di un’immagine del mondo esterno che esista solo internamente e che deve essere la nostra stella guida in tutti i pensieri e gli esperimenti.”*

1.1 L'ipotesi ergodica

1.1.1 Equilibrio

L'assunzione base della termodinamica è che dato un insieme di condizioni ambientali (temperatura, pressione, campi esterni, ect...) il sistema presenti definite proprietà all'equilibrio. Da questa assunzione discende direttamente l'esistenza di stati di processi reversibili: se lo stato del sistema è univocamente determinato dai fattori ambientali, quando tali fattori torneranno (dopo aver subito una qualche variazione) allo stato di partenza, lo stesso deve accadere al sistema. Tale assunzione è valida, almeno approssimativamente, in molti casi ma non in tutti: in particolare capita spesso che variazioni brusche (se paragonate ad un qualche tempo proprio del sistema) causino una situazione di irreversibilità.

Risulta chiaro che il concetto di equilibrio dipende fortemente dal tempo di osservazione che si prende in considerazione. Il sistema avrà un *tempo di rilassamento* t_0 , che è il tempo richiesto affinché sia raggiunto l'equilibrio, e un tempo t_m al di sopra del quale le proprietà macroscopiche non cambiano. La trattazione termodinamica deve avvenire quindi per un τ compreso tra questi due valori,

$$t_0 < \tau < t_m \tag{1.1}$$

in modo che il sistema possa essere considerato in equilibrio.

Ad esempio, se si versa dell'acqua calda in un bicchiere contenente dell'acqua fredda, prima di poter considerare il sistema in equilibrio bisognerà attendere un tempo sufficiente a fare in modo che tutta l'acqua si trovi alla stessa temperatura, altrimenti la misura potrebbe variare a seconda del punto in cui verrà effettuata. Inoltre se si prende in considerazione un intervallo di tempo troppo esteso l'acqua evaporerà (almeno in parte) e adatterà la sua temperatura a quella dell'ambiente in tale lasso di tempo, per cui si osserverà, anche in questo caso, una variazione delle variabili macroscopiche. Da questo semplice esempio risulta chiaro quanto, nella pratica, il concetto di equilibrio sia una approssimazione

anche se l'accuratezza della termodinamica nella descrizione dei fenomeni ci porta a pensare che tale approssimazione non tralasci informazioni cruciali.

1.1.2 Descrizione del problema

Il problema di giustificare l'equivalenza dei valori di aspettazione teorici (ottenuti con la teoria dell'ensemble e la media in fase) e quelli misurati sperimentalmente (associati quindi a delle medie temporali) venne affrontato per primo da Ludiwig Boltzmann. Il suo programma era quello di derivare la termodinamica dalla conoscenza delle leggi microscopiche che regolano il numero enorme di gradi di libertà da cui è composto un sistema macroscopico.

Formuliamo il problema considerando che il sistema in questione sarà caratterizzato dalle sue coordinate iniziali rappresentate da un punto dello spazio delle fasi $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$, ovvero un insieme di $6N$ coordinate¹. Limitandoci a considerare dei sistemi isolati, il sistema evolverà a partire da \mathbf{z} seguendo le leggi della meccanica (classica). L'evoluzione del sistema sarà quindi descritta dal flusso di fase agente sul punto:

$$\Phi_t(\mathbf{z}) = \mathbf{z}_t \tag{1.2}$$

da cui possiamo seguire l'evoluzione di una quantità osservabile F :

$$F(\mathbf{z}_t) = F(\mathbf{z}, t). \tag{1.3}$$

La nostra misura coinvolgerà la media temporale dell'osservabile in questione ²:

$$\overline{F_\tau(\mathbf{z})} := \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} dt F(\mathbf{z}, t) \tag{1.4}$$

Considerando quindi τ molto più grande dei tempi caratteristici del sistema e ponendo per semplicità $t_0 = 0$

$$\overline{F(\mathbf{z})} := \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt F(\mathbf{z}, t) \tag{1.5}$$

¹Solitamente si utilizza uno zero come pedice per indicare la condizione iniziale, ma si è scelto di ometterlo per non appesantire la notazione.

²In realtà non è ovvio che le misure effettuate sperimentalmente siano esattamente di questa natura, ma noi assumeremo vero questo fatto, almeno per misure ideali.

La descrizione termodinamica di un sistema richiede solo poche variabili e ciò significa che sistemi nello stesso stato termodinamico (cioè con lo stesso valore di tali variabili *macroscopiche*) saranno in generale in un diverso stato *microscopico*. Questo significa che se $F(\mathbf{z}, t)$ è una osservabile corrispondente ad una quantità termodinamica, le formule (1.4) e (1.5) non dovrebbero dipendere dalle condizioni iniziali. Inoltre, i dati empirici mostrano che $\overline{F(\mathbf{z})} = \overline{F_\tau(\mathbf{z})}$ per $\tau > t_0$ in condizioni di equilibrio.

Per ottenere una descrizione formale del passaggio da microscopico a macroscopico dobbiamo quindi fare delle assunzioni che ci permettano di descrivere formalmente ciò che si osserva in natura.

1.1.3 Prima assunzione: indipendenza dal tempo

In primo luogo, abbiamo visto, è necessaria l'esistenza di due tempi caratteristici dei sistemi t_0 e t_m (con $t_0 \ll t_m$) e che la media $\overline{F_\tau(\mathbf{z})}$ non dipenda da τ per $t_0 < \tau < t_m$.

Dal fatto empirico che un sistema isolato raggiunge, dopo un certo tempo, l'equilibrio possiamo porre $\overline{F(\mathbf{z})} = \overline{F_\tau(\mathbf{z})}$ per $\tau > t_0$ quando t_m è abbastanza grande. Perciò anche se non si parte da una condizione di equilibrio, $\overline{F(\mathbf{z})}$ è sempre uguale al valore all'equilibrio per $\tau \rightarrow \infty$.

Possiamo, in virtù di ciò, accontentarci di una condizione meno stringente e richiedere semplicemente l'esistenza di $\overline{F(\mathbf{z})}$ (Primo teorema di Birkhoff): notiamo esplicitamente che questa segue dalle assunzioni fatte in precedenza, ma da sola non è sufficiente a giustificarle (non è quindi un se e solo se).

1.1.4 Seconda assunzione: indipendenza dalle coordinate iniziali

Definiamo la media nello spazio delle fasi come:

$$\langle F \rangle := \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma} d\Gamma F(\mathbf{z}) \quad (1.6)$$

In cui Γ rappresenta lo spazio delle fasi accessibile al sistema di cui $d\Gamma$ è il volume infinitesimo e $\mu = \mu(\Gamma)$ la misura dello spazio delle fasi, cioè:

$$\mu := \int_{\Gamma} d\Gamma \quad (1.7)$$

Siamo ora interessati a studiare come questa definizione teorica si lega a $\overline{F(\mathbf{z})}$, quantità misurabile sperimentalmente. Innanzitutto notiamo che per l'indipendenza di $\overline{F(\mathbf{z})}$ dal tempo

$$\langle F \rangle = \langle F \rangle \left(\frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} dt \right) = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} dt \langle F \rangle = \overline{\langle F \rangle} \quad (1.8)$$

E poichè, a meno di condizioni particolari, la media nello spazio delle fasi e quella temporale sono indipendenti possiamo scambiare i due integrali, ottenendo:

$$\begin{aligned} \overline{\langle F \rangle} &= \int_{t_0}^{t_0+\tau} dt \left(\frac{1}{\mu} \int d\Gamma \frac{1}{\tau} F(z) \right) \\ &= \frac{1}{\mu} \int d\Gamma \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} dt F(z) \\ &= \frac{1}{\mu} \int d\Gamma \overline{F(\mathbf{z})} =: \langle \overline{F} \rangle \end{aligned} \quad (1.9)$$

Abbiamo cioè verificato che la media in fase è uguale alla media temporale della media in fase stessa, che a sua volta è uguale alla media in fase della media temporale. In simboli:

$$\langle F \rangle = \overline{\langle F \rangle} = \langle \overline{F} \rangle \quad (1.10)$$

Il risultato (1.10) non è però sufficiente: ciò che noi richiediamo è che $\langle F \rangle$ risulti uguale al valore misurabile sperimentalmente $\overline{F(\mathbf{z})}$. Affinchè ciò sia possibile è necessaria una seconda richiesta, ovvero l'indipendenza della media temporale dalle coordinate iniziali \mathbf{z} . Infatti, in tal caso:

$$\langle F \rangle = \langle \overline{F} \rangle = \frac{1}{\mu} \int d\Gamma \overline{F} = \overline{F} \frac{1}{\mu} \int d\Gamma = \overline{F} \quad (1.11)$$

Questa equivalenza giustifica l'uso della media nello spazio delle fasi invece della media temporale ed è uno dei fondamenti della meccanica statistica.

1.1.5 L'ergodicità di Boltzmann

Dalla prima assunzione fatta, segue che \overline{F} è lo stesso in ogni punto di una data traiettoria dello spazio delle fasi, cioè si mantiene costante (secondo teorema di Birkhoff). Si presenta il problema di verificare se la assunzione di indipendenza dalle condizioni iniziali sia valida per ogni cammino (a meno di un insieme a misura nulla).

Boltzmann propose come condizione per cui la (1.11) fosse verificata il fatto che le traiettorie del sistema passino per ogni punto dello spazio delle fasi. Poichè ogni punto risulterebbe, prima o poi, occupato dal sistema, l'uguaglianza risulterebbe verificata. Boltzmann chiamò tale assunzione *Ipotesi Ergodica* (dal greco $\epsilon\rho\gamma\omicron\nu$ "lavoro" e $\omicron\delta\omicron\varsigma$ "cammino").

Questa ergodicità nel senso di Boltzmann presenta una problemantica: essa, riferendosi a delle traiettorie nello spazio delle fasi, tratta, da un punto di vista matematico, di curve monodimensionali che, per le proprietà dinamiche del sistema, sono continue e non intersecantesi. Tuttavia è impossibile mettere in corrispondenza biunivoca uno spazio di due o più dimensioni con uno monodimensionale tramite una curva continua e quindi l'ergodicità in senso di Boltzmann non può esistere. Perciò d'ora in avanti chiameremo la relazione (1.11) *Ergodicità*, avendo presente che questa non implica l'ergodicità nel senso di Boltzmann.

1.2 Teoremi ergodici

1.2.1 Teorema di Birkhoff

Sia V il volume di un sottospazio nello spazio delle fasi. Chiediamo che tale volume sia invariante sotto Φ_t , cioè:

$$\Phi_t(V) = V \tag{1.12}$$

Inoltre chiediamo che $F(\mathbf{z})$ con $\mathbf{z} \in V$ sia una funzione $L_1(V)$. Il teorema asserisce che sotto tali condizioni, per quasi tutti gli \mathbf{z} esiste la media temporale \overline{F} definita dalla (1.5). F può quindi dipendere da \mathbf{z} (coordinate iniziali) per $t = 0$ ma il secondo teorema afferma che deve assumere lo stesso valore per tutti i punti appartenenti alla stessa traiettoria e

perciò:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau + t} \int_0^{\tau+t} dt' F(\mathbf{z}, t') = \overline{F(\mathbf{z})} \quad (1.13)$$

Inoltre

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau+t} dt' F(\mathbf{z}, t') - \frac{1}{\tau + t} \int_0^{\tau+t} dt' F(\mathbf{z}, t') = \frac{t}{\tau(\tau + t)} \int_0^{\tau+t} dt' F(\mathbf{z}, t') \quad (1.14)$$

che per $\tau \rightarrow \infty$ tende a zero, poichè la (1.13) implica che $\int_0^{\tau+t} dt' F(\mathbf{z}, t') = O(\tau)$. Perciò:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau + t} \int_0^{\tau+t} dt' F(\mathbf{z}, t') = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau+t} dt' F(\mathbf{z}, t') = \overline{F(\mathbf{z})} \quad (1.15)$$

Ora

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} dt' F(\mathbf{z}, t_0 + t') &= \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{\tau+t_0} dt' F(\mathbf{z}, t') = \\ &= \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau+t_0} dt' F(\mathbf{z}, t') - \frac{1}{\tau} \int_0^{t_0} dt' F(\mathbf{z}, t') \end{aligned} \quad (1.16)$$

Per $\tau \rightarrow \infty$, il primo termine della somma tende a \overline{F} per quanto detto in (1.15) mentre il secondo termine tende a zero. Possiamo allora riscrivere, passando al limite:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} dt' F(\mathbf{z}, t_0 + t') = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} dt' F(\mathbf{z}_{t_0}, t') = \overline{F(\mathbf{z}_{t_0})} \quad (1.17)$$

e perciò si ha

$$\overline{F(\mathbf{z}_{t_0})} = \overline{F(\mathbf{z})} \quad (1.18)$$

Che prova il secondo teorema. Otteniamo quindi il *teorema fondamentale*:

Teorema 1.2.1 (Fondamentale). *Condizione necessaria e sufficiente affinché Φ_t sia ergodica è che tutte le funzioni invarianti F siano costanti.*

[Per funzione invariante si intende la F tale che $F(\mathbf{z}_t) = F(\Phi_t(\mathbf{z})) = F(\mathbf{z})$]

Dimostrazione.

Notiamo che è condizione necessaria poichè se F è invariante ed ergodica, $F(\mathbf{z}_t) = F(\mathbf{z}) = \overline{F}$ è anche uguale a $\langle F \rangle$ che è una costante indipendente da \mathbf{z} .

Risulta invece essere sufficiente secondo quanto visto parlando della (1.11), dato che quando \overline{F} è costante e indipendente da \mathbf{z} è ergodica.

□

Questo risultato è anche detto *teorema ergodico individuale*, poichè è riferito ad ogni cammino separatamente.

1.2.2 Teorema di Von Neumann

Il teorema ergodico di Von Neumann è basato su un cambio di prospettiva: invece di concentrarsi sul flusso di fase (che non può essere osservato), si pone l'attenzione sull'evoluzione delle osservabili. Prendendo in considerazione funzioni quadrato sommabili ($\in L_2$), ovvero le F tali che:

$$\int_{\Gamma} d\Gamma |F|^2 < \infty \quad (1.19)$$

Per uno spazio delle fasi con misura finita (che è quello che ci interessa trattare) risulta che le funzioni quadrato sommabili sono anche sommabili e per tale classe di funzioni è ben definita non solo la media in fase (1.6) ma anche lo scarto quadratico medio

$$\sigma_F^2 := \langle F^2 \rangle - \langle F \rangle^2 \quad (1.20)$$

Una evoluzione temporale può essere rappresentata da un operatore lineare nello spazio funzionale

$$U_t F(\mathbf{z}) = F(\Phi_t(\mathbf{z})) \quad (1.21)$$

U_t è detto operatore indotto da Φ_t . Poichè \mathbf{z} è un punto dello spazio delle fasi in un sistema hamiltoniano, ogni sua funzione $F(\mathbf{z})$ seguirà l'evoluzione descritta dalle parentesi di Poisson

$$\frac{d}{dt} F = \{F, \mathcal{H}\} := \sum_k^N \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \frac{\partial F}{\partial q_k} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \frac{\partial F}{\partial p_k} \right] \quad (1.22)$$

Definendo l'operatore \mathcal{L} come:

$$i\mathcal{L} := \sum_k^N \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} \right] \quad (1.23)$$

si può dimostrare che esso è autoaggiunto ed è chiamato *operatore di Liouville* (i è l'unità immaginaria), la (1.22) diventa:

$$\frac{d}{dt} F = -i\mathcal{L}F \quad (1.24)$$

L'operatore di evoluzione nella (1.21) può quindi essere scritto come

$$U_t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-it)^k}{k!} \mathcal{L}^k \equiv e^{-t\mathcal{L}i} \quad (1.25)$$

ed è quindi un operatore unitario. Sulla base di tali considerazioni, Koopman dimostrò il seguente teorema:

Teorema 1.2.2 (di Koopman).

Nello spazio delle osservabili l'evoluzione è data da un gruppo a un parametro di operatori unitari.

Vediamo che la media temporale (per tempi discreti n) può essere scritta sfruttando l'operatore U^n come

$$\overline{F(\mathbf{z})} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F(\Phi_k(\mathbf{z})) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U_k F(\mathbf{z}) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U_k \right) F(\mathbf{z}) \quad (1.26)$$

e quindi lo studio della media temporale $\overline{F(\mathbf{z})}$ può essere ricondotto allo studio di $M_\tau := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U_k$, cioè della media geometrica di U_k .

Von Neumann dimostrò che M_τ converge, in L_2 , ad un operatore di proiezione ortogonale nello spazio delle funzioni invarianti, il che significa equivalentemente affermare il seguente teorema:

Teorema 1.2.3 (di Von Neuman).

Esiste una funzione invariante \mathcal{F} tale che

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|M_\tau(F(\mathbf{z})) - \mathcal{F}(\mathbf{z})\| = 0 \quad (1.27)$$

dove $\|\cdot\|$ è la norma di $L_2(\Gamma)$:

$$\|g\|^2 = \int_{\Gamma} d\Gamma |g|^2 \quad (1.28)$$

La convergenza definita da (1.27) è chiamata convergenza in media, intendendo con ciò che la deviazione standard della differenza tra la media su τ e $\mathcal{F}(\mathbf{z})$ tende a zero per $\tau \rightarrow \infty$. Il teorema di convergenza in media di Von Neumann è sufficiente per la meccanica statistica, poichè essa si occupa fondamentalmente di proprietà medie dei sistemi. I teoremi di Birkhoff invece danno risultati più forti e sono importanti per cogliere la dinamica.

1.3 Formulazione astratta della teoria ergodica

1.3.1 Sistemi dinamici

Abbiamo inizialmente discusso l'ergodicità come una proprietà dei sistemi Hamiltoniani, ma è possibile generalizzare la trattazione a sistemi definiti da un automorfismo ad un parametro. Si consideri uno spazio misurabile (\mathcal{M}, μ) in cui μ è una misura introdotta sulla varietà \mathcal{M} . (\mathcal{M}, μ) è trasformato in (\mathcal{M}', μ') biunivocamente, tramite la trasformazione Φ_t (trasformazione ad un parametro t) a meno di regioni a misura nulla. Sia ora

$$\Phi_t(A) = A' \tag{1.29}$$

se vale $\mu(A) = \mu'(A')$ (conservazione della misura) Φ_t è un isomorfismo e se $(\mathcal{M}, \mu) = (\mathcal{M}', \mu')$ è detto un automorfismo. Chiamiamo la terna $(\mathcal{M}, \mu, \Phi_t)$ un sistema dinamico astratto. Se la trasformazione è continua e differenziabile, il sistema è detto diffeomorfismo o sistema dinamico classico.

1.3.2 Transitività metrica

Sia V una regione dello spazio delle fasi. Diciamo che V gode della transitività metrica quando non può essere scomposto in due sottoinsiemi propri invarianti. Assumendo che la misura di V sia unitaria ($\mu(V) = 1$), possiamo dire che il sistema è transitivo metricamente quando ogni sottoinsieme invariante ha misura 1 oppure 0.

Teorema 1.3.1. *La transitività metrica implica l'ergodicità e viceversa.*

Dimostrazione.

Se V gode della transitività metrica, la media temporale è costante su quasi tutte le traiettorie, poichè altrimenti potremmo assumere che V possa essere scomposto in V_1 e V_2 con misura positiva, tali che $\overline{F(\mathbf{z}_1)} > \alpha$ ($\mathbf{z}_1 \in V_1$) e $\overline{F(\mathbf{z}_2)} \leq \alpha$ ($\mathbf{z}_2 \in V_2$). Le traiettorie attraverso V_1 o V_2 non possono uscire da V_1 e V_2 rispettivamente e perciò V_1 e

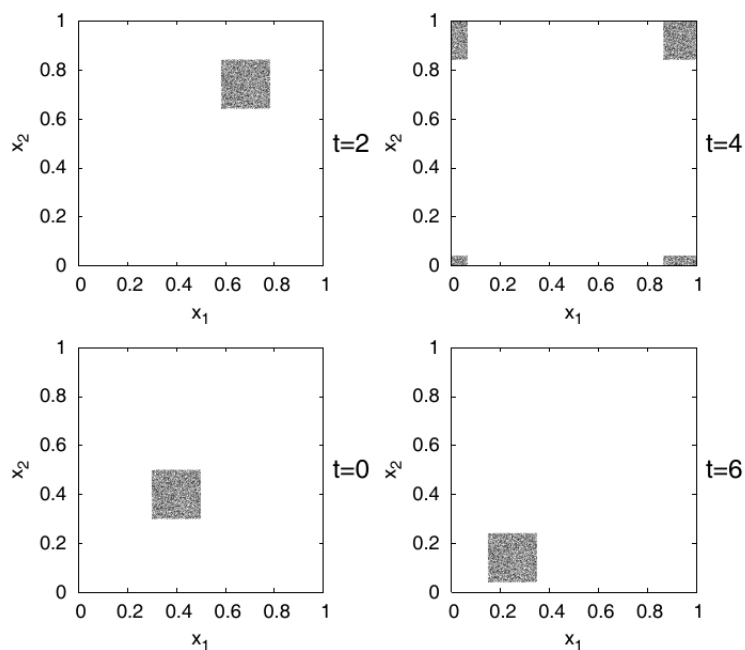


Figura 1.2: Esempio di sistema ergodico: evoluzione di 10^4 punti usando le rotazioni su un toro bidimensionale ($\omega_1 = \pi, \omega_2 = 0.6$) a tempo t discreto. La presenza di una frequenza irrazionale ci garantisce l'ergodicit  poich , evolvendo, ogni traiettoria passer  vicino a piacere a qualsiasi punto. Figura tratta da [3].

V_2 sarebbero in questo caso sottospazi invarianti. Poich  la media temporale   costante su V , l'ergodicit  segue allora dal teorema fondamentale.

Per il viceversa, assumiamo che V possa essere decomposto in due sottospazi invarianti V_1 e V_2 di misura positiva. Consideriamo una funzione che vale 1 su V_1 e 0 su V_2 : la sua media temporale varr  allora 1 su V_1 e 0 su V_2 e la media in fase assumer  un valore tra 0 e 1, diverso comunque dalle medie temporali. Da ci  segue la non ergodicit .

□

1.3.3 Miscelamento (Mixing)

Grazie al lavoro di Birkhoff è stato possibile ricondurre lo studio dell'ergodicità nei sistemi dinamici a quello della transitività metrica. Una delle proprietà responsabili della transitività metrica è il miscelamento (mixing), definito nel modo seguente:

Si considerino i sottospazi misurabili A e B nello spazio V . A è soggetto alla trasformazione Φ^t . Un sistema dinamico gode della proprietà di miscelamento (cioè è Mixing) quando

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu((\Phi_t(A) \cap B)) = \mu(A)\mu(B) \quad \forall A, B \subset V \quad (1.30)$$

Con la normalizzazione

$$\mu(V) = 1 \quad (1.31)$$

in cui μ identifica la misura e l'intersezione $(\Phi_t(A) \cap B)$ significa la parte comune dell'evoluto di A con B . Considerando che $(\Phi_t(A) \cap B)/\mu(B)$ è la frazione di A in B trascorso il tempo t , la formula (1.30) afferma che per $t \rightarrow \infty$ tale frazione è uguale alla misura di tutto A .

Teorema 1.3.2. *Il mixing implica l'ergodicità.*

Dimostrazione.

Per assurdo, sia A un sottoinsieme invariante misurabile. Scegliamo $B = A$ (dovendo il teorema valere per tutte le coppie di sottoinsiemi, non necessariamente distinte). Si ha ovviamente che

$$(\Phi_t(A)) \cap A = A \quad (1.32)$$

e dalla (1.30) si ha $\mu(A) = 0$ (A è un insieme a misura nulla) o $\mu(A) = 1$ (A è tutto V , quindi non è un sottoinsieme proprio), da cui segue il teorema. □

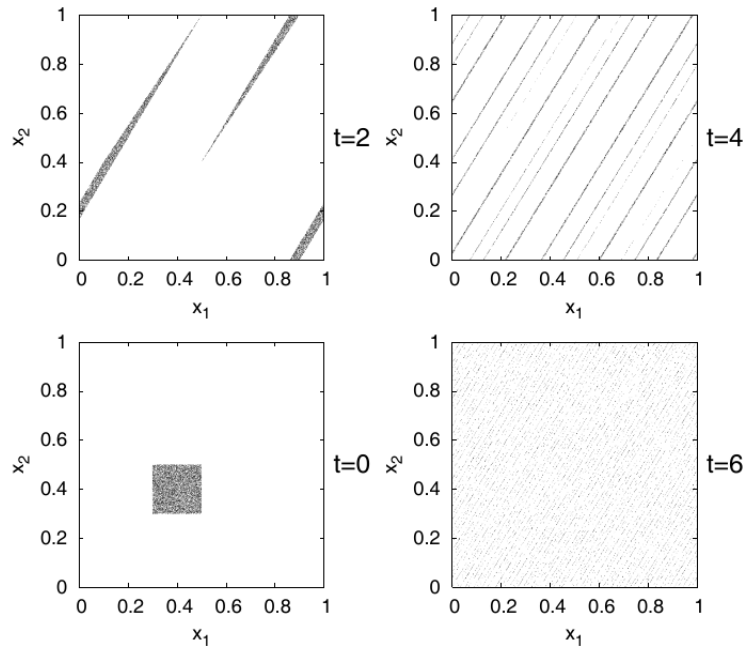


Figura 1.3: Esempio di sistema mixing: evoluzione di 10^4 punti usando la mappa del gatto di Arnold [$x_1(t+1) = x_1(t) + x_2(t) \pmod{1}$, $x_2(t+1) = x_1(t) + 2x_2(t) \pmod{1}$] con tempo t discreto. Figura tratta da [3].

1.4 Oltre i sistemi dinamici: sistemi a molti gradi di libertà

1.4.1 Un approccio fisico

Nel corso del capitolo siamo andati verso una graduale astrazione del problema trattato, muovendoci nella direzione di quella che è la moderna teoria ergodica nei sistemi dinamici. Tuttavia se ci limitiamo al caso della meccanica statistica associata a sistemi microscopici, possiamo adottare un approccio più semplice, seguendo il lavoro di Khinchin [7].

Fisicamente infatti, siamo interessati a studiare corpi estesi, descritti da un numero enorme N di particelle microscopiche. Tuttavia le quantità osservabili nella termodinamica non sono funzioni generiche ed è quindi sufficiente provare l'uguaglianza tra media temporale e media nello spazio delle fasi $\overline{F} = \langle F \rangle$ solo per alcune quantità rilevanti. Risulta quindi ammissibile da un punto di vista fisico che sia $\overline{F} \neq \langle F \rangle$ per condizioni iniziali all'interno di una regione dello spazio delle fasi di misura piccola, che tenda a zero quando $N \rightarrow \infty$

Khinchin limita la sua analisi a sistemi hamiltoniani separabili

$$\mathcal{H} = \sum_{n=1}^N \mathcal{H}_n(q_n, p_n) \quad (1.33)$$

e ad una classe speciali di osservabili \mathcal{S} , chiamati funzioni somma (*sum functions*) che hanno forma:

$$\mathcal{S}(\mathbf{X}) = \sum_{n=1}^N \mathcal{S}_n(q_n, p_n) \quad (1.34)$$

in cui

$$\mathbf{X} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \quad (1.35)$$

dove si assume che tutti i gradi di libertà del sistema contribuiscano con la stessa intensità alle funzioni \mathcal{S}_n . Sono funzioni somma, ad esempio, la pressione o l'energia cinetica. Sotto queste ipotesi di natura generale e senza richiedere la transitività metrica, se \mathcal{S} è una funzione somma si ha

$$P \left(\frac{|\overline{\mathcal{S}} - \langle \mathcal{S} \rangle|}{|\langle \mathcal{S} \rangle|} \geq C_1 N^{-1/4} \right) \leq C_2 N^{-1/4} \quad (1.36)$$

dove C_1 e C_2 sono costanti e $P(\cdot)$ rappresenta la probabilità. La formula significa sostanzialmente che se il numero di gradi di libertà è molto grande, la media temporale $\overline{\mathcal{S}}$ e quella nello spazio delle fasi $\langle \mathcal{S} \rangle$ differiscono solo per un insieme di condizioni

iniziali di misura trascurabile. Tecnicamente, l'approccio di Kinchin riguarda sistemi composti da particelle non interagenti e ciò può essere problematico poichè lo scambio di energia tra i vari gradi di libertà è una condizione cruciale per l'esistenza di uno stato di equilibrio. Tale problematica può essere tuttavia superata, nuovamente, in base ad un approccio fisico: se si considerano solo interazioni tra i gradi di libertà a corto raggio tra e di deboli entità, queste dovrebbero contribuire in minima parte alla media temporale e a quella in fase, ma permetterebbero al sistema di raggiungere l'equilibrio termico. Tale intuizione venne poi sviluppata da Mazur e van der Linden, i quali estesero i risultati di Kinchin a sistemi di particelle interagenti tramite potenziale a corto raggio.

1.4.2 Quasi-ergodicità

Abbiamo visto che l'ergodicità per come la intendeva Boltzmann non può mai realizzarsi, ma da un punto di vista fisico potremmo considerare sufficiente il fatto che una traiettoria passi vicino a piacere ad ogni punto dello spazio delle fasi: questa condizione potrebbe essere soddisfatta da una funzione continua ed è chiamata *ipotesi quasi-ergodica*.

Potrebbe sembrare che la quasi-ergodicità implichi la transitività metrica poichè le traiettorie intersecherebbero qualsiasi regione A con misura positiva della superficie ad energia costante.

Tuttavia Van Hove fece notare che il ragionamento vale solo se A è un sottoinsieme aperto: se ad esempio scegliamo A come l'insieme complementare di una traiettoria. Se la traiettoria è quasi-ergodica, tale insieme complementare sarebbe composto di soli punti isolati e quindi non può essere un aperto. Affinchè si abbia l'ergodicità è necessario che la misura dell'insieme complementare sia zero.

1.4.3 Tempi di permanenza

Possiamo classificare le variabili del moto in due tipologie: gli invarianti, cioè le variabili che non cambiano durante il tempo di osservazioni e le quantità che cambiano invece valore velocemente (rispetto al tempo di osservazione). Definiamo quindi la regione del moto come l'insieme che include tutte le configurazioni delle quantità che cambiano velocemente, cioè l'insieme di tutte le configurazioni che soddisfano le condizioni di invari-

rianza. Abbiamo detto nell'introduzione che il concetto di invariante è relativo al tempo di osservazione: quali variabili sono invarianti dipende quindi dalla scala dei tempi e non è sempre ovvio come classificare le variabili. La definizione della regione del moto Γ dipende dalle singole traiettorie del moto (Si veda [8] per una discussione quantitativa). Per un sistema ergodico, la dinamica porterà, per opportuni tempi di osservazione, a far occupare al sistema tutto lo spazio delle fasi e ciò significa che la probabilità di osservare un sistema in una data configurazione R può essere vista come

$$P(R) := \frac{\mathcal{T}(R)}{\mathcal{T}} \equiv \frac{\mu(R)}{\mu(\Gamma)} \quad (1.37)$$

Dove \mathcal{T} è il tempo di osservazione totale, $\mathcal{T}(R)$ il tempo in cui la traiettoria sta in R e R è un sottoinsieme il cui volume è comparabile con quello di Γ .

Il capitolo successivo sarà dedicato ad alcune problematiche sollevate da questo rapporto tra tempi di osservazione e permanenza del sistema in alcune regioni del moto, in particolare al problema dell'irreversibilità.

Capitolo 2

Tempi di ricorrenza

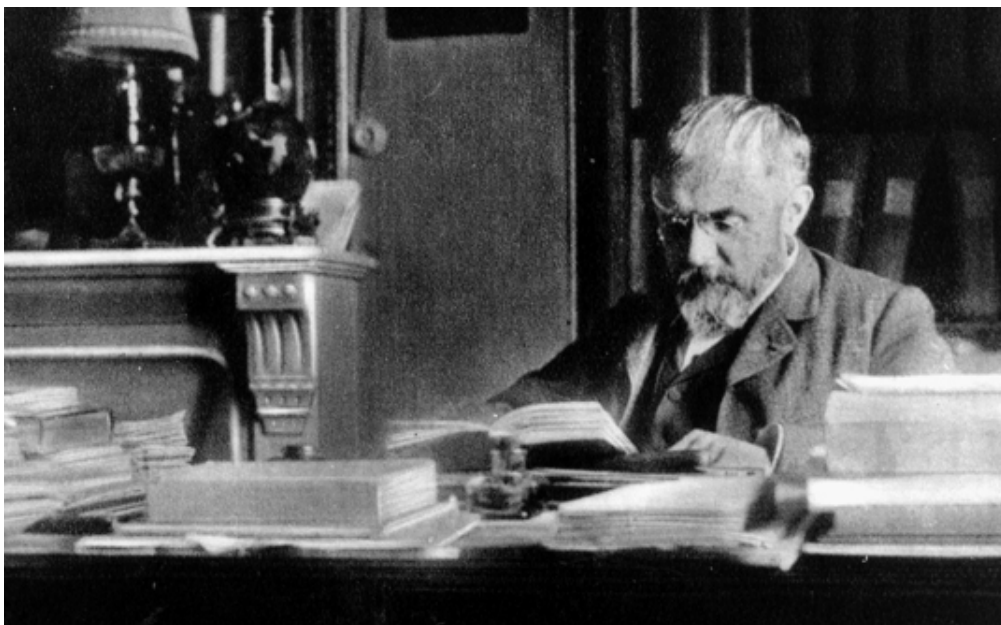


Figura 2.1: **Jules Henri Poincaré** (1854-1912) *“È nei confronti delle ipotesi più semplici che bisogna essere più diffidenti, poichè sono quelle che hanno più possibilità di passare inosservate”*

2.1 Teorema di ricorrenza di Poincaré

2.1.1 Enunciato

Uno dei più importanti risultati della meccanica classica è il teorema di Liouville, il quale asserisce sostanzialmente che il flusso di fase conserva il volume dello spazio delle fasi, cioè

Teorema 2.1.1 (di Liouville).

per ogni regione D :

$$\mu(\Phi_t(D)) = \mu(D) \tag{2.1}$$

Durante lo studio del problema dei tre corpi, Poincaré diede vita al concetto di ricorrenza non triviale. Egli nel 1890 dimostrò che quando un sistema dinamico conserva i volumi, quasi tutte le traiettorie ritornano arbitrariamente vicine alla loro posizione iniziale e che lo fanno un numero infinito di volte. Più precisamente:

Teorema 2.1.2 (del ritorno, I enunciato).

Se un flusso preserva il volume e ha solo orbite limitate allora per ogni insieme aperto esistono orbite che intersecano l'insieme infinite volte.

Il teorema può essere enunciato in modo più formale:

Sia Φ una trasformazione continua, biunivoca, che conservi il volume e che porti una regione limitata D dello spazio euclideo in sé:

$$\Phi(D) = D \tag{2.2}$$

Allora:

Teorema 2.1.3 (del ritorno, II enunciato).

Per ogni intorno U di un punto qualsiasi di D esiste un punto $x \in U$ che ritorna in U ,

cioè:

$$\Phi_n(x) \in U \quad (2.3)$$

per un certo $n > 0$.

Dimostrazione.

Prendiamo le immagini dell'intorno U : $U, \Phi(U), \Phi_2(U), \Phi_3(U), \dots, \Phi_n(U)$.

Dalla (2.1) troviamo che vale:

$$\mu(\Phi_i(U)) = \mu(\Phi_j(U)) > 0 \quad \forall i, j \in \mathbb{N} \quad (2.4)$$

se queste regioni non si intersecassero, la loro unione dovrebbe avere misura infinita e ciò sarebbe contrario all'ipotesi di limitatezza della misura di D . Perciò per un qualche $k > 0$ e $l > 0$ con $k > l$ si ha:

$$\Phi_k(U) \cap \Phi_l(U) \neq \emptyset \quad (2.5)$$

Sia ora $y \in U$ tale che $y = \Phi_{l-k}(x)$.

$$x \in U \quad e \quad \Phi_n(x) \in U$$

con $n = l - k$, che è ciò che si doveva provare.

□

Può essere interessante notare come la dimostrazione abbia come unica richiesta la validità del teorema di Liouville, perciò il teorema di ricorrenza è valido non solo per i sistemi hamiltoniani, ma per una qualunque dinamica conservativa. Gli esiti del problema nell'ambito della meccanica sono discussi in [1].

2.1.2 Generalizzazione ai sistemi dinamici

Nella moderna teoria dei sistemi dinamici il teorema viene formulato in maniera leggermente diversa. Sia x un punto dello spazio delle fasi appartenente ad un insieme A . Limitandoci per semplicità ai sistemi discreti, chiamiamo *Orbita* l'insieme di punti $\{x, \Phi(x), \Phi_2(x), \Phi_3(x), \dots\}$.

Teorema 2.1.4 (del ritorno, III enunciato). *Sia $\Phi : X \rightarrow X$ che conservi una misura μ (cioè che $\mu(\Phi_{-1}A) = \mu(A)$) per ogni insieme misurabile $A \subset X$. Allora:*

$$\mu(\{x \in A : \Phi_n(x) \in A \quad \forall n > 0\}) = \mu(A) \quad (2.6)$$

Il teorema asserisce sostanzialmente che l'esistenza di una misura invariante finita garantisce che quasi ogni orbita che parte dall'insieme A ritornerà infinite volte in quell'insieme. Quando X è uno spazio metrico con una distanza d , è anche possibile dare la seguente versione del teorema

Teorema 2.1.5 (del ritorno, IV enunciato).

Per tutti gli $x \in X$ a meno di un insieme a misura μ nulla, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\Phi_n x, x) = 0 \quad (2.7)$$

In tale formulazione il teorema ci dice che l'orbita di quasi ogni punto ritorna arbitrariamente vicina al punto iniziale. Per una trattazione del teorema del ritorno nell'ambito dei sistemi dinamici si veda [2].

Il teorema di ricorrenza è un risultato semplice ma fondamentale nella teoria dei sistemi dinamici. In particolare afferma che l'esistenza di una misura finita invariante causa una ricorrenza non triviale in *ogni* insieme di misura non nulla. Tuttavia esso fornisce informazioni di natura puramente qualitativa e, nello specifico, non ci dice niente

riguardo alla frequenza con cui l'orbita di un punto visiterà un dato insieme, limitandosi ad affermare che lo farà infinite volte per una evoluzione infinita.

2.2 Tempi di ritorno

2.2.1 Irreversibilità

Il teorema di ricorrenza di Poincaré risulta avere importanza cruciale nell'ambito della meccanica statistica: in virtù di tale risultato, infatti, Zermelo sollevò una forte obiezione alla formulazione della termodinamica proposta da Boltzmann, in particolare sui suoi risultati riguardo all'irreversibilità. L'obiezione di Zermelo era la seguente: in base al teorema di ricorrenza, l'intorno di ogni stato microscopico del sistema sarà visitato infinite volte, rendendo insensata la spiegazione dell'irreversibilità espressa da Boltzmann in termini del teorema H ¹.

L'obiezione appare sensata, ma ciò che Zermelo non considerò è il fatto che il teorema di Poincaré non dà alcuna informazione riguardo ai tempi di ricorrenza: tali tempi, come fece notare Boltzmann rispondendo alla critica, potrebbero essere di lunghezza enorme, privando, quasi, la possibilità di ricorrenza di significato fisico.

Ciò che ci interessa è il *tempo di (primo) contatto* τ_A definito da

$$\tau_A(x) = \min \{n; \Phi_n(x) \in A\} \quad (2.8)$$

ovvero il tempo (discreto, nel nostro caso) che impiega il sistema partendo dalle condizioni iniziali x ad arrivare all'interno di A . Notiamo che può essere $\tau_A(x) = \infty$, quando l'orbita non entra mai in A partendo da x .

Quando $x \in A$, chiamiamo τ_A *tempo di (primo) ritorno*.

¹Si veda [8] per una trattazione dettagliata del Teorema H di Boltzmann.

2.2.2 comportamenti medi del tempo di ritorno

Il teorema del ritorno, nella forma (2.6), ci garantisce che $\tau_A < \infty$ per quasi ogni $x \in A$. Ciò che a noi interessa è il tempo medio che impiegherà un punto appartenente ad un dato insieme A (con $\mu(A) > 0$) a tornare all'interno dell'insieme stesso. Vale il seguente teorema:

Teorema 2.2.1 (di Kac).

$$\int_A d\mu\tau_A = \mu(\{\tau_A < \infty\}) \quad (2.9)$$

In cui con $\mu(\{\tau_A < \infty\})$ si intende la misura dell'insieme di tutti gli x che hanno tempo di ritorno finito.

Dimostrazione.

Partendo dal fatto che vale (si veda [10] per una trattazione più estesa):

$$\mu(\tau_A = n) = \mu(A \cap \{\tau_A \geq n\}) \quad (2.10)$$

sommando su n si ottiene

$$\mu(\tau_A < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap \{\tau_A \geq n\}) = \int_A d\mu\tau_A \quad (2.11)$$

□

Come abbiamo visto, per un sistema per cui valga la transitività metrica (e, quindi, l'ergodicità) gli unici insiemi invarianti sono quelli per cui $\mu(A) = 1$ o $\mu(A) = 0$. Di conseguenza il teorema (2.9) diventa:

$$\int_A d\mu\tau_A = 1 \quad (2.12)$$

Dividendo entrambi i membri per la misura di A ($\mu(A) := \int_A d\mu$) :

$$\langle \tau_A \rangle := \frac{\int_A d\mu}{\mu(A)} \tau_A = \frac{1}{\mu(A)} \quad (2.13)$$

si vede che il *tempo medio di ritorno* di un insieme è inversamente proporzionale alla sua misura, che è un risultato rassicurante. Precisiamo in aggiunta che il tempo di residenza, ovvero il tempo totale passato nell'insieme dal sistema) è invece proporzionale alla misura dell'insieme.

In un sistema con N gradi di libertà, se A è un ipercubo di lato $\epsilon < 1$ si ha

$$\langle \tau_A \rangle \propto e^{-\lambda N} \quad (2.14)$$

in cui $\lambda > 0$ è un parametro proprio del sistema. Nella meccanica statistica, dove N è dell'ordine del numero di Avogadro, i tempi di ritorno nelle vicinanze di un dato punto dello spazio delle fasi hanno quindi lunghezza astronomica e la formulazione di Boltzmann non è quindi intaccata dal risultato di Poincaré.

Capitolo 3

Il problema di Fermi-Pasta-Ulam

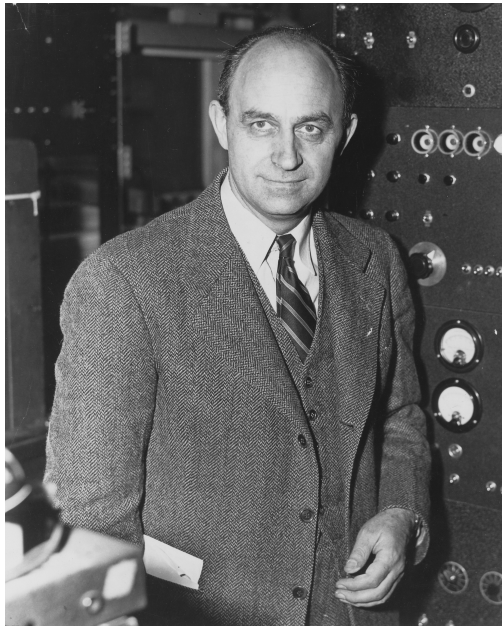


Figura 3.1: **Enrico Fermi** (1901-1954) *“Ci sono soltanto due possibili conclusioni: se il risultato conferma le ipotesi, allora hai appena fatto una misura; se il risultato è contrario alle ipotesi, allora hai fatto una scoperta.”*

3.1 Sistemi non integrabili

3.1.1 Introduzione

I sistemi caotici presentano una evoluzione irregolare a cui è associata una perdita di memoria delle condizioni iniziali con velocità esponenziale. Questo fatto presenta una forte analogia con la richiesta, necessaria alla termodinamica, che le misure nel sistema non dipendano dalle condizioni iniziali.

Consideriamo un sistema dinamico conservativo che ammette l'energia come invariante: esso potrebbe ammettere anche altri integrali primi e in quel caso le orbite non potrebbero coprire densamente le superfici energetiche. Quindi nello studio dell'ipotesi ergodica è importante studiare l'esistenza di altri integrali primi del moto oltre all'energia.

3.1.2 Alcuni risultati sull'integrabilità

Bruns, Poincaré e altri arrivarono ad importanti conclusioni sull'integrazione dei sistemi dinamici, partendo dallo studio del problema dei tre corpi. Per un sistema che consiste di tre corpi massivi interagenti per mezzo di un potenziale centrale newtoniano esistono 18 variabili indipendenti: tre per la conservazione del momento del moto traslazionale del centro di gravità, tre ottenuti integrandoli, tre per la conservazione del momento angolare rispetto al centro di gravità e chiaramente l'energia. Tutti questi possono essere scritti in forma algebrica. Bruns dimostrò la non esistenza di altri integrali algebrici oltre a questi.

Poincaré estese il risultato di Bruns. Si consideri una hamiltoniana \mathcal{H} funzione di $y_1, y_2, \dots, y_n, x_1, x_2, \dots, x_n$ con un parametro μ e supponiamo di poterla estendere nella forma

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mu\mathcal{H}_1 + \mu^2\mathcal{H}_2 + \dots \quad (3.1)$$

Le equazioni del moto sono

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}; \quad (3.2)$$

e noi assumiamo che \mathcal{H} sia una funzione periodica con periodo 2π rispetto a x e che \mathcal{H}_0 sia una funzione della sola y . Questo è detto un *sistema canonico normale*. Assumiamo inoltre che il determinante della matrice Hessiana sia non nullo, cioè

$$\det \left| \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial y_i \partial y_j} \right| \neq 0 \quad (3.3)$$

Poincaré dimostrò il seguente

Teorema 3.1.1. *Un sistema canonico normale come quello descritto non ammette altri integrali del moto nella forma $\phi = \text{const}$ oltre all'hamiltoniana \mathcal{H} .*

in cui ϕ è una funzione analitica rispetto ad un parametro μ abbastanza piccolo, per tutti i valori di x e per le y appartenenti ad una certa regione \mathcal{D} . Poincaré chiamò tali ϕ *funzioni analitiche uniformi*. In pratica, ϕ è una funzione che può essere espressa come

$$\phi = \phi_0 + \mu\phi_1 + \mu^2\phi_2 + \dots \quad (3.4)$$

Se interpretiamo x come una coordinata e y come il momento coniugato, è naturale considerare che \mathcal{H}_0 sia una funzione dei soli momenti, ma Poincaré considerò il caso in cui \mathcal{H}_0 è una funzione delle sole coordinate, scambiando il ruolo di x e y .

Consideriamo quindi il caso di vibrazioni non lineari sui reticoli, in cui q_i è lo spostamento del i -esimo punto del reticolo dalla posizione di equilibrio e p_i il momento associato. L'hamiltoniana è

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2m_i} p_i^2 + \frac{m_i \omega_i^2}{2} q_i - i^2 \right) + \dots \quad (3.5)$$

Utilizzando le variabili azione J_i e angolo θ_i possiamo scrivere la (3.5) come

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{2\pi} J_i + \dots \quad (3.6)$$

E quindi i sistemi di vibrazioni non lineari sui reticoli sono sistemi canonici normali. Ma considerando il primo termine della (3.6) come \mathcal{H}_0 , il determinante dell'Hessiana si annulla e le condizioni per il teorema non sono più soddisfatte. Bisogna tenere in considerazione i termini non lineari di grado superiore in \mathcal{H}_0 .

3.1.3 Il risultato di Fermi

Le superfici di $\phi = \text{const}$ formano una famiglia, con dipendenza dalla costante. Il teorema di Poincaré dimostra che tale famiglia non esiste, a meno che non si tratti delle superfici isoenergetiche. Fermi nel 1923, durante il suo soggiorno a Gottinga, generalizzò tale risultato, dimostrando che

Teorema 3.1.2.

Un sistema con un numero di gradi di libertà $n > 2$ non ha nemmeno superfici isolate del tipo $\phi = \text{const}$

Ciò significa che nessuna superficie liscia (nel senso di analitica) può dividere lo spazio delle fasi in due regioni contenenti insiemi aperti invarianti. Da tale risultato, egli dedusse quindi che tutti i sistemi hamiltoniani non integrabili sono ergodici. Tale conclusione, pur in mancanza di una dimostrazione corretta formalmente, fu largamente accettata, specialmente tra i fisici. Vediamo il ragionamento di Fermi:

Si consideri una regione A della superficie $\mathcal{H} = \text{const}$. Chiamiamo A' la regione di tale superficie raggiungibile prendendo come condizioni iniziali punti appartenenti a A : allora A' coprirà quasi tutta la superficie (nel senso che passerà vicino a piacere ad ogni punto) o soltanto una parte di essa. Nel primo caso il sistema sarà quasi ergodico: occupiamoci quindi del secondo caso. Chiamiamo A^* la parte della superficie complementare ad A' e chiamiamo S il confine tra le due. Non esiste una traiettoria che connette un punto di A' con un punto di A^* . Si prenda ora un punto P su S e due punti P' e P^* vicini a P appartenenti rispettivamente a A' e A^* . Quindi ogni traiettoria passante per P' starà nella regione A' e ogni traiettoria passante per P^* starà in A^* mentre una passante

per P rimarrà in S . Quindi S è una superficie isolata e Fermi asserì che il sistema è quasi-ergodico dalla non esistenza di S diverse da quelle per cui $\mathcal{H} = \text{const}$.

Tuttavia la superficie S considerata da Fermi è analitica, ma il confine tra A' e A^* non lo è necessariamente. Perciò il risultato di Fermi non prova che i sistemi canonici normali sono quasi ergodici. Inoltre, secondo la considerazione di Van Hove sulla quasi ergodicità anche se il sistema è quasi ergodico, non se ne può dedurre la transitività metrica. Dopo la seconda guerra mondiale, quando ebbe a disposizione i primi calcolatori elettronici, Fermi tornò sulla questione, studiando quello che è noto in letteratura come il problema di Fermi-Pasta-Ulam (FPU).

3.2 Il problema di Fermi-Pasta-Ulam

3.2.1 Il modello

Nel 1952 Enrico Fermi, John Pasta e Stanislaw Ulam condussero una simulazione numerica (evento pionieristico per quegli anni) per studiare un sistema costituito da una catena lineare di N particelle identiche di massa m interagenti tramite molle, anch'esse identiche, quasi lineari [5]. Tale sistema è descritto dall'hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N-1} \left[\frac{p_i^2}{2m} + \frac{k}{2}(q_{1+i} - q_i)^2 + \frac{\epsilon}{\alpha}(q_{1+i} - q_i)^\alpha \right] \quad (3.7)$$

dove per semplicità si considerano fisse la prima e l'ultima particella della catena. Nella formula k è la costante elastica delle molle, ϵ rappresenta l'intensità del termine non quadratico e α ne regola il grado (nelle simulazioni effettuate vennero usati i valori $\alpha = 3$ e $\alpha = 4$)

Per $\epsilon = 0$ il sistema risulta integrabile. Usando i modi normali:

$$a_k = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_n q_n \sin \left(\frac{nk\pi}{2(N+1)} \right) \quad (3.8)$$

dove $k = 1, 2, \dots, N$, il sistema si riduce ad N oscillatori armonici non interagenti di

frequenza:

$$\omega_k = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\frac{nk\pi}{2(N+1)}\right) \quad (3.9)$$

ed energia:

$$E_k = \frac{1}{2} [(\dot{a}_k)^2 + \omega_k^2 a_k^2] = \text{const.} \quad (3.10)$$

Ed è facile calcolare che:

$$\langle E_k \rangle = \frac{E_{tot}}{N} \quad (3.11)$$

Tuttavia in queste condizioni i modi normali sono disaccoppiati e non possono quindi scambiarsi energia, la quale rimane costante per ogni modo e l'equipartizione ottenuta risulta essere un risultato puramente formale dell'approccio utilizzato: il sistema non è quindi veramente ergodico.

Ciò significa che l'approccio statistico può essere utilizzato solo nel caso non integrabile e che la relazione

$$E_k := \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt E_k(t) = \langle E_k \rangle \quad (3.12)$$

può valere solo in presenza del termine non quadratico, ovvero per $\epsilon \neq 0$.

3.2.2 La simulazione

Il caso trattato con la simulazione numerica fu quello (con $\epsilon \neq 0$) in cui tutta l'energia è inizialmente concentrata in uno solo dei modi normali, ad esempio:

$$E_1(0) \neq 0, \quad E_k(0) = 0 \quad \forall k > 1 \quad (3.13)$$

Dal risultato di Poincaré e la sua generalizzazione ad opera di Fermi, ci si attendeva che

il primo nodo avrebbe dovuto trasferire energia agli altri e, dopo un tempo di termalizzazione, l'energia di ogni modo avrebbe fluttuato attorno ai valori di equilibrio E_{tot}/N . L'esperimento venne effettuato con piccoli ϵ e $N = 16, 32, 64$ con l'energia inizialmente concentrata in uno o due modi normali. Inaspettatamente, non venne osservata alcuna tendenza di equipartizione, nemmeno per tempi lunghi (almeno per gli strumenti dell'epoca). Dalla simulazione risultò che l'energia, inizialmente concentrata nel primo modo, dopo un certo periodo tornava quasi al suo valore iniziale. Il moto risultante era abbastanza regolare, quasi periodico, e non venne osservata perdita di memoria delle condizioni iniziali né una equipartizione dell'energia tra i modi: ovvero il problema FPU presentò una violazione dell'ergodicità anche per $\epsilon \neq 0$.

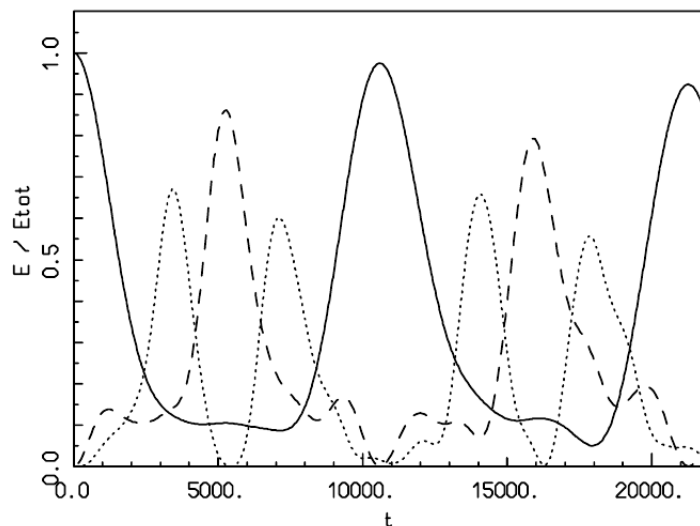


Figura 3.2: Energia normalizzata dei modi $E_k(t)/E_{tot}$ per $k = 1$ (linea continua) $k = 2$ (linea tratteggiata) $k = 3$ (linea punteggiata) per $N = 32$, $\alpha = 3$ e $\epsilon = 0.1$. La condizione iniziale è $E_1(0) = E_{tot} = 2.24$ e $E_k(0) = 0$ per $k = 2, 3, \dots, 32$. Figura tratta da [3]

3.3 Soluzioni al problema di FPU

3.3.1 Risonanza

Quando le frequenze ω_k soddisfano la relazione

$$\omega(n) = \sum_k \omega_k n_k \quad (3.14)$$

per gli interi n_k non tutti nulli, sono dette essere *commensurabili* o aventi una *condizione di risonanza*. Hemmer dimostrò che le condizioni in cui le frequenze associate al problema FPU non danno origine a risonanza sono quelle per cui il numero di particelle N è un numero primo o una potenza di 2. Perciò i casi presi in esame ($N = 16, 32, 64$) sono quelli non risonanti. Tuttavia questa condizione matematica non è essenziale: infatti anche se la risonanza avvenisse, lo scambio di energia tra i modi potrebbe essere così piccolo da essere trascurabile oppure anche un soddisfacimento solo approssimativo della ($\omega(n) \approx 0$) potrebbe dar luogo ad uno scambio energetico. Infatti i termini non lineari allentano, in genere, la condizione di risonanza. Lo scambio di energia tra i modi più bassi in FPU può essere compreso considerando la condizione $\omega_k = k\omega_1$ soddisfatta per k/N piccoli.

Esaminiamo la relazione tra le condizioni di risonanza e lo scambio di energia utilizzando la teoria perturbativa per le oscillazioni non lineari. Per un sistema a due gradi di libertà abbiamo:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_1 &= -\omega_1^2 a_1 - \epsilon \sqrt{2} a_1 a_2 \\ \ddot{a}_2 &= -\omega_2^2 a_2 - \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} (a_1^2 + 3a_2^2) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Che sono quindi due oscillatori con frequenze ω_1 e ω_2 (considerate parametri arbitrari) connessi dalla stessa molla non lineare. Sviluppando perturbativamente il sistema in ϵ , Ford e Waters riuscirono a dimostrare che gli oscillatori si muovono come in assenza di termini non lineari e che lo scambio di energia può avvenire solo per

$$n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 \approx \epsilon \quad (3.16)$$

in cui n_1 e n_2 sono interi piccoli. Estendendo il risultato al caso di molti oscillatori, lo scambio di energia può avvenire quando

$$\sum_k n_k \omega_k = \mathcal{O}(\epsilon) \quad (3.17)$$

in cui \mathcal{O} è una funzione di ϵ al primo ordine o superiori. Il sistema sarà quindi in grado di scambiare energia anche se la condizione (3.14) non è soddisfatta in modo rigoroso, ma solo approssimativamente. Una trattazione dettagliata dello studio di FPU tramite le condizioni di risonanza è presente in [11].

3.3.2 Solitoni

Una possibile soluzione al problema fu data da Zabusky e Kruskal nel 1965, i quali affrontarono FPU studiando il limite del continuo della ODE associata all'hamiltoniana (3.7). I due ottennero una PDE che ammette soluzioni solitoniche (I solitoni sono onde solitarie che mantengono la propria forma quando viaggiano). Dalla presenza di tali soluzioni regolari, proposero che il comportamento regolare osservato in FPU poteva essere attribuito all'esistenza di solitoni.

Studiando il problema nel caso di $\alpha = 3$ l'equazione di evoluzione assume la forma

$$m \frac{d^2 q_n}{dt^2} = f(q_{n+1}) - f(q_n - q_{n-1}) \quad (3.18)$$

dove

$$f(y) = Ky - \epsilon y^2 \quad (3.19)$$

La ODE (3.18) può essere interpretata come una approssimazione discreta di una PDE

in cui le variabili $q_i(t)$ approssimano un campo continuo $\psi(x, t)$ in un punto $i\delta x$ di un reticolo, in cui δx rappresenta la spaziatura del reticolo. Riscalando K , m ed ϵ si ottiene:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + g \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (3.20)$$

in cui

$$c = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{K \delta x^2}{m} \quad (3.21)$$

$$g = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\epsilon \delta x^3}{m} \quad (3.22)$$

Cercando una soluzione di (3.18) che nel limite del continuo vari lentamente nel tempo con $x - ct$ fissato, si ha

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + \epsilon v \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{24} \frac{\partial^3 v}{\partial \xi^3} = 0 \quad (3.23)$$

Dove:

$$\xi \propto x - ct; \quad \tau \propto t; \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial \xi}. \quad (3.24)$$

L'equazione (3.23) non è altro che una riscrittura dell'equazione di Korteweg-de Vries (KdV), la quale descrive la propagazione di onde in acque poco profonde ed ammette soluzioni solitoniche del tipo

$$v = F(\xi - V\tau) \quad (3.25)$$

in cui V è una costante e $F(y)$ una funzione che decade a zero per valori dell'argomento grandi (in modulo).

La soluzione proposta da Zabusky e Kruskal in termini dell'equazione KdV non è però molto convincente: infatti il limite del continuo può essere attuato anche in altri modi, i

quali portano a risultati molto diversi. Inoltre i solitoni sono associati a PDE integrabili e debolmente non lineari, che sono rare (nel senso che una perturbazione generica ne pregiudica l'integrabilità). Poichè un sistema hamiltoniano non è in generale integrabile, non sembra legittimo associare le proprietà osservate in FPU all'integrabilità.

3.3.3 Teoria KAM

Un'altra spiegazione della mancata equipartizione energetica tra i modi in FPU è basata sul teorema KAM, il quale afferma sostanzialmente che per i sistemi hamiltoniani non integrabili i comportamenti non ergodici sono tipici. In altre parole, in fatto che non esistano invarianti globali non implica che tutte le traiettorie ottenute perturbando un sistema hamiltoniano integrabile saranno lontane da quelle imperturbate. Questo fatto era sicuramente sconosciuto a Fermi, Pasta e Ulam.

Va però sottolineato che l'interpretazione dei risultati di FPU in termini della teoria KAM è tutt'altro che diretta: ad esempio il comportamento periodico delle energie $E_k(t)$ non può essere interpretato come un moto su un toro KAM associato alla deformazione del toro integrabile (quello a $E_k(t) = \text{const.}$).

Molte simulazioni numeriche, svolte negli anni successivi, indicano come l'approccio KAM e quello di Zabusky e Kruskal non sono in realtà completamente escludentesi: si tratta in realtà di una questione di scala temporale. Per tempi piccoli i solitoni descritti dall'equazione KdV sono una buona approssimazione della soluzione numerica del problema (discreto) FPU. Per tempi superiori, il carattere non integrabile del sistema diviene dominante.

3.4 Un lavoro recente

3.4.1 Un diverso approccio teorico

Con l'avvento dei moderni calcolatori è stato possibile effettuare simulazioni per tempi molto più lunghi di quelli disponibili in passato, che hanno mostrato una prova chiara del fenomeno dell'equipartizione in FPU. Nonostante svariati progressi, si è però ancora

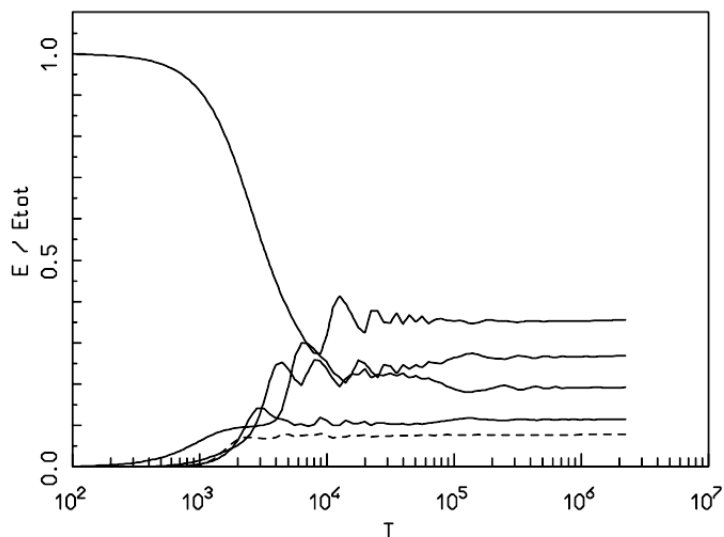


Figura 3.3: Frazioni di energia mediate nel tempo, nei modi $k = 1, 2, 3, 4$ (linee continue dall'alto al basso) e media temporale dei valori della somma da $k = 4$ a $k = 32$. I parametri del sistema sono gli stessi del grafico precedente.

lontano dalla comprensione del problema nella sua formulazione originale e molti risultati numerici sono ad oggi inspiegati da un punto di vista teorico.

In un lavoro del Marzo 2015 [9], alcuni ricercatori hanno studiato il problema usando un approccio basato sull'interazione non lineare di onde dispersive. L'assunzione di base del lavoro è che il trasferimento energetico irreversibile tra i modi che ha luogo in un sistema debolmente non lineare è dovuto all'interazione tra onde risonanti, ma ciò che si vede è che gruppi di tre onde risonanti non sono ammessi; questo implica, per una piccola scala di tempi, che l'interazione a tre onde genererà una dinamica reversibile. Questo è ciò che fu osservato originariamente da Fermi, Pasta e Ulam, limitati dai mezzi del tempo.

Una appropriata trasformazione canonica permette però di osservare le interazioni di ordine superiore nel sistema, responsabili della dinamica emergente in tempi più lunghi: si vede che un'interazione a 4 onde è ammessa, ma per $N = 16, 32, 64$ ma tali quartetti

risonanti non sono interconnessi: se si mette energia solamente in uno e sono ammesse solo interazioni debolmente non lineari, l'energia rimarrà nel quartetto impedendo di fatto la diffusione energetica in tutto lo spettro e, quindi, la termalizzazione.

Un meccanismo di termalizzazione efficace va ricercato continuando ad aumentare l'ordine studiato grazie alle trasformazioni canoniche. Le interazioni a cinque onde non sono risonanti e possono essere rimosse sempre grazie alle trasformazioni canoniche. I ricercatori hanno osservato che per $N = 16, 32, 64$ e con condizioni periodiche ($q_0 = q_N$), esistono soluzioni per l'interazione a sei onde in cui i gruppi risonanti sono interconnessi e rappresentano quindi un meccanismo efficiente di diffusione dell'energia nello spettro. Ci si aspetta quindi che l'equipartizione possa avvenire e che l'evoluzione sia quindi irreversibile. L'importante conclusione del lavoro è che la scala temporale di equipartizione per il problema dovrebbe essere dell'ordine di $1/\epsilon^8$.

3.4.2 Risultati numerici

Per verificare l'ipotesi teorica, sono state effettuate simulazioni al computer. Le equazioni sono state integrate numericamente nel caso $N = 32$ e con valori di ϵ compresi tra 0.0566 e 0.11: visti i tempi di termalizzazione molto lunghi, la computazione avrebbe portato a tempistiche ingestibili per valori di ϵ molto piccoli. Poiché l'equilibrio termico è un concetto statistico, per osservarlo è necessario studiare delle quantità medie. I ricercatori hanno scelto di utilizzare una media su 1000 realizzazioni per ognuna delle varie configurazioni iniziali. Come indicatore della termalizzazione hanno utilizzato la seguente entropia

$$S(t) := \sum_k f_k \log f_k \quad (3.26)$$

in cui

$$f_k := \frac{N-1}{E_{tot}} \omega_k \langle |a_k|^2 \rangle; \quad (3.27)$$

$$E_{tot} := \sum_k \omega_k \langle |a_k|^2 \rangle; \quad (3.28)$$

e dove $\langle \cdot \rangle$ denota la media sulle realizzazioni. Notiamo esplicitamente che rispetto all'entropia di Shannon questa è definita senza segno meno e quindi ci si aspetta che parta da un valore $S > 0$ e tenda poi a diminuire, fino ad un valore atteso di 0. Le simulazioni numeriche hanno portato ad un valore minimo di S dell'ordine di 10^{-4} .

Per verificare se la scala temporale era quella attesa, è stata scelto come tempo di equipartizione t_{eq} quello in cui l'entropia S raggiungeva il valore $S^* = 0.0001$. I risultati numerici confermano le previsioni analitiche secondo cui $t_{eq} \approx e^{-8}$. Come ultima verifica, che prescindendo dalla soglia arbitraria S^* imposta all'entropia, si è studiata S in funzione di $\epsilon^8 t$ per i vari valori di ϵ e, come previsto dai risultati teorici, è stato osservato che le curve hanno andamento estremamente simile.

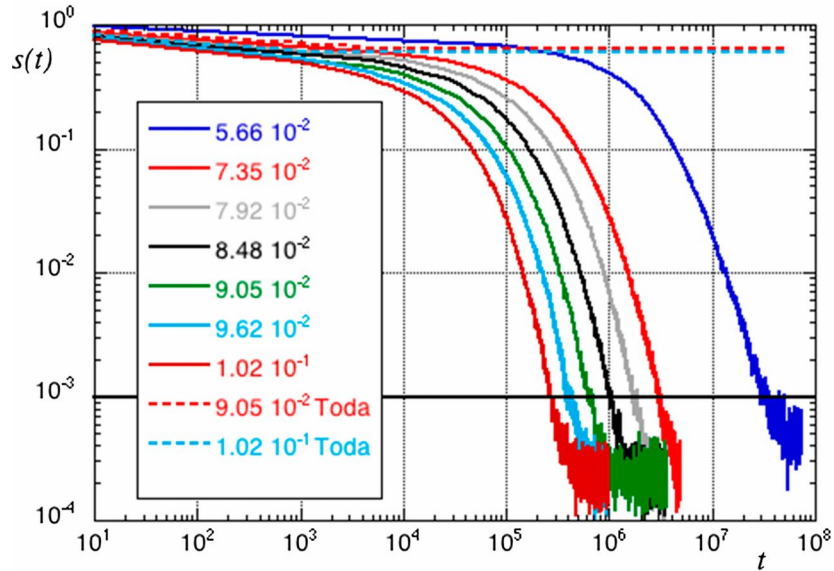


Figura 3.4: Entropia $S(t)$ come funzione del tempo per simulazioni condotte a diversi valori di ϵ . La linea orizzontale mostra la soglia $S^* = 0.001$. Figura tratta da [9].

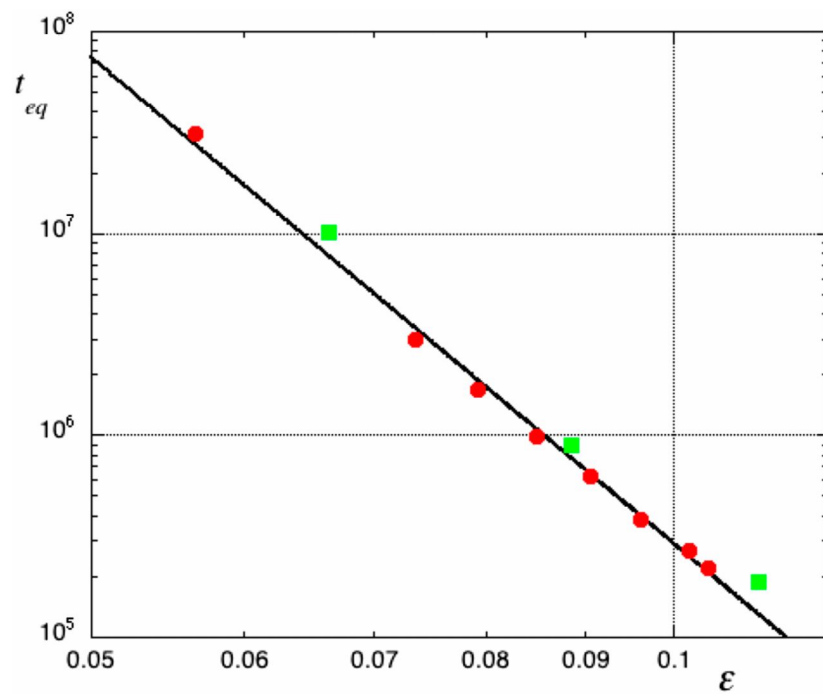


Figura 3.5: Tempo di equilibrio t_{eq} in funzione di ϵ , entrambi in scala logaritmica. I punti rossi rappresentano simulazioni in cui l'energia è inizialmente distribuita in vari modi, mentre i punti verdi rappresentano simulazioni in cui è solo nel primo modo. Figura tratta da [9].

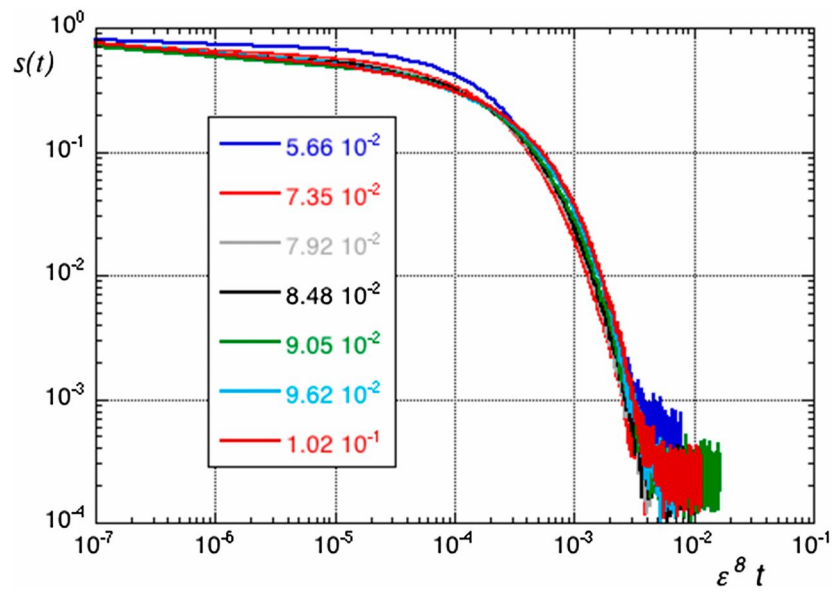


Figura 3.6: Entropia $S(t)$ come funzione di $\epsilon^8 t$ per varie simulazioni a diversi valori di ϵ . Figura tratta da [9].

Conclusioni

Dal contenuto del primo capitolo si può evincere come le varie formulazioni dell'ipotesi ergodica, pur mirando allo stesso risultato, abbiano esiti diversi: in particolare il teorema di Von Neumann risulta sufficiente per la termodinamica poiché essa si occupa di quantità medie, mentre quello di Birkhoff, concentrandosi sulle singole traiettorie, porta a risultati più forti ed è più adatto allo studio delle dinamiche soggiacenti all'evoluzione del sistema. Tuttavia il teorema di Von Neumann ha il vantaggio di essere facilmente applicabile anche al caso quantistico. La trattazione dei sistemi dinamici mostra come gli strumenti della meccanica statistica possano essere generalizzati ai sistemi astratti e il fenomeno del mixing sembra prestarsi molto bene ad una generalizzazione dell'ipotesi ergodica (pur essendo una richiesta più forte), col vantaggio di avere una definizione posta in modo più chiaro, anche da un punto di vista matematico.

Nella discussione sui tempi di ritorno presentata nel capitolo 2 si vede l'importanza cruciale dei tempi di osservazione: l'obiezione sollevata da Zermelo basata sul teorema di Poincaré, benchè corretta da un punto di vista matematico, si va a scontare con delle considerazioni di natura prettamente fisica, legate alla limitatezza dei tempi di misura. In particolare il teorema di Kac, per cui in tempo medio di ritorno del sistema in un insieme è inversamente proporzionale alla misura dell'insieme stesso, dimostra come tali considerazioni siano sensate da un punto di vista teorico.

Infine nella trattazione del problema di Fermi-Pasta-Ulam, oggetto del capitolo 3, il fatto di avere un comportamento quasi periodico per tempi non troppo lunghi ma di tendere all'equidistribuzione quando si porta avanti la simulazione risulta paradigmatico nel mostrare l'importanza dei tempi di osservazione. La proposta di varie soluzioni valide per scale temporali diverse illustra infatti come il sistema abbia comportamento diverso

a seconda del lasso di tempo durante il quale viene osservato. Inoltre il tempo necessario all'equidistribuzione energetica sembra legato alle frequenze proprie del sistema: si potrebbe quindi prospettare un'applicazione del modello allo studio dell'ergodicità nei gradi vibrazionali delle molecole per verificare se l'equidistribuzione avviene in tempi abbastanza brevi da essere apprezzabili.

Bibliografia

- [1] V.I. Arnold : *Mathematical Methods of classical mechanics*, second edition (Springer-Verlag, New York 1989)
- [2] L. Barreira. *Poincaré recurrence: old and new* In XIVth International Congress on Mathematical Physics. pp. 415–422. (World Scientific, Singapore 2006)
- [3] M. Cencini, F. Cecconi, A. Vulpiani: *Chaos from simple models to complex systems* (World Scientific, Singapore 2010)
- [4] K. Huang: *Statistical Mechanics*, (Wiley, New York 1963)
- [5] E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam: *Studies of nonlinear problems* (Los Alamos Scientific Laboratory Report, 1955)
- [6] L.D. Landau, E.M. Lifshitz: *Statistical Physics* (Clarendon, Oxford 1938)
- [7] A.I. Kinchin: *Mathematical foundation of statistical mechanics* (Dover, New York 1949)
- [8] S.K. Ma: *Statistical Mechanics* (World Scientific, Singapore 1985)
- [9] M. Onorato, L. Vozella, D. Proment, Y.V. Lvov: *A route to thermalization in the α -Fermi-Pasta-Ulam system* (PNAS, 2015)
- [10] B. Saussol: *An introduction to quantitative Poincaré recurrence in dynamical system* in Rev. Math. Phy., 21, 949 (World Scientific, Singapore 2009)
- [11] M. Toda, R. Kubo, N.Saito: *Statistical Physics I*, seconda edizione (Springer-Verlag, New York 1992)