

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Fisica

Studio del trapping adiabatico per mappe stocastiche

Relatore:
Prof. Armando Bazzani

Presentata da:
Federico Bellisardi

Correlatore:
Prof. Graziano Servizi

Sessione II
Anno Accademico 2014/2015

Ai miei nonni

Sommario

In questa tesi vengono trattati argomenti relativi alla dinamica dei fasci di particelle: in particolare si è preso in considerazione il moto betatronico di una particella carica all'interno di un acceleratore circolare. Vengono quindi discussi alcuni aspetti della dinamica trasversa introducendo il formalismo Hamiltoniano e discutendo il modello presentato da Hénon per il caso bidimensionale.

Viene poi introdotta la teoria adiabatica al fine di studiare gli effetti intrappolamento di un ensemble di particelle.

Infine vengono presentate alcune simulazioni che permettono di poter osservare come il rumore rappresenti un fattore di rilevante importanza nello studio di tali fenomeni.

Introduzione

Scopo di questa tesi è lo studio della dinamica di un fascio di particelle.

Si tratta quindi di analizzare il comportamento di tali oggetti in moto all'interno di un acceleratore circolare di particelle. Consideriamo per i nostri scopi solo degli elementi sestupolari, i quali consentono una lenta estrazione delle particelle e pertanto l'applicazione della teoria di Neishtadt [1] per l'indagine di fenomeni di intrappolamento. Viene presentata *in primis* una panoramica della dinamica che interessa questa indagine, discutendo alcuni concetti inerenti il moto betatronico di una particella carica all'interno di un acceleratore circolare, ponendo l'attenzione anche su aspetti geometrici che consentono di scrivere le equazioni del moto di tale oggetto e di trattare la mappa di trasferimento dell'elemento magnetico. Per mezzo di alcune considerazioni scaturite dall'utilizzo di elementi sestupolari è stato possibile introdurre la mappa di Hénon per studiare il fenomeno.

Si presentano quindi alcune caratteristiche di tale mappa enunciando il modello di Hénon [2], tramite la formulazione Hamiltoniana e l'applicazione di tale funzionale al caso sestupolare. Sono infatti ricavate le equazioni di Hamilton in funzione dei parametri dell'acceleratore e delle oscillazioni betatroniche nello spazio considerato.

Viene ampiamente discussa la teoria dell'invarianza adiabatica esaminando sistemi Hamiltoniani modulati lentamente introducendo le coordinate *azione-angolo* e definendo un IAI (*Improved Adiabatic Invariant*); grazie all'applicazione della teoria di Neishtadt [1] è quindi stato possibile studiare il fenomeno di intrappolamento all'interno di una regione di risonanza e delineare quindi i limiti di applicabilità della teoria per un ensemble di particelle.

Sono state infine presentati alcuni studi del processo di evoluzione del fascio simulando un tale fenomeno al computer. La finalità di tale capitolo è quindi quella di verificare i modelli teorici descritti.

Vengono descritte le caratteristiche generiche del *rumore* e la metrica utilizzata per poter

confrontare i valori ottenuti. Si sono analizzate popolazioni di 5×10^3 particelle all'interno di un acceleratore il cui *tune* della dinamica lineare viene modificato secondo una determinata funzione del numero di iterazioni. Ogni simulazione effettuata presenta la descrizione del fenomeno in presenza oppure in assenza di un rumore simulato all'interno della macchina.

Indice

1	Dinamica trasversa	4
1.1	Mappe Hamiltoniane e loro applicazioni al moto betatronico	5
1.2	Mappe dell'elemento magnetico	7
2	La mappa di Hénon in 2D	10
2.1	Il modello di Hénon	10
2.2	Modelli Hamiltoniani e la mappa di Hénon	11
3	Teoria Adiabatica	13
3.1	Sistemi Hamiltoniani modulati lentamente	14
3.2	Mappe modulate quasi-integrabili	18
3.3	Intrappolamento nella risonanza	20
3.4	Sistemi pendulum-like	24
3.5	Intrappolamento di un ensemble di particelle	25
4	Simulazioni	27
4.1	Processo di evoluzione	27
4.2	Risultati	28

Capitolo 1

Dinamica trasversa

In questo capitolo si accenna alla teoria del moto betatronico di una particella carica in un acceleratore circolare. Si introduce il concetto di mappa Hamiltoniana ed alcuni aspetti geometrici, come la simpletticità .

Introduciamo inoltre una nuova classe di matrici che possono essere utili per la nostra trattazione in quanto rappresentano la naturale generalizzazione della condizione di area-preserving in spazi con dimensione maggiore di 2.

Una matrice \mathbf{A} 4x4 è simplettica se soddisfa

$$\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{A}^T = \mathbf{J} \quad (1.1)$$

dove \mathbf{J} è definita come

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Analogamente si può dare la definizione della condizione di simpletticità per una mappa. Infatti una mappa $\mathbf{M} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ è detta simplettica se il suo Jacobiano \mathbf{M}_J , costituito dagli elementi

$$\mathbf{M}_{J_{k,l}}(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial M_k}{\partial x_l}(\mathbf{x}), \quad (1.3)$$

è una matrice simplettica per ogni \mathbf{x} tale che

$$\mathbf{M}_J(\mathbf{x})\mathbf{J}\mathbf{M}_J^T(\mathbf{x}) = \mathbf{J}. \quad (1.4)$$

Tale condizione è scrivibile in termini delle parentesi di Poisson come

$$\{M_i, M_j\} = \mathbf{J}_{i,j} \quad i, j = 1, \dots, 4 \quad (1.5)$$

Notiamo infine che una mappa $\mathbf{M} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è una mappa area-preserving se

$$Det(\mathbf{M}_J) \equiv \frac{\partial M_1}{\partial x} \frac{\partial M_2}{\partial p} - \frac{\partial M_1}{\partial p} \frac{\partial M_2}{\partial x} = 1; \quad (1.6)$$

e si può provare che tale condizione è equivalente alla condizione simplettica in \mathbb{R}^2 .

1.1 Mappe Hamiltoniane e loro applicazioni al moto betatronico

Una mappa Hamiltoniana è data essenzialmente dal flusso discretizzato delle soluzioni delle equazioni canoniche di Hamilton. Data quindi una funzione $H(q, p)$ possiamo associarci il flusso $g(x_0; t)$ soluzione delle equazioni canoniche: dove $x = (q, p)$. Una mappa Hamiltoniana è una applicazione

$$\mathcal{M} : R^{2d} \rightarrow R^{2d} \quad (1.7)$$

dove d è il numero di gradi di libertà del sistema.

Il moto betatronico è il moto di una particella nel piano trasverso (x, y) nel sistema di riferimento in figura (1.1). Infatti assumiamo che la funzione di Hamilton di una particella in un acceleratore è composta da una parte trasversale ed una longitudinale, totalmente disaccoppiate se l'ipotesi di lavoro è quella di parassialità del fascio.[4]

Consideriamo il moto di una singola particella in un reticolo magnetico ¹ circolare formato da L elementi magnetici $\mathcal{M}^1, \dots, \mathcal{M}^L$. Indichiamo con x, y rispettivamente l'asse orizzontale e l'asse verticale nel piano perpendicolare all'orbita e con s la coordinata curvilinea.

¹Un **reticolo magnetico** è una composizione di elettromagneti situati in una data posizione longitudinale al di fuori del tubo a vuoto in un acceleratore di particelle.

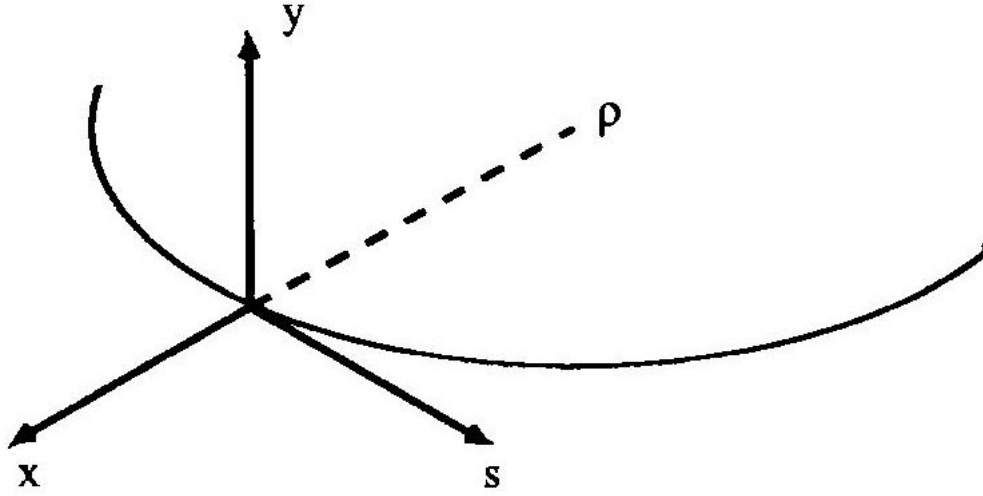


Figura 1.1: Il sistema di coordinate

Studiamo la dinamica nel piano trasversale (x, y) utilizzando la coordinata curvilinea s come parametro. I momenti coniugati sono rappresentati dalle quantità adimensionali

$$p_x \equiv \frac{dx}{ds}, \quad p_y \equiv \frac{dy}{ds} \quad (1.8)$$

mentre il moto avviene nello spazio delle fasi 4-dimensionale, i cui punti sono indicati da

$$x = \begin{pmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \end{pmatrix} \text{ o equivalentemente } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}; \quad (1.9)$$

Assumiamo che il campo magnetico generato dagli elementi non abbia componenti lungo s , e sia pertanto esprimibile come: $\mathbf{B} = (B_x, 0, B_y)$; imponendo la condizione di divergenza nulla che segue dalle equazioni di Maxwell, utilizzando l'espansione in multipoli è possibile esprimere il campo magnetico generato dai magneti della macchina come [3]:

$$B_y(x, y; s) + iB_x(x, y; s) = B_0 \left(\rho_0 \sum_{n=1}^M [k_n(s) + ij_n(s)] \frac{(x + iy)^n}{n!} - \kappa(s) \right). \quad (1.10)$$

dove κ è una funzione identicamente uguale a 1 nei dipoli, mentre è 0 altrove; B_0 è il campo magnetico costante di dipolo ed è necessario per mantenere una particella d'impulso p_0 su un'orbita con raggio di curvatura $\rho_0 = p_0/qB_0$. Assumiamo inoltre che le

particelle abbiano tutte la stessa energia.

I coefficienti di multipolo k_n e j_n sono dati rispettivamente dai seguenti gradienti normalizzati

$$k_n = \frac{1}{B_0 \rho_0} \left. \frac{\partial^n B_y}{\partial x^n} \right|_{(0,0;s)}; \quad j_n = \frac{1}{B_0 \rho_0} \left. \frac{\partial^n B_x}{\partial x^n} \right|_{(0,0;s)}. \quad (1.11)$$

Trascurando il termine che rappresenta l'accoppiamento lineare tra i due piani (es: assumiamo $j_1(s) = 0$) e facendo valere varie approssimazioni possiamo scrivere le equazioni del moto per una particella singola [5]:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{ds^2} + \left(\frac{1}{\rho(s)^2} - k_1(s)\right)x = \Re \left[\sum_{n=2}^M \frac{k_n(s) + i j_n(s)}{n!} (x + iy)^n \right] \\ \frac{d^2 y}{ds^2} + k_1(s)y = -\Im \left[\sum_{n=2}^M \frac{k_n(s) + i j_n(s)}{n!} (x + iy)^n \right] \end{cases} \quad (1.12)$$

linearizzando le quali si ha il sistema [3]:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{ds^2} + \left(\frac{1}{\rho(s)^2} - k_1(s)\right)x = 0 \\ \frac{d^2 y}{ds^2} + k_1(s)y = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

Osserviamo che entrambe queste equazioni presentano la stessa struttura: sono equazioni tipiche dell'oscillatore armonico, ma con frequenza dipendente da s e quindi dalla posizione nella macchina.

1.2 Mappe dell'elemento magnetico

Siccome i gradienti (1.11) possono essere ben approssimati da funzioni costanti su un singolo magnete, è conveniente introdurre la mappa di trasferimento $\mathbf{M}^{(l)}$ dell'elemento $\mathcal{M}^{(l)}$ che agisce nel seguente modo:

$$\mathbf{x}(s_l) = \mathbf{M}^{(l)}(\mathbf{x}(s_{l-1})) \quad \mathbf{M}^{(l)} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \quad (1.14)$$

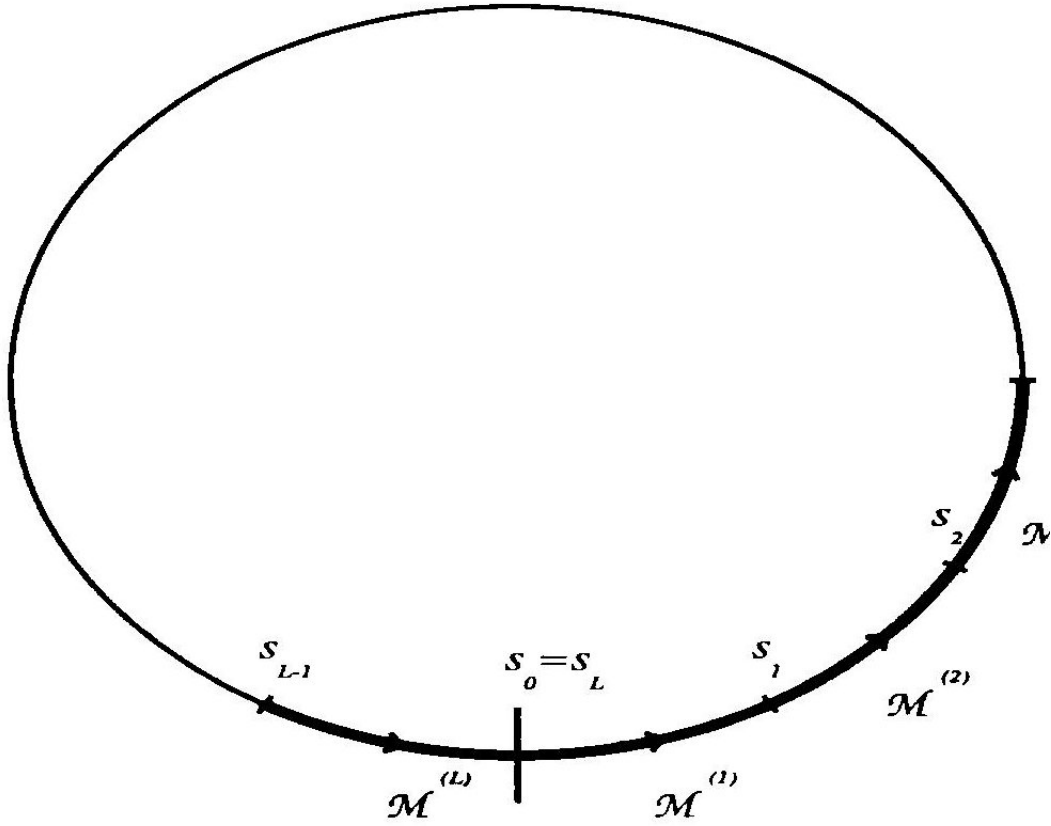


Figura 1.2: Rappresentazione di un acceleratore circolare e dei suoi elementi magnetici

Le equazioni del moto (1.12) possono essere derivate da una Hamiltoniana dipendente dal tempo[3]:

$$\begin{aligned}
 H(x, p_x, y, p_y; s) = & \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + \left(\frac{1}{\rho(s)^2} - k_1(s) \right) \frac{x^2}{2} + k_1(s) \frac{y^2}{2} \\
 & - \Re \left[\sum_{n=2}^M \frac{k_n(s) + i j_n(s)}{(n+1)!} (x + iy)^{n+1} \right]
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

utilizzando le equazioni di Hamilton [6]

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{ds} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} & \frac{dp_x}{ds} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\
 \frac{dy}{ds} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} & \frac{dp_y}{ds} &= -\frac{\partial H}{\partial y}.
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Quindi la mappa di trasferimento $\mathbf{M}^{(l)}$ può essere vista come il flusso Hamiltoniano che propaga la condizione iniziale $x(s_{l-1})$ a $x(s_l)$.

Consideriamo un reticolo magnetico lineare con un sestupolo normale: $k_2 > 0$. La mappa su un giro può essere espressa come [3]

$$\begin{pmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \end{pmatrix} = \mathbf{L} \begin{pmatrix} x \\ p_x + \frac{k_2}{2}(x^3 - y^3) \\ y \\ p_y - k_2xy \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

dove k_2 è il gradiente integrato ed \mathbf{L} è la mappa lineare di trasferimento del reticolo.

Se \mathbf{L} è il prodotto di due rotazioni indipendenti nei due piani coordinati, la mappa risultante è quella di Hénon 4-D, in quanto sul piano $y = 0, p_y = 0$ si riduce alla forma bidimensionale della sopraddetta mappa.

Capitolo 2

La mappa di Hénon in 2D

2.1 Il modello di Hénon

La mappa di Hénon è uno dei più semplici modelli di mappe Hamiltoniane non-integrabili, e mostra il comportamento tipico di una mappa simplettica polinomiale bidimensionale. Tale modello riproduce un effetto di sestupolo. Utilizzando coordinate reali (\hat{x}, \hat{p}) tale mappa si scrive:

$$\begin{pmatrix} \hat{x}' \\ \hat{p}' \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\omega) \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{p} + \hat{x}^2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{R}(\omega) = \begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ -\sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Scrivendo tale mappa nelle coordinate complesse $z = \hat{x} - i\hat{p}$, $z^* = \hat{x} + i\hat{p}$:

$$z' = e^{i\omega} \left[z - \frac{i}{4} (z + z^*)^2 \right] \quad z \in \mathbf{C} \quad (2.2)$$

Si può dimostrare che una mappa area-preserving generica quadratica nella quale l'origine è un punto fisso, può essere ridotta tramite trasformazioni di rotazione o di scala alla forma (2.2). Osserviamo inoltre che l'inversa di una mappa quadratica rimane ancora essere una mappa quadratica. Infatti si può verificare che tale mappa inversa si presenti nella forma

$$z = e^{-iz} z' + \frac{i}{4} [e^{-i\omega} z' + e^{i\omega} z'^*]^2; \quad (2.3)$$

che viene chiamata in letteratura *mappa di Cremona*.

2.2 Modelli Hamiltoniani e la mappa di Hénon

La mappa di Hénon può essere ottenuta come mappa di Poincaré di una Hamiltoniana periodica. Sia

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2\beta^2} - \frac{K_2 x^3}{6} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(s - nl) \quad (2.4)$$

dove s è la coordinata longitudinale che può variare da 0 fino a s_l , $l = s_l/L$ e δ è la funzione delta definita da

$$\int_{0-\epsilon}^{0+\epsilon} \delta(s) \mathbf{f}(x, y; s) ds = \mathbf{f}(x, y; 0)$$

Tale Hamiltoniana può descrivere le oscillazioni betatroniche orizzontali di un anello con L celle identiche di lunghezza l con un sottile sestupolo. Denotiamo invece con β la media della funzione $\beta(s)$ ¹ sulla cella e K_2

$$\beta = \frac{1}{l} \int_0^l \beta(s) ds \quad K_2 = \int_0^{l_s} k_2(s) ds \quad (2.5)$$

dove l_s rappresenta la lunghezza del sestupolo. Le equazioni del moto della (2.4) sono

$$\begin{cases} \dot{x} = p \\ \dot{p} = -\frac{x}{\beta^2} + \frac{K_2}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(s - nl) \end{cases} \quad (2.6)$$

osserviamo che $x(s)$ è continuo, mentre $p(s)$ è discontinuo in $s = nl$; indicando con $x_n^\pm = x(nl \pm 0)$ e $p_n^\pm = p(nl \pm 0)$ rispettivamente il limite destro e quello sinistro, si osserva che sono punti discontinui di p , integrando la (2.6) nell'intervallo $nl - \epsilon \leq s \leq nl + \epsilon$ e mandando $\epsilon \rightarrow 0$ abbiamo

$$p_n^+ - p_n^- = +\frac{K_2}{2} x_n^2, \quad x_n^+ = x_n^- \equiv x_n \quad (2.7)$$

La mappa da (x_n, p_n^-) a (x_{n+1}, p_{n+1}^-) viene ottenuta calcolando (x_{n+1}, p_{n+1}^-) come funzione di (x_n, p_n^+) utilizzando la linearizzazione delle equazioni (2.6) che corrisponde alla evoluzione armonica, siccome nell'intervallo $]nl, (n+1)l[$ la funzione δ è assente. Abbiamo di

¹Definiamo con $\beta_x(\mathbf{s})$ e $\beta_y(\mathbf{s})$ le ampiezze dell'oscillatore armonico definito dalla linearizzazione delle equazioni (1.12) [3]

conseguenza:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ p_{n+1}^- \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \frac{l}{\beta} & \beta \sin \frac{l}{\beta} \\ -\frac{1}{\beta} \sin \frac{l}{\beta} & \cos \frac{l}{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ p_n^+ \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\beta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\beta}} \end{pmatrix} \mathbf{R}\left(\frac{l}{\beta}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\beta}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ p_n^- + \frac{K_2}{2} x_n^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Facendo un cambio di coordinate $x \rightarrow x/\sqrt{\beta}$, $p \rightarrow p\sqrt{\beta}$ otteniamo una mappa di Hénon dove il coefficiente del termine quadratico è $K_2\beta^{3/2}/2$. Di conseguenza è necessario effettuare un riscalamento, che non conserva le aree, di un fattore $K_2\beta^{3/2}/2$ per ottenere la mappa di Hénon (2.1).

Per sintetizzare:

$$\hat{x} = \frac{x}{\sqrt{\beta}}, \quad \hat{p} = p\sqrt{\beta} \quad (2.9)$$

sono chiamate coordinate di Courant-Snyder. Utilizzando le coordinate adimensionali scalate

$$\begin{aligned} \hat{X} &= \frac{K_2\beta^{3/2}}{2} \hat{x} = \frac{K_2\beta}{2} x \\ \hat{P} &= \frac{K_2\beta^{3/2}}{2} \hat{p} = \frac{K_2\beta^2}{2} p \end{aligned} \quad (2.10)$$

la mappa (2.8) diviene la mappa di Hénon

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{n+1} \\ \hat{P}_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{R}\left(\frac{l}{\beta}\right) \begin{pmatrix} \hat{X}_n \\ \hat{P}_n + \hat{X}_n^2 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

La mappa di Hénon rappresenta la più semplice mappa polinomiale simplettica e per tale ragione risulta un modello ideale per discutere alcuni aspetti basilari della dinamica non lineare.

Capitolo 3

Teoria Adiabatica

La teoria adiabatica è stata sviluppata per stimare la variazione dell'invariante adiabatico nel momento in cui avvengono fenomeni di attraversamento della separatrice in sistemi Hamiltoniani modulati lentamente aventi un grado di libertà. La teoria fornisce una formula esplicita per il calcolo della probabilità di intrappolamento in una regione di risonanza, per la variazione dell'invariante adiabatico a causa del fenomeno di attraversamento della separatrice e per la stima dell'errore che definisce le regioni di validità nello spazio delle fasi.

Il trasporto adiabatico è possibile anche per un ensemble di particelle intrappolate in una regione di risonanza; esse possono essere spostate di una distanza dell'ordine $O(1)$ in un tempo $O(1/\epsilon)$, dove ϵ rappresenta il *parametro adiabatico* che definisce la lenta scala temporale. Il trasporto adiabatico per mezzo di risonanze non lineari ha rilevanti applicazioni in vari campi della fisica (fisica del plasma, fisica degli acceleratori) per il controllo di una distribuzione di particelle sotto l'effetto di dinamiche non lineari.

È possibile effettuare calcoli numerici ed analitici per studiare leggi di scala relative all'efficienza del trapping adiabatico e per analizzare sistemi Hamiltoniani quasi-integrabili. Infatti l'applicazione dei risultati di tale teoria deve affrontare il problema di una quantitativa valutazione dei suoi limiti e dell'estensione di tali risultati a modelli reali.

In particolare andremo a considerare la possibilità di estendere tale teoria a mappe analitiche area-preserving in un intorno del punto ellittico stabile. Un tale caso è quello di sistemi quasi-integrabili come la *mappa di Hénon*, che rappresenta un importante modello nello studio degli effetti non-lineari per la fisica degli acceleratori.

3.1 Sistemi Hamiltoniani modulati lentamente

Nella sua prima formulazione la teoria della invarianza adiabatica considera la dinamica di un sistema Hamiltoniano nella forma:

$$E = H_0(p, q, \lambda) \quad (3.1)$$

dove $\lambda = \epsilon t$ e H è dipendente in maniera periodica da λ con un periodo di 2π . L'Hamiltoniana $H_0(p, q, \lambda)$ viene detta *sistema congelato* quando viene considerata la dinamica per un valore fissato del parametro λ .

Assumiamo che lo spazio delle fasi del sistema congelato venga suddiviso in regioni differenti dalle curve separatrici e che in ogni regione si possa effettuare in cambiamento di variabili azione-angolo:

$$\begin{aligned} I = I(E, \lambda) &= \frac{1}{2\pi} \oint_{H_0(p,q,\lambda)=E} p(E, q, \lambda) dq; \\ \theta &= \left. \frac{\partial F}{\partial I} \right|_q (q, I, \lambda) \end{aligned} \quad (3.2)$$

dove $F(I, q, \lambda)$ è la funzione generatrice calcolata tramite la definizione:

$$F(q, E(I, \lambda), \lambda) = \int_{H_0=E}^q p(q, E, \lambda) dq \quad (3.3)$$

che dipende parametricamente da λ il quale viene mantenuto fissato durante l'integrazione.

Sia $H_0 = H_0(I, \lambda)$, possiamo definire la frequenza congelata come:

$$\Omega(I, \lambda) = \frac{dH_0}{dI}. \quad (3.4)$$

Sia $\lambda = \epsilon t$ con $\epsilon \ll 1$, in modo tale per cui $1/\epsilon$ sia una scala temporale molto più lunga del tempo caratteristico del sistema $2\pi/\Omega$: ciò significa che l'orbita non si trova troppo vicina alla separatrice. Dalle equazioni (3.2) otteniamo:

$$\theta = \frac{\partial H_0}{\partial I} \int_{H_0=E}^q \left. \frac{\partial p}{\partial E} \right|_q dq = \Omega(E, \lambda) \int_{H_0=E}^q \frac{dq}{\dot{q}} = \theta_0 + \Omega(E, \lambda)t \quad (3.5)$$

Un altro risultato interessante riguarda l'azione $I(p, q, \lambda)$ del sistema congelato, infatti si tratta di un invariante adiabatico:

$$|I(p(t), q(t), \epsilon t) - I_0| \leq O(\epsilon) \quad \text{per } t \leq \frac{1}{\epsilon} \quad (3.6)$$

In accordo con la teoria di Hamilton-Jacobi, cambiando le variabili azione-angolo, otteniamo una nuova Hamiltoniana nella forma:

$$H(I, \theta, \lambda) = H_0(I, \lambda) + \epsilon H_1(I, \theta, \lambda) \quad (3.7)$$

dove $H_0(I, \lambda) = H_0(p, q, \lambda)$ e si ha:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right|_{q,I} = H_1(I, \theta, \lambda) \quad (3.8)$$

Lemma 1. È sempre possibile scegliere $F(q, I, \lambda)$ in modo che

$$\left\langle \left. \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right|_{q,I} (I, \theta, \lambda) \right\rangle = 0 \quad (3.9)$$

Mantenendo λ costante, possiamo applicare la teoria perturbativa per calcolare l'invariante J (associato all'angolo θ) in modo tale per cui l'Hamiltoniana si trasformi come

$$H'(J, \phi, \lambda) = H_0(J, \lambda) + O(\epsilon^2) \quad (3.10)$$

Dimostrazione. Effettuando una espansione perturbativa sulla trasformazione canonica associata alla funzione generatrice otteniamo:

$$\tilde{G}(\theta, J, \lambda) = J\theta + \epsilon G \quad (3.11)$$

in base a

$$\begin{aligned} \theta &= \phi - \epsilon \frac{\partial G}{\partial J}(\phi, J, \lambda) + O(\epsilon^2) \\ I &= J + \epsilon \frac{\partial G}{\partial \phi}(\phi, J, \lambda) + O(\epsilon^2); \end{aligned} \quad (3.12)$$

Quindi abbiamo l'equazione:

$$H_0(J, \lambda) + \epsilon \frac{\partial H_0}{\partial J} \frac{\partial G}{\partial \phi} + \epsilon \left. \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right|_{q,I} (I, \theta) + O(\epsilon^2) = H_0(J, \lambda) + O(\epsilon^2) \quad (3.13)$$

In cui abbiamo usato la eq.(3.8).

La funzione $G(\phi, J)$ soddisfa l'equazione omologica ¹,

$$-\Omega(J, \lambda) \frac{\partial G}{\partial \phi} = \left. \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right|_{q,I}(\phi, J, \lambda)$$

¹Una equazione *omologica* mette in relazione la stessa grandezza in diversi sistemi di coordinate.

La soluzione esiste poichè:

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial \lambda} \Big|_{q,I} (I, \theta, \lambda) \right\rangle = 0 \quad (3.14)$$

e si ha

$$G(\phi, J, \lambda) = -\frac{1}{\Omega(J, \lambda)} \int^{\phi} \frac{\partial F}{\partial \lambda} \Big|_{q,I} (\phi, J, \lambda) d\phi \quad (3.15)$$

Da cui otteniamo la relazione

$$I = J + O(\epsilon^2)$$

□

L'invarianza adiabatica dell'azione segue direttamente dalla disuguaglianza

$$|J(t) - J(0)| < O(\epsilon) \quad \text{per } t < \frac{1}{\epsilon} \quad (3.16)$$

e dalla relazione

$$I = J + O(\epsilon^2) \quad (3.17)$$

Possiamo inoltre dimostrare che la nuova azione J sia un IAI (Improved Adiabatic Invariant). Infatti, usando la funzione generatrice $\tilde{G}(\theta, J, \lambda)$ con $\lambda = \epsilon t$, otteniamo una nuova Hamiltoniana nella forma

$$H'(J, \lambda) = H_0(J, \lambda) + \epsilon^2 \frac{\partial G}{\partial \lambda}(J, \phi, \lambda) + O(\epsilon^3) \quad (3.18)$$

e si può provare che:

$$|J(q(t), p(t), \epsilon t) - J_0| < O(\epsilon^2) \quad \text{se } t < \frac{1}{\epsilon}$$

Nel caso 1-dimensionale è possibile provare l'esistenza di un invariante adiabatico continuo usando la teoria del KAM. [6]

Per completezza, possiamo verificare la disuguaglianza (3.6) direttamente dall'equazione

$$\frac{dI}{dt} = \epsilon \frac{\partial I}{\partial E} \frac{\partial H_0}{\partial \lambda} \Big|_{p,q} + \epsilon \frac{\partial I}{\partial \lambda_E}$$

che può scriversi come

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{\Omega(E, \lambda)} \left(\frac{\partial H_0}{\partial \lambda} \Big|_{q,p} - \left\langle \frac{\partial H_0}{\partial \lambda} \Big|_{p,q} \right\rangle \right) \quad (3.19)$$

Nel caso di mappe modulate (dalla frequenza), la relazione precedente viene sostituita da una relazione discreta, per l'evoluzione dell'azione I . Scegliamo una sezione costante $\theta = \text{cost}$ nello spazio delle fasi (sezione di Poincaré) e sia $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sequenza dei tempi in cui avviene l'attraversamento dell'orbita $(q(t), p(t))$ con la sezione. Poiché l'Hamiltoniana $H_0(p, q, \lambda)$ si conserva trascurando ordini superiori a $O(\epsilon)$, la soluzione per $t \in [t_n, t_{n+1}]$ è vicina alla curva $H_0(p, q, \lambda_*) = E_*$ dove $\lambda_* \in [\lambda_n, \lambda_{n+1}]$ e $E_* \in [E_n, E_{n+1}]$. Inoltre la dinamica delle variabili angolo porta:

$$\dot{\theta} = \Omega(E, \lambda) + \epsilon \frac{\partial H_1}{\partial I}$$

Otteniamo quindi la relazione

$$dt = \frac{d\theta}{\Omega(E, \lambda)} + O(\epsilon^2) \quad (3.20)$$

Quindi possiamo utilizzare θ come un parametro per le variabili dinamiche $(p(t), q(t))$. Tenendo fede alla definizione precedente abbiamo

$$I_{n+1} - I_n = \epsilon \int_0^{2\pi} \frac{1}{\Omega^2(E, \lambda)} \left(\left. \frac{\partial H_0}{\partial \lambda} \right|_{p,q} - \left\langle \left. \frac{\partial H_0}{\partial \lambda} \right|_{p,q} \right\rangle \right) d\theta + O(\epsilon^2) \quad (3.21)$$

Siccome durante l'integrazione posso tenere costanti sia l'energia che il parametro λ fino all'ordine $O(\epsilon)$, la relazione (3.21) si semplifica in quanto Ω può essere portato fuori dall'integrale

$$I_{n+1} - I_n = O(\epsilon^2) \quad (3.22)$$

Ciò comporta che il valore di I non può variare di una quantità superiore all'ordine $O(\epsilon^2)$ nell'intervallo $[t_n, t_{n+1}]$ e l'invarianza adiabatica è verificata.

3.2 Mappe modulate quasi-integrabili

Per mappe modulate quasi-integrabili, l'integrale (3.21) viene sostituito da una somma fino a $n\Omega \simeq 2\pi$ e $\Omega(E, \lambda)$ definisce il passo angolare nella somma. Per provare l'invarianza adiabatica dobbiamo introdurre un cut off nella espansione di Fourier per evitare condizioni di risonanza. In effetti il termine $k\Omega \leq 2\pi$ definisce un cut off.

Inoltre considerando un tempo $N \simeq 1/\epsilon$, l'azione muta in accordo con

$$I_N - I_0 = \epsilon \sum_{n=1}^N \frac{1}{\Omega(I_n, \lambda_n)} \left(\left. \frac{\partial H_0}{\partial \lambda} \right|_{p,q} (I_n, \theta + n\Omega, \lambda_n) - \left\langle \left. \frac{\partial H_0}{\partial \lambda} \right|_{p,q} \right\rangle (I_n, \lambda_n) \right) + O(\epsilon^2) \quad (3.23)$$

Per studiare la dinamica delle azioni è conveniente considerare il tempo e l'energia.

$$t_{n+1} - t_n = \frac{2\pi}{\omega(E, \lambda)} + O(\epsilon) = T(E, \lambda) + O(\epsilon) \quad \text{con } E \in [E_n, E_{n+1}] \text{ e } \lambda \in [\lambda_n, \lambda_{n+1}]$$

dove $T(E, \lambda)$ è il periodo dell'Hamiltoniana congelata. Calcoliamo inoltre la variazione di energia nel "crossing point"; per definizione

$$\frac{dE}{dt} = \epsilon \frac{\partial H}{\partial \lambda}$$

e integrando

$$E_{n+1} - E_n = \epsilon \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\partial H}{\partial \lambda}(p, q, \lambda) dt \quad (3.24)$$

Utilizzando l'angolo θ come parametro otteniamo:

$$E_{n+1} - E_n = \frac{\epsilon}{\omega(E, \lambda)} \int_0^{2\pi} \frac{\partial H}{\partial \lambda}(p, q, \lambda) d\theta + O(\epsilon^2) \quad (3.25)$$

Infine ricaviamo

$$E_{n+1} - E_n = -2\pi\epsilon \left. \frac{\partial I}{\partial \lambda} \right|_E + O(\epsilon^2) \quad (3.26)$$

Definiamo una mappa tempo-energia in base a:

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} &= \lambda_n + 2\pi\epsilon \left. \frac{\partial I}{\partial E} \right|_\lambda + O(\epsilon^2) \\ E_{n+1} &= E_n - 2\pi\epsilon \left. \frac{\partial I}{\partial \lambda} \right|_E + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Sottolineiamo il carattere simplettico della mappa tempo-energia che è rappresentato dal flusso di fase dell'Hamiltoniana $I(E, \lambda)$.

Un approccio alternativo considera l'Hamiltoniana azione-angolo e utilizza θ come parametro. La soluzione delle equazioni di Hamilton sono legate alla forma differenziale

$$\alpha = Id\theta - Hdt$$

Le nuove equazioni del moto hanno una struttura canonica tenuto conto che $-I(E, \lambda, \theta)$ è la nuova Hamiltoniana

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} &= \epsilon \frac{\partial I}{\partial E}(E, \lambda, \theta) = \epsilon \frac{\partial I}{\partial E}(E, \lambda) + O(\epsilon^2) \\ \dot{E} &= -\epsilon \frac{\partial I}{\partial \lambda}(E, \lambda, \theta) = -\epsilon \frac{\partial I}{\partial \lambda}(E, \lambda) + O(\epsilon^2)\end{aligned}\tag{3.28}$$

Osserviamo che come conseguenza della divergenza logaritmica del periodo imperturbato $T(E, \lambda)$, la mappa tempo-energia non può essere calcolata in un piccolo intorno della separatrice poiché $\omega(E, \lambda) \rightarrow 0$. In altre parole, tale mappa è singolare sulla separatrice, ma la singolarità è debole. Se lo spazio delle fasi viene diviso in regioni differenti dalle curve separatrici, si hanno diverse mappe tempo-energia in ognuna di queste regioni che devo essere connesse nelle singolarità tra loro.

Nei pressi della curva separatrice, ciascuna orbita trascorre molto tempo nei pressi del punto fisso iperbolico: il tempo trascorso vicino a un punto fisso diverge quando l'energia tende al valore assunto sulla separatrice E_s , mentre il tempo richiesto dalla restante parte della curva è finito. La forma normale per il sistema Hamiltoniano congelato può essere scritta come [7]:

$$H_n(P, Q) = a(\lambda)PQ + O(4)\tag{3.29}$$

Sia h la differenza tra l'energia della separatrice e l'energia effettiva, allora in un intorno del punto fisso iperbolico le orbite possono approssimarsi come:

$$\begin{aligned}Q(t) &= Q_0 \exp(a(\lambda_0)(1 + O(h)t)) \\ P(t) &= P_0 \exp(-a(\lambda_0)(1 + O(h)t))\end{aligned}\tag{3.30}$$

le condizioni iniziali sono scelte in modo che (Q_0, P_0) sia alla minima distanza dal punto iperbolico e λ_0 rappresenti il valore corrispondente a λ al tempo $t = 0$. Per definizione $(Q_0, P_0) \simeq \sqrt{h}(1 + O(h))$. Sia Q_* il valore della coordinata al confine dell'intorno considerato, possiamo stimare il tempo di attraversamento t_* tramite l'equazione

$$Q_* = \sqrt{h}(1 + O(h)) \exp(a(\lambda)(1 + O(h))\frac{t_*}{2})\tag{3.31}$$

ottenendo l'espansione asintotica del tempo trascorso nei pressi della separatrice:

$$\begin{aligned} t_* &= \frac{2}{a(\lambda_0)(1+O(h))} \ln \frac{Q_*}{\sqrt{h}(1+O(h))} = \\ &= -\frac{1}{a(\lambda_0)} \ln |h| + b(\lambda_0) + O(h \ln |h|); \end{aligned}$$

Vicino alla separatrice la mappa ha un limite singolare e la dinamica diventa fortemente non-integrabile. Dalle equazioni del primo ordine (3.27)

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} &= \lambda_n + 2\pi\epsilon \frac{\partial I}{\partial E}(E_n, \lambda_n) + O(\epsilon^2) \\ E_{n+1} &= E_n - 2\pi\epsilon \frac{\partial I}{\partial \lambda}(E_n, \lambda_n) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (3.32)$$

otteniamo l'approssimazione vicino alla separatrice ($h = E - E_{sep}$)

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} &= \lambda_n - \frac{\epsilon}{a(\lambda_n)} \ln |h_n| + \epsilon b(\lambda_n) \\ h_{n+1} &= h_n - \epsilon \Theta(\lambda_n) \end{aligned} \quad (3.33)$$

dove $\Theta = \frac{d\Sigma}{d\lambda}$. Una rozza stima della soglia di non-integrabilità per la mappa (3.33) è data da

$$\frac{\epsilon}{a(\lambda)} \ln |h| \quad \implies \quad |h| \propto \exp\left(-\frac{a}{\epsilon}\right)$$

Per studiare i fenomeni di attraversamento della separatrice, dobbiamo incollare diverse mappe tempo-energia corrispondenti alle differenti regioni dello spazio delle fasi, ma uno studio più accurato dell'invariante adiabatico calcolato utilizzando la relazione $\partial I / \partial E = T(E, \lambda) / 2\pi$ e l'espansione asintotica del periodo nei pressi della separatrice fornisce una stima dell'errore

$$\epsilon^2 \frac{\partial^2 I}{\partial E^2} \simeq \epsilon^2 / |h|$$

Pertanto quando $|h| = O(\epsilon)$ l'errore sulla conservazione dell'invariante adiabatico tra due punti di attraversamento risulta di ordine $O(\epsilon)$ e non può essere trascurato.

3.3 Intrappolamento nella risonanza e cambiamento dell'invariante adiabatico nell'attraversamento della curva separatrice

Applichiamo la teoria di Neishtadt [1] per calcolare la variazione dell'invariante adiabatico quando avvengono fenomeni di attraversamento della separatrice. Siamo interessati a

descrivere l'evoluzione di un ensemble di particelle distribuite inizialmente nella regione I dello spazio delle fasi quando a causa della lenta modulazione le aree delle regioni II e III aumentano (fig. 3.1).

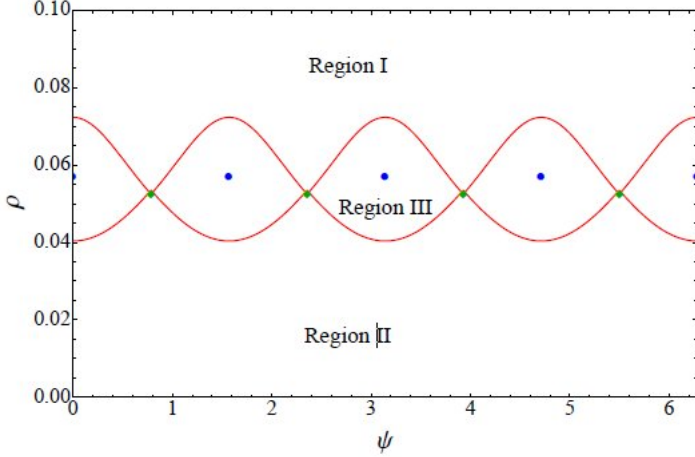


Figura 3.1: Regioni

Seguendo le considerazioni di Neishtadt, analizziamo l'area dello spazio delle fasi $\Sigma_{II,III}(\lambda)$ racchiusa dalle curve separatrici nelle regioni II e III e definiamo i due oggetti:

$$\Sigma_I = \Sigma_{II} + \Sigma_{III} \quad \frac{d\Sigma_i}{d\lambda} = \Theta_i(\lambda) > 0 \quad i = I, II, III$$

Introduciamo il parametri di attraversamento λ_* per ogni particella in accordo con l'equazione $\Sigma_I(\lambda_*) = 2\pi J_-$, dove J_- è il valore iniziale dell'invariante J nella regione I . L'esistenza di un parametro di attraversamento comporta che le particelle possano entrare nelle regioni II o III attraversando la separatrice durante la modulazione. Quando la teoria di invarianza adiabatica è applicabile, è possibile provare che la probabilità di transizione dalla regione I alle regioni II o III è data rispettivamente da:

$$P_{I \rightarrow II} = \frac{\Theta_{II}}{\Theta_I} \quad P_{I \rightarrow III} = \frac{\Theta_{III}}{\Theta_I}$$

Il fenomeno di attraversamento della separatrice viene descritto in termini di probabilità utilizzando le variabili casuali

$$\xi_I = \frac{|h_0^I|}{\epsilon \Theta_I} \quad \xi_{II} = \frac{|h_0^{II}|}{\epsilon \Theta_{II}} \quad (3.34)$$

dove h_0^I e h_0^{II} sono rispettivamente le energie delle orbite calcolate utilizzando l'Hamiltoniana interpolante, sulle sezioni di Poincaré dello spazio delle fasi appena prima di entrare nella regione III o nell'istante successivo in cui entrano nella regione II.

Le variabili ξ sono uniformemente distribuite nell'intervallo $[0,1]$ e sono sensibili alla condizione iniziale sull'azione J_- . La teoria si applica correttamente solo quando $k\sqrt{\epsilon} < \xi < 1 - k\sqrt{\epsilon}$ che permette una stima della percentuale di particelle la cui evoluzione non è descritta dalla teoria adiabatica. Per una generica transizione $I \rightarrow III$ possiamo stimare:

$$2\pi J_+ - \Sigma_{III}(\lambda_*) = -\epsilon a \Theta_{III} \left(\xi_I - \frac{1}{2} \right) \left[\ln \epsilon \Theta_I - \frac{2\Theta_I}{\Theta_{III}} \ln \epsilon |\Theta_{III}| \right] + O(\epsilon) \quad (3.35)$$

dove

- J_+ è il valore finale IAI nella regione III;
- a è il logaritmo dell'autovalore della mappa congelata nei punti fissi iperbolici.

In maniera analoga la transizione $I \rightarrow II$ fornisce un cambiamento dell'IAI:

$$2\pi J_+ - \Sigma_{II}(\lambda_*) = a\epsilon(1 - \xi_{II})(\Theta_{II} \ln \epsilon |\Theta_I| + \Theta_I \ln \epsilon |\Theta_{II}|) + O(\epsilon) \quad (3.36)$$

Considerando la struttura dello spazio delle fasi dell'Hamiltoniana congelata, assumiamo che quando il parametro λ venga modulato, la regione di risonanza si allarghi e si sposti verso l'esterno. Come conseguenza, le aree delle regioni II e III aumentano mentre un'orbita inizialmente nella regione I può essere catturata nelle regioni II o III quando la teoria adiabatica risulta applicata. La dinamica complessiva di una singola orbita viene descritta come segue: un'orbita inizialmente nella regione I tende a conservare il suo valore IAI durante la lenta modulazione di λ così da raggiunge la separatrice quando $\lambda = \lambda_*$, allora risulta possibile descrivere il fenomeno di attraversamento della separatrice se l'orbita non è troppo vicina al punto iperbolico (condizione sulle variabili ξ) trascurando termini di ordine $O(\epsilon^{3/2})$.

Al fine di poter applicare una simile descrizioni richiediamo alcune condizioni. Per l'Hamiltoniana congelata definiamo il parametro adiabatico ε come il rapporto tra ϵ e la radice delle frequenze ω_i^2 nei punti fissi ellittici interni alla regione di risonanza. Quando il parametro adiabatico ε è $O(1)$ non esiste alcun invariante in quanto le stime appena fatte (3.35 e 3.36) risultano ingiustificabili. Di conseguenza, perdendo il controllo sull'invariante adiabatico al momento di attraversamento della separatrice, l'intrappolamento

nella risonanza non risulta possibile. Abbiamo la seguente condizione come stima per l'intrappolamento nella risonanza

$$\frac{\epsilon^2}{|\Delta E|} \simeq \epsilon^{3/2} \quad (3.37)$$

dove ΔE è la variazione dell'energia nelle regioni dello spazio delle fasi.

Nel caso in questione la differenza di energia tra l'origine e la separatrice è $\Delta E \simeq \rho_0^{q/2}$ dove $\rho_0(\lambda)$ è la distanza dei punti iperbolici dall'origine e q è l'ordine della risonanza, in modo tale che la condizione diventi

$$\epsilon^{1/2} \simeq \rho_0^{q/2} \quad \Rightarrow \quad \rho_0 \simeq \epsilon^{1/q} \quad (3.38)$$

Tale relazione fornisce una legge di scala per la distanza minima ρ_0 detta *raggio di intrappolamento* dei punti iperbolici alla quale i fenomeni di intrappolamento avvengono. Nel caso in cui $\Theta_{III} > 0$ l'efficienza di intrappolamento viene data da:

$$c(\lambda) = \frac{\Theta_{III}(\lambda)}{\Theta_I(\lambda)} (1 - 2k\sqrt{\epsilon}) \quad (3.39)$$

Sia $n(\rho)$ la densità radiale dell'ensemble di particelle considerato, il numero totale degli oggetti intrappolati sarà dato da:

$$N = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} n(\rho(\lambda)) \frac{\Theta_3(\lambda)}{\Theta_1(\lambda)} (1 - 2k \frac{\sqrt{\epsilon}}{\omega(\lambda)}) d\lambda \quad (3.40)$$

e abbiamo la relazione

$$N = c_0 - c_1 \sqrt{\epsilon} = c_0 - c_1 \sqrt{\frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{T}} \quad (3.41)$$

dove $T = |\lambda_1 - \lambda_0|/\epsilon$ è la durata della modulazione.

Questo fenomeno avviene anche per le particelle che entrano nella regione II dalla I: una frazione di queste particelle proporzionale a

$$\frac{\Theta_2}{\Theta_1} (1 - 2k\sqrt{\epsilon})$$

modifica l'IAI secondo la teoria, mentre altre particelle posso essere scatterate nello spazio delle fasi.

3.4 Sistemi pendulum-like

Applichiamo quanto detto al caso di un pendolo per cui

$$H = \frac{(p - \delta(\lambda))^2}{2} - k(\lambda) \cos q \quad (3.42)$$

dove entrambi i parametri $\delta(\lambda)$ e $k(\lambda)$ vengono variati. L'area della regione di risonanza per l'Hamiltoniana congelata può essere esplicitamente calcolata come [8]

$$\Sigma(\lambda) = 16\sqrt{k(\lambda)}$$

e la variabile di azione è definita come [3]

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-q_*}^{q_*} \sqrt{2(E + k(\lambda) \cos q)} dq + \frac{q_*}{\pi} \delta(\lambda)$$

A di fuori della regione di risonanza possiamo scegliere $q = \pi$ come la sezione in cui calcolare la mappa tempo-energia (ciò equivale a scegliere i punti alla distanza minima dalla separatrice), mentre all'interno dell'isola di risonanza scegliamo $p = \delta(\lambda)$. Consideriamo $\Theta_{II} \rightarrow -\Theta_{II}$ e la relazione $\Theta_{III} = \Theta_I + \Theta_{II}$. Ipotizziamo inoltre che l'energia sia positiva all'interno delle regioni I e II, mentre sia negativa nella regione di risonanza. Per motivi di simmetria abbiamo $d_1 = -d_2$ e $b_1 = b_2 = b_3/2 = b$ per il sistema considerato. Il cambiamento dell'invariante adiabatico per la transizione $I \rightarrow III$ porta

$$\begin{aligned} 2\pi J_+ - \Sigma_3(\lambda_*) &= -\epsilon a \Theta_3 \left(\xi_1 - 1/2 \right) \left[\ln \epsilon |\Theta_1| - \frac{2\Theta_1}{\Theta_3} \ln \epsilon \Theta_3 \right] \\ &+ \epsilon a \Theta_3 \left[\ln \frac{(2\pi)^{3/2}}{\Gamma(\xi_1) \Gamma(\frac{\Theta_1}{\Theta_3} (1 - \xi_1)) \Gamma(1 - \frac{\Theta_1}{\Theta_3} \xi_1)} \right] \\ &+ \epsilon b \left(\frac{1}{2} - \xi_1 \right) (\Theta_2 - \Theta_1) + \epsilon d \end{aligned} \quad (3.43)$$

mentre per la transizione $I \rightarrow II$

$$\begin{aligned} 2\pi J_+ - \Sigma_2(\lambda_*) &= -a\epsilon(1 - \xi_2)(\Theta_1 \ln \epsilon |\Theta_2| - \Theta_2 \ln \epsilon |\Theta_1|) \\ &- a\epsilon \Theta_2 \ln \frac{2\pi(1 - \xi_2)\sqrt{\Theta_1}}{\Gamma(\xi_2) \Gamma(\frac{|\Theta_3|}{\Theta_2} + \frac{|\Theta_1|}{\Theta_2} \xi_2) \sqrt{\Theta_2}} \\ &+ \epsilon b(1 - \xi_2)(\Theta_1 - \Theta_2) + \epsilon d \left(1 + \frac{\Theta_2}{\Theta_1} \right) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Considerando il caso particolare $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3/2 = \Theta$ (per esempio l'isola di risonanza aumenta senza muoversi nello spazio), solo la transizione $I \rightarrow III$ è possibile e si ha:

$$\begin{aligned}
2\pi J_+ - \Sigma_3(\lambda_*) &= 2\epsilon a \Theta (\xi_1 - 1/2) \ln 2 + 2\epsilon a \Theta \left[\ln \frac{(2\pi)^{3/2}}{\Gamma(\xi_1)\Gamma(1-\xi_1)2^{\xi_1}\sqrt{\pi}} \right] + \epsilon d \\
&= 2\epsilon a \Theta (\xi_1 - 1/2) \ln 2 + 2\epsilon a \Theta \left[\frac{(2\pi)^{3/2} \sin \pi \xi_1}{2^{\xi_1} \pi^{3/2}} \right] + \epsilon d \\
&= 2\epsilon a \Theta \ln(2 \sin \pi \xi_1) + \epsilon d
\end{aligned} \tag{3.45}$$

3.5 Intrappolamento di un ensemble di particelle

Se il parametro adiabatico non è troppo piccolo, allora non vi è la possibilità che avvenga l'intrappolamento e l'isola modifica la distribuzione di particelle nello spazio delle fasi. Si possono comunque trovare particelle all'interno della regione di risonanza: il problema è che non sono intrappolate. La teoria si basa sulla conservazione dell'invariante adiabatico migliorato, il cui errore è di ordine $\epsilon^2/|h|$, e i risultati valgono se tale quantità è di ordine $\epsilon^{3/2}$, in caso contrario si ha la perdita della conservazione dell'IAI nell'attraversamento della separatrice.

Da un lato le particelle che sono presenti all'interno della regione di risonanza vi rimangono intrappolate, dall'altro lato il fenomeno di intrappolamento avviene con una probabilità di $\frac{\Theta_{III}}{\Theta_I}$. Il contributo dominante è di ordine $\Theta\epsilon \ln \epsilon$ e deve essere piccolo paragonato all'area di risonanza affinché avvenga il fenomeno di intrappolamento efficientemente. Inoltre tale stima non vale per particelle il cui parametro $\xi = |h/\epsilon\Theta| \in [0, 1]$, correlato all'ultimo valore energetico prima dell'intrappolamento, sia troppo piccolo $\leq k\epsilon^{3/2}$ oppure troppo grande $\geq 1 - k\epsilon^{3/2}$: tali particelle non saranno intrappolate nella regione di risonanza poiché l'invariante adiabatico può cambiare di una quantità maggiore di $O(\epsilon \ln \epsilon)$. In ogni caso l'efficienza di intrappolamento dipende dall'errore e abbiamo

$$\frac{\epsilon^2}{|h|} \simeq \epsilon^{3/2}$$

Nel caso di una Hamiltoniana risonante $h \simeq \rho_0^{q/2}$ in cui q è il grado di risonanza e ρ_0 è il raggio di risonanza:

$$\epsilon^{1/2} \simeq \rho_0^{q/2} \quad \Rightarrow \quad \rho_0 \simeq \epsilon^{1/q} \tag{3.46}$$

Tale equazione fornisce una legge di riscaldamento per il raggio di intrappolamento.

Nel caso in cui $\Theta_{III} > 0$ l'efficienza del (*raggio di intrappolamento*) è data da:

$$c(\lambda) = \frac{\Theta_{III}(\lambda)}{\Theta_I(\lambda)}(1 - 2k\sqrt{\varepsilon}) \quad (3.47)$$

con k opportuna costante. Sia $n(\rho)$ la densità radiale dell'ensemble di particelle considerato, il numero totale delle particelle intrappolate sarà dato da:

$$N = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} n(\rho(\lambda)) \frac{\Theta_{III}(\lambda)}{\Theta_I(\lambda)} (1 - 2k \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\omega(\lambda)}) d\lambda \quad (3.48)$$

e abbiamo la relazione

$$N = c_0 - c_1\sqrt{\varepsilon} = c_o - c_1\sqrt{\frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{T}} \quad (3.49)$$

dove $T = |\lambda_1 - \lambda_0|/\varepsilon$ rappresenta il tempo di modulazione.

Questo fenomeno avviene anche per le particelle che entrano nella regione II dalla zona I: una frazione di queste particelle proporzionale a

$$\frac{\Theta_2}{\Theta_1}(1 - 2k\sqrt{\varepsilon})$$

modifica l'IAI secondo la teoria, mentre altre particelle possono essere scatterate nello spazio delle fasi.

Capitolo 4

Simulazioni

In questo capitolo studiamo il processo di evoluzione di un fascio di particelle in un acceleratore circolare simulando tale fenomeno al computer. Quello che verrà fatto sarà di far evolvere una distribuzione gaussiana di particelle nello spazio delle fasi (x, p_x) per una determinata configurazione degli elementi della macchina. In particolare verranno utilizzati unicamente elementi sestupolari.

Saranno processate nello specifico 5×10^3 particelle.

Viene studiata nello specifico la mappa che descrive l'evoluzione del fascio all'interno dell'acceleratore quando il tune della dinamica lineare viene modulato secondo un'assegnata funzione del numero di iterazioni.

4.1 Processo di evoluzione

Ricordiamo la forma della mappa di H enon (2.11) e riscriviamola nella seguente forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\omega) \begin{pmatrix} x \\ p + x^2 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

dove ω rappresenta la frequenza della matrice di rotazione considerata, il cui valore viene calcolato in base a quello assunto da ν che viene variato durante il processo di cattura delle particelle nelle isole.

Nelle simulazioni effettuate viene variato unicamente il *tune* della macchina, lasciando invariati gli altri parametri.

Il tune della macchina viene variato nell'intervallo compreso tra 0.195 e 0.205 come una funzione del numero di iterazioni secondo la formula:

$$\frac{\omega}{2\pi} = 0.195 + \Delta\omega\left(\frac{n}{M}\right) \quad (4.2)$$

in cui n rappresenta il numero di iterazioni mentre M è il numero di iterazioni totale. Fissando $\Delta\omega = 0.01$ risulta chiaro che il valore massimo che può assumere il tune è:

$$\frac{\omega}{2\pi} = 0.205 \quad (4.3)$$

Arrivato a questo punto invertiamo il segno della modulazione al fine di ritornare al valore del tune iniziale applicando la seguente equazione:

$$\frac{\omega}{2\pi} = 0.205 - \Delta\omega\left(\frac{n}{M}\right). \quad (4.4)$$

Ricordiamo inoltre che le particelle sono inizialmente distribuite gaussianamente attorno all'origine e imponiamo per tutte le simulazioni fatte che la deviazione standard σ sia fissata a 0.1.

Successivamente viene introdotto per la medesima distribuzione un parametro rappresentante il rumore in modo tale per cui la distribuzione evolva come:

$$\frac{\omega}{2\pi} = 0.195 + \Delta\omega\left(\frac{n}{M}\right) + \eta(n). \quad (4.5)$$

L'evoluzione della distribuzione delle particelle viene rappresentata statisticamente mediante l'introduzione di istogrammi con 25 bin. Per poter quantificare la differenza tra le rappresentazioni si è introdotta la seguente metrica :

$$\sqrt{\sum_{i,j} (I_i - I_j)^2} \quad (4.6)$$

e si sono ottenuti i risultati presentati nel prossimo paragrafo.

4.2 Risultati

Osserviamo innanzitutto il meccanismo di formazione delle isole per mezzo della figura sottostante:

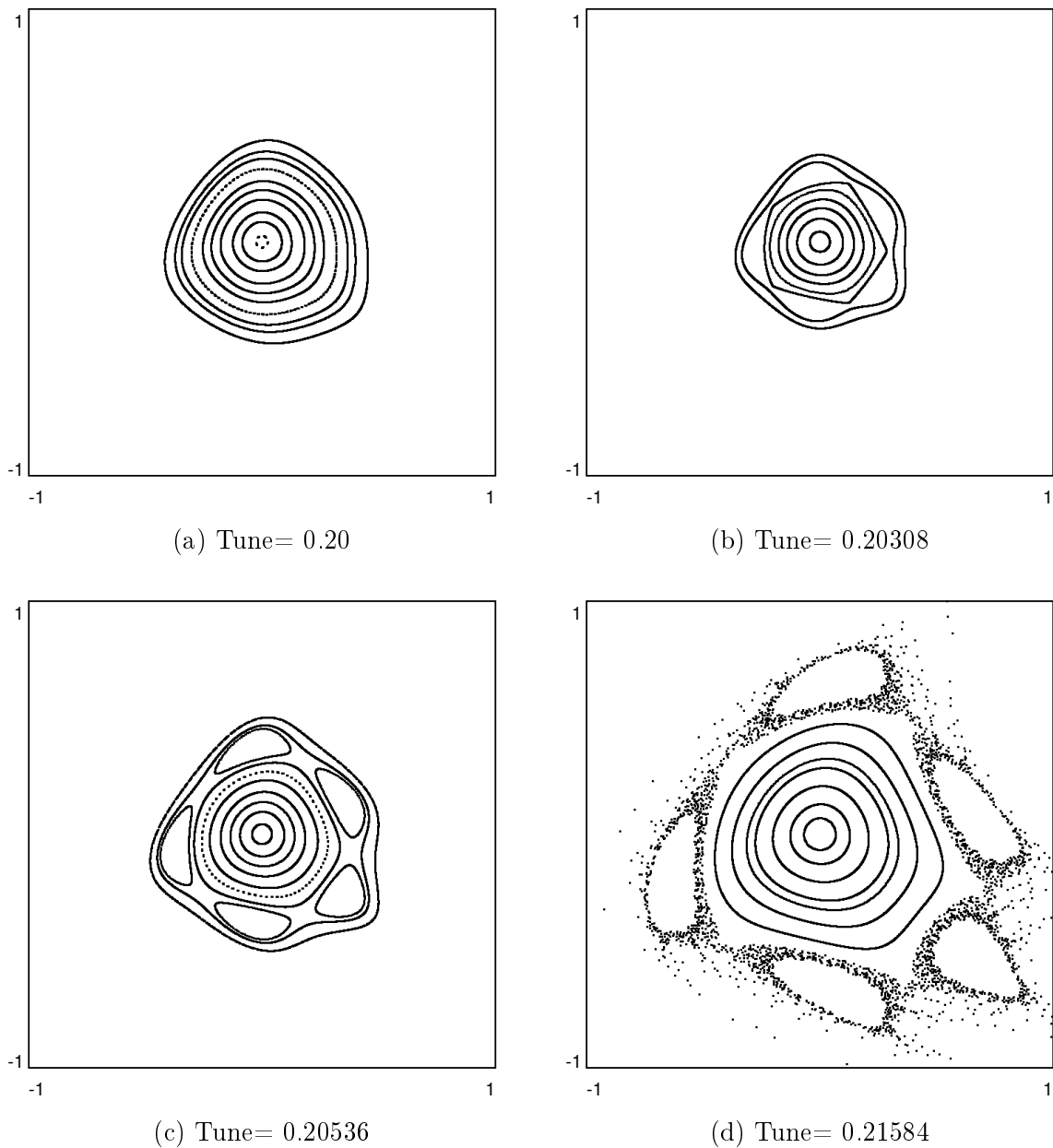


Figura 4.1: Ritratti di fase per la dinamica per diversi valori del tune ν . In particolare si osserva la nascita delle isole di risonanza $1/5$ e di come si allontanino dal centro per un valore di ν che si allontana da $1/5$.

Sulle ascisse è riportata la variabile x , mentre sulle ordinate la variabile dinamica p

Sono state analizzate tre situazioni nelle quali si è trattato sia il caso in cui il tune

sia soggetto o no al rumore. Esse sono

1. una popolazione composta da 5000 particelle distribuite secondo una gaussiana con una deviazione standard $\sigma = 0.1$ e iterata 10000 volte;
2. una popolazione composta da 5000 particelle distribuite secondo una gaussiana con una deviazione standard $\sigma = 0.1$ e iterata 50000 volte;
3. una popolazione composta da 5000 particelle distribuite secondo una gaussiana con una deviazione standard $\sigma = 0.1$ e iterata 100000 volte;

In tutti i grafici presentati delle distribuzioni consideriamo come variabili:

- sulla ascissa \mathbf{x} ,
- sulla ordinata \mathbf{p}_x , indicato semplicemente come \mathbf{p} .

Caso 1

Senza Rumore Presentiamo nel grafico in Fig. (4.2.a) la distribuzione iniziale di particelle e in figura (4.2.b) la distribuzione nel momento in cui il tune viene a raggiungere il valore di 0.205.

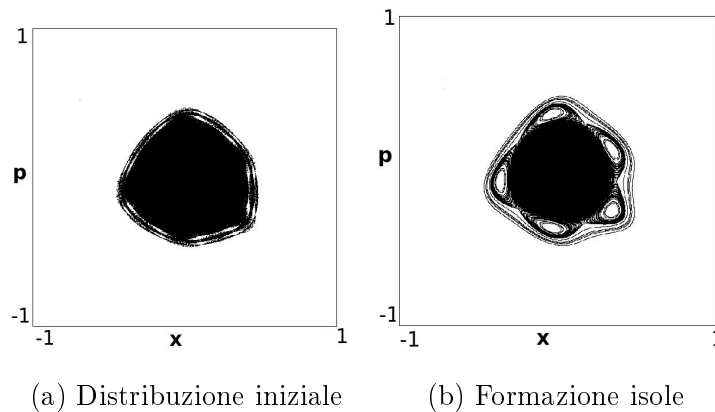
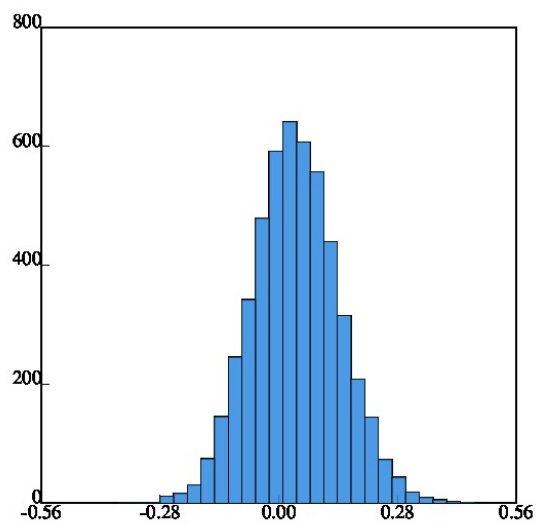
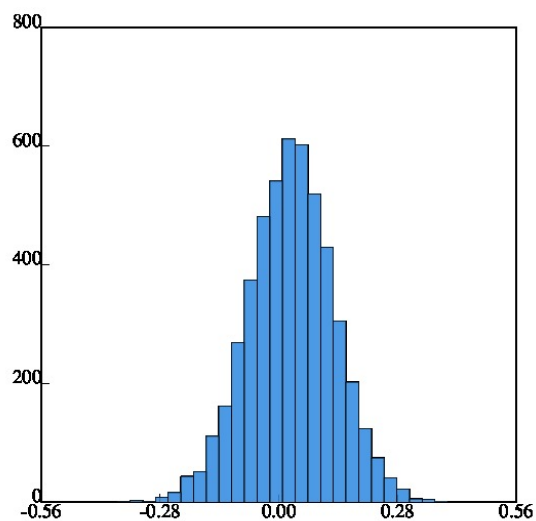


Figura 4.2: Evoluzione della distribuzione

Riportiamo inoltre i due istogrammi ottenuti:



(a) Distribuzione iniziale



(b) Distribuzione finale

Figura 4.3: Evoluzione della distribuzione

Dal confronto si ottiene:

$$\sqrt{\sum_{i,j} (I_i - I_j)^2} = 0.195623 \quad (4.7)$$

Con Rumore distribuito uniformemente Presentiamo nel grafico in Fig. (4.4.a) la distribuzione iniziale di particelle e in figura (4.4.b) la distribuzione nel momento in cui il tune viene a raggiungere il valore di 0.205.

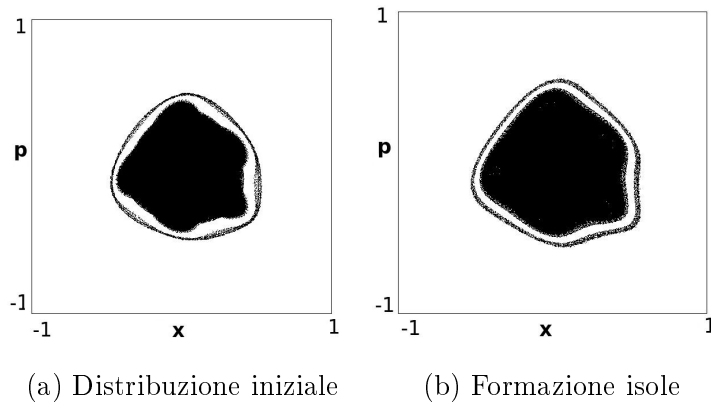
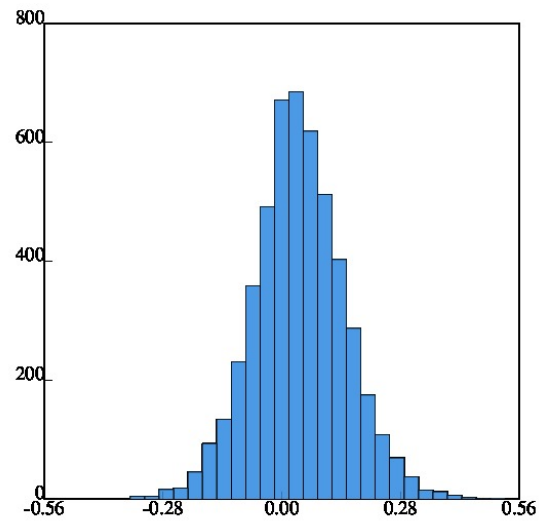
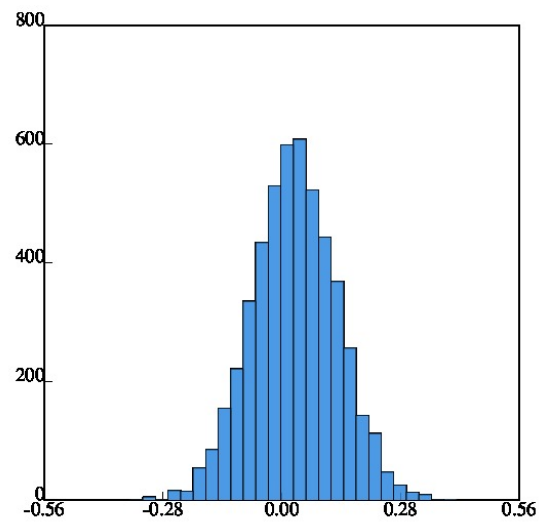


Figura 4.4: Evoluzione della distribuzione

Riportiamo inoltre i due istogrammi ottenuti:



(a) Distribuzione iniziale



(b) Distribuzione finale

Figura 4.5: Evoluzione della distribuzione

Dal confronto si ottiene:

$$\sqrt{\sum_{i,j} (I_i - I_j)^2} = 0.648502 \quad (4.8)$$

Con rumore distribuito gaussianamente Presentiamo nel grafico in Fig. (4.6.a) la distribuzione iniziale di particelle e in figura (4.6.b) la distribuzione nel momento in cui il tune viene a raggiungere il valore di 0.205.

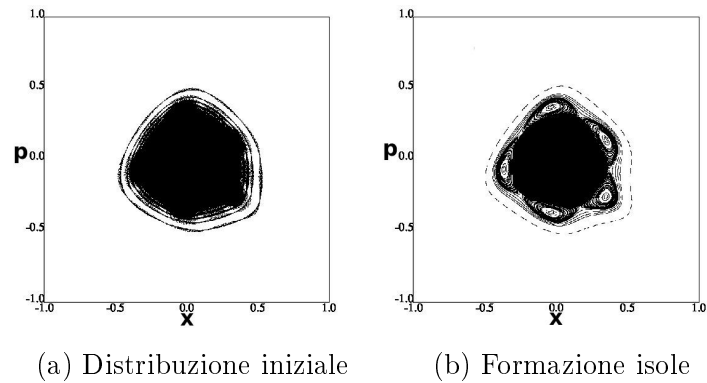
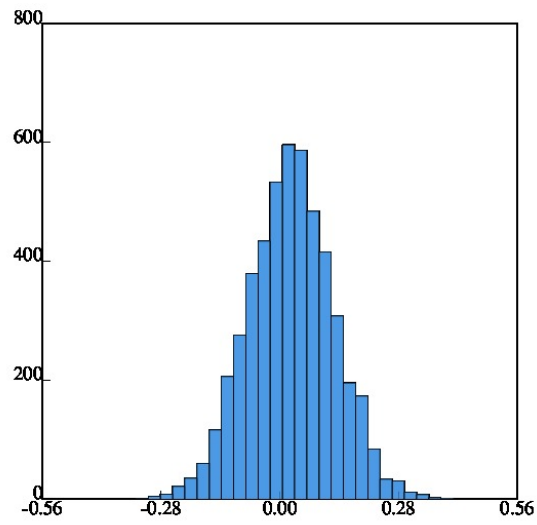
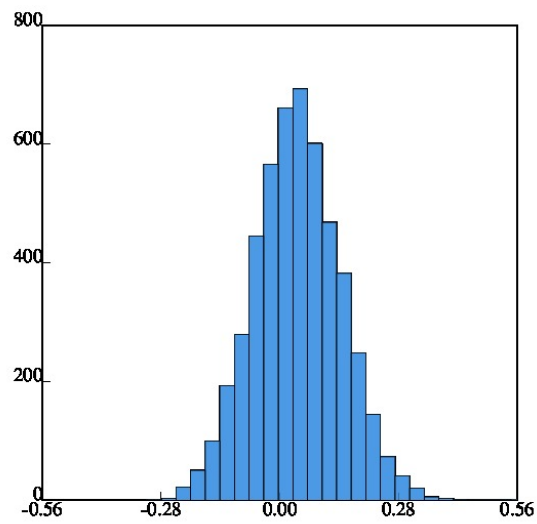


Figura 4.6: Evoluzione della distribuzione

Riportiamo inoltre i due istogrammi ottenuti:



(a) Distribuzione iniziale



(b) Distribuzione finale

Figura 4.7: Evoluzione della distribuzione

Dal confronto si ottiene:

$$\sqrt{\sum_{i,j} (I_i - I_j)^2} = 1.02486 \quad (4.9)$$

Caso 2

Senza Rumore Presentiamo nel grafico in Fig. (4.8.a) la distribuzione iniziale di particelle e in figura (4.8.b) la distribuzione nel momento in cui il tune viene a raggiungere il valore di 0.205.

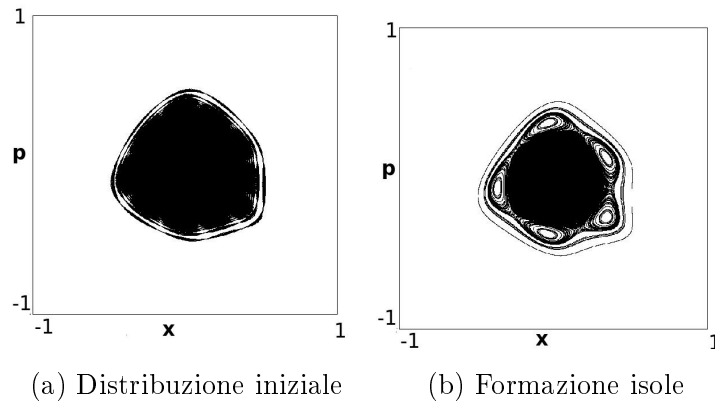
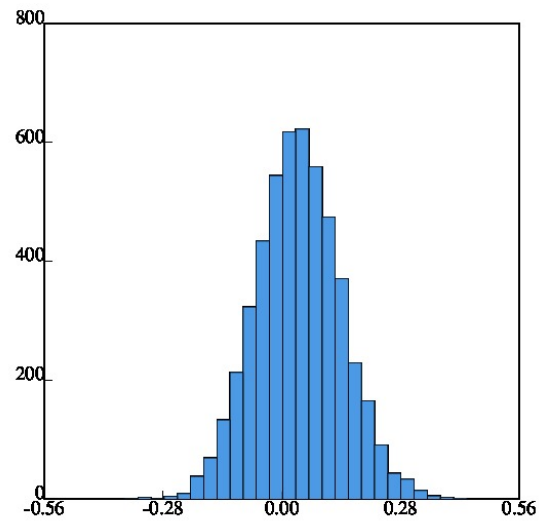
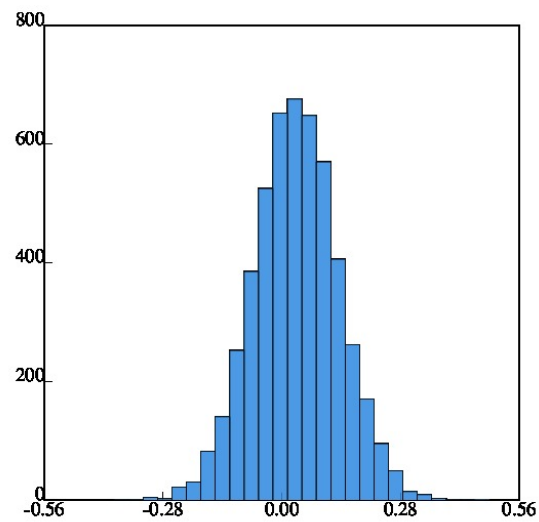


Figura 4.8: Evoluzione della distribuzione

Riportiamo inoltre i due istogrammi ottenuti:



(a) Distribuzione iniziale



(b) Distribuzione finale

Figura 4.9: Evoluzione della distribuzione

Dal confronto si ottiene:

$$\sqrt{\sum_{i,j} (I_i - I_j)^2} = 0.215248 \quad (4.10)$$

Con Rumore distribuito uniformemente Presentiamo nel grafico in Fig. (4.10.a) la distribuzione iniziale di particelle e in figura (4.10.b) la distribuzione nel momento in cui il tune viene a raggiungere il valore di 0.205.

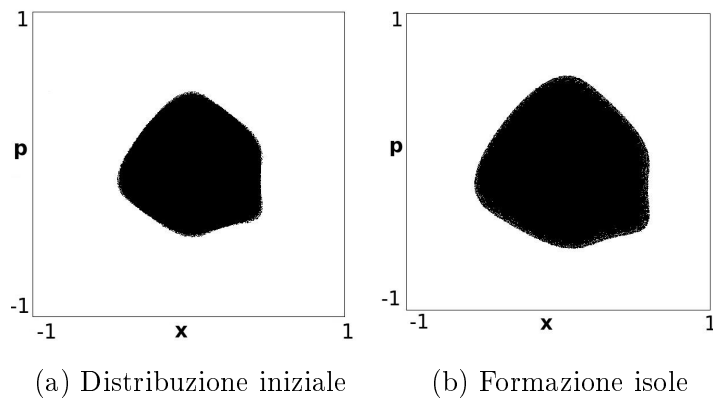
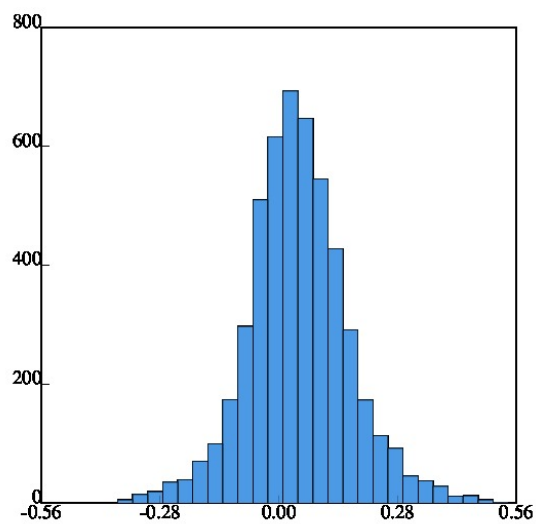
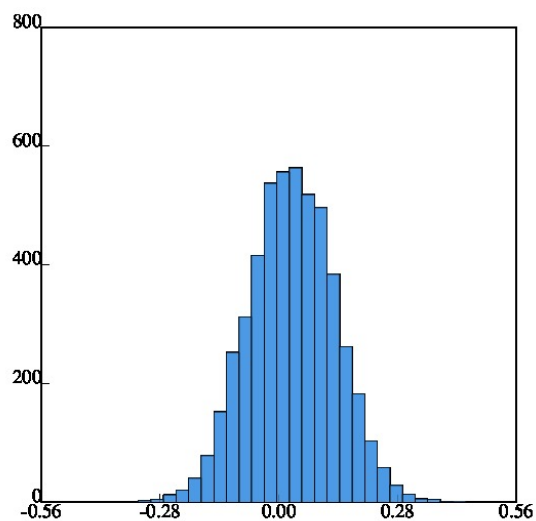


Figura 4.10: Evoluzione della distribuzione

Riportiamo inoltre i due istogrammi ottenuti:



(a) Distribuzione iniziale



(b) Distribuzione finale

Figura 4.11: Evoluzione della distribuzione

Dal confronto si ottiene:

$$\sqrt{\sum_{i,j} (I_i - I_j)^2} = 0.86745 \quad (4.11)$$

Con rumore distribuito gaussianamente Presentiamo nel grafico in Fig. (4.12.a) la distribuzione iniziale di particelle e in figura (4.12.b) la distribuzione nel momento in cui il tune viene a raggiungere il valore di 0.205.

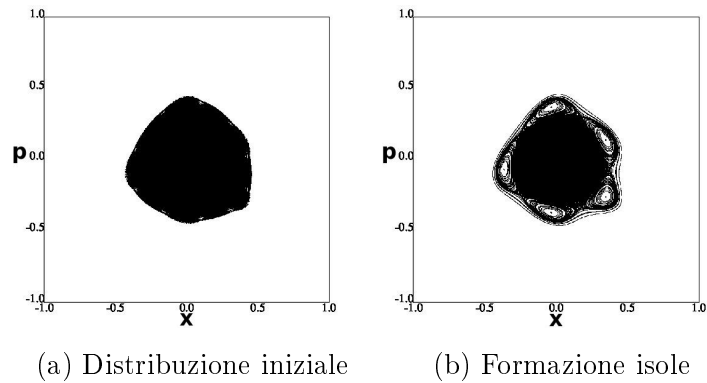
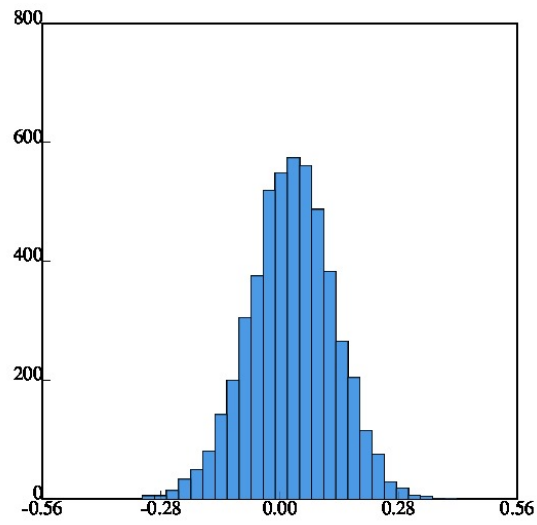
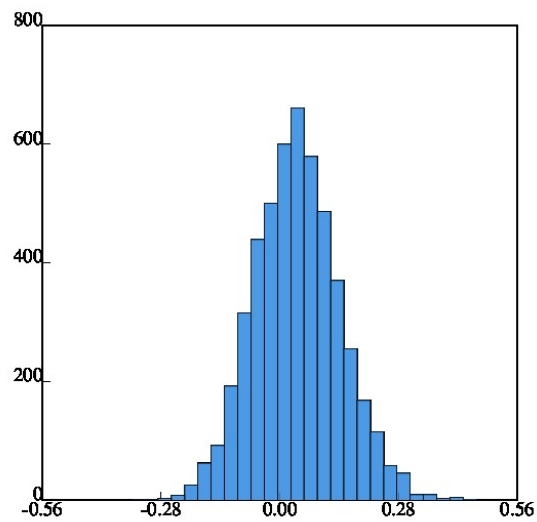


Figura 4.12: Evoluzione della distribuzione

Riportiamo inoltre i due istogrammi ottenuti:



(a) Distribuzione iniziale



(b) Distribuzione finale

Figura 4.13: Evoluzione della distribuzione

Dal confronto si ottiene:

$$\sqrt{\sum_{i,j} (I_i - I_j)^2} = 0.49868 \quad (4.12)$$

Caso 3

Senza Rumore Presentiamo nel grafico in Fig. (4.14.a) la distribuzione iniziale di particelle e in figura (4.14.b) la distribuzione nel momento in cui il tune viene a raggiungere il valore di 0.205.

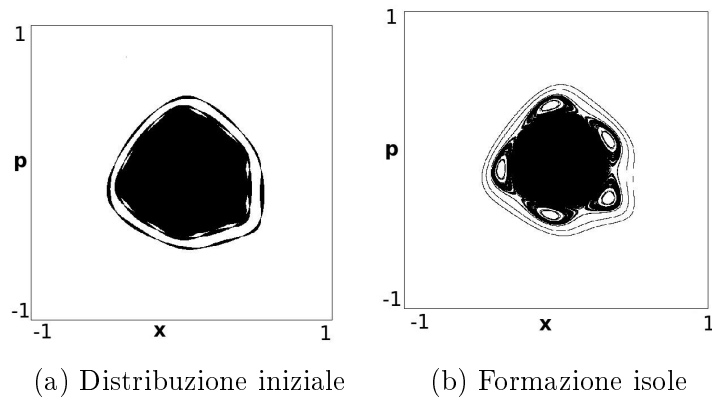
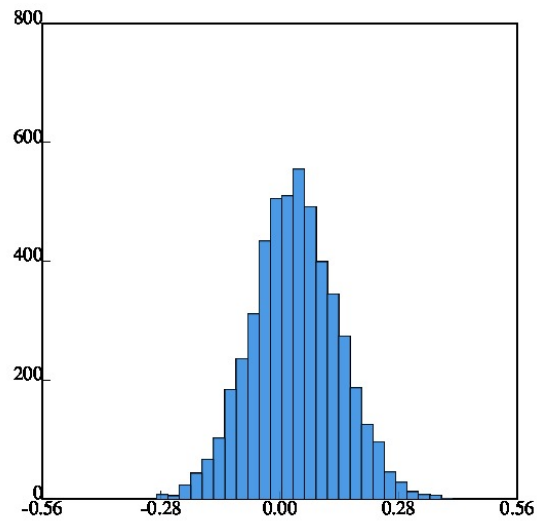
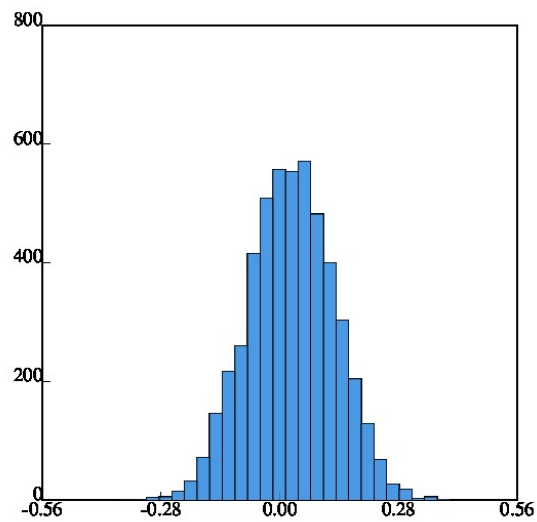


Figura 4.14: Evoluzione della distribuzione

Riportiamo inoltre i due istogrammi ottenuti:



(a) Distribuzione iniziale



(b) Distribuzione finale

Figura 4.15: Evoluzione della distribuzione

Dal confronto si ottiene:

$$\sqrt{\sum_{i,j} (I_i - I_j)^2} = 0.185766 \quad (4.13)$$

Con Rumore distribuito uniformemente Presentiamo nel grafico in Fig. (4.16.a) la distribuzione iniziale di particelle e in figura (4.16.b) la distribuzione nel momento in cui il tune viene a raggiungere il valore di 0.205.

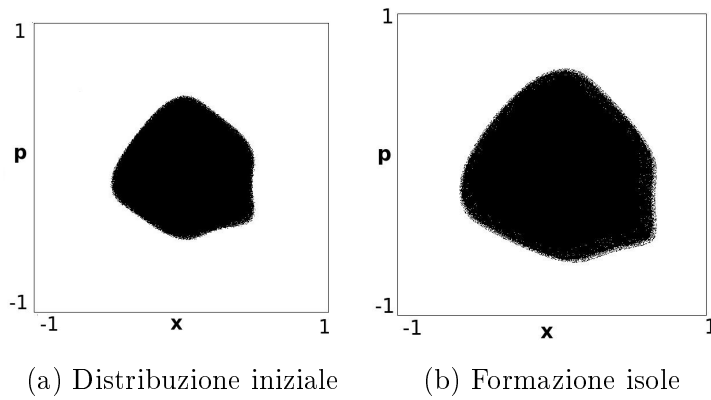
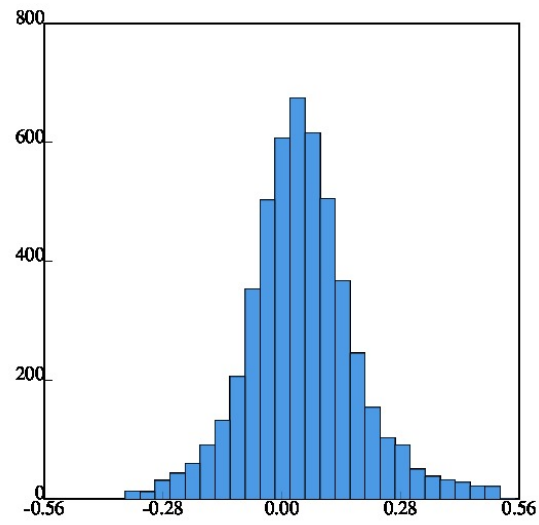
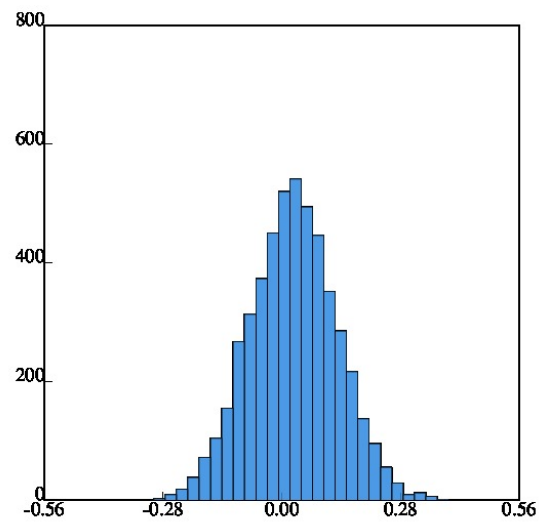


Figura 4.16: Evoluzione della distribuzione

Riportiamo inoltre i due istogrammi ottenuti:



(a) Distribuzione iniziale



(b) Distribuzione finale

Figura 4.17: Evoluzione della distribuzione

Dal confronto si ottiene:

$$\sqrt{\sum_{i,j} (I_i - I_j)^2} = 0.435522 \quad (4.14)$$

Con rumore distribuito gaussianamente Presentiamo nel grafico in Fig. (4.18.a) la distribuzione iniziale di particelle e in figura (4.18.b) la distribuzione nel momento in cui il tune viene a raggiungere il valore di 0.205.

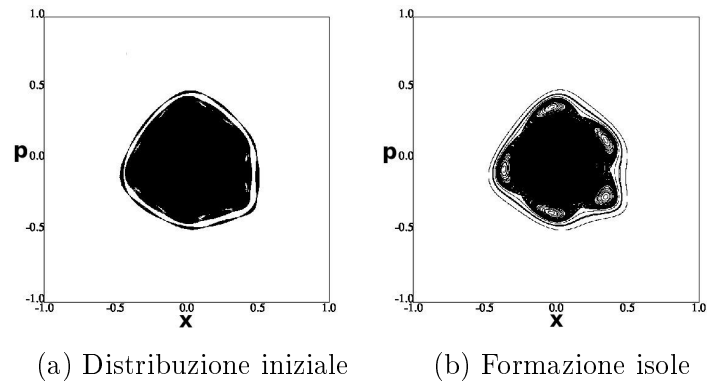
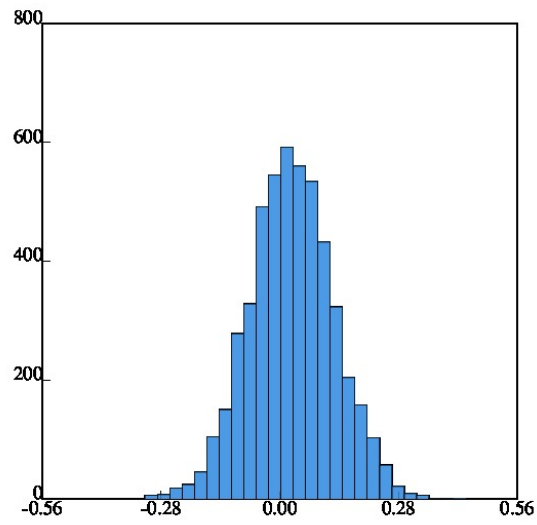
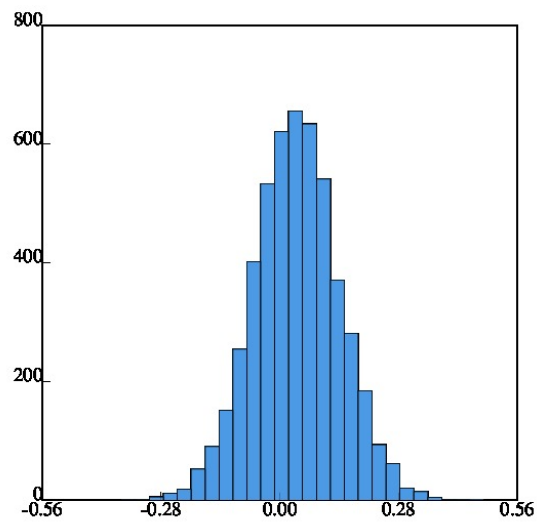


Figura 4.18: Evoluzione della distribuzione

Riportiamo inoltre i due istogrammi ottenuti:



(a) Distribuzione iniziale



(b) Distribuzione finale

Figura 4.19: Evoluzione della distribuzione

Dal confronto si ottiene:

$$\sqrt{\sum_{i,j} (I_i - I_j)^2} = 0.206227 \quad (4.15)$$

Conclusioni

Durante il lavoro di tesi è stato possibile verificare alcune proprietà di un ensemble di particelle poste all'interno di un acceleratore circolare. Si è considerato il caso del moto betatronico e mediante l'utilizzo della mappa di Hénon modulata è stato possibile studiare il comportamento di un fascio parassiale.

Dalle simulazioni effettuate si osserva come il comportamento della distribuzione si diversifichi in maniera evidente nel caso in cui sia presente un rumore all'interno dell'acceleratore. In particolare si può notare come nel caso in cui il numero di iterazioni sia fissato, vi sia una visibile differenza tra gli istogrammi rappresentanti la distribuzione delle particelle all'inizio del processo e alla fine. Aumentando il numero delle iterazioni, tale differenza si assottiglia in maniera maggiore in accordo con le previsioni fatte dalla teoria adiabatica.

Risulta quindi possibile identificare nel *rumore* uno dei ragionevoli parametri causante la non invertibilità del processo di evoluzione del fascio, ma sarebbe forviante, ed erroneo, ipotizzare che tale rumore ne sia l'unica ragione, in quanto permangono alcune differenze, seppure piccole, anche nelle simulazioni in cui tale oggetto non è presente.

Bibliografia

- [1] A.I. Neishtadt, 'Change in adiabatic invariant at separatrix', *Fiz. Plazmy*, 12, 992-1001, 1986.
- [2] M.Hénon, 'Numerical study of quadratic area preserving mappings', *Q.Appl. Math.* 27 (1969) 291-312.
- [3] A. Bazzani, G. Servizi, E. Todesco and G. Turchetti, 'A normal form approach to the theory of nonlinear betatronic motion, *CERN, Yellow Report*,1, pp 11-20.
- [4] H. Wiedemann, 'Particle accelerator Physics' I. Springer.
- [5] K. Steffen, 'Basic course in accelerator optics', in *CERN 85-19(1985)* pp. 25-63.
- [6] V.I. Arnold, 'Metodi matematici della meccanica classica', I edizione: ottobre 1979
- [7] A. Bazzani, 'Notes on Adiabatic Theory'
- [8] A. Bazzani, C. Frye, M. Giovannozzi, C. Hernalsteens, 'Analysis of adiabatic trapping for quasi-integrable area-preserving maps.